

# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES  
Google Livres

**EUCLIDIS**  
**ELEMENTA**

**GRAECE ET LATINE.**

---

**COMMENTARIIS INSTRUCTA**

**EDIDERUNT**

**IOANNES GUILIELMUS CAMERER**

**ET**

**CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.**

---

**BEROLINI**  
**SUMTIBUS G. REIMERI**  
**MDCCCXXIV.**

EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

GRAECE ET LATINE

COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECEN-  
TIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI  
MAXIME ILLUSTRATI.

EDIDIT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

GYMNASII STUTTGARDIANI RECTOR.

---

TOM. I. COMPLECTENS LIBR. I—III.

---

ECUM X. TABULIS.

---

BEROLINI  
SUMTIBUS G. REIMERI  
MDCCCXXIV.

QA  
31  
E88  
S72  
C2



Quum unanimi fere omnium, qui res mathematicas callent, iudicio Euclidis scripta solidissimum cognitionis geometricae fundamentum passus credantur, atque in his elementa potissimum rigorosis, quas exhibent, demonstrationibus maxime insignia sint et tironibus accuratioris in his rebus doctrinae cupidis nunquam satis commendari possint, factum tamen est, nescio quo fato, ut Euclidis operum atque in his etiam Elementorum textus graecus paucissimis adhuc editionibus publici iuris factus magno discipulorum numero vix parabilis esset. Itaque, quum amici nonnulli me hortarentur, ut librorum certe sex priorum, qui ad geometriam planam pertinent et maxime necessarii esse videbantur, novam editionem pararem, et quae ad eos illustrandos pertinent, ex praecipuis, qui in Euclidem commentati sunt, scriptoribus colligerem, timide quidem, at ob rei utilitatem haud invitus id negotium suscepi, et quomodo in eo versatus sim, paucis exponam.

Ante omnia, ut textus graecus, quantum fieri posset, emendatissime prodiret, curandum putavi. Hoc consilio tres, quae, si recte novi, solae exstant, integrorum Euclidis elementorum editiones graecae, Basileensem nempe apud Joannem Hervagium 1553. opera Simonis Gry-

naei publici iuris factam, deinde Oxoniensem opera Davidis Gregorii 1703. cum versione latina in vulgus emissam, denique Parisiensem, quam cum versione latina ac gallica curavit F. Peyrardus 1814—1818., diligenter contuli, lectiones variantes, quarum magnam copiam Peyrardus potissimum editioni suae subiecit, expendi, atque eam, quae maxime apta videretur, selegi, nonnunquam etiam, at haud ita saepe, ubi nullā occurreret, quae rei conveniret, coniectando veriorem lectionem restituere conatus sum. Nulli tamen coniecturae in textu locum dedi, quam non ad marginem adnotarem, quo liberum maneret lectori de ea re iudicium. Caeterum, quamvis Peyrardus potissimum e codice nota 190. vel *a* ab ipso designato, quem e Vaticana bibliotheca Parisios delatum ipsi, etiam postquam redire ille ad dominum suum iussus erat, terere permissum fuit, et cui summum ille pretium tribuit, magnam lectionum variantium copiam collegerit, et subinde alios quoque codices manuscriptos excusserit, qui e bibliotheca gallica tum Imperiali tres et viginti numero ipsi commissi fuerant, quos autem plerumque fere omnes inter se consentire deprehendit, et longe minoris pretii esse iudicat, quam praecipuum illum codicem *a*, haud tamen operae pretium esse putavi, omnem istam faraginem in hanc editionem transferre. Quanquam enim habet ille codex *a* lectiones non contemnendas, tamen longe maxima pars istarum variantium nihil fere, quod ullius momenti sit ad doctrinam Euclideam, continet, sed meras vocum traiectiones v. c. ἴση ἔστιν pro ἔστιν ἴση, ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἔστιν pro

οὐκ ἐκείνη τῶν ἰσῶν γωνιῶν; εὐθὺς γράμμη  
 πρὸ γράμμη ἤσται εὐθὺς; ἤτοι pro  
 ῥῶν pro ἄρα, et alia huius generis leviora,  
 quibus librum onerare et lectoris patientiam  
 fatigare nolui. Quae enim huius generis lectio-  
 num discrimina in alia materia v. c. oratoria  
 aut poetica notari forte poterant, ea in mathe-  
 matica curiosius expiscari otiosum fere videba-  
 tur. Quae autem levissimi etiam momenti ad  
 rem melius intelligendam pertinere visa fuere,  
 ea religiose semper ad marginem notavi. In  
 eligendis autem lectionibus, quae textui insere-  
 rentur, circa illa, quae diximus, levioris ge-  
 neris, Peyrardi plerumque lectionem retinuimus,  
 nonnunquam tamen antiquiorem Oxoniensis et  
 Basileensis lectionem revocavimus; in iis, quae  
 paullo graviora videbantur, nostrum quidem judi-  
 cium secuti sumus, ita tamen, ut eiusmodi in locis  
 variam lectionem ad marginem semper indicare-  
 mus. Et habet sane in mathematicis ars critica  
 proprias, nec in aliud scribendi genus transferen-  
 das regulas, aut potius liberius hic quam in  
 reliquis fere materiis versari potest ac debet,  
 quod nempe apud mathematicos res ipsa non-  
 nunquam imperiose hanc illamve lectionem po-  
 stulat aut repudiat, nec codicum misere saepe  
 depravatorum auctoritatem magnopere desiderat.

Quod ad versionem latinam attinet, Pey-  
 rardus sibi eam legem scripserat, ut cum textu  
 Graeco exactissime, et quantum fieri posset,  
 etiam circa singularum vocum ordinem consen-  
 tiret. Hanc autem regulam ita presse sequen-  
 dam putavit, ut vel ubi diversa utriusque lin-  
 guae natura id non permittere videretur, ipsum  
 quoque linguae genium isti legi postponendum

itaret. Ita v. c. pro articulo Graecorum, quem Latini non habent, plerumque v. *ipse, ipsa* etc. usus est. Et negari quidem nequit, usum istius pronominis permittere nonnunquam breviorum vocabulorum enunciationem, quam si quadratum, triangulum, angulum, rectam etc. ad quae illud refertur, expresse nominare velimus; attamen etiam illud certum est, non solum minus ine ista dici, verum etiam saepius minus distincte, quum ad plures sensu diversas voces eodem pronomen referri aut pro iis poni queat. Quamvis igitur brevitati etiam nos id dederimus, ut nonnunquam, ubi nihil interesse videatur, eadem ratione pronomine *ipse* etc. uteremur, plerumque tamen, quo distinctius intelligeretur, de quo sermo sit, rem ipsam suo nomine appellare, vel etiam in commentario articulum graecum retinere maluimus. Ex eadem ratione textum quidem graecum fideliter expressimus, at non ita anxie ordinem vocabulorum vocum retinere voluimus, ut a latino sermone prorsus alienum esset, quod effertur. Ita v. c. in prop. I. 41., cuius initium Peyrardus ita habet: si parallelogrammum quam angulum basin habeat eandem etc. nos in eo ordine dicere maluimus: si parallelogrammum eandem basin habeat, quam triangulum. Quae ita saepius a Peyrardo discessimus, et aliis verbis, saepe iisdem, quae sunt in editione Gregorii, expressimus. Notavimus etiam, quam propositione praecedente nitatur illud enunciatum, secuti in eo Gregorii, Robersoni et plerorumque geometrarum usum, quod in ceterorum rebus maxime consulitur.

In commentario propositum nobis fuit, ut nihil, quod illustratione egere videretur, prorsus intactum relinqueremus, et potissimas observationes doctissimorum hominum colligere-mus, ita tamen, ut ea tantum, quae proxime ad rem pertinerent, aut ex quavis propositione sequerentur, et maximum usum promitterent, exhiberemus, seiunctis, ne in nimiam molem liber excresceret, iis omnibus, quae minus necessaria viderentur v. c. diversis eiusdem propositionis demonstrationibus, nisi concinnitate aut alia virtute admodum se commendarent, aliisque quae longius a scopo abducerent. Qua in re fatemur difficile esse certum aliquem limitem ponere, nec dubitamus fore, quibus nimium, alios contra, quibus non satis copiosi fuisse videamur. Fontes autem, e quibus observationes adiectas hausimus, fuere praeter Procli in libr. I. Elementorum Commentarium Graece satis vitiose editum simul cum Euclide Basil. 1535., correctius autem Latine Patavii 1560. a Francisco Barocio; Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. Geom. sex priores libros Argentor. 1579.; Pappi Collect. Mathem. Bonon. 1660.; ex antiquioribus potissimum Savillii Praelectiones tresdecim in Principium Elementorum Euclidis Oxon. 1621.; Isaaci Barrov. Lectiones mathematicae habitae Contrabrigiae 1664. 1665. 1666. Lond. 1684. 1685.; Wallisii Opp. Mathem. maxime Vol. II. Oxon. 1693.; Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus Mediolani 1723, Usi sumus praeterea editonibus Euclidis probatissimis, et ex egregiis, quas nonnullae earum continent, observationibus eas selegimus, quae ad rem nostram facere vide-

ur. Inter illas potissimum nominandae sunt  
idlis Megarensis Geometric. Elem. Libri;  
pani Galli transalpini in eosdem commen-  
rum libri; Theonis Alexandrini Bartholo-  
o Zamberto Veneto interprete in tredecim  
res commentariorum libri; Hypsiclis Ale-  
drini in duos posteriores, eodem Zamberto  
eto interprete commentariorum libri Paris.  
officina Henr. Stephani 1516. fol.; eadem  
de typis repetita Basil. apud Hervag. 1537.

Orontii Finei Delphinatis in sex priores  
os geometricor. Elementor. Euclidis Mega-  
is Demonstrationes Paris. 1536. fol.; Eu-  
e Megarense Philosopho, solo Introduttore  
e scientie Mathematicae, diligentemente re-  
tato et alla integrità ridotto per Nicola  
alea Brisciano Vinegia 1543. fol.; Euclidis  
arensis Elementa Geometrica restituta au-  
e Francisco Flussate Candalla Paris. 1566.

The Elements of Geometrie of the most  
ent Philosopher Euclide of Megara transla-  
into the Englishe tong by H. Billingsley  
ten of London at London 1570 fol.; Eu-  
s Elementor. Libr. XV. una cum Scholiis  
quis a Federico Commandino Urbinate nuper  
latinum conversi, commentariisque quibus-  
illustrati Pisauri 1572. fol.; Euclide resti-  
da Vitale Giordano da Bitonto in Roma  
9. fol.; Euclidis Elementor. Libr. XV. per-  
is demonstrationibus, accuratisque scholiis  
trati auctore Christoph. Clavio Bamberg.  
n. 1591. fol.; Iacobi Peletarii in Euclid.  
a. Geometr. Demonstration. Libri sex Lugd.  
4.; Euclidis Elementor. Libr. XV. bre-  
demonstrati opera Is. Barrov. Cantabrig.

1655. 8.; *Euclides restitutus, sive prisca Geometriae Elementa brevius et facilius contexta* ab Io. Alphonso Borellio Pisis 1658. 4.; *Les quinze Livres des Elem. Geometr. d'Euclide traduits et comment. par D. Henrion.* Paris. 1677. 8.; *Euclidis Elementor. sex libri priores demonstrati* ab Henr. Coëtsio. Lugd. Batavor. 1692. 12.; *The English Euclide being the first six Elements of Geometry translated out of the Greek with Annotations and usefull Supplements* by Edmund Scarburgh. Oxford. 1705. fol.; *Andreae Tacquet. Elementa Euclidea Geometriae etc. plurimis Corollariis, Notis etc. illustrata* a Guilielmo Whiston. Romae 1745. 8.; *Euclidis Elementor. Libri priores sex item undecimus et duodecimus ex Versione Latina Federici Commandini, sublatis iis, quibus olim Libri hi a Theone aliisque vitiati sunt, et quibusdam Euclidis Demonstrationibus restitutis* a Robert. Simson. Glasguae 1756. 4.; *Elementi piani e solidi d'Euclide da Iacopo Maria Carlieri in Firenze* 1769. 8.; *Elementor. Euclidis Libri XV. ad Graeci contextus fidem recensiti etc.* (a Georg. Frid. Boermann.) Lips. 1769. 8.; *An Examination of the first six Books of Euclids Elements* by William Austin Oxford. 1781. 8.; *Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid* by Ioh. Playfair Edinburgh 1795. 8.; *The Elements of Euclid. etc.* by Robert Simson London 1804. 8. Praetereo alias nonnullas editiones ab Ambrosio Rhodio, Georg. Fournier. aliisque factas, pariter ac vernaculas, quae in omnium manibus versantur, a Lorenzo Hauffioque curatas. Addi debet Matthias Auszug aus Rob. Simsons Latein. und Engl. Ueber-

setzung der ersten 6 Bücher und des 11. und 12. der Elemente des Euklides, Magdeb. 1799. 8. et, qui saepe Euclidem respiciunt, Thom. Simpson. in Elements of Geometry Lond. 1800. 8.; van Swinden Anfangsgründe der Messkunde übers. von Gaab. Iena 1797. 8.; Gilbert die Geometrie nach le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio und den Alten I. Th. 1798. 8.

Alios praeterea infra nominabimus, maxime, qui circa singularem aliquam ad Elementa pertinentem doctrinam laborarunt; vid. v. gr. Excursus de Theoremate Pythagoraeo, de Parallelarum Theoria etc.

Maximam autem commendationem editionem hanc habituram esse confido ab iis, quae opera et benevolentia viri de Mathesi dudum meritissimi atque mei olim praeceptoris maxime colendi Christoph. Frider. de Pfleiderer., Professoris Tubingensis, ei accessere ornamenta. Is nempe non solum consilio suo me adiuvere, suppellectilem litterariam, quam potissimum in hoc studiorum genere possidet amplissimam et exquisitissimam, liberalissime mihi impertire eiusque usum concedere, verum etiam doctissimas dissertationes, quas in varios Euclidis libros conscripsit, nominatim Scholia in Libr. II. Elementor. Euclid. P. I. II. III. Tubing. 1797. 1798. 1799.; Expositio et Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. I. Tubing. 1782., cui accedit Dissertatio inserta Promtuariorum Mathematico Hindenburgi Fascicul. 7. et 8. p. 257. sqq. et 440. sqq.; Scholia in Libr. VI. Element. Euclidis P. I. II. III. IV. Tub. 1800. 1801. 1802. 1805.; Dissertatio I. II. de Dimensione



Circuli Tubing. 1787. 1790., excerptandas et hic denuo cum hominibus doctis communicandas permisit; quin etiam continuationem Scholiorum in libr. VI. Elementorum, quam penitus elaboratam nondum typis exprimere potuit, mecum communicare, et eius quoque liberum usum concedere dignatus est, praeterea observationes etiam et varia passim in reliquos Euclidis libros notamina inspicienda nostrisque usibus adhibenda dedit, et omnem hunc laborem tanto studio adiuvit, ut, quidquid ex ea ad solidioris geometriac studiosos redundaturum esse speramus utilitatis, illi nobiscum huic potissimum viro acceptum referre debeant \*). Gratus etiam fateor, multum me debere amicitiae viri in rebus mathematicis versatissimi, Carol. Frider. Hauber, Professoris Schönthaliensis, qui collectam a se historiam tentaminum circa theoriam parallelarum mecum communicare, eiusque usum concedere, et permittere etiam voluit, ut, quae ipse docuerat in Dissertatione publica Tubingae 1793. habita, „*Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes*“ hic denuo lectori offerrentur. His opibus instructo pauca erant, ubi meas qualescunque observationes addere possem, et id potius curandum videbatur, ne nimia copia lectori taedium crearetur. Ut vero omni, qua par est, diligentia opus typis exprimeretur, humanissime ac benevolentissime curandum suscepit vir doctissimus mihique amicissimus, G. A. Diesterweg, de

\*) Ex quo haec scripseram, placide obiit v. Kal. Octobr. 1821. vir morum probitate pariter atque eximia eruditione insignis, cuius memoriam, qui eum norunt, omnes religioso coetere nunquam desistent.

Mathesi, quam Bonnae publice proficitur, dudum meritissimus. Illud praeterea rogamus lectores, ut si qua forte utilis adhuc visa observatio nos effugerit, aut aliud quid minus perfectum esse videatur, atque huic operi et Euclidis manibus conveniat, id homini scholastica plurimis laboribus distento, qui non nisi subsecivas horas in hunc librum impendere poterat, aequi iudices ignoscere velint. In animo quidem fuit, reliquos etiam Elementorum libros, aut certe XI. ac XII. subiungere, at per mutatas muneris mei rationes, novis subinde accedentibus negotiis, facere id non licuit. Scripsi Stuttgartiae d. 5. Aug. 1820.

I. G. CAMERER Gymnasii Professor.

---

Quum iam conscriptae essent hae qualescunque in sex primos elementorum libros observationes, in lucem prodiit Chrestomathia Geometrica edita a viro doctissimo, quem modo nominavimus, Haubero. In qua quum praeter alia propositiones 1—26. libri I. e Proclo, Savilio, Pflaedereri schedis mscptis iisdem, quibus et nos usi sumus, et ipsius Hauberi observationibus copiosissime et longe uberius, quam nostrae rationes patiebantur, illustratae sint, multa tamen etiam ex hoc libro doctissimo excerptare, et in nostrum usum convertere adhuc licuit.

---

## De Euclide Geometra notitia historica

collecta potissimum e Proclo, Savilio, Fabricio,  
Scheibelio.

Euclidem Geometram haud raro, quod etiam primae operum eius editiones, quas supra iam notavimus, probant, eundem esse crediderunt, atque Euclidem illum Socraticum, Megaris natum, cuius vitam descripsit Laertius libro secundo, et iisdem fere verbis Suidas v. *Εὐκλείδης*. De Megarensi isto Euclide ita habet Diogenes Laertius L. II. Segm. 106. *Εὐκλείδης ἀπὸ Μεγάρων τῶν πρὸς Ἰσθμῶ, ἢ Γελῶς καὶ ἐνίους. — Πρὸς τοῦτον φησὶν ὁ Ἐρμούδωρος ἀφικέσθαι Πλάτωνα καὶ τοὺς λοιποὺς φιλοσόφους μετὰ τὴν τοῦ Σωκράτους τελευτὴν κ.τ.λ.* Ad eundem etiam pertinent illa Tauri philosophi apud Gellium Noct. Att. L. VI. c. 10. „Decreto, inquit, suo Athenienses caveram, ut, qui Megaris civis esset, si intulisse Athenas pedem prehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset. Tanto Athenienses, inquit, odio flagrabant finitimorum hominum Megarensium. Tum Euclides, qui indidem Megaris erat, cum advesperasceret, Athenas ad Socratem commeabat“ etc. Atque huius ipsius decreti meminisse videtur Thucydides Histor. L. I. c. 139. sqq. ubi inter potissimas causas belli Peloponnesiæci hanc quoque fuisse refert. Itaque praeter reliqua v. c. morum diversitatem ipsa temporum ratio vetat Euclidem Geometram pro eodem sumere cum Socratico illo aut Megarensi Euclide. Proclus enim libr. II. Commentar. in libr. I. Elementor. refert:

Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν νεώτερος μὲν ἐστὶ τῶν περὶ Πλάτωνα, e quibus nominat maxime Eudoxum et Theaetetum, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους, quin, ut rem exactius definiret, addit: γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου, et notam illam historiam affert de Ptolomaeo compendiosiore ad geometriam viam desiderante, quam haud dari regiam (μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν — ut Savilius habet — nam in editione Procli graeca p. 20. verba truncata habent tantum Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστι περὶ γεωμετρίαν, in editione latina plenius p. 39. verba conservata sunt) Euclides responderit. Unde, quum ab initio belli Peloponnesiaci ad initium regni Ptolemaeorum in Aegypto plus quam centum anni effluerint, nequit profecto noster Euclides idem esse cum Megarensi illo, qui noctu ad Socratem ventitare solebat. Hinc etiam patet, errorem aliquem inesse illi Valerii Maximi loco libr. VIII. c. 12. 1., ubi narrat, Platonem conductores sacrae arae (quam nempe quum cubicae figurae esset, Philopono referente Delii duplicare iussi erant) de modo et forma eius secum sermonem conferre conatos ad Euclidem Geometram ire iussisse. Quae relatio eo etiam nomine erroris convincitur, quod ipsum quidem Platonem de cubo duplicando laborasse constat, de Euclide autem nihil tale narratur. Atque ita quidem novimus, quis Euclides non fuerit, quis autem ille fuerit, qua patria ortus, haud liquet. Savilius ait, ex media certe Graecia natum existimo, qui tam presse, tam accurately verborum delectu scripserit, ut ab eius formulis phrasibusque

nemo posterorum et in mathematicis excellen-  
tium virorum unquam vel latum unguem dis-  
cessisse videatur. De aliorum opinionibus, qui  
vel Alexandrinum, vel Tyrium, vel Siculum e  
civitate Gela oriundum eum esse, at nullis pro-  
babilibus argumentis volunt, videatur Fabric. Bi-  
blioth. Graeca curante Harless. Vol. II. p. 44.  
et in Not. a. p. 46. Id autem ex Proclo L. II.  
p. 19. Edit. Graec. et p. 38. Edit. Latin. scimus,  
floruisse eum tempore Ptolemaei Lagi, quo  
regnante Alexandriae primus omnium cele-  
brem illam scholam mathematicam aperuisse di-  
citur, e qua postea tot tantique nominis geo-  
metrae prodierunt. Moribus eum, Pappus in  
prooemio in libr. VII. Collect. Mathem. p. 251.  
ait, fuisse mitissimis, benignum erga omnes,  
praesertim eos, qui mathematicas disciplinas ali-  
qua ex parte augere et amplificare possent, ut  
par est, non contentiosum (*προσχρουστικόν*),  
sed accuratum, non arrogantem. Inter scripta,  
quae Euclidi tribuuntur, maximam famam ob-  
tinuerunt libri tredecim Elementorum, quibus  
plerumque subiuncti sunt duo, qui Hypsicii  
Alexandrino vulgo tribuuntur de quinque cor-  
poribus regularibus libri. Antequam de iis dis-  
serat, Proclus p. 19. Edit. Graec. aut apud Ba-  
rociū L. II. c. 4. nominat eos, qui ante Eu-  
clidem vel generatim de Geometria bene meriti  
sunt, vel etiam scriptis elementis inclaruerunt,  
quos hic quoque referre liceat, nempe Thale-  
tem, Ameristum Stesichóri poëtae fratrem, Py-  
thagoram, Anaxagoram Clazomenium, Oeno-  
piden Chium, Hippocratem Chium, qui lunulae  
quadraturam invenerit, et primus elementa con-

scripserit, Theodorum Cyrenaeum, Platonem, et qui eodem fere tempore vixerit, Leodamantem Thasium, Architam Tarentinum, et Theaetetum Atheniensem. Leodamante porro iuniorem fuisse ait Neoclidem, huiusque discipulum Leonem, qui etiam elementa composuerit, et diligentior sit copia et usu eorum, quae docuerit, atque ad problemata determinationem quoque adiecerit. Leone paullo iuniorem fuisse Eudoxum Cnidium, Amiclam Heracleensem, Platonis amicum, qui theorematum generaliorum numerum auxerit, et praeter alia sectionum quoque (conicarum, ut videtur) doctrinam a Platone inchoatam, adhibita in ea quoque analysi, uberiores reddiderit, Menaechmum, Eudoxi discipulum, pariter cum Platone versatum, eiusque fratrem Dinostratum, qui omnem geometriam ad maiorem perfectionis gradum evertent. Theudium porro Magnesium elementa conscripsisse, et multas propositiones particulares magis universales reddidisse, Cyzicinum etiam Atheniensem eodem tempore viguisse, et hos quidem familiaritate coniunctos in Academia vixisse, et varia alterum alteri problemata proposuisse. Hermotimum deinde Colophonium, quae ab Eudoxo et Theaeteto prius edita fuerint, auxisse, et multa eorum, quae in elementis sint, (*τῶν στοιχείων πολλὰ*) invenisse, Philippum denique Metaeum (aut, ut est in Ed. Latin. Mendaeum) Platonis discipulum ab eo ad Mathesin adductum fuisse. Addit deinde, his non multo iuniorem esse Euclidem, qui elementa collegerit, et multa eorum in ordinem redegerit, quae ab Eudoxo, multa perfecit,

quae a Theaeteto reperta fuerint. Hinc vulgo  
 Euclides Proclo aliisque *ὁ στοιχειώτης* audit.  
 Haud pauca etiam eorum, quae ab antiquioribus  
 geometris leviori calamo perstricta vel pinguius  
 demonstrata fuerint, ab eo firmissimis et omni  
 obiectione maioribus demonstrationibus fulcita  
 fuisse. Atque hunc ipsum summum in demon-  
 strando rigorem, lucidumque per omnia ordi-  
 nem, ac prudentem eorum, quae ad rem facere  
 videbantur, selectum semper in Euclide admi-  
 rati sunt viri rerum mathematicarum peritissimi.  
 Notum est, Newtonum, virum divinum, do-  
 luisse, quod Cartesii aliorumque, qui calculo  
 tantum algebraico uti sueverunt, scriptis se  
 totum dederit, antequam Euclidis doctrina satis  
 innutritus fuisset. Et La Grangius, Peyrardo  
 referente, dictitare solebat, geometriae studio-  
 rum, qui non ex Euclidis Elementis geometriam  
 haerent, perinde facere, ac qui graeca et latina  
 ex recentiorum scriptis addiscere velit.

Disputatum autem est, an omnia, quae ho-  
 die Elementorum nomine habemus, sint ad Eu-  
 clidem auctorem referenda. Nec vero illud  
 quaeritur, an omnia, quae in Elementis repe-  
 riuntur, ab Euclide *primum* inventa sint. Hoc  
 enim aliter se habere, et multa a geometris  
 Euclidis aeo superioribus, a Thalete, Pytha-  
 gora, Eudoxo, Theaeteto, aliisque, quos ex  
 Proclo nominavimus, profecta esse, non est  
 dubium. Ea, quae ab antiquioribus illis in-  
 venta erant, in perfectum ordinem rede-  
 gisse, lacunas explevisse, solidas ubique demon-  
 strationes adiecisse putandus est Euclides, atque ita  
 suis magna ipsi restat gloria. Verum enim

vero fuere, qui nec hanc laudem ei integram relinquere vellent; alii contra, Euclidis famae timentes, si qua in Elementis manca videantur, quidquid minus forte perfectum deprehendunt, ab alio, nescio quo, adiecta aut mutilata esse pronuntiant. Atque eos quidem iure ridet Savilius, qui propositiones Elementorum tribuunt Euclidi, demonstrationes Theoni, qui duobus fere seculis post Proclum vixit. Quasi vëro, ait, ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adiectis probationibus, quod nec philosophorum quisquam, nec medicorum, nedum mathematicorum fecit unquam. Neque autem, eodem iudice, verior est Petri Rami sententia, qui (Scholia Mathematicorum Libr. I. p. 37.) tam propositiones quam demonstrationes Euclidi abiudicat, universa, quae Euclidi vulgo tribuuntur, elementa geometrica Theoni attribuens, contra commune omnis antiquitatis testimonium. Agnoscit tamen Ramus aliqua sive Hippocratibae, sive Euclideae geometriae vestigia in Theone. Decepti fuisse, qui ita iudicant, videntur titulo, quem nonnullae Elementorum editiones v. c. Basileensis prae se ferunt: *ἐκ τῶν Θεωνοῦ συνουσιῶν*, ex Theonis Colloquiis, sive Congressibus. Observat autem Savilius, huius tituli in neutro eorum codicum, qui penes ipsum erant, ullum reperiri vestigium, nec a Gregorii aut Peyrardo quidquam de eo memoratur. Antiquissima autem Zamberti versio in fronte semper habet: ex Theone graeco commentatore, interprete Bartholomaeo Zamberto. Et ipse etiam Savilius refert, in uno suorum codicum ad oram marginis adscripta



esse ad decimum tertium librum haec verba;  
*Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συγγραψάς, ἢ ἐν  
 χρόνῳ Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνα. Θεὸν δὲ  
 ὁ συντάξας αὐτὰ ἐν Θεοδοσίῳ τοῦ βασιλέως.*  
 ut itaque collectio elementorum Euclidi, ordi-  
 natio et dispositio Theoni tribui videatur. Ad-  
 dit autem: „magna certe Theonis laus, si in-  
 ordinata et incompressa in ordinem redegit!  
 Sed, ne huic incerto scholiastae fidem adiun-  
 gamus, obstat, ut dixi, Procli et antiquiorum  
 omnium auctoritas, obstat mirabilis et concinna  
 propositionum series, ex quibus unam loco suo  
 si eximas, tota corruat compages et structura  
 necesse est.“ Rectius itaque Ioann. Buteo (de  
 quadratura circuli libri duo, quibus adiectus est  
 annotationum liber in errores Campani, Zam-  
 berti etc. Lugd. 1559. p. 209.) eas, quae in  
 exemplaribus graecis sunt, demonstrationes Eu-  
 clidis esse censet, non Theonis, ita tamen, ut  
 nec ipse neget, aliquid subinde in demonstra-  
 tionibus de suo additum fuisse a Theone. Nec  
 multum ab eo discedunt Commandinus et Sa-  
 villius. Commandinus quidem in prolegomenis  
 in Elementa Euclidis verba illa: *ἐκ τῶν Θεωνοῦ  
 συγγραμμάτων* ita intelligi posse putat, ut, dicamus,  
 Theonem conscripsisse quidem commentarios in  
 Elementa, sed illos temporum iniuria periisse,  
 quemadmodum et quae in eadem Pappus Ale-  
 xandrinus scripserat, conservato tamen titulo,  
 qui postea ipsi Euclidi negligenter adiectus sit.  
 Postea autem in eam sententiam concedit, Eu-  
 clidem quidem demonstrationibus suas proposi-  
 tiones stabilivisse, quod vel ex Procli testimo-  
 niis ad I. 10. pateat, at Theonem excellentis

ingenii virum Euclidis demonstrationes fusi-  
 pleniusque explicatas in lucem protulisse, quo  
 apud Proclum observari possit. Esse igitur de-  
 monstrationes quidem Euclidis, at eo modo con-  
 scriptas, quo olim Theon, Euclidem secutus  
 eas suis discipulis explicaverit. Savilius autem  
 non se moveri ait illo *συνουσιῶν* titulo in vul-  
 gatis, neque scholio illo manuscripto incertum  
 auctoris in suo codice, magis vero auctoritatem  
 ipsius Theonis in Commentar. in Almagest. p.  
 50. (vide infra ad VI. 33.) Ex eo nempe loco  
 apparere, novam Elementorum editionem (*ἐκ-  
 δόσιν*) adornasse Theonem, in qua nonnulla ab  
 ipso adiecta sint. Quae itaque ibi de sectoribus  
 dicantur, una cum demonstratione a verbis inde  
*λέγω ὅτι καὶ* usque ad finem, Theonis esse  
 videri. Idemque iudicium ferendum se existi-  
 mare de multis in decimo libro lemmatis et  
 fortasse propositionibus nonnullis. Alexandrum  
 certe Aphrodiseum aliquot ante Theonem secu-  
 lis eam, quae quinta est decimi in nostris li-  
 bris, citare pro quarta p. 87. commentariorum  
 in priora Aristotelis, ut necesse sit aliquam ex  
 praecedentibus, quartam sine dubio, qua sine  
 magno incommodo sane carere potuissemus,  
 eius tempore ab Elementorum libro abfuisse,  
 vel saltem cum tertia coaluisse. Et quidem ul-  
 timam decimi non dubitare se assumptum esse  
 vel Theonis, vel alterius potius antiquioris ali-  
 cuius (apud Alexandrum enim exstare iisdem  
 prope verbis), sed non ita perspicaci ingenio,  
 utpote alieno loco positam, nullam cum prae-  
 cedentibus continuationem habentem, ut sit a  
 doctissimo Petro Montaureo rectissime animad-

resum. Ex his omnibus se concludere, sibi videri, Theonis fuisse partes in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, explicando, augendo, ultra has nullas. Atque in eandem sententiam plurimi deinde, non quidem illi Euclidis obtrectatores, sed amici potius ac patroni inbentes abierunt, e quibus potissimum nominandus est Rob. Simson. ita tamen, ut ad Theonem non tam gloria inde, quam potius vituperium redundet, quod nempe, ut Rob. Simson. in praefatione suae Elementorum editionis ait, ille, aut quicumque editor fuerit graeci textus, quem nunc habemus, multo plura, ac Savilius aliique viri docti existiment, et quidem in peius mutaverit, addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo, praesertim in libro quinto et undecimo, quos iste editor non leviter vitiaverit, e. g. substituendo breviorē at paralogisticā vice legitimae demonstrationis prop. V. 18., et ex hoc libro auferendo inter alia bonam Euclidis aut Eudoxi rationis compositae definitionem, cuius loco posuerit quintam sc. libri VI., qua neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem geometra usus fuerit, cuiusque apud illos nullum vestigium inveniatur. Plura praeterea alia in L. XI. depravata esse monet. Ab his igitur naevis praecipuos Elementorum libros vindicare se tentasse, tollendo falsa minimeque accurata, quae pro veris et genuinis accuratissimi geometrae scriptis supposuerint imperiti editores, et Euclidi restituendo, a Theone aliisque ab eo arrepta, quae per multa secula hactenus sepulta iacuerint. Quidquid sit, ne forte iniusti

nus erga Theonem, ad quem forte non solum ista culpa pertinet, sufficiet dicere, textum necum variis locis non ita ad nos pervenisse, ut ex manu accuratissimi geometrae eum protum esse credendum sit, plurima quidem in perfectissimae demonstrationis exempla esse, haud pauca tamen temporis iniuria, aut edicrum male sedulorum vitio mutilata aut luxata deri, quibus quamvis caute et circumspecte edelam afferre oporteat. Quod ultimum scdm Elementorum attinet, Proclus L. II. c. 4. b finem asserit, Euclidem utpote Platonicae scholae amicum figurarum, quas vocant, Platoncarum, vel quinque corporum regularium constitutionem potissimum in animo habuisse:

Caeterum Euclidi alia adhuc scripta tribuntur, e quibus geometrici argumenti sunt ea, quorum Pappus meminit Collect. Mathem. I. II. *Data* (*Δεδομένα*) nempe ac *Porismata* (*Πορίσματα*). Et *Data* quidem ad nostram aetatem pervenerunt. *Porismata* autem, quae temporis iniuria periere, post varia aliorum minus prospera conamina Rob. Simson. denique felicissime restituere inchoavit, atque edita illa sunt in Robert. Simson. Oper. reliqu. Glasgae 1766. 4. p. 315—594. Proclus ei tribuit l. II. 9. adhuc librum *de Divisionibus* (*Περὶ Διαίσεων*), quem eundem esse nonnulli putant, quem Mahometi Bagdedino adscriptum I. Dee arabico latinum fecit, et Feder. Commanus Pisauris 1570. edidit, posteaque Gregorii quoque operibus Euclidis adiunxit. Savilius non an is liber Euclidis sit, dubitat. Praeterea illi adhuc a quibusdam *Introductio har-*

*monica* (*Εἰσαγωγή Ἀρμονική*) et *Sectio Canonis* (*Κατατομή Κανόνος*), et *Phaenomena* (*Φαινόμενα*) vid. Papp. in Prooem. ad Libr. 6. Collect. Mathem. et Philopon. ad secundum Physicorum, porro *Optica* et *Catoptrica* (*Ὀπτικά καὶ Κατοπτρικά*) vid. Procl. Lib. II. c. 5. et a nonnullis adhuc fragmentum *De Levi et Ponderoso* tribuuntur, quae omnia adhuc habentur, at haud ita magni pretii sunt. Denique Pappus adhuc memorat L. VII. *Locorum ad superficiem* (*Τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν*) libros duos, qui periere pariter ac *Fallaciarum liber* (*Τὸ Συγγραμμά Ψευδαρίων*), quem, Proclo referente, scripsisse, et in quo falsarum argumentationum fontes ac genera descripsisse videtur.

Sed redeamus ad *Elementa*. Horum plures exstant codices mscpti. Simon Grynaeus duobus se in iis edendis usum esse codicibus dicit, quorum alterum Lazarus Bayfius Venetiis, alterum Ioannes Ruellius amicis suis suppeditavit. Savilius pariter de duobus, qui penes ipsum sint, codicibus loquitur p. 11. At neuter suos codices accuratius descripsit. Gregorii nihil prorsus de codicibus mscptis, quorum lectionem tamen passim in margine citat, in praefatione habet. Peyrardum supra iam diximus, usum fuisse codicibus mscptis quam plurimis, e quibus summam laudem tribuit codici 190 vel *a* designato, qui tum e bibliotheca Vaticana Parisios delatus, postea rerum commutatione in Gallia facta, redire quidem Romam iussus est, ea tamen conditione, ut Peyrardo eum, dum suam editionem ad finem perduxisset, retinere liberum relinqueretur. Ad

huius libri manuscripti, (quem exeunte seculo nono exaratum putat) fidem plerumque textum Peyrardus conformavit, aut certe in quo discrepet ille liber a sua editione sub finem cuiusque tomi indicavit, ita, ut quidem ipse ait, ut harum lectionum variantium ope possit quis, si velit, habere mscpti 190. exemplar huic plane congruum. Reliquos codices mscptos, quos viginti tres e bibliotheca tuum Imperiali conferre ipsi licuit, e quibus autem 10. *Data* tantum continent, quum ad secula multo recentiora referri debere, et quam plurimum inter se convenire videret, initio quidem operis saepius, postea autem haud ita multum comparasse videtur, duos, codices nempe 2573. 2762. non inter eos refert, quos comparaverit. Praeter hos libros mscptos commemorantur plures alii in variis bibliothecis obvii apud Fabricium *Biblioth. Graec.* curante Harless. Vol. IV. p. 48. sqq.

Renatis litteris prima operum Euclidis notitia ab Arabibus ad nos transivit. Illi enim, rerum mathematicarum imprimis studiosi eius *Elementa* in arabicum sermonem plus semel, ut videtur, transtulerunt, et ex una harum arabicarum interpretationum denuo latine ea vertisse Campanus vulgo dicitur. Fuisse autem plures a se diversas arabicas editiones, quae saepius ab exemplaribus graecis magis minus discederent, inde maxime patet, quod hodieque plures una a se invicem diversae passim citentur. Ita v. gr. in *Bibliotheca Bodleiana* Euclidis *Elementorum* exstant libri XIII. prio-

res arabicae per Isaac. Ibn Honein ex recensione Thebit Ibn Korae v. Fabric. Biblioth. Graec. Tom. IV. p. 51. Ibidem p. 51. in Bibl. Bodleiana citantur Euclidis Data arabice per Zin Eddin Abhari, et Elementor. libri XV. ex versione Adelardi de arabico, una cum commento magistri Campani, Novariensis. Et p. 52. in bibliotheca Collegii Universitat. Oxon.: Euclides de arte geometrica ex arabica lingua in latinam translatus per Adelardum Bathoniensem. Eadem pagina occurrit Euclides arabice per Shemseddin Mahommed Almuzi, ibidemque alii in Bibliotheca Leidensi et Escorialensi cf. ibid. p. 76. Notissima apud nos est ea, quae Arabi Nassireddino tribuitur, et Romae impressa fuit 1594. De hac editione videatur Kaestners Gesch. der Mathem. I. B. p. 367. sqq. et de Schnurrer. Biblioth. Arab. p. 458. sqq. Savilius p. 145. a Baptista Raimondo hanc editionem factam esse refert. Ex praefatione illius, quam habet de Schnurrer., patere videtur, non *Versionem* arabicam, sed *commentarium* versioni intextum esse Nassireddini opus. Caeterum plenius nomen huius Arabis aiant esse Khevageh Nassireddin, Mohammed Ben Hassan, aut Ben Mohammed Al Tusi, i. e. ortum ex urbe Tus provinciae Chorasani, et floruisse seculo nostrae aerae decimo tertio. Cf. adhuc Clement. Biblioth. curieuse Tom. VIII. p. 158. Herbelot Biblioth. Orient. p. 46. et p. 665. Abulfed. Annal. Tom. V. p. 36. 37. Casiri. Bibl. Hisp. Arab. Escut. T. I. p. 187. et Kaestner. l. c. p. 373. Haec ipsa au-

tem arabica versio cum ea, quam Campanum ex arabico fecisse vulgo dicunt, non consentit, saltem in pluribus locis, ut observat Peyrardus in Praefat. Tom. II. ubi versionem Campani prop. I. 7. et eiusdem propositionis versionem gallicam ex arabico Nassireddini factam exhibet. Pariter in prop. I. 2. Nassireddinus varios, qui obtinere possunt, casus separatim habet, Campanus cum graeco consentit. Eodem modo circa parallelas Nassireddinus, ut infra videbimus, in commentario propositioni adiuncto propriam sibi demonstrationem habet, Campanus eam tantum, quae in graecis exemplaribus habetur. In theorematis etiam Pythagoraei demonstratione additae sunt in Nassireddini editione aliae a situ quadratorum ex cathetis variato petitae, ut vel e figuris adiectis patet. Pariter etiam differunt inter se in doctrina de rationibus compositis Campanus, qui definitionem, quae vulgo est VI. 5. non habet, et Nassireddinus, qui habet aliquam a vulgari illa haud multum discedentem (vid. Pflleiderer. Schol. in VI. Elem. Euclid. P. IV. p. 15.) Caeterum, quae primum typis expressa fuit Elementorum Euclidis editio latina, opera Eberhardi Radtolli Venet. 1482. fol. cuius descriptionem dedit Kaestner. Lips. 1750. 4. continet eam, quam vulgo a Campano ex arabico factam esse dicunt, versionem latinam. Scheibelius tamen (Zwey mathem. Abhandl. Breslau 1807. p. 19.) refert, in suo exemplari editionis huius rarissimae, manu editioni, ut pateat, coeuvae, in margine notatum esse „liber Ele-



mentorum translatus ab Adhelardo Rothbaten-  
 mensi ex ydiomate arabico in latinum sub  
 Commento Campani Novarensis, ut itaque Cam-  
 panus *commentarium* tantum in *versionem* Adhe-  
 lardi scripsisse videatur. Consentire cum hac  
 opinione videntur ea, quae supra e Fabricii  
 Bibliothec. Graec. de versionibus arabicis, vel  
 ex arabico factis attulimus, ubi pariter de Abe-  
 lardo illo sermo est. E graeco textu autem  
 primum latine versa prodire Euclidis opera,  
 edita a Barth. Zamberto Venet. 1505. fol. (Li-  
 bri XIV. Elementorum latinam interpretationem  
 a Georg. Valla factam ad 1498. habet Scheibel.  
 Einleit. zur mathem. Bücherkenntn. 1. St. p. 2.)  
 Ab hoc inde tempore saepius, ut et supra di-  
 ximus, et quidem junctim primum 1516., non-  
 nunquam etiam separatim, prodiit utraque Ele-  
 mentorum versio, Campani (ita eam vocare li-  
 cea) et Zamberti, quae saepius haud leviter in-  
 ter se differunt. Quam plurimas operum Eu-  
 clidis et Elementorum potissimum editiones me-  
 morat Scheibel. l. c. I. St. p. 1. sqq. 5. St. p.  
 475. sqq. et p. 521. sqq. 9. St. p. 264. In-  
 signem inter antiquiores locum habent editiones  
 Feder. Commandini et Christoph. Clavii, qua-  
 rum utraque etiam scholiis et commentariis il-  
 lustrata ac saepius prelo repetita fuit, inter re-  
 centiores potissimum Rob. Simsonis editiones  
 latina et anglica memorandae sunt. Reliquas  
 omnes, quae nobis innotuerunt, aut apud alios  
 memorantur, hic percensere longum et ab hoc  
 loco alienum videtur. Praecipuas earum iam  
 supra nominavimus. De reliquis praeter Schei-

### XXX

belium l. c. vide in Bossii Dissertat., qua contenta Elementorum enunciat et simul de variis editionibus post Fabricium nonnulla disserit. Lips. 1757. 4. et potissimum ipsum Fabricium Biblioth. Graec. ed. Harles. Vol. IV. p. 53. sqq. In bibliothecis, ut ibidem memoratur, extat hebraica adeo Elementorum versio.

---

**E U C L I D I S .**

**E L E M E N T O R U M**

**LIBRI SEX PRIORES.**

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ  
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν  
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Π Ρ Ω Τ Ο Ν.

"Ο Ρ Ο Ι.

α. Σημείον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν.

D E F I N. I.

*Omnis, quae a ratione suscipitur de aliqua re institutio, debet a definitione proficisci, ut intelligatur, quid sit id, de quo disputetur.*  
Cic. de Offic. I. 2.

Primam L. I. definitionem dudum fuere, qui reprehenderent, quod quid punctum non sit, dicat potius, quam quid sit. Vid. Rami Schol. Mathem. L. VI. Francof. 1599. p. 141. et Savilii Praelectiones in Principium Elem. Euclidis Oxon. 1620. p. 51. Nec negaverim, esse in hac observatione aliquid veri. Atque ipse etiam Proclus fatetur Euclidem διὰ ἀποφάσεως i. e. negative explicare punctum, addens: καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς. Vid. Procli Commentar. in Libr. I. Euclidis Basil. 1533. p. 26., in qua excusatione Savilius quoque acquiescit. Cf. etiam Edm. Scarburgh. the English Euclide Oxford 1705., qui p. 1. ita habet: The definition of a Point is plainly negative, and no otherwise informs us, what a Point is, than by telling us, what 'tis not. Yet in many things, that are in nature most simple, these kinds of negative Definitions are sufficiently instructive; though not to the Essence of the Thing defined, yet very well to the Use, that is to be made thereof. So here a Point is defined by a Negation of parts. Which Definition in respect of Magnitude, that was next to be con-

---

# EUCLIDIS ELEMENTORUM

## LIBER PRIMUS.

---

### DEFINITIONES.

1. **P**unctum est, cuius pars nulla.

considered as divisible into parts, is instructive or preparatory to the right understanding of the Doctrine of Magnitudes, and lays down, what conception of a Point is hereafter used, or usefull in Geometry, namely *to have no parts*. Which is sufficient for the present to an Geometrician. In multis, ait, rebus simplicissimis eiusmodi definitiones negativas sufficere non quidem ad rem ipsam declarandam, attamen quo facilius usui, in quem adhibeantur, inservire possint. Ita hanc definitionem negativam puncti referri ad comparisonem quantitatum, quae ex partibus compositae sint, praeparare itaque animum ad melius intelligendam doctrinam de quantitibus, et docere, quo sensu, vel quem in usum Geometrae voce *punctum* utantur, nempe pro eo, quod non habeat partes. Quod quidem in praesentia sufficiat Geometrae.—Praeterea id quoque in Euclidis definitione vituperarunt nonnulli, quod non sit convertibilis, vel, ut aliis verbis rem enunciem, quod eadem definitio in alia plura, praeter punctum, quadret; unitatem nempe in numeris vel tempore consideratam pariter nullas partes habere. Quod etiam Proclus concedit, ac non solum punctum ait esse *ἀμερὲς*, sed tamen volum *ὡς πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ἔλγν*, unde Geometrae haec definitio sufficere possit. Vid. Procl. l. c. p. 26. et Savil. l. c. p. 55. Atque haec, quae inter unitatem ac punctum intercedit

## β. Γραμμὴ δὲ, μήκος ἀπλατὴς.

analogia, caussa fuisse videtur, cur Proclo teste l. c. Pythagoraei punctum dicerent *μονάδα προσλαβούσαν θέσιν*, unitatem situm adsummentem. Cf. Savil. p. 60. sq. Playfair. Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid. Edinburgh 1795. p. 347. pariter monet, haud convertibilem esse hanc definitionem, quod tamen ad naturam definitionis p̄te formatae pertineat; non enim ea omnia, in quibus nullae sint partes, vel quae non habeant magnitudinem, illico puncta esse. Ipse igitur definitionem hanc affert, punctum esse, quidquid positionem habeat, at non magnitudinem. Optime hac de re indicare videtur Robertus Simsonus, qui in Anglica Elementorum versione London. 1804. p. 289. sqq. observat, definitiones 1. 2. 3. 5. 6. magis perspicuas fore, si a consideratione vel definitione corporis initio facto, ad superficiem, in qua nulla sit crassities, adeoque longitudo saltem ac latitudo considerandae veniant; a superficie ad lineam, omnis etiam latitudinis expertem, et a linea denique ad punctum descendas, quod quum nec longitudinem habeat, saltem ut terminus sive extremum lineae cogitari possit. Cf. etiam Clavii Elementa Euclidis Libr. XV. Colon. 1591. p. 1. et Borellii Euclides restitutus, Pisis 1658. p. 3. sq. Atque hac ratione evitari poterunt, quas ex Ramo, aliisque notavimus, obiectiones. Punctum nempe erit, ut in defin. 3. dicitur, *πέρας τῆς γραμμῆς*. Itaque definitio tertia supplet defectum primae. At hanc ipsam tertiam definitionem Savilius l. c. p. 60. reprehendit, quod sit a posteriori; pariterque p. 64. similem lineae definitionem ex eadem ratione absurdam esse dicit. Recte ille quidem, si quis, haud ante explicata linea, punctum, aut, superficie haud explicata, lineam ita explicare velit. At, si Roberti Simsoni more a definitione corporis fiat initium, atque inde ad superficiem, a superficie ad lineam, a linea denique ad punctum descendas, i. e. ab eo, quod magis compositum est, ad simplicius, pariter id licebit, atque a simplicioribus ad magis composita ascendere. Hinc etiam plures Geometrae acutissimi, v. c. e nostratibus Kaestnerus, Karstenius, Lorenzius,

## 2. Linea autem longitudo non lata.

Mathias, alique eundem, quem Rob. Simsonus, in his explanationibus ordinem secuti sunt. Caeterum notat Savilius, quod apud Platonem, Aristotelem, aliosque veteres *στιγμή* vocetur, apud Euclidem ac Mathematicos esse *σημεῖον*. Denique patet, argumento aut alio quocunque modo perfectam puncti imaginem exhiberi nunquam posse.

## D E F I N. I I.

Haec quoque definitionem reprehendit Aristoteles Topic. VI., quod per negationem dividat genus. Recte tamen Savilius l. c. p. 61. monet, id saepius fieri, nec reprehendi posse, qui v. c. brutum definire velit *ζῶον ἄλογον*. Neque etiam, mouente pariter Savilio, sola negatione constat haec definitio, ut superior puncti, quum genus habeat positivum, *longitudo*. Vel, ut Proclus ait p. 29. *Τὸ μὲν σημεῖον, ὡς πάντων ἀρχὴν τῶν μεγεθῶν καὶ μήτης τῆς ἀποφάσεως ἐδίδαξε· τὴν δὲ γραμμὴν τῇ μὲν καταφατικῶς, τῇ δὲ ἀποφατικῶς· ἐστὶ μὲν γὰρ μήκος, καὶ τοῦτ' αὖ τῆς τῶ σημεῖον πλεονάζει ἀμερείας· ἀπλατῆς δὲ ὡς τῶν ἄλλων καθάριστα διαστάσεων. πᾶν γὰρ δὴ τὸ ἀπλατὲς καὶ ἀμερές ἐστίν.* Et videtur etiam, ut Apollonius apud Proclum monet, lineae notionem habemus, quum iterum longitudines metiri volumus. Tamen neque de latitudine neque de altitudine vel profunditate viae quaeritur, sed de locorum tantum distantia. Notiones nempe puncti, lineae, superficiei non nisi abstractione, ut aiunt, formantur. Caeterum alii, eodem Proclo referente, lineam dixere esse *ἴσιν σημεῖον*, fluxum puncti, alii *μέγεθος ὅφ' ἐν διάστατον*, quantitatem unicam habentem dimensionem, Savilio iudice, vere utique, sed ad naturam lineae explicandam non tam accommodate et Euclidea definitione minus perspicue. In definitione sexta, quae pariter pro complemento secundae haberi potest, ut defin. tertia pro complemento primae, *γραμμαὶ πέρατα τῆς ἐπιφανείας* esse dicuntur, et Rob. Simson. addit, dici etiam posse, lineam esse communem communem duarum superficierum continue positarum, vel lineam dividere unam eandemque superficiem in duas partes continuas. Caeterum, ut Scarburgh. monet (the

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεία.

δ'. Εὐθεία γραμμὴ ἴσυν, ἣτις ἐξ ἴσων τοῖς ἐφ' ἐαυτῆς σημείοις κείται.

Engl. Euclide p. 3. sqq.) linea, quamvis fluxus puncti dicatur, haud tamen consistit e punctis iuxta se positis. Quum enim singula puncta omni careant magnitudine, decem etiam millia punctorum iuxta se positorum nullam efficere possunt longitudinem; puncta itaque punctis addita nunquam lineam efficiunt, nec ulla pars lineae est punctum, sed punctorum fluxus imaginem saltem lineae continuae exhibet. Cf. Peletar. in Euclid. Elem. Geom. Demonstr. Libr. VI. 1610. p. 3.

### DEFIN. III.

De hac definitione supra ad defin. 1. dictum est, esse eam quasi complementum primae. Caeterum Proclus p. 28. et ex eo Savilius p. 66. monent, esse lineas, quarum terminos exhibere non possis, v. c. lineam ex una parte finitam, ex altera infinitam, i. e. cui ex hac parte nulli fines assignentur, vel etiam lineas in se ipsas redeuntes. „Sic nimirum solet Euclides, (verba sunt Savilii) quam recte docti viderint, posita semel definitione alicuius generis, sine ulla divisione transire ad definitionem alicuius ex praecipuis speciebus, quod reliquae fortasse proposito suo minus inservirent, aut elementari institutioni non essent accommodatae. Sic hoc loco, cum posita definitione lineae consequens esset, ut lineam divideret in finitam et infinitam, omissa infinita, finitam solummodo in hac tertia definitione attingit.“ Mihi quidem videtur Euclides, omissis, quae ad rem proxime non pertinerent, dicere voluisse: si qua linea finita est, termini eius puncta appellantur. Cf. Clavius ad h. l.

### DEFIN. IV.

Primum de sensu verborum: ἣτις ἐξ ἴσων τοῖς ἐφ' ἐαυτῆς σημείοις κείται, disputatur. Proclus putat, Euclidem his verbis innuere, μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσων κατέχειν διάστημα τὸ



1. Lineae vero extrema, sunt puncta.

4. Recta linea est, quae ex aequo punctis in ea sitis ponitur.

(legendum τῇ) *μεταξὺ τῶν ἐκ' αὐτῆς σημείων* i. e. rectam tum ex aequo punctis in ipsa sumtis iacere, quando spatium, seu distantia inter duo eius puncta extrema aequale sit ipsi lineae. At recte monet Borellius, Euclid. restituit, p. 4., ignorari, quidnam ipsa distantia sit, neque id ab Euclide expositum esse. Clavius p. 2. lineam aequaliter inter sua puncta extendi dicit, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum, vel huc atque illuc deflectendo subsultet, in qua denique nihil fluxuosum reperiatur. Verum etiam haec expositio obscura videtur Borellio l. c. quod omnia illa vocabula supponant, lineam rectam iam esse cognitam, illud enim esso flexuosum, quod non sit rectum. Klügelius (Mathem. Wörterbuch Th. III. p. 417.) Euclidis verba id sibi velle putat, rectam lineam eam esse, cuius singulae partes similem formam, eandem erga se situm, habeant, in qua explicatione notio eandem situs nonnullis fortasse obscura videbitur. Alii aliter Euclidis verba explicavere. Atque haec ipsa interpretationum diversitas satis indicat, non sine causa Savilium p. 77. dicere „hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quam recentiorum non intelligere.“ Atque in eundem sensum Pfeidererus Thes. inaugur. Tub. 1762. ait: „Definitio lineae rectae Elem. Eucl. L. I. Def. 4. nullius est usus, ac re explicanda obscurior.“ Adeo, ut Savilius ait, rem maxime perspicuam perspicue definire aliquando difficile est. Quum nempe definitionis negotium in eo versetur, ut rem minus aut imperfecte cognitam per characteres eius distinctivos explicemus, notasque, quibus illa ab omnibus reliquis discerni possit, afferamus, patet res omnium simplicissimas, quamvis omnium oculis obversantes satisque notas, vix per characteres adhuc simplices exprimi atque explicari posse. Omnes nominans, quid sit atrum, quid album: at quis alteri id se explicare posse, sibi persuadebit? An linea recta huc referenda

ε. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μήκος καὶ πλάτος μόνοι ἔχει.

ς. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῦτα ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

sit, equidem non dixerim. Illud tamen certum est, id ipsum, quod rectum sit, adeo simplex esse, ut difficile certe sit, notionibus simplicioribus id efferre. Unde etiam tam variae lineae rectae definitiones ortae esse videntur. Alii enim (atque ita fere etiam definitio nostra quarta est apud Campanum) dixerunt, lineam rectam eam esse, quae minima sit inter eosdem terminos, quod ipsum etiam Archimedes non quidem ut definitionem lineae rectae, at ut λαμβανόμενον ponit in Praefat. ad Libros de Sphaera et Cylindro; alii v. c., Proclo referente, Plato: cuius puncta extrema obumbrent media; alii: cuius omnes partes omnibus congruant; alii: quae una ratione inter duo puncta duci possit: alii aliter eius naturam explicare studuerunt. Maxime nobis arridet ea, quam Kraftius Geom. Sublim. p. 2. a F. C. Maiero sibi traditam exhibet, lineae rectae definitio, qua ea esse dicitur, quae circa utrumque extremum (vel etiam circa duo puncta quaecunque in ipsa sumta) tanquam polos circumvoluta situm suum non mutet, quo sensu etiam interpretari possis eam, quam Proclo referente veterum nonnulli dedere, definitionem: ἥτις τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένει. Atque eodem fere sensu Austinus (An Examination of the first Books of Euclid's Elements Oxford 1781. p. 2.) Euclidis definitionem intelligi debere contendit. Cf. etiam Playfair. Elem. of Geometry p. 1., 351., sq. cuius definitio eodem fere redit. Et Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus Mediol. 1753. p. 71.) rectam lineam, quae ex aequo sua interiaceat puncta, ait necessario talem esse, ut circa duo illa immota extrema sua puncta non possit ipsa in alteram partem converti, v. c. a laeva parte in dextram. Ex hac definitione consequitur, per duo puncta non nisi unam rectam transire, adeoque duas rectas spatium non

5. *Superficies* autem est, quod longitudinem et altitudinem tantum habet.

6. *Superficie*i vero extrema, sunt lineae.

7. *Plana superficies* est, quae ex aequo rectis in ea sitis ponitur.

comprehendere, nec segmentum commune habere. Ex hac quoque definitione etiam facile normae aut regulae, ad quam duci debent lineae rectae, examen institui poterit. Norma nempe circa se ipsam circumvoluta eidem lineae congruere debbit.

#### DEFIN. V.

*Superficies*, ut Proclus monet, dici etiam potest, terminus corporis, vel, ut Rob. Simson. addit, terminus communis duorum corporum continue positorum. Neque igitur pars corporis erit superficies, vel, ut aliter dicamus, superficies superficiei imponi nunquam corpus efficiet. Cf. dicta ad def. 2.

#### DEFIN. VI.

Hanc quoque definitionem ita efferre possumus: si qua superficies finita est, fines eius sunt lineae. Itaque lineae nunquam partem superficiei constituent, nec plures iuxta se positae lineae superficiem efficiunt.

#### DEFIN. VII.

In hac definitione verba *ἐξ ἰσῶν* parum atque in definitione quarta obscuritatem habent. Proclus quidem similitudine haec verba explicat aequae in definitione lineae rectae: superficiem nempe planam aequalem esse dicit intervallo suarum rectarum, quod Savilio iudice est non quidem obscurum per obscurius, sed planum et perspicuum per meras tenebras explicare. Clarius aliquanto clarius: ita ut mediae partes ab extremis sursum sursumve subsultando non recedant, vel ita, ut superficies nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil emineus, nihil lacunosum. Eadem tamen, quae Borellius circa similem huius rectae explicationem monuit, hic quoque valent. Neque quoniam explicationes difficultatibus carent. Unde etiam et alias superficiei planae definitiones dederunt, similes fere

ή. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπίπεδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείαις κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν εἰρημένην <sup>1)</sup> γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

1) εἰρημένην habet Ed. Paris. ex Cod. 190. Reliquae editiones et Mss. omittunt hanc vocem, quam certe nemo desideraverit.

iis, quibus ad def. 4. rectam quoque lineam explicatam esse diximus. E quibus reliquis praeferenda videtur ea, quam Proclo teste iam e veteribus quidam exhibuerunt, superficiem planam esse, cuius omnibus partibus recta applicari possit (ἡ πᾶσι τοῖς μέρεσιν εὐθεῖα ἐφαρμόζει), vel, ut paullo distinctius habet Rob. Simson., in qua, sumtis utcumque duobus punctis, recta linea inter illa tota sita est in ista superficie. Id ipsum etiam Euclidis definitionem dicere, contendit Austinus l. c. p. 3. et Hero Nomin. Geometr. edit. a Conr. Dasypodio, in Editione Euclidis ab ipso curata, qui ἐξ ἴσου κεῖται interpretatur: παντοίως ἐφαρμόζει. Atque hanc determinationem in Elementis Euclidis, ac nominatim L. XI. Prop. 1. 2. 3. supponi, monent Simson. et Pflaidererus l. c. p. 2. Campanus habet: Superficies plana est ab una linea ad aliam brevissima extensio, in extremitates suas eas recipiens. Caeterum notandum adhuc est, quod etiam Proclus monet, apud Platonem et Aristotelem ἐπίπεδον saepius pro ἐπιφάνεια in genere sumi, Euclidī contra superficiem planam saltem voce ἐπίπεδον notari. Addimus denique, omnia, quae in Element. libr. I—IV. et deinde L. VI. dicuntur, ad delineationes saltem in superficie plana factas referri debere, etiam ubi haec restrictio non expresse adiiciatur.

#### DEFIN. VIII.

Rob. Simson. monet, auctori huius definitionis id consilium fuisse videri, ut angulum sensu generaliore sumtum explicaret, non eum saltem, qui a duabus rectis, verum etiam eum, qui, ut nonnulli volunt, a recta et curva, vel a duabus curvis effi-

6. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, necius ad alteram inclinatio.

9. Quando vero lineae dictum angulum continentes rectae sunt, rectilineus appellatur angulus.

dicunt. (Hinc etiam in defin. 9. separatim de angulo rectilineo sermo est). At verba *ἐν' εὐθείας*, quae satis perspicua sunt, si de duabus rectis sermo sit, vix habere sensum, quum de recta et curva aut de duabus curvis adhibeantur. Videri igitur hanc definitionem pariter ac definitionem anguli segmenti, ut et ea, quae de angulo semicirculi et segmentorum angulis habeantur lib. III. Prop. 16. et 31. additamenta esse editoris minus periti. Et iam Vivianus vocem *ἐν' εὐθείας* expungendam, et omnia ad angulos rectilineos restringenda esse putaverat. Vid. infra Excurs. ad L. III. 16. Proclus autem ad h. l. multa de variis angulorum generibus disserit, qui vel a variis curvis, vel maxime a diversis circulis, vel etiam a recta et circulo continentur. Sed ad elementa certe angulos non rectilineos hand perire iure pronunciat Playfair.

Generum ad hanc definitionem monendi fuerint tirones, magnitudinem anguli, quod et ipsa definitio innuit, non a magnitudinis rectarum angulum comprehendendum (*crura* vocant), sed a mutua earum positione pendere. Punctum, in quo crura anguli concurrunt, *verticem* vocant.

#### DEFIN. IX.

De hac definitione ac praecedente iure sentit Pfleidererus (Thes. inaugur. Tub. 1784. p. 1. 2.) „Definitiones hac proprio tantum, ad quid notio anguli spectet, innuere, non notionem ipsam declarare censendae sunt: alias idem per idem, obscurum et aequè obscurum explicare iure reprehenderentur. Hinc etiam nullus earum deprehenditur usus ad propositiones de aequalitate, unequalitate, et generatim ratione mutua ac magnitudine angulorum stabilendas.“ Atque hoc sufficere videtur ad defendendum in hac re Euclidem contra accusationes recentiorum

ι. "Όταν δὲ εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεία κἀθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια. Ἀμβλεία γωνία ἐστίν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὁρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ. Σχήμα ἐστι, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι <sup>2)</sup> ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

2) Ed. Paris. Cod. 190. vel *a*, et alii plures Codd. addunt: πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, quae verba tamen, consentientibus etiam de Lambre et Prony in relatione ad Institut. Franc. facta, pro mero coque inutili glossemate habenda videntur, et recte in reliquis Edd. variisque Codicibus desunt.

quorundam v. c. Ohmii (Kritische Beleuchtung der Mathem. überhaupt, und der Euklid. Geom. insbesondere).

#### DEFIN. X. XI. XII.

Angulos deinceps positos τὰς ἐφεξῆς γωνίας Euclides appellat illos duos angulos, qui ab una linea in alteram incidente fiunt ex utraque parte lineae incidentis. Caeterum vox *κλίσις* in Defin. 8. monente Savilio ad angulum rectum et obtusum applicata sensu generaliore sumenda est.

#### DEFIN. XIII.

Distinguendum esse docet Savilius inter ὅρον terminum, et perimetrum sive ambitum figurae. In triangulo v. g. quodlibet latus per se sumtum ὅρος est, sed omnia latera simul sumta perimetor. Caeterum Savilius verba haec: ὅρος ἐστίν etc. nullam ait habere definitionis faciem, sed vocabuli potius per

10. Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus est uterque aequalium angulorum: et insistens recta, perpendicularis vocatur ad eam, super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui maior recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

13. Terminus est, quod alicuius est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab una linea contenta, quae vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram posita sunt, cadentes omnes rectae aequales inter se sunt.

nam synonymum explicationem esse, consentiente Scarburghio, qui haec verba glossema esse putat margini primum adscriptum. Et sane, si desint, nemo ea desideraverit. Rob. Simson. hanc definitionem asterisco notavit.

#### DEFIN. XIV.

Nazdam vocem *σῆμα* figura ab Euclide non de figuris tantum planis, aut in superficie aliqua positis, sed, ut definitione haec innuit, de corporibus quoque adhiberi. Patet id e definitionibus quoque prismatum, pyramidum, conorum, aliorumque corporum, quae ad initium libri XI. habentur.

#### DEFIN. XV.

Facile patet, e mera rei alicuius definitione, quae tantum esset, si quid in rerum natura sit ita comparatum, ut in definitione dictum erat, id hoc illove nomine designandum esse, (quas definitiones veteres logici *nominales* vocarunt) haud consequi, dari aut possibilem certe esse eiusmodi rem. Fieri enim potest, ut, re haud satis pensitata, *ἀνύστα* quoque in relatione coniungantur, v. c. si quis circuli, quadrati, aut anguli circulo non inscriptibilis definitionem dare velit. Reapso igitur esse tales figuras etc., quales in aliqua eius generis definitione describuntur, nisi res per se pateat, tum demum scire

ις'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθείαις διὰ τοῦ κέντρον ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

poterimus, quum ostensum fuerit, qua ratione eius generis figurae fieri possint. Quod etiam ab Euclide plerumque factum esse videmus. Quodsi possibilitas rei per se pateat, tum etiam definitio ita strui poterit, ut rationem, qua res fieri possit, indicet. Eius generis definitiones logici *geneticas*, veteres etiam *reales*, recentiores *syntheticas* vocant. Euclidis circuli definitio: quum nominalis tantum sit, possibilitas rei non inde derivari poterat, verum in postulatis sumebatur. Neque vero eapropter Euclides reprehendendus est, ut pluribus ostendit Scarburgh. ad h. 1. Poterat vero etiam definitio exhiberi *genetica* vel *synthetica* ita fere: Quodsi recta quaecunque circa alterum punctum extremum in eodem plano gyretur, dum in pristinum situm redeat, spatium, quod illa recta percurnit, circulus et linea ab altero extremo rectae revolutae descripta circumferentia vocabitur, ubi facile patet, nihil in definitione sumi, quod non facile effici queat. Unde etiam consequitur, quodvis circumferentiae punctum a puncto illo, circa quod recta circumferebatur, aequè distare, atque illud punctum, quod centrum vocant, intra circulum situm esse. Ac fateor, me non videre, quo iure Scarburghius tam acerbè persurgat Borellium aliosque, qui *genetica* hac definitione uti maluerint. Caeterum rectae, quae ex centro ad punctum aliquod circumferentiae ducuntur, hodie plerumque apud geometras radii, apud Euclidem simpliciter rectae ex centro, αὶ ἐκ τοῦ κέντρον, libr. III. Def. 1. et Prop. 26. vocantur. Ubi de circulis describendis agitur, vox *διάστημα* adhibetur, quae minus



16. Hoc autem punctum centrum circuli vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quaedam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentia; quae et bifariam secat circulum.

18. Semicirculus vero est figura contenta a diametro, et ea circuli circumferentia, quae a diametro intercipitur.

accurata videri potest, quum rectam lineam brevissimam esse inter duo puncta supponat, cuius rei in Elementis nulla occurrat mentio, et casus tantum singularis L. I. 20. demonstratur. Nonnunquam circuli nomine circumferentiam quoque vel peripheriam denotant. Rectius tamen illae nomine etiam distinguuntur. Pariter partes circumferentiae, quas vulgo, verosimiliter secundum Arabes (cf. Campani III. Def. 7.) arcus vocamus, Euclides semper peripherias vocat. Vid. Pflleiderer. in Hauberi *Chrestom. Geometr.* p. 284.

#### DEFIN. XVII. XVIII.

Verba: ἡ δὲ καὶ διὰ τέρους τὸν κύκλον, quae praevie tantum definitionis 18. gratia adiuncta esse censi debent, haud esse partem definitionis, sed ex definitione consequi monet Rob. Simson. Et Scarburghius quidem glossema Elementis assutum esse putat. Quidquid sit, hanc definitionis consequentiam, um quoad circumferentiam, quam quoad superficiem circuli demonstrari oportebat, quod Thaletem fecisse Proclus refert, superiore circuli parte inferiori superposita. Cf. infra Obs. ad III. Def. 1. Idem etiam probari posse e libri tertii propositionibus 31. 25. 24. monent Simson. et Pflleiderer. (Thes. inaugur. Tab. 1784. p. 4.), qui addit, ita demum a subreptionis vitio liberari sequentem definitionem 18. Pariter ostendi poterit, valere etiam conversam, nempe rectam, quae circulum bifariam dividat, per centrum transire, adeoque reliquas, quae circulum secant, nec per centrum transeant, rectas eum in inaequalia segmenta dividere, et vice versa. In Procli commen-

ιθ'. Τμήμα κύκλου <sup>1)</sup> ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας [ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου].

κ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κά. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

1) Definitionem hanc segmenti circuli habent quidem libri mss. et editiones Graecae omnes, unde nec nos eam delere volumus. At, quum eadem ut L. III. Def. 6. recurrat, ex Buteonis, Savillii et Scarburghii sententia eam pro spuria habendam putamus. Semicirculi mentio in definitione antecedente facta huic additamento ortum dedisse videtur. Procli Commentarius eam non habet, nisi quod in Commentario ad definitionem praecedentem eiusmodi aliquid ab initio adiicit. Verba sub finem addita, quae uncis inclusimus, eo magis suspecta sunt, quod non tantum in editionibus Basil. et Oxon. et Codice Peyrardi f, sed etiam L. III. Def. 6. desunt. Et L. III. Prop. 23. 24. 25. 33. 34. τμήμα semicirculum quoque comprehendit. Baermannus hanc definitionem omisit; hinc eae, quae sequuntur, apud eum numero minore designantur. Rob. Simson, quoque asterisco eam notavit.

tario definitioni 18. additur; κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν, semicirculi centrum idem est, quod et circuli. Ad quae verba iure monet Scarburghius, magis proprie dici posse, semicircumferentiae idem centrum esse, quod circuli. Semicirculo enim centrum proprie tribui nequit. Caeterum haec verba, quum in libris mss. Elementorum, ut et Savilius observat, haud legantur, spuria sine dubio esse, aut forte observationem saltem a Proclo factam continere Scarburghius putat.

18. Segmentum circuli est figura contenta recta circuli circumferentia [vel maiore vel minore semicirculo].

19. Figurae rectilineae sunt, quae a rectis continentur.

21. Trilaterae quidem, quae a tribus.

22. Quadrilaterae autem, quae a quatuor.

23. Multilaterae vero, quae a pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum aequilaterum quidem triangulum est, quod tria aequalia habet latera.

25. Isosceles (aequicrurum) vero, quod duo solum aequalia habet latera.

#### DEFIN. XX. XXI. XXII. XXIII.

Addi potest, rectas, quae figuras istas continent, latera figurarum vocari, et omnes simul ambitum vel perimetrum figurarum constituisse, spatium autem ab iis comprehensum aream appellari. Quae in figuris plurium quam trium laterum vertices duorum aequalorum eidem lateri non adiacentium coniungunt, Diagonales vel Diametri figurarum audiunt. Figurae, quae omnia latera aequalia, et omnes etiam angulos aequales habent, regulares, reliquae irregulares vocantur. Sin autem latera tantum sint aut considerentur ut aequalia, figura aequilatera: si anguli tantum, figura aequiangula audiet. Vid. Pflaiderer. in Hauberi Chrest. Geometr. p. 284. sq.

#### DEFIN. XXV.

Addi potest, in triangulo isosceli aequalia latera crura, aequum basin vocari. In aliis etiam triangulis tertium latus, quando a reliquis distinguitur, basis vocatur. Generatim trianguli ac cuiusvis figurae rectilineae basis vocatur illud latus, a quo quo figura constituta concipitur. Vide Pflaiderer. in Hauberi Chrest. Geometr. p. 285.

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κς'. Ἐτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλείαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

λβ'. Ἐτερόμηνες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

#### DEFIN. XXVI.

Σκαληνὸν, quod Hesychius interpretatur: σκολιὸν, tortuosum, melius a σκάζω, claudio, derivatur, quod, ut Proclus ait p. 47. triangulum scalenum πανταχόθεν χωλεῖ. Caeterum addi potest, in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, Hypotenusam, reliqua autem latera, quae angulum rectum comprehendunt, Cathetos appellari.

#### DEFIN. XXX. XXXI. XXXII. XXXIII.

Has definitiones Pfeidererus observat l. c. Th. 2. quamvis superabundantes, vitiosas non esse. Superabundantes nempe sunt. Continent quippe plures notas, quam quae ad rem discernendam sufficiant. Ita v. c. satis erat dicere, quadratum esse figuram quadrilateram aequilateram, in qua unum saltem angulum rectum esse constet. Omnes enim rectos esse, facile inde probari poterat. Pariter de rhomboide monet Simson, satis fuisse dicere, esse figuram quadrilateram, quae habeat

26. Scalenum autem, quod tria inaequalia habet

lata.

27. Insuper trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet angulum rectum.

28. Obtusangulum autem, quod habet angulum obtusum.

29. Acutangulum vero, quod habet tres angulos acutos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum quadratum quidem est, quod et aequilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero aequilaterum.

32. Rhombus vero, quod aequilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos aequalia inter se habet, quod neque aequilaterum est, nec rectangulum.

latera opposita aequalia, quod nempe angulorum oppositorum aequalitas inde sponte fluat, et vice versa. Nihil tamen falsi continent hae propositiones, quamvis plus ac necessarium erat, efferant. Denique liceat observare, in his et nonnullis precedentibus definitionibus idem valere, quod de definitione circuli monuimus, possibilitatem rei ex sola definitione nequaquam inferri posse. Omnes etiam has figuras in eodem plano positas intelligi, diximus ad defin. 7. Proclus monet, *τετραγώνον*, quod proprie omnes figuras quadrilateras comprehendat, tamen de sola figura quadrilatera aequilatera et rectangula dici. Vocem *ῥόμβος* Proclus a verbo *ῥομφαίω*, in circulum torques, derivat, quod sit quadratum quasi distortum, nisi sane verius *ῥομφαίω* a *ῥόμβος* derivandum est. Est nempe *ῥόμβος* (rhombus solidus) proprie conus rectus duplex, ex utraque parte eiusdem basis, eadem utrimque altitudine constitutus, quem tanquam turbinaem vel trochum in circulum

λδ. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καὶ λείσθω.

λε. Παράλληλοι εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον καὶ ἐκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

agere possis. Tale deinde corpus si a plano per con-  
tines transeunte secetur, existet in plano a turbine secto figuram  
quem rhombum (rhombum planum) vocant mathematici. Sed  
Savilius contra a rhombo plano rhombum solidum denominationem  
accepisse putat. Oblongum, sive rectangulum, cuius  
unum latus est recta A, alterum ei contiguum recta B, huius  
nota: AXB designare solent, cuius rei ratio infra patebit.

#### DEFIN. XXXIV.

Figurarum, quas Euclides trapezia vocat, tres species facit Proclus. Vel enim duo saltem latera habent parallela et rectas haec latera iungentes aequales — atque haec quidem Proclus trapezia aequicrura vocat — vel duo quidem latera parallela habent, at rectas ea iungentes inaequales, quae trapezia scalena vocat Proclus: vel nullum latus alteri parallelum habent, et tum Proclo trapezoidea audiunt.

#### DEFIN. XXXV.

Circa hanc definitionem nonnulli recentiores Mathematici (v. c. Hauff., Hoffmann., Lüdicke., alique) id potissimum desiderarunt, quod negative tantum expressa sit, vel concurrens sum rectarum parallelarum neget. At recte contra monuit Müller. (ausführl. und evidente Theorie der Parallellinien Nürnberg. 1819. p. 22.) facile idem prorsus ita exprimi posse: rectae parallelae dicuntur, quae in eodem plano ita sitae sunt, ut quousque continentur semper omnia unius puncta sint ex eadem parte alterius. Proclus ad hanc definitionem refert, Posidonium rectas parallelas dixisse eas esse, quae, quum in eodem sint plano, neque convergant, neque divergant, sed ita positae sint, ut omnes ex una earum in alteram demissae perpendiculares sint inter se aequales. Quae ipsa definitio aliis quoque placuit. Involvere tamen ea videtur, rectarum eam

Reliqua autem quadrilatera trapezia vocentur.

35. Parallelae rectae sunt, quae in eodem plano  
sunt, et productae in infinitum ad utramque partem,  
neutram sibi coincidunt.

esse, ut situm habere possint, in quo perpendiculares  
una in alteram demissae aequales sint, quod ipsum autem  
demonstrari debere videtur, vel, ut aliter dicamus, involvit,  
nam, et quia omnes in rectam aliquam demissae perpendi-  
culares requies sint, etiam ipsam rectam esse. Alii ita: si  
duas in eodem plano sitas rectas alia recta incidat, quae  
angulum vicinum aequalem faciat interno ad easdem partes  
verso, duae istae rectae parallelae erunt, ubi probandum erit,  
etiam, quae ab una recta hac ratione secantur, etiam ab aliis,  
quibus secantur, rectis eodem modo secari. Conf. Klügel.  
allgem. Wörterbuch ad vocem: *Parallelen*.

Praeter 35., quas Euclides habet, definitiones, duas ad-  
dendas putat Clavius (quas etiam Henricus et Barrov. in  
sua Descentorum editione subiunxerunt) unam nempe 36.  
(quam et Condalla habet) qua figuras quadrilateras, quarum  
bina opposita latera sunt inter se parallelae, parallelogramma  
vocari doceatur, alteram 37. qua indicetur, quid sint paral-  
lelogrammorum complementa circa diametrum, de quibus prop.  
35. H. sermo est. Et definitionem parallelogrammorum qui-  
bus haud cum Scarburghio ad I. 33. et 34. pro superflua  
habere possumus. Quamvis enim parallelogrammum non sit  
nova figurae species, sed, ut infra videbimus, tantum figuras  
ad 30-33. explicatas comprehendat, iuvat tamen exponere,  
ad generali hoc nomine intelligi velimus, nec definitio in-  
venit semper, novum aliquid, de quo ante plane non sermo  
erat, indicari. Parallelogrammorum complementa autem quid  
sint, melius intelligetur, postquam de rectis parallelis actum  
erit. Confer itaque dicta ad I. 43. Quin aliquot etiam Eu-  
clideum definitionum, ut Savilius monet, exiguum usum  
esse laudandum est, ut in magna domo multa supellex, quae  
non videtur, ut loquitur ille cecus (Naevius), emitur tamen.

## ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ἡγήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεΐαν ἐπ' εὐθείας καὶ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.

## POSTULATA.

Postulata et Axiomata illud, ut Proclus l. III. p. 50. a commune habent, ut nulla egeant demonstratione, per fidem faciant, et consequentium fiant principia. In eo vero ex Gemini sententia, quem postea fere omnes secuti sunt differunt, quod postulata quidem aliquid efficere iubeant quod habeat facilem et cuius obviā constructionem, axiomata contra aliquid verum esse asserant, de quo nemo, qui verborum sensum probe intellexit, dubitare potest. Mathematici autem postulata pariter atque axiomata volunt esse quam paucissima, ne quid forte ut effectui facile immisceatur quod quomodo fieri possit, non omnibus pateat, aut pro certo aliquid sumatur, quod dubium adhuc esse possit. Aut, ut Barrov. ait (*Lect. Mathem.* 1661. Lect. IV. p. 66.) „Axiomata praemittunt Mathematici paucissima; paucissime quidem petunt, adsumunt aut praesupponunt. Est enim tenerrimum frontis et stomachi robustissimi, pudentissimum genus humanum et taedium patientissimum. Quemvis concoquere malum laborem in dictis suis demonstrandis, quam assensum gratuitum emendicare, vel nimiam auditorum liberalitatem experiri. Proprii ratiocinii virtuti, non alienae facilitati, deberi volunt conclusionum suarum evidentiam et firmitatem. Per longas ambages morosius ac proluxius aliquas propositiones, alioqui facillimas, deducere satagunt, eo quod a multiplicando postulatorum et axiomatum numero vehementer abhorreant.“ Ad id deinde Barrov. sine ratione Ramum (cum quo etiam recentiores nonnulli faciunt) Euclidem acriter reprehendisse



## P O S T U L A T A.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.
2. Et finitam rectam in directum continuo produci.
3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

quod is plurimas propositiones susceperit demonstrandas, quas ex Rami sententia satius fuisset, seu sua luce claras arripere, indemonstratas anticipare, in axiomatum censum referre: in quo omnes harum rerum intelligentes consentientes habebit Barrow.

Ad postulatam primum monet Scarburgh., mente tantum ductam concipi rectam ab uno puncto ad alterum, et ceteratim ea omnia, quae sive in postulatis, sive in problematibus fieri inbeant mathematici, imaginatione saltim ita effectum concipienda esse, neque manuum litterarum ductum, qui semper imperfectus sit, ad veritatem mathematicam intelligendam requiri, figuras tamen manu factas imaginationi succurrere, unde semper regulae et circini usum hactenus permissum esse potarint geometrae.

Quod si postulata eo sensu sumantur, quo, Procl<sup>o</sup> teste, Geminus ea commendanda putavit, manifestum est, quod et Proclus avertit, id, quod pro quarto postulato quidam habuere (Campano est postulatam tertium, quod nempe duo prima in unum contrahit), nempe omnes angulos rectos inter se aequales esse, pariter atque id, quod quintum esse voluerunt, nempe rectas, in quas incidens alia recta faciat angulos internos minores duobus rectis, si opus sit, productas concurrere, neutiquam ad postulata referri debere (cf. Müller a. 1819. p. 4. sqq.), nec magis illud, eas rectas spatium non comprehendere, huc pertinere. Quum tamen Proclus testetur, sua iam aetate plures has propositiones per postulata retulisse, et codices etiam mss., quos Pey-

δ. Καὶ πάσας <sup>1)</sup> τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπέπτουσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης <sup>2)</sup> τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπέπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ς. Καὶ δύο εὐθείας <sup>3)</sup> χωρίον μὴ περιέχειν.

1. *πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.* Ita in axiom. legunt edit. Basil. & Oxon.

2. *ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπέσονται ἀλλήλαις.* Ita in axiom. legunt ed. Basil. et Oxon.

3. *δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.* Ita in axiom. habent codd. Peyrardi d. f. h. k. l. m. n. et editiones Basil. et Oxon. Caeterum, ut Peyrardus observat, in quibusdam codd. haec propositio tam in postulatis, quam in axiomatibus habetur.

rardus contulit, omnes postulatam quartam et quintam, nonnulli etiam sextam habeant (editiones tamen Basil. et Oxon. ea inter axiomata referunt); quum in primis ex Arabico aut Graeco factis versionibus Latinis Elementorum Campani (ut vulgo volunt), Zamberti, Commandini quinque postulata habeantur; quum in aliis etiam antiquis scriptoribus, qui Euclidis postulata retulere, v. g. Censorino, Martiano Capella, Boëthio pariter quinque illa postulata enumerentur (conf. *Zwey mathematische Abhandlungen von Scheibel, Breslau 1807. p. 17. sqq.*), necesse est, postulata ab illis alio sensu sumta fuisse. Ac reapse Proclus ait, hypotheses, postulata, axiomata alios alio sensu dixisse, et nominatim nonnullos omnia, quae ad Geometriam speciatim pertinerent, inter postulata, reliqua, quae omnibus disciplinis mathematicis communia essent (cf. Schwab. Commentat. in Euclid. Lib. I. §. 31.) inter axiomata retulisse, quo tamen axioma octavum non quadrat. Atque hi quidem decepti fuisse videntur titulo: *κοινὰ ἔγνοιαι*, quem ita interpretabantur, ut notiones pluribus

4. (Aliis: Axioma 10.) Et omnes angulos rectos aequales inter se esse.

5. (Aliis: Axioma 11.) Et si in duas rectas recta quaedam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere, ad quas partes sunt anguli duobus rectis minores.

6. (Aliis: Axioma 12.) Et duas rectas spatium non continere.

mathematicis disciplinis communes intelligerent, quem sensum etiam Scheibel. l. c. tuetur. Wallisius etiam (Oper. Mathem. T. II. p. 667. sq.) cum hac opinione facit. Nos locum quidem, quem in mssis habent, mutare noluimus, at, consentientibus viris doctissimis, Barrov., Rob. Simson., aliisque plurimis, rectius ea axiomatibus, et ne his quidem omnia accenseri putamus. Nempe postulatum quartum, aut, ut alii volunt, axioma decimum, omnes angulos rectos aequales esse, demonstratione egere, nec pro axioma, multo minus pro postulato sumi posse, dudum monuere viri docti, nominatim Pfeiderer. Thes. inaugur. Tub. 1784. Thes. 4. Demonstrationem propositionis satis facilem, uno nempe angulo recto alteri superposito, exhibet Proclus p. 53. (Cf. Schwab. in Euclid. lib. I. §. 33.). Unde consequitur, constantis esse magnitudinis angulum rectum, adeoque pro mensura reliquorum sumi posse. Vid. Pfeiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 566.

De postulato quinto, aliis axioma undecimo, ad El. I. 29. et in Excursu ad eam propositionem fusius dicitur. Tuum monemus Peletarium in Elem. Geom. satis perverse hoc axioma adeo inter definitiones referre voluisse; esse enim ait definitionem linearum non parallelarum. Postulatum 6. vel, ut alii est, Axioma 12. quod nempe duae rectae spatium non comprehendant, ex notione lineae rectae a Maiero explicata consequi diximus ad definitionem quartam. Et recte

## ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

α. Τὰ τῇ αὐτῇ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλει-  
πόμενά ἐστιν ἴσα.

Playfair, observat, hoc axioma supplere apud Euclidem defectum definitionis rectae, quae certè haud perspicua sit, nec usquam adhibeatur, quum hoc potius axiomate demonstrationes, quae huc pertineant, nitantur.

## ΑΧΙΟΜΑΤΑ.

Axiomata, quae et κοινὰ ἔννοιαι, communes notiones, vocantur, quod, ut Savilius ait, omnium mentibus quasi insita et innata sit eorum notitia, nulla egere demonstratione diximus, vel ita perspicua esse debere, ut nemo, qui verborum sensum intellexerit, de veritate asserti dubitare possit. Neque tamen propterea, monente Barrowio Lect. Mathem. Lect. VII. p. 115. putandum est, ea simpliciter ἀναπόδεικτα esse, omninoque demonstrari non posse. „Sic enim, Barrov. addit, paucissima vel nulla cuiuslibet particularis scientiae pronuntiata possent haberi vel appellari principia. Eo enim propendeo, ut existimem, praeter unicum illud omnis ratiocinii fundamentum: contradictoriae propositiones nequeunt esse simul verae vel simul falsae, nullum aliud dari simpliciter indemonstrabile axioma, Saltem particularium scientiarum principia nedum possunt, at etiam debent, si poscat discipulus, a magistro demonstrari. Teneant enim, sua munia si probe exequi velit, et nomen suum implere, scientiae praemonstrator onnem a studioso rationabilem (ita cum barbaris loqui liceat) scrupulum eximere; ergo sua, quae adsumit, principia, si obscura sint, exemplis illustrare, si dubia,

## NOTIONES COMMUNES, SEU AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.
2. Et si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.
3. Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.

confirmare debet (ut res fere et subiecta materia patietur) ex aliis notioribus et magis indubitatis principiis ad ipsa usque omnium prima principia, si opus sit, idque petet studiosus, discutiam promovendo. Si nulla compareant talia, veritatem axiomatum geometricorum ostendet per definitiones terminorum: ut si quis ambigat de eo, an totum sua parte sit maius: si nullum reperiatur in metaphysicis theorema vel axioma certius, evidentius, simplicius illo, per quod ostendatur, recurrendum est ad definitiones totius et partis, maioris ac minoris, e quibus recte positae haud difficile fuerit illud axioma demonstrare. Pariterque se res habet in reliquis."

Quatenus igitur Euclidis axiomata, quae omnia defectui definitionum accuratarum, notionum simplicium aequalitatis, inaequalitatis, lineae rectae etc. supplendo destinatae esse censendae sunt (conf. Wolf. de methodo mathem. brevis commentatio Elem. Mathem. Tom. 1. p. 7.) eam evidentiam habere videantur, ut in iis acquiescere possimus, nec ulteriorem demonstrationem requiramus, reprehendendi tamen non sunt, qui subtilius omnia rimati ad simpliciora adhuc principia progredi tentarunt, quin probandi, si reapse simpliciora atque evidentiora sint principia, quibus suas demonstrationes superstruant. Ita Proclus refert, Apollonium primum Euclidis axioma: *Quae eidem aequalia sunt, aequalia sunt inter se*, demonstrare conatum esse, sumto 1) ea, quae eundem locum occupent, inter se aequalia esse, 2) quae eundem locum occupent, et aliquid tertium, inter se eundem locum occupare. Haec ipsa tamen supposita Euclideis haud certiora, forte etiam

δ. Καὶ ἐὰν ἀνίστοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν  
ἄνωα.

ε. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίστων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ  
ἴσιν ἄνωα.

obscuriora esse, nec in omnes omnis generis quantitates quadrare monuerunt Proclus et Savilius. Sano tamen sensu Apollonii enunciatum sumi, atque ita reliqua fere omnia Euclidis axiomata ex axioma 8. derivari posse, iure existimat Austin. p. 8. et Hauber. Chrest. Geometr. p. 130. Generatim etiam certum est, axiomata, quae Euclides habet, alia ab aliis pendere, ita ut, sumto uno, legitima demonstratione inde deduci possit alterum, v. c. sextum e primo (cf. Schwab. Commentat. in prim. Elem. Euclidis librum §. 52. et alibi, et Pfeiderer, in Hauberi Chrestom. Geom. p. 289. sqq. Garz. allgemeine Größenlehre Halle 1820. p. 15. sqq.) ac 7. prima axiomata aliquanto generalius ac brevius ita efferrī posse: *Aequalia si aequales variationes subeant, aequalia erunt, quae inde nascentur. Aequalia autem si inaequales, aut inaequalia si aequales variationes subeant, inaequalia inde nascentur.* Distinctius autem et scopo Euclidis accommodatius erat, singulas, quae in censum veniunt, variationes nominatim ac a reliquis separatim recensere. Axiomati 5. addi poterat, ut Clavius monet, aliud ei simile axioma: *Si ab aequalibus auferantur inaequalia, reliqua sunt inaequalia.* Pari ratione axiomatici 4. aliud simile addere nihil attinet. Facile enim patet, si quis dixerit: si aequalibus inaequalia addantur, tota esse inaequalia, idem illum dicere, quod in axioma 4. enunciat. Sextum etiam et septimum axioma generalius admittunt enunciatum in hunc fere modum: *Quorum aequae multipla aut aequae submultipla aequalia sunt, sunt inter se aequalia.* At Euclidis scopo sufficebant dupla et dimidia. Ad axioma 8. monet Savilius, distinxisse Geometras inter ἐφαρμόζειν et ἐφαρμόζεσθαι. Illud nempe dici de superpositis, quae perfecte congruant, hoc de superpositis, quae quoque modo coaptentur, id quod ex demonstratione Lib. I. prop. 4. patere arbitratur. Ipse tamen fatetur,

1. Et si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.

3. Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

In Lib. I. prop. 8. id discrimen haud ita accurate observari, nisi fore incuria librarium *ἐφαρμοζομένης* positum sit pro *ἐφαρμόζοντος*. Caeterum huius axiomatis ad sequentia applicationes supponunt, tanquam ex communi notione superficiei planae notum, planum ita posse plano applicari, ut secundum omnem suam extensionem cum illo coincidat. (Pfleiderer. in Hauberi *Chrest. Geom.* p. 295.) Conversam quoque huius axiomatis veram esse, ait Clavius, in quo tamen Savilio monente errat. Vera nempe est conversa, si de lineis rectis et angulis rectilineis sermo sit, at non de aliis quibuscunque quantitatibus, nisi forte etiam hic distinguere velis inter *ἐφαρμοζόντων* et *ἐφαρμόζοντων*. Tum dicere possis: Quae inter se aequalia sunt, sibi quoque modo coaptari possunt (*ἐφαρμοζόντων*) at non semper perfecte congruunt (*ἐφαρμόζοντων*). Verum etiam ita *propositio* erit non perfecte conversa axiomatis 8. Rectas autem omnes inter se aequales etiam sibi mutuo congruere, idemque de angulis rectilineis valere, in sequentibus, praesertim 4. et 8. libri I. supponitur, et demonstrari etiam potest, dummodo postulatum 6. in nostra editione, nempe duas rectas spatium non includere pro axioma sumas, atque ita demonstravit Savilius p. 152.

In axiom. 9. addi potest monente Savilio: *Totum aequale ut omnibus suis partibus simul sumtis*. Apud Barrovium et Clavius (qui etiam nonnullis praecedentibus axiomatibus aliqua consecutaria per se perspicua addit) post axioma 9. intertuntur duo alia huius sententiae:

10. 1. *Duae rectae segmentum commune non habent*. Hoc axioma certe in l. XI. prop. 1. supponi videtur. Rob. Simson. idem monet, ex l. I. prop. 11. illud derivari posse. At, ad quoque concedatur, de quo tamen ambigi posse videtur, item tamen axioma, quod caeterum ex Maieri definitione

ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἐστίν.

lineae rectae consequi supra diximus, iam in accuratiorē demonstratione I. I. prop. 1. supponitur (vid. Proclus p. 59. et Savil. ad prop. 1. p. 175.), pariterque in demonstratione I. 4. et I. 8. monente Pfeiderero Thea. inaug. 1787. Thea. 4. unde rectius hoc assertum pro axioma sumseris.

11. a. *Duae rectae in uno puncto concurrentes, si producantur ambae, necessario se mutuo in eo puncto secabunt.* Quo vix opus esse videtur. Nostra deinde postul. 4. 5. 6. vel axiom. 10. 11. 12. sunt apud Claviū 12. 13. 14. Alia quaedam axiomata Clavius, Henrion., Barrov., Baermann. aliique addidere, quibus tamen nos facile carituros putem. At forte non inepte addi possunt ea, quae sequuntur:

Ax. 13. *Recta, cuius pars intra spatium limitibus unde quaque circumscriptum i. e. intra figuram aliquam sita est (vel quae in plano figurae per punctum aliquod intra figuram ducitur) ex utraque parte producta figuram istam in duobus minimum punctis secabit.*

Ax. 14. *Duae figurae, in eodem plano descriptae, quarum una punctum aliquod intra alteram, aliud autem punctum extra eam situm habet, necessario se invicem secabunt.*

Ax. 15. *Si a puncto ex una parte rectae alicuius infinitae sito ad punctum ex altera parte situm ducatur recta aliqua, duae hae rectae necessario se in puncto aliquo secabunt.*

(Pfeiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 295. sq. et Lorenz. erster Cours der reinen Mathem. Geometr. §.



1. Et quae eiusdem duplicia, aequalia inter se sunt.
2. Et quae eiusdem dimidia, aequalia inter se sunt.
3. Et quae congruunt inter se, aequalia inter se sunt.
9. Et totum parte maius est.

(l. 199.) Caeterum ut supra iam monuimus, fuerunt a  
 tem poribus, qui plura alia, quae in sequentibus  
 demonstrantur, adeo clara et facilia esse putarent, ut in axio-  
 matum et postulatum numerum referri possint. At metho-  
 das mathematica, ut Barrov. monet l. c. p. 66. strictissi-  
 mam principiorum paucitatem affectat, vel potius efflictim  
 deperit. Neque tamen negandum est, „multo plura esse, ut  
 Savilius ait p. 156. (et iam ante eum Campanus monuit ad  
 isem axiomaticum) quibus passim et Euclides ipse et alii  
 Geometrae inter demonstrandum utantur, quae tamen omnia  
 praemissis principiis, vel a logica naturali fere originem  
 habent, qualia sunt: contradicentium perpetuo unum esse  
 verum, aliud falsum, ex quo et illud oritur, duas magnitu-  
 dines homogeneas, itemque angulos aut esse inter se aequales,  
 aut inaequales, et, si inaequales, alteram esse maiorem, al-  
 teram minorem. Item principium illud logicum, illud esse  
 falsum, ex quo per necessariam consequentiam falsum sequa-  
 tur, quum ex veris nil nisi verum, ex quo pendet tota vis  
 demonstrationis per impossibile. Et eius-  
 modi quidem axiomaticum et aliorum generum plura sunt ex-  
 empla, quarum numerum iniis difficile, quae inter demon-  
 strandum non animadvertentibus etiam occurrunt, quae scori-  
 m adnotare studiosis inter legendum commodum foret.“  
 Leges tamen rigorosae methodi an id permittant, dubitari  
 possit, monente Pfeiderero in Hauberi Chrestom. Geometr.  
 p. 286.

## HYPOTΑΣΙΣ α.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνου  
ισόπλευρον συστήσασθαι.

Ἐκθεσις. Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα <sup>1)</sup> πεπερα-  
σμένη ἡ *AB*.

Προσδιορισμός. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς *AB* εὐθείας  
πεπερασμένης <sup>2)</sup> τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

1. εὐθεῖα omitt. edd. Basil. et Oxon.

2. πεπερασμένης omitt. edd. Bas. et Oxon.

## PROPOSITIO I.

Observ. Problema continet haec propositio. Differunt  
autem problemata ac theoremata inter se eodem modo atque  
ex Gemini sententia postulata et axiomata. Caeterum Euclides  
utrumque communi nomine *πρότασις* comprehendit, et potes-  
t sane, quod et Savilius ex parte monet, facile unum genus in aliud  
converti. Sub finem tamen Euclides semper ea distinguit so-  
lemnibus verbis: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, vel ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Pro-  
blemata pariter ac theoremata plures partes habent. Et ve-  
teres quidem in illis, si omni numero absoluta sint, inesse  
dixerunt *πρότασιν*, *ἐκθεσιν*, *διορισμὸν*, *κατασκευὴν*, *ἀπόδειξιν*  
*συμπέρασμα*. *Πρότασις* est ipsa propositio, quae in proble-  
mate datum et quaesitum, in theoremate pariter datum au-  
suppositum, et id, quod demonstrari oportet, complexum  
est. Ita nostrum problema postulat, super datam rectam terminatum  
triangulum aequilaterum constituere. *Ἐκθεσις* id, quod uni-  
versaliter datum esse dictum erat, ad singulares schematum  
lineas applicat, et nonnunquam explanat v. c. hic: Sit data  
linea *AB*. *Διορισμός* simili ratione *quaesitum* in certo aliquo  
exemplo ad oculos ponit. *Κατασκευὴ* ea, quae facienda pro-  
ponebantur, efficere docet, cui subiungunt nonnulli alterum  
*διορισμὸν*, quo enunciatur, ea, quae fieri debeant, in pro-  
posito exemplo facta esse. *Ἀπόδειξις* id demonstrat, ac *συμ-  
πέρασμα* inde concludit, quae in problemate fieri iussa erant,  
iam reapse facta esse. Et similiter fere res se habet in theo-

## PROPOSITIO I. (Fig. 1.)

Super datam rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

Expositio. Sit data recta terminata  $AB$ .

Determinatio. Oportet igitur super  $AB$  rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

rematibus. Non tamen omnes hae partes expresse enunciantur. In pluribus Mss. etiam in hac propositione hae voces desunt. Quia VV. DD. de Lambre et Prony in Praefatione, Euclidi a Peyrardo edito praeposita, istas denominationes meras commentatoris angas esse (une pédanterie de commentateur) promeruerunt. Aliter tamen de ea re iudicat Savilius, qui has propositionis partes fusius explanat. Vide Hauberi Chronom. Geom. p. 168. sqq. Nobis sufficiat eas semel exempli causa protulisse. Propositio, Demonstratio ac Conclusio nunquam deesse possunt. Cf. Savilius. Ad propositionis enunciantum quod attinet, *Datum* quid sit, alii aliter exposuere, ut videtur et in iis, quae Procli Scholiis subiuncta sunt in Editione Basilensi 1533. Hic sufficiet intelligere rectam, quae reapse exhibita et ob oculos nobis posita est. Casterum Euclides, quem in Elementis id tantum propositum sibi haberet, ut doceret tirones, qua ratione obtineri possit problematum propositorum solutio, contentus fuit, more didactico solutionem proponere, eiusque demonstrationem exhibere, i. e. *Synthesi* tantum usus est; at, qui primus problemata illa sibi proponebat, sive Euclides ille fuerit, sive alius quis, *Analysin* aliquam, sive methodum heuristicam adhibere necesse habebat. Et sane longum fuerit et saepe perdifficile, tirones nulla ante scientia mathematica imbutos semper ope Analyseos a prima artis principia reducere (sed ad haec usque in *Analyse* recedendum foret, quoad nihil adhuc cognitum aut aliunde demonstratum sumere liceret): sufficere videtur docere, quid, et quae quid ratione effici possit: itaque *Synthesis* Euclidis

Κατασκευή. Κέντρον μὲν τῷ  $A$ , διαστήματι δὲ τῷ  $AB$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $BΓΔ$  καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ  $B$ , διαστήματι δὲ τῷ  $BA$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΑΓΕ$  καὶ ἀπὸ τοῦ  $Γ$  σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ  $A, B$  σημεία ἐπεξέχθωσαν εὐθεῖαι αἱ  $ΓΑ, ΓΒ$ .

Ἀπόδειξις. Καὶ ἐπεὶ τὸ  $A$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $BΓΔ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΒ$ · πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $B$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΓΕ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΒΑ$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ΓΑ$  τῇ  $ΑΒ$  ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $ΓΑ, ΓΒ$  τῇ  $ΑΒ$  ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ  $ΓΑ$  ἄρα τῇ  $ΓΒ$  ἴση ἐστὶν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

scopo sufficere putanda est. Conf. Scarburgh. p. 49. Vide tamen Analysin Pflleidereri in Hauberi Chrestom. Geom. p. 299.) At in ipsa tamen compositione nostri huius problematis atque eius demonstratione id forte quis desideraverit, quod Euclides non docuerit, circulos, quos describi iubet, se invicem secare, adeoque in potestate semper esse problematis solutionem. Van Swinden. (Anfangsgr. der Messkunde. Jena 1797. p. 22.) id pro axioma sumit. In usum vocatis iis axiomatibus, quae reliquis addi posse supra vidimus, hac ratione demonstrari id omnino poterit. Quum (Fig. 1.) circulus, quem  $A$  vocabimus, centro  $A$ , radio  $AB$  descriptus sit, patet, punctum  $A$  esse intra circulum  $A$ , punctum  $B$  autem in ipsa circumferentia circuli  $A$  positum. Hinc, quae in recta  $AB$  ultra  $B$  producta sumuntur puncta, v. c.  $E$ , necessario extra circulum  $A$  sita erunt. Si enim neges, puncta ut  $E$  vel in circumferentia circuli  $A$ , vel intra circulum  $A$  sita sint, necesse est. Priore casu foret  $AE=AB$ , posteriore  $AE<AB$ . At, quum  $E$  in  $AB$  ultra  $B$  producta esse su-

Constructio. Centro quidem  $A$ , intervallo autem  $AB$ , circulus describatur  $B\Gamma A$  (Post. 3.); et rursus, centro quidem  $B$ , intervallo autem  $BA$ , circulus describatur  $ATE$  (Post. 3.); et a puncto  $\Gamma$ , quo sese secant circuli, ad puncta  $A$ ,  $B$  adiunguntur rectae  $\Gamma A$ ,  $\Gamma B$  (Post. 1.).

Demonstratio. Et quoniam  $A$  punctum centrum est  $B\Gamma A$  circuli, aequalis est  $A\Gamma$  rectae  $AB$  (Def. 15.); rursus, quoniam  $B$  punctum centrum est  $ATE$  circuli, aequalis est  $B\Gamma$  rectae  $BA$  (Def. 15.). Ostensa est autem et  $\Gamma A$  rectae  $AB$  aequalis; utraque igitur earum  $\Gamma A$ ,  $\Gamma B$  rectae  $AB$  aequalis est. Quae autem eadem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.);  $\Gamma A$  igitur rectae  $\Gamma B$  est aequalis; tres igitur  $\Gamma A$ ,  $\Gamma B$ ,  $AB$  aequales inter se sunt.

nam, erit etiam utroque casu  $AE > AB$ , quod est absurdum. Ergo puncta  $E$  in  $AB$  producta sumpta erunt extra circulum  $A$ . Descripsit deinde alter circulus, quem  $B$  vocabimus, ex centro  $B$ , radio  $AB$ , ex una parte puncti  $B$  rectam  $AB$  secabit in puncto  $A$ , atque ex altera parte in puncto aliquo  $E$  sito in  $AB$  ultra  $B$  producta, i. e. extra circulum  $A$ . Quum igitur circuli  $B$  punctum aliquod  $A$  intra circulum  $A$ , aliud autem punctum  $E$  extra circulum  $A$  situm sit, non hi circuli necessario se invicem secabunt (Ax. 14.) in puncto aliquo  $\Gamma$ . Cf. Wolf. Elem. Geometr. §. 197. Caeterum quum non tantum figurae  $A\Gamma B$ ,  $A\Gamma E$ , verum etiam  $A\gamma B$ ,  $A\gamma E$  sint limitibus undequaque circumscriptae, patet, duos circulos tam supra quam infra  $AB$  in punctis  $\Gamma$  et  $\gamma$  se invicem secare, adeoque duplicem dari problematis solutionem, tam triangulum  $A\gamma B$ , quam  $A\Gamma B$  quaesiti trianguli locum habere posse. An forte plures adhuc solutiones locum habere possint, hic nondum definiri poterit, dum ostensum fuerit, quod in pluribus quam duobus punctis se non secare. Cf.

Συμπέρασμα. Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABI$  τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς  $AB$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθείαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $BΓ$ · δεῖ δὴ πρὸς τῷ  $A$  σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $BΓ$  ἴσην εὐθείαν θέσθαι.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου ἐπὶ τὸ  $B$  σημεῖον εὐθεῖα ἡ  $AB$ , καὶ συνεστήτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ  $ΔAB$ , καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐκ εὐθείας ταῖς  $ΔA$ ,  $ΔB$  εὐθεῖαι αἱ  $AE$ ,  $BZ$ , καὶ κέντρον μὲν τῷ  $B$ , διαστήματι δὲ τῷ  $BΓ$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΓΗΘ$ · καὶ πάλιν, κέντρον τῷ  $A$ , καὶ διαστήματι τῷ  $ΔH$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΗΚΑ$ .

infra Prop. VII. Cor. 2. Ramus monet, esse manifestam hystorologiam in Euclide, quod hoc speciale problema praemittat, nec statim generale illud, quod I. 22. habetur, tractet. Quasi vero eae, quae I. 22. praecedunt, propositiones, quae et ad stabiliendam I. 22. faciunt, hanc ipsam I. 1. non supponant, aut sine ea rite demonstrari possint! Caeterum, et id Proclo p. 59. referente, Zeno Sidonius monuit, in demonstratione tacite sumitur, rectas  $AF$ ,  $BΓ$  ad punctum  $F$ , in quo conveniunt, segmentum commune non habere, unde apparet necessitas id pro axiomate sumendi. Cf. notata ad Defini. 4. et ad Ax. 10. a.

### PROPOSITIO II.

- Obs. Facile patet, varios esse huius problematis casus, prout punctum  $A$  vel in recta  $BΓ$  ipsa aut producta, aut extra eam situm sit, quos plenius enumerat Proclus. Quum

Conclusio. Aequilaterum igitur est  $AB\Gamma$  triangulum (Def. 24.), et constitutum est super datam rectam terminatam  $AB$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO II. (Fig. 2.)

Ad datum punctum, datae rectae aequalem rectam ponere.

Sit quidem datum punctum  $A$ , data autem recta  $B\Gamma$ ; oportet igitur ad  $A$  punctum, datae rectae  $B\Gamma$  aequalem rectam ponere.

Adiungatur ab  $A$  puncto ad  $B$  punctum recta  $AB$  (Post. 1.), et constituatur super eam triangulum aequilaterum  $AAB$  (Prop. 1.), et producantur in directum ipsis  $AA$ ,  $AB$  rectae  $AE$ ,  $BZ$  (Post. 2.), et centro quidem  $B$ , intervallo vero  $B\Gamma$ , circulus describatur  $\Gamma H\Theta$  (Post. 3.); et rursus centro  $A$ , et intervallo  $AH$  circulus describatur  $HKA$  (Post. 3.).

autem exposito casu, qui in nostra figura est, reliqui nihil habeamus difficultatis, supersedere liceat eorum expositione. Forte autem miretur aliquis, et reapse mirati sunt tum veteres, quos Proclus ait simpliciore problematis constructionem adfectasse, tum Ramus aliique, Euclidem his ambagibus uti, ut ad punctum datum  $A$  rectam aliquam  $AA$  ponat, datae rectae  $B\Gamma$  aequalem. Poterat enim brevius dicere: Ducatur ex  $A$  recta quaecunque  $AE$ , ac descripto (Post. 3.) centro  $A$ , intervallo  $B\Gamma$ , circulo, abscindatur  $AA$ , quae proinde aequalis erit rectae  $B\Gamma$ . Poterat sine dubio Euclides ita rem omnem resolvere. At, ut Proclus ait, hoc nihil aliud foret, quam tera petitio principii. Nam qui petit, ut ad  $A$  describatur circulus intervallo  $B\Gamma$ , petit ut ad  $A$  ponatur linea rectae  $B\Gamma$  aequalis, quod fuit demonstrandum nec petendum. Nec paulatim tertium ita intelligendum est, quasi liceret alibi circulum, alibi intervallum circuli accipere, ut ad Post. 3.

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $B$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $FH$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $BΓ$  τῇ  $BH$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $A$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΗΚΑ$  κύκλου, ἴσα ἐστὶν ἡ  $ΑΑ$  τῇ  $ΔΗ$ , ὥν ἡ  $ΔΑ$  τῇ  $ΔΒ$  ἴση ἐστὶν. λοιπὴν ἄρα ἡ  $ΑΑ$  λοιπῇ τῇ  $BH$  ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $BΓ$  τῇ  $BH$  ἴση· ἐκατέρω αὖτε τῶν  $ΑΑ$ ,  $BΓ$  τῇ  $BH$  ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῶν αὐτῶν ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ  $ΑΑ$  ἄρα τῇ  $BΓ$  ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $BΓ$  ἴση εὐθεία κείται ἡ  $ΑΑ$ . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀρίστων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθείαν ἀφελεῖν.

monet Savilius. Praeterea, hac constructione sumta, ac demonstrandam rectarum  $ΑΑ$ ,  $BΓ$  aequalitatem, utraque dicenda erat aequalis esse intervallo, quo puncta extremorum circini, cuius ope circulus centro  $A$  descriptus fuit, inter se distabant. Hoc circini crurum intervallum quum in figura haud ob oculos positum sit, exactissimo geometrae sine dubio minus aptum visum fuit ad rem per se simplicissimam demonstrandam. Malebat ostendere, rectam  $ΑΑ$  pariter ac  $BΓ$  rectae  $BH$  ob oculos positae aequalem, adeoque duas  $ΑΑ$ ,  $BΓ$  inter se esse aequales. Reapse etiam apertura circini, dum a puncto  $B$  ad  $A$  transfertur, variationibus obnoxia est haud detegendis, nisi descriptis, quos Euclides describere iubet, integris circulis. Nec instrumentorum fide niti debet demonstratio. Monenda haec duxi, quo certius sub initium statim operis tirones ἀκριβειαν summi viri observent. His addo, quae Savilius de hac re habet p. 179. „Observent



Quoniam igitur punctum  $B$  centrum est circuli  $IHO$ , aequalis est  $BI'$  rectae  $BH$  (Def. 15.). Rursus, quoniam punctum  $A$  centrum est circuli  $HKA$ , aequalis est  $AI$  rectae  $AH$  (Def. 15.), quarum  $AA$  rectae  $AB$  aequalis est; reliqua igitur  $AI$  reliquae  $BH$  est aequalis (Ax. 3.). Ostensa est autem et  $BI'$  rectae  $BH$  aequalis; utraque igitur ipsarum  $AA$ ,  $BI'$  rectae  $BH$  est aequalis. Quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); et  $AA$  igitur rectae  $BI'$  est aequalis.

Ad datum igitur punctum  $A$ , datae rectae  $BI'$  aequalis recta ponitur  $AA$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO III. (Fig. 3.)

Duobus datis rectis inaequalibus, a maiore rectam minori aequalem auferre.

studendi, si placet, differentiam magnam in hac parte inter problema et theorema. In problemate, ubi quasi manualis operatio requiritur (quamvis etiam ipsa Euclidis et geometrarum problemata a mechanica structura et fabrica abesse longissime, et non tam manus quam mentis opera absolvi ex Platonis sententia dixisset idem Savilius p. 162.), traectio linearum ad alium atque alium situm et positionem admitti non potest: potest in theoremate, ubi nullum opus exigitur, per imaginationem traici linea aut figura a suo loco et superponi alteri lineae vel figurae, ut in quarta propositione fit. Nam, quia in theoremate nihil aliud quaeritur, quam verum et falsum neque quicquam est falsum in illa traiectione, quae per solam imaginationem ad ostendendam conclusionis veritatem fit, et non quasi per fabricam manualementalem, aut ministerium aliquod problematicum, recepta est iure merito in theoremate traectio illa imaginaria, quae in problemate esset vitiosissima."

"Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma$ , ὧν μείζων ἔστω ἡ  $AB$ . δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $\Gamma$  ἴσην εὐθείαν ἀφελεῖν.

Κείσθω 1) πρὸς τῷ  $A$  σημείῳ τῇ  $\Gamma$  εὐθείᾳ ἴση ἡ  $AD$  καὶ κέντρον μὲν τῷ  $A$ , διαστήματι δὲ τῷ  $AD$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $\Delta EZ$ .

Καὶ ἐπεὶ τὸ  $A$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Delta EZ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $AD$ · ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Gamma$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· Ἐκατέρα ἄρα τῶν  $AE$ ,  $\Gamma$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ  $AE$  τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν  $AB$ ,  $\Gamma$ , ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $\Gamma$  ἴση ἀφ' ἧσται ἡ  $AE$ . "Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέρα ἐκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἐκατέρα ἐκατέρα, ὑφ' ὧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

1) Peyrardus ex Cod. 190. vel a. addit γάρ, quod add. Basil. et Oxon. recte omittere videntur, nisi vocem γάρ eo sensu sumere velis, quem etiam nonnunquam habet, ut significet nempe, scilicet. Cf. Prop. 9–12. huius libri cum I. 10., I. 11. Constructio problematis I. 2. tamen pariter ab initio habet γάρ, pariterque II. 11. Haec talia utrum ponere an omittere velis, haud sane multum refert.

### PROPOSITIO III.

Obs. Duo potissimum casus distinguī possunt, prout duae rectae idem punctum extremum habeant, aut non. Reliquis

Sint datae duae rectae inaequales  $AB$ ,  $\Gamma$ , quarum maior sit  $AB$ ; oportet igitur a maiore  $AB$  rectam minori  $\Gamma$  aequalem auferre.

Ponatur ad punctum  $A$  rectae  $\Gamma$  aequalis  $AA$  (Prop. 2.); et centro quidem  $A$ , intervallo vero  $AA$ , circulus describatur  $AEZ$  (Post. 3.).

Et quoniam  $A$  punctum centrum est circuli  $AEZ$ , aequalis est  $AE$  rectae  $AA$  (Def. 15.); sed et  $\Gamma$  eidem  $AA$  est aequalis; utraque igitur ipsarum  $AE$ ,  $\Gamma$  rectae  $AA$  est aequalis; quare et  $AE$  est aequalis rectae  $\Gamma$  (Ax. 1.).

Duabus igitur datis rectis inaequalibus  $AB$ ,  $\Gamma$ , a maiore  $AB$  minori  $\Gamma$  aequalis ablata est  $AE$ . Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO IV. (Fig. 4.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus rectis contentum; et basi basi aequalem habebunt, et triangulum triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt.

casibus similibus his, quos ad Prop. 2. diximus, immorari nihil attinet.

#### PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio prima est, in qua principium con-  
tinentiae sive Ax. 8., eiusque conversa, quatenus conversam  
libet, adhibetur. Non quidem defuere, qui hoc demonstrationis  
repudiarent, quod minus geometricum sit, et mechanici  
sapiat, triangulumque assumat cum motu et ad aliam

"Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὰς δύο πλευράς τὰς  $AB$ ,  $ΑΓ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ , καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΒΑΙ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴσην λέγω, ὅτι καὶ βάσεις ἢ  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , ἢ δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΖΕ$ .

Ἐφαρμοζομένου γάρ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  $ΔΕΖ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $A$  σημείου ἐπὶ τὸ  $Δ$  σημεῖον, τῆς δὲ  $AB$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $ΔΕ$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $B$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $E$ , διὰ τὸ ἴσην

positionem translatum. Et iam Proclus ait p. 66. hanc ἐφαρμογὴν sensibili inniti νοίῳνι, τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ἔχεισθαι ὑπολήψεις. Pariter congruentiae illud principium reiecere Flussas Candalla, Peletarius, Thomas Simpson., qui superpositionem unius figurae super alteram mere mechanicam (a mechanical consideration) esse dicit (Elem. of Geometry. London 1800. p. 255.), alique. At iure his dudum regessere Clavius, Savilius, Scarburgh., Playfair., alique, non manu sed mente tantum fieri illas figurarum superpositiones, nec nisi a notione aequalitatis pendere. Cf. quae e Savilio ad Prop. 2. attulimus. Scite Wallisius ait (Oper. Mathem. T. II. p. 668. : „Si ita sint comparati circulus arcticus et antarcticus, ut si centrum centro accommodari intelligatur, et planum plano, reliqua congruerent puncta: erunt illi (per ἐφαρμογὴν) aequales, utut alter alteri non admoveatur, sed toto coelo distent.“ Playfair. tamen iniustus his cavillationibus eo usque concedit, ut novum axioma sumi posse dicat, huius sententiae: Si duae sint rectae lineae, atque super una earum constituta sit figura quaecunque, super alteram semper constitui

Sint duo tria-gula  $ABF$ ,  $AEZ$ , duo latera  $AB$ ,  $AF$  duobus lateribus  $AE$ ,  $AZ$  aequalia habentia, utrumque utrique, nempe latus  $AB$  lateri  $AE$ , latus  $AF$  vero lateri  $AZ$ , et angulum  $BAF$  angulo  $EAZ$  aequalem; dico et basin  $BF$  basi  $EZ$  aequalem esse, et triangulum  $ABF$  triangulo  $AEZ$  aequale fore, et reliquos angulos reliquis angulis aequales fore, alterum alteri, quos aequalia latera subtendunt, angulum nempe  $ABF$  angulo  $AEZ$ , angulum  $AFB$  vero angulo  $AZE$ .

Congruente enim triangulo  $ABF$  triangulo  $AEZ$ , et posito quidem puncto  $A$  super punctum  $A$ ,  $AB$  vero recta super  $AE$ ; congruet et punctum  $B$  ipsi  $E$ , quia est aequalis  $AB$  ipsi  $AE$ ; congruente autem  $AB$

posse figuram alteri aequalem, e quo deinde omnia derivari possunt, quae vulgo per superpositionem demonstrantur. At dubito, an hac nimia erga obiectatores liberalitate status controversiae multum mutatus sit. Alteram enim illam in axiomate tantam priori aequalem figuram clamabunt illi, nihil aliud esse, quam pariter figurae in alium locum translationem. Rectius tamen ille ac Thom. Simpson., qui ne superpositione opus haberet, mavult propositionem hanc quartam inter Axiomata referre. In theorematibus itaque intacta maneat illa linearum et figurarum mente tantum concepta translatio, sine qua simplicissimarum propositionum vix tolerabilis dari posset demonstratio. Caeterum omnes huius propositionis partes diligentissime explicavit Savilius, cuius observationes legere possis etiam in Hauberi Chrest. geometr. p. 181. Huic propositioni sequens addi potest corollarium: Si duo triangula unum eundem angulum utrimque aequalem habeant, et e rectis etiam hunc angulum comprehendentibus una prioris trianguli aequalis et uni posterioris, altera autem prioris trianguli maior sit altera posterioris, erunt etiam triangula ista inaequalia, et prius qui-

εἶναι τὴν  $AB$  τῇ  $AE$  ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $AB$  ἐπὶ τὴν  $AE$ , ἐφαρμόσει καὶ ἡ  $AF$  εὐθεία ἐπὶ τὴν  $AZ$ , διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν ὑπὸ  $BAG$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ὥστε καὶ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $Z$  σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσιν πάλιν εἶναι τὴν  $AG$  τῇ  $AZ$ . Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ  $B$  ἐπὶ τὸ  $E$  ἐφαρμόκει, ὥστε βάσις ἡ  $BG$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $EZ$  ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν  $B$  ἐπὶ τὸ  $E$  ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ  $\Gamma$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , ἡ  $BG$  βάσις ἐπὶ τὴν  $EZ$  οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρὶον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ  $BG$  βάσις ἐπὶ τὴν  $EZ$ , καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται ὥστε καὶ ὅλον τὸ  $ABG$  τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ  $A EZ$  τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ  $ABG$  τῇ ὑπὸ  $A EZ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $AGB$  τῇ ὑπὸ  $A ZE$ . Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσιν ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν πε-

dem maius erit. Cf. Pfeleiderer. in Haub. Chrest. p. 301. Et multo magis, si utrumque crus angulum illum comprehendens in uno triangulo maius sit, quam in altero, illud etiam triangulum maius erit, quam hoc. — Hac occasione de *Corollariis* universim notari potest, Euclidem ipsum paucissima, aut, ut Austin. putat p. 16., forte ne ullum quidem addidisse, quod nempe brevitatē cōsuleret, nec nisi iis, quae maxime ad scopum suum facerent, immorari vellet. Commentatores autem, ut qui alium scopum haberent, plura subinde addiderunt, e quibus si potissima seligeremus, lectoribus haud ingratum fore putavimus. Graeci ea *πορίσματα* vocabant, quam vocem tamen diversa nonnunquam significatione adhibere solebant. Erat nempe *Porisma*, quod et Proclus innuit (τὸ πόρισμα λέγεται

ipsi  $AE$ , congruet et  $AF$  recta ipsi  $AZ$ , quia aequalis est angulus  $BAF$  ipsi  $EAZ$ ; quare et punctum  $F$  puncto  $Z$  congruet, quia aequalis rursus est  $AF$  ipsi  $AZ$ . At etiam punctum  $B$  puncto  $E$  congruebat; quare basis  $BF$  basi  $EZ$  congruet; si enim, puncto quidem  $B$  ipsi  $E$  congruente, puncto autem  $F$  ipsi  $Z$ , basis  $BF$  ipsi  $EZ$  non congruat, duae rectae spatium continebunt, quod fieri nequit (Post. 6. vel Ax. 12.). Congruet igitur basis  $BF$  basi  $EZ$ , et aequalis ei erit; quare et totum triangulum  $ABF$  toti  $AEZ$  triangulo congruet, et aequale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et aequales eis erunt, angulus nempe  $ABF$  angulo  $AEZ$ , angulus autem  $AFB$  angulo  $AZE$ .

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus lateribus contentum; et basin basi aequalem habebunt, et triangu-

αι ἐπὶ προβλημάτων τινῶν οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πρόβληματα) singulare aliquod problematum genus, vel, ut Pappus in Collect. Mathem. Libr. VII. Praef. ait, mediae quasi naturae inter theoremata ac problemata, quod idem etiam Proclus asserit ad I. 15., atque porismata hoc sensu sumta tribus libris exposuerat Euclides, quos temporum iniuria deperditos restituere conatus est Rob. Simson. Alio autem sensu porisma in elementis sumitur, ubi plerumque significat propositiones, quae cum in ipso demonstrationis cursu se ultro offerrent, (ὅταν τῶν ἀποδεικνύμενων ἄλλο τι συναφανῇ θεώρημα, μὴ προδεικνύμενον, Proclus ait p. 59.) absoluta demonstratione separatim enunciantur, unde etiam Proclo auctore l. c. porisma nomen accipit, ὥσπερ τι κέρδος ὃν τῆς ἐπιστημονικῆς δειξέως πάραργον.

ριεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ ι.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ, προσεβληθειῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ  $ABΓ$ , ἴσην ἔχον τὴν  $AB$  πλευρὰν τῇ  $ΑΓ$  πλευρᾷ, καὶ προσεβληθειῶσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς  $AB$ ,  $ΑΓ$  εὐθείαι αἱ  $BA$ ,  $ΓΕ$  λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΒΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΕ$ .

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $BA$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Z$ , καὶ ἀγρηγῆσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AE$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $AZ$  ἴση ἡ  $AH$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ZΓ$ ,  $HB$  εὐθείαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $AZ$  τῇ  $AH$ , ἡ δὲ  $AB$  τῇ  $ΑΓ$ , δύο δὴ αἱ  $ZA$ ,  $ΑΓ$  δυοὶ ταῖς  $HA$ ,  $AB$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχονσι τὴν ὑπὸ  $ZAH$ . βάσεις ἄρα ἡ  $ZΓ$  βάσει τῇ  $HB$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $AZΓ$  τρίγωνον τῷ  $AHB$  τρι-

Cf. p. 80. Nos sensu paulo generaliore omnia, quae e demonstratione sponte sine longis demonstrationum ambagibus fluunt, Corollaria aut Consectaria dicere solemus, nonnunquam etiam generalius haec atque alia similia Observationes vocabimus.

### Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο V.

Obs. 1. Savilius observat, ἰσοσκελῶν τριγώνων non de pluribus triangulis aequicruris intelligendum esse, sed idem



in triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis  
 equalis aequales erunt, uterque utrique, quos aequalia  
 latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO V. (Fig. 5.)

Isoscelium triangulorum anguli ad basin aequales  
 inter se sunt; et productis aequalibus rectis, anguli  
 sub basi aequales inter se erunt.

Sit triangulum isosceles  $AB\Gamma$ , habens latus  $AB$   
 aequale lateri  $A\Gamma$ , et producantur rectae  $BA$ ,  $\Gamma E$  in  
 directum rectis  $AB$ ,  $A\Gamma$  (Post. 2.); dico angulum  
 $AB\Gamma$  angulo  $A\Gamma B$  aequalem esse,  $\Gamma BA$  vero ipsi  
 $B\Gamma E$ .

Sumatur enim in  $BA$  quodlibet punctum  $Z$ , et au-  
 feratur a maiore  $AE$  minori  $AZ$  aequalis recta  $AH$   
 (Prop. 3.), et iungantur  $Z\Gamma$ ,  $HB$  rectae.

Quoniam igitur  $AZ$  aequalis est rectae  $AH$ ,  $AB$   
 vero rectae  $A\Gamma$ , duae igitur  $ZA$ ,  $A\Gamma$  duabus  $HA$ ,  
 $AB$  aequales sunt, utraque utrique, et angulum com-  
 mune continent  $ZAH$ ; basis igitur  $Z\Gamma$  basi  $HB$   
 aequalis est, et triangulum  $AZ\Gamma$  triangulo  $AHB$

ὅτι καὶ ἐκαστὸν τριγώνων ἰσοσκελῶν. Aliam huius propositionis  
 demonstrationem Proclo referente Pappus dedit in hunc fere  
 modum: Quodsi hoc unum triangulum acquicrurum  $AB\Gamma$  (Fig.  
 5.) posuit, adeoque in  $\alpha\beta\gamma$  repetitum animo concipiamus,  
 non tantum  $AB = \alpha\beta$ ,  $A\Gamma = \alpha\gamma$ ; verum etiam, ob  $\alpha\beta = \alpha\gamma$ ,  
 habebimus quoque (Ax. 1.)  $AB = \alpha\gamma$ ,  $A\Gamma = \alpha\beta$ . Poterit itaque  
 triangulum  $\alpha\beta\gamma$  triangulo  $AB\Gamma$  superponi, ita, ut puncta  $A$  et

γωνίᾳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΓΖ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΒΗ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΑΖΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΗΒ$ . Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ  $ΑΖ$  ὅλη τῇ  $ΑΗ$  ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΑΓ$  ἐστὶν ἴση,, λοιπὴ ἄρα ἡ  $ΒΖ$  λοιπῇ τῇ  $ΓΗ$  ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ΖΓ$  τῇ  $ΗΒ$  ἴση· δύο δὴ αἱ  $ΒΖ$ ,  $ΖΓ$  δύοι ταῖς  $ΓΗ$ ,  $ΗΒ$  ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΖΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓΗΒ$  ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ  $ΒΓ$  καὶ τὸ  $ΒΖΓ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΓΗΒ$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΖΒΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΓΒ$  ἡ δὲ ὑπὸ  $ΒΓΖ$  τῇ ὑπὸ  $ΓΒΗ$ . Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ  $ΑΒΗ$  γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ  $ΑΓΖ$  γωνία ἔδειχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ  $ΓΒΗ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΖ$  ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἐστὶν ἴση, καὶ εἰς ἀπὸ πρὸς τῇ βάσει τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΖΒΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΓΒ$  ἴση, καὶ εἰσιν ὑπὸ τῶν βασίων τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

$\alpha$ , anguli  $ΒΑΓ$ ,  $\gamma\alpha\beta$ ; rectae  $ΑΒ$ ,  $\alpha\gamma$ ;  $ΑΓ$ ,  $\alpha\beta$ , adeoque puncta  $B$ ,  $\gamma$ ; et  $\Gamma$ ,  $\beta$  coincidunt: aequalis igitur erit angulus  $Β$  angulo  $\gamma$ . At quum angulus  $\gamma$  idem prorsus sit, ac angulus  $\Gamma$  ex hypothesis, erunt (Ax. 1.) anguli  $B$ ,  $\Gamma$  aequales. Alii alias deducunt demonstrationes, quae tamen omnes, quamvis simplices, Euclidæae cedere videntur.

Coroll. Triangula aequilatera sunt etiam aequiangula.

Schol. A Thalete Milesio hoc theorema inventum esse Proclus refert.

Obs. 2. Scarburgh. p. 61. posteriorem huius propositionis partem, qua anguli sub basi aequales esse dicuntur, n

æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quos æqualia latera subtendunt,  $\angle Z$  quidem angulo  $ABH$ ,  $\angle Z$  vero angulo  $AHB$  (Prop. 4.). Et quoniam tota  $AZ$  toti  $AH$  est æqualis, quarum  $AB$  rectae  $AF$  est æqualis, reliqua igitur  $BZ$  reliquae  $FH$  est æqualis (Ax. 3.). Ostensa est autem et  $ZF$  rectae  $HB$  æqualis: duae igitur  $BZ$ ,  $ZF$  duabus  $FH$ ,  $HB$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $BZF$  angulo  $FHB$  æqualis, et basis eorum communis  $BF$ ; et  $BZF$  igitur triangulum  $FHB$  triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quos æqualia latera subtendunt (Prop. 4.); æqualis igitur est angulus  $ZBF$  angulo  $HFB$ , angulus autem  $BFZ$  angulo  $FHB$ . Quoniam igitur totus angulus  $ABH$  toti angulo  $AFZ$  ostensus est æqualis, quorum  $FHB$  angulo  $BFZ$  æqualis; reliquus igitur  $ABF$  reliquo  $AFB$  est æqualis (Ax. 3.), et est ad basin trianguli  $ABF$ ; ostensus est autem et angulus  $ZBF$  angulo  $HFB$  æqualis, et sunt sub basi; isoscelium igitur triangulorum etc.

esse ab Euclide profectam putat, sed assutam ab aliquo, qui animadverterit, demonstrare Euclidem triangulorum istorum sub basi constitutorum æqualitatem. Neque enim unquam hæc æqualitatem sub basi æqualitate uti Euclidem in sequentibus propositionibus. Cui quidem argumento opponere liceat, ad hanc certe Prop. 7. demonstrationem opus esse hac posteriore Propositionis 5., ut Rob. Simson. et Peyrard. in Praefatione p. XVIII. monent. Cötsius (Euclid. Elem. Lugd. Bat. Ed. p. 46.) hanc propositionem ex I. 9. et I. 4. demonstrat. quoniam I. 9. pendeat etiam apud Cötsium ab I. 8. hæc a I. 1. et hæc denique a I. 5., in circulum incidere videtur;

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Εάν τριγώνον αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευροὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

"Εστω τριγώνον τὸ  $ABΓ$ , ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ  $AB$  πλευρᾷ τῇ  $ΑΓ$ <sup>1)</sup> ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΑΓ$ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ  $AB$ , καὶ ἀφ' ἡρεσθῶ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $ΑΓ$  ἴση ἡ  $ΔB$ , καὶ ἐπεζεύθω ἡ  $ΔΓ$ .

1) Hic et in linea sequente edit. Oxon. primo loco ponitur rectam  $ΑΓ$ , secundo rectam  $AB$ : et quamvis nihil prorsus intersit, quo ordine hae rectae aequales nominentur, veri tamen simile fuerit, Euclidem, qui primo nominasset angulum  $ABΓ$  primo etiam loco posuisse rectam hunc angulum subtendentem i. e. rectam  $ΑΓ$ . Cum Peyrardo tamen consent. Cod. a. c. ed. Basil.

quamvis in Praefat. contrarium asserat, et excusare istam licentiam aliqui tentarint. Cf. Hauber. Chrest. Geom. p. 204. Eadem demonstratione utitur Van Swinden. Anfangsgr. der Meßkunde, p. 37. et Angel. de Marchettis p. 15.

## PROPOSITIO VI.

Obs. Propositio sexta conversa est quintae. Propositiones nempe primariae, earumque conversae ita ad se invicem se habent, ut suppositio prioris fiat conclusio posterioris, e vice versa, vel, si plures illa habeat suppositiones, una suppositionum illius fiat huius conclusio. Ita v. g. hic in Prop. 5. sumebatur, triangulum esse aequicurum, et inde concludebatur aequalitas angulorum ad basin, in Prop. 6. contra sumitur haec ipsa angulorum aequalitas, et inde concluditur aequalitas laterum his angulis oppositorum. Quamvis enim Prop. 5. pauciter a Prop. 6. categorice expressae sint, facile tamen utraque etiam hypothetice exprimi potest. Vide Haub. Chrest. Geom. p. 196. sq.

## PROPOSITIO VI. (Fig. 6.)

Si trianguli duo anguli aequales inter se sunt, et  
aequales angulos subtendentia latera aequalia inter se  
sunt.

Si triangulum  $ABF$  aequalem habens angulum  
 $ABF$  angulo  $AFB$ ; dico et latus  $AB$  lateri  $AF$  esse  
aequale.

Si enim inaequale est latus  $AB$  lateri  $AF$ , unum  
eorum maius est. Sit maius  $AB$ , et auferatur a ma-  
iore  $AB$  minori  $AF$  aequalis  $AB$  (Prop. 3.), et iun-  
gatur  $AF$ .

Plura adhuc conversionum (*ἀντιστροφῆς*) genera recensent  
Proclus et Savilius. Quam vero non, ut Peletarius vult p. 30.,  
conversione propositionum in universum sint verae, nova illas  
semper demonstratione egere patet. Ea plerumque, atque in  
hac etiam Prop. 6., ita instituitur, ut doceatur, contra-  
rium si quis asserere velit, absurdas consequentias elabi non  
posse. Hec demonstrationis genus *indirectum* vel *apagogicum*  
vocare solent (*ἀπὸ τοῦ ἐκείνου ἀδύνατον*), quod, quamvis nonnulli  
subdubitate videantur, non minus certum est ac demonstratio  
directa; et veris enim falsa iusta ratiocinatione consequi nun-  
quam possunt. Nec sine causa dixere aliqui, esse apagogicam  
demonstrationem quoddam analyseos theoreticae genus. Cf. Klü-  
gel. (Wörterb. ad vocem *Analysis* P. I. p. 90.). Et Scarburgh.  
hanc deductionem ad absurdum *Analysis destructivam* vocat  
p. 62, quod nempe illa per certa ratiocinia falsam suppositionem,  
quae initio sumta erat, destruat. Cf. Borellius p. 1. et Hauber.  
Clarus Geom. p. 210. sq. Conversas, etiam ubi locum habent,  
non omnes affert Euclides, sed eas saltem, quas in proposi-  
tionibus sequentibus usui fore viderat; nos tamen, quantum  
seri poterit, reliquas etiam, quae alicuius momenti sunt, no-  
tabimus, quod iam a Clavio factum videmus. Neque tamen  
minus est, conversam semper, nulla alia interposita, ordine

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta B$  τῇ  $ΑΓ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΒΓ$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta B$ ,  $ΒΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Delta BΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ  $\Delta Γ$  βάσει τῇ  $ΑΒ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $\Delta BΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΓΒ$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἀποπορὸν οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΑΓ$  ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

### Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω οὐ συσταθῆ-

excipere eam, cuius sit conversa. Sic v. g. lib. I. 8. et 26 conversae sunt Prop. 4. Saepe quippe ad demonstrandam conversam alias adhuc propositiones ante demonstrari necess. est. Caeterum, quum duae partes sint in conclusione Prop. 5., nempe 1.) in triangulo aequicruro angulos ad basin 2.) in eodem triangulo etiam angulos sub basi aequales esse de utriusque conversione cogitari potest. Ac prioris quidem conversam exhibet Prop. 6. Euclidia. Posterior conversam ita habebit: Si trianguli  $ABΓ$  (Fig. 7.), anguli  $ΓΒΔ$ ,  $ΒΓΔ$  sub basi aequales fuerint, erunt etiam latera  $AB$ ,  $ΑΓ$  aequalia. Sumantur enim  $BZ=ΓH$ , ducanturque rectae  $BH$ ,  $ZΓ$ , eruntque in triangulis  $ZBΓ$ ,  $HΓB$  rectae  $ZB$ ,  $ΓH$  aequales ex constructione, et quum recta  $BΓ$  communis sit utrique triangulo et angulus  $ΓΒΔ$  (vel  $ΓBZ$ ) ex hypothesi aequalis sit angulo  $BΓE$  (vel  $BΓH$ ) erit ex Prop. 4.  $ZΓ=BH$ , et angulus  $BZΓ=BHΓ$ , et triangulum  $BZΓ=BHΓ$ . Iam dico, rectae  $AZ$ ,  $AH$  esse aequales. Quodsi enim inaequales sint, erit alterutra v. c.  $ZA$  maior. Sumatur  $ZΘ=AH$ , ductaque  $ΘΓ$  erunt in triangulis  $ΘZΓ$ ,  $BHΔ$ , ex demonstratis  $ZΓ=BH$ ,  $ZΘ=AH$  ex hypoth. et angulus  $ΘZΓ=BHΔ$  ex demonstratis. Hinc ex Prop. 4. erit triangulum  $ΘZΓ=HAB$ . Unde, ablata

Quoniam igitur aequalis est  $AB$  ipsi  $AT$ , communis autem  $BT$ , duae igitur  $AB$ ,  $BT$  duabus  $AT$ ,  $TB$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $ABT$  angulo  $ATB$  est aequalis; basis igitur  $AT$  basi  $AB$  aequalis est, et  $ABT$  triangulum  $ATB$  triangulo aequale erit (Prop. 4.), minus minori, quod est absurdum (Ax. 2.); non igitur inaequalis est recta  $AB$  rectae  $AT$ ; ergo aequalis. Si igitur trianguli etc.

### PROPOSITIO VII. (Fig. 8.)

Super eadem recta, duabus iisdem rectis aliae duae rectae aequales utraque utrique non constituentur, ad

equalibus triangulis  $BZF$ ,  $BHI$  erunt (Ax. 3.) reliqua, triangulum nempe  $BIF = ABI$  i. e. pars aequalis erit toti, quod inaequit (Ax. 9.). Aequales igitur sint  $AZ$ ,  $AH$  necesse est. A quibus si auferantur  $BZ$ ,  $FI$ , quae ex hypothesi aequales sunt, reliqua aequalia erunt (Ax. 3.), nempe recta  $AB = AI$ . Aliam directam demonstrationem habet Proclus, dum, ducta  $ZH$ , ostendit, angulos  $AZH$ ,  $AII$  esse aequales, unde res ex I. 6. patet. Non ut conversam, sed ut primariam propositionem 6. demonstrat Coësius l. c. p. 50. et Van Swinden. l. c. p. 36. et I. 9. et I. 26., ubi, quum haec propositiones non pendeant a I. 6., non idem monendum est, quod in propositione praecedente. Caeterum, quod monet Hauber. Chrest. Geom. p. 219. et Pflüderer. ibid. p. 303. etiam Prop. 6. simili ratione, ac in Prop. 5. a nonnullis factum est, ex ipso principio congruentiae, si eundem triangulum bis positum sumatur, demonstrari potest.

Cor. Triangula aequiangula sunt etiam aequilatera.

### PROPOSITIO VII.

Obs. Recte Savilius monet, propositionem hanc alio modo obscurius expressam esse, unde paulo aliter Rob. Sim-  
on fere modo effertur poterit ita: Super eadem basi, atque ad eandem eius partes nequeunt duo triangula constitui, ita ut

σονται, πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$  δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  ἄλλαι δυοὶ εὐθεῖαι αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα συνεστάντωνσαν, πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ τε  $Γ$  καὶ  $Δ$ , ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ  $Γ$ ,  $Δ$ , τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ  $A$ ,  $B$  ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν  $ΓΔ$  τῇ  $ΔΑ$ , τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ  $A$ , τὴν δὲ  $ΓΒ$  τῇ  $ΔΒ$ , τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ  $B$  καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΓΔ$ ).

1) Peyrard. addit: καὶ αἱ  $ΒΓ$ ,  $ΒΔ$  ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τὰ  $E$ ,  $Z$ . Duas etiam figuras describit, quas a Commentarium dedimus, et in ipsa etiam demonstratione per nonnullis litteris substituit alias. Nos autem sine codd. auctoritate nihil hic mutare volumus. Caeterum vide Commentarium.

latera ad eosdem baseos terminos vergentia aequalia sint. Caeterum conferatur Hauber. in Chrest. Geom. p. 222. sqq. 1) enim fieri potest, sint (Fig. 8. 9.) triangula  $ABΓ$ ,  $ABΔ$  ita comparata, ut  $AI'=AJ$ , et  $BI'=BJ$ , eritque vel vertex neutrius trianguli intra reliquum triangulum, vel vertex alterius intra alterum triangulum, vel vertex unius in latere alterius ipso autem producto in loco ab altero vertice diverso. Praeter eum casum quo vertex neutrius trianguli est intra reliquum triangulum qui solus in Graecis, quos habemus, Euclidis codicibus demonstratus est, etiam reliquos casus demonstrandos esse iam Proclus innuit, et eius casus, quo vertex unius trianguli est intra alterum, demonstrationem dedit, quam pariter habet Campanus, Savilius, Clavius et Robertus Simson. In eadem nempe (Fig. 9.) aequalitas angulorum  $ΑΔΓ$ ,  $Α'Δ$ , atque exinde inaequalitas angulorum  $ΖΔΓ$ ,  $Β'Δ$  inferitur, qui tamen ex parte posteriore Prop. 5. aequales esse debebant. Hunc



et aliud punctum ad easdem partes, ita ut eos-  
terminos habeant, quos primae rectae.

Si enim fieri potest, super eadem recta  $AB$  dua-  
rectis  $AF$ ,  $FB$ , aliae duae rectae  $AA$ ,  
 $BB$  aequales utraque utrique constituentur ad aliud et  
aliud punctum  $F$  et  $A$ , ad easdem partes  $F$ ,  $A$ , et  
easdem terminos habentes  $A$ ,  $B$ ; ita ut aequalis sit  
quidem  $FA$  ipsi  $AA$ , eundem terminum habens, quem  
illa, punctum  $A$ ,  $FB$  vero ipsi  $BB$ , eundem ter-  
minum habens, quem illa, punctum  $B$ ; et iungatur  
 $FA$ .

casum ab Euclide non omissum, nec Euclidem ipsum  
omissum, sed librariorum tantum culpa alteram figuram  
omissam esse asserit Peyrard. Tom. I. Praefat. p. XVIII. et,  
haec figura restituta, et rectis duabus productis, ne ulla  
eodem voce mutata, perfectam demonstrationem se restituisse  
sibi libet nempe (Fig. 10.) rectas  $BF$ ,  $BA$  producere, ubi deinde  
demonstratio, paucis tantum litteris mutatis, ad utrumquo  
casum applicari potest, nominatim itaque ad eum quoque, quo  
vertex  $F$  unius trianguli est intra alterum triangulum  $ASB$ .  
Iu nempe procedit, postquam ostensus fuerat angulus  $AFB$   
 $= AFB$ : „Quare angulus  $AFB$  maior est angulo  $AFB$ , multo  
magis  $AFB$  maior est ipso  $AFB$ . Rursus, quoniam aequalis est  
 $FB$  ipsi  $AB$ , aequalis est angulus  $AFB$  angulo  $AFB$ , quod fieri  
debet. Et haec quidem satis ingeniose. Utrum tamen Euclides  
hoc rem ita absolverit, dubitari poterit, quod, ut VV. DD. de  
Lambert et Prony monent p. XXXVII., vix credi potest, libra-  
rios non integram tantum figuram omisisse, sed lineas etiam,  
quas productas invenerint, non produxisse, et verba, quae in  
eodem textu eas produci iuberent, omisisse. Accedit, quod in  
versione Arabica, tam ea, ex qua Campanus transtulisse credi-  
tur, quam in Nassireddini typis impressa, et cuius quoad hunc  
locum versionem Gallicam, a Sedillot. Profess. Biblioth. Reg.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΔ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΔΓ$ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓΒ$  τῇ  $ΑΒ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν μὲν  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΕ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ · ἐθέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$  ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἐστὶν ἴση.

Paris. factam, Peyrardus in Praefat. Tórn. II. p. XLII. exhibet, quamvis caeterum non consentiant, casus secundus nominatim demonstratus est.

Is denique casus, quo quis sumere possit, verticem unius trianguli esse in latere aliquo alterius ipso vel producto facilitatem habet demonstrationem ex eo, quod totum non aequale esse potest parti. Caeterum Pappus, et ex eo Savilius aliique observant, hanc propositionem, quod raro fiat, in propositionibus geometricis, negative effeiri, nec esse nisi lemma ad I. 8. Atque huic ipsi usui, nempe ut prope lemmatibus inserviant aliis propositionibus, saepius inservire propositiones negative expressas, v. c. III. 25. coll. III. 24., observat Hauber. Chrest. p. 250.

Quoniam igitur aequalis est  $AF$  ipsi  $AI$ , aequalis est et angulus  $AFI$  ipsi  $AIF$  (Prop. 5.); maior igitur  $AIF$  ipso  $AFB$ ; multo igitur  $FIB$  maior est ipso  $AFB$ . Rursus, quoniam aequalis est  $FB$  ipsi  $IB$ , aequalis est et angulus  $FAB$  angulo  $AFB$ . OSENSUS est autem ipso et multo maior, quod fieri nequit. Non igitur super etc.

### PROPOSITIO VIII. (Fig. 11.)

Si duo triacula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basi aequalem; et angulum angulo aequalem habebunt, ab aequalibus rectis contentum.

Sint duo triacula  $ABF$ ,  $JEZ$  duo latera  $AB$ ,  $AT$  duobus lateribus  $AE$ ,  $AZ$  aequalia habentia, utrumque utrique,  $AB$  quidem ipsi  $AE$ ,  $AT$  vero ipsi  $AZ$ ; habeat autem et basin  $BF$  basi  $EZ$  aequalem; dico et angulum  $BAT$  angulo  $EJZ$  esse aequalem.

Cor. 1. Duo circuli e duobus punctis descripti, ex eadem parte rectae, quae centra eorum coniungit, non nisi in unico puncto se invicem secare possunt. — Savilius ex hoc corollario pro axioma sumto vicissim propositionem hanc I. 7. derivavit.

Cor. 2. Non itaque nisi unum triangulum aequilaterum ex eadem parte rectae alicuius datae describi potest.

Haec duo corollaria sunt ex schedis Pflcidereri manuscriptis, e quibus saepius hausimus, et quae iam impressae etiam aguntur in Haubertii Chrest. p. 304.

### PROPOSITIO VIII.

Obs. Est haec propositio una e conversis quartae. Cae-  
tem non anguli tantum aequalibus lateribus comprehensi,

Ἐφαρμοζομένου γάρ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  $AEZ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $B$  σημείου ἐπὶ τὸ  $E$  σημείον, τῆς δὲ  $BΓ$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $EZ$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $Γ$  σημείον ἐπὶ τὸ  $Z$ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν  $BΓ$  τῇ  $EZ$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $BΓ$  ἐπὶ τὴν  $EZ$ , ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ  $BA$ ,  $ΓA$  ἐπὶ τὰς  $EA$ ,  $AZ$ . Εἰ γὰρ βάσεις μὲν ἡ  $BΓ$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $EZ$  ἐφαρμόσει, αἱ δὲ  $BA$ ,  $ΑΓ$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $EA$ ,  $AZ$  οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὥς αἱ  $EH$ ,  $HZ$ , συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρα, πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς  $BΓ$  βάσεως ἐπὶ τὴν  $EZ$  βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ  $BA$ ,  $ΑΓ$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $EA$ ,  $AZ$ . Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ  $EAZ$  ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

sed reliqua etiam omnia, nominatim ipsa triangula utrimque erunt aequalia, quod vel ex congruentia, vel ex Prop. 4. patet. Euclides id brevitatis studio omisit, ut Savilius observat. Notandum tamen videtur, ne, si similis casus obveniret, a Prop. 8. semper denno ad quartam recurrendum vel aliter res expedienda sit. Aliam huius propositionis demonstratiōnem, ut Proclus refert, Philo Byzantinus dedit, quae eo redit, ut duo triangula, quorum aequalitas demonstranda est, ad diversas eiusdem basis partes constituentur, et vertex eorum recta iungantur, quae tum bina triangula aequicrura efficiet, quorum anguli ad basin

Congruente enim  $AB\Gamma$  triangulo ipsi  $A EZ$  triangulo, et posito puncto  $B$  super punctum  $E$ , recta vero  $B\Gamma$  super  $EZ$ , congruet et punctum  $\Gamma$  ipsi  $Z$ , quia aequalis est  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$ ; congruente igitur  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$ , congruent et  $BA$ ,  $\Gamma A$  ipsis  $EA$ ,  $AZ$ . Si enim basis quidem  $B\Gamma$  basi  $EZ$  congruat, latera vero  $BA$ ,  $\Gamma A$  ipsis  $EA$ ,  $AZ$  non congruant, sed situm mutant ut  $EH$ ,  $HZ$ , constituentur super eadem recta duabus rectis aliae duae rectae aequales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non autem constituuntur (Prop. 7.). Congruente igitur basi  $B\Gamma$  basi  $EZ$ , non possunt non congruere etiam latera  $BA$   $\Gamma A$  lateribus  $EA$ ,  $AZ$ . Congruent igitur; quare et angulus  $B\Gamma A$  angulo  $EAZ$  congruet, et aequalis ei erit. Si igitur duo etc.

### PROPOSITIO IX. (Fig. 12.)

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

aequales erunt, et qui vel ipsi, vel quorum aequalis summa ut differentia efficiet id, quod propositum erat. Eam ipsam demonstrationem habent etiam Borellius p. 25. sqq. Kaestnerus Anfangsgr. der Arithm. u. Geom. P. I. Prop. 4. Karsten Mathes. Theor. Univers. §. 75. Thom. Simpson. Elem. of. Geom. B. I. Th. XIV. aliique. Epicrisin illius a Pfeiderero et Haubero factam vide in Hauberi Chrest. p. 305. et 255. sqq.

### PROPOSITIO IX.

Obs. Proclus monet, demonstrandum etiam esse, veritatem trianguli aequilateri intra datum angulum  $BAI'$  situm

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ  $BAG$ . δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ὁ ἐπὶ τῆς  $AB$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀφῆρῇσθω ἀπὸ τῆς  $AG$  τῇ  $\Delta\Delta$  ἴση ἡ  $AE$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $DE$ , καὶ συνεστήτω ἐπὶ τῆς  $DE$  τριγωνον ἰσοπλευρον τὸ  $DEZ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AZ$ . λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς  $AZ$  εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta\Delta$  τῇ  $AE$ , κοινὴ δὲ ἡ  $AZ$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta\Delta$ ,  $AZ$  δυοὶ ταῖς  $EA$ ,  $AZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ  $DE$  βάσει τῇ  $EZ$  ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta AZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ  $BAG$ , δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς  $AZ$  εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$ . δεῖ δὴ τὴν  $AB$  εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

1) Peyrard. ex cod. a. addit γὰρ, quod omittunt edd. Basil. et Oxon.

esse. Quod ita demonstrabitur. Quodsi (Fig. 13.) vertex trianguli aequilateri super  $AE$  constructi non sit intra angulum  $BAG$ , erit vel in uno crurum anguli, vel extra angulum. Sit, si fieri potest, punctum  $H$  in alterutro crurum v. c. in  $AG$  vertex trianguli aequilateri super  $AE$  constituti, eritque angulus  $EAH = AEH$  (Prop. 5.), adeoque angulus  $BAE > AEF$ . At, quum ex construct. sit  $AA = AE$ , erit etiam  $BAE = AEF$  (I. 5.), quod fieri nequit. Et similis erit demonstratio verticem trianguli nec in puncto aliquo  $\Theta$  extra angulum  $BAG$  esse posse.

Sit datus angulus rectilineus  $B\hat{A}F$ ; oportet ipsum bifariam secare.

Sumatur in  $AB$  quodlibet punctum  $A$ , et auferatur ab  $AF$  ipsi  $AA$  aequalis  $AE$ , et iungatur  $AE$ , et constituatur super  $AE$  triangulum aequilaterum  $AEZ$  (Prop. 1.), et iungatur  $AZ$ ; dico angulum  $B\hat{A}F$  bifariam secari a recta  $AZ$ .

Quoniam enim aequalis est  $AA$  ipsi  $AE$ , communis autem  $AZ$ , duae  $AA$ ,  $AZ$  duabus  $EA$ ,  $AZ$  aequales sunt, utraque utrique, et basis  $AZ$  basi  $EZ$  aequalis est; angulus igitur  $AAZ$  angulo  $EAZ$  aequalis est (Prop. 4.).

Datus igitur angulus rectilineus  $B\hat{A}F$  bifariam secatur a recta  $AZ$ . Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO X. (Fig. 14.)

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata  $AB$ ; oportet rectam terminatam  $AB$  bifariam secare.

Cor. Manifestum est, angulum ita bisectum denuo bisecari, adeoque angulum primo propositum in quatuor, octo, sedecim etc. partes aequales, nempe in omnes eas partes aequales dividi posse, quarum numerus exprimi potest numero 2 ad quancunque n. evectorio i. e. numero 2<sup>n</sup>.

#### PROPOSITIO X.

Obs. Proclus refert, Apollonium Pergaeum datam rectam terminatam bisecare, ducta recta per puncta intersectionum duorum circulorum, qui e punctis datae rectae extremis, circulo isti rectae aequali descripti sunt; quae ratio quoad ipsam haud multum differt ab Euclidea, quam tamen

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ  $ABΓ$  καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνία δίχα τῇ  $ΓΔ$  εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ  $AB$  εὐθεῖα δίχα τέμνεται κατὰ τὴν  $Δ$  σημείον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΒ$ , κοινὴ δὲ  $ΓΔ$ , δύο δὲ αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  δυοὶ ταῖς  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  ἴσας εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  ἴση ἐστὶν· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΔ$  βάσις τῆς  $ΒΔ$  ἴση ἐστὶν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$  δίχα τέμνεται κατὰ τὸ  $Δ$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΗΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ  $Γ$ · δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ  $Γ$  σημείου τῇ  $AB$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

longe praefert Proclus. Cf. Hauber. Chrest. p. 241. Patet etiam, rectam  $ΓΔ$  (Fig. 14.), quae ex constructione rectam  $AB$  bisecat, ei ad angulos rectos insistere. Caeterum idem de divisione rectae notandum est, quod in Cor. praecedentis de divisione anguli notavimus. Quod reliquum est, infra ad VI. 10., quia idem I. 34. Cor. 23. ostendetur, rectam in quolibet partes aequales ope geometriae elementaris dividi posse, quod in angulo fieri nequit.

### PROPOSITIO XI.

Obs. Pro eo casu huius propositionis, quo punctum, e quo perpendicularis ad rectam datam erigi debet, est extremum huius rectae, Proclus solutionem habet satis facilem, quae etiam est apud Clavius, pluresque aliae dantur, partim



Constituatur super ipsa triangulum aequilaterum  $AB\Gamma$  (Prop. 1.), et secetur angulus  $ATB$  bifariam a recta  $\Gamma A$  (Prop. 9.); dico rectam  $AB$  bifariam secari in puncto  $A$ .

Quoniam enim aequalis est  $AT$  ipsi  $TB$ , communis autem  $TA$ , duae  $AT$ ,  $TA$  duabus  $BT$ ,  $TA$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $ATA$  angulo  $BTB$  aequalis est; basis igitur  $AA$  basi  $BA$  aequalis est (Prop. 4.).

Ergo data recta terminata  $AB$  bifariam secatur in puncto  $A$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XI. (Fig. 15.)

Datae rectae, a puncto in ea dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta  $AB$ , datum vero punctum in ea  $\Gamma$ ; oportet a puncto  $\Gamma$  rectae  $AB$  ad rectos angulos rectam lineam ducere.

e propositionibus, quae subsequuntur, demum demonstrandae.  
Vid. infra l. 32. Cor. 11.

Cor. 1. Ex hac propositione Rob. Simson. monet, facile consequi, duas rectas segmentum commune non habere. Quodsi enim fieri posset, ut (Fig. 16.) rectae  $AT\Theta$ ,  $AT\Xi$  segmentum  $AT$  commune habere possent, erigatur (l. 11.) in  $\Gamma$  ad  $AT$  perpendicularis  $IZ$ , et ostendetur, ut in nostra propositione, tam  $ITA=ZTE$ , quam  $ZTA=ZT\Theta$ , foret itaque  $ZTE=ZT\Theta$  pars est, q. e. a. (Ax. 9.) Notandum tamen, hoc ipsum corollarium potius axiomatis loco sumendum esse, quum iam in l. Prop. 1. citate sumatur, unde illud ut Ax. 10. a supra posuimus.

Cor. 2. Datae rectae  $AE$  (Fig. 17.) ad datum in ea punctum  $\Gamma$  non nisi una recta  $IZ$  ad rectos angulos duci potest. Sa enim, si fieri potest, praeter  $IZ$  etiam  $I\Theta$  rectae  $AE$  ad

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  τυχόν σημεῖον τὸ  $Δ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΓΔ$  ἴση ἡ  $ΓΕ$ , καὶ συνεσταίτω ἐπὶ τῆς  $ΔΕ$  τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ  $ΖΔΕ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΖΓ$ . λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $ΑΒ$ , ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ  $Γ$ , πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $ΖΓ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓΔ$  τῇ  $ΓΕ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΓΖ$ , δύο δὲ αἱ  $ΔΓ$ ,  $ΓΖ$  δυοὶ ταῖς  $ΕΓ$ ,  $ΓΖ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσεις ἡ  $ΔΖ$  βάσει τῇ  $ΖΕ$  ἴση ἐστὶν γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΔΓΖ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΓΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. "Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $ΔΓΖ$ ,  $ΖΓΕ$ .

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $ΑΒ$ , ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ  $Γ$ , πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $ΖΓ$ . "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐπὶ τὴν δοθείσαν εὐθείαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

rectos angulos, eritque  $ΔΓΗ=ΗΓΕ$  (Def. 10.), adeoque  $ΔΓΗ < ΖΓΕ$  (Ax. 9.), et multo magis  $ΔΓΖ < ΖΓΕ$ . At quum etiam  $ΖΓ'$  ad angulos rectos sit rectae  $ΔΕ$  (ex hypoth.), erit etiam  $ΔΓΖ=ΖΓΕ$  (Def. 10.), quod est absurdum.

### PROPOSITIO XII.

Obs. Demonstrandum erat ante omnia circulum centro  $Γ$ , intervallo  $ΓΔ$ , descriptum secare rectam  $ΑΒ$  in duobus punctis  $Η$  et  $Ε$ . Quod ita fiet. Quum puncta  $Γ'$  et

Sumatur in  $AF$  quodlibet punctum  $A$ , et ponatur ipsi  $FA$  aequalis  $FE$  (Prop. 3.), et constituatur super  $FE$  triangulum aequilaterum  $ZAE$  (Prop. 1.) et iungatur  $ZF$ ; dico datae rectae  $AB$  a dato in ea puncto  $F$ , ad rectos angulos rectam lineam ductam esse  $ZF$ .

Quoniam enim aequalis est  $FA$  ipsi  $FE$ , communis vero  $FZ$ , duae  $AF$ ,  $FZ$  duabus  $EF$ ,  $FZ$  aequales sunt, utraque utrique, et basis  $AZ$  basi  $ZE$  aequalis est (Prop. 8.), et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (Def. 10.); rectus igitur est uterque ipsorum  $AFZ$ ,  $ZFE$ .

Ergo datae rectae  $AB$  a dato in ea puncto  $F$ , ad rectos angulos recta linea ducta est  $FZ$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XII. (Fig. 18. a.)

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

ex constructione sint e diversis rectae  $AB$  partibus, ducta  $FA$  secabit rectam  $AB$  in puncto aliquo  $K$  (Ax. 15.). Et cum punctum  $K$  in recta  $FA$ , adeoque intra circulum centro  $F$  intervallo  $FA$  descriptum positum sit, recta  $AKB$ , quae per hoc punctum  $K$  i. e. intra circulum transit, necessario secabit circulum in duobus minimum punctis  $H$  et  $E$  (Ax. 13.). At nec in pluribus quam duobus punctis rectam  $AB$  et circulum descriptum se invicem secare Proclus demonstrare tentat in hunc fere modum. Secet (Fig. 18. b. et

E

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ  $\Gamma$  δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κἀκετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς  $AB$  εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ κέντρον μὲν τῷ  $\Gamma$ , διαστήματι δὲ τῷ  $\Gamma\Delta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $EZH$ , καὶ τετραμήσθω ἡ  $EH$  εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ  $\Theta$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $GH$ ,  $ΓΘ$ ,  $ΓΕ$  εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κἀκετος ἡκται ἡ  $ΓΘ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $HΘ$  τῇ  $ΘΕ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΘΓ$  δύο δὴ αἱ  $ΘΗ$ ,  $ΘΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΕΘ$ ,  $ΘΓ$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν, καὶ βάσις ἡ  $ΓΗ$  βάσει τῇ  $ΓΕ$  ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓΘΗ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΚΘΕ$  ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπὶ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρωθεν τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κἀκετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

18. c.) si fieri potest, circulus centro  $\Gamma$  radio  $\Gamma\Delta$  descriptus rectam  $AB$  non tantum, ut in praecedente schemate, in punctis  $H$  et  $E$ , sed praeterea in alio quodam puncto  $\Delta$  sito v. c. inter  $H$  et punctum  $\Theta$ , quod rectam  $HE$  bisecat. Circulus itaque ut ex  $\Delta$  ad punctum  $E$  transeat, rectam  $ΓΘ$  ipsam autem productam in puncto aliquo  $M$  secabit (Ax. 15.), et ob  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ , erit angulus  $\Gamma\Delta A = \Gamma E A$  (I. 5.). Pariter autem, ob  $\Gamma H = \Gamma A$ , erit  $\Gamma H A = \Gamma A H$ , et ob  $\Gamma E = \Gamma A$ , erit  $\Gamma E A = \Gamma A H$  itaque  $\Gamma A H = \Gamma A E$ , adeoque uterque rectus erit (Def. 10.). Ostensus est autem etiam  $ΓΘ A$  rectus esse, itaque  $\Gamma A \Theta = \Gamma \Theta A$ .

Sū quidem data recta infinita  $AB$ , datum vero punctum  $\Gamma$ , quod non est in ea; oportet super datam rectam infinitam  $AB$ , a dato puncto  $\Gamma$ , quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur ad alteram partem  $AB$  rectae quodlibet punctum  $A$ , et centro quidem  $\Gamma$ , intervallo autem  $GA$ , circulus describatur  $EZH$  (Post. 3.), et secetur  $EH$  recta bifariam in  $\Theta$  (Prop. 10.), et iungantur  $GH$ ,  $G\Theta$ ,  $GE$  rectae (Post. 1.); dico super datam rectam infinitam  $AB$ , a dato puncto  $\Gamma$ , quod non est in ea, perpendicularem ductam esse  $G\Theta$ .

Quoniam enim aequalis est recta  $H\Theta$  rectae  $\Theta E$ , communis autem  $\Theta\Gamma$ , duae utique  $\Theta H$ ,  $\Theta\Gamma$  duabus  $E\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  aequales sunt, utraque utrique, et basis  $GH$  basi  $GE$  est aequalis (Def. 15.); angulus igitur  $\Gamma\Theta H$  angulo  $E\Theta\Gamma$  est aequalis (Prop. 8.); et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est; et recta insistens perpendicularis appellatur ad eam, in quam insistit (Def. 10.).

Ax. 10.); erit igitur  $GA = G\Theta$  (I. 6.). • At est etiam  $GA = AM$  (Def. 15.), itaque  $GM = G\Theta$ , pars toti, quod est absurdum (Ax. 1.). Recta igitur  $AB$  circulum in tertio aliquo puncto inter  $\Gamma$  et  $\Theta$  posito secare nequit. Simili deinde ratione demonstrare conatur, rectam  $AB$  nec in puncto  $\Theta$  rectam  $H\Theta$  bisectorem circulum secare posse, ac deinde, nec in quatuor punctis rectam  $AB$  et circulum se invicem secare etc. Quod parvis satis ingeniosum sit, facilius tamen demonstratio precedet demum post I. 16. vel I. 17. Cf. Pfeiderer. in Haubertii Chrest. p. 307.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν ἄπειρον τὴν  $AB$  ὑπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ αὐτῆς, κάθετος ῥηται ἡ  $\Gamma\Theta$ . "Οπερ εἶδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ῥητοὶ δύο ὀρθάς, ἡ δυὸν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  ἐπ' εὐθείαν τὴν  $\Gamma\Delta$  σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω τὰς ὑπὸ  $\Gamma B A$ ,  $A B \Delta$  λέγονται αἱ ὑπὸ  $\Gamma B A$ ,  $A B \Delta$  γωνίαι, ῥητοὶ δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἡ δυὸν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Gamma B A$  τῇ ὑπὸ  $A B \Delta$  δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ῥηθῶ ἀπὸ τοῦ  $B$  σημείου τῇ  $\Gamma\Delta$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθάς ἡ  $BE$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $\Gamma B E$ ,  $E B \Delta$  δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $\Gamma B \Delta$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $\Gamma B A$ ,  $A B E$  ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $E B \Delta$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $\Gamma B E$ ,  $E B \Delta$  τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $\Gamma B A$ ,  $A B E$ ,  $E B \Delta$  ἴσαι εἰσιν. Πάλιν ἐπεὶ ὑπὸ  $A B \Delta$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $A B E$ ,  $E B \Delta$  ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $A B \Gamma$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $A B A$ ,  $A B \Gamma$  τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $A B E$ ,  $E B \Delta$ ,  $A B \Gamma$  ἴσαι εἰσιν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $\Gamma B E$ ,  $E B \Delta$  τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα καὶ αἱ ὑπὸ  $\Gamma B E$ ,  $E B \Delta$  ἄρα ταῖς ὑπὸ  $A B A$ ,  $A B \Gamma$  ἴσαι.

Schol. Huius problematis Oenopiden primum inventorem esse Proclus refert.

### PROPOSITIO XIII.

Cor. 1. Hinc, si angulorum deinceps positorum unus rectus sit, alter pariter erit rectus; si unus acutus, alter obtusus; et contra.

Super datam igitur rectam infinitam  $AB$  a dato puncto  $\Gamma$ , quod non est in ea, perpendicularis ducta est  $\Gamma\Theta$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XIII. (Fig. 19.)

Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales faciet.

Recta enim quaedam  $AB$  in rectam  $\Gamma A$  insistens angulos faciat  $\Gamma BA$ ,  $ABA$ ; dico  $\Gamma BA$ ,  $ABA$  angulos vel duos rectos esse vel duobus rectis aequales.

Si quidem igitur aequalis est  $\Gamma BA$  ipsi  $ABA$  duo recti sunt (Def. 10.). Si vero non, ducatur a puncto  $B$  rectae  $\Gamma A$  ad rectos angulos recta  $BE$  (Prop. 11.); ergo  $\Gamma BE$ ,  $EB A$  duo recti sunt. Et quoniam  $\Gamma BE$  duobus  $\Gamma BA$ ,  $ABE$  aequalis est, communis addatur  $EB A$ ; ergo  $\Gamma BE$ ,  $EB A$  tribus  $\Gamma BA$ ,  $ABE$ ,  $EB A$  aequales sunt (Ax. 2.). Rursus, quoniam  $ABA$  duobus  $ABE$ ,  $EB A$  aequalis est, communis addatur  $AB \Gamma$ ; ergo  $ABA$ ,  $AB \Gamma$  tribus  $ABE$ ,  $EB A$ ,  $AB \Gamma$  aequales sunt (Ax. 2.). Ostensi sunt autem et  $\Gamma BE$ ,  $EB A$  tribus eisdem aequales; quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); ergo et  $\Gamma BE$ ,  $EB A$  ipsis  $ABA$ ,  $AB \Gamma$  aequales sunt; sed  $\Gamma BE$ ,  $EB A$

COR. 2. Si plures rectae, quam una ad idem punctum eidem rectae ad easdem eius partes insistant, anguli omnes simul fient duobus rectis aequales.

COR. 3. Quotcunque rectis se mutuo secantibus, anguli ad punctum sectionis quatuor rectis aequales erunt, et generatim: omnes anguli circa idem punctum constituti quatuor rectos efficient. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 307.

είσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $\Gamma BE$ ,  $EBA$  δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ  $\Delta BA$ ,  $AB\Gamma$  ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεταί <sup>1)</sup>, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεταί.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ  $AB$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $B$ , δύο εὐθεταί αἱ  $B\Gamma$ ,  $BA$ , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $ABA$  δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔστι τῇ  $\Gamma B$  ἢ  $BA$ .

Εἰ γὰρ μὴ ἔστι τῇ  $B\Gamma$  ἐπ' εὐθείας ἡ  $BA$ , ἔστω τῇ  $\Gamma B$  ἐπ' εὐθείας ἡ  $BE$ .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεταὶ ἡ  $AB$  ἐπ' εὐθετῶν τὴν  $\Gamma BE$  ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $ABE$  γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $ABA$  δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ  $\Gamma BA$ ,  $ABE$  ταῖς ὑπὸ  $\Gamma BA$ ,  $ABA$  ἴσαι εἰσιν. Κοινὴ ἀφηρόσθω ἡ ὑπὸ  $\Gamma BA$  λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABE$  λοιπὴ τῇ ὑπὸ  $ABA$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἔστιν ἡ  $BE$  τῇ  $B\Gamma$ . Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῇ  $BA$  ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστιν ἡ  $\Gamma B$  τῇ  $BA$ . Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Proclus legit: δύο εὐθεταὶ ἐξῆς.

### PROPOSITIO XIV.

Obs. Est haec conversa praecedentis, pariterque paulo generalius conversa Cor. 2. praecedentis demonstrari poterit.



do recti sunt; ergo et  $\angle B\Gamma A$ ,  $\angle AB\Gamma$  duobus rectis  
 aequales sunt. Si igitur etc.

#### PROPOSITIO XIV. (Fig. 20.)

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in ea, duae  
 rectae, non ad easdem partes positae, angulos deinceps  
 duobus rectis aequales faciant, in directum erunt  
 sibi invicem rectae.

Ad aliquam enim rectam  $AB$ , et ad punctum in  
 ea  $B$ , duae rectae  $B\Gamma$ ,  $BA$ , non ad easdem partes  
 positae, angulos deinceps  $\angle AB\Gamma$ ,  $\angle B\Gamma A$  duobus rectis  
 aequales faciant; dico in directum esse rectae  $\Gamma B$   
 rectam  $BA$ .

Si enim non est rectae  $B\Gamma$  in directum  $BA$ , sit  
 rectae  $\Gamma B$  in directum  $BE$  (Post. 2.).

Quoniam igitur recta  $AB$  super rectam  $\Gamma BE$  in-  
 sistit, anguli  $\angle AB\Gamma$ ,  $\angle ABE$  duobus rectis aequales  
 sunt (Prop. 13.); sunt autem et  $\angle AB\Gamma$ ,  $\angle B\Gamma A$  duobus  
 rectis aequales; ergo  $\angle B\Gamma A$ ,  $\angle ABE$  ipsis  $\angle B\Gamma A$ ,  $\angle B\Gamma A$   
 aequales sunt. Communis auferatur  $\angle B\Gamma A$ ; reliquus  
 igitur  $\angle ABE$  reliquo  $\angle B\Gamma A$  est aequalis (Ax. 3.), mi-  
 nor maiori, quod fieri nequit. Non igitur in directum  
 est  $BE$  rectae  $B\Gamma$ . Similiter, autem ostendemus, ne-  
 que esse aliam quandam praeter  $BA$ ; in directum igi-  
 tur est  $\Gamma B$  rectae  $BA$ . Si igitur etc.

Alia praecedentis conversa erit haec: Si duo anguli duobus  
 rectis aequales sint, atque in vertice communi ita iungantur,  
 ut unum crus unius cum uno crure alterius sit in directum,  
 reliqua quoque angulorum crura in eandem rectam coincident,  
 quod facile ostendetur.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἰσὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $ΓΑ$  τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΕΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΕΒ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΕΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΕΑ$ .

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ  $ΑΕ$  ἐπ' εὐθείαν τὴν  $ΓΑ$  ἐφέστηκε, γωνίας ποιούσα τὰς ὑπὸ  $ΓΕΑ$ ,  $ΑΕΑ$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΓΕΑ$ ,  $ΑΕΑ$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ  $ΔΕ$  ἐπ' εὐθείαν τὴν  $ΑΒ$  ἐφέστηκε, γωνίας ποιούσα τὰς ὑπὸ  $ΑΕΑ$ ,  $ΔΕΒ$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΕΑ$ ,  $ΔΕΒ$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $ΓΕΑ$ ,  $ΑΕΑ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΓΕΑ$ ,  $ΑΕΑ$  ταῖς ὑπὸ  $ΑΕΑ$ ,  $ΔΕΒ$  ἴσαι εἰσὶν. Κοινὴ ἀφηρόσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΕΑ$ , λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓΕΑ$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $ΒΕΑ$  ἴση ἐστὶν. Ὅμοιως δὲ δευχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ  $ΓΕΒ$ ,  $ΔΕΑ$  ἴσαι εἰσὶν. Ἐάν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς. 1)

1) Πρόρρημα. Ἐν δὲ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ ὅσαι δὴ ποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν. Hoc Corollarium addunt edd. Oxon. et Cod. Peyrardi m. In margine vel inter lineas illud habent Codd. d. e. f. et, ut Peyrardus in Praefat. dicit, etiam Coila, ita tamen, ut non prae se ferat signum, quo in hoc manuscripto ea, quae ad marginem sunt, ad textum pertinere indicantur. Idem tamen in lect. variant. id in Cod. a. deesse asserit. Prioriter edit. Basil. ex alio, ut dicit, exemplari illud in margine addit. Quum tamen etiam in Codd. h. i. k. n. desit, nec omnino huc, sed ad I. 13. (ubi apud nos Cor. 3. est) pertineat, textui inserere nolimus. Caeterum Proclus etiam ad hanc propositionem simile fere corollarium habet, eo tantum ab hoc diversum, quod ei de duabus tantum rectis sermo est.

## PROPOSITIO XV.

Schol. Thaletem hanc Prop. primum invenisse, Euclidem

## PROPOSITIO XV. (Fig. 21.)

Si duae rectae sese secant, angulos ad verticem  
 aequales inter se facient.

Duae enim rectae  $AB$ ,  $\Gamma A$  sese secant in puncto  
 $E$ ; dico aequalem esse angulum quidem  $AET$  angulo  
 $AEB$ , angulum autem  $TEB$  angulo  $AEA$ .

Quoniam enim recta  $AE$  in rectam  $\Gamma A$  insistit  
 angulos faciens  $TEA$ ,  $AEA$ ; anguli  $TEA$ ,  $AEA$   
 duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.). Rursus, quo-  
 niam recta  $AE$  in rectam  $AB$  insistit, angulos faciens  
 $AET$ ,  $AEB$ ; anguli  $AEA$ ,  $AEB$  duobus rectis ae-  
 quales sunt (Prop. 13.). Ostensi sunt autem et  $TEA$ ,  
 $AEA$  duobus rectis aequales; ergo anguli  $TEA$ ,  
 $AET$  angulis  $AEA$ ,  $AEB$  aequales sunt. Communis  
 auferatur  $AEA$ , reliquus igitur  $TEA$  reliquo  $BEA$   
 aequalis est (Ax. 3.). Similiter autem ostendemus et  
 angulos  $TEB$ ,  $AEA$  esse aequales. Si igitur duo etc.

autem primam demonstratione dignam habuisse, Proclus re-  
 fert.

Oba. Prop. 15. duae sunt conversae. Alteram Proclus  
 habet huius sententiae: Si (Fig. 21.) ad punctum  $B$  rectae  
 alicuius  $AB$  duae rectae  $EA$ ,  $FE$  ducantur non ad eandem  
 partes, ac faciant angulos ad verticem aequales  $EA$  et  $FE$   
 in directum erunt. Nam, quum  $AEA + AEB = 2$  rectis (I.  
 13.) et  $AEB = AET$  ex hypoth. erunt etiam  $AEA + AET = 2$   
 rectis, adeoque  $EA$  et  $FE$  in directum sitae erunt (I. 14.).  
 Alteram conversam exhibet Peletarius huius sententiae: Si  
 quatuor rectae  $AE$ ,  $FE$ ,  $BE$ ,  $AE$  ex uno puncto  $B$  ex-  
 erant binos angulos oppositos inter se aequales fecerint,  
 erunt quaelibet duae lineae adversae in directum sibi oppo-  
 sitae. Nempe omnes quatuor anguli circa punctum  $B$  duobus

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεβλή-  
θεισας, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπε-  
ναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , καὶ προσεβλήσθω  
αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ τὸ  $Δ$  λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς  
γωνία, ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ , μείζων ἐστίν ἑκατέρας τῶν  
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ  $ΓΒΑ$ ,  $ΒΑΓ$  γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Ε$ , καὶ ἐπιξεν-  
χθεῖσα ἡ  $ΒΕ$  ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ  $Ζ$   
καὶ κείσθω τῇ  $ΒΕ$  ἴση ἡ  $ΕΖ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΖΙ$   
καὶ διήχθω ἡ  $ΑΓ$  ἐπὶ τὸ  $Η$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΑΕ$  τῇ  $ΕΓ$ , ἡ δὲ  $ΒΕ$   
τῇ  $ΕΖ$ , δύο δὲ αἱ  $ΑΕ$ ,  $ΕΒ$  ὁνοῖταις  $ΓΕ$ ,  $ΕΖ$   
ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΕΒ$   
γωνία τῇ ὑπὸ  $ΖΕΓ$  ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βύ-  
σιν ἄρα ἡ  $ΑΒ$  βύσει τῇ  $ΖΓ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΑ$   
τρίγωνον τῷ  $ΖΕΓ$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ  
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκα-  
τέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι ἡ πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα  
ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΓΖ$ . Μείζων δὲ ἐστὶν

rectis aequales sunt (Prop. 13. Cor. 3.). Atqui ex hypothese  
tam  $ΑΒΔ=ΒΕΓ$ , quam  $ΑΕΙ=ΒΕΔ$ , unde  $ΑΒΔ+ΑΕΓ=$   
 $ΒΕΓ+ΒΒΔ=2$  rectis, adeoque  $ΑΕ$  et  $ΓΕ$  in directum erunt  
(I. 14.). Pariter, quum  $ΑΕΓ+ΒΕΓ=ΑΕΙ+ΒΕΓ=2$  rectis  
 $ΑΒ$  et  $ΒΕ$  in directum erunt.

## PROPOSITIO XVI.

Obs. Ramus, ut solet, hystorologiae accusat Euclidem  
quod hanc propositionem, quae facile consequatur ex I. 32.  
separatim demonstrat. At demonstratio I. 32. in Euclidis s-  
temate ex I. 27., huius vero ex I. 16. dependet, neque igitur

## PROPOSITIO XVI. (Fig. 22.)

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum maior est.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , et producaturs ipsius unum latus  $B\Gamma$  ad  $A$ ; dico angulum exteriorem  $AF\Lambda$  maiorem esse utroque interiorum et oppositorum angulorum  $\Gamma BA$ ,  $B\Lambda\Gamma$ .

Secetur  $AF$  bifariam in  $E$  (Prop. 10.), et iuncta  $BE$  producaturs in directum ad  $Z$ , et ponatur rectae  $BE$  aequalis  $EZ$  (Prop. 3.), et iunganturs  $Z\Gamma$ , et producaturs  $AF$  ad  $H$ .

Quoniam igitur aequalis est  $AE$  rectae  $ET$ ,  $BE$  vero ipsi  $EZ$ , duae  $AE$ ,  $EB$  duabus  $\Gamma E$ ,  $EZ$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $AEB$  angulo  $ZET$  aequalis est, ad verticem enim est (Prop. 15.); basis igitur  $AB$  basi  $Z\Gamma$  aequalis est, et triangulum  $ABE$  triangulo  $ZET$  aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est  $BAE$  ipsi  $ETZ$ . Maior autem est angulus  $ET\Lambda$

circulum in demonstrando si evitare volebat, denuo I. 16. ex I. 32. deducere poterat. Laudandus potius est Euclides, qui pedestentim ad magis ardua progressus facilioribus difficiliora tam apte superstruere norat.

Cor. (Procli). Ex uno puncto extra aliquam rectam posito ad eam haud plures quam duae rectae aequales duci possunt, ut ex I. 5. et I. 16. facile consequitur, vel aliter: Circulas rectam in pluribus quam duobus punctis secare nequit. Cf. III. 2. Cor. 1. Praeterea Proclus monet, etiam I. 7. non nisi consectorium esse huius I. 16.

ἡ ὑπὸ  $EΓΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΕΓΖ$ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΒΑΕ$ . Ὀμοίως δὲ, τῆς  $ΒΓ$  τετμημένης διχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΓΗ$ , τουτέστιν ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ , μείζων καὶ τῆς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ . Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ  $ΑΒΓ$ · λέγω, ὅτι τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ τὸ  $Δ$ .

Καὶ ἐπεὶ τρίγωνον τοῦ  $ΑΒΓ$  ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ , μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ . Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΓΒ$  τῶν ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΔ$  μείζονες εἰσιν. Ἄλλ' αἱ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΓΒ$  δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΔ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$ ,  $ΑΓΒ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ  $ΓΑΒ$ ,  $ΑΒΓ$ . Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### PROPOSITIO XVII.

Obs. Aliam adhuc huius propositionis demonstrationem habet Proclus, in qua recta  $ΒΓ$  non producitur, at ab  $Α$  ad punctum quodcunque rectae  $ΒΓ$  recta ducitur.

Cor. 1. In omni triangulo, cuius unus angulus rectus est aut obtusus, reliqui acuti sunt. Cf. Clavius. Hinc patet ratio, cur Def. 27. 28. 29. ita, ut factum est, expressae fuerint. Cf. Pfeleiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 309.

Cor. 2. Omnes anguli trianguli aequilateri, et duo an-

angulo  $EFZ$  (Ax. 9.); maior est igitur  $AGA$  ipso  $BAE$ . Similiter autem,  $BF$  secta bifariam, ostenditur et  $BGH$ , hoc est  $AGA$  (Prop. 15.), maior et ipso  $ABF$ . Omnis igitur etc.

### PROPOSITIO XVII. (Fig. 23.)

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum  $ABF$ ; dico trianguli  $ABF$  duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.

Producatur enim  $BF$  ad  $A$  (Post. 2.).

Et quoniam trianguli  $ABF$  exterior est angulus  $AGA$ , maior est interiore et opposito  $ABF$  (Prop. 16.). Communis addatur  $AFB$ ; ergo  $AGA$ ,  $AFB$  angulis  $ABF$ ,  $BFA$  maiores sunt (Ax. 4.). Sed  $AGA$ ,  $AFB$  duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); ergo  $ABF$ ,  $BFA$  duobus rectis minores sunt. Similiter autem ostendemus et  $BAF$ ,  $AFB$  duobus rectis minores esse, et adhuc ipsos  $FAB$ ,  $ABF$ . Omnis igitur etc.

Anguli ad basin trianguli aequicruri sunt acuti, anguli externi autem, qui his adjacent, obtusi. Cf. Clavius.

Cor. 3. In triangulo, in quo duo anguli inaequales sunt, minor eorum est acutus.

Cor. 4. (Procli). A puncto quocunque extra rectam posito non nisi unum perpendicularum ad eam demitti potest.

Cor. 5. Si e puncto aliquo rectae, quae oblique instet alteri rectae, adeoque ex altera sui parte cum ea acutum, ex

### Η ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ.

Παντός τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , μείζονα ἔχον τὴν  $ΑΓ$  πλευρὰν τῆς  $AB$ · λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $BΓΑ$ .

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $AB$ , κείσθω τῇ  $AB$  ἴση ἡ  $ΑΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΒΔ$ .

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $BΓΔ$  ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔΒ$ , μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $ΑΔΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΒΔ$ , ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ  $AB$  τῇ  $ΑΔ$  ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . Παντός ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

### Η ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Παντός τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

altera obtusum angulum efficiat, ad hanc alteram demittatur perpendicularum, cadet id ad partes anguli acuti. Cf. Pflaiderer. l. c.

Cor. 6. Quod e vertice trianguli in basin demittitur perpendicularum, incidet in ipsam basin, aut in terminum eius extremum, aut in basin productam, prout angulorum ad basin, vel uterque acutus, vel alter rectus, vel denique alter obtusus erit. Cf. Pflaiderer. l. c.

### PROPOSITIO XVIII.

Obs. Aliam e Porphyrio demonstrationem addit Proclus, in qua (Fig. 25.) sumta  $ΓΑ=AB$ , producitur  $BA$  ultra  $B$  ad punctum aliquod  $B$ , ita ut  $BE$  aequalis fiat rectae  $ΑΔ$ , ac deinde iungitur  $ΕΓ$ , ubi facile patet, esse  $ΑΕΓ=ΑΓΕ$  (l. 5.),



## PROPOSITIO XVIII. (Fig. 24.)

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit enim triangulum  $AB\Gamma$ , maius habens latus  $AF$  latere  $AB$ ; dico et angulum  $AB\Gamma$  maiorem esse angulo  $B\Gamma A$ .

Quoniam enim recta  $AF$  maior est recta  $AB$ , ponatur rectae  $AB$  aequalis  $AD$  (Prop. 3.), et iungatur  $BD$ .

Et quoniam trianguli  $B\Gamma D$  exterior est angulus  $A\Gamma B$ , maior est interiore et opposito  $A\Gamma B$  (Prop. 16.). Aequalis autem angulus  $AAB$  angulo  $ABA$ , quia et latus  $AB$  lateri  $AD$  est aequale; maior igitur et  $ABA$  ipso  $A\Gamma B$ ; multo igitur  $AB\Gamma$  maior est ipso  $A\Gamma B$ . Omnis igitur trianguli etc.

## PROPOSITIO XIX. (Fig. 26.)

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

adeoque  $AB\Gamma$  [ $> AEF$  (I. 16.)]  $> AFE > AFB$ . Cacterum notetur huius et 19. cum 5. et 6. Analogia, quam etiam Proclus innuit.

Cor. 1. In triangulo scaleno omnes etiam anguli inaequales erunt, maiores nempe, qui maioribus lateribus opponuntur; et in quovis triangulo non aequilatero ii, qui minoribus lateribus opponuntur anguli, acuti erunt. Cf. Clavius u. Pfeiderer. l. c. p. 310.

Cor. 2. Trianguli aequicruri angulus ad verticem maior ac minor erit quolibet angulo ad basin, prout basis maior ac minor est quovis crure. Cf. Pfeiderer. l. c.

Cor. 3. In quovis triangulo perpendicularum demissum e vertice opposito in latus, quod non minus est utrovis reliquo,

Ἐστὶν τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$  μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $B\Gamma A$  λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ  $A\Gamma$  πλευρᾶς τῆς  $AB$  μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῇ  $AB$ , ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῇ  $AB$ · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $AB\Gamma$  τῇ ὑπὸ  $A\Gamma B$ · οὐκ ἐστὶ δὲ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῇ  $AB$ . Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῇ  $AB$ · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $AB\Gamma$  τῆς ὑπὸ  $A\Gamma B$ . Οὐκ ἐστὶ δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῆς  $AB$ . Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ  $A\Gamma$  τῆς  $AB$ . Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνομεναι.

intra triangulum cadit. Tum nempe anguli ad basin acuti erunt (Cor. 1.), unde ex Cor. 6. praecedentis res consequitur. Cf. Pfeiderer. l. c.

### PROPOSITIO XIX.

Obs. Aliam directam, at operosiores huius propositionis, quae conversa est praecedentis, demonstrationem habet Proclus, quam etiam Clavius affert, deductam ex praemisso lemmate, quo docetur: Si in triangulo angulus bisecetur, et recta bisecans secet basin in partes inaequales, latera etiam angulum ad verticem comprehendentia inaequalia fore, et maius quidem id, quod maiori basis segmento adiacet. Quod ipsum lemma etiam converti potest. Cf. Clavius. Campano nostra 18. est 19., et contra, unde et alias habet demonstrationes.

Cor. 1. In triangulo, cuius omnes anguli sunt inaequales, latera etiam sunt inaequalia; maius nempe, quod maiori

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , maiorem habens angulum  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma A$ ; dico et latus  $A\Gamma$  latere  $AB$  minus esse.

Si enim non; vel aequalis est  $A\Gamma$  rectae  $AB$ , vel minor; aequalis quidem non est  $A\Gamma$  rectae  $AB$ , aequalis enim esset et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $A\Gamma B$  (Prop. 5.). Non est autem; non igitur aequalis est  $A\Gamma$  rectae  $AB$ . Neque tamen minor est  $A\Gamma$  recta  $AB$ ; minor enim esset et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $A\Gamma B$  (Prop. 18.); non est autem; non igitur minor est  $A\Gamma$  recta  $AB$ . Ostensum est autem neque aequalem esse; maior igitur est  $A\Gamma$  recta  $AB$ . Omnis igitur etc.

### PROPOSITIO XX. (Fig. 27.)

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

angulo opponitur. Cf. Pfeiderer l. c. qui etiam reliqua corollaria habet.

Cor. 2. Trianguli aequicruri basis maior aut minor erit quovis crure, prout angulus ad verticem maior aut minor est quolibet angulo ad basin.

Cor. 3. In triangulo rectangulo aut obtusangulo latus angulo recto aut obtuso oppositum maius est quovis reliquo.

Cor. 4. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur duae rectae, quatum sit una ad eam perpendicularis, ea erit minor altera. Vel: Omnium rectarum, quae e puncto aliquo in rectam extra id punctum transeuntem duci possunt, minima est ea, quae isti rectae est perpendicularis, quae ipsa etiam brevissima, minima nempe, istius puncti a linea dicitur. Cf. Clavius.

Cor. 5. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur perpendicularis et ex eadem perpendiculari parte duae aliae rectae,

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ . λέγω, ὅτι τοῦ  $AB$  τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰς πάντη μεταλαμβάνονται, αἱ μὲν  $BA$ ,  $ΑΓ$  τῆς  $ΒΓ$  αἱ δὲ  $AB$ ,  $ΒΓ$  τῆς  $ΑΓ$ , αἱ δὲ  $ΒΓ$ ,  $ΓΑ$  τῆς  $ΑΒ$ .  
 Διήχθω γὰρ ἡ  $BA$  ἐπὶ τὸ  $Δ$  σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ  $ΓΑ$  ἴση ἡ  $ΔΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΔ$  τῇ  $ΑΓ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ὑπὸ  $ΑΔΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ <sup>1)</sup>· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  τῇ

1) ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΑΓΔ$  μείζων ἐστίν. Haec verba, quae hic habent edd. Basil. et Oxon. consentiente Cod. a. omittit Peyrard. Nec sane sunt necessaria.

harum quae perpendicularo propior est, minor est altera: et diversis perpendiculari partibus duae tantum, aequales rectae duci possunt.

#### PROPOSITIO XX.

Obs. Proclus refert, Epicuræos Geometras intrisisse, e hanc propositionem asinis quoque notam esse dixisse, quae recta pergant, ubi focum sit. Quod ludibrium quam ineptum sit, ubi non de eo agatur, quid sensibus videatur (κατὰ τὴν αἰσθησιν), sed de scientia philosophica, quam ἐπιστημονικὸν λόγον vocat Proclus, omnes vident. Nec axiomatum numerus, ut monet Rob. Simson, sine necessitate augendus est. Plures adhuc alias huius propositionis demonstrationes affert Proclus, e quibus e schola Philonis et Porphyrii hanc satis simplicem: In triangulo quocunque  $ABΓ$  (Fig. 28.) si bisecetur angulus  $BAΓ$  recta  $ΑΔ$ , quae basin secet in  $Δ$ , erit angulus  $ΒΑΔ > ΑΔΓ$  (I. 16.). At  $ΑΔΓ = ΔΑΒ$  ex constr. Itaque  $ΒΑΔ > ΔΑΒ$ , quare  $BA > ΒΔ$  (I. 19.). Eodem modo monstratur, esse  $ΑΓ > ΔΓ$ , quare  $BA + ΑΓ > ΒΔ + ΔΓ$  i. e.  $> ΒΓ$ . Alii, ut Ambrosius Rhodius, e definitione rectae Archimedeae immediate hoc assertum deducunt, quod non Ramosolum, sed etiam Tacqueto, Coëtsio, aliisque simplicissimum visum fuit. At an Euclidis adsensum obtinere potuisset, du-

Si enim triangulum  $AB\Gamma$ ; dico  $AB\Gamma$  trianguli  
 a latera reliquo maiora esse, quomodocunque sum-  
 atur nempe  $BA$ ,  $A\Gamma$  latere  $B\Gamma$ , et  $AB$ ,  $B\Gamma$  latere  
 $A\Gamma$ , et  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  latere  $AB$ .

Producatur enim  $BA$  ad punctum  $\Delta$ , et ponatur  
 $\Delta A$  aequalis  $A\Gamma$  (Prop. 3.), et iungatur  $A\Gamma$ .

Quoniam igitur aequalis est  $\Delta A$  rectae  $A\Gamma$ , aequa-  
 lis est et angulus  $\Delta A\Gamma$  angulo  $A\Gamma A$  (Prop. 5.), ma-

iorum omnino videtur. Et ipsi Archimedi proprie id non  
 defuit, sed λαμβανόμενον τε, ut ad Def. 4. diximus.

Cor. 1. Trianguli aequicruri unumquodque aequalium  
 crurum minus est dimidia basi. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 312.

Cor. 2. In triangulo non aequicruro differentia duorum  
 aequalium laterum minor est tertio latere. Nempe quum  
 (Fig. 27.)  $BA + A\Gamma > B\Gamma$ , erit demta utrimque recta  $A\Gamma$ ,  
 $BA > B\Gamma - A\Gamma$ , vel  $B\Gamma - A\Gamma < BA$ , atque ita pariter circa  
 reliqua latera.

Cor. 3. In quovis triangulo summa omnium laterum  
 simul sumptorum maior est, quam duplum cuiuscunque lateris.  
 Nam, quia  $BA + A\Gamma > B\Gamma$ , erit, utrimque addito  $B\Gamma$ ,  $BA$   
 $+ A\Gamma + B\Gamma > 2B\Gamma$ .

Cor. 4. In quovis triangulo omnia latera simul sumpta  
 maiora sunt duplo duorum quorumcunque laterum. Quum  
 enim  $B\Gamma < BA + A\Gamma$  erit, utrimque additis  $BA + A\Gamma$ ,  $B\Gamma +$   
 $BA + A\Gamma < 2BA + 2A\Gamma$ . Haec tria proxime praecedentia co-  
 clusiva sunt e Borellio. Cf. Pfeiderer. l. c.

Cor. 5. In quavis figura rectilinea quodvis latus est  
 minus summam reliquorum. Cf. Pfeiderer. l. c. Verbi causa in Fi-  
 gura quadrilatera  $AB\Gamma\Delta$  (Fig. 29.) ducta diametro  $B\Gamma$ , erit  
 $B\Gamma < AB$ . At  $\Gamma A + \Delta A > B\Gamma$ , unde eo magis  $A\Gamma + \Gamma A +$   
 $\Delta A > AB$ , atque eodem modo in figuris, quae plura latera  
 habent, etiam, si angulos habent introrsum vergentes, res  
 demonstrabitur. Conversam huius propositionis, nempe, si  
 res quocunque v. c. n datae sint, quarum quaevis minor

ὑπὸ  $ΑΔΓ$ · καὶ ἐπεὶ τριγώνον ἐστὶ τὸ  $ΔΓΒ$ , μείζον  
 ἔχον τὴν ὑπὸ  $ΒΓΔ$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $ΒΔΓ$ , ὑπὸ  
 τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει,  
 $ΔΒ$  ἄρα τῆς  $ΒΓ$  ἐστὶ μείζων. Ἰση δὲ ἡ  $ΔΒ$  τῇ  
 $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  1)· μείζονες ἄρα αἱ  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  τῆς  $ΒΓ$ .  
 Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  τῆς  
 $ΓΑ$  μείζονες εἰσιν αἱ δὲ  $ΒΓ$ ,  $ΓΑ$  τῆς  $ΑΒ$ . Παντ  
 ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τοῦ  
 περάτων 2) δύο εὐθελαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συστα  
 θεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλά  
 ττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $ΑΒΓ$  ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν  
 τῆς  $ΒΓ$ , ἀπὸ τῶν περάτων τῶν  $Β$ ,  $Γ$ , δύο εὐθεῖαι

1) Peyrard. habet lectionem Cod. a: ἴση δὲ ἡ  $ΑΑ$  τῇ  $ΑΔ$ .  
 nos praetulimus lectionem edd. Basil. et Oxon. ut consequenti  
 bus magis aptam.

2) Proclus habet: ἀπὸ τῶν περάτων ἀρξάμεναι.

est summa reliquarum, construi inde posse figuram tot lat  
 rum ( $n$ ), quot rectae datae sunt, demonstrat Deveyley Elen  
 de Géom. Livr. II. Ch. II. §. 41.

Cor. 6. Pari ratione ostenditur, quamvis ab uno puncto  
 ad alterum ductam rectam minorem esse quavis in eodem  
 plano inter haec puncta ducta linea fracta i. e. composita  
 pluribus rectis sub angulis quibuscunque inter se iunctis  
 Cf. Pfleiderer. l. c.

Cor. 7. In quavis figura rectilinea summa omnium la  
 terum maior est duplo uniuscuiusque lateris figurae. Sit enim  
 hoc latus  $A$ , summa omnium laterum  $=S$ , erit summa reli  
 quorum laterum  $=S-A$ , et ex Cor. 6.  $S-A > A$ , unde, si  
 $A$  utrimque addatur,  $S > 2A$ , vel  $\frac{S}{2} > A$ . Cf. Pfleiderer. l. c.

igitur est  $B\Gamma A$  angulo  $A\Delta\Gamma$  (Ax. 9.); et quoniam triangulum est  $\Delta\Gamma B$ , maiorem habens angulum in angulo  $B\Delta\Gamma$ , maiorem autem angulum maius subtenet;  $AB$  igitur recta  $B\Gamma$  maior est (Prop. 18.); equalis autem  $\Delta B$  rectis  $AB$ ,  $A\Gamma$ ; maiores igitur  $BA$ ,  $A\Gamma$  recta  $B\Gamma$ . Similiter autem ostendetur et  $AB$ ,  $B\Gamma$  recta  $\Gamma A$  maiores esse; et  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  recta  $AB$ . Omnis igitur etc.

### PROPOSITIO XXI. (Fig. 30.)

Si a terminis unius lateris trianguli duae rectae intus constituentur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim  $AB\Gamma$  super uno latere  $B\Gamma$ , a terminis  $B$ ,  $\Gamma$ , duae rectae intus constituentur  $BA$ ,

Cor. 8. In quavis figura rectilinea summa omnium laterum minor est duplo summae omnium laterum praeter unum. Sit hoc utrumque latus  $A$ , et summa omnium laterum, ut in praecedente Cor. =  $\Sigma$ , eritque  $\Sigma - A > A$ , unde, si utrimque addatur  $\Sigma - A$ , erit  $2(\Sigma - A) > \Sigma$ , vel  $\Sigma < 2(\Sigma - A)$ , vel  $\frac{\Sigma}{2} < \Sigma - A$ .

### PROPOSITIO XXI.

Obs. Addi potest, valere etiam propositionem, si punctum, quod hic intra triangulum positum sumebatur, sit in altero trianguli latere v. c. si punctum  $\Delta$  (Fig. 30.) cum puncto  $B$  coincidat. Aliam adhuc demonstrationem habet Quercius (Euclid. Elem. VI. libr. prior. Lugd. Batav. 1692. p. 92.), quae tamen non generaliter valet. Ostendere nempe non potest, esse tum  $AB > BA$ , quam  $A\Gamma > \Gamma A$ , quod neutiquam absurda est. Probe autem notandum est, ut vera sit propo-

ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ  $BA$ ,  $AG$ . λέγω, ὅτι αἱ  $BA$ ,  $AG$  πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευραὶ τῶν  $BA$ ,  $AG$  ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίας περιέχουσι, τὴν ὑπὸ  $BAG$  τῆς ὑπὸ  $BAF$ .

Διήχθω γὰρ ἡ  $BA$  ἐπὶ τὸ  $E$ .

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, τοῦ  $ABE$  ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ  $AB$ ,  $AE$  τῆς  $BE$  μείζονες εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ  $EF$ · αἱ ἄρα  $BA$ ,  $AG$  τῶν  $BE$ ,  $EG$  μείζονες εἰσιν. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ  $GEA$  τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ  $GE$ ,  $EA$  τῆς  $GA$  μείζονες εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ  $AB$ · αἱ  $GE$ ,  $EB$  ἄρα τῶν  $GA$ ,  $AB$  μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν  $BE$ ,  $EF$  μείζονα ἐδείχθησαν αἱ  $BA$ ,  $AG$ · πολλῶν ἄρα αἱ  $BA$ ,  $AG$  τῶν  $BA$ ,  $AG$  μείζονες εἰσιν.

sitio, a terminis extremis basis ducendas esse rectas intra triangulum constituendas. Proclus enim demonstrat, hac conditione omissa, multa esse triangula, quibus alia inscribi possint, quorum duo latera simul sumpta maiora sint lateribus trianguli ambientis, aut etiam, quae angulum comprehendant minorem eo, quem latera trianguli ambientis comprehendunt. Cf. Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. libr. VI. prior. Argentor. 1559. Sit nempe (Fig. 31.) triangulum  $ABF$ , cuius angulus  $ABF$  vel rectus sit, vel obtusus. Ducatur ad punctum baseos quodcunque  $A$  recta  $AA$ , eritque in triangulo  $ABF$  recta  $AA > AB$  (Prop. 19. Cor. 3.). Sumatur  $AE = AB$ , rectaque  $AE$  bisecetur in puncto  $Z$  (Prop. 10), iungaturque  $ZF$ , eritque  $AZ + ZF > AF$  (Prop. 20.) i. e.  $ZE + ZF > AF$ , ideoque, additis utrimque aequalibus  $AE$ ,  $AB$ , erit  $ZE + AE + ZF > AF + AB$  i. e.  $ZA + ZF > AF + AB$ . Quin Pappus (Collect. Mathem. III. 3.) ut Rob. Simson. monet, demonstrat, latera trianguli alteri inclusi non solum maiora esse posse lateribus trianguli ambientis, sed quamvis etiam ad ea



$AF$ ; dico  $BA$ ,  $AF$  latera reliquis trianguli duobus  
tribus  $BA$ ,  $AF$  minora quidem esse, maiorem  
vero angulum continere, angulum nempe  $BAG$  an-  
gulo  $BAG$ .

Producatur enim  $BA$  ad  $E$ .

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ma-  
iora sunt (Prop. 20.), trianguli  $ABE$  duo latera  $AB$ ,  
 $AE$  latere  $BE$  maiora sunt. Communis addatur  $EF$ ;  
ergo  $BA$ ,  $AF$  rectis  $BE$ ,  $EF$  maiores sunt (Ax. 4.).  
Rursus, quoniam  $FEA$  trianguli duo latera  $FE$ ,  $EA$   
latere  $FA$  maiora sunt (Prop. 20.); communis addatur  
 $AB$ ; ergo  $FE$ ,  $EB$  rectis  $FA$ ,  $AB$  maiores sunt  
(Ax. 4.). Sed ipsis  $BE$ ,  $EF$  maiores ostensae sunt  
 $BA$ ,  $AF$ ; multo igitur  $BA$ ,  $AF$  rectis  $BA$ ,  $AF$   
maiores sunt.

rationem habere, dummodo minor sit dupla. Unde Clairaultio  
in Praef. ad Geometr. Paris. 1741. non adeo superflua videri  
debet Euclidis demonstratio. Pariter, quod ad angulum at-  
tinet, ita Proclus pergit. Sit (Fig. 32.) triangulum  $ABF$   
(Proclus quidem dicit triangulum aequicrurum, ut nempe  
 $AB=AF$ , quod tamen haud necessarium esse videtur), cuius  
maximum latus  $BF$ , a quo abscindatur  $BA=BA$ , et in ducta  
 $AA$  sumatur punctum quodcunque  $E$ , et iungatur  $EF$ . Erit  
itaque angulus  $BAA=BAA$  (I. 5.). At  $BAA>AEF$  (I. 16.).  
Itaque et  $BAA>AEF$ , et multo magis  $BAG>AEF$ . Unde  
patet, et quoad angulum necessariam esse illam conditionem,  
ut a punctis extremis baseos ductae sint rectae ad punctum  
intra triangulum.

Cor. 1. In figura quadrilatera  $ABFA$  (Fig. 53.) in qua  
angulus  $A$  introrsum vergit (ita nempe constructus, ut  
rectae eum comprehendentes, si producantur, intra figuram  
cadant) summa laterum  $BA+FA$  hunc angulum comprehen-  
dens minor est summa reliquorum laterum  $BA+AF$ , quod,

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐκτὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν· τοῦ  $\Gamma\Delta E$  ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $\Gamma E\Delta$ . Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα <sup>1)</sup> καὶ τοῦ  $ABE$  τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $\Gamma E B$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $B A \Gamma$ . Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ  $\Gamma E B$  μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$  πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $B A \Gamma$ . Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κβ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένης <sup>2)</sup>.

1) Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα. Ita cum edd. Basil. et Oxon. posuimus. Peyrard. secutus Cod. a. habet: διὰ τὰ αὐτὰ τοῖνον.

2) Peyrard. addit e Cod. a: διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένης. Nos haec verba cum edd. Basil. et Oxon. omisimus, quod glossam sapere viderentur, et alibi quoque, ubi problemata occurrunt, quae determinatione aliqua vel limitatione opus habent, in ipso problematis enunciato huius limitationis ratio reddi haud solet v. c. in VI. 28.

ducta recta  $B\Gamma$ , statim apparet. Eius generis figuram Proclus ad I. Def. 24. satis insulse τρίγωνον τετράπλευρον, triangulum quadrilaterum, nominat, angulum nempe ad  $\Delta$  haud pro vero angulo reputans. Rectius, ut ibidem refert, Zenodorus κοίλων (σχήμα) vocabat.

Cor. 2. Quadrilaterum aequilaterum angulum introrsum vergentem habere nequit, summa potius rectorum, quae angulum introrsum vergentem comprehendunt, minor est summa duorum reliquorum quadrilateri laterum.

Cor. 3. Si super  $B\Gamma$  (Fig. 34.) alia figura rectilinea quaecunque, quae non habeat angulos introrsum vergentes, intra triangulum  $AB\Gamma$  constituta sit, v. c. quadrilatera figura

Itaque, quoniam omnis trianguli exterior angulus  
interiore et opposito maior est (Prop. 16.),  $\angle AEF$  tri-  
anguli exterior angulus  $BAG$  maior est angulo  $FEA$ .  
Idem ex ratione et  $ABE$  trianguli exterior angulus  
 $FEB$  maior est angulo  $BAG$ . Sed angulo  $FEB$   
maior ostensus est  $BAG$ ; multo igitur  $BAG$  maior  
est angulo  $BAG$ . Si igitur etc.

### PROPOSITIO XXII. (Fig. 35.)

Ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus datis  
rectis, triangulum constitnere; oportet autem duas re-  
ctas maiores esse, utcunque sumptas.

$\angle AEF$ , summa laterum  $AB+AG$  semper maior erit summa  
laterum istius figurae  $BA+AE+EF$ . Ducta enim  $AE$ , pro-  
ducatur  $BA$ , dum rectae  $AE$  occurrat in  $Z$ , tum iungantur  
 $ZF$ ,  $AF$ , erique ex nostra propositione,  $ZA+ZF > AE+BF$ ,  
unde, addita utrimque  $AB$ , erit  $AB+ZA+ZF$  i. e.  $ZB+ZF$   
 $> BA+AE+EF$ . At ex nostra propositione  $AB+AG > ZB+$   
 $ZF$ , unde tanto magis  $AB+AG > BA+AE+EF$ . Et similis  
erit demonstratio in figuris plurium laterum.

Cor. 4. Pariter, si super eadem basi, ad easdem eius  
partes, duae figurae rectilineae, quae angulos introrsum ver-  
gentes non habeant, constituentur una intra alteram, perimetre  
exterioris maior est perimetro interioris. Idemque valet, si  
utrimque perimetrum intelligas, demta utrimque basi com-  
muni, quin etiam, si interior atque exterior figura unum al-  
terumve latus praeter basin commune habeant. Haec corollaria  
sunt ex schedis Pfeidereri. Vid. Hauberi Chrest. p. 133. sqq.

### PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Ostendendum erat, quod et Proclus facere ten-  
tavit, circulos centro  $H$ , intervallo  $H\theta = I'$ , et centro  $Z$ , in-  
tervallo  $ZA = A$  descriptos, si problematis conditiones serven-

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ  $A, B, \Gamma$ , ὃν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβάνομεναι, αἱ μὲν  $A, B$  τῆς  $\Gamma$ , αἱ δὲ  $A, \Gamma$  τῆς  $B$ , καὶ ἔτι αἱ  $B, \Gamma$  τῆς  $A$ . δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς  $A, B, \Gamma$  τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ  $\Delta E$ , πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ  $\Delta$ , ἀπειρος δὲ κατὰ τὸ  $E$ . καὶ κείσθω τῇ μὲν  $A$  ἴση ἡ  $\Delta Z$ , τῇ δὲ  $B$  ἴση ἡ  $ZH$ , τῇ δὲ  $\Gamma$  ἴση ἡ  $H\Theta$ . καὶ κέντρον μὲν τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ τῷ  $\Delta\Delta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $\Delta K A$  καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι δὲ τῷ  $H\Theta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $K\Lambda\Theta$ , καὶ ἐπεξένχθωσαν αἱ  $KZ, KH$ . λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς  $A, B, \Gamma$ , τρίγωνον συνίσταται τὸ  $KZH$ .

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Delta K A$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta\Delta$  τῇ  $ZK$ . ἀλλὰ ἡ  $\Delta\Delta$  τῇ  $A$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  $KZ$  ἄρα τῇ  $A$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $H$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Lambda K\Theta$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $H\Theta$  τῇ  $HK$ . ἀλλὰ ἡ  $H\Theta$  τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  $KH$  ἄρα τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ

tur, se invicem secare. Quod ita fere demonstrari poterit. Si isti circuli se invicem non secant, vel circulus centro  $H$  descriptus (circulum  $H$  vocabimus) complectetur totum circulum centro  $Z$  descriptum, quem circulum  $Z$  vocabimus; vel circulus  $Z$  complectetur circulum  $H$ ; vel uterque extra alterum positus erit. Casu primo  $\Theta H$  aequalis aut maior esse deberet, quam  $HZ + ZA$  i. e.  $\overline{B} + A$ , contra hypothesis. Secundo casu foret  $\Delta\Delta > HZ + H\Theta$  i. e.  $\overline{A} > B + \Gamma$ , pariter contra hypothesis. Tertio foret  $HZ > H\Theta + \Delta\Delta$  i. e.  $\overline{B} > \Gamma + A$ , pariter

Sint datae tres rectae  $A, B, \Gamma$ , quarum duae reliqua maiores sint, utcumque sumptae, nempe  $A, B$  maiores, quam  $\Gamma$ ;  $A, \Gamma$  autem maiores, quam  $B$ ; denique  $B, \Gamma$  maiores, quam  $A$ ; oportet igitur ex rectis aequalibus ipsis  $A, B, \Gamma$  triangulum consituere.

Exponatur aliqua recta  $AE$ , terminata quidem ad  $A$ , infinita vero versus  $E$ ; et ponatur rectae  $A$  aequalis  $AZ$ , rectae vero  $B$  aequalis  $ZH$ , et rectae  $\Gamma$  aequalis  $H\Theta$  (Prop. 3.); et centro quidem  $Z$ , intervallo vero  $ZA$ , circulus describatur  $AKA$  (Post. 3.); et rursus, centro quidem  $H$ , intervallo vero  $H\Theta$ , circulus describatur  $KA\Theta$  (Post. 3.) et iungantur  $KZ, KH$ ; dico ex tribus rectis, aequalibus ipsis  $A, B, \Gamma$ , triangulum constitutum esse  $KZH$ .

Quoniam igitur  $Z$  punctum centrum est  $AKA$  circuli, aequalis est  $ZA$  ipsi  $ZK$  (Def. 15.); sed  $ZA$  ipsi  $A$  est aequalis; et  $KZ$  igitur ipsi  $A$  est aequalis (Ax. 1.). Rursus, quoniam punctum  $H$  centrum est circuli  $KA\Theta$ , aequalis est  $H\Theta$  ipsi  $HK$  (Def. 15.); sed  $H\Theta$  ipsi  $\Gamma$  est aequalis; et  $KH$  igitur ipsi  $\Gamma$  est aequalis (Ax. 1.). Est autem et  $ZH$  ipsi  $B$  ac-

contra hypothesin. Itaque circuli se invicem secabunt, et quidem, ut facile patet, tam supra rectam  $HZ$  in puncto aliquo  $K$ , quam infra illam in puncto aliquo  $A$ , unde duo triangula  $HEZ, HAZ$ , quae vero positione tantum differunt, hac ratione construi poterunt, nec vero plura, ut patet ex I, Cor. 7.

Obs. 2. Quum Proclus Euclidis verba proferat, quae nullo differunt ab iis, quae nunc in textu Graeco leguntur. Commandinus inde concludit, Euclidis demonstrationes aliquibus in locis a Theone immutatas fuisse. Id autem ex levi variatione, quam permittere sibi omnino poterat Proclus, qui sensum Euclidis, non minutissima quaevis vocabula, spectaret, haud sequi videtur.

ἡ  $ZH$  τῇ  $B$  ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθείαι αἱ  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $HK$ , τριοὶ ταῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  ἴσαι εἰσιν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $HK$ , αἱ εἰσιν ἴσαι τριοὶ ταῖς δοθεῖσαις εὐθείαις ταῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , τρίγωνον συνίσταται τὸ  $KZH$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον οὐστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημείον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$ . δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$  ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον οὐστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν  $\Gamma Δ$ ,  $\Gamma Ε$  τυχόντα σημεία τὰ  $\Delta$ ,  $Ε$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $\Delta Ε$ . καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τριοὶ ταῖς  $\Gamma Δ$ ,  $\Delta Ε$ ,  $\Gamma Ε$ , τρίγωνον συνεστήτω τὸ  $\Delta Ζ Η$ , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν  $\Gamma Δ$  τῇ  $\Delta Ζ$ , τὴν δὲ  $\Gamma Ε$  τῇ  $\Delta Η$ , καὶ ἔτι τὴν  $\Delta Ε$  τῇ  $Ζ Η$ .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ  $\Delta \Gamma$ ,  $\Gamma Ε$  δυοὶ ταῖς  $Ζ Α$ ,  $\Delta Η$  ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσεις ἡ  $\Delta Ε$ , βάσει τῇ  $Ζ Η$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta Γ Ε$  γωνία τῇ ὑπὸ  $Ζ Α Η$  ἴσιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυ-

Cor. Triangulum aequicrurum, cuius latus et basis aequent duas rectas datas, similiter construi poterit, dummodo recta, cui latus aequale fieri debet, maior sit dimidia basi (I. 20. Cor. 1.). Cf. Pfeiderer. l. c. p. 315.

quas; tres igitur rectae  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $HK$  tribus  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  aequales sunt.

Ex tribus igitur rectis  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $HK$ , quae sunt aequales datis rectis  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , triangulum constitutum est  $KZH$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XXIII. (Fig. 36.)

Ad datam rectam, et ad punctum in ea, dato angulo rectilineo angulum rectilineum aequalem constituere.

Sit quidem data recta  $AB$ , in ea vero punctum  $A$ , et datus angulus rectilineus  $\angle \Gamma E$ ; oportet igitur ad datam rectam  $AB$ , et ad punctum in ea  $A$ , dato angulo rectilineo  $\angle \Gamma E$  aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur in utraque ipsarum  $\Gamma A$ ,  $\Gamma E$  quaelibet puncta  $\Delta$ ,  $E$ , et iungatur  $\Delta E$ ; et ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus  $\Gamma A$ ,  $\Delta E$ ,  $\Gamma E$ , triangulum constituitur  $\Delta ZH$  (Prop. 22.), ita ut aequalis sit  $\Gamma A$  quidem rectae  $AZ$ , recta vero  $\Gamma E$  rectae  $AH$ , et denique  $\Delta E$  rectae  $ZH$ .

Quoniam igitur duae  $\Delta \Gamma$ ,  $\Gamma E$  duabus  $ZA$ ,  $AH$  aequales sunt, utraque utrique, et basis  $\Delta E$  basi  $ZH$  aequalis, angulus  $\angle \Gamma E$  angulo  $\angle ZAH$  est aequalis (Prop. 8.).

Ad datam igitur rectam  $AB$ , et ad punctum in ea  $A$ , dato angulo rectilineo  $\angle \Gamma E$ , aequalis angulus

### PROPOSITIO XXIII.

Paullo simplicior sit constructio, si sumatur  $\Gamma A = \Gamma B$ , itaque  $AZ = AH$ . Caeterum hoc problema ab Oenopide inventum esse, Proclus refert. Pari ratione datis duobus lateri-

γραμμῶν τῇ ὑπὸ  $\Lambda Γ Ε$  ἴσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμος συνίσταται ἢ ὑπὸ  $Ζ Α Η$ . "Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κδ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $Α Β Γ$ ,  $Δ Ε Ζ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $Α Β$ ,  $Α Γ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $Δ Ε$ ,  $Δ Ζ$  ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν μὲν  $Α Β$  τῇ  $Δ Ε$ , τὴν δὲ  $Α Γ$  τῇ  $Δ Ζ$ , γωνία δὲ ἡ ὑπὸ  $Β Α Γ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $Ε Δ Ζ$  μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ  $Β Γ$  βάσεως τῆς  $Ε Ζ$  μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $Β Α Γ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $Ε Δ Ζ$  γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ  $Δ Ε$  εὐθείᾳ,

bus trianguli et angulo, quem comprehendunt, aliud ei aequale triangulum constituetur.

### Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο Χ Χ Ι V.

Praeter eum casum, qui in textu Graeco habetur, duos adhuc alios esse, Proclus monet, eosque habent etiam Campanus, Commandinus, Clavius, Orontius Finneus, Billingsley aliique. Nempe punctum  $H$  non tantum, ut est in Graecis exemplaribus, supra  $EZ$ , verum etiam (Fig. 38. a.) in ipsam  $EZ$ , vel infra eam (Fig. 38. b.) cadere potest. At etiam his casibus facilis est demonstratio. Cadat enim (Fig. 38. a.) punctum  $H$  in rectam  $EZ$ , eritque, ob angulum  $Ε Α Η > Ε Δ Ζ$ , necessario punctum  $H$  in recta  $EZ$  ultra  $Z$  producta, i. e. erit  $Ε Η$  vel  $Β Γ > Ε Ζ$ . Sin autem punctum  $H$  (Fig. 38. b.) cadet infra rectam  $EZ$ , erit triangulum  $Ε Ζ Δ$  intra triangulum  $Ε Η Δ$ , adeoque  $Α Ζ + Ε Ζ < Α Η + Ε Η$  (I. 21.) adeoque, quum ex hyp.



rectilineus constitutus est  $ZAH$ . Quod oportebat  
facere.

# PROPOSITIO XXIV. (Fig. 37.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo maiorem habeant, qui ab aequalibus lateribus continentur; et basin basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , duo latera  $AB$ ,  $\Delta E$  duobus lateribus  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$  aequalia habentia, utrumque utrique, latus nempe  $AB$  lateri  $\Delta E$ , latus vero  $A\Gamma$  lateri  $\Delta Z$ , angulus autem  $B\Delta\Gamma$  angulo  $E\Delta Z$  maior sit; dico et basin  $B\Gamma$  basi  $EZ$  maiorem esse.

Quoniam enim maior est  $B\Delta\Gamma$  angulus  $E\Delta Z$  angulo, constituatur ad  $\Delta E$  rectam, et ad punctum in

in  $Z=\Delta\Gamma$  i. e. ex constr.  $=\Delta H$ , erit  $EZ < EH$  (Ax. 5.). Caeterum potest etiam res brevius absolvi eo fere modo, quo Rob. Simson. utitur, quem exactioris demonstrationis causa paulo tantum immutatum sistimus. Sit nempe (Fig. 39.)  $BA=\Delta B$ ,  $\Delta\Gamma=\Delta Z$ , et angulus  $B\Delta\Gamma=E\Delta Z$ , et ad  $BA$ , eam rectarum  $BA$ ,  $\Delta\Gamma$ , quae non maior est altera, constituatur angulus  $BAA=E\Delta Z$  (I. 23.), et fiat  $AA=\Delta Z$ , et iungantur  $BA$ ,  $\Delta\Gamma$ , eritque (I. 4.)  $BA=EZ$ . Quum igitur angulus  $BAA=E\Delta Z$  sit ex hypoth. minor angulo  $B\Delta\Gamma$ , recta  $AA$  intra angulum  $B\Delta\Gamma$  cadet, adeoque recta  $AA$ , si opus sit, producta, secabit rectam  $B\Gamma$ . Secet eam in  $M$ , eritque  $\angle AM\Gamma > \angle AB\Gamma$  (I. 16.). At ob  $\angle BAA=\angle E\Gamma$  ex hypoth. erit  $\angle AB\Gamma > \angle A\Gamma B$  (I. 5. et I. 19.) unde semper  $\angle AM\Gamma > \angle A\Gamma B$ , adeoque  $\angle AM < \angle A\Gamma$  (I. 19.) adeoque, quoniam  $AA=\Delta\Gamma$ , punctum  $A$  infra  $B\Gamma$  cadet. Et quum  $AA=\Delta\Gamma$ , erit  $\angle AAT=\angle A\Gamma A$  (I. 5.), adeoque  $\angle B\Delta\Gamma > \angle B\Gamma A$  et  $B\Gamma$

καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $\Delta$ , τῇ ὑπὸ  $BAG$  γωνία ἴση ἢ ὑπὸ  $EAH$ · καὶ κείσθω ὅποτέρᾳ τῶν  $AG$ ,  $AZ$  ἴση ἢ  $AH$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $EH$ ,  $ZH$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $AE$ , ἡ δὲ  $AG$  τῇ  $AH$ , δύο δὴ αἱ  $BA$ ,  $AG$  δυοὶ ταῖς  $EA$ ,  $AH$  ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EAH$  ἴση ἐστὶν· βάσεις ἄρα ἡ  $BG$  βάσει τῇ  $EH$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $AH$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $AZH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AHZ$ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $AZH$ , τῆς ὑπὸ  $AHZ$ , πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $EZH$  τῆς ὑπὸ  $AHZ$ . Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ  $EZH$ , μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $EZH$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $AHZ$ · ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ  $EH$  τῆς  $EZ$ . Ἰση δὲ ἡ  $EH$  τῇ  $BG$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ  $BG$  τῆς  $EZ$ . Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

$\triangleright BA$  (I. 19.) i. e.  $BG \triangleright EZ$ . Atque hac Pfeidereri demonstratione (vid. Hauberi Chrestom. p. 315. sqq.) satisfactum est iis, quae in Rob. Simsoni demonstratione adhuc desideraverat Thomas Simpson. (Elem. of Geometry London 1800. p. 262.), ostenso, punctum  $A$  necessario infra  $BG$  cadere. Caeterum, ut Proclus observat, conditiones problematis non definiunt, utrum et quo casu triangula  $ABG$ ,  $AEZ$  inter se

et  $\Delta$ ,  $BAF$  angulo aequalis  $EAH$  (Prop. 23.); et ponatur alterutri ipsarum  $AF$ ,  $AZ$  aequalis  $AH$  (Prop. 3.), et iungantur  $EH$ ,  $ZH$ .

Quoniam igitur aequalis est  $AB$  quidem rectae  $AE$ ,  $AF$  vero rectae  $AH$ , duae  $BA$ ,  $AF$  duabus  $EA$ ,  $AH$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $BAF$  angulo  $EAH$  aequalis est; basis igitur  $BF$  basi  $EH$  est aequalis (Prop. 4.). Rursus, quoniam aequalis est  $AZ$  rectae  $AH$ , aequalis est et angulus  $AZH$  angulo  $AHZ$  (Prop. 5.); maior igitur  $AZH$  angulo  $EHZ$ ; multo igitur maior est  $EZH$  angulo  $EHZ$ . Et quoniam triangulum est  $EZH$ , maiorem habens angulum  $EZH$  angulo  $EHZ$ ; maiorem autem angulum minus latus subtendit (Prop. 19.); minus igitur et latus  $EH$  latere  $EZ$ . Aequale autem  $EH$  lateri  $BF$ ; minus igitur et  $BF$  latere  $EZ$ . Si igitur duo etc.

#### PROPOSITIO XXV. (Fig. 40.)

Si duo triacula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, basin autem basi maiorem habeant; et angulum angulo maiorem habebunt, qui ab aequalibus rectis continetur.

aequalia, aut utrum maius sit altero, quod demum ope I. 38. determinari poterit. Alias adhuc observationes et consectaria considerari vid. l. c.

#### PROPOSITIO XXV.

Obs. Alias huius propositionis, quae conversa est prioris, demonstrationes, easque directas, at prolixiores, ex Menelao et Ptolemaeo affert Proclus, quas etiam videre est apud Clavium, in quibus autem varii casus, qui locum habere possunt, notari

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $AB$ ,  $ΑΓ$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ . βάσις δὲ ἡ  $ΒΓ$  βάσει τῆς  $ΕΖ$  μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $ΕΑΖ$  μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΑΖ$ , ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$ · οὐκ ἐστὶ δὲ οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΑΖ$ . Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΕΑΖ$ · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ  $ΒΓ$  βάσει τῆς  $ΕΖ$ · οὐκ ἐστὶ δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΕΑΖ$ . Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῆς ὑπὸ  $ΕΑΖ$ . Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς

## Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαι ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μι-

debant, observante Haubero Chrestom. p. 270. sqq. Cf. Pfeleidereri observationes et consecratia ibid. p. 319. sq.

## PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Prima huius propositionis pars, quum nempe unum latus cum angulis ei adiacentibus unius trianguli aequale est uni lateri atque angulis adiacentibus in altero triangulo facile per superpositionem directe demonstratur: Ob analogiam autem casus posterioris sine dubio Euclides similiter ac partem posteriorem demonstrare maluit. Caeterum Thaleti hoc theorema tribuere Eudemum in historiis geometricis, Proclus refert. Latus autem si in uno triangulo id sumatur, quod uni aequalium angulorum oppositum est, in altero triangulo pariter illud

Sint duo triacula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , duo latera  $AB$   $\Delta E$  duobus lateribus  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$  aequalia habentia, tranque utrique,  $AB$  quidem lateri  $\Delta E$ ,  $\Delta \Gamma$  vero lateri  $\Delta Z$ , basis autem  $B\Gamma$  basi  $EZ$  maior sit; dico et angulum  $B\Delta\Gamma$  angulo  $E\Delta Z$  maiorem esse.

Si enim non, vel aequalis est ei, vel minor; aequalis autem non est  $B\Delta\Gamma$  ipsi  $E\Delta Z$ , aequalis enim esset et basis  $B\Gamma$  basi  $EZ$  (Prop. 4.); non est autem; non igitur aequalis est angulus  $B\Delta\Gamma$  ipsi  $E\Delta Z$ . At neque minor est  $B\Delta\Gamma$  ipso  $E\Delta Z$ , minor enim esset et basis  $B\Gamma$  basi  $EZ$  (Prop. 24.); non est autem; non igitur minor est  $B\Delta\Gamma$  angulus ipso  $E\Delta Z$ . Oportet autem esse neque aequalem esse; maior igitur est  $B\Delta\Gamma$  ipso  $E\Delta Z$ . Si igitur duo etc.

#### PROPOSITIO XXVI. (Fig. 41.)

Si duo triacula duos angulos duobus angulis aequales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri

numendum erit, et contra. Caeterum etiam hic valet, quod in Prop. 8. diximus, triacula etiam ipsa esse aequalia.

Obs. 2. Quatuor hactenus casibus duo triacula inter se aequalia esse vidimus, nempe

- 1) si unum latus et duo anguli adiacentes,
- 2) si unum latus, et unus angulus ei lateri adiacens, atque angulus ei oppositus in utroque angulo sint aequalia. Atque hoc quidem in nostra propositione.
- 3) Si duo latera cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sint utrimque (I. 4.)
- 4) Si omnia tria latera utrimque aequalia sint (I. 8.). Resert adhuc casus 5., quo duo triacula inter se aequalia esse possunt, nempe, si duo latera cum angulo uni eorum opposito

ἴσην, ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑπὸ  
τείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς  
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἐκατέρω  
ἐκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὰς δύο γωνί-  
νίας τὰς ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΒΓΑ$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $ΔΕΖ$ ,  $ΕΖΖ$   
ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ  $AB$   
τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  τὴν δὲ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΖΖ$ · ἐγὼ δὲ καὶ  
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην προτίθω, τὴν πρὸς ταῖς  
ἴσαις γωνίαις τὴν  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ · λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς  
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἐκατέραν ἐκα-  
τέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ , καὶ τὴν λοι-  
πὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , μία ἐνὶ τῷ  
μείζον ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ  $AB$ , καὶ κεισθῶ τῇ  
 $ΔΕ$  ἴση ἡ  $BH$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΗΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $BH$  τῇ  $ΔΕ$ , ἡ δὲ  $ΒΓ$  τῇ  
 $ΕΖ$ , δύο δὲ αἱ  $BH$ ,  $ΒΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΕΖ$  ἴσας  
εἶσιν, ἐκατέρα ἐκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΗΒΓ$  γωνία  
τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ  $ΗΓ$  βάσις τῇ  
 $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΗΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τρι-  
γώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς

utrimque aequalia sint. Hoc tamen casu, si nulla alia deter-  
minatio accedat, aequalitatem triangulorum *generatim* asserere  
non licebit, quod etiam Proclus observat p. 91. Sit enim (Fig.  
42.) triangulum aequicrurum  $ABΓ$ , et producaturs basis  $B$   
ad punctum aliquod  $Δ$ , ducaturque  $AA$ . Iam duo triangul-  
 $ΑΓΔ$ ,  $ΑΒΔ$  habent latus quidem  $AA$  commune, deinde  $ΑΓ=$   
 $AB$  ex hypoth. et angulum etiam  $Δ$  communem, qui lateribus  
 $ΑΓ$ ,  $AB$  opponitur, et manifestum tamen est, triangula ipsa  
non esse aequalia, quum unum  $ΑΒΔ$  sit tantum pars alterius  
 $ΑΓΔ$ . Aequalia tamen inter se esse duo triangula demonstrabitur

aequale, vel quod est ad aequales angulos, vel quod  
recta sit unum aequalium angulorum; et reliqua latera  
aliquis lateribus aequalia habebunt, utrumque utrique,  
et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triacula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , duos angulos  $AB\Gamma$ ,  
 $\Delta\Gamma A$  duobus  $\Delta EZ$ ,  $EZA$  aequales habentia, utrum-  
que utrique,  $AB\Gamma$  quidem angulo  $\Delta EZ$ ,  $B\Gamma A$  vero  
angulo  $EZA$ , habeant autem et unum latus uni lateri  
aequale; primum, quod est ad aequales angulos, latus  
 $B\Gamma$  lateri  $EZ$ ; dico et reliqua latera reliquis lateribus  
aequalia habitura esse, utrumque utrique,  $AB$  quidem  
lateri  $\Delta E$ ,  $\Delta\Gamma$  vero lateri  $\Delta Z$ , et reliquum angulum  
reliquo angulo,  $B\Gamma A$  angulo  $E\Delta Z$ .

Si enim inaequalis est  $AB$  rectae  $\Delta E$ , una earum  
maior est. Sit maior  $AB$ , et ponatur rectae  $\Delta E$   
aequalis  $BH$ , et iungatur  $H\Gamma$ .

Quoniam igitur aequalis est  $BH$  quidem rectae  
 $\Delta E$ ,  $B\Gamma$  vero rectae  $EZ$ , duae  $BH$ ,  $B\Gamma$  duabus  
 $\Delta E$ ,  $EZ$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  
 $HBT$  angulo  $\Delta EZ$  aequalis est; basis igitur  $H\Gamma$  basi  
 $\Delta Z$  aequalis est, et  $HBT$  triangulum  $\Delta EZ$  triangulo  
aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales

et utrumque unum angulum uni aequalem habeant, circa alios  
etiam angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum  
utrumque simul minorem aut non minorem recto; et ostende-  
re angulos etiam aequales esse, circa quos aequalia sunt latera,  
et tertium latus tertio lateri fore aequale. Sit nempè (Fig.  
6.) angulus  $A=\Delta$ , et  $AB=\Delta E$ ,  $B\Gamma=EZ$ , et 1) anguli  $\Gamma$ ,  
latus; eritque  $AB\Gamma=\Delta EZ$ , et  $A\Gamma=\Delta Z$ , et duo triacula  
aequalia. Si enim non sit angulus  $AB\Gamma=\Delta EZ$ , erit alteruter  
maior altero. Sit, si fieri potest,  $AB\Gamma$  maior angulo  $\Delta EZ$ , et  
ita  $ABH=\Delta EZ$ , eritque in triangulis  $ABH$ ,  $\Delta EZ$ ,  $AB=\Delta E$

γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $HGB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta ZE$ . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $\Delta ZE$  τῇ ὑπὸ  $BGA$  ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $BGH$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $BGA$  ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$  ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ  $BG$  τῇ  $EZ$  ἴση, δύο δὴ αἱ  $AB$ ,  $BG$  δυοὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta EZ$  ἐστίν ἴση βάσις ἄρα ἡ  $AG$  βάσει τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἐστῶσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ . λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν  $AG$  τῇ  $\Delta Z$ , ἡ δὲ  $BG$  τῇ  $EZ$ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἐστίν.

(hypoth.), angulus  $A=\Delta$  pariter ex hypoth. et  $ABH=\Delta EZ$  (hypoth.): itaque  $AHB=\Delta ZE$  (I. 25.), et  $BH=EZ$  i. e. ex hypoth. =  $BG$ . Quum autem ex hypoth. sit angulus  $Z$  acutus, acutus erit  $AHB$ , unde  $BHG$  obtusus (I. 14.). At  $FPH$  triangulum, ut ostendimus, aequicrurum est, unde  $BHG$  etiam acutus erit (I. 17. Cor. 2.) q. e. a. Sint autem 2. anguli  $I$ ,  $Z$  non minores recto, atque ostendetur ut ante, esse triangulum  $BHG$  aequicrurum, adeoque angulum  $I$  acutum vel minorem recto (I. 17. Cor. 2.), quem tamen non minorem esse recto posuimus, q. e. a. Caeterum, si angulus  $A$  et  $\Delta$  rectus vel obtusus sit, necessario acutus erit angulus  $I$  et  $Z$  (I. 17.), unde tum nova circa hos angulos determinatione non opus est. Pariter, si sit  $AB < BG$ , adeoque  $\Delta E < EZ$ , erit angulorum  $I$  et  $Z$  uterque acutus (I. 18. Cor. 1.), unde etiam tum res nova demonstrationis laud eget. Quum vero demonstratum fuerit, esse angulum  $ABG=\Delta EZ$ , erunt tum ex I. 4. etiam ipsa triangula



ant, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur  $HFB$  angulus angulo  $AZE$ . Sed  $AZE$  angulo  $BFA$  ponitur aequalis; igitur et  $BFH$  angulo  $BFA$  aequalis est, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur inaequalis est  $AB$  rectae  $AE$ ; aequalis igitur est. Est autem et  $BF$  rectae  $EZ$  aequalis, tunc igitur  $AB$ ,  $BF$  duabus  $AE$ ,  $EZ$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $ABF$  angulo  $AEZ$  est aequalis; basis igitur  $AF$  basi  $AZ$  aequalis est, et reliquus angulus  $BAT$  reliquo angulo  $EAZ$  aequalis est (Prop. 4.).

Sed et rursus, sint latera aequales angulos subtendens aequalia, ut  $AB$  lateri  $AE$ ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus aequalia futura esse,  $AT$  quidem lateri  $AZ$ ,  $BF$  vero lateri  $EZ$ , et adhuc reliquum angulum  $BAT$  reliquo angulo  $EAZ$  aequalem esse.

et omnes eorum partes inter se aequalia. Cf. Pflaiderer, l. c. p. 321. 4. Hic ex Clavio vel Tacqueto vel Whistonio (Andr. Tacquet. Elem. Euclid. Geometriae illustrata a Guil. Whiston. Romae 1735. p. 23.) addi possunt sequentia corollaria, quorum pars iam ad praecedentes propositiones pertinet, at ob nexum cum reliquis hic adicitur. Cf. Pflaiderer. l. c. p. 323.

Cor. 1. In triangulo aequicruro recta angulum ad verticem bisecans ad basin perpendicularis est, et basin aequae ac triangulum bisecat (I. 4.).

Cor. 2. In triangulo aequicruro recta, quae a vertice ad basin bisecat, bisecat etiam angulum ad verticem, et triangulum, et perpendicularis est ad basin (I. 8.). Cf. dicta ad I. 10.

Cor. 3. In triangulo aequicruro recta, quae a vertice perpendicularis ducitur ad basin, basin vel angulum ad verticem triangulum bisecat (I. 5. et I. 26.).

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ  $BΓ$  τῇ  $EZ$ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ  $BΓ$  τῇ  $EZ$ , καὶ κείσθω τῇ  $EZ$  ἴση ἡ  $BΘ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΑΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $BΘ$  τῇ  $EZ$ , ἡ δὲ  $ΑΘ$  τῇ  $ΔΕ$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $BΘ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΕ$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν βάσις ἄρα ἡ  $ΑΘ$  βάσει τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΘ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΖΔ$ . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $ΕΖΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΘΑ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  ἐστὶν ἴση τριγώνου δὲ τοῦ  $ΑΘΓ$  ἡ ἐκτὸς γωνία ὑπὸ  $ΒΘΑ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $ΒΓΑ$ , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ  $BΓ$  τῇ  $EZ$ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$  ἴση, δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $BΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΔΕ$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΔΖ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΕΑΖ$  ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

Cor. 4. Quod e media basi ad eam erigitur perpendicularum in triangulo aequicruo, transit per trianguli verticem, et angulum ad verticem bisecat. Quodsi enim non per verticem transeat, ducatur per verticem alia recta ad mediam basin, erigatur etiam haec ad basin perpendicularis in eodem puncto, quod prius illud perpendicularum, quod fieri nequit (I. 11. Cor. 2.).

Cor. 5. Rectae a quovis talis perpendiculari puncto ad puncta baseos extrema ductae efficiunt triangulum aequicruum (I. 4.).

Si enim inaequalis est  $BF$  rectae  $EZ$  una earum maior est. Sit maior, si fieri potest,  $BF$  recta  $EZ$ , et ponatur rectae  $EZ$  aequalis  $B\Theta$ , et iungatur  $A\Theta$ .

Et quoniam aequalis est  $B\Theta$  quidem rectae  $EZ$ ,  $AB$  vero rectae  $AE$ , duae  $AB$ ,  $B\Theta$  duabus  $AE$ ,  $EZ$  aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur  $A\Theta$  basi  $AZ$  aequalis est, et triangulum  $AB\Theta$  triangulo  $AEZ$  aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est angulus  $B\Theta A$  angulo  $EZA$ . Sed  $EZA$  angulo  $BFA$  est aequalis; et  $B\Theta A$  igitur angulo  $BFA$  est aequalis: trianguli igitur  $A\Theta F$  exterior angulus  $B\Theta A$  aequalis est interiori et opposito  $BFA$ , quod fieri nequit (Prop. 16.). Non igitur inaequalis est  $BF$  rectae  $EZ$ ; aequalis igitur. Est autem et  $AB$  ipsi  $AE$  aequalis; duae igitur  $AB$ ,  $BF$  duabus  $AE$ ,  $EZ$  aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur  $AF$  basi  $AZ$  aequalis est, et triangulum  $ABF$  triangulo  $AEZ$  aequale, et reliquus angulus  $BAF$  reliquo angulo  $EAZ$  aequalis (Prop. 4.). Si igitur duo etc.

Cor. 6. Quae contra a puncto extra illud perpendicularum sito ad extrema basis ducuntur rectae, inaequales sunt, vel triangulum scalarum efficiunt. Nam quae a tali puncto ad mediam basin ducitur recta, illi oblique insistit (I. 11. Cor. 2.) vel ad alteram sui partem acutum, ad alterum obtusum angulum efficit, unde latera his angulis opposita inaequalia erunt (I. 21.). Itaque vertex omnium triangulorum aequicrurorum, super eadem basi constitutorum, sunt in perpendicularo e media basi erecto, vel illud perpendicularum est locus geometricus, in

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεία ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $ΓΔ$  εὐθεία ἐμπίπτουσα ἡ  $EZ$ , τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AEZ$ ,  $EZA$  ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ .

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ  $AB$ ,  $ΓΔ$  συμπεσοῦνται, ἦτοι ἐπὶ τὰ  $ΒΔ$  μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ  $ΑΓ$ . Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτεύσαν ἐπὶ τὰ  $ΒΔ$  μέρη κατὰ τὸ  $H$ .

Τριγώνου δὴ τοῦ  $EHZ$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $AEZ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $EZH$  <sup>1)</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον οὐκ ἄρα αἱ  $AB$ ,  $ΓΔ$  ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ  $ΒΔ$  μέρη. Ὁμοίως

1) Μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ  $EZH$  ἀλλὰ καὶ ἴση. Ita edd. Basil. et Oxon. Peyrard. e Cod. a, cum quo consentit exemplar a Basil. ad marginem citatum, habet breviorē lectionem, quam in textu dedimus.

quo siti sunt vertices omnium triangulorum aequicrurorum, quae super hac basi constitui possunt.

COR. 7. Si recta angulum trianguli alicuius bisecans oppositae basi est perpendicularis, triangulum illud erit aequicrurum (I. 26.).

Hanc primam huius libri partem antequam relinquamus, monendi videntur lectores, quam plurimas adhuc ad eas, quas hactenus tractavimus, propositiones pertinentes observationes utilissimas reperiri in Append. 2. eius, quam saepius citavimus, Chrestom. Geom. Hauberi, quas attente perlegere neminem harum rerum studiosum poenitebit.

## PROPOSITIO XXVII.

Obs. Anguli alterni (αἱ ἐναλλάξ γωνίαι) in hac proposi-

## PROPOSITIO XXVII. (Fig. 44.)

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos aequales inter se faciat, parallela erunt inter se rectae.

In duas enim rectas  $AB$ ,  $\Gamma A$  recta incidens  $EZ$ , alternos angulos  $AEZ$ ,  $EZA$  aequales inter se faciat; dico parallelam esse  $AB$  rectae  $\Gamma A$ .

Si enim non, productae  $AB$ ,  $\Gamma A$ , convenient vel ad  $BA$  partes, vel ad  $AF$ ; producantur, et convenient ad  $BA$  partes in  $H$ ,

Trianguli igitur  $EHZ$  exterior angulus  $AEZ$  aequalis est interiori et opposito  $EZH$ , quod fieri nequit (Prop. 16.); non igitur  $AB$ ,  $\Gamma A$  productae convenient ad  $BA$  partes. Similiter autem ostenditur

tionem primum occurrunt. Sunt autem illi anguli, qui, si recta aliqua duas rectas secet, e diversis rectae secantis partibus, alter ad unam duarum, quae ab ea secantur, alter ad alteram constituantur. Et quidem anguli alterni interni vocantur, si uterque ex ad partem internam duarum rectarum, quae ab alia secantur, ut hic anguli  $AEZ$ ,  $AZE$ , vel  $BEZ$ ,  $IZE$ , et de his solis apud Euclidem sermo est. Sin autem, reliquis conditionibus manentibus, sit uterque ad partem externam rectarum, quae secantur, tum anguli alterni externi audiunt v. c.  $AEA$ ,  $MEA$ , vel  $AEB$ ,  $IZM$ . Caeterum etiam si anguli alterni externi fuerint aequales, aut (Prop. 23.) duo externi ad eandem partem secantis aequales fuerint duobus rectis, consequetur parallelismus rectarum, quae ita secantur, quod post Proclum notat Isaac. Monachus in Schol. ad Euclid. libr. VI. priores. Proclus adhuc observat, supponere Euclidem rectas in eodem plano positas. Cf. dicta ad Defin. 7.

Cor. 1. Si in figura quadrilatera  $ABFA$  (Fig. 45.) latera

δὴ δευχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ  $ΑΓ$ . αἱ δὲ ἐπὶ μη-  
δέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοι εἰσι· πα-  
ράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΔ$ . Ἐὰν ἄρα εἰς  
δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεία ἐμπίπτουσα τὴν  
ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ  
αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
μέρη δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται  
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  εὐθεία ἐμ-  
πίπτουσα ἡ  $ΕΖ$  τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΕΗΒ$   
τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη <sup>1)</sup>  
γωνία τῇ ὑπὸ  $ΗΘΔ$  ἴσην ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ  
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ  $ΒΗΘ$ ,  $ΗΘΔ$  δυοῖν ὀρ-  
θαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΔ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΕΗΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΗΘΔ$ ,  
ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $ΕΗΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΗΘ$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ  
ὑπὸ  $ΑΗΘ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $ΗΘΔ$  ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν  
ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΔ$ .

Ἰάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $ΒΗΘ$ ,  $ΗΘΔ$  δυοῖν ὀρθαῖς  
ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΗΘ$ ,  $ΒΗΘ$  δυοῖν

1) Verba καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, quae Peyrard. secutus  
Codicem a expunxerat, et quae in edit. quoque Basil. de-  
sunt, ex edit. Oxon. restituimus. Eadem verba in ipso enun-  
ciato propos. sequentis desunt in cod. a, ubi tamen etiam  
Peyrard. ea retinuit.

opposita aequalia sint, nempe  $ΑΒ=ΓΔ$ ,  $ΑΓ=ΒΔ$ , erunt eadem  
etiam parallelae ex I. 8. et I. 27.

Cor. 2. Pariter, si  $ΑΒ=ΓΔ$ , et  $ΓΒΑ=ΒΓΔ$ , erit, ob  
 $ΒΓ$  communem, ex I. 4. etiam  $ΑΓ=ΒΔ$ , et tam  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ ,  
quam  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  parallelae (I. 27.).

neque ad  $AF$ ; quae autem in neutras partes conver-  
sunt, parallelae sunt (Def. 35.); parallela igitur est  
 $AB$  rectae  $FA$ . Si igitur in duas etc.

### PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 46.)

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angu-  
lum interiori et opposito et ad easdem partes aequa-  
lem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus  
rectis aequales faciat; parallelae erunt inter se rectae.

In duas enim rectas  $AB$ ,  $FA$  recta incidens  $EZ$   
exteriorem angulum  $EHB$  interiori et opposito et ad  
easdem partes posito angulo  $H\theta A$  aequalem faciat,  
vel interiores et ad easdem partes ipsos  $BH\theta$ ,  $H\theta A$   
duobus rectis aequales; dico parallelam esse  $AB$  re-  
ctae  $FA$ .

Quoniam enim aequalis est  $EHB$  angulo  $H\theta A$ ,  
vel  $EHB$  angulo  $AH\theta$  est aequalis (Prop. 15.), et  
 $AH\theta$  igitur ipsi  $H\theta A$  est aequalis (Ax. 1.); et sunt  
autem; parallela igitur est  $AB$  ipsi  $FA$  (Prop. 27.).

Rursus, quoniam anguli  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  duobus  
rectis aequales sunt, sunt autem anguli  $AH\theta$ ,  $BH\theta$

Cor. 3. Denique, si  $ABF = BFA$ , et  $AFB = FBA$ , erit  
ex I. 26.  $AB = FA$ , et  $AF = BA$ , et tam  $AB$ ,  $FA$ , quam  $AF$ ,  
 $BA$  parallelae (I. 27.).

### PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Duae conditiones, e quibus hic rectas parallelas  
esse concluditur, reducuntur ad conditionem propositionis  
praecedentis. Generatim nempe tres hae conditiones, ut fa-  
cie patet, ita a se invicem pendent, ut nulla earum sine re-

ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  ταῖς ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta A$  ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ , λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $H\Theta A$  ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παραλλήλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma A$ . Ἐὰν ἄρα εἰς δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπιπτούσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $\Gamma A$  εὐθεῖα ἐμπιπτεύω ἡ  $EZ$ . λέγω, ὅτι τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AH\Theta$ ,  $H\Theta A$  ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ  $EH\Theta$  τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ  $H\Theta A$  ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta A$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

liquis locum habere possit. Caeterum poterat etiam Prop. 28. immediate demonstrari, similiter ac Prop. 27.

### PROPOSITIO XXIX.

Obs. In hac propositione, quae conversae est duarum praecedentium, primum adhibetur notum illud axioma undecimum, vel, ut alii volunt, postulatum quintum. Quod quidem, quamvis verissimum, haud tamen aequè perspicuum esse ac reliqua Euclidis axiomata, ita ut omnibus, quibus innotescat, statim, etiam sine ulla illustratione, assensum quasi extorqueat, plerique omnes fatentur. Iam Proclus circa postulatum illud quintum monet: „esse potius theorema multis dubiis obnoxium, unde et Ptolemaeus illud libro singulari demonstrare tentaverit, et pluribus definitionibus ac theo-



duobus rectis aequales; ergo  $AH\theta$ ,  $BH\theta$  ipsis  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  aequales sunt (Ax. 1.). Communis auferatur  $BH\theta$ ; reliquus igitur  $AH\theta$  reliquo  $H\theta A$  est aequalis (Ax. 3.); et sunt alterni; parallela igitur est  $AB$  rectae  $\Gamma A$  (Prop. 27.). Si igitur in duas etc.

### PROPOSITIO XXIX. (Fig. 46.)

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos aequales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales.

In parallelas enim rectas  $AB$ ,  $\Gamma A$  recta incidat  $EZ$ ; dico eam alternos angulos  $AH\theta$ ,  $H\theta A$  aequales facere, et exteriorem angulum  $EHB$  interiori et opposito et ad easdem partes  $H\theta A$  aequalem, et interiores ad easdem partes  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  duobus rectis aequales.

remans ad eius demonstrationem opus esse, et propositionem contrariam (I. 17.) Euclidem demonstravisse. Forte quidam eo deceptos hanc propositionem postulatis annumerare, quod, si anguli fiant duobus rectis minores, rectarum erga se inclinatio et concursus per se patere videatur. At recte contra hos Geminum monere, peritissimos geometriae magistros praecipere, probabiles opiniones abesse debere ab huius scientiae ratiociniis. Et Aristotelem dicere, aequum absurdum esse, ab oratore demonstrationem petere, et a geometra persuaderi sibi pati. Et Symmiam apud Platonem ita habere: qui e verisimilibus demonstrationem petunt, eos vane ingenio esse scio. Atque rectas, si anguli sint duobus rectis minores, erga se invicem inclinari, verum quidoni esse necessarium. Lineas autem magis magisque ad se inclina-

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $A\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta A$ ,  
μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $A\Theta$   
τῆς ὑπὸ  $H\Theta A$ <sup>1)</sup>. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ .  
αἱ ἄρα ὑπὸ  $A\Theta$ ,  $BH\Theta$  τῶν ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta A$  μεί-  
ζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $A\Theta$ ,  $BH\Theta$  δύο ὀρθῶν  
ὁρίσπονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν  
ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα  $AB$ ,  
 $\Gamma A$  ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμ-  
πίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκείσθαι·  
οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $A\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta A$ .  
ἴση ἄρα.

1) Edd. Basil. et Oxon. habent: Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $A\Theta$ .  
Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστίν ἡ ὑπὸ  $A\Theta$ . Nos cum Peyrardo secuti  
sumus lectionem breviorē cod. a.

tas, si producantur, alicubi concurrere, verum quidem esse,  
at non necessarium, nisi quis rationibus demonstrēt, in rectis  
id verum esse. Esse enim quasdam lineas in infinitum qui-  
dem propius ad se accedentes, nec tamen concurrentes; id,  
quamvis incredibile videatur, verum tamen esse, et in aliis  
lineis ita observatum. Unde dubium oriri, nonne et in rectis  
verum esse possit, quod verum sit in aliis lineis. Quod ante-  
quam per demonstrationes refutatum sit, menti molestiae quid  
afferre. Quum praeterea dubia, quae circa concursum earum  
rectarum prolata sint, satis sint speciosa, praestare sane, ista  
saltem probabilia, nec rationibus innixa, his libris excludere.  
Patere itaque, demonstrationem quaeri oportere." Similes  
aliorum querelas hic omitto. Nec tamen defuere, qui Eucli-  
dem haud absurde defendi posse, aut eius praecepta modo  
aliqua illustratione opus habere putarent, e quibus emine-  
Wallisius (Opp. Mathem. T. II. p. 608. sqq.), de quo infra  
in Excursu ad hunc locum. Quidquid sit, orta sunt quae  
plurima tentamina hanc quasi lacunam explendi, de quorum

Si enim inaequalis est  $AH\theta$  angulo  $H\theta A$ , unus eorum maior est; sit maior  $AH\theta$  angulo  $H\theta A$ . Communi addatur  $BH\theta$ ; ergo  $AH\theta$ ,  $BH\theta$  angulis  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  maiores sunt. Sed  $AH\theta$ ;  $BH\theta$  duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et igitur  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  duobus minoribus rectis sunt. Rectae autem a minoribus quam duobus rectis productae in infinitum concurrunt: (Post. 5. vel Ax. 11.). Ipsae igitur  $AB$ ,  $GA$  productae in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelae ponuntur; non igitur inaequalis est  $AH\theta$  angulo  $H\theta A$ ; aequalis igitur.

Præcipuis ad finem huius libri disseremus. Hic sufficiat monere, omnes, quae nostram hanc præcedunt, propositiones e primis I. 31., sine illo axioma demonstrari, et nonnullas eum aliis e sequentibus, at quam plurimam reliquarum partem inde derivari, unde, quam late res pateat, facile perspicitur.

Cor. 1. Quodsi in figura parallelogramma unus angulus rectus sit, erunt omnes recti. Aliter ita: Si recta secans duas parallelas perpendicularis sit ad unam earum, erit etiam ad alteram perpendicularis. (E Pfeidereri schedis, unde et multa in sequentibus, vel ubi non semper expresse monuerimus, demonstrata sunt.)

Cor. 2. In omni parallelogrammo anguli eisdem lateri adiacentes simul summi aequales sunt duobus rectis.

Cor. 3. Recta  $AB$  (Fig. 47.) quae unam duarum parallelarum  $BF$ ,  $AE$ , cum quibus in eodem plano est, secat, etiam alteram secat. Ducatur enim ex puncto quocunque  $Z$  rectae  $AE$  recta  $ZB$ , eritque (I. 29.)  $EZB + ZBF = 2$  rectis, hinc  $EZB + ZBA < 2$  rectis, adeoque  $BA$ ,  $AE$  concurrent (Ax. 11. vel Post. 5.).

Cor. 4. (Poletarii) Si duae rectae, quae duas parallelas secant, ad unum inter ipsas punctum coierint, duosque

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $EHB$  ἴσιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $BHB$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἴσιν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $EHB$ ,  $BH\Theta$  ταῖς ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $EHB$ ,  $BH\Theta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἐκατέρα τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τῇ  $EZ$  παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$  ἴσιν παράλληλος.

Ἐμπίπτειτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ  $HK$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $EZ$  εὐθεῖα ἐμπίπτωνκεν ἡ  $HK$ , ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta Z$ . Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $EZ$ ,  $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἐμπίπτωνκεν ἡ  $HK$ , ἴση ἴσιν ἡ ὑπὸ  $H\Theta Z$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $AHK$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta Z$  ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ  $AHK$

angulos alternos aequales fecerint, aut angulum externum aequalem interno opposito ad easdem partes, aut duos internos ex alterutra parte aequales: erunt istae duae rectae in directum, vel in unam lineam coincident. Haec propositio, quae est conversa I. Prop. 29. sumto contrario facile apagogice demonstratur.

Cor. 5. Si e duabus rectis  $AB$ ,  $BF$  (Fig. 48.), quae in puncto  $B$  conveniunt, una quidem  $AB$  alii  $ad$ , altera autem  $BF$  alii  $ye$  parallelae sint, sint autem  $ad$ ,  $ye$  in eodem plano, in quo et  $AB$ ,  $BF$  sunt, convenient etiam  $ad$ ,  $ye$  sub angulo aequali angulo  $ABF$ . Quum enim  $BF$ ,  $ye$  parallelae sint, recta  $AB$ , quae ex hyp. unam earum  $BF$  secat, secabit etiam

Sed  $AH\theta$  angulo  $EHB$  est aequalis (Prop. 15.);  
 $EHB$  igitur angulo  $H\theta A$  est aequalis.

Communis addatur  $BH\theta$ ; ergo  $EHB$ ,  $BH\theta$  an-  
 gulis  $BH\theta$ ,  $H\theta A$  aequales sunt. Sed  $EHB$ ,  $BH\theta$   
 duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et  $BH\theta$ ,  
 $H\theta A$  igitur duobus rectis aequales sunt. Ergo in pa-  
 rallela etc.

### PROPOSITIO XXX. (Fig. 49.)

Quae eidem rectae parallelae sunt, et inter se sunt  
 parallelae.

Sit utraque rectarum  $AB$ ,  $\Gamma A$  rectae  $EZ$  parallela;  
 dico et  $AB$  rectae  $\Gamma A$  esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta  $HK$ .

Et quoniam in parallelas rectas  $AB$ ,  $EZ$  recta in-  
 cidit  $HK$ , aequalis est  $AH\theta$  angulo  $H\theta Z$  (Prop.  
 28.). Rursus quoniam in parallelas rectas  $EZ$ ,  $\Gamma A$   
 recta incidit  $HK$ , aequalis est  $H\theta Z$  angulo  $HKA$   
 (Prop. 28.). Ostensus est autem et  $AHK$  angulo  
 $H\theta Z$  aequalis;  $AHK$  igitur angulo  $HKA$  est aequa-

literam  $\gamma$  in puncto aliquo  $\zeta$  (I. 29. Cor. 3.), eritque  $B\zeta\gamma =$   
 $\angle B\Gamma$  (I. 29.). Pariter, quum  $AB$ ,  $ad$  parallelae sint, recta  
 $\gamma$ , quae, ut ostendimus, rectam  $AB$  secat, secabit etiam  $ad$   
 in puncto aliquo  $\beta$  (I. 29. Cor. 3.), eritque angulus  $\alpha\beta\gamma =$   
 $\angle\gamma = \angle B\Gamma$  (I. 29.). Eodem modo ostenditur,  $\alpha\beta$  et  $B\Gamma$  pro-  
 tendas se invicem secare, unde patet, dari figuras parallelo-  
 grammas (Def. 36.). Praeterea ex hoc Cor. et I. 27. Cor. 1.  
 manifestum est, quadratum, rectangulum, rhombum et rhom-  
 boidem esse parallelogramma (Def. 30—33.).

### PROPOSITIO XXX.

Obs. Proclus notat, rem eodem modo demonstrari posse,

ἄρα τῇ ὑπὸ  $HK\Delta$  ἐστὶν ἴση καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ . Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου <sup>1)</sup>, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $B\Gamma$ . δεῖ δὴ, διὰ τοῦ  $A$  σημείου, τῇ  $B\Gamma$  εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $B\Gamma$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $A\Delta$  καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $\Delta A$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $\Delta A E$  καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ εὐθείᾳ τῆς  $E A$  εὐθεῖα ἡ  $AZ$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $B\Gamma$ ,  $EZ$  εὐθεῖαι ἐμπέπτοντα ἡ  $A\Delta$  τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $E A \Delta$ ,  $A \Delta \Gamma$  ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $EZ$  τῇ  $B\Gamma$ .

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ  $A$ , τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $B\Gamma$  παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἤνται ἡ  $E A Z$  ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Cod. a. addit: ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ αὐτῆς.

quamvis recta  $EZ$ , quae duabus reliquis parallela ponitur haud intermedia inter illas, sed extra utramque posita fuerit.

### PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Punctum datum ita situm esse debet, ut recta data etiam producta non cum eo conveniat, quod notant Proclus et Clavius.

Obs. 2. Alia ratio problema hoc solvendi patet ex I 27. Cor. 1., ubi, si (Fig. 45.) per  $A$  ducenda sit parallela

Et; et sunt alterni. Parallela igitur est  $AB$  ipsi  $FA$  (Prop. 27.). Quae igitur eidem rectae etc.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 50.)

Per datum punctum, datae rectae parallelam rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum  $A$ , data vero recta  $BF$ ; oportet igitur, per  $A$  punctum, rectae  $BF$  parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in  $BF$  quodlibet punctum  $A$ , et iungatur  $AA$ ; et constituitur ad  $AA$  rectam, et ad punctum in ea  $A$ , angulo  $AAF$  aequalis angulus  $AAE$  (Prop. 23.), et producat in directum ipsi  $EA$  recta  $AZ$ .

Et quoniam in duas rectas  $BF$ ,  $EZ$  recta incidens  $AA$  alternos angulos  $EAA$ ,  $AAF$  aequales inter se facit, parallela est  $EZ$  rectae  $BF$  (Prop. 27.).

Per datum igitur punctum  $A$ , datae rectae  $BF$  parallela recta lineam ducta est  $EAZ$ . Quod oportebat facere.

rectae  $FA$ , sumto in  $FA$  puncto quocunque  $F$ , descriptisque ex  $A$ ,  $F$ , radio eodem quocunque circulis, posterior rectam  $FA$  secabit in puncto aliquo  $A$ , e quo deinde circulis radio  $AF$  descriptus intersectabit circulum ex  $A$  descriptum in puncto  $B$ , ita ut ducta recta  $AB$  parallela sit rectae  $FA$ .

Cor. Non plures una recta per idem punctum eidem rectae parallelae duci possunt. Ducantur enim, si fieri possent, duae uni eidemque rectae parallelae; erunt itaque (I. 30.) et ipsae inter se parallelae, quod, cum se in puncto aliquo possent, fieri nequit (Def. 35.).

## Η ΠΟΤΑΣΙΣ λβ.

*Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβλη-  
θείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ὅσοι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναν-  
τίον ἴση ἐστὶ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι  
ὅσων ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.*

### PROPOSITIO XXXII.

Obs. Proclus refert, Eudemum Peripateticum ad Pythagoraeos huius theorematism inventionem referre. Alias etiam demonstrationes exhibet Proclus, quibus primum propositionis pars posterior adstruitur, et exinde pars prior derivatur. Demonstrationem immediatam, non adhibita parallelarum theoria exhibere tentavit Thibaut., de qua infra in Exc. I. Est autem haec propositio consequentiarum longe fertilissima, quarum praecipuae ex Proclo, Clavio, Tacqueto, Pfeiderero maxime, aliisque desumptae hae fere fuerint.

Cor. 1. Conversa quoque valet. Nempe, si (Fig. 51.) angulus aliquis exterior  $AFD$  ad triangulum aliquod aequalis sit duobus trianguli angulis internis oppositis  $BAT$ ,  $ABT$  simul sumptis, erit recta  $FA$  rectae  $BT$  in directum. Erunt enim anguli  $ATB + AFA$  aequales tribus angulis trianguli  $ABT$  i. e. ex hac propos. duobus rectis, unde  $BT$ ,  $FA$  in directum erunt (I. 14.).

Cor. 2. Omnia triangula eandem angulorum summam habent.

Cor. 3. Quodsi duo anguli unius trianguli singuli aut simul sumti aequales sint duobus angulis alterius trianguli singulis aut simul sumtis, tertius etiam angulus prioris trianguli aequalis est tertio angulo posterioris trianguli: et contra, si duo triangula unum angulum aequalem habeant, aequalis etiam erit reliquorum summa.

Cor. 4. Si in triangulo aliquo dati sint duo anguli singulatim, aut simul sumti, datus est etiam tertius: et, si unus datus est, data est reliquorum summa.

Cor. 5. Prout unus angulus trianguli rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, summa reliquorum aequalis, aut mi-



## PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis aequalis est; et exteriores trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt.

er, aut maior recto erit, et vice versa. Et unusquisque trianguli alius angulus rectus, aut obtusus, aut acutus erit, prout duo reliqui simul ipsi aequales, aut minores, aut maiores fuerint, et vice versa.

Cor. 6. Trianguli aequicruri dato uno angulo dantur ceteri reliqui. Quum enim (I. 5.) anguli ad basin aequales sint, erit, dato uno angulorum ad basin, alter ei aequalis, et tertius ad verticem angulus datus erit (Cor. 4.), si vero primum datus fuerit angulus ad verticem, data erit reliquorum summa (Cor. 4.), unde, quum sint aequales (I. 5.) pariter singuli dati erunt.

Cor. 7. Prout angulus ad verticem trianguli aequicruri fuerit rectus, aut obtusus, aut acutus, quisque reliquorum vel aequalis erit dimidio recto, vel minor, vel maior dimidio recto.

Cor. 8. In quovis triangulo aequicruro interius angulus ad basin erit dimidius anguli externi ad verticem.

Cor. 9. Trianguli aequilateri quisque angulus efficit tertiam partem duorum rectorum, vel duas tertias recti.

Cor. 10. Si in triangulo aequilatero ex vertice demittatur perpendicularum ab basin, duo orientur triangula rectangula, quorum anguli, praeter rectum, alter tertiam partem recti, alter duas tertias recti efficit. Hinc patet ratio, angulum rectum in tres partes aequales, et deinde biseccando (I. 9.) in sex, duodecim etc. partes aequales dividendi.

Cor. 11. Si in triangulo aequicruro  $ABI'$  (Fig. 52.) alterum crus  $AB$  ultra verticem producat, usquodum  $AI$  fiat  $= AB$ , et iungatur  $AI'$ , erit angulus  $AI'B$  rectus. Omnes enim anguli trianguli  $BGI' = 2$  rectis, at, ob  $ABI' = AI'B$ ,

"Εστω τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , καὶ προσεμβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ τὸ  $Δ$  λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἴση ἐστὶ ταῖς δυοῖ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ  $ΓΑΒ$ ,  $ΑΒΓ$ . καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΑ$ ,  $ΓΑΒ$  δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

"Ηχθω γάρ, διὰ τοῦ  $Γ$  σημείου, τῇ  $ΑΒ$  εὐθείᾳ παράλληλος ἡ  $ΓΕ$ .

et  $ΑΔΓ=ΑΓΔ$  (I. 5.), erit  $ΑΓΒ+ΑΓΔ$  i. e.  $ΑΓΒ$  haec summa dimidia, adeoque aequalis recto. Hinc facile patet ratio, ad rectam  $ΒΓ$  in puncto ipsius  $Γ$  extremo perpendicularem erigendi, descripto nempe super  $ΒΓ$  triangulo aequilatero  $ΑΒΓ$ , factaque  $ΑΔ=ΑΒ$ , et ducta  $ΔΓ$ .

Cor. 12. In quavis figura rectilinea (Fig. 53.) cuius anguli omnes extra figuram vergunt (angles saillans), ut itaque versus partes interiores figurae concavi sint, omnes anguli simul efficiunt bis tot rectos angulos, demtis quatuor, quos figura habet latera vel angulos, vel, si figura habeat  $n$  latera, omnes anguli simul efficient  $(2n-4)$  angulos rectos, vel  $(n-2) \times 2R$ , si  $R$  rectum denotat. Nempe in omni tali figura v. c.  $ΑΒΓΔΕΖ$  ab uno angulo quocunque  $Α$  ad reliquos angulos omnes, exceptis duobus ipsi proximis, duci possunt rectae diversae a lateribus figurae, quae figuram in totidem triangula dividunt: itaque, si figura habet  $n$  angulos, provenient  $n-2$  triangula, et, quum summa angulorum cuiusque trianguli sit  $=2R$  erit summa omnium istorum angulorum  $=(n-2) \times 2R$ . Ita v. c. in quovis quadrangulo summa angulorum erit  $=4R$ ; in quovis pentagono  $=6R$ ; in quovis hexagono  $=8R$  etc. Est haec propositio iam apud Proclum. Conversam quoque, nempe, si anguli quocunque, quorum numerus  $=n$ , dati sint, sitque eorum summa  $=(n-2) \times 2R$ , constitui posse figuram rectilineam  $n$  laterum, cuius anguli aequales sint datis istis angulis, demonstrat Develey, Elem. de Géom. Append. ad Livr. II. §. 45.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , et producaturs ipsius unum  
 latus  $B\Gamma$  in  $\Delta$ ; dico exteriorem angulum  $AT\Delta$  ae-  
 qualem esse duobus interioribus et oppositis  $\Gamma AB$ ,  
 $AB\Gamma$ , et interiores trianguli tres angulos  $AB\Gamma$ ,  $B\Gamma A$ ,  
 $\Gamma AB$  duobus rectis aequales esse.

Ducatur enim, per  $\Gamma$  punctum, rectae  $AB$  paral-  
 lela  $\Gamma E$  (Prop. 31.).

Cor. 13. Quodsi igitur in quadrangulo tres anguli recti  
 fuerint, vel saltem summam trium rectorum effecerint, etiam  
 quartus rectus erit, et contra: si unus rectus sit, summa trium  
 reliquorum simul tres rectos efficiet: et, si in quadrangulo  
 duo anguli simul duos rectos faciant, facient etiam reliqui  
 duo simul duos rectos.

Cor. 14. Quodsi vero (Fig. 54.) nonnulli figurae anguli  
 introsum vergant (angles rentrants), ita tamen, ut nullum  
 figurae latus plura duobus e reliquis lateribus secant, etiam  
 talis figura resolvi poterit in tot triangula, demtis duobus,  
 quos figura latera habet, e. g. si figura  $n$  latera habeat, in  $n-2$   
 triangula, et summa angulorum horum triangulorum pa-  
 riter efficiet  $(n-2) \times 2R$ . At observandum est, horum trian-  
 gulorum summam intrare angulos illos gibbos s. introsum  
 vergentes, siquidem angulos eos dicere velis. Sensu enim magis  
 solito angulus vocatur inclinatio duarum rectarum ex ea parte,  
 quae minor est duobus rectis. Quidquid sit, si angulos hos  
 gibbos numerare velis, erit adhuc summa angulorum interno-  
 rum figurae,  $=(n-2) \times 2R$ . Quodsi figura habeat  $N$  angulos  
 gibbos  $A, B, C$  etc. adeoque praeter eos  $n-N$  angulos con-  
 cavo sensu sumtos, vel concavos, quisque angulorum gib-  
 borum habebit alium ipsi contiguum, extrosum vergentem,  
 solito sensu sumtum,  $A$  v. c. habebit angulum contiguum  $a$ ,  
 $B$  angulum  $b$ , etc. ita ut  $A=4R-a$ ,  $B=4R-b$  etc. adeoque  
 $A+B+C \dots$  (quorum numerus  $N$ )  $=4N.R-(a+b+c$   
 $\dots)$ . Iam, si summa angulorum concavorum figurae ae-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $GE$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ  $AG$ , αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $BAG$ ,  $AGE$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰδὶν. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $GE$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ  $BA$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $EGA$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $ABG$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $AGE$  τῇ ὑπὸ  $BAG$  ἴση ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $AGA$  ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυοῖς ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ  $BAG$ ,  $ABG$ .

qualis sit angulo  $S$ , erit  $S+A+B+C \dots = (n-2) \times 2R$ , adeoque  $S+4N.R-(a+b+c \dots) = 2nR-4R$ , vel  $S-(a+b+c \dots) = 2nR-(N+1)4R$ , i. e. summa angulorum concavorum figurae superabit summam angulorum gibbis contiguum, duobus rectis tot vicibus sumtis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis una vice plus sumtis, quam anguli gibbi adsunt. Hinc consequitur, si fuerit  $n=2(N+1)$  fore  $S=a+b+c \dots$  ut, si figura aliqua quatuor latera habuerit, adeoque  $n=4$  fuerit, et unus in ea angulus gibbus sit, (plures enim tum gibbi esse nequeunt) erit  $S=a$ , quod etiam ex figura facile patet. Quodsi unum latus plura duobus e reliquis intersecet, figura implicatio vix dicere permittit, qui anguli interni aut externi vocari debeant, neque res tanti est, ut ei iam immorari liceat.

Cor. 15. Si in figura rectilinea, quae angulos gibbos non habet (Fig. 55.) singula latera figurae producantur ordinatim versus easdem partes, omnes anguli externi aequales erunt quatuor rectis, quicumque sit numerus laterum figurae. Nam quilibet externus cum ipsi contiguo interno aequalis est duobus rectis. Omnes igitur externi cum omnibus internis bis tot rectis aequales sunt, quot figura latera habet. At interni soli (Cor. 12.) bis tot rectis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis. Ergo anguli externi simul aequantur quatuor rectis. (Est etiam haec propositio Procli.)

Et quoniam parallela est  $AB$  rectae  $FE$ , et in ipsas incidit  $AF$ , alterni anguli  $BAF$ ,  $AFE$  aequales inter se sunt (Prop. 29). Rursus, quoniam parallela est  $AB$  rectae  $FE$ , et in ipsas incidit recta  $BF$ , exterior angulus  $EFA$  aequalis est interiori et opposito  $ABF$  (Prop. 29.). Ostensus autem est et  $AFE$  angulo  $BAF$  aequalis; totus igitur  $AFB$  exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis  $BAF$ ,  $ABF$ .

Cor. 16. Si figurae rectilineae angulos gibbos habent (Fig. 56.), hi quidem proprie loquendo non habent angulum externum simili ratione, ac in reliquis, formatum. Unum enim latus anguli gibbi productum intra figuram cadit. Quodsi vero ad analogiam reliquorum eos angulos, quos unum latus productioni cum latere sibi contigito facit, improprie pro angulis externis sumere velis, erit excessus angulorum externorum proprie dictorum super hos externos improprie dictos aequalis duobus rectis. Quodsi enim omnes litterae idem significant, ac in Cor. 14., sit summa angulorum proprie dictorum externorum, qui ad  $(n-N)$  angulos concavos formati, = angulo  $S$ , eritque  $S = (n-N).2R - S = n.2R - N.2R - S$ . Denique, si anguli illi improprie dicti externi, qui ad angulos gibbos proveniunt uno latere producto, vocentur  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  erunt  $\alpha + \beta + \gamma \dots = A + B + C \dots - 2N.R$ , adeoque  $S - (\alpha + \beta + \gamma \dots) = n.2R - S - (A + B + C \dots)$ . At ex Cor. 11.  $S + A + B + C \dots = (n-2).2R = n.2R - 4R$ , hinc  $S - (\alpha + \beta + \gamma \dots) = 4R$ . Etiam hic figuras tantum consideramus, in quibus nullum latus pluribus quam duobus  $\alpha$  reliquis occurrit.

Cor. 17. Si figura aliqua rectilinea (Fig. 57.) ita composita sit, ut duo quaecunque latera, quae unum latus inter se interpositum habent, extra figuram ab ea lateris interpositi parte, e qua non est figura rectilinea, concurrant, anguli, quae haec latera efficiunt, simul sumti bis tot rectos efficiunt,

Κοινή προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΓΒ$  τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΑ$ ,  $ΓΑΒ$  ἴσαι εἰσὶν. Ἄλλ' αἱ ὑπὸ  $ΑΒΔ$ ,  $ΑΓΒ$  δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ ,  $ΓΒΑ$ ,  $ΓΑΒ$  ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Παντὸς ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς,

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιξευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ , καὶ ἐπιξευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ · λέγω, ὅτι καὶ αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐπεξέυχθω γάρ ἡ  $ΒΓ$ .

quot figura habet latera, demtis octo rectis, v. o. in pentagono duos, in hexagono quatuor, in figura n laterum  $2nR - 8R$ . Formantur enim n triangula, quorum anguli efficiunt  $2nR$ , a quibus si subtrahantur anguli figurae externi bis sumti, erunt anguli illi nunc demum formati simul  $= 2nR - 8R$ . In triangulis et quadrilateris occurrit ille ita, ut diximus, locum habere nequit. De pentagono rem primum demonstravit Campanus. Idem adhuc valet, etiamsi duo latera, quae unum inter se interpositum habent, parallela sint.

Cor. 18. In figuris rectilineis, quarum omnes anguli aequales sunt, e numero laterum vel angulorum facile quantitas uniuscuiusque anguli determinatur. Quum enim ex Cor. 12. omnes anguli simul in figura, quae n latera habet, sint  $(n-2) \cdot 2R$ , erit unusquisque angulorum  $= \frac{(n-2) \cdot 2R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}$ .

Cor. 19. Quum omnes anguli circa aliquod punctum constituti simul efficiant quatuor rectos (I. 13. Cor. 3.) spatium circa aliquod punctum figuris aequiangulis eundem om-

Communis addatur  $AFB$ ; ergo  $AGA$ ,  $AFB$  tri-  
 les  $ABF$ ,  $BFA$ ,  $FAB$  aequales sunt. Sed  $AGA$ ,  
 $AFB$  duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et  
 $AFB$ ,  $FBA$ ,  $FAB$  igitur duobus rectis aequales  
 sunt. Omnis igitur trianguli etc.

### PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 58.)

Quae et aequales et parallelas ad easdem partes  
 contingunt rectae, et ipsae aequales et parallelae sunt.

Sint et aequales et parallelae  $AB$ ,  $GA$ , et con-  
 tingunt ipsas ad easdem partes rectae  $AF$ ,  $BA$ ; dico  
 et  $AF$ ,  $BA$  et aequales et parallelas esse.

longatur enim  $BG$ .

Angulum ad hoc punctum comprehendentibus tum sal-  
 tem expleri poterit, si unus istorum angulorum pars aliquota  
 quatuor rectorum fuerit, vel, si numerus  $n$  laterum talis fi-  
 gurae sit comparatus, ut  $4R : \frac{(n-2) \cdot 2R}{n}$ , vel  $\frac{2n}{n-2}$  sit nu-  
 merus integer. Id vero non fiet, nisi sit vel  $n=3$  (ubi sex an-  
 guli trianguli aequianguli i. e. aequilateri spatium explebunt),  
 vel  $n=4$  (ubi quatuor anguli quadrilateri aequianguli i. e. re-  
 ctanguli idem efficient) vel  $n=6$  (ubi tres anguli hexagoni  
 aequianguli rem praestabunt). Pythagoricum hoc theorema  
 esse ad I. 15. Cor. observat Proclus.

### PROPOSITIO XXXIII.

Oba. Hac ratione pariter ac in I. 29. Cor. 5. orientur  
 parallelogramma, et quidem hic ea addita conditione, ut unum  
 parallelogrammi latus, cui aequale est alterum ipsi oppositum,  
 magnitudine datum esse possit.

Cor. 1. Recta, cuius duo puncta ab alia recta aequo  
 distant, i. e. e cuius duobus punctis in alteram demissa per-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ  $ΒΓ$ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΒΓΔ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΒΓ$ , δύο δὴ αἱ  $AB$ ,  $ΒΓ$ , δυοὶ ταῖς  $ΓΔ$ ,  $ΒΓ$  ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  ἴση ἐστὶν. Βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΒΓΔ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔδονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἷ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓΒΔ$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  εὐθεῖα ἐμπίπτοντα ἡ  $ΒΓ$  τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $ΑΓΒ$ ,  $ΓΒΔ$  ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκε· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΒΔ$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διχα τέμνει.

pendicula aequalia sunt, huic alteri parallela est. Hinc nova constat ratio per datum punctum rectam alteri datae parallelam ducendi.

COR. 2. Quodsi vero duo puncta  $A$ ,  $B$  (Fig. 59.) rectae alicuius ab alia recta  $ΓΔ$  inaequaliter distent, ita nempe, ut perpendicularum ex iis in alteram rectam demissorum unum v. c.  $ΒΔ$  maius sit altero  $ΑΓ$ , rectae  $AB$ ,  $ΓΔ$  productae concurrent. Sumta enim  $ΔΕ=ΑΓ$ , erit ducta  $ΔΕ$  parallela rectae  $ΓΔ$ , hinc  $AB$  ei parallela esse nequit (I. 31. Cor.).

### PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Circa hanc propositionem multa adhuc, quae vel ex ea ipsa, vel ex natura parallelogrammorum consequuntur,



Et quoniam parallela est  $AB$  rectae  $\Gamma A$ , et in  $B$  incidit  $BF$ , alterni anguli  $ABF$ ,  $BFA$  aequales inter se sunt (Prop. 29.). Et quoniam aequalis est  $AB$  rectae  $\Gamma A$ , communis autem  $BF$ ; duae igitur  $AB$ ,  $BF$  duabus  $\Gamma A$ ,  $B\Gamma$  aequales sunt, et angulus  $ABF$  angulo  $BFA$  aequalis. Basis igitur  $AF$  basi  $BA$  est aequalis, et triangulum  $ABF$  triangulo  $BFA$  aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis est igitur angulus  $AFB$  angulo  $FBA$ . Et quoniam in duas rectas  $AF$ ,  $BA$  recta incidens  $BF$ , alternos angulos  $AFB$ ,  $FBA$  aequales inter se facit, parallela est  $AF$  rectae  $BA$  (Prop. 27.). Visus est autem ipsi et aequalis; quae igitur aequalis etc.

#### PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 58.)

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli aequalia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

observari possunt, quae e Proclo, Thom. Simpson., Clavio, Placentini schedis huc conferemus. Et in ipsa quidem theorematum enunciatione notari potest, diametrum spatia parallelogramma non tantum bifariam, sed praecise in triacula perfecte congruentia dividere, ut etiam e demonstratione patet.

Cor. 1. Duae parallelogrammi diametri  $BF$ ,  $AD$  (Fig. 58.) se invicem in puncto  $E$  bifariam secant ex I. 26. ob  $AB = DC$  (I. 34.)  $BAB = BAF$  (I. 29.)  $ABE = EFA$  (I. 29.). Similiter patet, esse triacula opposita  $ABE$ ,  $AED$ , pariterque  $AED$ ,  $EDB$  aequalia.

Cor. 2. Si per punctum  $E$  in media diametro positum (Fig. 61.) ducatur recta quaecunque  $ZO$ , dividit illa parallelogrammum in duo quadrilatera inter se congruentia  $BZEO$ ,

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ  $ΑΓΑΒ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΒΓ$  λέγω, ὅτι τοῦ  $ΑΓΑΒ$  παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ  $ΒΓ$  διάμετρος αὐτὸ διχατέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΓΔ$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεΐα ἡ  $ΒΓ$ , αἱ ἐναλλάξ γων-

$ΓΘΖΑ$ , ob aequalia trianguia  $ΑΒΔ$ ,  $ΔΓΑ$ , pariterque aequalia  $ΑΕΖ$ ,  $ΔΒΘ$ . Punctum  $Ε$  centrum figurae vocare solent.

Cor. 3. Rectae  $ΑΒ$ , quae alteri  $ΓΔ$  parallela est, omnia puncta aequaliter ab hac distant, vel omnia perpendiculara a recta aliqua in aliam ipsi parallelam demissa sunt inter se aequalia.

Cor. 4. Si e pluribus punctis rectae alicuius plura aequalia perpendiculara in eodem plano erigantur, una eademque recta, priori parallela, omnia perpendicularorum extrema iungit.

Cor. 5. Quadrilaterum, cuius bini oppositi anguli aequales sunt, est parallelogrammum. Quum enim omnes quadrilateri cuiuscunque anguli aequales sint quatuor rectis (I. 32. Cor. 12.) et bini oppositi aequales esse ponantur, anguli eidem lateri cuiuscunque adiacentes dimidium omnium angulorum quadranguli i. e. duos rectos efficient, adeoque duo quaevis latera opposita aequalia erunt. Nominatim itaque quodvis quadrangulum, cuius omnes anguli recti sunt, est parallelogrammum. Patiter, si duo quaevis opposita latera aequalia sint, figuram parallelogrammam esse, iam I. 27. Cor. 1. vidimus. Cf. Isaac. Monachus l. c.

Cor. 6. Non sufficit ad constituendam figuram parallelogrammam, ut duo quidem quadrilateri latera opposita parallela, reliqua duo autem aequalia sint, id quod ostendit Proclus ope trianguli aequicruri, a cuius cruribus si utrimque ex vertice partes aequales abscindantur, et puncta harum par-

Sit parallelogrammum spatium  $AFAB$ , diameter autem ipsius  $BF$ ; dico  $AFAB$  parallelogrammi opposita et latera et angulos aequalia inter se esse, et  $BF$  diametrum illud bifariam secare.

Quoniam enim parallela est  $AB$  rectae  $FA$ , et in  $BF$  incidit recta  $BF$ , alterni anguli  $ABF$ ,  $BFA$ ,

cum extrema recta iungantur, existet figura quadrilatera, in qua duo quidem latera opposita parallela, reliqua autem opposita latera aequalia sunt, quae tamen manifesto non est parallelogramma.

Cor. 7. Pariter non sufficit ad probandum, figuram aliquam esse parallelogrammum, si ostendatur, diametrum dividere quadrilaterum in triangula perfecte congruentia, nisi ea simul ita posita sint, ut latera aequalia sibi invicem opponantur. Minus igitur accuratum est, quod Isaac. Monachus de hoc te habet.

Cor. 8. At, si duae diametri  $BF$ ,  $AD$  altera alteram bifariam secet (Fig. 60.), tum quadrilaterum  $ABFD$  parallelogrammum erit. Erunt enim ex I. 4. anguli  $BAE$ ,  $FAB$  aequales, adeoque  $AB$  rectae  $FD$  parallela, pariterque ob  $EAF = EDB$ , erit  $AB$  parallela rectae  $BD$ .

Cor. 9. Dato uno parallelogrammi angulo dantur omnes.

Cor. 10. Nominatim, si unus rectus fuerit, recti erunt etiam reliqui; si unus obliquus, etiam reliqui obliqui erunt. Unde parallelogramma rectangula vel obliquangula.

Cor. 11. Quodvis quadrangulum aequiangulum est parallelogrammum rectangulum.

Cor. 12. Datis duobus parallelogrammi lateribus adiacentibus dantur etiam reliqua.

Cor. 13. Si duo latera adiacentia parallelogrammi aequalia sint, omnia latera erunt aequalia; si duo adiacentia inaequalia, reliqua etiam erunt inter se inaequalia. Hinc parallelogramma aequilatera et scalena.

νίαι αἱ ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $B\Gamma A$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $AG$  τῇ  $BA$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωνεν ἡ  $B\Gamma$ , αἱ ἐναλλαξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $AGB$ ,

Cor. 14. Quodvis quadrangulum aequilaterum est parallelogrammum aequilaterum.

Cor. 15. Aequilatera parallelogramma esse possunt vel rectangula (quadratum) vel obliquangula (rhombus), pariter scalena parallelogramma erunt vel rectangula (oblongum vel rectangulum proprie dictum) vel obliquangula (rhomboides). Cf. Def. 30—33.

Cor. 16. Describentur haec facile ex I. 31. dato in aequilateris uno latere et angulo adiacente, in scalenis duobus lateribus contiguis cum angulo ab iis intercepto.

Cor. 17. Parallelogrammi rectanguli diametri sunt aequales, obtusanguli inaequales, ita ut illa maior sit, quae maiori angulo opponitur.

Cor. 18. Vicissim, si parallelogrammi duae diametri aequales sint, erit illud rectangulum; sin inaequales, erit obtusangulum, ita ut maior angulus maiori diametro opponatur.

Cor. 19. In parallelogrammo aequilatero quaevis diameter bifariam secat angulos, per quos transit; in scaleno autem angulos inaequaliter dividit, ita quidem, ut maior angulus minori parallelogrammi lateri adiaceat, minor maiori, et vicissim.

Cor. 20. In parallelogrammo aequilatero duae diametri sibi invicem ad angulos rectos insistant, in scaleno obtusos angulos efficiunt, quorum acutus minori, obtusus maiori parallelogrammi lateri obvertitur, et vicissim. Priore casu parallelogrammum in quatuor triangula congruentia dividitur, posteriore tantum duo triangula sibi opposita congruunt.

Cor. 21. Duo parallelogramma, in quibus duo latera contigua unius cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sunt duobus lateribus alterius cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sunt. Nominatim itaque, si latus unius quadrati aequale sit lateri alterius, aequalia erunt, pariterque in

aequales inter se sunt (Prop. 29.). Rursus, quoniam parallela est  $AF$  rectae  $BA$ , et in ipsas incidit  $BF$ , alteri anguli  $AFB$ ,  $FBA$  aequales inter se sunt

religuis. Contra vero, si unum quidem latus cum angulo adiacente utrimque aequale sit, alterum autem latus in uno parallelogrammo maius ac in altero, erit etiam prius parallelogrammum maius altero.

Cor. 22. Vicissim: latera duorum aequalium quadratorum sunt aequalia: aequalia rectangula, quae eandem basin habent, eandem etiam habent altitudinem (perpendicularum e latere opposito in basin demissum); aequales et aequianguli rhombi aequalia habent latera: si in aequalibus et aequiangulis rhomboidibus unum prioris latus aequale sit uni posteriori, erit etiam alterum prioris latus aequale alteri posteriori.

Cor. 23. Si in uno anguli alicuius crure  $AB$  (Fig. 62.) sint partes quocunque  $AE$ ,  $EZ$  etc. aequales, et per puncta earum extrema ducantur rectae inter se parallelae, quae alteri cruri  $AF$  in punctis  $H$ ,  $I$ ,  $K$  occurrunt, erunt partes  $HI$ ,  $IK$  etc. pariter aequales. Ducatur enim per  $I$  recta  $IA$  rectae  $AE$  parallela (I. 31.) quae rectam  $AH$  in  $\theta$ , rectam  $ZK$  in  $A$  secet (I. 29. Cor. 3.), eritque ob  $I\theta = AE$  (I. 34.) et  $IA = EZ$  (I. 34.) quoniam ex hypoth. sit  $AE = EZ$ , etiam  $I\theta = IA$ , adeoque, quoniam praeterea angulus  $H\theta I = IAK$  (I. 29.), et  $\theta IH = AIK$  (I. 15.),  $HI = IK$ . Idem valet, si inde a puncto  $A$  partes aequales abscindantur (Fig. 63.). Hinc facile est rectam datam in partes quocunque aequales dividere. Contra vero, si  $AE$ ,  $EZ$  etc. pariterque  $HI$ ,  $IK$  etc. aequales sint, eruntque duae rectarum  $AH$ ,  $EI$ ,  $ZK$  etc. inter se parallelae, parallelae erunt etiam reliquae; vel, si partes e puncto  $A$  sumptae  $AE$ ,  $EZ$  etc. aequales sint, pariterque  $AI$ ,  $IK$  etc. sint etiam ductae  $EI$ ,  $ZK$  parallelae, quod facile patet, si contrarium sumatur.

Cor. 24. Si latera quadrilateri cuiuscunque  $ABFA$  (Fig. 64.) bisecentur in  $E$ ,  $Z$ ,  $\theta$ ,  $H$ , et iungantur  $EZ$ ,  $Z\theta$ ,  $\theta H$ ,  $HE$ , erunt in figura  $EZ\theta H$  bina quaevis opposita latera pa-

$\Gamma B \Delta$  ἴσαι ἀλλήλαις εἶσιν. Δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ  $\triangle A B \Gamma$ ,  $\triangle B \Gamma \Delta$  τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ  $\triangle A B \Gamma$ ,  $\triangle B \Gamma \Delta$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $\triangle B \Gamma \Delta$ ,  $\triangle B \Gamma \Delta$  ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν  $B \Gamma$ . καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν  $AB$  πλευρὰ τῇ  $\Gamma \Delta$ , ἡ δὲ  $AB$  τῇ  $B \Delta$ , καὶ ἡ ὑπὸ  $B A \Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $B \Delta \Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $\triangle A B \Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\triangle B \Gamma \Delta$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $\triangle B \Gamma \Delta$  τῇ ὑπὸ  $\triangle A \Gamma B$  ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $\triangle A B \Delta$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $\triangle A \Gamma \Delta$  ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $B A \Gamma$  τῇ ὑπὸ  $\triangle \Delta B \Gamma$  ἴση.

rallela. Nam ex praec. Cor. tam  $EH$ , quam  $Z\theta$  parallela est rectae  $BI$ , adeoque  $EH$ ,  $Z\theta$  (I. 29. Cor. 3.) inter se parallelae erunt, eodemque modo ostendetur,  $EZ$ ,  $H\theta$  parallelas esse; est itaque  $EZ\theta H$  parallelogrammum. Habet hoc theorema Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 27.

Cor. 25. Caeterum esse, praeter parallelogramma vulgo dicta, multas adhuc figuras, quarum latera opposita parallela sint, Proclus et post eum Clavius monent. Latera opposita nempe sunt, quae ex utraque sui parte parem laterum numerum in figura habent. Nempe in figura quacunque aequiangula, quae parem numerum laterum habent (aequilatera etiam esse, quod Proclus et Clavius volunt, nihil attinet) latera opposita erunt parallela. Quodsi enim numerus laterum sit  $= 2n$ , erit numerus laterum ex utraque parte laterum oppositorum  $A\theta$ ,  $\Delta E$  (Fig. 65.)  $= n-1$ . Ducta deinde  $AA$ , habebit figura ex altera rectae  $AA$  parte v. c. dextra  $n$  latera, rectae  $AA$  pariter cum reliquis computata, ex altera (sinistra parte rectae  $AA$  pariter cum reliquis computata,  $(n+2)$  latera, itaque omnes anguli figurae a dextra parte efficiunt ex I. 32. Cor. 12.  $(n-2).2R$ , vel  $2nR-4R$ : omnes autem anguli figurae

(Prop. 29.). Duo igitur triangula sunt  $AB\Gamma$ ,  $B\Gamma A$ , eos angulos  $AB\Gamma$ ,  $B\Gamma A$  duobus angulis  $B\Gamma A$ ,  $\Gamma B A$  aequales habentia, utrumque utrique, et unum latus utri lateri aequale, quod est ad aequales angulos, commune utrique  $B\Gamma$ ; et reliqua igitur reliquis lateribus aequalia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo (Prop. 26.); aequale igitur est  $AB$  quidem latus lateri  $\Gamma A$ ,  $A\Gamma$  vero lateri  $BA$ , et angulus  $BA\Gamma$  angulo  $B\Gamma A$ . Et quoniam aequalis est quidem angulus  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma A$ , et  $\Gamma B A$  angulo  $A\Gamma B$ ; totus igitur  $AB\Gamma$  toti  $A\Gamma A$  est aequalis (Ax. 2.); ostensus est autem et  $BA\Gamma$  angulo  $\Gamma AB$  aequalis.

sinistra parte rectae  $AA=n.2R=2nR$ . At figura a sinistra parte habet, praeter duos angulos rectae  $AA$  adjacentes,  $n$  angulos ad figuram aequiangulam primitus datam [pertinentes,

$$\text{quorum quisque ex I. 32. Cor. 18.} = \frac{(2n-2).2R}{2n} = \frac{(2n-2)R}{n}$$

$=2R-\frac{2R}{n}$ . Itaque figura a sinistra parte, praeter duos illos rectae adjacentes, habebit  $2nR-2R$ . At vidimus, continere omnes  $n$  omnes anguli in calculum veniant,  $2nR$ . Duo itaque illi rectae  $AA$  adjacentes erunt aequales duobus rectis, adeoque rectae  $AE$  erunt parallelae (I. 29.).

Appendicis loco addi possunt de Trapeziis, sive figuris quadrilateris, in quibus duo saltem latera opposita parallelae, reliqua duo non parallelae sunt (ita nempe Proclus definit trapezia) sequentia:

1) Anguli adjacentes uni laterum non parallelorum simul sumpti duobus rectis aequales sunt (I. 29.).

2) Anguli oppositi semper inaequales sunt. Sit enim (Fig. 66.) trapezium  $AB\Gamma A$ , et ducatur  $AE$  rectae  $A\Gamma$  parallela,

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $BΓ$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $BΓ$  ὁσοὶ ταῖς  $ΔΓ$ ,  $ΓΒ$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BΓΔ$  ἴση ἐστὶ καὶ βάσις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἴση ἐστὶ καὶ τὸ  $ABΓ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΒΔΓ$  τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα  $BΓ$  διάμετρος διχα τέμνει τὸ  $ΑΓΔΒ$  παραλληλόγραμμον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

erūque (I. 34.)  $\text{angulus } E = \Gamma$ , at  $AB\Delta > E$  (I. 16.) adeoque  $AB\Delta > \Gamma$ .

3) Latera opposita parallela  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sunt inaequalia. In constructione nempe antecedente erit  $AE = \Gamma\Delta$  (I. 34.). At  $AB < AE$ , adeoque  $AB < \Gamma\Delta$ .

4) E triangulis, in quae diagonales trapezium (Fig. 67. 68.) dispescunt, duo illa, quorum bases sunt latera parallela, aequiangula sunt (I. 29.) reliqua duo in trapeziis tantum aequicruris (i. e. quorum ea latera aequalia sunt, quae non sunt parallela, et quae etiam, ut ducta per terminum unius recta alteri parallela facile patet, aequaliter inclinata sunt ad unumquodvis reliquorum laterum) inter se congruunt (I. 26.).

5) Neutra diagonalis bifariam secat alteram, sed utriusque diagonalis pars maior adiacet maiori duarum parallelarum, minor minori: in trapezio aequicruro tamen integrae diagonales pariterque partes unicuique parallelarum adjacentes aequales sunt.



Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli aequalia inter se sunt.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim aequalis est  $AB$  rectae  $\Gamma A$ , communis autem  $B\Gamma$ , duae igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma A$  aequalis est; et basis igitur  $A\Gamma$  basi  $BA$  aequalis est (Prop. 4.); et igitur triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $B\Gamma A$  aequale est.

Ergo  $B\Gamma$  diameter bifariam secat  $A\Gamma AB$  parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XXXV. (Fig. 70.)

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in eadem parallelis, aequalia inter se sunt.

6) Si in trapezio aliquo (Fig. 69.) una diagonalis  $AA$  bisecetur in puncto  $H$ , et per  $H$  recta  $\Theta HI$  ducatur parallela lateribus trapezii parallelis inter se, bisecabit illa reliqua trapezii latera prout ac alteram diagonalem. Ducatur enim  $HK$  parallela  $\Gamma A$ , eruntque triangula  $AHK$ ,  $HAI$  aequalia (I. 26.) ob  $AH=HI$  ex hyp., ang.  $HAK=HAI$  (I. 29.) et  $AHK=HAI$  (I. 20.) hinc  $AK=HI$  et  $KH=AI$ : at etiam  $KH=BI$  (I. 34.) itaque  $AI=BI$ . Eadem ratione ostenditur, ducta  $HA$  parallela  $\Gamma A$  esse  $A\Theta=\Theta I$ . Denique ob  $IA=BI$ , erit etiam (I. 34. Cor. 23.)  $BZ=IZ$ .

7) Eisdem manentibus, erit  $\Theta Z=\frac{AB}{2}$ , et  $ZI=\frac{\Gamma A}{2}$ . Nam

ob  $AK=HI$  (nr. 6.)  $=KB$  (I. 34.), et  $BZ=IZ$  (nr. 6.) erit etiam  $KZ$  parallela rectae  $A\Theta$  (I. 34. Cor. 23.), adeoque  $\Theta Z=$

$\frac{AB}{2}$ . Similiter, quum sit  $\Gamma A=AI$  (I. 34. Cor. 23.) et

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ  $ABΓΔ$ ,  $EBΓΖ$  ἐκ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $AZ$ ,  $ΒΓ$  λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$  τῷ  $EBΓΖ$ .

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$ , ἴσον ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΓ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $EZ$  τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $EZ$  ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ  $ΔΕ$ · ὅλη ἄρα ἡ  $ΑΕ$  ὅλη τῇ  $ΔΖ$  ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΓ$  ἴση· δύο δὲ αἱ  $EA$ ,  $AB$  δυοὶ ταῖς  $ZA$ ,  $ΔΓ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΖΔΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EAB$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσις ἄρα ἡ  $EB$  βάσει τῇ  $ZΓ$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $EAB$  τρίγωνον τῷ  $ΔΓΖ$  τριγώνῳ ἴσον.

$BZ = ΓΖ$ , erit ducta  $ZA$  parallela rectae  $BA$ , adeoque  $ZI =$   
 $AA = \frac{\Gamma A}{2}$ .

8) Iisdem manentibus erit linea  $\Theta I$  aequalis dimidiae summae rectarum  $AB$ ,  $\Gamma A$  et  $ZH$  aequalis dimidio excessui τῆς  $\Gamma A$  super  $AB$ . Est enim ex praeced.  $\Theta Z = AK = KB = \frac{AB}{2}$ , pariterque  $ZI = \Gamma A = AA = \frac{\Gamma A}{2}$ , adeoque  $\Theta I = \frac{AB + \Gamma A}{2}$ . Et, quum etiam  $HI = \frac{AB}{2}$ , erit  $ZH = \frac{\Gamma A - AB}{2}$ .

#### PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Debebant quidem, si omnia exacte persequi velis, tres casus distingui, prout vel puncta  $A$ ,  $E$  coincidunt: vel recta  $EZ$  tota, (ut est in nostra Fig. 70.) extra  $AA$  cadit, vel punctum  $E$  inter  $A$  et  $A$  situm est. Et in versione Campani omnes hi casus enumerantur, pariterque eos habent Proclus, Commandinus, Clavius, aliique. Quum autem levi tantum mutatione eadem demonstratio in omnes quadret, non opus visum fuit, ut reliquos casus adderemus. Rob. Simson.

Sint parallelogramma  $AB\Gamma A$ ,  $EB\Gamma Z$  super eadem basi  $B\Gamma$  constituta et in eisdem parallelis  $AZ$ ,  $B\Gamma$ ; dico aequale esse parallelogrammum  $AB\Gamma A$  parallelogrammo  $EB\Gamma Z$ .

Quoniam enim parallelogrammum est  $AB\Gamma A$ , aequalis est  $AA$  rectae  $B\Gamma$  (Prop. 34.). Ex eadem ratione et  $EZ$  rectae  $B\Gamma$  est aequalis (Prop. 34.). Quare et  $AA$  rectae  $EZ$  est aequalis (Ax. 1.); et communis  $AE$ ; tota igitur  $AE$  toti  $AZ$  est aequalis (Ax. 2.). Eandem et  $AB$  rectae  $A\Gamma$  aequalis (Prop. 34.); duae igitur  $EA$ ,  $AB$  duabus  $ZA$ ,  $A\Gamma$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $ZAF$  angulo  $EAB$  est aequalis (Prop. 29.), exterior interiori; basis igitur  $EB$

in sua editione demonstrationem paulo commutavit, ut eadem prius fieret pro duobus postremis casibus. Paulo aliter adhuc ex I. 26. vel etiam ex I. 8. deduci poterat demonstratio. Cacterum in iisdem parallelis esse idem dicit, ac, quod alii dicunt, eandem altitudinem habere, quum altitudo parallelarum nihil aliud sit, quam distantia basis a parallela ipsi opposita. Cf. VI. Def. 4. Proclus addit, hoc aliaque ipsi similia theoremata appellari posse  $\tau\omicron\pi\iota\kappa\acute{\alpha}$ , quod nempe recta  $AA$  utrimque quantalibet producta locus ( $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ ) est, in quem recta  $EZ$  semper incidere debet. Quodsi  $AA$  ita locum rectae  $EZ$  vocare velis, erit ille  $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$   $\delta\iota\epsilon\chi\omicron\delta\iota\kappa\omicron\varsigma$ , ut itaque pateat, etiam locum lineae in linea, non tantum in superficie, ut Pappus ait in Praefat. ad Libr. VII. Collect. Mathem. esse posse  $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$   $\delta\iota\epsilon\chi\omicron\delta\iota\kappa\omicron\varsigma$  i. e. locum subinde ulterius quasi procedentem. Et quidem erit is locus ad rectam, locus planus ( $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$   $\epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron\varsigma$ ). Idem valet de his, quae proxime sequuntur, propositionibus 36. 37. 38. 41. Conf. Apollonii loca plana I. 3. et Isaac. Monach. in Schol. ad h. l.

Cor. 1. Speciatim quodvis parallelogrammum aequale est rectangulo super eadem basi in iisdem parallelis constituto.

ἔσται. Κοινὸν ἀφηγήσθω τὸ  $\Delta\text{H}\epsilon$  λοιπὸν ἄρα τὸ  $\text{ABH}\Delta$  τραπέζιον λοιπῷ τῷ  $\text{EH}\Gamma\text{Z}$  τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\text{HB}\Gamma$  τρίγωνον ὅλον ἄρα τὸ  $\text{AB}\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ  $\text{EB}\Gamma\text{Z}$  παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ  $\text{AB}\Gamma\Delta$ ,  $\text{EZH}\Theta$  ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $\text{B}\Gamma$ ,  $\text{Z}\text{H}$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $\text{A}\Theta$ ,  $\text{B}\text{H}$  λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $\text{AB}\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον τῷ  $\text{EZH}\Theta$ .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $\text{B}\text{E}$ ,  $\Gamma\Theta$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\text{B}\Gamma$  τῇ  $\text{Z}\text{H}$ , ἀλλὰ ἡ  $\text{Z}\text{H}$  τῇ  $\text{E}\Theta$  ἐστὶν ἴση καὶ ἡ  $\text{B}\Gamma$  ἄρα τῇ  $\text{E}\Theta$  ἐστὶν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ  $\text{B}\text{E}$ ,  $\Gamma\Theta$ , αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοι καὶ αἱ  $\text{E}\text{B}$ ,  $\Gamma\Theta$  ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλλη-

Cor. 2. Quodsi vero caeteris manentibus, basis unius parallelogrammi maior sit, basi alterius, erit etiam prius parallelogrammum maius, quam hoc posterius. Et quam multiplex est basis unius talium parallelogrammorum basis alterius, tam multiplex est etiam illud parallelogrammum huius.

Cor. 3. Quae hic de parallelogrammis demonstrata sunt, valent eodem modo de duobus trapeziis, quorum unum latera inter se parallela in iisdem parallelis constituta atque eiusdem magnitudinis habet ac alterum.

in  $ZF$  aequalis est, et  $EAB$  triangulum ipsi  $AFZ$  angulo aequale erit (Prop. 4.). Commune auferatur  $AHE$ ; reliquum igitur  $ABHA$  trapezium reliquo  $EHTZ$  trapezio est aequale (Ax. 3.). Commune addatur  $HBF$  triangulum; totum igitur  $ABFA$  parallelogrammum cum  $EBFZ$  parallelogrammo aequale est (Ax. 2.). Ergo parallelogramma etc.

### PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 71.)

Parallelogramma, super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint parallelogramma  $ABFA$ ,  $EZH\Theta$  super aequalibus basibus constituta  $BF$ ,  $ZH$ , et in eisdem parallelis  $AE$ ,  $BH$ ; dico aequale esse parallelogrammum  $ABFA$  parallelogrammo  $EZH\Theta$ .

longitudo enim  $BE$ ,  $F\Theta$ .

Et quoniam aequalis est  $BF$  rectae  $ZH$ , et  $ZH$  rectae  $E\Theta$  est aequalis (Prop. 34.); et  $BF$  igitur rectae  $E\Theta$  est aequalis (Ax. 1.). Sunt autem et parallelae, et iungunt ipsas rectae  $BE$ ,  $F\Theta$ , quae autem aequales et parallelas ad easdem partes coniungant, aequales et parallelas sunt (Prop. 33.); et  $EB$ ,  $F\Theta$

Obs. 2. Caeterum, ut Clavius monet, ac facile demonstrari potest, conversa quoque locum habet: nempe parallelogramma aequalia super basibus aequalibus ad easdem partes constituta sunt in iisdem parallelis. Et alia adhuc conversa valet: Si duo parallelogramma aequalia in iisdem parallelis ita constituta sint, ut bases ex una parte in eodem puncto terminentur, tuncque bases ad easdem partes huius puncti positae, etiam ex altera parte in eodem puncto terminabuntur, adeoque congruent. Similiter converti potest etiam Cor. 3.

λοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $EBΓΘ$ , καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ  $ABΓΔ$  βάσειν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν  $ΒΓ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς  $ΒΓ$ ,  $ΑΘ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $EZHΘ$  τῷ αὐτῷ τῷ  $EBΓΘ$  ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $EZHΘ$  ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΒΓ$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ . λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΓ$  τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ  $ΑΔ$  ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $E$ ,  $Z$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $B$  τῇ  $ΓΑ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $BE$ , διὰ δὲ τοῦ  $Γ$  τῇ  $ΒΔ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΓΖ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  $EBΓΑ$ ,  $ΔΒΓΖ$ · καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΓ$ ,  $EZ$ · καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $EBΓΑ$  παραλληλογράμμου ἡμισὺν τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $AB$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ  $ΔΒΓΖ$  παραλληλογράμμου ἡμισὺν τὸ  $ΔΒΓ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $ΔΓ$  διάμετρος αὐτὸ

### PROPOSITIO XXXVI.

Obs. Parallelogramma nempe intelliguntur, quae, si bases in eadem recta vel ipsa, vel producta, vel partim in ipsa basi, partim in basi producta, constituentur, latera his basibus opposita et parallela pariter habeant in eadem recta posita.

gunt et aequales sunt et parallelae. Parallelogrammum igitur est  $EBF\Theta$ , et est aequale parallelogrammo  $AB\Gamma A$  (Prop. 35.); basin enim eandem habet  $BF$  ipsum, et in eisdem parallelis est  $BF$ ,  $A\Theta$ . Ex eadem ratione, et  $EZH\Theta$  eidem  $EBF\Theta$  est aequale; quare et parallelogrammum  $AB\Gamma A$  parallelogrammo  $EZH\Theta$  est aequale (Ax. 1.). Ergo parallelogramma etc.

### PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 72.)

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sunt triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta BF$  super eadem basi constituta  $BF$  et in eisdem parallelis  $AA$ ,  $BF$ ; dico aequale esse  $AB\Gamma$  triangulum  $\Delta BF$  triangulo.

Producatur  $AA$  ex utraque parte in  $E$ ,  $Z$ , et per  $B$  quidem rectae  $GA$  parallela ducatur  $BE$  (Prop. 31.), per  $\Gamma$  vero rectae  $BA$  parallela ducatur  $\Gamma Z$  (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta BFZ$ ; et aequalia sunt (Prop. 35.); nam super eadem basi sunt  $BF$  et in eisdem parallelis  $BF$ ,  $EZ$ ; et est parallelogrammi quidem  $EB\Gamma A$  dimidium triangulum  $AB\Gamma$ ; nam  $AB$  diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); parallelogrammi autem  $\Delta BFZ$  dimidium triangulum  $\Delta BF$ , nam  $\Delta F$  diameter ipsum

Ceterum patet, similes et plures etiam ac in praecedente Prop. casus distinguere posse, et generatim ea omnia, quae ad praecedentem propositionem notata sunt, corollaria et conversas etiam hic valere, unde non opus videtur, ea nominatim afferre. Parallelogramma haec quamvis inter se aequalia perimetros

δίχα τέμνει τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΓ$  τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΕΖ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΖ$ ,  $ΑΔ$  λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$  ἐφ' ἐκότερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $Η$ ,  $Θ$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $Β$  τῇ  $ΓΑ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΒΗ$ , διὰ δὲ τοῦ  $Ζ$  τῇ  $ΔΕ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΖΘ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκότερον τῶν  $ΗΒΓΑ$ ,  $ΔΕΖΘ$  καὶ ἴσον τὸ  $ΗΒΓΑ$  τῷ  $ΔΕΖΘ$ , ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεσιν εἰσι τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΕΖ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΖ$ ,  $ΗΘ$  καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $ΗΒΓΑ$

tamen diversissimas habere possunt, quod idem etiam valet de figuris, de quibus in Prop. 35. 37. 38. sermo est. Ad Prop. 37. Proclus, cuius textus hic mancus est, idem observat.

### PROPOSITIO XXXVIII.

Obs. Casus iidem distinguere possunt in hac et praecedente propositione ac in Prop. 35. et 36. et corollaria etiam similia et similes conversae locum habent.

Cor. 1. (Ex Peletario) Si basis trianguli bifariam secatur recta a vertice ducta, ipsum etiam triangulum eadem recta bifariam secabitur. Et universim duo triangula super aequalibus basibus in recta eadem vel producta constituta, quae eundem verticem habent, sunt aequalia: et triangulorum aequae



utrum secat (Prop. 34.); aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum  $ABF$  triangulo  $AEZ$ . Ergo triangula etc.

PROPOSITIO XXXVIII. (Fig. 73)

Triangula super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint triangula  $ABF$ ,  $AEZ$  super aequalibus basi-  
bus constituta  $BF$ ,  $EZ$ , et in eisdem parallelis  $BZ$ ,  
 $AD$ ; dico aequale esse triangulum  $ABF$  triangulo  
 $AEZ$ .

Producatur enim  $AD$  ex utraque parte in  $H$ ,  $\Theta$ ,  
et per  $B$  quidem rectae  $FA$  parallela ducatur  $BH$   
(Prop. 31.), per  $Z$  vero rectae  $AE$  parallela ducatur  
 $Z\Theta$  (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  
 $HBFA$ ,  $AEZ\Theta$ ; et aequale  $HBFA$  parallelogrammo  
 $AEZ\Theta$  (Prop. 36.); in aequalibus enim et basibus  
una  $BF$ ,  $EZ$ , et in eisdem parallelis  $BZ$ ,  $H\Theta$ ; est

alterum quam multiplex est basis unius trianguli basis alterius,  
tum multiplex erit prius triangulum trianguli posterioris.

Cor. 2. Per punctum  $A$  in latere trianguli  $ABF$  (Fig. 74.)  
datum, at nomen medio  $BF$  situm, si bisecandum sit triangu-  
lum, bisecetur  $BF$  in  $E$  (I. 10.) et iungatur  $AE$ , tum ducta  $AD$ ,  
et per  $E$  ei parallela  $EZ$  (I. 51.) ducatur  $EZ$ , eritque (Cor. praeced.)  
 $ABF$  dimidia pars  $\triangle ABF$ : at, quum  $AEZ = AEZ$  (I. 37.), erit  
etiam (I. Ax. 2.) triangulum  $ZAF = AEF =$  dimidio triangulo  
 $ABF$  (Peletarius).

Cor. 3. Duae diametri quodvis parallelogrammum divi-  
dunt in quatuor triangula aequalia.

Cor. 4. Summa aut differentia duorum parallelogram-  
morum (aut triangulorum) in iisdem parallelis constitutorum

παρλληλογράμμου ἡμισυ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $AB$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει τοῦ δὲ  $ΔΕΖΘ$  παρλληλογράμμου ἡμισυ τὸ  $ΖΕΔ$  τρίγωνον, ἡ γὰρ  $ΔΖ$  διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἐκῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 29.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παρλληλοῖς ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΒΓ$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$ , καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρλληλοῖς ἐστίν. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι παρλληλὸς ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΓ$ .

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ  $Α$  σημείου τῇ  $ΒΓ$  εὐθεία παρλληλὸς ἡ  $ΑΕ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΕΓ$ .

Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΕΒΓ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρλληλοῖς ταῖς  $ΒΓ$ ,  $ΑΕ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΒΓ$  ἐστὶν ἴσον καὶ τὸ  $ΔΒΓ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΕΒΓ$  ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πα-

aequalis est parallelogrammo (aut triangulo) in iisdem parallelis constituto, cuius basis aequalis est summae aut differentiae basium illorum parallelogrammorum (aut triangulorum).

### PROPOSITIO XXXIX.

Cor. 1. (e Campano) Recta  $ΔΕ$  (Fig. 77.) secans bifariam in  $Δ$ ,  $Ε$  latera  $AB$ ,  $ΑΓ$  trianguli  $ABΓ$  erit reliquo lateri  $ΒΓ$

area parallelogrammi  $HBFA$  dimidium triangulum  $ABF$  (Prop. 34.),  $AB$  enim diameter ipsum bifariam secat; parallelogrammi vero  $AEZO$  dimidium triangulum  $ZEA$  (Prop. 34.), nam  $AZ$  diameter ipsum bifariam secat. Aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum  $ABF$  triangulo  $AEZ$ . Ergo triangula etc.

PROPOSITIO XXXIX. (Fig. 75.)

Aequalia triangula, super eadem basi constituta et ad eandem partes, in iisdem parallelis sunt.

Sint aequalia triangula  $ABF$ ,  $ABF$ , super eadem basi  $BF$  et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim  $AE$ ; dico parallelam esse  $AE$  rectae  $BF$ .

Si enim non, ducatur per  $A$  punctum rectae  $BF$  parallela  $AE$  (Prop. 31.); et iungatur  $EF$ .

Aequale igitur est triangulum  $ABF$  triangulo  $EBF$  (Prop. 5.); super eadem enim basi est  $BF$  super qua ipsum  $BEF$ , et in eisdem parallelis  $BF$ ,  $AE$ ; sed triangulum  $ABF$  triangulo  $ABF$  est aequale; ergo et triangulum  $ABF$  triangulo  $EBF$  aequale est (Ax. 1.), minus minori, quod fieri nequit (Ax. 9.). Non igitur

parallela. Est enim  $\triangle AAE = \triangle AEB$  (I. 38. Cor. 1.) et eodem modo  $\triangle AAE = \triangle AEF$ , unde  $\triangle AEB = \triangle AEF$  (I. Ax. 1.) adeoque  $AE$  parallela rectae  $BF$  (I. 39.) Cf. I. 34. Cor. 23.

Cor. 2. (E Clavio) Omne quadrilaterum  $ABFA$  (Fig. 60.) quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. Quum enim sit (hyp.)  $\triangle BAF =$  dimidio quadrilatero  $ABFA$ , pariterque etiam  $\triangle AAF =$  eidem dimidio quadrilatero

ράλληλός ἐστιν ἡ  $AE$  τῇ  $BF$ . Ὅμοίως δὴ δαίξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς  $AD$  ἡ  $AD$  ἄρα τῇ  $BF$  ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

$ABFA$ , erit  $\triangle BAF = \triangle ADF$ , adeoque (I. 39.)  $AB$  rectae  $AF$  parallela. Eodemque modo ostenditur esse rectas  $AD$ ,  $BF$  parallelas.

COR. 3. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro ita dividitur in quatuor triangula, ut bina quaecunque ad verticem opposita inter se aequalia sint, est parallelogrammum. Redit enim res ad praeced. Cor. 2.

COR. 4. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro in quatuor triangula aequalia dividitur, est parallelogrammum. Pariter redit ad Cor. 2.

### PROPOSITIO XL.

Obs. 1. Notandum est, quod Baermannus monet, bases intelligi in eadem recta positas. Bases autem contiguas esse, ut in figura, nihil attinet.

Obs. 2. Alia conversa propositionum 37. 38. similis ei, quam ad 35. 36. notavimus, locum habet, nempe triangula aequalia in iisdem parallelis constituta etiam eandem vel aequalem basin habent.

Obs. 3. In parallelogrammis quoque idem valet, nempe parallelogramma aequalia, super basibus aequalibus et in eadem recta constitutis, ad easdem basium partes posita in iisdem parallelis erunt, vel, ut alii efferunt, eandem altitudinem habebunt; et vice versa, si caeteris manentibus, eandem altitudinem habeant, vel in iisdem parallelis constituta sint, eandem vel aequalem

parallela est  $AE$  rectae  $BF$ . Similiter autem ostendimus neque aliam quampiam esse praeter  $AD$ ;  $AD$  igitur rectae  $BF$  est parallela. Ergo aequalia etc.

### PROPOSITIO XL. (Fig. 76.)

Aequalia triacula, super aequalibus basibus contenta et ad easdem partes, in iisdem parallelis sunt.

basin habebunt. Eaedem conversae denique etiam de iis tra-

pezia valent, de quibus in I. 35. Cor. 3. diximus.

### PROPOSITIO XLI.

Obi. 1. Facile patet, 1) idem valere, si, caeteris manentibus, triangulum et parallelogrammum non eandem, at aequali basin habeant. Conf. Peletarius. 2) Si parallelogrammum et triangulum in iisdem parallelis fuerit, sit autem basis trianguli dupla basis parallelogrammi, utramque figuram fore aequalem.

Obi. 2. Proclus notat, converti posse propositionem duplici ratione. Nempe a) si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, habeant autem eandem vel aequalem basin super eadem recta constitutam, et sit utraque figura ad easdem huiusmodi partes: erunt duae figurae in iisdem parallelis. b) Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, sit autem utraque figura in iisdem parallelis, erunt etiam vel in eadem vel in aequali basi. Et simili ratione convertetur Prop. 2., quam modo attulimus.

Cor. 1. (E Proclo) Si triangulum et trapezium super eadem (vel aequali) basi, et in iisdem parallelis fuerint, maior enim linea parallela sit basis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli. Si vero minor linea trapezii sit basis trianguli: erit trapezium maius duplo trianguli. Quod facile patet, comparando super eadem basi et in iisdem parallelis parallelo-

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΓΕ$  καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΕ$ .

Εἰ γὰρ μὴ, ἤγθω διὰ τοῦ  $Α$  τῇ  $ΒΕ$  παράλληλος ἡ  $ΑΖ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΕΖ$ .

Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΖΓΕ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΓΕ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΕ$ ,  $ΑΖ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΔΓΕ$  τριγώνῳ· καὶ τὸ  $ΔΓΕ$  τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΖΓΕ$  τριγώνῳ, τὸ μᾶλλον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ  $ΑΖ$  τῇ  $ΒΕ$ . Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς  $ΑΔ$  ἡ  $ΑΔ$  ἄρα τῇ  $ΒΕ$  ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Cor. 2. (E Proclo) Trapezium  $ABΓΔ$  (Fig. 79.) habet duo latera  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  parallela, duplum est trianguli  $ABE$ , quod basin habet  $AB$  unum latus trapezii coniungens duas parallelas, verticem vero punctum  $E$  medium lateris oppositi. Producat enim unum latus trianguli  $AB$ , donec conveniat cum recta  $ΒΔ$  producta in  $Z$ , eritque, ob parallelas  $ΑΓ$ ,  $ΒΖ$ , ang.  $ΑΓΕ = ΖΔΕ$  (I. 29.) et quum praeterea sit ang.  $ΑΕΓ = ΔΕΖ$  (I. 15.) et ex hypoth.  $ΓΕ = ΕΔ$ ; erit (I. 26.) triangulum  $ΑΓΕ = ΖΕΔ$  et  $ΑΕ = ΖΕ$ , adeoque triangulum  $ΖΕΒ = ΓΕΑ + ΒΕΔ$ . At, ob  $ΑΕ = ΖΕ$ , est etiam (I. 38. Cor. 1.) triang.  $ΖΕΒ = ΑΕΒ$ . Itaque triangulum  $ΑΕΒ = ΓΕΑ + ΒΕΔ$  i. e. triangulum  $ΑΕΒ$  est pars dimidia trapezii  $ABΓΔ$ , vel trapezium duplum trianguli.

Sint aequalia triangula  $ABF$ ,  $\Delta FE$ , super aequalibus basibus constituta  $BF$ ,  $FE$  et ad easdem partes; sic et in iisdem parallelis esse. Iungatur enim  $AA$ ; sic parallelam esse  $AA$  rectae  $BE$ .

Si enim non, ducatur per  $A$  rectae  $BE$  parallela  $AZ$  (Prop. 31.), et iungatur  $EZ$ .

Aequale igitur est triangulum  $ABF$  triangulo  $ZFE$  (Prop. 38.); in aequalibus enim basibus sunt  $BF$ ,  $FE$  et in eisdem parallelis  $BE$ ,  $AZ$ . Sed triangulum  $ABF$  aequale est triangulo  $\Delta FE$ ; et triangulum  $\Delta FE$  igitur aequale est triangulo  $ZFE$  (Ax. 1.), maius minori, fieri nequit (Ax. 9.); non igitur parallela est  $AZ$  rectae  $BE$ . Similiter autem ostendemus neque eam quampiam esse praeter  $AA$ ;  $AA$  igitur rectae  $BE$  est parallela. Ergo aequalia etc.

# PROPOSITIO XLI. (Fig. 78.)

Si parallelogrammum eandem habeat basin quam triangulum, et in eisdem parallelis sit, duplum est parallelogrammum trianguli.

Cor. 3. Si, iisdem manentibus ut in Cor. praecedente, ducta Fig. 80. per punctum  $E$  recta  $HH$   $\tau\eta$   $AB$  parallela, compleatur parallelogrammum  $ABHZ$ , erit hoc parallelogrammum, aequale trapezio  $ABFA$ . Et, quum ducta per  $E$  recta  $E\theta$  parallela  $\tau\eta$   $AF$ , sit  $E\theta = AH$  (I. 54.); at ex Append. ad I.

Si. 8.  $E\theta = \frac{AF + BA}{2}$ , erit trapezium  $ABFA$ , cuius latera  $AF$  et  $BA$  parallela sunt, aequale parallelogrammo  $ARHZ$  inter easdem parallelas posito, cuius utrumque reliquum latus  $AH$  vel  $BZ$  aequale est dimidiae summae eorum trapezii laterum, quae inter se parallela sunt, vel erit aequale parallelogrammo, quod eandem cum trapezio altitudinem habet, basin autem aequa-

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ  $ABΓΔ$  τριγώνου  $EBΓ$  βάσιν τε ἔχτω τὴν αὐτὴν τὴν  $ΒΓ$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς  $ΒΓ$ ,  $ΑΕ$ · λέγαμεν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον τοῦ  $EBΓ$  τριγώνου.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $ΑΓ$ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $EBΓ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τὴν  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΒΓ$ ,  $ΑΕ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου· ἡ γὰρ  $ΑΓ$  διάμετρος αὐτὸ διχάζει ὥστε τὸ  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμον καὶ τὸ  $EBΓ$  τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον καὶ τὰ ἐξ ἧς.

lem dimidiae summae parallelorum trapezii laterum. C. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IV.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula  $ABΓ$   $αβγ$  (Fig. 80. a.), in quibus praeter angulos rectos  $Γ$ ,  $γ$  aequales etiam sint anguli  $ΒΑΓ$ ,  $βαγ$ , adeoque (I. 32. Cor. 3. etiam angulus  $ΑΒΓ = αβγ$ , erit (si latera in triangulis aequales angulis opposita angulis aequalibus latera homologa appellentur) rectangulum, cuius unum latus est hypotenusa unius trianguli, alterum autem alteruter cathetus alterius trianguli aequale rectangulo, cuius unum latus est hypotenusa alterius trianguli, alterum autem cathetus homologus priori trianguli v. c. rectang.  $AB \times βγ = \text{rectang. } αβ \times ΒΓ$ . Positum enim recta  $αγ$  super  $AB$  in  $AB$ , et ang.  $βαγ$  super  $ΒΑ$  ob aequalitatem horum angulorum erit  $αβ$  in  $ΑΓ$  ita, ut v. c. punctum  $β$  iaceat in  $Α$ , sitque  $ΑΔ = αβ$ , unde ducta  $ΕΔ$ , erit (I. 4.) triangulum  $ΑΕΒ = αβγ$  et angulus  $ΑΕΔ$  rectus. Compleatur iam rectangulum  $ΑΓΒΘ$ , ducaturque  $ΖΖ$  parallela rectae  $ΒΓ$  i. e. (I. 29.) ad rectos angulos rectae  $ΑΔ$ , eritque  $ΑΖΖ$



Parallelogrammum enim  $AB\Gamma A$  eandem habeat basin  $B\Gamma$ , quam triangulum  $EB\Gamma$ , et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AE$  sit; dico parallelogrammum  $AB\Gamma A$  duplum esse trianguli  $EB\Gamma$ .

longatur enim  $AF$ .

Aequale igitur est triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $EB\Gamma$  (Prop. 37.); nam super eadem basi est  $B\Gamma$  super qua et  $EB\Gamma$ , et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AE$ . Sed  $AB\Gamma A$  parallelogrammum duplum est trianguli  $AB\Gamma$ , nam  $AF$  diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); quare  $AB\Gamma A$  parallelogrammum et trianguli  $EB\Gamma$  duplum est. Si igitur parallelogrammum etc.

rectangulum  $AA \times AZ$ , vel, ob  $AA = \alpha\beta$  (Démonstr.) et  $AZ = B\Gamma$  (I. 34.) erit  $AAZ\Theta$  rectangulum  $\alpha\beta \times B\Gamma$ . Per punctum  $A$  inde ducta recta  $HA$  parallela rectae  $AB$ , compleatur rectangulum  $AHIB$ , ductis nempe per  $A$  et  $B$  rectis  $AH$ ,  $BI$  rectae  $AB$  ad rectos angulos, unde erit  $AH = BI = AE$  (I. 34.)  $= \beta\gamma$  (I. 4.), et rectangulum  $AHIB$  erit rectangulum  $AB \times AE$  vel  $AB \times \beta\gamma$ . Quodsi iam ducatur recta  $BA$ , erit triangulum  $AAB$  dimidium rectanguli  $AAZ\Theta$  i. e. rectg.  $\alpha\beta \times B\Gamma$  (I. 43.). Idem vero triangulum  $AAB$  est quoque (I. 43.) dimidium rectanguli  $AHIB$  i. e. rectg.  $AB \times \beta\gamma$ : itaque rectangulum  $AB \times \beta\gamma = \alpha\beta \times B\Gamma$  (I. Ax. 6.). Ita hanc propositionem, quae vulgo demum e doctrina triangulorum similium libr. VI. derivatur, at ante iam utilis esse potest, non in auxilium vocata doctrina de rationibus et proportionibus demonstrat Gruson. Abhandl. der Berlin. Acad. der Wissensch. für 1814–1815. pag. 45. 46. (Neue höchswichtige und unerwartete Vereinfachung der Euklid. Geometrie §§. 9. 10.)

## ΗΡΟΤΑΣΙΣ μβ.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ , ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ  $A$ · δεῖ δὴ τῷ  $ABΓ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ  $A$  γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Τετμήσθω ἡ  $BΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ  $EF$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $E$  τῇ  $A$  γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $ΓΕΖ$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $A$  τῇ  $EF$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $AH$ , διὰ δὲ τοῦ  $Γ$  τῇ  $EZ$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ΓH$ · παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ZEGH$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $EF$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $ABE$  τρίγωνον τῷ  $AEG$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $BE$ ,  $EF$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $BΓ$ ,  $AH$ · διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τοῦ  $AEG$  τριγώνου. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ  $ZEGH$  παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ  $AEG$  τριγώνου· βάσειν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente fuerit  $\alpha\beta=BG$ , erit  $AB \times \beta\gamma = \alpha\beta\gamma = BG^2$  (I. 34. Cor. 21.) Nominatim itaque, si (Fig. 80. b.) in triangulo  $ABΓ$  ad  $Γ$  rectangulo demittatur ex  $Γ$  ad  $AB$  perpendicularis  $ΓA$ , erit rectangulum inter hypotenusem  $AB$  et segmentum  $BA$  aequale quadrato ex  $BΓ$ . Nam triacula  $ABΓ$ ,  $ΓBA$ , ob angulum rectum  $A=Γ$ , et angulum  $B$  communem erunt aequiangula, adeoque  $AB \times BA = BΓ \times BΓ = BΓ^2$ . Eodemque modo, quum etiam triacula rectangula  $ABΓ$ ,  $ΑΓA$  sint aequiangula, erit  $BA \times AA = ΑΓ^2$ . Has quoque propositiones, quas vulgo ex V. 8. et 17. deducunt, hac ratione demonstrat Gruson l. c. §. 16. Quodsi Theor. I. 47. non ut in Cor. sq. hinc, sed independenter ab

## PROPOSITIO XLII. (Fig. 81.)

Dato triangulo aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum  $AB\Gamma$ , datus vero angulus rectilineus  $\Delta$ ; oportet igitur triangulo  $AB\Gamma$  aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi  $\Delta$  aequale.

Secetur  $B\Gamma$  bifariam in  $E$  (Prop. 10.), et iungatur  $AE$ , et constituatur ad  $EF$  rectam et ad punctum in  $E$  angulus  $FEZ$  ipsi  $\Delta$  aequalis (Prop. 23.), et per  $A$  quidem rectae  $EF$  parallela ducatur  $AH$  (Prop. 31.); per  $\Gamma$  vero rectae  $EZ$  parallela ducatur  $\Gamma H$  (Prop. 31.); parallelogrammum igitur est  $ZEFH$ .

Et quoniam aequalis est  $BE$  rectae  $EF$ , aequale est et triangulum  $ABE$  triangulo  $AEF$  (Prop. 38.); cum super aequalibus basibus  $BE$ ,  $EF$  sunt, et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AH$ ; duplum igitur est triangulum  $AB\Gamma$  trianguli  $AEF$ . Est autem et parallelogrammum  $ZEFH$  duplum trianguli  $AEF$  (Prop. 41.); basis enim eandem habet quam  $AEF$ , et in eisdem

haec propositione demonstratur, poterit vicissim hoc Cor. ex I. 47. derivari.

Cor. 6. Quodsi in eadem figura super  $AB$  constituatur quadratum  $ABAB$ , et perpendicularis  $TA$  producatur, dum cum recta  $AE$  conveniat in  $Z$ , erit  $BAZZ$  rectangulum  $AB \times BA$ , et  $AAZE$  rectangulum  $BA \times AA$ , unde, quum duo haec rectangula simul sumpta efficiant quadratum ex  $AB$ , statim prodit celebre illud theorema Pythagoraeum, quod infra I. 47. habebitur. Cf. Gruson. I. c. p. 50.

Cor. 7. Porro, si comparentur triangula rectangula aequiangula  $APB$ ,  $AAT$ , erit rectangulum  $AB \times TA = AT \times TB$ ,

ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις ἴσον ἄρα ἐστὶ  
τὸ  $ZEGH$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ABΓ$  τριγώνῳ, κα-  
ὲρ τὴν ὑπὸ  $GEZ$  γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ  $\Delta$ .

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $ABΓ$  ἴσον παρα-  
λληλόγραμμον συνίσταται τὸ  $ZEGH$ , ἐν γωνίᾳ τῇ  
ὑπὸ  $GEZ$ , ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ  $\Delta$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ.

Παντὸς παραλληλογράμμου-τῶν περὶ τὴν διάμε-  
τρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλ-  
λήλοις ἐστὶν.

nempe rectangulum sub hypotenusa et perpendiculari  $GA$  ac  
quale rectangulo sub cathetis.

### PROPOSITIO XLII.

Obs. Problema conversum, quod Peletarius habet: dat  
parallelogrammo aequale triangulum constituere in angulo  
dato, nihil difficultatis habet.

### PROPOSITIO XLIII.

Obs. In quovis parallelogrammo per punctum quod-  
cunque diametri duci possunt (I. 31.) duae rectae, quarum  
una uni, adeoque etiam (I. 30.) alteri duorum laterum oppo-  
sitorum parallelogrammi, altera autem reliquis duobus paral-  
lelogrammi lateribus parallela sit, quo facto nova duo paral-  
lelogramma existent, per quorum angulos oppositos diametru-  
s transit, et alia duo, per quae illa non transit. Haec duo po-  
steriore loco nominata Complementa dicuntur duorum illorum,  
quae antea diximus.

Cor. 1. Patet, quatuor haec parallelogramma aequian-  
gula esse cum primario parallelogrammo  $ABΓΔ$  (I. 29.). Prae-  
terea, prout in hoc duo latera adiacentia aequalia aut inae-  
qualia fuerint, erunt etiam in iis, quae circa diametrum sunt,  
parallelogrammis latera aequalia vel inaequalia. Nempe si sit

est parallelis, in quibus triangulum  $AET$ ; aequale igitur est  $ZETH$  parallelogrammum triangulo  $ABT$ , et habet  $TEZ$  angulum aequalem dato  $A$ .

Dato igitur triangulo  $ABT$  aequale parallelogrammum constitutum est  $ZETH$  in angulo  $TEZ$ , qui est aequalis angulo  $A$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XLIII. (Fig. 82.)

In omni parallelogrammo complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum inter se sunt aequalia.

$\angle A > \angle \begin{smallmatrix} AB \\ AT \end{smallmatrix}$ , erit etiam (I. 5. et I. 18.)  $\angle AT > \angle \begin{smallmatrix} AT \\ TS \end{smallmatrix}$ , adeoque, quoniam  $AK\theta = ATS$ , etiam  $AK\theta > \angle \begin{smallmatrix} TS \\ KA\theta \end{smallmatrix}$ , et proinde  $\angle \theta > \angle \begin{smallmatrix} K\theta \\ AB \end{smallmatrix}$  (I. 6. et I. 19.). Eademque ratione ostenditur, fore iisdem casibus etiam  $KZ > \angle KH$ .

Cor. 2. Nominatim itaque, si  $ABTS$  fuerit quadratum, etiam ea, quae circa diametrum sunt, parallelogramma  $AEK\theta$ ,  $KHT$  quadrata erunt.

Cor. 3. Complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum semper quidem aequiangula sunt inter se et cum parallelogrammo primario, duo autem latera unius aequalia erunt duobus lateribus alterius tum tantum, si parallelogrammum primarium fuerit aequilaterum, vel etiam, si punctum  $K$ , per quod ductae sunt duae rectae lateribus parallelogrammi parallelae, sumtum fuerit in media diametro: reliquis casibus latera unius complementi non erunt aequalia lateribus alterius.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula (Fig. 82. a.)  $AA\Gamma$ ,  $ad\gamma$ , in quibus praeter angulos rectos  $A$ ,  $\delta$  aequales etiam sint anguli  $TA\delta$ ,  $\gamma\delta$  adeoque (I. 32. Cor. 3.) etiam anguli  $ATS$ ,  $ay\delta$ , erit, si latera homologa nominemus eodem sensu ac in I. 41. Cor. 4. rectangulum, cuius unum

Ἐστω παράλληλόγραμμον τὸ  $ABΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΓ$ , περὶ δὲ τὴν  $ΑΓ$  παράλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ  $ΕΘ$ ,  $ΖΗ$ , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ  $ΒΚ$ ,  $ΚΔ$ · λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΒΚ$  παραπλήρωμα τῷ  $ΚΔ$  παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $ΑΓ$ , ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΓΔ$  τρίγωνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $ΕΚΘΑ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ  $ΑΚ$ , ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΕΚ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΘΚ$  τρίγωνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $ΚΖΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΚΗΓ$  τρίγωνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  $ΑΕΚ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΘΚ$  τρίγωνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ  $ΚΖΓ$  τῷ  $ΚΗΓ$ , τὸ  $ΑΕΚ$  τρίγωνον μετὰ τοῦ  $ΚΗΓ$  ἐστὶν ἴσον τῷ  $ΑΘΚ$  τρίγωνῳ μετὰ τοῦ  $ΚΖΓ$  τρίγωνον· ἐστὶ δὲ καὶ ὅλον τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον ὅλῳ τῷ  $ΑΔΓ$  ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ  $ΒΚ$  παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ  $ΚΔ$  παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον. Παντὸς ἄρα παραλλелоγράφου καὶ τὰ ἐξῆς.

latus est cathetus unius, alterum autem cathetus non homologus alterius trianguli, aequale rectangulo, cuius unum latus est reliquus cathetus prioris, alterum reliquus cathetus posterioris trianguli, nempe rectang.  $ΑΓ \times \gamma\delta$  = rectangulo  $ΓΔ \times α\delta$ . Pōnatur enim  $αγ$  super  $ΑΓ$  in  $ΑΚ$ , et angulus  $γα\delta$  super angulo  $ΓΑΔ$ , erit, ob aequalitatem horum angulorum  $α\delta$  in  $ΑΔ$ , ita, ut v. gr. punctum  $\delta$  iaceat in  $\Theta$ , unde, ducta  $ΚΘ$ , erit (I. 4.) triangulum  $ΑΘΚ$  =  $α\delta\gamma$ , et angulus  $ΑΘΚ$  rectus, adeoque (I. 26.) recta  $ΘΚ$  parallela rectae  $ΓΔ$ . Compleatur rectangulum  $ABΓΔ$ , et producaturs  $ΘΚ$ , dum conveniat cum recta  $ΒΙ'$  in  $Η$ , ducaturque per  $Κ$  recta  $ΕΚΖ$  parallela rectae  $ΑΔ$ , eritque, ob  $AB = ΓΔ$  (I. 34.), rectangulum  $ΑΘΒΗ$  = rectangulo  $AB \times ΑΘ$  =  $ΑΓ \times ΑΘ$  =  $ΑΓ \times α\delta$ , et rectangulum  $ΑΕΖΑ$  =

Si parallelogrammum  $AB\Gamma A$ , diameter autem ipsius  $A\Gamma$ , et circa  $A\Gamma$  parallelogramma quidem sint  $E\Theta$ ,  $ZH$ , quae vero dicuntur complementa,  $BK$ ,  $KJ$ ; dico aequale esse complementum  $BK$  complemento  $KJ$ .

Quoniam enim parallelogrammum est  $AB\Gamma A$ , diameter autem ipsius  $A\Gamma$ , aequale est triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $A\Gamma A$  (Prop. 34.). Rursus quoniam parallelogrammum est  $E\Theta A$ , diameter autem ipsius est  $A\Gamma$ , aequale est triangulum  $AEK$  triangulo  $A\Theta K$  (Prop. 34.). Ex eadem ratione et triangulum  $KZ\Gamma$  triangulo  $KH\Gamma$  est aequale (Prop. 34.). Quoniam igitur triangulum quidem  $AEK$  triangulo  $A\Theta K$  est aequale;  $KZ\Gamma$  vero triangulo  $KH\Gamma$ , triangulum  $AEK$  cum triangulo  $KH\Gamma$  est aequale triangulo  $A\Theta K$  cum triangulo  $KZ\Gamma$  (Ax. 2.); est autem et totum triangulum  $AB\Gamma$  toti  $A\Gamma A$  aequale. Reliquum igitur  $BK$  complementum reliquo  $KJ$  complemento est aequale (Ax. 1.). Omnis igitur parallelogrammi etc.

rectangulo  $AA \times AZ = AA \times \Theta K = AA \times \gamma\delta$ . At ex I. 45. est  
rectang.  $BEKH = K\Theta ZA$ , hinc, addito communi  $AEK\Theta$ , erit  
 $ABKH =$  rectangulo  $AEZA$ , i. e.  $AA \times ad = AA \times \gamma\delta$ . Propo-  
sitis haec, de qua eadem observanda sunt, quae de I. 41.  
Cor. 4. cum quo arcte cohaeret, hac ratione demonstrata fuit  
Gruson. l. c. §. 9.

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente cathetus unius tri-  
anguli v. c.  $AA$  aequalis fuerit catheto non homologo alte-  
rius  $\gamma\delta$ , erit  $AA \times ad = \gamma\delta \times AA$ . Nominatim itaque, si (Fig.  
80. b.) in triangulo  $AB\Gamma$  ad  $\Gamma$  rectangulo ex  $\Gamma$  demittatur ad  
 $AB$  perpendicularis  $\Gamma A$ , erit rectangulum segmentorum  $AA$ ,  
 $BA$  aequale quadrato ex  $\Gamma A$ . Nempe, quum sit triangulum  
 $AB\Gamma$  aequiangulum triangulo  $\Gamma BA$ , ut vidimus in I. 41. Cor.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ.

Παρά τὴν δοθείσαν εὐθείαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Ἐστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ  $\Gamma$ , ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ  $A$ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθείσαν εὐθείαν τὴν  $AB$ , τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $\Gamma$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ  $A$  γωνίᾳ.

Συνεστιάτω τῷ  $\Gamma$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $BEZH$ , ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $EBH$ , ἥ ἐστίν ἴση τῇ  $A$  καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $BE$  τῇ  $BA$ , καὶ διήχθω ἡ  $ZH$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὑποτίρω τῶν  $BH$ ,  $EZ$  παράλληλος ἡχθω ἡ  $A\Theta$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $\Theta B$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $A\Theta$ ,  $EZ$  εὐθεῖα ἐνέπεισεν ἡ  $\Theta Z$ , αἱ ὑπὸ  $A\Theta Z$ ,  $\Theta ZE$  ἄρα γωνίαι ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ  $BOH$ ,  $HZE$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι

5., erit nominatim angulus  $A =$  angulo  $BFA$ , adeoque, quum in triangulis  $AAF$ ,  $FAB$  sint praeterea etiam anguli ad  $A$  recti (hyp.), erunt etiam haec triacula aequiangula (I. 32. Cor. 3.) adeoque ex Cor. 4.  $AA \times AB = FA^2$ . Cf. Gruson. l. c. §. 16.

Cor. 6. Alia ratione si comparentur triacula rectangula aequiangula  $AAF$ ,  $FAB$ , erit rectangulum  $AF \times FA = BF \times AA$ .

Cor. 7. Proclo, cuius commentarius ad hanc propositionem ab initio mancus est, observante, etiam, si non ex uno, sed e duobus punctis diametri ducantur rectae lateribus parallelogrammi parallelae (Fig. 83. 84.) spatia, quae ex utraque parte diametri supersunt, demtis istis circa diametrum parallelogrammis (sive illa se invicem non contingant, sive partem



## PROPOSITIO XLIV. (Fig. 85.)

Ad datam rectam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Si quidem data recta  $AB$ , datum vero triangulum  $\Gamma$ , et datus angulus rectilineus  $A$ ; oportet igitur ad datam rectam  $AB$ , dato triangulo  $\Gamma$  aequale parallelogrammum applicare in angulo aequali ipsi  $A$ .

Constituatur parallelogrammum  $BEZH$  aequale triangulo  $\Gamma$ , in angulo  $EBH$  qui est aequalis, angulo  $A$  (Prop. 42.); et ponatur in directum  $BE$  rectae  $BA$ , et producat  $ZH$  ad  $\Theta$ , et per  $A$  alterutri ipsarum  $BH$ ,  $EZ$  parallela ducatur  $A\Theta$  (Prop. 31.), et iungatur  $\Theta B$ . Et quoniam in parallelas  $A\Theta$ ,  $EZ$  recta incidit  $\Theta Z$ , anguli  $A\Theta Z$ ,  $\Theta ZE$  duobus rectis sunt aequales (Prop. 29.); ergo  $B\Theta H$ ,  $HZE$  duobus rectis aequales sunt; rectae autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productae concurrunt (Post. 5. vel

si quae communem habeant) inter se aequalia erunt, quod eodem modo demonstratur. Addi poterat idem verum fore, si vel plura duobus parallelogramma circa diametrum constituerentur. Conversum quoque huius theorematis, quod Peletarius habet, facile probari potest. Nempe, si parallelogrammum divisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita, ut ex his duo adversa aequalia sint, consistent reliqua duo circa diametrum.

## PROPOSITIO XLIV.

Obs. 1. Proclus monet, hanc parallelogrammi dato triangulo aequalis ad datam rectam applicationem ( $\piαραβολήν$ ) quasi stamina continere doctrinae de Parabola, Hyper-

συμπίπτουσιν αἱ  $\Theta B$ ,  $ZE$  ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ  $K$ , καὶ διὰ τοῦ  $K$  σημείου ὁποῦτα τῶν  $EA$ ,  $Z\Theta$  παράλληλος ἡχθῶ ἢ  $KA$ , καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ  $\Theta A$ ,  $HB$  ἐπὶ τὰ  $A$ ,  $M$  σημεία.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Theta AKZ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ  $\Theta K$ , περὶ δὲ τὴν  $\Theta K$  παραλληλόγραμμα μὲν τὰ  $AH$ ,  $ME$ , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ  $AB$ ,  $BZ$  ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB$  τῷ  $BZ$ . Ἀλλὰ καὶ <sup>1)</sup> τὸ  $BZ$  τῷ  $\Gamma$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ τὸ  $AB$  ἄρα τῷ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $HBE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ABM$ , ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $HBE$  τῇ  $\Delta$  ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ  $ABM$  ἄρα τῇ  $\Delta$  γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν τὴν  $AB$ , τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ  $\Gamma$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ  $AB$ , ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ABM$ , ἣ ἐστὶν ἴση τῇ  $\Delta$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ με.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

1) Καὶ legunt Edd. Basil. et Ox.; omittit Paris. cum Cod. a

bola et Ellipsi, et esse antiquum Pythagoraeorum Musae inventum.

Obs. 2. Caeterum alia ratione problema ita adhuc construi potest. Facto, ut ante (Fig. 96.), parallelogrammo  $BEZI$  aequali triangulo  $\Gamma$  in angulo  $EBH = \Delta$ , ponatur  $BE$  in directum rectae  $BA$ . Ducatur deinde recta  $AH$ , cui per  $E$  parallela ducatur  $EM$ , quae cum producta  $HB$  conveniet in  $\Delta$

11.);  $\Theta B$ ,  $ZE$  igitur productae concurrent. Producantur et concurrant in  $K$ , et per  $K$  punctum alterutri ipsarum  $EA$ ,  $Z\Theta$  parallela ducatur  $KA$  (Prop. 31.), et producantur  $\Theta A$ ,  $HB$  ad  $A$ ,  $M$  puncta.

Parallelogrammum igitur est  $\Theta AKZ$ , diameter autem ipsius  $\Theta K$ , et circa  $\Theta K$  parallelogramma quidem  $AH$ ,  $ME$ ; quae vero dicuntur complementa  $AB$ ,  $BZ$ ; aequale igitur est  $AB$  ipsi  $BZ$  (Prop. 43.); sed et  $BZ$  triangulo  $\Gamma$  est aequale; et  $AB$  igitur triangulo  $\Gamma$  est aequale. Et quoniam aequalis est angulus  $HBE$  angulo  $ABM$ , sed  $HBE$  angulo  $A$  est aequalis; et  $ABM$  igitur angulo  $A$  est aequalis.

Ad datam igitur rectam  $AB$ , dato triangulo  $\Gamma$  aequale parallelogrammum applicatum est  $AB$ , in angulo  $ABM$ , qui est aequalis angulo  $A$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XLV. (Fig. 87.)

Dato rectilineo, aequale parallelogrammum construere, in dato angulo rectilineo.

I. 29. Cor. 3.), et per  $M$  ducatur recta  $MA$  parallela rectae  $AB$ , pariterque per  $A$  recta  $AA$  parallela rectae  $BM$ , cum qua  $MA$  conveniet in puncto aliquo  $A$  (I. 29. Cor. 5.) eritque parallelogrammum  $ABAM = BEZH$ . Ducantur enim rectae  $EH$ ,  $AM$ , eritque ob parallelas  $AH$ ,  $EM$ , triangulum  $ABH = AMH$  (I. 37.) adeoque, demto communi  $ABH$ , erit  $HBE = ABM$  (I. Ax. 5.). At  $HBE$  est pars dimidia parallelogrammi  $BEZH$  (I. 54.), pariterque  $ABM$  pars dimidia parallelogrammi  $ABAM$ . Itaque  $ABAM = BEZH$  (I. Ax. 6.). Similis erit constructio, si recta  $BE$  in ipsa  $BA$  ponatur. L

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ  $ABΓΔ$ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ  $Ε$ · δεῖ δὴ τῷ  $ABΓΔ$  εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ  $Ε$ .

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ  $ΔΒ$ , καὶ συνεντάτω τῷ  $ABΔ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $ZΘ$ , ἐν τῇ ὑπὸ  $ΘΚΖ$  γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶ τῇ  $Ε$  καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν  $ΘΗ$  εὐθείαν τῷ  $ABΓ$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $ΗΜ$ , ἐν τῇ ὑπὸ  $ΗΘΜ$  γωνίᾳ, ἡ ἴσιν ἴση τῇ  $Ε$ .

Καὶ ἐπεὶ ἡ  $Ε$  γωνία ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $ΘΚΖ$ ,  $ΗΘΜ$  ἴσιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $ΘΚΖ$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $ΗΘΜ$  ἴσιν ἴση. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $ΚΘΗ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΖΚΘ$ ,  $ΚΘΗ$  ταῖς ὑπὸ  $ΚΘΗ$ ,  $ΗΘΜ$  ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $ΖΚΘ$ ,  $ΚΘΗ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ  $ΚΘΗ$ ,  $ΗΘΜ$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὴ τινι εὐθείᾳ τῇ  $ΗΘ$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Θ$ , δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΘΚ$ ,  $ΘΜ$ , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΚΘ$  τῇ  $ΘΜ$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $ΚΜ$ ,  $ΖΗ$  εὐθεῖαι ἐνέπεσεν ἡ  $ΘΗ$ , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ΜΘΗ$ ,  $ΘΗΖ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Κοινὴ προς-

Obs. 3. Simile est Peletarii problema conversum: ad datam rectam dato parallelogrammo constituere aequale triangulum in angulo dato.

#### PROPOSITIO XLV.

Obs. Iure monet Rob. Simson., rectarum  $ΚΜ$ ,  $ΖΑ$  parallelismum ex ipsa constructione immediate consequi, postquam ostensum fuerit,  $ΖΗ$ ,  $ΗΑ$  pariter ac  $ΚΘ$ ,  $ΘΜ$  in directum esse, nec opus esse, eum inde deducere, quod  $ΚΖ$ ,

Sit quidem datum rectilineum  $AB\Gamma A$ , datus vero  
 angulus rectilineus  $E$ ; oportet igitur rectilineo  $AB\Gamma A$   
 aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo  $E$ .

Augatur enim  $AB$ , et constituatur triangulo  $AB\Delta$   
 aequale parallelogrammum  $Z\Theta$  (Prop. 42.), in angulo  
 $\Theta KZ$ , qui aequalis est angulo  $E$ ; et applicetur ad  
 $\Theta H$  rectam parallelogrammum  $HM$  aequale triangulo  
 $AB\Gamma$ , in angulo  $H\Theta M$ , qui est aequalis angulo  $E$   
 (Prop. 44.).

Et quoniam  $E$  angulus utriusque ipsorum  $\Theta KZ$ ,  
 $H\Theta M$  est aequalis; et  $\Theta KZ$  igitur angulo  $H\Theta M$  est  
 aequalis (Ax. 1.). Communis addatur  $K\Theta H$ ; ergo  
 $ZK\Theta$ ,  $K\Theta H$ , ipsis  $K\Theta H$ ,  $H\Theta M$  aequales sunt (Ax.  
 2.). Sed  $ZK\Theta$ ,  $K\Theta H$  duobus rectis aequales sunt  
 (Prop. 29.); et  $K\Theta H$ ,  $H\Theta M$  igitur duobus rectis  
 aequales sunt (Ax. 1.). Ad aliquam igitur rectam  
 $H\Theta$ , et ad punctum in ea  $\Theta$ , duae rectae  $\Theta K$ ,  $\Theta M$ ,  
 non ad easdem partes positae, angulos deinceps duo-  
 bus rectis aequales faciunt; in directum igitur est  
 $K\Theta$  rectae  $\Theta M$  (Prop. 14.). Et quoniam in parallelas  
 $KM$ ,  $ZH$  recta incidit  $\Theta H$ , anguli alterni  $M\Theta H$ ,  
 $\Theta HZ$  aequales inter se sunt (Prop. 29.). Commu-

$KA$  sunt aequales et parallelae i. e. ex I. 33. Caeterum Pfei-  
 derer. iure pariter monet, applicationem huius problematis ad  
 VI. 25. exigere, ut parallelogrammum non solum datum au-  
 gendum habeat, sed etiam ad datam rectam applicetur; pariter  
 ac in I. 44. insum fuerat. Nova autem hac conditione ad-  
 dita problema simili reductione absolvetur ac I. 44. ut Com-  
 munitius et Rob. Simson. observant in Cor. ad hanc propo-  
 sitionem. Aliter figuram rectilineam quamcunque v. c.  $AB\Gamma\Delta E$   
 (Fig. 66.) primum quidem in triangulum ipsi aequale, deinde

κείσθω ἡ ὑπὸ  $\Theta Η Α$  αἱ ἄρα ὑπὸ  $Μ Θ Η$ ,  $\Theta Η Α$  ταῦτα ὑπὸ  $\Theta Η Ζ$ ,  $\Theta Η Α$  ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $Μ Θ Η$ ,  $\Theta Η Α$  δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ  $\Theta Η Ζ$ ,  $\Theta Η Α$  αὖτε δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $Ζ Α$  τῇ  $Η Α$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $Κ Ζ$  τῇ  $\Theta Η$  ἴση τε καὶ παράλληλος ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Theta Η$  τῇ  $Μ Α$  καὶ ἡ  $Κ Ζ$  αὖτε τῇ  $Μ Α$  ἴση τε καὶ παράλληλος ἐστίν· καὶ ἐπιζευγνυσθαι αὐτὰς εὐθείαι αἱ  $Κ Μ$ ,  $Ζ Α$ , καὶ αἱ  $Κ Μ$ ,  $Ζ Α$  ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Κ Ζ Α Μ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $Α Β$  τρίγωνον τῷ  $Ζ Θ$  παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ  $Α Β Γ$  τῷ  $Η Μ$ · ὅλον ἄρα τὸ  $Α Β Γ Α$  εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ  $Κ Ζ Α Μ$  παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $Α Β Γ Α$  ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ  $Κ Ζ Α Μ$ , ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $Ζ Κ Μ$ , ἣ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ  $Ε$ . Ὅπως ἔδει ποιῆσαι.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ  $Α Β$ · δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς  $Α Β$  εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

hoc triangulum ope I. 44. in parallelogrammum, quod datum angulum ac datum latus habeat, convertere docent in hunc fere modum. Ducantur ex aliquo angulo figurae  $B$  diagonales  $Β Δ$ ,  $Β Ε$  etc. Ducta deinde recta  $Γ Ζ$  parallela rectae  $Β Δ$  producatur, donec (I. 29. Cor. 3.) cum producta  $Ε Δ$  conveniat in  $Z$ , eritque, ducta  $Β Ζ$ , triangulum  $Β Γ Δ = Β Ζ Δ$  (I. 37.), adeoque figura  $Β Α Γ Δ Ε$  iam transformata est in aliam ipsi aequalem  $Β Α Γ Ζ$ , cuius laterum numerus unitate minor est numero laterum, quae figura primaria habebat. Pariter deinceps nova haec figura transformata in aliam, quae laterum numerum

ne addatur  $\theta H A$ ; ergo  $M\theta H$ ,  $\theta H A$  angulis  $\theta H Z$ ,  $\theta H A$  aequales sunt (Ax. 2.). Sed  $M\theta H$ ,  $\theta H A$  duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.); et  $\theta H Z$ ,  $\theta H A$  quatuor duobus rectis aequales sunt (Ax. 1.); in directum igitur est  $ZH$  rectae  $HA$  (Prop. 14.). Et quoniam  $KZ$  rectae  $\theta H$  aequalis et parallela est, sed  $\theta H$  rectae  $HA$  aequalis et parallela est (Ax. 1. et Prop. 30.); et iungunt ipsas rectae  $KM$ ,  $ZA$ , itaque et  $KM$ ,  $ZA$  aequales et parallelae sunt (Prop. 33.); parallelogrammum igitur est  $KZAM$ . Et quoniam aequale est quidem  $ABA$  triangulum parallelogrammo  $Z\theta$ ;  $AB\Gamma$  vero parallelogrammo  $HM$ ; igitur  $AB\Gamma A$  rectilineum toti  $KZAM$  parallelogrammo est aequale.

Ergo dato rectilineo  $AB\Gamma A$  aequale parallelogrammum constitutum est  $KZAM$  in angulo  $ZKM$ , qui est aequalis dato  $E$ . Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO XLVI. (Fig. 89.)

Ex data recta quadratum describere.

Sit data recta  $AB$ ; oportet igitur ex  $AB$  recta quadratum describere.

Quoniam unitate minorem habeat, et re ulterius continuata, pervenietur tandem ad triangulum datae figurae aequale. Ita in eadem figura ducta  $Z\theta$  parallela rectae  $BE$  conveniet (I. 29. Cor. 3.) cum producta  $AB$  in puncto aliquo  $\theta$ , eritque, ducta  $\theta E$ , triangulum  $BE\theta = BEZ$  (I. 37.) adeoque figura  $ABEZ =$  triangulo  $A\theta E$ , unde res deducta est ad I. 44. Haec paucis tantum attingere visum est. Qui plura cupit, adeat Klügel. (Mathem. Wörterb. sub voce: Figuren und ihre Verwandl. Th. II. p. 214. sqq.) et eos, qui ab eo citantur, auctores. Ceterum haec figurarum transformatio in parallelogramma et

"Ηχθω τῇ  $AB$  εὐθεία, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ  $A$ , πρὸς ὀρθὰς ἡ  $AG$ · καὶ κείσθω τῇ  $A$  ἴση ἡ  $AD$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ  $D$  σημείου τῇ  $AB$  παράλληλος ἡχθω ἡ  $DE$ · διὰ δὲ τοῦ  $B$  σημείου τῇ  $A$  παράλληλος ἡχθω ἡ  $BE$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$ · ἴση αὖ ἐστὶν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $DE$ , ἡ δὲ  $AD$  τῇ  $BE$ . Ἀλλὰ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα  $BA$ ,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$  παραλληλόγραμμον. Λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς  $AB$ ,  $DE$  εὐθεῖαι ἐνέπεσεν ἡ  $AD$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $BAD$ ,  $ADE$  γωνίαι διπλοῦν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὄρθῃ δὲ ὑπὸ  $BAD$  ὀρθῇ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ADE$ . Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθῇ ἄρα καὶ ἐκατέρῃ τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ  $ABE$ ,  $BEA$  γωνιῶν ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ADEB$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $AE$  εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Vocem καὶ habent edit. Basil. et Oxon., omittit Paris. cum Cod. a.

nominatim in rectangula potissimum dimetiendis figuris inservit. Quum enim ad dimetiendas figuras quadrata adhibere soleant, haec autem rectangulis tantum applicari possunt, non autem figuris, quarum anguli sunt obliqui, patet, ita denum eandem quadratorum mensuram dimetiendae figurae cuicunque adhiberi posse. Eodem etiam pertinet, quod Peletarius et Clavius habent, problema: datis duabus figuris rectilineis inaequalibus, excessum maioris super minorem exhibere, quod infra v. c. VI. 28. ut notum supponitur.



Ducatur rectae  $AB$ , a puncto in ea  $A$ , recta  $AF$  ad rectos angulos (Prop. 11.) et ponatur rectae  $AB$  aequalis  $AA$  (Prop. 3.); et per punctum quidem  $A$  rectae  $AB$  parallela ducatur  $AE$  (Prop. 31.); per punctum vero  $B$  ipsi  $AA$  parallela ducatur  $BE$  (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est  $AAEB$ ; aequalis igitur est  $AB$  quidem rectae  $AE$ ,  $AA$  vero rectae  $BE$  (Prop. 44.). Sed et  $AB$  rectae  $AA$  est aequalis; quare igitur  $BA$ ,  $AA$ ,  $AE$ ,  $EB$  aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est  $AAEB$  parallelogrammum. Non etiam esse rectangulum. Quoniam enim in parallelogrammo  $AB$ ,  $AE$  recta incidit  $AA$ ; ergo anguli  $BAA$ ,  $AAE$  duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.). Rectus autem est  $BAA$ ; rectus igitur et  $AAE$ . Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli aequalia inter se sunt (Prop. 44.); rectus igitur et uterque oppositorum  $ABE$ ,  $BEA$  angulorum; rectangulum igitur est  $AAEB$ . Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (Def. 30.), et est et  $AB$  recta descriptum. Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO XLVI.

Cor. Facile demonstrari potest, quod Proclus observat, si latera duorum quadratorum sint aequalia, ipsa etiam quadrata esse aequalia, et contra, si quadrata sint aequalia, latera etiam eorum esse aequalia (I. 34. Cor. 21. 22.). Atque id ipsum sumitur in demonstratione I. 48. Contra, si duorum laterum alterum altero maius est, erit etiam quadratum prioris maius quadrato posterioris et vice versa.

Obs. Austin. monet, si rectangulum definiatur esse parallelogrammum, cuius omnes anguli recti sint, et quadratum esse rectangulum, cuius omnia latera sint aequalia, propositione 46. I. non admodum opus esse post I. 42. I. 44. et 45. Et

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τριγώνον ὀρθογώνιον τὸ  $ABΓ$ , ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $ΑΓ$  τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς  $ΒΓ$  τετραγώνον τὸ  $BAΕΓ$ · ἀπὸ δὲ τῶν  $BA$ ,  $ΑΓ$  τὰ  $HB$ ,  $ΘΓ$  καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποτέρᾳ τῶν  $BD$ ,  $ΓE$  παράλληλος ἦχθω ἢ  $AA$ · καὶ ἐπὶσχεύχθωσαν αἱ  $AD$ ,  $ZΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $BAΓ$ ,  $BAH$  γωνιῶν· πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ  $BA$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΑΓ$ ,  $AH$ , (μὴ

potuisse eam abesse, nemo negaverit; ob id multiplicem tamen usum sine dubio adiecta fuit.

## PROPOSITIO XLVII.

Obs. Hoc quoque theorema Pythagorae esse dicunt, qui eo invento solenne boum sacrificium fecerit (βουθητεῖν λέγουσι Proclus ait), unde Pythagoricum vulgo nominatur. Quae circa hanc rem de Pythagora narrant, diligenter collegit Scherz. (Dissert. de Theor. Pythagor. Argent. 1743.) et ex eo Müller. (System. Zusammenstell. der wichtigern bisher bekannten Beweise des Pythagor. Lehrsatzes mit einer ausführlichen Theorie der Zahlendreiecke. Nünb. 1819.) et huc fere redeunt. Plutarchus in Dialog.: ὅτι οὐδὲ ζῆν ἐστιν ἡδέως κατ' Ἐπίκουρον, Sect. II. p. 100. T. XIV. Edit. Hutt. ita habet:

Καὶ Πυθαγόρας ἐπὶ τῷ διαγράμματι βοῶν ἔθεσεν, ὡς φησὶν Ἀπολλόδοτος (Wytttenbach. suspicatur: Ἀπολλόδωρος)

Ἦν δὲ Πυθαγόρας τὸ περιελθεῖς εὗρετο γράμμα  
Κεῖνο, ἐφ' ᾧ λαμπρὴν ἤρετο βουθειήν.

## PROPOSITIO XLVII. (Fig. 90.)

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere rectum  
angulum subtendente aequale est quadratis ex lateribus  
rectum angulum continentibus.

Sit triangulum rectangulum  $ABF$ , rectum habens  
angulum  $BAF$ ; dico quadratum ex  $BF$  aequale esse  
quadratis ex  $BA$ ,  $AF$ .

Describatur enim ex  $BF$  quidem quadratum  $BIEF$ ;  
ex  $BA$ ,  $AF$  vero quadrata  $HB$ ,  $ΘΓ$  (Prop. 46.); et  
per  $A$  alterutri ipsarum  $BE$ ,  $FE$  parallela ducatur  
 $AI$  (Prop. 31.); et iungantur  $AD$ ,  $ZF$ .

Ei quoniam rectus est uterque angulorum  $BAF$ ,  
 $BAH$  (Def. 30.), ad aliquam igitur rectam  $BA$ , et  
ad punctum in ea  $A$ , duae rectae  $AF$ ,  $AH$ , non ad

ἐν τῇ τῆς ὑποτείνουσας, ὡς ἴσον δύνανται — Dicunt nempe  
Geometrae: ἡ γραμμὴ δύναται τὸ χωρίον, ut expriment qua-  
dratum lineae aequale esse spatio — ταῖς περιεχομέναις τὴν ὀρθήν,  
ἐν τῷ ὀρθήματι περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς. Hic itaque Plu-  
tarchus dubius est, an ob hanc propositionem I. 47. an ob  
aliam aliquam, quae, ut nonnulli locum hunc explicant, ad  
theoriam parabolae pertinet, rectius autem secundum alios pro  
I. 47. sumenda fuerit, sacrificium fecerit Pythagoras. Alio  
ἑκ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων libr. VIII. cap. IV. p. 549.  
I. XI. Edit. Hutt. Plutarchus ait: Ἔστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμε-  
τρικαῖς θεωρήμασι, μᾶλλον δὲ προβλήμασι, τὸ, δεῖν εἰδὼν  
ἑνὸς ἄλλο τρίτον παραβάλλειν, τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον ἐφ'  
ταῖς ἑσὶν ἐξερεθίσαντι θῶσαι τὸν Πυθαγόραν· πολὺ γὰρ ἀμέλει  
μακρότερον τοῦτο καὶ μνησιώτερον τοῦ θεωρήματος, ὃ τὴν  
ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην. Hic  
itaque propositionem VI. 25. eam fuisse perhibet, ob quam  
inventam sacra fecerit Pythagoras, quae omnia confirmare vi-  
dentur, haud satis certam esse famam, ob quodnam inventum

ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυοὶς ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Gamma\Lambda$  τῇ  $AH$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $BA$  τῇ  $A\Theta$  ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Delta B\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZBA$ , ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθαι ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta BA$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $ZBI$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $\Delta B$  τῇ  $B\Gamma$ , καὶ  $ZB$  τῇ  $BA$  δύο δὲ <sup>1)</sup> αἱ  $\Delta B$ ,  $BA$  δυοὶ ταῖς  $IB$ .

1) Verba: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $\Delta B$  τῇ  $B\Gamma$ , καὶ δὲ  $ZB$  τῇ  $BA$ , omittunt edit. Bas. et Oxon. et habent tantum: καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $\Delta B$ ,  $BA$  etc. Editio autem Paris. ea ex Cod. a recte addere videtur.

illud Pythagorae sacrificium factum sit, nisi forte illud ob plura inventa plus semel repetitum esse, dicere velis. Diogenes Laertius in vita Pythagorae VIII. segm. 12. ita habet: Φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικὸς ἐκατόμβην θύσαι αὐτὸν εὐρώντα, ὅτι τοῦ τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιχούσαις, καὶ ἐστὶν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον·

*Ἦνθα Πυθαγόρης τὸ περικλῆες εὐρετο γράμμα*

*Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.*

Eadem fere refert Athenaeus Deipnosoph. L. X. p. 165. Ed. Ald. 1514. vel p. 418. Ed. Dalechamp. Lugd. 1712. In vita autem Thaletis I. I. Diogenes Laert. ait: Παρὰ τε Αἰγυπτίων γεωμετρῶν μαθόντα (Thaletem sc.) φησὶ Παμφίλη, πρῶτον καταγράφει ἐπὶ ἡμικυκλίου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ θύσαι βούν· οἱ δὲ Πυθαγόραν φασὶν, ὅν ἐστιν Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός. Diogenes igitur Laertius priore loco Prop. I. 47. ad Pythagoram inventorem perspicue refert, ita tamen, ut etiam ipso Apollodori auctoritate potissimum niti videatur, cuius Epigramma tamen de sacrificio quidem Pythagorae refert, at qua occasione id factum sit, haud satis clare exponit. Porphyrius seu Malchus in vita Pythagorae c. 36. refert: Ἐβοθύθη δὲ ποτὶ σταίτων, ὥς φασὶ, βούν, οἱ ἀκριβοῦστοι,

eandem partes positae, angulos deinceps duobus rectis  
 aequales faciunt; in directum igitur est  $GA$  rectae  
 $AH$  (Prop. 14.). Ex eadem ratione et  $BA$  rectae  $AG$   
 et indirectum. Et quoniam aequalis est  $\angle BGF$  angulus  
 angulo  $ZBA$  (Ax. 1.), rectus enim uterque, commu-  
 nis addatur  $ABF$ ; totus igitur  $\angle BAF$  toti  $\angle ZBF$  est  
 aequalis (Ax. 2.). Et quoniam aequalis est quidem  
 $\angle B$  rectae  $BF$ ,  $ZB$  vero rectae  $BA$ ; duae utique

τοῦ ὀρθογωνίου τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον διαμέτρην ταῖς  
 ὀρθογώναις. Hic itaque, quamvis de sacrificii genere subdu-  
 lare videatur, inventum tamen I. 47. clare ad Pythagoram  
 refert. Caeterum hi testes omnes recentiores sunt, nec ad  
 eam aliquam veterum auctoritatem lectorem remittunt. Haud  
 citiora sunt, quae Romani scriptores habent. Apud Cicero-  
 nem de Natura Deorum l. III. c. 35. legitur: „Pythagoras,  
 cum in Geometria quiddam novi invenisset, Musis bovem  
 immolasse dicitur, sed id quidem non credo, quoniam ille ne  
 Aedolini quidem Delio hostiam immolare voluit, ne aram san-  
 guine aspergeret.“ Vitruvius Architect. l. IX. c. II. inventum  
 Philonicum plenius quam reliqui describit his verbis: „Item  
 Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit,  
 et quam magno labore fabri normam facientes vix ad verum  
 perducere possunt. Id rationibus et methodis emendatum ex  
 eius praeceptis explicatur. Namque si sumantur regulae tres,  
 ex quibus una sit pedes tres, altera quatuor, tertia pedes quinque  
 haecque regulae inter se compositae tangeant alia aliam suis ca-  
 pite extremis, schema habentes trigoni, deformabunt  
 normam emendatam. Ad eas autem regularum singularum  
 longitudo si singula quadrata paribus lateribus describantur,  
 quod erit pedum trium latus, areae habebit pedes novem,  
 quod erit quatuor, sexdecim; quod quinque, erit viginti quin-  
 que. Ita quantum areae pedum numerum duo quadrata ex  
 tribus pedibus longitudinis laterum et quatuor efficiunt, aequo

$BZ$  ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Delta B A$  γωνία τῇ ὑπὸ  $Z B \Gamma$  ἴση βάσις ἄρα ἡ  $A A$  βάσις τῇ  $Z \Gamma$  ἴση, καὶ τὸ  $A B A$  τρίγωνον τῷ  $Z B \Gamma$  τριγώνῳ ἴσιν ἴσον. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $A B A$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $B A$  παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν  $B A$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς  $B A$ ,  $A A$  τοῦ δὲ  $Z B \Gamma$  τριγώνου διπλάσιον τὸ  $B H$  τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν  $Z B$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς  $Z B$ ,  $H \Gamma$  τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $B A$  παραλληλόγραμμον τῷ  $H B$  τετραγώνῳ. Ὅμοιως δὲ, ἐπιζευγνύμενων τῶν  $A E$ ,  $B K$ , δειχθήσεται καὶ τὸ  $\Gamma A$  παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ  $\Theta \Gamma$  τετραγώνῳ ὅλον ἄρα τὸ  $B A E \Gamma$  τετράγωνον δυοῖ τοῖς  $H B$ ,  $\Theta \Gamma$  τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $B A E \Gamma$  τετράγωνον ἀπὸ τῆς  $B \Gamma$  ἀναγκαστὲν, τὰ δὲ  $H B$ ,  $\Theta \Gamma$  ἀπὸ τῶν  $B A$ .

tantum numerum reddidit unum ex quinque descriptum. Id Pythagoras cum invenisset, non dubitans a Musis se in ea inventionem monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur is immolavisse.

E quibus omnibus constare videtur, haud quidem testimoniis ad summam antiquitatem pertinentibus, at fama certe satis constante ad Pythagorae inventum propositionis I. 47. referri, de sacrificio autem, quod fecisse ob id ipsum vel ob aliud inventum Musis dicitur, utrum hecatombe, an minor fuerit victimarum numerus, quin etiam an omnino fuerit sacrificium cruentum, quod Pythagorae disciplina respicere nonnullis visa est, an itaque forte bovem saltem e farina confectum immolaverit, quod alias etiam a Pythagorae factum legimus, nihil certi habere veteres. Cacterum, quod veteres theorema Pythagoricum, id media aetate magistrum mathe-

$AB$ ,  $BA$  duabus  $GB$ ,  $BZ$  aequales sunt, utraque  
 trique, et angulus  $ABA$  angulo  $ZBF$  aequalis; basis  
 (Prop. 4.)  $AA$  basi  $ZF$  aequalis, et triangulum  
 $ABJ$  triangulo  $ZBF$  est aequale. Et est quidem  
 ipsius trianguli  $ABA$  duplum  $BA$  parallelogrammum  
 (Prop. 41.), basin enim eandem habent  $BA$  et in eis-  
 dem sunt parallelis  $BA$ ,  $AA$ ; ipsius vero trianguli  
 $ZBF$  duplum quadratum  $BH$  (Prop. 41.), et enim rursus  
 basin eandem habent et in eisdem sunt parallelis  $ZB$ ,  
 $BF$ ; aequalium autem duplia aequalia inter se sunt  
 (lib. 6.); aequale igitur est et parallelogrammum  $BI$   
 quadrato  $HB$ . Similiter autem iunctis  $AE$ ,  $BK$   
 ostenditur et parallelogrammum  $FI$  aequale quadrato  
 $BF$ . Totum igitur  $BDEF$  quadratum duobus  $HB$ ,  
 $BF$  quadratis aequale est, et est quidem  $BDEF$  qua-  
 dratum ex  $BF$  descriptum, quadrata vero  $HB$ ,  $BF$   
 et  $BA$ ,  $AF$ ; ergo quadratum ex  $BF$  latere aequale

ex vocare solebant. De variis eius demonstrationibus vide  
 Librum II. et supra I. 41. Cor. 6.

Cor. 1. Quadratum super diametro alicuius quadrati du-  
 plum est huius quadrati.

Cor. 2. In quovis triangulo rectangulo quadratum unius  
 catheti aequale est excessui, quo quadratum hypotenusae su-  
 perat quadratum alterius catheti.

Cor. 3. Si e vertice trianguli rectanguli in hypotenusam  
 demittatur perpendicularum, quadrata segmentorum hypotenusae  
 eandem habebunt differentiam, quam quadrata cathetorum.

Cor. 4. Si e puncto quocunque  $F$  rectae  $AB$  (Fig. 91. 92.)  
 erigatur ad eam perpendicularis  $FA$ , et e punctis huius rectae  
 quibuscunque  $E$ ,  $Z$  ducantur ad  $AB$  rectae  $EA$ ,  $EB$ , pariter  
 quae  $ZA$ ,  $ZB$  etc. Quadrata earum, quae ex uno puncto  $E$   
 ductae sunt, eandem inter se differentiam habebunt, ac qua-

$ΑΓ$  τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $ΒΓ$  πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τὰ ἐξῆς.

### Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ μί.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $ΑΒΓ$  τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς  $ΒΓ$  πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία.

Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ  $Α$  σημείου τῇ  $ΑΓ$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθάς ἡ  $ΑΔ$ , καὶ κείσθω τῇ  $ΒΑ$  ἴση ἡ  $ΑΔ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ .

drata earum, quae e quovis alio puncto rectae  $ΑΓ$  ad  $Α$  et  $Β$  duci possunt, i. e. erit  $ΕΒ^2 - ΕΑ^2 = ΖΒ^2 - ΖΑ^2 = ΓΒ^2 - ΓΑ^2$ . Cf. Pappi Collect. Mathem. I. VII. Prop. 120. Apollonii loca plana I. II. Prop. 1. et Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IX.

Cor. 5. In triangulo æquicruro  $ΑΒΓ$  (Fig. 93. 94.) si ex uno aliquo angulorum ad basin in latus oppositum demittatur perpendicularum  $ΑΔ$ , erit summa quadratorum omnium trianguli laterum  $= ΓΑ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$ . Est enim  $ΒΓ^2 = ΓΑ^2 + ΒΔ^2$ , et  $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$ . Itaque  $ΒΓ^2 + ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = ΓΑ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$ . Est hæc propositio Gregorii a St. Vincent. I. 23. 24.

Cor. 6. Si duo triangula rectangula habeant summam quadratorum cathetorum æqualem, æquales etiam erunt hypotenusæ, et vice versa.

Cor. 7. Facile etiam patet ratio describendi quadrati, quod æquale sit summæ duorum, trium, quatuor et generatim n



est quadratis ex  $BA$ ,  $AF$  lateribus; ergo in rectangulis etc.

### PROPOSITIO XLVIII. (Fig. 95.)

Si quadratum ex uno laterum trianguli aequale est quadratis ex reliquis duobus trianguli lateribus; angulus a reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus est.

Sit enim quadratum ex uno latere  $BF$  trianguli  $ABF$  aequale quadratis ex lateribus  $BA$ ,  $AF$ ; dico angulum  $BAF$  rectum esse.

Ducatur enim ab  $A$  puncto rectae  $AF$  ad rectos  $AD$  (Prop. 11.), et ponatur rectae  $BA$  aequalis  $AD$ , et iungatur  $DF$ .

Quoniam quadratorum, quorum latera data sunt, dum nempe duo primum latera data sub angulo recto iunguntur, ductaeque hypotenuse ad terminum eius extremum tertium pariter sub angulo recto iungitur, et nova hypotenusa ducitur, atque ita pergitur, dum adhuc data latera supersunt.

Cor. 8. Pariter, datis duabus lineis inaequalibus, patet ratio inveniendi id, quo plus potest maior, quam minor, vel ut aliter dicamus, datur ratio inveniendi quadratum, quod aequale sit differentiae duorum datorum quadratorum. Erigatur nempe ad punctum extremum lineae datae minoris perpendicularis, et ex altero eiusdem minoris lineae termino describatur circulus radio, qui aequalis sit lineae datae maiori, abscinde ille e perpendiculari lineam, cuius quadratum aequale est excessui quadrati lineae maioris super quadratum lineae minoris.

### PROPOSITIO XLVIII.

Obi. 1. Propositionis huius, quae conversa est praeced-

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta A$  τῇ  $AB$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$  τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $AF$  τετραγώνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $AF$  τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AF$  τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $AF$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta F$  ὀρθῇ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Delta AF$  γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AF$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $BF$ , ὑπόκειται γάρ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Delta F$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BF$  τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $\Delta F$  τῇ  $BF$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta A$  τῇ  $AB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $AF$ , δύο δὴ αἱ  $\Delta A$ ,  $AF$  ὄνσι ταῖς  $BA$ ,  $AF$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ  $\Delta F$  βάσει τῇ  $BF$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta AF$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BAF$  ἴση. Ὀρθῇ δὲ

deutis, aliam demonstrationem habet Proclus, dum nempe ostendit, si angulus  $BAF$  non foret rectus, ex eadem recta  $AF$  parte, ex qua est  $B$ , construi posse aliud triangulum rectangulum, cuius singula latera aequalia forent lateribus trianguli  $ABF$ , quod vero fieri nequit ex I. 7. Alium modum hanc propositionem demonstrandi vide infra II. 13. Obs. 5.

Obs. 2. Quum, ut ad I. 45. diximus, ad dimetienda figuras quascunque, adeoque etiam ad dimetienda quadrata alia quadrata mensurae loco adhibere soleant, v. c. quadratum cuius singula latera pedem longa sunt, et quod propterea pedem quadratum appellant, invenitur, ut facile demonstrari potest, area quadrati cuiuscunque, si exploretur, quoties lateris eius quadrati, quod pro mensura sumitur, contineatur in latere quadrati propositi. Is enim numerus in se ipsum ductus indicabit numerum quadratorum pro mensura sumtorum, quod in proposito quadrato continetur. V. c. si latus quadrati alii cuius sit septem pedum, continebit illud septies septem, i.

Et quoniam aequalis est  $\Delta A$  rectae  $AB$ , aequale est etiam quadratum ex  $\Delta A$  quadrato ex  $AB$ . Commune addatur quadratum ex  $AF$ ; quadrata igitur ex  $\Delta A$ ,  $AF$  aequalia sunt quadratis ex  $BA$ ,  $AF$  (Ax. 2.). Sed quadratis ex  $\Delta A$ ,  $AF$  aequale est quadratum ex  $BF$  (Prop. 47.), rectus enim est angulus  $\Delta AF$ ; quare vero ex  $BA$ ,  $AF$  aequale est quadratum ex  $BF$ , id enim sumitur; quadratum igitur ex  $AF$  aequale est quadrato ex  $BF$ ; quare et latus  $AF$  lateri  $BF$  est aequale; et quoniam aequalis est  $\Delta A$  rectae  $AB$ , communis autem  $AF$ , duae utique  $\Delta A$ ,  $AF$  angulus  $BA$ ,  $AF$  aequales sunt, et basis  $AF$  basi  $BF$  est aequalis; angulus igitur (Prop. 8.)  $\Delta AF$  angulo

quadrato novem pedes quadratos. Hinc etiam factum est, ut numeri in se ipsos ducti numeri quadrati vocarentur. Iam veteres et Pythagorae maxime multi in eo fuerunt, ut numeri tres integros eius indolis invenirent, ut summa quadratorum duorum aequalis esset quadrato tertii numeri. Ita nempe ex nostra propositione latera trianguli, quorum hi numeri longitudinem metiuntur, efficient triangulum rectangulum. Tales numeri sunt verbi causa 3. 4. 5. Est enim  $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 5$ . Generatim autem inveniendis numeris eius generis variae excogitatae sunt regulae, quarum aliquas ita, ut hodie solent, expressas hic subiungemus. Unam Proclus ad Pythagoram trahit, quae huc redit. Sumatur pro uno catheto numerus impar quicumque  $(2n+1)$ , pro altero catheto numerus, qui prodit, si a prioris numeri quadrato unitatem demas, et, quod reliquum est, bifariam divides  $\frac{(4n^2+4n+1-1)}{2}$  vel  $2n^2+2n$ , et pro hypotenusa denique numerus, qui prodit, si numeri

ὑπὸ  $\Delta A \Gamma$  ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $B A \Gamma$ . Ἐὰν δὲ  
 τριγώνου καὶ τὰ εἰρη.

primo sumti quadrato unitatem addas, et quod prodit bi  
 riam divides  $\frac{(4n^2+4n+1+1)}{2}=2n^2+2n+1$ . Alia regu  
 quam ad Platonem refert Proclus, a numero pari initium  
 cit. Sumatur numerus par quicunque  $(2n)$  pro uno cath  
 et pro altero quadratum dimidii eius numeri unitate m  
 ctatum  $(n^2-1)$ , pro hypotenusa autem quadratum dimidii n  
 meri unitate auctum  $(n^2+1)$ . Alia regula ita habet: Suma

---

$\triangle BAF$  est aequalis. Rectus autem  $\angle AAF$ ; rectus igitur  
 $\angle BAF$ . Si igitur trianguli etc.

in duo numeri inaequales quicunque ( $a, b$ ) et sumatur pro  
 uno catheto differentia quadratorum eorum ( $b^2 - a^2$ ), pro al-  
 tero duplum eius, quod prodit uno in alterum ducto ( $2ab$ ),  
 utique pro hypotenusa summa quadratorum numerorum isto-  
 rum ( $a^2 + b^2$ ). Aliam regulam generaliore[m] habet Euclides  
 a Lemm. 1, ante X. 30. Quae omnia hic verbo indicasse  
 voluit. Conf. etiam Excurs. II. ad I. 47.

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ  
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν  
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. *Ἡ* ἂν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται  
λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν  
εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίον τῶν περ  
τῆν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἐν ὁποίῳ  
εὖν σὺν τοῖς δυοῖ παραπληρώμασι γνῶμων καλείσθαι

D E F I N. I.

Quum, ut ad I. 45. diximus, ad exprimendam aream figurarum adhibere soleant quadrata, nominatim ad inveniendam aream parallelogrammorum rectangulorum (quæ brevius rectangula nominabimus): quaerendum erit, quoties id quadratum quod mensurae loco sumitur, ipsum aut aliqua eius pars in basi rectanguli poni possit, i. e. quoties latus huius quadrati ipsum aut eius pars in basi rectanguli contineatur, et deinde quoties series eiusmodi quadratorum ipsa aut eius pars determinata in rectangulo una super alteram poni possit i. e. quoties idem latus quadrati ipsum aut eius pars determinata in altitudine rectanguli contineatur, qui duo numeri in se ducti ostendet numerum eiusmodi quadratorum aut partium quadrati in rectangulo contentorum. Hoc etiam factum est, ut eadem, quam pro signo multiplicationis adhibere solent, nota, nempe X utantur etiam ad designandum

---

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### LIBER SECUNDUS.

---

#### DEFINITIONES.

1. **O**mne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis angulum continentibus rectis.

2. In omni parallelogrammo unumquodque eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum cum duobus complementis gnomon vocetur.

Idem rectangulum, quod sub duabus rectis continetur. Ita v. g. rectangulum, quod sub rectis *A*, *B* continetur, indicatur per *A* × *B*, ut iam ad I. Def. 30. diximus. Aliter etiam parallelogramma litteris, quibus puncta extrema diametri notantur, designare solent. Praeterea monet Scarburgh., Geometras dicere, rectam posse aliquam figuram, quum quadratum rectae aequale sit ei figurae (ut ad I. 47. diximus) et pariter duas rectas posse aliquam figuram, quum rectangulum sub utraque rectis aequale sit figurae.

#### DEFIN. II.

Gnomon primum dictus est pro indice horologii solaris; deinde etiam ob figurae similitudinem, pro norma vel duabus regulis sub angulo recto iunctis, denique pariter ob figurae similitudinem, uti hic, de ea parallelogrammi parte, quae, demto uno eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogram-

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εάν ὡς εὐθείαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα θηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Εστῶσαν δύο εὐθείαι αἱ  $A, BG$ , καὶ τετμήσθω ἡ  $BG$  ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ  $\Delta, E$  σημεία· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $A, BG$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν  $A, BD$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $A, DE$ , καὶ ἐτι τῷ ὑπὸ τῶν  $A, EG$ .

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $B$  τῇ  $BG$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $BZ$ , καὶ κείσθω τῇ  $A$  ἴση ἡ  $BH$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $H$  τῇ  $BG$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $H\Theta$ , διὰ δὲ τῶν  $\Delta, E, \Gamma$  τῇ  $BH$  παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  $\Delta K, EL, \Gamma\Theta$ .

Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ  $B\Theta$  τοῖς  $BK, \Delta\Delta, E\Theta$ . Καὶ ὅτι τὸ μὲν  $B\Theta$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A, BG$ , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $HB, BG$ , ἴση δὲ ἡ  $BH$  τῇ  $A$ · τὸ δὲ

num superest. Caeterum, quamvis verum sit, plerasque libri secundi propositiones Arithmeticae, Algebrae et Geometriae communes esse (unde etiam apud Barlaamum monachum, Graecum Arithmeticum, decem primae huius libri propositiones arithmetice demonstratae leguntur, quas etiam videre est in Elem. of Geom. of Euclide by Billingsley London 1570. similesque etiam ad Arithmeticae vel Algebrae harum propositionum applicationes habent Clavius ad IX. 14. Element., Tacquet. in sua Elem. editione, et Christ. Sturm. in des unvergleichlichen Archimedis Kunstbüchern, Nürnberg. 1670. p. 47. sq.) et, quatenus ad Algebrae aut Arithmeticae pertinent, algebraice vel arithmetice facillime demonstrari posse, nec ad eam rem, uti Clavius, Tacquetus, aliique putasse videntur (Cf. die Geometrie nach le Gendre u. s. w. von Gilbert



## PROPOSITIO I. (Fig. 135.)

Si sint duae rectae, secta fuerit autem altera ipsarum in quocunque segmento: rectangulum contentum ab duabus rectis aequale est eis rectangulis, quae sub linea non secta et unoquoque segmentorum continentur.

Sint duae rectae  $A$ ,  $BF$ , et secta sit  $BF$  utcumque in  $A$ ,  $E$  punctis; dico rectangulum contentum sub  $A$ ,  $BF$  aequale esse rectangulo sub  $A$ ,  $BA$  contento, et rectangulo sub  $A$ ,  $AE$ , et rectangulo sub  $A$ ,  $EF$  contento.

Ducatur enim a  $B$  rectae  $BF$  ad rectos  $BZ$  (I. 11.), et ponatur rectae  $A$  aequalis  $BH$  (I. 3.), et per  $H$  parallelam rectae  $BF$  ducatur  $H\Theta$  (I. 31.); per  $A$ ,  $E$ ,  $F$  vero rectae  $BH$  parallelae ducantur  $AK$ ,  $EA$ ,  $F\Theta$  (I. 31.).

Aequale igitur est  $B\Theta$  rectangulis  $BK$ ,  $AA$ ,  $E\Theta$ ; et ut quidem  $B\Theta$  rectangulum sub  $A$ ,  $BF$ , conti-

p. 26.) Geometriae ope nos indigere, et quamvis etiam illud negari haud possit, numerum eiusmodi propositionum addendum, si cui volupe sit, augeri posse, id tamen nequaquam valere debet, ut omnes huius generis propositiones tantum minus necessarias e Geometria excludamus. Sunt enim utraque earum et scilicet omnes eae, quae hoc libro continentur, per se insignis per omnem Geometriam utilitatis, et reliquis propositionibus quam plurimis brevius demonstrandis et veterum Geometrarum libris intelligendis inserviunt, unde videndum est, eas a plurimis recentiorum mathematicorum libris praetermitti.

## PROPOSITIO I.

Obi. Est haec propositio casus specialis eius, quam habemus I. 38. Cor. 4.

$BK$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A, BA$ , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $HB, BA$ , ἴση δὲ ἡ  $BH$  τῇ  $A$  τὸ δὲ  $AA$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A, AE$ , ἴση γὰρ ἡ  $AK$ , τοῦτ' ἐστὶν ἡ  $BH$ , τῇ  $A$  καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ  $EΘ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A, EF$  τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, BF$  ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ  $A, BA$ , καὶ τῷ ὑπὸ  $A, AE$ , καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ  $A, EF$ . Ἐὰν ἄρα ᾧσι καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεία γὰρ ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BF$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν  $BA, AF$  περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ.

Cor. 1. (Quod est apud Commandinum, Clavius, Boermannum, Pfeiderer. in Scholiis ad librum II. Element. Euclidis Tubingae 1797. 98. 99. §. 2., e quibus fere omnia, benevole permittente eorum auctore, vel ipsis auctoris verbis vel brevius aliquantum deprompta sunt, quae ad hunc librum notavimus.) Si fuerint duae rectae lineae, quae secantur in partes quoscunque, rectangulum duabus illis rectis contentum aequale erit rectangulis simul, quae unaquaque parte unius ad unamquamque partem alterius applicata continentur.

Cor. 2. Si basis  $HΘ$  sit multiplex quaecunque rectae  $HK$  v. c.  $=m \times HK$ ,  $m$  notante numerum integrum, parallelogrammum rectangulum sub  $BH$  et  $HΘ$  aequemultiplex est rectanguli sub  $BH$  et  $HK$ , i. e. erit  $BH \times HΘ = m. BH \times HK$ ,

rectur enim sub  $HB$ ,  $BF$ , aequalis autem  $BH$  rectae  $A$ ;  $BK$  vero rectangulum sub  $A$ ,  $BA$ , continetur enim sub  $HB$ ,  $BA$ , aequalis autem  $BH$  rectae  $A$ ;  $AL$  vero rectangulum sub  $A$ ,  $AE$ , aequalis enim  $AK$ , hoc est (I. 31.)  $BH$ , rectae  $A$ ; et similiter etiam rectangulum  $EO$  sub  $A$ ,  $EF$ ; ergo rectangulum sub  $A$ ,  $BF$  aequale est rectangulo sub  $A$ ,  $BA$ , et rectangulo sub  $A$ ,  $AE$ , et rectangulo sub  $A$ ,  $EF$ . Si igitur sint etc.

### PROPOSITIO II. (Fig. 136.)

Si recta linea secetur utcumque, rectangula sub tota et utroque segmentorum contenta aequalia sunt quadrato totius.

Recta enim  $AB$  secetur utcumque in  $F$  puncto; dico rectangulum sub  $AB$ ,  $BF$  contentum, cum rectangulo sub  $BA$ ,  $AF$  contento, aequale esse quadrato rectae  $AB$ .

quod vel ex ipsa II. Prop. 1. vel inde patet, quod I. Prop. 35. Cor. 2. etiam locum habet in I. 38., uti ad eam propositionem diximus. Cf. Pfeiderer. §. 5.

Cor. 3. Quodsi eodem modo altitudo  $BH$  sit multiplex quaecunque alterius rectae  $HZ$ , v. c.  $=n \times HZ$ , rursus  $n$  denotante numerum integrum, erit rectangulum sub  $BH$ ,  $H\theta$   $=m \cdot n \cdot HK \times HZ$ . Cf. Pfeiderer. §. 4.

Cor. 4. Quodsi porro fuerit  $HK = HZ$ , adeoque  $HK \times HZ = HK^2$ , erit rectangulum  $BH \times H\theta = m \cdot n \cdot HK^2$ . Cf. Pfeiderer. §. 5.

Cor. 5. Denique, si  $m = n$  erit  $BH \times H\theta = m^2 \cdot HK^2$ . Cf. Pfeiderer. §. 6.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνον τὸ  $ADFEB$ , καὶ ῥηθῶ διὰ τοῦ  $\Gamma$  ὁποτέρᾳ τῶν  $AD$ ,  $BE$  παράλληλος ἡ  $FZ$ .

Ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ  $AE$  τοῖς  $AZ$ ,  $FE$ · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $AE$  τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνον· τὸ δὲ  $AZ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $AA$ ,  $AG$ , ἴση δὲ ἡ  $AD$  τῇ  $AB$ · τὸ δὲ  $FE$  τὸ ὑπὸ  $AB$ ,  $BG$ , ἴση γὰρ ἡ  $BE$  τῇ  $AB$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$ , μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BG$ , ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἐντε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

### PROPOSITIO II.

Obs. Haec propositio sistit praecedentis casum specialem, quo scilicet recta proposita in duas tantum partes secatur, eademque alterum sit latus rectangulorum ad totam et ad ipsius segmenta applicatorum. Quod etiam altera, quam exponunt, demonstratione innuunt Campanus, Peletarius, vel sola, quam tradunt, Scheubelius, Tacquet., Barrov. Applicationem propositi iam exhibet 1. 47. Cf. Pfeiderer. §. 7.

Cor. 1. Si bifariam secetur  $AE$  in  $Z$ , erit, ob rectang.  $AI'=ZB$  [(I. 35.), rectang.  $AB=2AI'=2EJ \times AZ$ . Cf. Pfeiderer. §. 8.

Cor. 2. Pariter, si recta  $AE$  secetur in quocunque partes, rectangula sub tota et sub singulis eius segmentis simul aequalia sunt quadrato totius  $AE$ . Cf. Clavius, Scheubelius,

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $AIEB$  (I. 46.), et ducatur per  $I$  alterutri ipsarum  $AI$ ,  $BE$  parallela  $FZ$  (I. 31.).

Aequale itaque est  $AE$  rectangulis  $AZ$ ,  $FE$ ; et est quidem quadratum  $AE$  ex  $AB$ ,  $AZ$  vero rectangulum sub  $BA$ ,  $AF$  contentum, continetur etenim sub  $AA$ ,  $AF$ , aequalis autem  $AI$  rectae  $AB$  (I. Def. 30.);  $FE$  vero rectangulum sub  $AB$ ,  $BF$ , aequalis cum  $BE$  rectae  $AB$ ; rectangulum igitur sub  $BA$ ,  $AF$ , cum rectangulo sub  $AB$ ,  $BF$ , aequale est quadrato ex  $AB$ . Si igitur recta etc

### PROPOSITIO III. (Fig. 137.)

Si recta linea secetur utcumque, rectangulum sub tota et uno segmentorum contentum aequale est rectangulo sub segmentis contento, et quadrato ex praedicto segmento.

*in.* Quidam ipsam Prop. 2. ita enunciant, Campanus, Peleusius, alii. Cf. Pfeiderer. §. 9.

Cor. 3. Si recta secetur in partes quotcumque, quadratum totius aequale est rectangulis simul, quae sub singulis partibus ad singulas applicatis continentur. Cf. Commandinus, Clavius, Pfeiderer. §. 10.

### PROPOSITIO III.

Obs. 1. Haec quoque propositio specialem exhibet II. Prop. 1. casum, quo nempe proposita recta in duas tantum partes secatur, parallelogrammorumque rectangulorum, ad totum et ad eius segmenta applicatorum, latus alterum est unum eorum segmentorum. Eodem redeunt altera demonstratio

Εὐθεία γὰρ ἡ  $AB$  τεμηθεῖα ὡς ἐτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$ · λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον τὸ  $\Gamma AEB$ , καὶ διήχθω ἡ  $EA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποῦρα τῶν  $GA$ ,  $BE$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $AZ$ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ  $AE$  τοῖς  $AA$ ,  $GE$ · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $AE$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BE$ , ἴση δὲ ἡ  $BE$  τῇ  $B\Gamma$ · τὸ δὲ  $AA$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  ἴση γὰρ ἡ  $AG$  τῇ  $GB$ · τὸ δὲ  $AB$  τὸ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεία καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τεμηθῇ ὡς ἐτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Campani, Peletarii, Clavii; prior Scheubelii; sola Tacqueti, Barrovii. Cf. Pfeiderer. §. 11.

Obs. 2. Caeterum propositiones 2. 3. quamvis primariam comprehensae, nominatim sine dubio enunciatae fuerunt, ut immediate essent ad usus occurrentes paratae, nec, quod Austin., qui in ea re Ramum (Schol. Mathem. Francof. 1599. l. X. p. 89.) praecessorem habet, asserit (Examinat. of the first six Books of Euclids Elements Oxf. 1753. p. 36.) vitiosae quadrati ab rectangulo distinctioni aut, quod Ramus ait, in-

Recta enim  $AB$  secetur utcumque in  $F$ ; dico rectangulum sub  $AB$ ,  $BF$  contentum aequale esse rectangulo sub  $AF$ ,  $FB$  contento, cum quadrato ex  $BF$ .

Describatur enim ex  $FB$  quadratum  $FJEB$  (I. 46.), et producat  $EJ$  in  $Z$ , et per  $A$  alterutri ipsarum  $FJ$ ,  $BE$  parallela ducatur  $AZ$  (I. 31.).

Aequale igitur est rectangulum  $AE$  ipsis  $AF$ ,  $FE$ ; et est quidem rectangulum  $AE$  sub  $AB$ ,  $BF$  contentum, circumscribitur etenim sub  $AB$ ,  $BE$ , aequalis autem  $BF$  rectae  $BF$  (I. Def. 30.);  $AF$  vero rectangulum sub  $AF$ ,  $FB$ , aequalis enim  $AF$  rectae  $FB$ ;  $AB$  autem ex quadratum ex  $FB$ ; rectangulum igitur sub  $AB$ ,  $BF$  contentum aequale est rectangulo sub  $AF$ ,  $FB$  contento, cum quadrato ex  $FB$ . Si igitur recta etc.

#### PROPOSITIO IV. (Fig. 138.)

Si recta linea secetur utcumque, quadratum totius aequale est quadratis segmentorum et rectangulo bis sub segmentis contento.

scitiae logicae originem debent. Vid. I. Def. 30. I. 31. II. 1. Cf. Pfeiderer. §. 12.

#### PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Ex aliis huius propositionis demonstrationibus sequens maxime notari meretur, quam habent Campanus, Peletarius, Clavius, Tacquet, Barrov., Scheubel., in qua tertia bis repetitur. Nempe  $AB^2 = AZ + FB$  (II. 2.) et tam  $AZ =$

Ενθαίτα γὰρ γραμμὴ ἡ  $AB$  τετραγώνω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$  λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνον το  $AAB$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $BA$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Gamma$  ὁποῖοις τῶν  $AA$ ,  $EB$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $GHZ$ , διὰ δὲ τοῦ  $H$  ὁποῖοις τῶν  $AB$ ,  $AE$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $OK$ .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ  $GZ$  τῇ  $AD$ , καὶ εἰ: αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ  $BA$ , ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $GHB$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $AAB$ . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $AAB$  τῇ ὑπὸ  $ABA$  ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ  $BA$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $GHB$  ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ  $HBF$  ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $BF$  πλευρὰ τῇ  $GH$  ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ μὲν  $GB$  τῇ  $HK$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ  $GH$  τῇ  $BK$ · καὶ ἡ  $HK$  ἄρα τῇ  $KB$  ἐστὶν ἴση· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $GHBK$ . Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ  $GH$  τῇ  $BK$ , καὶ εἰς αὐτὰς ἐπίπεσεν ἡ  $GB$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $KBF$ ,  $BGH$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $KBF$  ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $BGH$ . Ὡστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ  $GHK$ ,  $HKB$  ὀρθαὶ εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $GHBK$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον· τετραγώνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $GB$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  $ΘZ$  τετραγώνον ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $ΘH$ , τοῦτ' ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $AG$ · τὰ ἄρα  $ΘZ$ ,  $GK$  τετραγώνω ἀπὸ τῶν  $AG$ .

$AG \times GB + AG^2$  (II. 3.) quam  $GE = AG \times GB + GB^2$  (II. 3.) unde  $AB^2 = AG^2 + 2AG \times GB + GB^2$ . Cf. Pfeleiderer. §. 17.

Obs. 2. Corollarium apud Euclidem huic propositioni



Recta enim linea  $AB$  secetur utcumque in  $F$ ; dico quadratum ex  $AB$  aequale esse quadratis ex  $AF$ ,  $FB$  et rectangulo bis sub  $AF$ ,  $FB$  contento.

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $AIEB$  (I. 46.), et iungatur  $RA$ , et per  $F$  quidem alterutri ipsarum  $AI$ ,  $EB$  parallela ducatur  $FHZ$  (I. 31.); per  $H$  vero alterutri ipsarum  $AB$ ,  $AE$  parallela ducatur  $ΘK$  (I. 31.).

Et quoniam parallela est  $FZ$  rectae  $AI$ , et in ipsa incidit  $BA$  exterior angulus  $FHB$  aequalis est interiori et opposito  $AIB$  (I. 29.). Sed  $AIB$  angulo  $ABJ$  est aequalis (I. 5.), quoniam et latus  $BA$  lateri  $AI$  est aequale; et angulus  $FHB$  igitur angulo  $HBI$  est aequalis (I. Ax. 1.); quare et latus  $BF$  lateri  $FI$  est aequale (I. 6.). Sed  $FB$  quidem rectae  $HK$  est aequalis (I. 31.),  $FH$  vero rectae  $BK$  (I. 31.) et  $HK$  igitur ipsi  $KB$  est aequalis (I. Ax. 1.); aequilaterum igitur est  $FHKB$ . Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est  $FH$  rectae  $BK$ , et in ipsas incidit  $FB$ ; anguli igitur  $KBF$ ,  $BTH$  duobus rectis sunt aequales (I. 29.). Rectus autem est  $KBF$ ; rectus igitur et  $BTH$ . Quare et oppositi  $FHK$ ,  $HKB$  recti sunt (I. 34.); rectangulum igitur est  $FHKB$ . Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (I. Def. 30.), et est ex  $FB$ . Ex eadem ratione et  $ΘZ$  quadratum est, et est ex  $ΘH$ , hoc est ex  $AF$  (I. 34.); ipsa igitur

aliacum ex interpolatione ortum putat Austin. p. 57. Illud tamen ob frequentem in demonstrationibus sequentibus applicationem (in sequente statim adhibetur) ab ipso elementorum

$ΓΒ$  εἶναι. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΗ$  τῷ  $ΗΕ$ , καὶ ἐστὶ τὸ  $ΑΗ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ , ἴση γὰρ ἡ  $ΗΓ$  τῇ  $ΓΒ$ · καὶ τὸ  $ΗΕ$  ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ · τὰ ἄρα  $ΑΗ$ ,  $ΗΖ$  ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ . Ἔστι δὲ καὶ τὰ  $ΘΖ$ ,  $ΓΚ$  τετραγώνια ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ · τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ  $ΘΖ$ ,  $ΓΚ$ ,  $ΑΗ$ ,  $ΗΕ$  ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα  $ΘΖ$ ,  $ΓΚ$ ,  $ΑΗ$ ,  $ΗΕ$  ὅλον ἐστὶ τὸ  $ΑΙΕΒ$ , ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΒ$  τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $ΑΒ$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### Κ Α Ι Α Α Α Ω Σ 1).

Λέγω, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς  $ΑΒ$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

1) Editio Basil. et Oxon. pariter ac Patisiensis habent hanc alteram demonstrationem, quam ἄλλως vel ἑτέρω δειξὶν inscribunt. Eadem etiam adiecta est in versionibus Zamberti, Orontii, Finei, Commandini, Boermannii, aliorumque, eamque solam, priore omitta, habent Clavius et Barrow. Peyrardus observat, hanc alteram demonstrationem exarata esse (in codice a, ut videtur) in charta paginat contigua. Caeterum, quum a priore eo tantum discrepet, quod aequalitatem angulorum  $IHB$ ,  $HBI$  inde infert, quia trianguli aequilateri et ad  $A$  rectanguli  $BAI$  angulus ad basin semissis est recti (I. 32. et I. 5.) ideoque trianguli ad  $I$  rectanguli  $BHI$ , tertius angulus  $IHB$  pariter semissis est recti, in quo ad analogiam II. 9. et 10. composita est, jure eam spuria habere videtur Pleidererus l. c. Diss. I. p. 6. §. 16. Ne quid tamen deesse videatur, nolimus eam loco suo movere.

auctore notatum fuisse censeri potest, iudice Pleiderer. §. 18. qui addit, haud generatim, quod Austin. asserat, corollaria

$\theta Z$ ,  $\Gamma K$  quadrata ex  $AF$ ,  $FB$  sunt. Et quoniam aequale est  $AH$  rectangulo  $HE$ , et est rectangulum  $AH$  sub  $AF$ ,  $FB$ , aequalis enim  $HI$  rectae  $FB$ ;  $HE$  igitur aequale rectangulo sub  $AF$ ,  $FB$ ; rectangula igitur  $AH$ ,  $HE$  aequalia sunt rectangulo sub  $AF$ ,  $FB$  bis sumto. Sunt autem et  $\theta Z$ ,  $\Gamma K$  quadrata ex  $AF$ ,  $FB$ ; ergo quatuor  $\theta Z$ ,  $\Gamma K$ ,  $AH$ ,  $HE$  aequalia sunt quadratis ex  $AF$ ,  $FB$  et rectangulo bis contento sub  $AF$ ,  $FB$ . Sed quatuor  $\theta Z$ ,  $\Gamma K$ ,  $AH$ ,  $HE$  totum sunt  $AJEB$ , quod est quadratum ex  $AB$ ; ergo quadratum ex  $AB$  aequale est quadratis ex  $AF$ ,  $FB$  et rectangulo bis contento sub  $AF$ ,  $FB$ . Si igitur recta etc.

## ET ALITER.

Dico quadratum ex  $AB$  aequale esse quadratis ex  $AF$ ,  $FB$  et rectangulo contento bis sub  $AF$ ,  $FB$ .

duplices propositionum demonstrationes conneci in elementis. Ceterum Clavius addit, omnia parallelogramma circa diametrum quadrat, etiam extra quadratum productam, quamvis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem; quadrata esse, dummodo latera eorum lateribus quadrati sint parallela. Praeter illud corollarium addi possunt sequentia.

Cor. 2. Si  $AB$  in  $I$  bifariam secetur, rectangulum  $AI$   $IB$  transibit in quadratum dimidiae lineae  $AB$ . Erit itaque  $AB = 4AI^2$ , vel quadratum cuiuscunque rectae aequale est quadrato eius dimidiae quater sumto (Clavius, Barrov., Bæckerus), vel etiam bis rectangulo sub quadrati latere, et latere dimidio et vice versa. Cf. Whiston. apud Tacquet. Exercer. §. 15.

Cor. 3. Summa quadratorum duarum rectarum  $AF$ ,  $FB$

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ  $BA$  τῇ  $AA$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABA$  τῇ ὑπὸ  $AAB$ · καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, τοῦ  $ABA$  ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ  $ABA$ ,  $AAB$ ,  $BAA$ , δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BAA$ , λοιπὴ ἄρα αἱ ὑπὸ  $ABA$ ,  $AAB$  μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἐκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ  $ABA$ ,  $AAB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BGH$ , ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ  $A$  λοιπῇ ἄρα ἡ ὑπὸ  $GHB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $GHB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $GBH$ · ὥστε καὶ πλεονεκτεῖν  $BG$  τῇ  $GH$  ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν  $GB$  τῇ  $HF$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ  $GH$  τῇ  $BK$ · ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΓΚ$ . Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $ΓΒΚ$  γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΓΚ$ , καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $ΓΙ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ  $ΘΖ$  τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἰσὸν τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ · τὰ ἄρα  $ΓΚ$ ,  $ΘΖ$  τετράγωνα ἴσα ἐστὶν, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΗ$  τῷ  $ΗΕ$ , καὶ ἐστὶ τὸ  $ΑΗ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ , ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ  $ΓΗ$  τῇ  $ΓΙ$  καὶ τὸ  $ΕΗ$  ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ · καὶ ἄρα  $ΑΗ$ ,  $ΗΕ$  ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ . Ἔστι δὲ καὶ τὰ  $ΓΚ$ ,  $ΘΖ$  ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ · τὰ ἄρα  $ΓΚ$ ,  $ΘΖ$ ,  $ΑΗ$ ,  $ΗΕ$  ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ . Ἀλλ'

semper minor est quadrato summae earundem rectarum, dup-  
rectangulo sub ipsis comprehenso. Cf. Pfeiderer. §. 19.

Cor. 4. Quum etiam sit  $AB^2 = Z\Theta + AK + ZK = AG^2 + AB \times BG + AI \times BI = AI^2 + (AB + AI) \times BI$  (II.1.) erit itaq.  
quadratum totius  $AB$ , utcumque in  $I$  divisae, aequale quo-  
drato unius partis  $AI$ , et rectangulo simul, quod sub alte-

Quoniam enim in eadem figura aequalis est  $BA$  rectae  $AA$ , aequalis est et angulus  $ABA$  angulo  $AAB$  (I. 5.); et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), ergo tria guli  $ABA$  tres anguli  $ABA$ ,  $AAB$ ,  $BAA$  duobus rectis aequales sunt. Rectus autem  $BAA$ ; reliqui igitur  $ABA$ ,  $AAB$  uni recto aequales sunt; et sunt aequales (I. 5.); uterque igitur ipsorum  $ABA$ ,  $AAB$  dimidius est recti. Rectus est autem  $BGH$ , aequalis enim est interiori et opposito angulo ad  $A$ ; reliquus igitur  $GHB$  dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est  $GHB$  angulo ipsi  $GBH$ ; quare et latus  $BG$  ipsi  $GH$  est aequale (I. 6.). Sed  $GB$  quidem rectae  $HK$  est aequalis,  $GH$  vero rectae  $BK$  (I. 34.); aequilaterum igitur est  $GK$ . Habet autem et rectum angulum  $GBK$ ; quadratum igitur est  $GK$  (I. 29. et I. Def. 30.), et est ex  $GB$ . Ex eadem ratione et  $\theta Z$  quadratum est, et est aequale quadrato ex  $AG$ ; ergo  $GK$ ,  $\theta Z$  quadrata sunt, et sunt aequalia quadratis ex  $AG$ ,  $GB$ . Et quoniam rectangulum  $AH$  aequale est rectangulo  $HE$  (I. 43.), et est rectangulum  $AH$  sub  $AG$ ,  $GB$ , aequalis est enim  $GH$  rectae  $GB$ ; erit et  $EH$  aequale rectangulo sub  $AG$ ,  $GB$ ; ergo  $AH$ ,  $HE$  aequalia sunt ei, quod bis continetur sub  $AG$ ,  $GB$ . Sunt autem et  $GK$ ,  $\theta Z$  aequalia quadratis ex  $AG$ ,  $GB$ ; ergo  $GK$ ,  $\theta Z$ ,  $AH$ ,  $HE$  aequalia sunt quadratis ex  $AG$ ,  $GB$  et segmento  $GB$  et sub totius  $AB$  ac prioris  $AG$  aggregato constructur, vel (notante Peletario): si duae rectae inaequales fuerint, quadratum maioris  $AB$  simul aequale est quadrato minoris  $AG$ , et rectangulo sub ipsarum summa ( $AB+AG$ ) ac differentia ( $GB=AB-AG$ ); vel duorum quadratorum inaequalium differentia aequalis est rectangulo sub summa et differentia

τὰ  $IK$ ,  $\Theta Z$  καὶ τὰ  $AH$ ,  $HE$  ὅλον ἐστὶ τὸ  $AE$ , ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $AI$ ,  $IB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμοι τετραγώνοι ἐστίν.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίσαι· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ἄλλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομιῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

laterum ipsorum. Cf. Pfeiderer. §§. 20. 21. Immediate hoc corollarium demonstrat, et vicissim ex eo Propositiones IV—VIII. deducit Angelus de Marchettis Euclid. reform. Liburni 1709. Cf. Pfeiderer. §. 22.

Cor. 5. Haec propositio, ut Scheubelius indicat, valet etiam de pluribus segmentis. Nempe, recta  $AB$  divisa in quotlibet segmenta, erit quadratum rectae  $AB$  aequale summae quadratorum omnium segmentorum, additis duplis rectangulis inter duo quaecunque segmenta comprehensis. Cf. Pfeiderer. §. 24.

### Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο V.

Obs. 1. Quum sit  $AA \times AB + GA^2 = GB^2$ , vel  $AA \times AB = GB^2 - GA^2$ , sit autem  $AA = AI + IA = BI + IA$  et  $AB = BI - IA$  etiam ex hac propositione idem consequitur, quod II. 4. Cor. 4 habuimus. Hinc vicissim Prop. 5. ex Prop. 4. Cor. 4. enun-

rectangulo bis contento sub  $AF$ ,  $FB$ . Sed  $FK$ ,  $\theta Z$  et  $AH$ ,  $HE$  sunt totum  $AE$ , quod est quadratum ex  $AB$ ; ergo quadratum ex  $AB$  aequale est quadratis ex  $AF$ ,  $FB$  et rectangulo bis sub  $AF$ ,  $FB$  contento. (quod oportebat ostendere.)

## COROLLARIUM.

Ex his evidens est, in quadratis spatiis, parallelogramma circa diametrum quadrata esse,

## PROPOSITIO V. (Fig. 139.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, rectangulum sub inaequalibus totius segmentis contentum cum quadrato rectae inter puncta sectionum aequale est quadrato ex dimidia.

consequitur. Cf. Pfeiderer. §§. 26. 27. Gilbert. l. c. Aliam porro huius propositionis demonstrationem ope II. 4. et II. 3. 1. 36. et II. 1. habent Maurolycus, Tacquet., Barrov. Cf. Pfeiderer. §. 28. et aliam adhuc ope II. 1., vel etiam II. 4. Cor. 5. et II. 3. Gregor. a St. Vincent. (Opus Geometr. quadratur. circuli et sectionum Coni Antverp. 1647. p. 37.) Cf. Pfeiderer. §§. 42—44.

Oba 2. Si  $AA$  consideretur ut recta secta utcumque in  $F$ , ob  $FB=AF$ , et  $AB=FB-FA=AF-FA$ , l. II. Prop. 5. nam ita enuntiari poterit: Si recta linea secetur utcumque rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris, aequale est quadrato partis maioris. (Marin. Ghetaldi de resolutione et compositione mathematic. libr. V. Romae 1630. p. 2. sq.) Cf. Pfeiderer. §. 29.

Cor. 1. Si recat  $AB$  in aequalia  $AF$ ,  $FB$ , et inaequalia  $AA$ ,  $AB$  secetur, rectangulum sub segmentis inaequalibus minus est qua-

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  τετμησθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ  $\Delta$ . λέγω, οτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $GA$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον τὸ  $GEZB$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $BE$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Delta$  ὁποῦτα τῶν  $GE$ ,  $BZ$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $\Delta H$ , διὰ δὲ τοῦ  $\Theta$  ὁποῦτα τῶν  $AB$ ,  $EZ$  παράλληλος ᾗχθω  $KM$ , καὶ πάλιν διὰ τοῦ  $A$  ὁποῦτα τῶν  $GA$ ,  $BM$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $AK$ .

drato dimidia rectae (Whiston, II. 5. Cor. 1. in Tacquet. Elem. Euclid. Geom. Rom. 1745.), vel, ut Pappus rem exprimit (Lem. XIII. ad libr. Apollonii de sectione rationis et spatii Oxon. 1796. p. XLIX.) rectangulum  $AG \times GB$  (id ipsum enim est quadratum dimidia  $BF$ ) maius est quovis alio, segmentis quibuslibet alie eiusdem rectae contento. Cf. de Maxim. et Minim. geom. divinatio in quint. Conicor. Apollonii auct. Vincent. Viviani Florent. 1659. p. 103. sq. Thom. Simpson. Essai sur les Max. et Min. Theor. I. Elem. de Géom. Paris. 1755. p. 173. sq. Cf. Pfeiderer. §. 33.

Cor. 2. Quum tam quadrati ex  $BF$ , quam rectanguli  $AG \times AB$  perimeter sit  $= 2AB$ , Prop. 5. simul evincitur, parallelogrammum rectangulorum isoperimetrorum maximum esse quadratum (Thom. Simpson. l. c. p. 174. l'Huilier de relatione mutua capacitatis et terminorum figurae Varsov. 1782. p. 28. Pfeiderer. §. 34. Gilbert. l. c. p. 281.)

Cor. 3. Et, cum ob altitudinem maiorem (I. 19.) parallelogrammum rectangulum maius sit quocunque parallelogrammo obliquangulo isoperimetro super eadem basi; isoperimetrorum parallelogrammorum quorumlibet maximum erit quadratum (De locis solidis secunda divinatio geometr. in 5. libros Aristaei, auct. Vinc. Viviani Florent. 1701. p. 57 sq. l'Huilier l. c. p. 6. Pfeiderer. §. 35.).



Recta enim aliqua  $AB$  secta sit in aequalia quidem ad  $\Gamma$ , in inaequalia vero ad  $\Delta$ ; dico rectangulum sub  $AA$ ,  $AB$  contentum cum quadrato ex  $\Gamma\Delta$  aequale esse quadrato ex  $\Gamma B$ .

Describatur enim ex  $\Gamma B$  quadratum  $\Gamma EZB$  (I. 46.), et iungatur  $BE$ ; et per  $\Delta$  quidem alterutri ipsarum  $\Gamma E$ ,  $BZ$  parallela ducatur  $\Delta H$  (I. 31.), per  $\Theta$  vero alterutri ipsarum  $AB$ ,  $EZ$  parallela ducatur  $KM$  (I. 31.), et rursus per  $A$  alterutri ipsarum  $\Gamma A$ ,  $\Theta M$  parallela ducatur  $AK$  (I. 31.).

Cor. 4. Ac quidem, cum sit  $\Gamma A = AA - \Delta\Gamma = AA - BF = BF - BA$ , excessus, quo parallelogrammum rectangulum aequilum laterum  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma B$  superat rectangulum quorumvis segmentorum inaequalium  $AA$ ,  $AB$  eiusdem rectae  $AB$  (Cor. 1.); tum, quo quadratum superat quodcumque rectangulum isoperimetrum, non aequilaterum (Cor. 2.), aequalis est quadrato, cuius latus  $\Gamma A$  est differentia laterum singulorum quadrati et rectanguli h. e. excessus longitudinis rectanguli super latus quadrati, vel lateris quadrati super latitudinem rectanguli. Et, quam si (Fig. 140.) ex puncto  $A$  abscindatur  $AI = BA$ , sit recta  $AI$  in  $F$  bifariam secta, adeoque  $\Gamma A = \frac{AI - BA}{2}$ , erit etiam  $\Delta\Gamma - AA \times AB = \Gamma A^2$  i. e. = quadrato, cuius latus est secundae differentiae laterum contiguorum rectanguli. Cf. l'Huilier l. c. Pfeiderer. §. 36.)

Cor. 5. Secetur  $AB$  (Fig. 41. a et b) in alia inaequalia  $AI$ ,  $IB$  in puncto  $I$  remotiore a puncto bisectionis, quam est  $\Delta$ , ita ut sit  $\Gamma I > \Delta A$ : erit  $AI \times IB + \Gamma I^2 = BF^2 = AA \times AB + \Gamma A^2$  (II. 5.). At  $\Gamma I^2 > \Gamma A^2$  (I. Cor. 46.), itaque rectangulum  $AI \times IB < AA \times AB$ , quod est Pappi l. c. Lemm. XIV. Idem tradunt Barrov., Viviani (l. c. Cor. 1.) Whiston., Baermann., Pfeiderer. §§. 37. 38.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $\Gamma\Theta$  παραπλήρωμα τῷ  $\Theta Z$  παραπλήρωματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\Delta M$  ὅλον ἄρα τὸ  $\Gamma M$  ὅλῳ τῷ  $AZ$  ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ  $\Gamma M$  τῷ  $AA$  ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ  $AG$  τῇ  $GB$  ἐστίν ἴση καὶ τὸ  $AM$  ἄρ' αὖ τῷ  $AZ$  ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\Gamma\Theta$  ὅλον ἄρα τὸ  $A\Theta$  τῷ  $N\Xi O$  γνῶμονι <sup>1)</sup> ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν  $A\Theta$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AA, AB$  ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ  $A\Theta$  τῇ  $AB$  καὶ ὁ  $N\Xi O$  ἄρα γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ  $AA, AB$ . Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $AH$ , ὃ ἐστίν ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς  $\Gamma A$  ὃ ἄρα  $N\Xi O$  γνῶμων καὶ τὸ  $AH$  ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AA, AB$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς  $\Gamma A$  τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ  $N\Xi O$  γνῶμων καὶ τὸ  $AH$  ὅλον

1) Ita edd. Paris. ex cod. a. Editiones Basi<sup>l</sup>. et Oxon. habent: ὅλον ἄρα τὸ  $A\Theta$  τῷ  $AZ$  καὶ  $AA$  ἴσον ἐστὶ, et infra post ἴση γὰρ ἡ  $A\Theta$  τῇ  $AB$  addunt: τὸ δὲ  $ZA, AA$  ἐστὶν ὁ  $N\Xi O$  γνῶμων, quod eodem redit.

Cor. 6. Et quum etiam perimeter rectanguli  $AP \times PB$  maneat  $= 2AB$ , patet, isoperimetrorum parallelogrammorum rectangulorum non aequilaterorum illud maius esse, cuius latera contigua, seu longitudo et latitudo minus a se invicem differant, Cf. Pfeleiderer. §. 40.

Cor. 7. Quum, abscissa  $AP = BP$ , sit  $PH$  differentia segmentorum  $AP, BP$ , semidifferentia  $PH = GP$ , adeoque etiam recta  $PH$  secta sit in aequalia in  $I$ , et inaequalia in  $A$ , erit  $PH^2 = PA \times AP + GA^2$  (II. 5.). Hinc (Cor. 5.)  $AP \times PB + PA \times AP + GA^2 = AA \times AB + GA^2$  i. e.  $AP \times PB + PA \times AP = AA \times AB$ . At (Fig. 141. a.)  $PA = PG + GA = \frac{AP - PB}{2} + \frac{AA - BA}{2}$  et (Fig. 141. b)  $PA = PG - GA = \frac{AP - PB}{2} - \left( \frac{AA - BA}{2} \right)$  pariterque (Fig. 141. a)  $AP = PH - GA = \frac{AP - PB}{2} - \left( \frac{AA - BA}{2} \right)$

Et quoniam aequale est complementum  $\Gamma\Theta$  complemento  $\Theta Z$  (I. 43.), commune addatur  $AM$ ; totum igitur  $FM$  toti  $AZ$  aequale est. Sed  $FM$  ipsi  $AA$  aequale est, quia et  $AF$  ipsi  $FB$  est aequalis (I. 36.); et  $AA$  igitur ipsi  $AZ$  aequale est. Commune addatur  $\Gamma\Theta$ ; totum igitur  $A\Theta$  ipsi  $N\Xi O$  gnomoni aequale est. Sed  $A\Theta$  quidem est rectangulum sub  $AA, AB$ , aequalis enim  $A\Theta$  ipsi  $AB$ , et  $N\Xi O$  igitur gnomon aequalis est rectangulo sub  $AA, AB$ . Commune addatur  $AH$ , quod est aequale quadrato ex  $A$  (II. Cor. 4.); ergo  $N\Xi O$  gnomon et  $AH$  aequalis sunt rectangulo sub  $AA, AB$  contento et quadrato ex  $A$ . Sed  $N\Xi O$  gnomon et  $AH$  sunt totum qua-

(Fig. 141. b)  $AM = FP + FI = \Pi + A = \frac{AP - PB}{2} + \frac{AA + BA}{2}$

semper itaque spatium, quo rectangulum sub segmentis  $AA, AB$ , in quae recta  $AB$  dividitur puncto  $A$  propiore puncto bisectionis  $F$ , excedit rectangulum sub segmentis  $AM, BH$ , in quae eadem recta  $AB$  dividitur puncto  $\Pi$  remotiore a puncto bisectionis (Cor. 6.), seu, quo rectangulum  $AA \times AB$ , cuius latera minus inter se differunt, excedit alterum isoperimetrum  $AM \times HB$ , cuius laterum differentia maior est, aequatur rectangulo  $PA \times AM$  sub summa ac differentia semidifferentiarum laterum contiguum utriusque rectanguli. Cf. *Eucler.* §. 41.

Cor. 8. Et quum (II. 4. Cor. 3.) quadratum summae earum semper maius sit summa quadratorum earum, tum differentia aequalis sit duplo rectangulo inter istas rectas comprehenso, fiet haec differentia tanto minor i. e. summa quadratorum duarum rectarum eo propius accedet ad quadratum summae earum, adeoque eo (minor) fiet, quo (maius) est rectangulum inter istas rectas comprehensum. Itaque summa

ἔστι τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ·  
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον  
μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ  
τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ  
εἰς αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης συν-  
τῇ προσκειμένη καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον  
ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου  
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεimenῆς ἔκ τε τῆς ἡμι-  
σειας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγρα-  
φέντι τετραγώνῳ.

duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium minima erit, si latera ipsorum fuerint mutuo equalia. (Cor. 1.) Whiston l. c. p. 51. De eadem hac propositione quae est Euclidis Lemm. post X. 42. adhuc infra ad II. 9 Cor. 1. sermo erit. Cf. Gilbert l. c. p. 281.

Cor. 9. Si duae rectae aequales ita dividantur in partes inaequales, ut rectangulum sub partibus unius aequale sit rectangulo sub partibus alterius, erunt unius partes partibus alterius respective aequales, maior maiori, et minor minori. Cf. Whiston. et Gilbert. l. c.

Cor. 10. Quum non tantum, ut Cor. 5. vidimus,  $ΓΔ = \frac{ΑΔ - ΒΔ}{2}$ , verum etiam  $ΒΓ = \frac{ΑΔ + ΒΔ}{2}$ ; II. 5. etiam in

exprimi potest:  $\left(\frac{ΑΔ + ΒΔ}{2}\right)^2 = ΑΔ \times ΔΒ + \left(\frac{ΑΔ - ΒΔ}{2}\right)^2$  id est quadratum semisummae duarum inaequalium rectarum aequale est rectangulo sub ipsis his rectis, una cum quadrato similitudinis differentiae earum; vel: excessus quadrati semisummae duarum inaequalium rectarum super quadratum semidifferentiae earum aequalis est rectangulo sub ipsis his rectis. Cf. Pfleiderer.

directum  $FEZB$ , quod est quadratum ex  $FB$ ; rectan-  
gulum igitur sub  $AS$ ,  $AB$  contentum cum quadrato  
ex  $FS$  aequale est quadrato ex  $FB$ . Si igitur recta etc.

### PROPOSITIO VI. (Fig. 142.)

Si recta linea secetur bifariam, adiciatur autem  
aliqua ipsi recta in directum; rectangulum sub tota  
cum adiecta, et sub adiecta contentum cum quadrato  
ex dimidia aequale est quadrato compositae ex dimidia  
et adiecta tanquam una linea.

§§. 31. 32. Simul patet, ut hoc obiter dicamus, duarum re-  
ctarum inaequalium  $AS$ ,  $BS$  maiorem  $AS$  aequalem esse  $AT$   
+  $FS$  vel  $BT$  +  $FS$  i. e. semisummae earum simul cum semi-  
differentia, minorem  $BS$  contra  $BT$  -  $FS$  h. e. excessui semi-  
summae super semidifferentiam. Cf. Pflaiderer. §. 30.

### PROPOSITIO VI.

Obs. Alias propositionis huius demonstrationes habent  
Angelus de Marchettis, Clavius, Barrov. et Tacquet. e II. 4.  
Cor. 4. vel e II. 4. et II. 3. vel e II. 5. vel e II. 1. et II. 2.  
petitis. Cf. Pflaiderer. §§. 46. 48. 49. 57. 58. Ea maxime,  
qua, Clavio referente, Mauritius Brescius, regius mathem. di-  
scipulus, in Academ. Parisiensi professor, utebatur, simplicitate  
sua se commendat. Ita nimirum ille: Sumatur (Tab. VI. fig.  
142.)  $AI = BA$ , erit  $BI = AS$  (I. Ax. 2), adeoque  $IB \times BA =$   
 $AS \times IB$ , et ob  $IA = IB$ , etiam  $II = IS$ , unde (II. 5.)  $IB \times$   
 $2S + BI^2 = IS^2$ , adeoque  $AS \times IB + BI^2 = IS^2$ . Cf. Pflai-  
derer. §. 49. Caeterum, si recta  $AS$  ut in puncto  $F$  utrinque  
recta spectetur, ob  $FB = AI$ , et  $BS = IS - IB = IS - AI$ , pa-  
riter emergit propositio, quam ad II. 5. Obs. 2. vidimus: Si

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον, προσκείσθω δὲ τις ἀντὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ εὐθείας ἡ  $BD$  λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς  $GA$  τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς  $GA$  τετραγώνον τὸ  $GEZD$ , καὶ ἐπεξέχθω ἡ  $AE$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $B$  σημεῖον ὁποῦντα τῶν  $GE$ ,  $AZ$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $BH$  διὰ δὲ τοῦ  $\Theta$  σημεῖον ὁποῦντα τῶν  $AD$ ,  $EZ$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $KM$  καὶ εἰ διὰ τοῦ  $A$  ὁποῦντα τῶν  $GA$ ,  $AM$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $AK$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ  $GB$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $AA$  τῷ  $GB$ . Ἀλλὰ καὶ τὸ  $GB$  τῷ  $GB$  ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ  $AA$  ἄρα τῷ  $GB$  ἴστιν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $GM$  ὅλον ἄρα τὸ  $AM$  τῷ  $NEO$  γνῶμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ  $AM$  ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$ , ἴση γάρ ἐστιν ἡ  $AM$  τῇ  $AB$  καὶ ὁ  $NEO$  ἄρα γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$  περι-

recta linea secetur utcumque, rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris aequale est quadrato partis maioris. Cf. Ghetaldus, Herigonius in cursu Mathem. T. I. Paris. 1644. p. 78. sqq. Pfeiderer. §. 50.

Cor. 1. Quum sit  $AA=GA+AG=GA+BG$ ,  $BA=GA-BG$ , etiam ex hac propositione idem prodit, quod ad II. 5. Obs. 1. et II. 4. Cor. 4. dictum fuit, nempe  $GA^2-BG^2=(GA+GB)(GA-GB)$ . Cf. Pfeiderer. §. 51.

Cor. 2. Quum sit differentia rectarum  $AD$ ,  $GA=AG$  vel  $BG$ , pariterque differentia rectarum  $GA$ ,  $BA=BG$ , vel, ut aliter idem dicamus, quum rectae  $AD$ ,  $GA$ ,  $BA$  sint continue arithmetice proportionales, II. Prop. 6., haec quoque continetur (ut Isaacus Monachus: Schol. in Euclid. Elem. geom. sex priores libros Argentor. 1579. in Schol. ad II. 6., quod et apud Commandinum (fol. 31. b.) exstat, pariterque

Lecta enim aliqua  $AB$  secetur bifariam ad punctum  $\Gamma$ , adiciatur autem ipsi aliqua recta  $BA$  in directum; erit rectangulum sub  $AA$ ,  $AB$  contentum cum quadrato ex  $\Gamma A$  aequale esse quadrato ex  $\Gamma A$ .

Describatur enim ex  $\Gamma A$  quadratum  $\Gamma EZA$  (I. 46.), et iungatur  $AE$ , et per punctum quidem  $B$  alterutri ipsarum  $TE$ ,  $AZ$  parallela ducatur  $BH$  (I. 31.); per  $\Theta$  vero punctum alterutri ipsarum  $AA$ ,  $EZ$  parallela ducatur  $KM$  (I. 31.); et adhuc per  $A$  alterutri ipsarum  $\Gamma A$ ,  $AM$  parallela ducatur  $AK$  (I. 31.).

Quoniam igitur aequalis est  $AT$  rectae  $\Gamma B$ , aequale est et  $AA$  ipsi  $\Gamma\Theta$  (I. 36.). Sed  $\Gamma\Theta$  ipsi  $\Theta Z$  aequale est (I. 43.); et  $AA$  igitur ipsi  $\Theta Z$  est aequale. Commune addatur  $\Gamma M$ ; totum igitur  $AM$  ipsi  $N\Theta O$  gnomoni est aequale. Sed  $AM$  est rectangulum sub  $AA$ ,  $AB$ , aequalis enim est  $AM$  ipsi  $AB$  (II. Cor. 4.); et igitur gnomon  $N\Theta O$  aequalis est rectangulo sub

Clarius et alii observant): Si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadratum mediae aequale est rectangulo sub extremis, cum quadrato differentiae utriusque extremorum ac mediae. Quod idem etiam ex II. 5. consequitur, in qua (vid. Fig. ad II. 5.)  $AA$ ,  $BI=FA$ , et  $BA$  pariter sunt continue arithmetice proportionales. Cf. Pfeiderer. §. 55. 53.

Cor. 3. Quum sit  $FA = \frac{AA+AI}{2} = \frac{AA+BA}{2}$ , et  $\Gamma B =$

$\frac{AA-BI}{2}$ , etiam ex hac propositione idem consequetur, quod

II. 5. Cor. 10. nempe esse  $AA \times AB + \left(\frac{AA-BI}{2}\right)^2 =$

$\left(\frac{AA+BA}{2}\right)^2$ , quae propositio terminis tantum differt ab ea,

quam Cor. praecedente habuimus. Cf. Pfeiderer. §. 55. 56.

χομένην ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $\Lambda\text{H}$ , ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\text{B}$  τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\text{B}$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ  $\Xi\text{O}$  γνώμῳ καὶ τῷ  $\Lambda\text{H}$ . Ἀλλὰ ὁ  $\text{NEO}$  γνώμων καὶ τὸ  $\Lambda\text{H}$  ὅλον ἐστὶ τὸ  $\Gamma\text{EZA}$  τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\text{B}$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἐτιγχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἐνὸς τῶν τμημάτων, τὸ συναμφοτέρω τετράγωνον, ἴσα ἐσὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Cor. 4. Caeterum facile patet nexius propositionum 5. et 6. I. II., quae eo tantum differunt, quod in Prop. 5. punctum  $\Delta$  in ipsa  $\text{AB}$ , in Prop. 6. autem in ea producta sumitur, unde etiam uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Pflaiderer. §. 59.

Cor. 5. Si punctum  $\Pi$  sumatur (Fig. 144.) remotius a  $\Gamma$ , quam  $\Delta$ , in rectangulis  $\text{AP} \times \text{PB}$ ,  $\text{AD} \times \text{DB}$  duo latera contigua eandem inter se differentiam  $= \text{AB}$  habebunt, eritque  $\text{AP} \times \text{PB} > \text{AD} \times \text{DB}$ , sumtoque  $\text{AP} = \text{BP}$ , erit  $\text{AD} \times \text{DB} + \text{PD} \times \text{AP} = \text{AP} \times \text{PB}$ , quod simili ratione ostenditur et evolvitur ac II. 5. Cor. 7. (Pflaiderer. §. 166.) cf. II. 10. Cor. 1.

Cor. 6. Conversae propositionum 5. et 6., quae sunt Pappi in librum III. conicor. Apollonii Lemmata 9. 11. 10. (Collect. Mathem. fol. 274. b. sqq.) vel 8. 7. 9. Apollonii conicor. libr. octo opera Edm. Halleyi Oxon. 1710. P. I. p. 155. pariter valent. Nempe 1) si (Fig. 140.) punctum  $\Delta$  in



$AA$ ,  $AB$  contento. Commune addatur  $AH$ , quod ex aequale quadrato ex  $FB$ ; rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $AB$  contentum cum quadrato ex  $FB$  aequale est gnomoni  $NEO$  et ipsi  $AH$ . Sed gnomon  $NEO$  et  $AH$  sunt totum quadratum  $FEZA$ , quod quidem fit ex  $FA$ ; ergo rectangulum sub  $AA$ ,  $AB$  contentum cum quadrato ex  $FB$  aequale est quadrato ex  $FA$ . Si igitur recta etc.

### PROPOSITIO VII. (Fig. 145.)

Si recta linea secetur utcumque, quadrata totius et unius e segmentis simul sumta aequalia sunt rectangulo bis sub-tota et dicto segmento contento, et quadrato reliqui segmenti.

recta  $AB$  situm sit, sumtumque sit aliud punctum inter  $A$  et  $B$ , sitque a)  $AA \times AB + FA^2 = FA^2$ , erit  $AF = FB$ . Nam, quia ex hypot. sit  $FA^2 = AA \times AB + FA^2$ , erit  $FA^2 > FA^2$ , adeoque (I. Cor. 46.)  $FA > FA$ . Unde ex  $FA$  abscindi poterit (I. 5.)  $FI = FA$ , eritque (II. 6.)  $AA \times AI + FI^2 = FA^2$ , vel  $AA \times AI + FA^2 = FA^2 = AA \times AB + FA^2$ , adeoque  $AA \times AI = AA \times AB$ , et, ob altitudinem communem  $AA$  (I. Conv. 36.)  $AI = AB$ , adeoque ob  $FI = FA$  (hyp.)  $AI + FI = AB + FA$  i. e.  $AF = FB$ . Pariter, si sit b)  $AA \times AB + FA^2 = IB^2$ , quo casu sumere non licet, esse  $AF > FA$ , erit  $FB^2 = FA^2 + (FB + FA) \times AB$  (II. 4. Cor. 4.) adeoque  $AA \times AB + FA^2 = FA^2 + (FB + FA) \times AB$ , vel  $AA \times AB = (FB + FA) \times AB$ , adeoque ob altitudinem communem  $AB$  (I. Conv. 36.)  $AA = FB + FA$ , vel, demta communi  $FA$ , erit  $AF = FB$ . Eadem ratione, si 2) (Fig. 143.) punctum  $A$  in recta  $AB$  productum sit, sitque a)  $AA \times AB + FA^2 = FA^2$ , erit  $FA < FA$ , unde, sumta ex parte puncti  $A$ ,  $FI = FA$ , erit  $A$  in ipso

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἐτύχε κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημείον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  τετραγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιχόμενῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Gamma A$  τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $AD\epsilon B$ · καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $AH$  τῷ  $HE$ , κοινὸν προσ-  
κείσθω τὸ  $\Gamma Z$ · ὅλον ἄρα τὸ  $AZ$  ὅλῳ τῷ  $GE$  ἴσον  
ἐστὶ· τὰ ἄρα  $AZ$ ,  $GE$  διπλάσια ἐστὶ τοῦ  $AZ$ .  
Ἀλλὰ τὰ  $AZ$ ,  $GE$  ὁ  $KAM$  ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ  $\Gamma Z$   
τετράγωνον· ὁ  $K\Lambda M$  ἄρα γνώμων καὶ τὸ  $\Gamma Z$  δι-  
πλάσια ἐστὶ τοῦ  $AZ$ . Ἔστι δὲ τοῦ  $AZ$  διπλάσιον  
καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , ἴση γὰρ ἡ  $BZ$  τῇ

recta  $\Gamma I$ , adeoque ex II. 5.  $AA \times AI + I A q = \Gamma I q = \Gamma A q =$   
 $AA \times AB + \Gamma A q$ , unde  $AA \times AI = AA \times AB$ , et ob altitudi-  
nem communem  $AA$  (I. Conv. 36.)  $AI = AB$ , adeoque  $\Gamma I =$   
 $AI = \Gamma A - AB$  i. e.  $\Gamma I = \Gamma B$ . Pariter, si b) sit  $AD \times AB +$   
 $\Gamma B q = \Gamma A q$ , quo casu sumere non licet; esse  $\Gamma A < \Gamma A$ , erit  
 $\Gamma A q = \Gamma B q + (\Gamma A + \Gamma B) \times AB$  (II. 4. Cor. 4.), adeoque  $AD$   
 $\times AB + \Gamma B q = \Gamma B q + (\Gamma A + \Gamma B) \times AB$ , vel  $AD \times AB = (\Gamma A +$   
 $AB) \times AB$ , vel, ob altitudinem  $AB$  communem,  $AD = \Gamma A + AB$   
(I. Conv. 36.), vel, demta communi  $\Gamma A$ ,  $\Gamma I = \Gamma B$ . Cf.  
Pfleiderer. I. c. §. 69. et §. 191. Conf. quae infra II. ad 10.  
Obs. 8. dicuntur.

## PROPOSITIO VII.

Obs. Huius propositionis haud inelegans est sequens  
demonstratio, quam Peletarius Euclideae subiungit, ope figu-  
rae, in qua omnes propositionis particulae apparent. Eandem  
demonstrationem etiam tradunt Fournier. (Euclid. Elem.  
Libri VI. Paris. 1654. Coëtsius (Euclid. Elem. L. VI. Amst.  
1705.) Whiston. Pfleiderer §. 81. Caeteris nempe, ut in  
Euclidea constructione factis, describatur (Fig. 146.) super

Recta enim aliqua  $AB$  secta sit utcumque in puncto  $\Gamma$ ; dico quadrata ex  $AB$ ,  $B\Gamma$  aequalia esse rectangulo his sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  contento et quadrato ex  $\Gamma A$ .

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $AAEB$  (I. 46.); et construaturs figura.

Quoniam igitur aequale est  $AH$  ipsi  $HE$  (I. 43.), commune addatur  $\Gamma Z$ ; totum igitur  $AZ$  toti  $FE$  aequale est (Ax. 2.); ergo  $AZ$ ,  $FE$  dupla sunt ipsius  $AZ$ . Sed  $AZ$ ,  $FE$  sunt gnomon  $KAM$  et quadratum  $\Gamma Z$ ;  $KAM$  igitur gnomon et  $\Gamma Z$  dupla sunt ipsius  $AZ$ . Est autem ipsius  $AZ$  duplum et rectangulum his contentum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$ , aequalis enim

est quadratum  $ENON$  (I. 46.). Erunt itaque  $AB^2 + B\Gamma^2 = AB + EN = AZ + ZH + N\Theta$ . Sed ob  $AH = HE$  (I. 43.) et  $HE = EN$ , est  $AZ = ZH$ : ergo  $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AZ + N\Theta = 2$  rectang.  $AB \times B\Gamma + A\Gamma^2$ . Aliam adhuc demonstrationem habet Scheubelius, Clavius, Tacquet., Barrov., Viviani. (de locis solidis L. II. Prop. 65. p. 29. sq.) Pfleiderer. §. 82. et II. propositionibus 3. et 4. deductam. Ex Obs. 1. ad II. 3. nostram propositionem infert Angelus de Marchettis, Pfleiderer §. 85. Caeterum haec propositio aliter adhuc efferripotest. Nempe, quum sit  $A\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma = AB^2 + B\Gamma^2$ , vel  $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \times B\Gamma$ , et  $A\Gamma = AB - B\Gamma$ , erit  $(AB - B\Gamma)^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \times B\Gamma$  i. e. quadratum differentiae duarum rectarum inaequalium aequale est summae quadratorum ipsorum, demto duplo rectangulo sub ipsis contento. Cf. Pfleiderer. §. 86. et qui ab ipso citantur, Barrov. Whiston., Baermann. alique. Vel, si recta  $AB$  producaturs, donec sit  $BX = B\Gamma$ , erit recta  $AX$  in duas partes inaequales  $AB$ ,  $BX$  secta, quarum differentia partium  $= AB - BX = AB - B\Gamma$ , adeoque, si recta linea in duas partes inaequales secetur; quadratum differentiae partium aequale est quadratis

$BΓ$ . ὁ ἄρα  $KΛΜ$  γνῶμων καὶ τὸ  $ΓΖ$  τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $BΓ$ . Κοινὸν προσ-  
κείσθω τὸ  $ΘΝ$ , ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετράγωνον  
ὁ ἄρα  $KΛΜ$  γνῶμων καὶ τὰ  $ΓΖ$ ,  $ΘΝ$  τετράγωνα  
ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $BΓ$  περιεχομένῳ  
ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώνῳ. Ἄλλα  
ὁ  $KΛΜ$  γνῶμων καὶ τὰ  $ΓΖ$ ,  $ΘΝ$  τετράγωνα ὅλον  
ἐστὶ τὸ  $ΑΔΕΒ$  καὶ τὸ  $ΓΖ$ , ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  
 $BΓ$  τετράγωνα τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $BΓ$  τετράγωνα  
ἴσα ἐστὶ, τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $BΓ$  περιεχομένῳ ὀρ-  
θογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώνου. Ἐὰν  
ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἐτύγε, τὸ πε-  
τράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιε-  
χόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμή-  
ματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ  
τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι  
τετραγώνῳ.

partium, demto duplo sub partibus rectangulo; vel quadrat  
partium simul aequalia sunt quadrato differentiae partium  
una cum duplo sub partibus rectangulo. Cf. Pfeiderer. §§  
87 88.

Cor. Hinc deducitur: recta aliqua in partes inaequales  
divisa, quadrata partium simul maiora sunt rectangulo, quo  
bis sub iisdem continetur, vel generalius: summa quadratorum  
duarum inaequalium rectarum maior est duplo rectangulo sub  
ipsis, illa quippe hanc excedit quadrato differentiae duarum  
rectarum. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 84. 85.

### PROPOSITIO VIII.

Obs. Varias alias huius propositionis demonstrationes

BZ ipsi  $BF$  (II. 4. Cor.); ergo gnomon  $KAM$  et quadratum  $FZ$  aequalia sunt rectangulo bis contento sub  $AB, BF$ . Commune addatur  $\theta N$ , quod est quadratum ex  $AF$ ; ergo gnomon  $KAM$  et quadrata  $FZ, \theta N$  aequalia sunt rectangulo bis sub  $AB, BF$  contento et quadrato ex  $AF$ . Sed gnomon  $KAM$  et quadrata  $FZ, \theta N$  sunt totum  $AAEB$  et  $FZ$ , quae sunt quadrata ex  $AB, BF$ ; ergo quadrata ex  $AB, BF$  aequalia sunt rectangulo bis sub  $AB, BF$  contento cum quadrato ex  $AF$ . Si igitur recta etc.

### PROPOSITIO VIII. (Fig. 147.)

Si recta linea secetur utcumque, rectangulum quatuor sub tota et uno segmentorum contentum cum quadrato ex reliquo segmento aequale est quadrato ex tota et dicto segmento tanquam ex una linea descripto.

exhibent Pfeiderer. §§. 91–97. 105. et, qui ab eo citantur, Claud. Richardus, Peletarius, Clavius, Tacquet., Barrov., Angel. de Marchettis et Coësius, e quibus eam, quam Clavius, Tacquet. et Barrov. habent (vid. Pfeiderer. §. 95.) simplicitate sua se maxime commendantem hic subiungere liceat. Ita nempe illi: est

$$AA^2 = AB^2 + BA^2 + 2AB \times BA \text{ (II. 4.)}$$

$$= AB^2 + BF^2 + 2AB \times BF \text{ (ob } BA = BF) \text{ ex construct.}$$

$$\text{Sed } AB^2 + BF^2 = 2AB \times BF + AF^2 \text{ (II. 7.), ergo}$$

$$AA^2 = 2AB \times BF + AF^2.$$

Ceterum aliter adhuc offerri potest propositio. Nempe 1) ob  $BA = BF$  dici poterit: Si recta aliqua  $AB$  secetur utcumque in  $F$ , etque addiciatur alia recta  $BA$  uni segmentorum  $BF$  ae-

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔνυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημείον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BF$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AF$  τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ ,  $BF$  ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γάρ ἐπὶ εὐθείας τῇ  $AB$  εὐθεία ἡ  $BD$ , καὶ κείσθω ἴση τῇ  $GB$  ἡ  $BD$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $AD$  τετράγωνον τὸ  $AEDD$ , καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $BF$  τῇ  $BD$ , ἀλλὰ ἡ μὲν  $GB$  τῇ  $HK$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ  $BD$  τῇ  $KN$ , καὶ ἡ  $HK$  ἄρα τῇ  $KN$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $HP$  τῇ  $PO$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $GB$  τῇ  $BD$ , ἡ δὲ  $HK$  τῇ  $KN$ · ἴσον ἄρα ἐστὶ 1) τὸ μὲν  $ΓΚ$  τῷ  $BN$ , τὸ δὲ  $HP$  τῷ  $KO$ . Ἀλλὰ τὸ  $ΓΚ$  τῷ  $PN$  ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γάρ τοῦ  $ΓΟ$  παραλληλογράμμου· καὶ τὸ  $BN$  ἄρα τῷ  $HP$  ἴσον ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ  $ΓΚ$ ,  $KΔ$ ,  $HP$ ,  $PN$  ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ  $ΓΚ$ . Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $GB$  τῇ  $BD$ , ἀλλὰ ἡ μὲν  $BD$  τῇ  $BK$ , τοῦτ' ἐστὶ τῇ  $ΓH$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ  $GB$  τῇ

1) Cod. a habet: ἐστὶ καὶ τὸ  $ΓΚ$ , edd. Oxon. et Basil. omisso καὶ habent ἐστὶ τὸ μὲν  $ΓΚ$ , Peyrardus utrumque καὶ et μὲν recipit.

qualis, quadratum totius lineae compositae aequale est rectangulo quater comprehenso sub data et adiecta, una cum quadrato alterius segmenti. Atque ita propositionem hanc effervunt Clavius, Peletarius, Campanus, Pfeiderer. §. 98. 2) Vel, cum in puncto  $B$  bifariam secetur recta  $ΓΔ$ , cui in directum adiiçitur  $ΓΑ$ , observante Clavio, consequitur propositionis enunciatum: Si recta  $ΓΔ$  bifariam secetur in  $B$ , et illi recta quaecunque  $ΓΑ$  in directum adiiçitur; quadratum totius  $ΑΔ$

Acta enim aliqua  $AB$  secta sit utcumque in puncto  $F$ ; dico et rectangulum quater sub  $AB$ ,  $BF$  contentum cum quadrato ex  $AF$  aequale esse quadrato ex ipsi  $AB$ ,  $BF$  tanquam ex una linea descripto.

Producatur enim in directum ipsi  $AB$  recta  $BA$ , et ipsi  $FB$  ponatur aequalis  $BA$ , et describatur ex  $AA$  quadratum  $AEZA$  (I. 46.), et construatur dupla figura.

Quoniam igitur aequalis est  $BF$  rectae  $BA$ , sed  $FB$  quidem ipsi  $HK$  est aequalis (I. 34.), et  $BA$  ipsi  $KN$  (I. 34.); et  $HK$  igitur ipsi  $KN$  est aequalis. Ex eadem ratione et  $HP$  ipsi  $PO$  est aequalis. Et quoniam aequalis est  $FB$  quidem ipsi  $BA$ , et  $HK$  ipsi  $KN$ ; aequale igitur est (I. 36.) rectangulum quidem  $FK$  rectangulo  $BN$ , et rectangulum  $HP$  rectangulo  $KO$ . Sed  $FK$  ipsi  $PN$  est aequale (I. 43.), complementa enim sunt parallelogrammi  $FO$ , et  $BN$  igitur ipsi  $HP$  aequale est; quatuor igitur  $FK$ ,  $KA$ ,  $HP$ ,  $PN$  aequalia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius  $FK$ . Rursus, quoniam aequalis

compositae ex data  $FA$  et adiecta  $FA$  aequale est quadruplo rectangulo sub dimidio datae  $FA$ , et sub  $AB$  composita ex eadem dimidia  $BF$  et adiecta  $FA$ , una cum quadrato adiectae  $FA$ . Vide Tacquet., Pfeiderer, §. 99. 3) Vel: recta  $FA$  bisectam in  $B$  secta, et in ea producta sumto quocunque puncto  $A$  (pariter atque in hypothesis II. Prop. 6.) differentia quadratorum rectarum  $AA$ ,  $AF$ , puncto arbitrario  $A$ , et extremis  $F$ , et rectae propositae  $FA$  terminatarum, aequatur quadruplo rectangulo sub rectis  $BA$  et  $BF$  seu  $BA$ , quae hinc puncto bisectionis  $B$ , inde puncto arbitrario  $A$ , et alteri rectae propositae  $FA$  extremo  $F$  vel  $A$  interiacent. Cf. Pfeiderer §. 100.

$HK$ , τοῦτ' ἐστὶ τῇ  $HΠ$  ἴσιν ἴση καὶ ἡ  $ΓΗ$  ἴση τῇ  $HΠ$  ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΓΗ$  τῇ  $HΠ$ , ἡ δὲ  $ΠΡ$  τῇ  $ΡΟ$  ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν  $ΑΗ$  τῷ  $ΜΠ$ , τὸ δὲ  $ΠΑ$  τῷ  $ΡΖ$ . Ἀλλὰ τὸ  $ΜΠ$  τῷ  $ΠΑ$  ἴσιν ἴσον παραπληρώματα γὰρ τοῦ  $ΜΑ$  παραλληλογράμμον καὶ τὸ  $ΑΗ$  ἄρα τῷ  $ΡΖ$  ἴσον ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ  $ΑΗ$ ,  $ΜΠ$ ,  $ΠΑ$ ,  $ΡΖ$  ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ  $ΑΗ$  τετραπλάσιον ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ  $ΓΚ$ ,  $ΚΑ$ ,  $ΗΡ$ ,  $ΡΝ$  τοῦ  $ΓΚ$  τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὅτιν' ἂ περιέχει τὸν  $ΣΤΤ$  γνῶμονα τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ  $ΑΚ$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ  $ΑΚ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ  $ΚΒ$  τῇ  $ΒΔ$ · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ  $ΑΚ$ . Ἐδείχθη δὲ τοῦ  $ΑΚ$  τετραπλάσιος καὶ ὁ  $ΣΤΤ$  γνῶμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΣΤΤ$  γνῶμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΞΘ$ , ὃ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώνου· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ  $ΣΤΤ$  γνῶμονι καὶ τῷ  $ΞΘ$ . Ἀλλὰ ὁ  $ΣΤΤ$  γνῶμων καὶ τὸ  $ΞΘ$  ὅλον ἐστὶ τὸ  $ΑΕΖΔ$  τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς  $ΑΔ$  τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΔ$  τετραγώνου <sup>1)</sup> τοῦτ'.

1) Cod. a et ex eo ed. Paris. addunt: ἴση δὲ ἡ  $ΒΔ$  τῇ  $ΒΓ$ · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ (τῆς)  $ΑΓ$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ (τῆς)  $ΑΔ$ , quod ut superfluum omisimus, consentientibus etiam de Lambre et Prony in relatione ad Institut. Franc. facta.

4) Quodsi recta  $ΑΔ$  tanquam in puncto  $B$  utcumque secta consideretur: ob  $ΒΓ=ΒΔ$ , sistit  $ΑΓ=ΑΒΒ-Δ$  differentiam partium  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$ , et emergit propositio: Si recta in partes inaequales utcumque secatur: quadratum totius, demto quadrato



ex  $FB$  ipsi  $BA$ ; sed  $BA$  quidem ipsi  $BK$  (II. 4. Cor.), hoc est (I. 34.), ipsi  $GH$  est aequalis,  $FB$  vero ipsi  $HK$  (I. 34.), hoc est, ipsi  $HI$  (I. 34.) est aequalis; et  $GH$  igitur ipsi  $HI$  aequalis est. Et quoniam aequalis est  $GH$  quidem ipsi  $HI$ , et  $IP$  ipsi  $PO$ ; aequale est rectangulum quidem  $AH$  rectangulo  $HI$ , et rectangulum  $HA$  rectangulo  $PZ$ . Sed  $HI$  ipsi  $IA$  est aequale (I. 43.); complementa enim sunt parallelogrammi  $MA$ , et  $AH$  igitur ipsi  $PZ$  aequale est; quatuor igitur  $AH$ ,  $HI$ ,  $IA$ ,  $PZ$  aequalia inter se sunt; quatuor igitur ipsius  $AH$  quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor  $FK$ ,  $KA$ ,  $HP$ ,  $PN$  ipsius  $FK$  quadrupla; ergo octo quae continet gnomon  $\Sigma TT$  quadrupla sunt ipsius  $AK$ . Et quoniam  $AK$  est rectangulum sub  $AB$ ,  $BA$ , aequalis enim est  $KB$  ipsi  $BA$  (II. 4. Cor.); erit contentum quater sub  $AB$ ,  $BA$  quadruplum ipsius  $AK$ . Ostensus est autem et gnomon  $\Sigma TT$  ipsius  $AK$  quadruplus. Quod igitur quater continetur sub  $AB$ ,  $BA$  aequale est gnomoni  $\Sigma TT$ . Commune addatur  $\Xi\Theta$ , quod aequale est quadrato ex  $AI$ ; rectangulum igitur quater sub  $AB$ ,  $BA$  contentum cum quadrato ex  $AI$  aequale est gnomoni  $\Sigma TT$  et quadrato  $\Xi\Theta$ . Sed gnomon  $\Sigma TT$  et  $\Xi\Theta$  sunt totum  $AEZA$ , quod est quadratum ex

differentiae partium, aequale est quadruplo sub partibus rectangulo; seu quadruplum rectangulum sub partibus, cum quadrato differentiae partium, aequale est totius lineae quadrato. Cf. Ghetaldus, Herigonius, Pfeleiderer. §. 101. 5) Porro  $AA$ ,  $AI$  sunt rectae inaequales, quarum differentia est  $IA$ , semidifferentia  $BI$  seu  $BA$ , et minor earum erit semisummae immutatae semidifferentia aequalis maior autem semisummae rectae semidifferentia (II. 5. Cor. 10.). Propositio itaque eo

ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  καὶ  $BF$  ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθείᾳ καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετραγῶνα διπλάσια ἔστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

redit: Differentia quadratorum duarum inaequalium rectarum aequalis est rectangulo sub ipsarum semisumma ac semidifferentia quater sumta. Cf. Pfeiderer §. 102. 6) Vel, quum  $AA = AB + \frac{BA}{BF}$  sistat summam,  $AI = AB - BF$  differentiam duarum inaequalium rectarum: excessus quadrati summae duarum rectarum super quadratum differentiae ipsarum aequalis est quadruplo rectangulo sub rectis. Cf. Pfeiderer. §. 103.

### PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Plures adhuc alias huius propositionis demonstrationes habent Claud. Richardus, Coëtsius, Clavius, Barrov., Angelus de Marchettis, Commandinus, Ghetaldus, Gilbert., Pfeiderer. (Scholia in libr. II. Elem. Euclid. Pars II. p. 1. sqq. §§. 109—114.) Poterit etiam haec propositio aliter efferi. Nempe 1) dum  $AA$  consideratur tanquam in puncto  $F$  in partes utcumque inaequales divisa; erunt, quum sit  $BA = BF - FA = AF - FA$ , quadratum totius  $AA$ , una cum quadrato differentiae partium  $BA$  vel  $(AF - FA)$ , duplo quadratorum partium  $AF$ ,  $FA$  quod observant Ghetaldus, et Pfeiderer. l. c. §. 116. 2) vel, quum sit  $AA = AF + FA$ , erit  $(AF + FA)^2 + (AF - FA)^2 = 2AF^2 + 2FA^2$  i. e. aggregatum quadratorum ex summa et differentia duarum inaequalium rectarum aequatur duplo quadratorum ex ipsis (Pfeiderer. §. 103.)

$AB$ ; rectangulum igitur quater sub  $AB$ ,  $BA$  contentum cum quadrato ex  $AF$  aequale est quadrato ex  $AA$ , hoc est, quadrato ex ipsa  $AB$  et  $BF$  tanquam ex una linea descripto. Si igitur recta etc.

### PROPOSITIO IX. (Fig. 148.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, quadrata segmentorum inaequalium dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati ex recta inter puncta sectionum.

h. e. Pflaiderer. §. 115.) quod etiam ex II. 4. et II. 7. inter se iunctis sponte fluit. Hinc, ut hoc obiter notemus, sequitur  $AF^2 + FB^2 = \frac{(AF + FB)^2 + (AF - FB)^2}{2}$  h. e. summa

quadratorum duarum inaequalium rectarum aequalis est diminae summae duorum quadratorum, quorum latera sunt ipsarum aggregatum et differentia. Cf. Pflaiderer. §. 117.

Cor. 1. Quum  $AF = FB$  (hyp.), adeoque  $AF^2 + FB^2 = 2AF^2$ , at ex nostra propositione  $AA^2 + AB^2 = 2AF^2 + 2FB^2$ ; patet, esse  $AF^2 + FB^2 < AA^2 + AB^2$ , vel duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium aggregatum esse omnium minimum, quando ipsorum latera mutuo aequalia sint. Cf. l'Huilier de relatione mutua p. 55. Pflaiderer. §. 118. Et quidem erit  $(AA^2 + AB^2) - (AF^2 + FB^2) = 2FA^2$  i. e. recta  $AB$  in  $F$  in aequalia, in  $A$  autem in inaequalia segmenta divisa, summa duorum quadratorum ab aequalibus rectae segmentis descriptorum a summa duorum quadratorum ab inaequalibus eiusdem rectae segmentis factorum deficit duplo quadrato rectae inter puncta sectionum interceptae i. e. (cf. II. 5. Cor. 4.) duplo quadrato semidifferentiae segmentorum inaequalium. Cf. Pflaiderer. §. 120.

Cor. 2. Aliter itaque res se habet in his quadratis, ac in rectangulis eandem laterum contiguorum summam habentibus. In his nempe vidimus (II. 5. Cor. 4.) rectangulum

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , πρὸς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ  $\Delta$ . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AD$ ,  $DB$  τετράγωνα διπλάσια ἐσὶ τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GD$  τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $GE$ , καὶ κείσθω ἴση ἐκατέρᾳ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $AE$ ,  $EB$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Delta$  τῇ  $EG$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $AZ$ , διὰ δὲ τοῦ  $Z$  τῇ  $AB$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $ZH$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AZ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ  $GE$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $EAG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AEG$ . Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$ , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ  $EAG$ ,  $AEG$  μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσιν ἴσαι ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ  $GEA$ ,  $FAE$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ  $GEB$ ,  $EBG$  ἡμίσεια

lateralium aequalium  $AG \times BG$  i. e.  $AG^2$  superare quadratum inaequalium lateralium  $AD \times DB$  (quadrato lateris  $GA$ , vel esse  $AG \times BG$ )  $- AD \times AB = GA^2$ , adeoque horum maximum esse  $AG \times BG$  vel  $AG^2$ , quum contra  $AG^2 + BG^2$  minima summa sit quadratorum, quorum latera eandem summam  $AB$  habent.

Et, quum in istis rectangulis differentia  $\left( \frac{AG \times BG}{AG^2} - AD \times BD \right) = GA^2$  esset, iam est respondens differentia  $(AD^2 + BD^2) - (AG^2 + BG^2) = 2GA^2 =$  duplo prioris. Cf. Pfeiderer. §§. 119. 121. Nempe, quum summa quadratorum  $AD$ ,  $BD$ , quorum summa laterum  $= AB$ , sit  $= AB^2 - 2AD \times BD$  (II. 4), erit ista summa eo minor, quo maior est rectangulum  $AD \times BD$ , minima itaque, si hoc rectangulum maximum fuerit e. si sit  $AD = BD$ . Cf. Pfeiderer. §. 122.

COR. 3. Quodsi  $AB$  secetur (Fig. 149) in alia inaequalia  $AP$ ,  $BH$  in ducto  $PH$  remotiore quam  $A$  a puncto bisectionis  $\Gamma$ : erit summa  $AP^2 + BH^2 > AD^2 + BD^2$ , quum huius

lecta enim aliqua  $AB$  secta sit in aequalia quidem  $\Gamma$ , in inaequalia vero ad  $A$ ; dico quadrata ex  $AD$ ,  $AB$  dupla esse quadratorum ex  $AF$ ,  $FA$ .

Ducatur enim a  $\Gamma$  ipsi  $AB$  ad rectas  $FE$  (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsarum  $AF$ ,  $FB$ , et iungantur  $AE$ ,  $EB$ , et per  $A$  quidem ipsi  $EF$  parallela ducatur  $AZ$  (I. 31.), per  $Z$  vero ipsi  $AB$  parallela ducatur  $ZH$  (I. 31.), et iungatur  $AZ$ .

Et quoniam aequalis est  $AF$  rectae  $FE$ , aequalis et angulus  $EAF$  angulo  $AEF$  (I. 5.) Et quoniam rectus est ad  $\Gamma$ ; reliqui igitur  $EAF$ ,  $AEF$  uni recto aequales sunt (I. 32.), et sunt aequales (I. 6.); dimidius igitur recti est uterque  $FEA$ ,  $FAE$ . Ex eadem ratione et uterque  $FEB$ ,  $EBF$  dimidius est recti;

summe excessus super  $2AF^2$  sit  $=2FA^2$ , illius  $2FH^2$ , sitque  $2FH^2 > 2FA^2$  (Lemma ante X. 43. Barrov., Gilbert, theop. Pfeiderer. §. 123.). Et quidem  $(AH^2 + BH^2) - AA^2 + AB^2 = 2FH^2 - 2(FH^2 - FA^2) = 2(FH + FA) \times FH - FA$  (II. 5. Obi. 1.), hoc est, facto  $AP = BH$ , erit  $(AH^2 + BH^2) - (AA^2 + BA^2) = 2PA \times AH$ , quod est duplum rectangulum sub summa et differentia semidifferentiarum  $AH$ ,  $BH$ , et  $AA$ , B4. Cf. II. 5. Cor. 7. Pfeiderer. §. 125.

Cor. 4. Ex his, collatis iis, quae II. 5. Cor. 2. et 6. observata sunt, coniunctis cum I. 47. consequitur, inter parallelogramma rectangula isoperimetra, quadrati aream maximam, diagonales minimas esse; caeterorum areas eo minores, diagonales eo maiores esse, quo magis latera ipsorum contigua invicem differant: pariterque inter triangula rectangula, quorum latera circa angulum rectum eandem summam conficiunt, sequitur aream maximam, hypotenusam minimam esse; caeterorum scalenorum aream eo minorem, hypotenusam eo ma-

ἔστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $AEB$  ὀρθή ἐστιν. Κα-  
 ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $HEZ$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ  
 ὑπὸ  $EHZ$ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίας  
 τῇ ὑπὸ  $EGB$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $EZH$  ἡμίσειά ἐστιν  
 ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $HEZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  
 $EZH$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $EH$  πλευρᾷ τῇ  $HZ$  ἴση  
 ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ  $B$  γωνία ἡμίσειά ἐστιν  
 ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $ZAB$ , ἴση γάρ ἐστι πάλιν  
 τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $EGB$ · λοιπὴ ἄρα  
 ἡ ὑπὸ  $AZB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς  
 τῷ  $B$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AZB$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $ZA$   
 πλευρᾷ τῇ  $AB$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$   
 τῇ  $GE$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AG$  τῷ ἀπὸ τῆς  
 $GE$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GE$  τετράγωνα διπλάσια  
 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GE$   
 ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$  τετράγωνον, ὀρθῇ γάρ ἡ  
 ὑπὸ  $AGE$  γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AE$  διπλάσιον  
 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ . Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $EH$   
 τῇ  $HZ$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $HE$  τῷ ἀπὸ τῆς  
 $HZ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $HZ$  τετράγωνα διπλάσια

iozem esse, quo magis catheti eorum invicem differant. Cf.  
 Pfleiderer. I. c. §. 125.

Obs. 2. Quum recta  $AB$  (Fig. 150.) bifariam in  $\Gamma$   
 secta, et ad  $\Gamma$  constituto perpendiculo  $GE=AG=BG$ , iun-  
 ctisque rectis  $AE$ ,  $BE$ , fiat, ut in demonstratione II. 9.  
 ostensum fuit, angulus  $AEB$  rectus, et, quae ex quibuslibet  
 rectae  $GB$  punctis,  $A$ ,  $\Pi$  rectae  $GE$  parallelae i. e. I. 29. ad  
 $B\Gamma$  perpendiculares aguntur, vel ex punctis quibusvis  $Z$ ,  $\Sigma$   
 rectae  $BE$  normales in  $B\Gamma$  demittuntur, fiant rectae  $AB$  seg-  
 mentis  $AB$ ,  $\Pi B$  aequales, ideoque sint  $AA+AZ=AP+\Pi\Sigma$   
 $=AG+GE=AB$ : completis parallelogrammis rectangulis  
 $AGET$ ,  $AATZ$ ,  $AP\Sigma\Phi$ , triangulisque rectangulis  $AGE$ ,  $AATZ$ ,

igitur  $AEB$  rectus est. Et quoniam  $HEZ$  dimidius est recti, rectus autem  $EHZ$ , aequalis enim interiori et opposito  $EFB$  (I. 29.); reliquus igitur  $EZH$  dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est angulus  $HEZ$  angulo  $EZH$ ; quare et latus  $EH$  lateri  $HZ$  est aequale (I. 6.). Rursus quoniam angulus ad  $B$  dimidius est recti, rectus autem  $ZAB$ , aequalis enim est rursus interiori et opposito  $EFB$  (I. 29.); reliquus igitur  $AZB$  dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur angulus ad  $B$  angulo  $AZB$ ; quare et latus  $ZB$  lateri  $AB$  est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est  $AF$  rectae  $FE$ , aequale est et quadratum ex  $AF$  quadrato ex  $FE$ ; ergo quadrata ex  $AF$ ,  $FE$  dupla sunt quadrati ex  $AF$ . Quadratis autem ex  $AF$ ,  $FE$  aequale est quadratum ex  $AE$  (I. 47.), rectus enim est angulus  $AFE$ ; quadratum igitur ex  $AE$  duplum est quadrati ex  $AF$ . Rursus quoniam aequalis est  $EH$  rectae  $HZ$ , aequale est etiam quadratum ex  $EH$  quadrato ex  $HZ$ ; ergo quadrata ex  $EH$ ,  $HZ$  dupla sunt quadrati ex  $HZ$ . Quadratis autem ex  $EH$ ,

$AH$ , quae Cor. [4. de diagonalibus rectangulorum et hypotenusa] triangulorum traduntur, etiam liquent ex I. 19. Cor. I. & 5. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 126.

Oba. 3. Esse rectam  $AZ=AB$ ,  $EH=HB$  etc. inde patet, quod angulus  $ABE$  ostensus fuit esse semirectus. Quicumque igitur ratione ducatur  $BE$  ad  $AB$  ita, ut angulus  $ABE$  fiat semirectus, idem valebit non solum de rectis  $HX$ ,  $AZ$ , sed etiam producta  $BE$ , de rectis  $XP$ ,  $AQ$ , nempe erit  $XP=XB$ ,  $AQ=AB$ . Et, quum, ut facile patet, nonnisi ea puncta, quae in recta  $BQ$ , nempe basi trianguli aequilateri  $AQ$  posita sunt, ita comparata sinu, ut demissa ex iis ad  $AB$  perpendiculara intercipient inter se et punctum  $B$  segmenta

ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $HZ$  τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $HZ$  τετραγώνοις ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς  $EZ$  τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $EZ$  διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $HZ$ . Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς  $HZ$  ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς  $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $EZ$  διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΓΔ$ . Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $EA$  διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EZ$  τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EZ$  ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$  τετραγώνου, ὁρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ  $AEZ$  γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς  $AZ$  τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $AZ$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $AZ$ , ὁρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ  $Δ$  γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $AZ$  διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Ἰσὴ δὲ ἡ  $AZ$  τῇ  $ΔΒ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis his perpendicularis aequalia, recta  $BQ$  locus erit, quem in rectangulis isoperimetris circa communem angulum  $A$  constitutis attingunt ipsorum anguli, communi angulo  $A$  oppositi, vel quem in triangulis rectangulis  $AXP$ ,  $AGE$ ,  $ASZ$  etc., quorum bina latera circa angulum rectum simul aequant rectam  $AB$ , vertices horum triangulorum contingunt. Et facile patet, idem adhuc valere (Fig. 151.), etiam si parallelogramma non rectangula at aequiangula sint, et in triangulis angulus, quem inter se aequalem habent, non sit rectus, dum deinde recta  $BB$  ita ducatur, ut angulum  $AB\eta$  isti communi angulo aequalem bisecet. Viviani de locis solidis lib. III. Prop. 8. p. 57. Pfeiderer l. c. §§. 127—134. Et quae de diagonalibus et hypotenusis dicta sunt Obs. 2., valent etiam in parallelogrammis et triangulis obliquangulis, quum etiam ubi de iis quaestio est, angulus  $AEB$  maneat rectus, adeoque l. 19.



$HZ$  aequale est quadratum ex  $EZ$  (I. 47.), ergo quadratum ex  $EZ$  duplum est quadrati ex  $HZ$ . Sed aequale est quadratum  $HZ$  quadrato ex  $\Gamma A$ ; quadratum igitur ex  $EZ$  tripulum est quadrati ex  $\Gamma A$ . Est autem quadratum ex  $EA$  duplum quadrati ex  $AT$  (I. 47.); ergo quadrata ex  $AE$ ,  $EZ$  dupla sunt quadratorum ex  $AT$ ,  $\Gamma A$ ; ipsis vero ex  $AE$ ,  $EZ$  aequale est quadratum ex  $AZ$  (I. 47.), rectus enim est  $AEZ$  angulus; ergo  $AZ$  quadratum duplum est quadratorum ex  $AT$ ,  $\Gamma A$ . Quadrato vero ex  $AZ$  aequalia sunt quadrata ex  $AA$ ,  $AZ$  (I. 47.), rectus enim est angulus ad  $A$ ; quadrata igitur ex  $AA$ ,  $AZ$  dupla sunt quadratorum ex  $AT$ ,  $\Gamma A$ . Aequalis autem  $AZ$  rectae  $AB$ ; ergo quadrata ex  $AA$ ,  $AB$  dupla sunt quadratorum ex  $AT$ ,  $\Gamma A$ . Si igitur recta etc.

Cor. 1. et 5. etiam hic applicari queat. Quae vero de areis parallelogrammorum et triangulorum rectangulorum Cor. 4. dicta sunt, demum ope VI. 23. ad obliquangula extendi, vel immediate per VI. 27. de illis inferri possunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 135.

Obs. 4. Per praecedentia facile determinatur ac solvitur problema: construere triangulum rectangulum, cuius datur hypotenusa et summa cathetorum, vel: describere parallelogrammum rectangulum, cuius datur diagonalis et summa duorum laterum contiguorum, vel generalius: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum simul sunt datae rectae aequalis, et cuius basis vel diagonalis opposita angulo dato est datae rectae aequalis. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 136—146. et quae plerique ab eo citantur Ghetaldus p. 337. Thom. Simpson.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἐάν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεία γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας ἡ  $BD$ · λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$  τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GD$  τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $AB$  πρὸς ὁρθῆς ἡ  $GE$ , καὶ κείσθω ἴση ἐκατέρᾳ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $EA$ ,  $EB$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ  $E$  τῇ  $AD$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $EZ$ · διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῇ  $GE$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $ZD$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $EG$ ,  $ZD$  εὐθείά τις ἐνέπεσεν ἡ  $EZ$ , αἱ ὑπὸ  $GEZ$ ,  $EZA$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ZEB$ ,  $EZA$  δύο ὀρθῶν ἔλασ-

1) Edit. Paris. cum Codice a addit: πάλιν.

Treatise of Algebra Lond. 1745. p. 287. sq. Schwab. Euclid's Data p. 174. sqq. Schulz Taschenbuch II. Heft, Berlin 1783. p. 400. sq. Billy Diophant. geometra Paris 1660. p. 53. sq. Van Swinden Anfangsgr. der Mathematik 1797. p. 465. sq. Meier Hirsch Samml. geom. Aufg. I. Th. 1805. p. 107. sq. l'Huilier Elémens d'Analyse Géometrique et d'Analyse Algébrique Paris. 1809. p. 212. sq.

Cor. 5. Ex II. 5. et II. 9. coniunctis sequitur, recta  $AB$  bifariam in  $\Gamma$ , et in inaequalia in  $\Delta$  utcumque secta, quadrata inaequalium partium simul aequari quadrato ex totius

## PROPOSITIO X. (Fig. 152.)

Si recta linea secetur bifariam, adiciatur autem aliqua ipsi recta in directum, quadratum compositae ex tota cum adiecta et quadratum ex adiecta simul sumpta dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati compositae ex dimidia et adiecta tanquam una linea.

Recta enim aliqua  $AB$  secta sit bifariam in  $\Gamma$ , adiciatur autem aliqua ei recta in directum  $BA$ ; dico quadrata ex  $AA$ ,  $AB$  dupla esse quadratorum ex  $AF$ ,  $\Gamma A$ .

Ducatur enim a puncto  $\Gamma$  rectae  $AB$  ad rectos  $\Gamma E$  (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsorum  $AF$ ,  $\Gamma B$ , et iungantur  $EA$ ,  $EB$ ; et per  $E$  quidem ipsi  $AF$  parallela ducatur  $EZ$  (I. 31.) per  $A$  vero ipsi  $\Gamma E$  parallela ducatur  $ZA$  (I. 31.). Et quoniam in parallelas rectas  $EF$ ,  $ZA$  recta aliqua incidit  $EZ$ , anguli  $\Gamma EZ$ ,  $EZA$  duobus rectis aequales sunt (I. 29.); ergo  $ZEB$ ,  $EZA$  duobus rectis minores sunt. Rectae

dimidio, una cum triplo quadrato ex interposito segmento et cum rectangulo earundem partium inaequalium.

Est enim  $AF^2 = \Gamma A^2 + AA \times AB$  (II. 5.)

hinc  $2AF^2 + 2\Gamma A^2 = AF^2 + 3\Gamma A^2 + AA \times AB$

adeoque (II. 9.)  $AA^2 + AB^2 = AF^2 + 3\Gamma A^2 + AA \times AB$ . Vizium de locis solidis L. II. Prop. 68. p. 46. Pfeiderer. §. 147.

## PROPOSITIO X.

Obs. 1. Huius etiam propositionis plures alias demonstrationes habent iidem, quos ad Prop. IX. citavimus, auctores: v. Pfeiderer. §§. 151–160. et nominatim eam aliqui simili ratione ex II. 9. deducunt, ac II. 6. ex II. 5. deduci posse

σόντες εἶσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἑλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα  $EB$ ,  $Z\Delta$  ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ  $BA$  μέρη συμπίπτουσιν. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπεπτετώσαν κατὰ τὸ  $H$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AH$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ  $GE$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AEG$  τῇ ὑπὸ  $EAG$ , καὶ ὀρθή ἡ πρὸς τὸ  $\Gamma$  ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $EAG$ ,  $AEG$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $GEB$ ,  $EBG$  ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν

visimus. Potest etiam illa eodem modo aliter effertur ac II. Prop. 9. iisdem verbis, ac ad eam Obs. 1. nr. 1. 2. monitum fuit. Et priorem quidem modum „si recta linea secta fuerit in partes inaequales, quadratum totius, una cum quadrato excessus, quo maius segmentum excedit minus, duplum erit quadratorum ab ipsis segmentis descriptorum“ iam indicavit Isaac. Monachus in Schol. ad II. 10.

Cor. 1. Recta  $AB$  bifariam in  $\Gamma$  secta, et adiuncta ei quacunq̃ue  $BA$ : ipsa  $AB$  differentia est rectorum  $AA$ ,  $BA$ ;  $\Gamma A$  autem earum semisumma, vel quod eodem redit (cf. II. 6. Cor. 2.) erunt  $AA$ ,  $\Gamma A$ ,  $BA$  tres continue arithmetice proportionales. Atque his observationibus nituntur aliae propositionis X. (pariter ac Prop. IX.) enunciationes. Cf. Pfeiderer. I. c. §§. 152. 153. Nempe: Duarum inaequalium rectorum quadrata simul dupla sunt quadratorum ex ipsarum semisumma et semidifferentia vel si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadrata extremorum simul aequantur duplo aggregato ex quadrato mediae, ac differentiae utriusvis extremarum et mediae composito. Sumta deinde (Fig. 153.)  $\Gamma\P > \Gamma A$ , manente eadem differentia  $AB$ , ambae  $A\P$ ,  $B\P$  crescant eodem, quo  $\Gamma\P$ , incremento, eritque  $A\P^2 + B\P^2 > AA^2 + BA^2$  pariter ac (coll. II. 6. Cor. 5.)  $A\P \times B\P > AA \times AB$ . Sumatur  $\Gamma P = \Gamma\P$ , unde  $\Gamma P^2 = \Gamma A^2 + PA \times A\P$  (II. 5.), eritque  $A\P^2 + B\P^2 = 2\Gamma\P^2 + 2\Gamma B^2$  (II. 10.) =

autem a minoribus quam duobus rectis productae conveniunt (Post. 5. vel Ax. 11.); ergo  $EB$ ,  $ZA$  productae ad partes  $BD$  convenient. Producantur, et convenient in  $H$ , et fungatur  $AH$ .

Et quoniam aequalis est  $AF$  rectae  $FE$ , aequalis est et angulus  $AEF$  angulo  $EAF$  (I. 6.) ; atque rectus est ad  $F$ ; dimidius igitur recti est uterque ipsorum  $EAF$ ,  $AEF$  (I. 32.). Ex eadem ratione et uterque ipsorum  $TEB$ ,  $EBF$  dimidius est recti; rectus igitur

$$= 2FA + 2FB + 2PA \times AP \text{ (II. 6.)}$$

$$= AA + BB + 2PA \times AP \text{ (II. 10.)}$$

Contra (cf. II. 6. Cor. 5.) est  $AP \times PB - AP \times AB = PA \times AP$ .

$$\text{Est autem } PA = PF + FA = FN + FA = \frac{AN + BN}{2} + \frac{AP \times AB}{2}$$

$$AP = FN - FA = \frac{AN + BN}{2} - \frac{AP \times AB}{2}$$

Dum igitur aequae differunt  $AN$  et  $BN$ ,  $AA$  et  $BB$ : rectangulum sub prioribus, quorum summa est maior, excedit rectangulum sub posterioribus rectangulo sub summa et sub differentia semisummarum laterum  $AN$  et  $BN$ ,  $AA$  et  $BB$ ; duplo autem hoc rectangulo summa quadratorum ex prioribus summam quadratorum ex posterioribus excedit. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 166.

Cor. 2. Hinc inter parallelogramma rectangula, quorum latera contigua aequae invicem differunt, eius, cuius perimetrum maior est, area et diagonales sunt maiores: pariterque inter triacula rectangula, quorum latera circa angulum rectum aequae invicem differunt, illius area et hypotenusa maiores sunt, cuius summa cathetorum est maior. Cf. Pfeiderer. §. 167.

Obs. 2. Recta  $AB$  (Fig. 154. 155.) bifariam secta in puncto  $F$ , et per hoc ducta sub angulo quocunque  $FE = FB = FA$ ; tum ultra punctum  $B$  versus  $\beta$ ,  $\delta$  continuatis rectis  $EB$ ,  $AB$ : quae his rectis  $B\delta$ ,  $B\beta$  terminantur, rectae  $FE$  parallelas quaecunque  $AZ$ ,  $IZ$  esse segmentis adiacentibus  $BA$ ,  $BH$  rectae

ἡ ὑπὸ  $AEB$ . Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $EB\Gamma$ , ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ  $\Delta BH$ . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\Delta AH$  ὀρθή, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $\Lambda GE$ , ἐναλλάξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta HB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ <sup>1)</sup>  $\Delta HB$  τῇ ὑπὸ  $\Delta BH$  ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $BA$  πλευρὰ τῇ  $\Delta H$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $EHZ$  ἡμί-

1) Verba: ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ omitt. Ed. [Paris: et Cod. a. Nos ex edd. Oxon. et Basil. ad analogiam sequentium et demonstrationis II. 9. restituimus.

$B\delta$  aequales, proinde  $AZ - AZ = AZ - \Pi Z = AB$ , simili ratione, qua in demonstratione II. 10. per I. 6. generatim inferitur: quia angulus  $\Gamma EB = \Gamma BE$  (I. 5.)  $\begin{pmatrix} AZB \\ \Pi ZB \end{pmatrix} = \Gamma EB$  (I. 29.) et  $\beta B\delta = \Gamma BE$  (I. 15.). Contra, quae hinc rectae  $B\delta$ , inde puncto quocunque extra rectam  $B\beta$ , ad easdem cum ipsa partes rectae  $B\delta$  sito, terminantur rectae, ipsi  $\Gamma E$  parallelae, segmento adiacenti rectae  $B\delta$  aequales non sunt, nec proinde differentia earum et rectarum ad idem punctum ex  $A$  ductarum rectae  $AB$  aequalis est. Porro etiam ultra  $A$ ,  $E$  puncta versus  $\epsilon$ ,  $\gamma$  productis  $BA$ ,  $BE$  rectis: quae a punctis  $X$  ipsius  $A\epsilon$  eidem  $\Gamma E$  parallelae aguntur  $X\psi$  ad occursum usque rectae  $B\gamma$ , ob angulos  $B\psi X = BE\Gamma$  (I. 29.), ideoque  $= \psi BX$  (I. 5.) sunt segmentis adiacentibus  $BX$  rectae  $B\epsilon$  aequales (I. 6.), proinde  $X\psi - XA = BX - XA = AB$ : idque pariter exclusive. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 168.

Obs. 3. Per punctum  $B$  ducta rectae  $\Gamma E$  parallela  $B\zeta$  ad partes rectae  $A\delta$ , ad quas est  $B\beta$ : ob angulos  $\beta B\zeta = BE\Gamma$  (I. 29.)  $\beta B\delta = \Gamma BE$  (I. 15.) bifariam angulum  $\zeta B\delta$  secat recta  $EB\beta$ . Vicissim, si recta  $B\beta$  bifariam secat angulum  $\zeta B\delta$ , quem recta  $B\zeta$  utcumque per  $B$  ducta cum continuata  $AB$  comprehendit: quaelibet cruri eius  $B\zeta$  parallela ab altero crure  $B\delta$  abscindit segmentum ipsius parallelae segmento rectis  $B\beta$ ,  $B\delta$  interiacenti aequale, et quae per punctum bisectionis  $\Gamma$  rectae

ex  $AEB$ . Et quoniam dimidius recti est  $EBI'$ , dimidius igitur recti est et  $ABH$  (I. 15.). Est autem  $BAH$  rectus; aequalis enim est ipsi  $ATE$  alterno (I. 29.). Reliquus igitur  $AHB$  dimidius recti est (I. 32.); angulus itaque  $AHB$  angulo  $ABH$  est aequalis; quare et latus  $BA$  lateri  $AH$  est aequale (I. 6.). Rursum, quoniam  $EHZ$  dimidius est recti, rectus autem

$AB$ , parallela cruri  $B\zeta$  ducitur  $TE$  ad occursum usque continuatae  $\beta B$  in  $E$ , pariter fit  $=TB=TA$ . Ob angulos enim  $AB$ ,  $\Pi ZB$ ,  $BBI'$  singulos  $=\zeta B\beta$  (I. 29.) ideoque  $=\beta B\beta$  (constr.)  $=TBE$  (I. 15.) sunt (I. 6.)  $BA=AZ$ ,  $\Pi\Pi=\Pi Z$ ,  $BT=TE$ . Unde caetera quoque Obs. 2. proposita tum substant. Cf. Pfeleiderer. l. c. §. 169.

Obs. 4. Eandem  $\beta B\gamma$ , sive iuxta Obs. 2. sive iuxta Obs. 3. ducatur, bifariam dividere angulum  $AB\eta$ , quem producta  $\zeta B$  cum data  $AB$  comprehendit, vel ex I. 29. I. 5. vel ex I. 15. consequitur. Quare, dum aequales utrimque sint anguli  $AB\eta$ , haec  $\beta B\gamma$  in directum iacet cum recta  $B\Omega$  supra Obs. 3. ad II. 9. determinata. Per rectae igitur magnitudine ac positione datae  $AB$  alterum extremum  $B$  ducta quacunque recta  $B\zeta$ : quae angulum  $\zeta B\delta$ , hac  $B\zeta$  et continuata  $AB$  comprehensum bifariam secat recta utrimque continuata  $\beta B\gamma$ , quatenus hinc ultra  $B$  versus  $\beta$ , inde ultra  $\Omega$ , ubi rectae  $A\Omega$  ipsi  $B\zeta$  per  $A$  parallela occurrit, versus  $\gamma$  extenditur (de eius parte  $B\Omega$  vide Obs. 3. ad II. 9.). Locus est, ad quem sunt 1) vertex  $Z$ ,  $\Sigma$ ,  $\Psi$  communi  $A$  oppositi, parallelogrammorum  $ABZT$ ,  $A\Pi Z\Phi$ ,  $AX\Psi$ ; quae, ducta per alterum recta  $AB$  extremum  $A$  rectae  $B\zeta$  parallela  $A\Omega$ , pariterque ultra  $A$  continuata  $BA$ , in angulis  $\Phi AX$  etc. angulo  $\zeta BA$  aequalibus (I. 29.) fieri possunt, sic, ut contigua ipsorum latera invicem differant data  $AB$ : 2) vertex tertii  $Z$ ,  $\Sigma$ ,  $\Psi$  triangulorum  $AZA$ ,  $A\Sigma\Pi$ ,  $A\Psi X$ , circa communem vertexem  $A$  constitutorum, quorum anguli ad secundos vertexes  $A$ ,  $\Pi$ ,  $X$  rectae  $AB$  in directum iacentes, sunt dato  $AB\zeta$  aequales (I. 29.) et

σειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ  $Z$ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ZEH$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $EZH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZEH$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $HZ$  πλευρὰ τῇ  $ZE$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $EF$  τῇ  $GA$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $EF$  τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς  $GA$  τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $EF$ ,  $GA$  τε-

quorum crura circa hos angulos data  $AB$  invicem differunt. Cf. Pflaiderer. l. c. §§. 170. 171.

Obs. 5. Ambos locos (Obs. 3. ad II. 9. et Obs. 4. ad II. 10.) una propositione sic licet complecti: Si a puncto ad rectam positione datam ducatur recta in dato angulo; dataque sit summa vel differentia rectae huius et segmenti dato puncto adiacentis, quod ea ex recta positione data abscindit, tangit punctum rectam positione datam. Cf. Pflaiderer. §. 172.

Obs. 6. Bifariam in  $\Gamma$  secta  $AB$ , et per  $B$  ducta rectae  $B\zeta$  parallela  $\Gamma E$  ad occursum usque rectae  $\beta B\gamma$  angulum  $\zeta B\delta$  bifariam secantis, in  $E$ : fit  $\Gamma E = \Gamma B = \Gamma A$  (Obs. 3.) ideoque angulus  $AEB$  rectus (I. 6. et I. 32.) et hinc  $AS > AZ$  (I. 19. Cor. 5.) dum  $\Gamma H > \Gamma A$  proinde (II. 10. Cor. 1.)  $AS + AH > AZ + AA$ . Parallelogrammum vero  $AH\epsilon\phi > AS\tau T$ , et triangulum  $AS\eta > AZ\delta$  per I. Ax. 9. Generatim igitur inter parallelogramma aequiangula, quorum latera contigua aequae invicem differunt, eius, cuius perimetex maior est, area et diagonales homologae, seu quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, maiores sunt: pariterque inter triangula, quorum unus angulus aequalis, et quorum crura (latera circa hos angulos aequales) aequae invicem differunt, illius area et basis maiores sunt, cuius summa crurum est maior. Cf. Pflaiderer. §. 173.

Obs. 7. Basin seu tertium latus  $AZ$  cuiuslibet trianguli non aequicruri  $AZA$  maiorem esse differentia  $AB$  crurum eius  $AA$ ,  $AB$ ; proinde et diagonalem utramque parallelogrammi cuiusvis non aequilateri esse differentia laterum eius conti-



et qui ad  $Z$ , aequalis enim est opposito qui ad  $F$  (I. 29.); reliquus igitur  $ZEH$  dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur  $EHZ$  angulus ipsi  $ZEH$ ; quare et latus  $HZ$  lateri  $ZE$  est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est  $EF$  rectae  $FA$ , aequale est et quadratum ex  $EF$  quadrato ex  $FA$ . Ergo quadrata ex  $EF$ ,  $FA$  dupla sunt quadrati ex  $FA$ . Quadratis au-

torum maiorem, reducitur ad I. 19. Cor. 3.: quod trianguli obusculi latus oppositum angulo obtuso sit utroque eius aliquo latere maius; cum a maiore crure  $AA$  abscissa  $AB = A$ , trianguli aequicruri  $BZA$  angulus  $ZBA$  ab basin sit acutus I. 5. I. 17. et igitur deinceps positus  $ABZ$  obtusus (I. 13.). Cf. Pfeiderer. §. 174.

Obs. 8. Per praecedentia facile solvitur problema: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum differant recta data, et cuius basis, vel diagonalis opposita angulo dato sit alicui rectae datae, maiori quam differentia data, aequalis. Vid. Pfeiderer. §§. 175—181. Ghetaldus, Thom. Simpson., van Swinden., l'Huilier. l. c. p. 218.

Cor. 3. Ex II. 6. et II. 10. coniunctis sequitur: Si recta  $AB$  biliniam secta fuerit in  $F$ ; eique addita in directum quoddam  $BA$ , quadratum ex  $AA$ , data et addita cum quadrato additae  $BA$  aequale est quadrato ex  $FA$  dimidio datae et addita, cum tribus quadratis ex  $AF$ , eodem datae dimidio, et cum rectangulo  $AA \times AB$  sub data cum addita in additam, Est enim  $FA^2 = FB^2 + AA \times AB = AF^2 + AA \times AB$  (II. 6.)

itaque  $2FA^2 + AF^2 = FA^2 + 3AF^2 + AA \times AB$   
 i.e. (II. 10.)  $AA^2 + BA^2 = FA^2 + 3AF^2 + AA \times AB$ .

Cf. Pfeiderer. §. 161.

Cor. 4. Nexus propositionum II. 9. et II. 10. idem est, ac propositionum II. 5. et II. 6., unde etiam hae duae propositiones nro eodemque enunciato comprehendi possunt. Cf. Cor. 1. Nampe punctum  $A$ , quod in II. Prop. 9. in ipsa

τεράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma A$  τετραγώνου. Τῷδε δὲ ἀπὸ τῶν  $E\Gamma$ ,  $\Gamma A$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$  τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $EA$  τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$  τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ZH$  τῇ  $ZE$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $HZ$  τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς  $ZE$  τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $HZ$ ,  $ZE$  διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $EZ$ . Τῷδε

AB sumtum fuit, in II. Prop. 10, in AB producta sumitur. Cf. Pfeiderer. §. 184.

Obs. 9. Recta AB (Fig. 156.) in inaequalia utcumque in puncto A divisa, a maiori segmento AA abscindatur AA = minori AB, et residua AA bifariam in Γ secetur, erit  $AA^2 + AB^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$  (II. 10.), adeoque ob  $AA = AB$ ,  $AA^2 + AB^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$  pariter ac in figura altera (Fig. 157.), in qua AB in Γ bisecta, atque in ea ipsa punctum quodcumque Δ sumtum fuit, ubi ex (II. 9.) erit  $AA^2 + AB^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$ , quamvis priore figura recta AB in puncto Γ haud bifariam secetur.  $AG$  priore figura  $= \frac{AA}{2} = \frac{AA - AA}{2} = \frac{AA - AB}{2}$  (constr.) sistit semidifferentiam segmentorum inaequalium AA, AB, quam in figura posteriore exhibet ΓA (II. 5. Cor. 4.): et ΓA priore figura  $= \frac{AA}{2} + \frac{BA}{2} = \frac{AB}{2}$  sistit segmentorum AA, AB semisummam, quae in figura posteriore est AG. Quare assertum  $AA^2 + AB^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$  figura priore quoque conforme etiam est communi propositionum 9. et 10. enunciato, quod Cor. 1. dedimus. Pariter rectae AB (Fig. 158.) in directum adiciatur quaecumque BA, et denuo rectae AA recta AA = BA, ac bifariam in Γ secetur tota AA. Erit  $AA^2 + AA^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$  (II. 9.), ideoque, ob  $AA = AB$ , etiam  $AA^2 + AB^2 = 2AG^2 + 2ΓA^2$ , pariter ac (II. 10.) in figura posteriore (Fig. 157.), in qua, AB in Γ bifariam divisa, atque in ea producta punctum quodcumque Δ sumtum

tem ex  $EF$ ,  $GA$  aequale est quadratum ex  $AE$  (I. 4.); ergo quadratum ex  $EA$  duplum est quadrati ex  $AF$ . Rursus, quoniam aequalis est  $ZH$  rectae  $ZE$ , aequale est et quadratum ex  $HZ$  quadrato ex  $ZE$ . Quadrata igitur ex  $HZ$ ,  $ZE$  dupla sunt quadrati ex  $EZ$ . Quadratis autem ex  $HZ$ ,  $ZE$  aequale est quadratum ex  $EH$  (I. 47.). Quadratum igitur ex  $EH$

fuit, quamvis rursus casu prioris figurae  $AB$  in puncto  $F$  non bifariam secetur. Permutatis etiam  $AF$ ,  $FA$  utrumque  $AA^2 +$   
 $BA^2 = 2AF^2 + 2FA^2$  utraque figura exhibitum continetur pro-

posito Cor. 1.: quippe  $AF$  prioris figura  $= \frac{AA}{2} = \frac{AA + AA}{2} =$

$\frac{AA + AB}{2}$  (constr.) sistit semisummam rectarum  $BA$ ,  $AA$  ad-

iectae scilicet, et compositae ex data  $AB$  et adiecta, quam in

fig. posteriore exhibet  $FA$  (II. 6. Cor. 3.) et  $FA$  prioris figura

$= \frac{AA - AA}{2}$  (II. 5. Cor. 4.)  $= \frac{AA - BA}{2}$  sistit rectarum  $AA$ ,  $BA$

semidifferentiam, quae in fig. posteriore est  $AF$ . Cf. Pfei-

deri. I. c. §§, 185. 186.

Obi. 10. Conversae quoque Prop. 9. 10. valent. Nempe,

rectam  $AB$  (Fig. 157. 159.) bifariam secat punctum  $F$  sic in

ae situm, ut duplum aggregatum quadratorum ex rectis  $FB$

vel  $FA$  et  $FA$  factorum, quorum una  $FB$  vel  $FA$  inter ipsum

punctum  $F$  atque alterum rectae  $AB$  extremum, altera  $FA$

inter idem punctum  $F$  atque punctum  $A$  alibi in recta  $AB$

ipsa vel producta sunt interiacent, aequale sit quadratis

rectarum  $AA$ ,  $BA$ , quae hinc puncto  $A$ , inde extremis  $A$ ,  $B$

rectae  $AB$  terminantur: dum, uti in ipsis propositionibus 9.

10. recta  $FA$  est rectis  $FB$ ,  $FA$  minor, quando punctum  $A$  iacet

in ipsa  $AB$ ; sed  $FA$  maior quam  $FB$ ,  $FA$ , si punctum  $A$  est in

producta  $AB$ . Sit enim 1)  $AA^2 + BA^2 = 2FB^2 + 2FA^2$ , puncto

$A$  iacente ad eas puncti  $F$  partes, ad quas est punctum  $B$ : quo

casu per se est  $FA < FB$ , dum punctum  $A$  est in ipsa  $AB$

δὲ ἀπὸ τῶν  $HZ$ ,  $ZE$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $EH$  τετραγώνου· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς  $EH$  διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $EZ$ . Ἰση δὲ  $EZ$  τῇ  $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $EH$  τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΓΔ$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $EA$  διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EH$  τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EH$  τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AH$  τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AH$  διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $AH$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΗ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΗ$  τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Ἰση δὲ ἡ  $ΔΗ$  τῇ  $ΔΒ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΔ$  τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

fig. priore, sed  $ΓΔ > FB$ , quando punctum  $A$  sumitur in producta  $AB$  fig. poster. Ob  $FBq + ΓΔq = ABq + 2FB \times ΓΔ$  (II. 7.) erit  $ΑΔq + ΒΔq = 2(ΓΒq + ΓΔq)$  (hyp.)  $= FBq + ΓΔq + ABq + 2FB \times ΓΔ$ , adeoque  $ΑΔq = FBq + ΓΔq + 2FB \times ΓΔ = (FB + ΓΔ)q$  (II. 4.) adeoque  $ΑΔ = FB + ΓΔ$  (I. 46. Cor.) et, demta communi  $ΓΒ$ ,  $ΑΓ = FB$ . 2) Sit  $ΑΔq + ΒΔq = 2ΓΑq + 2ΓΔq$ , punctis  $A$  et  $A$  iacentibus ad partes oppositas puncti  $Γ$ : sitque  $ΓΔ < ΓΑ$ , quando punctum  $A$  in ipsa  $AB$  iacet (Fig. prior.): sed  $ΓΔ > ΓΑ$ , si  $A$  est in producta  $AB$  (Fig. poster.). Ob  $ΑΔ =$

duplum est quadrati ex  $EZ$ . Aequalis autem  $EZ$  rectae  $FA$ ; ergo quadratum ex  $EH$  duplum est quadrati ex  $FA$ . Demonstratum est autem et quadratum ex  $EA$  duplum quadrati ex  $AF$ ; ergo quadrata ex  $AE$ ,  $EH$  dupla sunt quadratorum ex  $AF$ ,  $FA$ . Quadratis autem ex  $AE$ ,  $EH$  aequale est quadratum ex  $AH$  (I. 47.); quadratum igitur ex  $AH$  duplum est ipsorum  $AF$ ,  $FA$ . Quadrato autem ex  $AH$  aequalia sunt quadrata ex  $AA$ ,  $AH$ ; quadrata igitur ex  $AA$ ,  $AH$  dupla sunt quadratorum ex  $AF$ ,  $FA$ . Aequalis autem ex  $AH$  rectae  $AB$ ; ergo quadrata ex  $AA$ ,  $AB$  dupla sunt quadratorum ex  $AF$ ,  $FA$ . Si igitur recta etc.

### PROPOSITIO XI. (Fig. 160.)

Datam rectam secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

$AF^2 + FA^2 + 2FA \times FA$  (II. 4.) erit  $FA^2 + FA^2 + 2FA \times AA + BA^2 = AA^2 + BA^2 = 2(FA^2 + FA^2)$  (hyp.) adeoque  $2FA \times AA + BA^2 = FA^2 + FA^2$  vel  $BA^2 = FA^2 + FA^2 - 2FA \times AA$ .

Hinc fig. priore ubi  $FA < FA$  (hyp.)  $BA^2 = (FA - FA)^2$  (II. 7.

Obs.) et  $BA = FA - FA$ , et addita communi  $FA$ ,  $AF = BF$ ,

Et fig. posteriore, ubi  $FA > FA$  (hyp.)  $BA^2 = (FA - FA)^2$

(II. 7. Obs.) et  $BA = FA - FA$ , et addita communi  $FA$ ,  $FA +$

$BA = FA$ , et demta communi  $BA$ ,  $AF = BF$ . Cf. P8. iderem.

§. 187. Caeterum collatis iis, quae II. 6. Cor. 6. de simi-

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ . δαί δὲ τὴν  $AB$  τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $AB\Delta\Gamma$ , καὶ τετμήσθω ἡ  $AG$  δίχα κατὰ τὸ  $E$  σημείον, καὶ ὑπεξεύχθω ἡ  $BE$ , καὶ διήχθω ἡ  $GA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ κείσθω τῇ  $BE$  ἴση ἡ  $EZ$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $AZ$  τετράγωνον τὸ  $Z\Theta$ , καὶ διήχθω ἡ  $H\Theta$  ἐπὶ τὸ  $K$ . λέγω ὅτι ἡ  $AB$  τέμνεται κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Theta$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι <sup>1)</sup> τῷ ἀπὸ τῆς  $A\Theta$  τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ  $AG$  τέμνεται δίχα κατὰ τὸ  $E$ , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ  $AZ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EZ$  τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ  $EZ$  τῇ  $EB$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  τετρα-

1) Peyrard. cum Cod. a. ponit ἴσον ποιεῖν. Nos ex ed. Oxon. restituumus lectionem εἶναι, ut in Protasi et Ecthesi legitur. Ed. Basil habet; ὥστε — ἴσον ἐστὶ.

libus propositionum II. 5. et II. 6. conversis dicta sunt, observari potest, determinationem, quae hic in enunciato Obs. 10. adiecta fuit, ibi haud allatam fuisse. Neque ea etiam in particulari conditionum expositione erat necessaria: si quis tamen generali propositione utramque conversam indeterminatae differentiae quadratorum ex  $\Gamma A$  et  $\Delta A$  vel  $AB$  mentione complecti velit, eadem determinatione opus erit. Nempe etiam in figura prior., quam Obs. 9. habuimus, est  $AA \times AB = \Gamma A^2 - \Gamma A^2$ , neque tamen  $AG = GB$ . Cf. Pfeleiderer, §. 192.

#### PROPOSITIO XI.

Obs. 1. Huic problemati sequens praemitti potest ana-

Sit data recta  $AB$ ; oportet igitur ipsam  $AB$  secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

Describatur ex  $AB$  quadratum  $AB\Gamma$  (I. 46.), et secetur  $\Gamma\Gamma$  bifariam in puncto  $E$  (I. 10.), et iungatur  $BE$ , et producat  $\Gamma A$  in  $Z$ , et ponatur rectae  $BE$  aequalis  $EZ$  (I. 3.), et describatur ex  $AZ$  quadratum  $Z\Theta$ , et producat  $H\Theta$  ad  $K$ ; dico  $AB$  secam esse in  $\Theta$ , ita ut rectangulum sub  $AB$ ,  $B\Theta$  contentum aequale sit quadrato ex  $A\Theta$ .

Quoniam enim recta  $\Gamma\Gamma$  secatur bifariam in  $E$ , additur autem ei recta  $AZ$ ; rectangulum sub  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  contentum cum quadrato ex  $AE$  aequale est quadrato ex  $EZ$  (II. 6.). Aequalis autem  $EZ$  rectae  $EB$ ; ergo rectangulum sub  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  contentum tum quadrato ex  $AE$  aequale est quadrato ex  $EB$ . Sed qua-

lysis. Quum quadratum dimidia  $AB$  sit quadrans quadrati totius  $AB$  (II. 4. Cor. 2.), rectangulum autem sub dimidia ac tota  $AB$  sit quadrati ipsius  $AB$  semissis (II. 1. Cor. 2.): sectio rectae datae  $AB$  nostra propositione imperata in inaequalia fecit, ac segmentum, cuius quadratum rectangulo sub tota  $AB$  et sub altero segmento aequetur, duorum inaequalium maius esse debet. Facta supponatur sectio desiderata in  $\Theta$ . Tum super maiori segmento  $A\Theta$  descripto quadrato  $A\Theta HZ$ , et ad minus segmentum  $B\Theta$  applicato rectangulo  $B\Theta KA$ , cuius alterum latus  $BA=AB$ , requiritur, ut sit  $A\Theta HZ=B\Theta KA$ . Cum aeternum horum spatiorum, nec nisi rectanguli  $B\Theta AK$  alterum latus  $BA=AB$  detur; ansa hinc non suppetit problema immediate solvendi. Eam vero suppetit rectarum  $AK$ ,  $ZA$  ad occursum usque in puncto  $I'$  continuatio: qua facta, ut sit  $A\Theta HZ=B\Theta KA$ , addito utrimque rectangulo  $A\Theta KI'$ , debet

γωνίον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EB$  τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς  $EB$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AE$ , ὁρθῇ γὰρ ἡ πρὸς τῷ  $A$  γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $FZ$ ,  $ZA$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AE$ . Κοινὸν ἀφ' ἑκτέρου τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$  λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $FZ$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $FZ$ ,  $ZA$  τὸ  $ZK$ , ἴση γὰρ ἡ  $AZ$  τῇ  $ZH$ · τὸ δὲ ἀπὸ τῆς  $AB$  τὸ  $AD$ · τὸ ἄρα  $ZK$  ἴσον ἐστὶ τῷ  $AD$ . Κοινὸν ἀφ' ἑκτέρου τὸ  $AK$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $Z\Theta$  τῷ  $\Theta A$  ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $\Theta A$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Theta$ , ἴση γὰρ ἡ  $AB$  τῇ  $BA$ · τὸ δὲ  $Z\Theta$  τὸ ἀπὸ τῆς  $A\Theta$  1)· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Theta$  περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Theta A$  τετραγώνῳ.

1) Hanc lectionem ex edd. Oxon. et Basil. restituimus. Peyrardus et Cod. a. omittunt verba ἴση γὰρ ἡ  $AB$  τῇ  $BA$ .

esse rectangulum  $HZKF$  = quadrato  $ABAT$  rectae datae  $AB$ . Cum rectanguli  $HZKF$  latus  $HZ$  sit =  $AZ$  (constr.); rectangulum  $HZKF$  idem est cum rectangulo sub  $FZ$  et  $AZ$ . Itaque problematis solutio huc redit: ut rectae  $FA$  positione ac magnitudine datae (quippe quae datae rectae  $AB$  perpendicularis est et aequalis) in directum adiiciatur  $AZ$  talis, ut rectangulum sub adiecta  $AZ$  et sub composita  $FZ$  ex data  $FA$  et adiecta  $AZ$  aequale sit quadrato rectae datae  $AB$ . Atqui bifariam in puncto  $E$  divisa  $FA$ , est  $EZ q = FZ \times ZA + EA q$  (II. 6.). Quare, ut sit  $FZ \times ZA = AB q$ , debet esse  $EZ q = AB q + EA q$ . Sed ob angulum  $EAB$  rectum (constr.) est  $EB q = AB q + EA q$ . (I. 47.). Proinde oportet sit  $EZ q = EB q$ , et hinc  $EZ = EB$  (I. 46. Cór.). Constructio problematis, quod et Clavius notat, non requirit, nisi ut datae rectae  $AB$  in altero eius extremo  $A$  perpendicularis excitetur  $AT$  ipsi  $AB$  aequalis, eaque bifariam in  $E$  secetur, seu ut tantum semissi ipsius  $AB$  aequalis  $AE$  ad angulos rectos



dato ex  $EB$  aequalia sunt quadrata ex  $BA$ ,  $AE$  (I. 47.), rectus enim est angulus ad  $A$ ; rectangulum igitur sub  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  cum quadrato ex  $AE$  aequale est quadratis ex  $BA$ ,  $AE$ . Commune auferatur quadratum ex  $AE$ ; reliquum igitur rectangulum sub  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  contentum aequale est quadrato ex  $AB$ . Et est rectangulum quidem sub  $\Gamma Z$ ,  $ZA$  ipsum  $ZK$ , aequalis enim est  $AZ$  rectae  $ZH$ , quadratum vero ex  $AB$  ipsum  $AA$ ; rectangulum igitur  $ZK$  aequale est quadrato  $AA$ . Commune auferatur  $AK$ ; reliquum igitur  $Z\theta$  ipsi  $\theta A$  aequale est. Et est quidem  $\theta A$  rectangulum sub  $AB$ ,  $B\theta$  contentum; recta enim  $AB$  aequalis est rectae  $BA$ , et  $Z\theta$  est quadratum ex  $A\theta$ ; rectangulum igitur sub  $AB$ ,  $B\theta$  contentum aequale est quadrato ex  $\theta A$ .

datae  $AB$  in angulo  $A$  constituantur, tum recta  $EA$  continuetur, donec sit  $EZ =$  rectae  $EB$  in eadem puncta data  $E$ ,  $B$ , denique a data  $AB$  abscindatur  $A\theta$  aequalis rectae per hactenus factae  $AZ$ . Quae quidem semper erit data  $AB$  minor cum sit  $EB$ , itaque  $EZ$  seu  $EA + AZ < EA + AB$  (I. 20.): eademque maior dimidia  $AB$  seu  $EA$ , cum sit  $EB$  seu  $EA + AZ > AB$  (I. 19) seu  $2EA$ . Demonstratio etiam absque reliquo figurae apparatus sic peragi potest:

$$EZ q = EB q = AB q + EA q \text{ (constr. et I. 47.)}$$

$$\text{Aequi } EZ q = AZ q + EA q + 2EA \times AZ \text{ (II. 4.)}$$

$$\text{Igitur } AZ q + EA q + 2EA \times AZ = AB q + EA q$$

$$\text{vel } AZ q + 2EA \times AZ = AB q$$

$$\text{h. e. } A\theta q + BA \times A\theta = AB q \text{ ob } AZ = A\theta; AB = 2EA \text{ (constr.)}$$

$$= AB \times B\theta + BA \times A\theta \text{ (II. 2.)}$$

$$\text{ergo } A\theta q = AB \times B\theta. \text{ Cf. Pfeiderer. §§. 62. 63.}$$

Obs. 2. Propositio haec aliis verbis docet rectangulum  $B\theta A\theta$  construere, cuius latus maius  $BA$  est datae rectae  $AB$

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεία ἡ  $AB$  τετμηται κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Theta$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι <sup>1)</sup> τῷ ἀπὸ τῆς  $\Theta A$  τετραγώνῳ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Verbum εἶναι pro ποιεῖν, quod Peyrard. habet, pariter ex edd. Oxon. et Basil. restituimus.

aequale, et cuius area aequalis est quadrato differentiae  $A\Theta$  laterum contiguorum  $AB$ ,  $B\Theta$  rectanguli. Cf. Pfeiderer. §. 64.

Obs. 3. Quum rectanguli  $HZKF$  latus  $HZ$  sit  $=ZA$  (constr.): est  $FZ - HZ = FA = AB$ . Praeter aream  $HZKG = AB^2$  (Obs. 1.) datur itaque differentia laterum eius contiguorum  $= AB$ . Problema igitur propositione 11. II. enunciatur per analysin Obs. 1. reducitur ad hoc; ut construatur parallelogrammum rectangulum, cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae  $AB$  aequalis, et cuius area aequalis sit quadrato eiusdem rectae datae  $AB$ . Quod porro per bisectionem differentiae datae  $FA$  laterum  $FZ$  et  $ZA$  rectanguli describendi reducitur (II. 5. Cor. 10.) ad determinationem semisummae  $EZ$  eorundem laterum, quae absolvitur ope propositionis (II. 6. et I. 47.) Cf. Pfeiderer. §. 65.

Obs. 4. Eodem modo solvitur problema generalius: construere rectangulum (Fig. 161.) cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae  $AF$ , area autem quadrato alius cuiuscunque rectae datae  $I$  aequalis. Sumto enim  $FZ$  esse latus maius rectanguli construendi: cum latus minus ab eo differre debeat longitudine  $AF$ : oportet illud sit  $= AZ$ . Rursus igitur eo redigitur problema, ut datae rectae  $FA$  in directum adiciatur  $AZ$  talis, ut rectangulum sub adiecta  $AZ$  et sub composita  $FZ$  ex data  $FA$  et adiecta  $AZ$  aequale sit quadrato rectae datae  $I$ . Quod bifariam in  $B$  secando datam laterum quaestorum rectanguli differentiam  $AF$  denuo ad illorum semisummam  $EZ$  (II. 5. Cor. 10.) investigandam deducitur. Atqui  $EZ^2 = FZ \times ZA + BA^2$  (II. 6.). Ut igitur sit rectangulum  $FZ \times ZA = I^2$ ; debet esse  $EZ = I^2 + EA^2$ , proinde (I. 48.)  $EZ$

Ergo data recta  $AB$  secta est in  $\Theta$ , ita ut rectangulum sub  $AB$ ,  $B\Theta$  contentum aequale sit quadrato  $\propto A$ . Quod oportebat facere.

aequalis esse debet hypotenusae trianguli rectanguli, cuius latera circa angulum rectum sint, unum quidem datae rectae  $I$ , alterum datae  $EA$  aequalia. Hinc sequens enascitur constructio: datae laterum trianguli differentiae  $AI$ , bifariam in puncto  $E$  divisae perpendicularis in altero eius extremo  $A$  constituitur  $AB =$  datae rectae  $I$ ; tum centro  $E$  intervallo  $EB$  describitur circulus; qui ob  $EB > EA$  (I. 19.) ideoque  $> EI$  rectam  $IA$  utrimque productam secabit. Sint puncta  $Z, A$  hae sectiones. Erit rectangulum sub  $IZ$  et  $ZA$  vel sub  $AA$  et  $IA$ , quod requiritur. Nempe 1) tam  $IZ - ZA$ , quam  $AA - IA = AI$ . 2) Rectangulus  $IZ \times ZA + EA^2 = EZ^2$ , et rectang.  $AA \times AI + EI^2 = EA^2$  (II. 6.). Quare, cum sint  $BI = EA$ , et  $EZ = EA = EB$  (constr.) fit tam rectang.  $IZ \times ZA + EA^2$ , quam  $AA \times AI + EA^2 = EB^2 = AB^2 + EA^2$  (I. 47.) et hinc tam rectang.  $IZ \times ZA$ , quam rectang.  $AA \times AI = AB^2 = I^2$ . Caeterum, ut facile patet, latera duorum rectangulorum situ solo, non magnitudine differunt. Eandem problematis, enunciato tantum a praecedente diversi: „ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato“ constructionem tradit Rob. Simson. (Euclid. Element. Glasguae 1756. in nota ad 28. et 29. VI. sq. p. 381. sq.). Cf. Halley in scholio ad Prop. VIII. 18. Conic. Apollonii P. II. p. 153. Pfeiderer. I. c. §. 66. cf. infra ad VI. 29. Obs. 5. Quodsi in figura 160. data esse sumatur recta  $A\Theta$ , at invenienda datum recta  $AB$ , ita ut  $A\Theta^2 = AB \times B\Theta$  (quod problema conversum erit problematis II. 11.), facile patet, etiam hoc problema esse idem, ad quod etiam II. 11. redire vidimus, nempe ut rectae datae  $A\Theta$  adiciatur alia  $\Theta B$  in directum, ita ut rectangulum sub adiecta  $\Theta B$  et sub  $AB$  composita ex data et adiecta aequale sit datae  $A\Theta$  quadrato, vel ut describatur re-

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετραγώνων μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ἀμβλείαν γωνίαν περιχοῦσων πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ἀμβλείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἢ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανόμενης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

ctangulum  $B\theta AK$ , cuius laterum  $BA$ ,  $B\theta$  differentia sit data  $A\theta$ , et cuius area aequalis sit eiusdem rectae  $A\theta$  quadrato: Solvetur itaque problema eodem modo ac II. 11. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 67. 68.

Obs. 6. Iubeatur nunc (quod est alterum problematis II. 11. conversum) datae  $B\theta$  (Fig. 162.) alia  $\theta A$  in directum ita adijci, ut rectangulum sub data  $B\theta$  et sub composita  $BA$  ex data et adiecta sit quadrato adiectae  $\theta A$  aequale; seu iubeatur rectangulum construi, cuius latus minus sit datae rectae  $B\theta$  aequale, et cuius area aequalis sit quadrato differentiae  $A\theta$  laterum  $BA$ ,  $B\theta$  rectanguli. Facta supponatur continuatio desiderata rectae datae  $B\theta$  ad punctum  $A$  usque. Cum sit rectang.  $AB \times B\theta = B\theta q +$  rectang.  $A\theta \times \theta B$  (II. 3.)  $> B\theta q$ , ut possit esse  $A\theta q =$  rectang.  $AB \times B\theta$ ; debet esse  $A\theta q > B\theta q$ ,  $A\theta > B\theta$ . Construatursuper  $A\theta$  quadratum  $A\theta ZH$ , et super  $AB$  rectangulum  $ABN\Pi$ , cuius latus  $B\Pi = B\theta$ . Recta  $N\Pi$ , quae ex opposito basis  $AB$  rectangulum  $AB\Pi N$  terminat, latera  $AZ$ ,  $\theta H$ , utpote ipsi  $A\theta$  aequalia, ac proinde maiora quam  $B\Pi = B\theta$  in punctis  $N$  et  $O$  ita secabit, ut sint  $AN = \theta O = B\Pi$  (I. 34.)  $= B\theta$  (constr.); adeoque  $ZN = HO = A\theta \times B\theta$ , atque ut rectangulum  $NZHO$  sit rectang. sub  $\theta A$  et  $HO$ . Porro, ut sit  $A\theta q =$  rectang.  $AB \times B\theta$  h. e. constr.  $A\theta ZH = AB\Pi N$ , ablato communi spatio  $A\theta ON$ , debet esse  $NZHO = B\theta O\Pi$  h. e. rectang.  $\theta H \times HO = B\theta q = \theta O q$  (constr. et demonstr.). Etiam hoc problema itaque eodem redit, quo

## PROPOSITIO XII. (Fig. 163.)

In triangulis obtusangulis quadratum lateris obtusum angulum subtendentis maius est quam quadrata  $\alpha$  lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno laterum circi obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta intercepta extra a perpendiculari ad angulum obtusum.

II. 11., nempe ut data  $BO$  in directum adiciatur alia  $OH$ , ita ut rectangulum sub adiecta  $OH$ , et sub  $BO$  composita ex duobus et adiecta aequale sit datae  $BO$  quadrato, vel ut describatur rectangulum  $NZHO$ , cuius laterum  $NO$ ,  $OH$  differentia  $BO$  sit data  $BO$ , et cuius area aequalis sit eiusdem rectae  $BO$  quadrato. Unde etiam hic sequitur similis constructio. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 69. et §. 90.

## PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Austin p. 39. sq. tres ultimas libri secundi propositiones partem constituere ait ab caeteris seiunctam, pariter ac tres ultimas primi libri, sed non aequi: ac has in elementis necessariam; neque omnino, praesertim quod ad II. 12. et II. 13. attineat, valde utilem: ideoque eas successorum Euclidis imprudenti gloriosove elementa suis theoriis augendi studio imbrendas esse censet. Contra quae Pfeiderer. I. c. Pars III. §. 193. quoad II. 12. et II. 13. monet, praeter nexum argumenti harum propositionum cum I. 47. pronamque ipsarum ex hac et II. 4. II. 7. consequentiam, et ad plures applicationes insignem usum (quarum exempla et ipse subiungit) re ipsa XII. propositionis 17. demonstrationem priorem supponere, et Datorum propositiones 64. et 65. (in textu graeco Claudii Hardy Paris. 1625. et Dav. Gregorii) vel 74. 75. in versionibus Rob. Simson. et Schwab. illis inti.

"Εστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ  $ABΓ$  ἀμβλείᾳ ἔχον τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $B$  σημείου ἐπὶ τὴν  $ΓA$  ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἢ  $BD$  λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  τετραγώνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$  τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AD$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ  $ΓA$  τέμνεται ὡς ἔνυχς κατὰ τὸ  $A$  σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $ΓA$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AD$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AD$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκεῖσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AB$  ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AD$ ,  $AB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AD$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $ΓA$ ,  $AB$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓB$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ  $A$  γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ

Obs. 2. Perpendicularum  $BA$  cadere, ut in enunciato propositionis sumitur ad partes anguli  $BAΔ$ , qui deinceps est angulo obtuso  $BAΓ$ , patet ex I. 17. Cor. 5. Cf. Pflaiderer. I. c. §. 191.

Obs. 3. Caeterum quodcunque laterum angulum obtusum comprehendentium producat, ut in illud perpendicularum ex opposito trianguli vertice demittatur, sive illud (Fig. 164.)  $BA$ , sive  $ΓA$  fuerit, rectangulum inter illud latus, et rectam interceptam extra ad perpendicularum usque, utrimque eiusdem magnitudinis. erit, nempe  $ΓA \times AD = BA \times BE$ , quod vel ex ipsa propositione II. 12. patet (Gilbert. I. c. p. 192.) Pflaiderer. §. 198. vel ex I. 41. Cor. 4. consequitur, vel immediate sic adstruetur. Est  $BA^2 + ΓA^2 = BE^2 + ΓE^2$ , quia utraque summa  $= BG^2$  (I. 47.).

Proinde ob  $ΓA^2 = ΓA^2 + AD^2 + 2ΓA \times AD$  (II. 4.)

et  $BE^2 = BA^2 + AE^2 + 2BA \times AE$  (II. 4.)

est  $BA^2 + ΓA^2 + AD^2 + 2ΓA \times AD$   
 $= ΓE^2 + BA^2 + AE^2 + 2BA \times AE$ .

Sit triangulum obtusangulum  $ABF$  habens angulum  $BAF$  obtusum, et ducatur a  $B$  puncto ad  $F$  productam perpendicularis  $BA$  (I. 12.); dico quadratum ex  $BI$  maius esse quam quadrata ex  $BA$ ,  $AF$ , rectangulo bis sub  $FA$ ,  $AA$  contento.

Quoniam enim recta  $FA$  secatur utcumque in puncto  $A$ ; quadratum ex  $FA$  aequale est quadratis ex  $FA$ ,  $AA$ , et rectangulo bis sub  $FA$ ,  $AA$  contento (II. 4.). Commune addatur quadratum ex  $AB$ ; quadrata igitur ex  $FA$ ,  $AB$  aequalia sunt quadratis ex  $FA$ ,  $AA$ ,  $AB$  et rectangulo bis sub  $FA$ ,  $AA$  contento. Sed quadratis ex  $FA$ ,  $AB$  aequale est quadratum ex  $FB$  (I. 47.), rectus enim est ad  $A$  angulus; quadratis vero ex  $AA$ ,  $AB$  aequale est quadratum ex  $AB$  (I. 47.);

Atqui  $BA^2 + AA^2 = BA^2$ , et  $FE^2 + AE^2 = FA^2$  (I. 47.) demus igitur utrimque aequalibus, manet  $2FA \times AA = 2BA \times AE$ , et  $FA \times AA = BA \times AE$ . Cf. Pfeiderer. l. c. §. 199.

Oba. 4. Alii alias propositionis II. 12. demonstrationes dederunt, quo pertinet Coësius; vid. Pfeiderer. §§. 195. 196. Ea, quam Gregorius a St. Vincentio habet (Pfeiderer. l. c. §. 20. Gilbert. p. 296.) praemissa ea propositione, quam Oba. 3. habuimus, quam vero ille a propositionibus 31. 35. 36. libri III. repetit, rem eodem fere modo, eademque delineatione demonstrat, quae apud Euclidem in I. 47. adhibetur, nisi quod duo latera opposita quadratorum circa angulum obtusum producantur, usquedum convenient cum perpendicularo ex opposito trianguli vertice in ea demisso, et saepe concinna et aique elegans. Simplicitate tamen superari videtur ab ea, quam dedit Ambrosius Rhodius Euclid. Elem. libri XIII. ed. 1661. p. 51. sq. et quam etiam habent Claud. Richardus Guérinus (Euclides aduinctus et methodicus Aug. Taurin. 1671. p. 60. sq.) Euclidis Elementa Lond. 1678. p. 95. sq. et Coë-

τῶν  $AA$ ,  $AB$  ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $GA$ ,  $AB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $GA$ ,  $AA$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον τῶν ἀπὸ τῶν  $GA$ ,  $AB$  τετραγώνων μείζον ἐστὶ, τῷ δις ὑπὸ τῶν  $GA$ ,  $AA$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον ἐλατ-

sius, quae huc redit. In trianguli ad  $A$  obtusanguli (Fig. 165.)  $BA\Gamma$  latus alterutrum  $GA$  ex vertice opposito  $B$  demisso perpendiculari  $BA$ , quod (Obs. 2.) in latus  $GA$  productum ad partes anguli  $BA\theta$  deinceps positi obtuso  $BA\Gamma$  cadit), tum rectarum  $BA$ ,  $GA$  descriptis quadratis  $B\theta$ ,  $\Gamma H$ , atque hoc eodem modo, quo in Prop. II. 4. diviso, est  $B\Gamma^2 = BA^2 + GA^2 + \Gamma A^2$  (I. 47.)  $= BA^2 + MZ + AN + GA^2 + AH^2 = BA^2 + GA^2 + AA^2 + 2GA \times AA$  (II. 4.).

Atqui  $BA^2 + AA^2 = BA^2$  (I. 47.)

itaque  $B\Gamma^2 = BA^2 + AG^2 + 2GA \times AA$ . Cf. Pfeiderer. §. 197.

### PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Propositio haec valet non tantum de triangulis acutangulis i. e. Def. I. 29. de iis, quae tres angulos acutos habent, sed de omnibus omnis generis triangulis. Quod dum observarunt Isaacus Monachus in scholio ad hanc propositionem, Campanus, Commandinus, Peletarius, Clavius, Whiston., Robert. Simson., Austin., Pfeiderer, l. c. alique, Nempe a) non tantum in triangulis rectangulis, et obtusangulis, quorum itaque duo reliqui anguli ad basin sunt acuti (I. 17. Cor. 1.), si e vertice anguli recti vel obtusi in oppositam basin demittatur perpendicularum, eadem prorsus demon-



quadratum ex  $FB$  aequale est quadratis ex  $FA$ ,  $AB$  et rectangulo bis sub  $FA$ ,  $AA$  contento; quare quadratum ex  $FB$  maius est quam quadrata ex  $FA$ ,  $AB$  rectangulo bis sub  $FA$ ,  $AA$  contento. In obtusangulis igitur etc.

### PROPOSITIO XIII. (Fig. 166.)

In triangulis acutangulis quadratum lateris acutum subtendentis minus est quam quadrata ex late-

ris obtinebit, quae est apud Euclidem: verum b) quod pariter datum monuerunt viri docti, propositio haec etiam locum habet, si unus angulorum ad basin rectus vel obtusus fuerit. Nempe priore casu (Fig. 167. a.) in triangulo  $ABF$  ad  $F$  rectangulo perpendicularum ex  $A$  ad  $BF$  demissum cum ipso latere  $AF$ : adeoque punctum  $A$  cum puncto  $F$  coincidit, et propositio II. 13., ex qua esse dicitur  $AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2FB \times BA$  in hanc transit:  $AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2FBq$ , vel si aliter dicamus in hanc:  $AF^2 = AB^2 - FBq$  quod quidem patet ex I. 47. Cor. 2. Cf. Pfeiderer. §. 204. Posteriore casu (Fig. 167. b.) in triangulo  $ABF$ , quod angulum  $AFB$  obtusum habet, perpendicularum ex  $A$  in basin  $BF$  demissum caetera (I. 17. Cor. 5.) ad partes anguli acuti  $AFB$ , qui obtuso  $AFB$  deinceps est, eritque  $AB^2 = AA^2 + BA^2$  (I. 47.), adeoque  $AB^2 + BF^2 = AA^2 + BA^2 + BF^2$ . At  $BA^2 + BF^2 = FA^2 + 2AB \times BF$  (II. 7.). Itaque  $AB^2 + BF^2 = AA^2 + FA^2 + 2AB \times BF = AF^2 + 2AB \times BF$  (I. 47.). Whiston. Demonstr. 2. Astin. p. 38. Gilbert. p. 288. sq. Idem etiam adplicatis ad hunc casum reliquis reliquorum casuum demonstrationibus consequitur. Cf. Pfeiderer. §§. 205–207.

Obs. 2. Ex iis, quae Obs. 1. dicta sunt, patet, arctiores, quam res iubet, limitibus enunciatum propositionis

τόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιεχοσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ  $ABΓ$  ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ  $B$  γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου ἐπὶ τὴν  $BΓ$  κάθετος ἡ  $ΑΔ$ · λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώνον ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΑ$  τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

II. 13. apud Euclidem circumscriptum esse. Simul patet ex duobus postremo loco positus casibus, rectam inter alterum basis terminum, et perpendicularum interceptum nequaquam semper ἐντος intercipi, saltem si hanc vocem ad ipsum triangulum, de quo sermo est, referre velis. Suspicio itaque nascitur, non genuinum esse textum graecum propositionis II. 13., qualem nunc quidem habemus. Nec medelam illi afferit, quem summis laudibus Peyrardus extollit, Codex 190., ab ipso signo a notatus. Quin vetustissimum iam esse erratum, quamvis ad ipsum elementorum auctorem haud referendum esse videatur, inde patet, quod iam Isaacus Monachus id notaverit, qui rem ita interpretatur l. c. ut statuatur, hoc loco Euclidem omnia triangula, secus ac in Def. I. 29. appellare oxygonia, quia omnia habeant angulos acutos, etsi non omnes, tamen ad minimum duos, quae tamen sententia Pflaiderero l. c. §. 210 iure parum probabilis videtur. Suspicionem textus hoc loco corrupti, eodem monente, etiam illud augeat, quod in expositione eius verba: ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ  $ABΓ$  ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τὸ  $B$  γωνίαν notante Austin. p. 37. mera fere sunt tautologia, vel potius absonam prae se ferunt determinationem (a quo tamen vitio ea liberare forte possis, si ita interpretari velis: sit triangulum acutangulum, ita nempe, ut nominatim angulus  $B$  sit acutus). Praeterea autem, ut Pfla-

tenus acutum angulum continentibus rectangulo his contento sub uno laterum circa angulum acutum in *perpendicularis* cadit, et recta intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

Sit triangulum acutangulum  $ABF$ , habens angulum ad  $B$  acutum, et ducatur ab  $A$  puncto ad  $BF$  perpendicularis  $AA$  (I. 12.); dico quadratum ex  $AF$  minus esse quam quadrata ex  $FB$ ,  $BA$ , rectangulo *is* sub  $FB$ ,  $BA$  contento.

des. I. c. monet, accedit, quod in propositionis 65. (75.) *datorum* enunciato generatim sumitur: *Ἐὰν τρίγωνον ὀξεῖαν ᾖ, πάλιν δεδομένην*. Expositio quidem eius adiunctam rursus habet ad triangulum acutangulum restrictionem. Sed eadem, quæ magis adhuc otiosa laborat vocis *ὀξεῖαν* adiectione (nisi etiam hic interpretando mitigare velimus), qua propositionis II. 13. expositio, unde contra ipsius propositi tenorem translati videri potest (quamvis etiam hic codex a nullam medellam aliat). Scopus enim, quo propositiones 64. 65. (74. 75.) *datorum* tendunt, laud permittit, ut posterior ad triangula acutangula restringatur. Is quippe, ut problematibus, quibus inserviunt (cuiusmodi est in Apollonii *locor. plan. vers. German. p. 439. 443.*) propositiones illae reipsa sufficiant, arctior constitui nequit, quam ut trianguli cuiuslibet dato angulo obliquo, rationem trianguli ad differentiam quadrati lateris angulo dato oppositi et summae quadratorum laterum eundem angulum comprehendentium dari ostendant. Hoc etiam posito, Prop. II. 13. Elementorum, qua *datorum* 65. (75.) nititur, pariter ad omnis generis triangula pertinere debet. Præterea etiam aliae propositionis II. 13. applicationes, quarum in excursu ad II. 13. adhuc nonnullas habebimus, universum eius, omnes in Obs. 1. memoratos casus complectentem, ambitum requirunt. Cf. Pfeiderer. §§. 212. 213. Quæ cum ita sint,

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ  $ΓΒ$  τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $Α$  τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$  τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$  τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθαι τὸ ἀπὸ τῆς  $ΔΑ$  τετραγώνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΔΑ$  τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΔ$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΔΔ$ ,  $ΔΓ$  τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $ΒΔ$ ,  $ΔΑ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΒ$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ ἑὸς τῷ  $Δ$  γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $ΔΔ$ ,  $ΔΓ$  ἴσον

variis modis viri docti propositionem hanc II. 13. generatim enunciare ac demonstrare studuerunt. Et alii quidem omitta tantum trianguli *acutanguli* mentione, reliqui propositionis 13. enunciati atque expositionis versionem ita concinnarunt, ut eo, qui Obs. 1. a. indicatur respectu in triangula rectangula et obtusangula quadrent, quo pertinent Peletarius p. 105. sq. De Chales. Coursus Mathem. Tom. I. Lugd. 1674. p. 23. Ximenes (I sei primi Elementi della geometria piana. In Venezia 1752. p. 126.). Lorenz (Euklids Elemente 3te Ausg. Halle 1809. p. 40.). Alii etiam vocem *ἔντος* expungendam et expressionem: *ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει* latius sumendam, neque ad casum intra lateris huius terminos restringendam putaverunt, ita ut etiam casum Obs. 1. b. indicatum propositio haec complecteretur. Hac ratione Tacquet. p. 67. sq. rem exprimit, qui tamen vulgarem tantum demonstrationem exhibet. Clavius, Compendius, Rob. Simson, Austin. rem, uti Obs. 1. b. diximus, aut aliter demonstrant. Cf. Pfeiderer. §§. 211. 214., qui idem §. 216. indicat, sufficere posse, si verba tantum τοῖς ὀξυγωνίοις, ὀξυγώνιον expungantur, dummodo demonstrationis initium (additis, quae uncis inclusa sistuntur) ad figuram textus et figuram posteriorem ad Obs. 1. a. exhibitam ita referatur: Ἐπὶ γὰρ (ἤτοι) εὐθεία ἡ  $ΓΒ$  τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $Α$  (ἡ εὐθεία ἡ  $ΔΒ$  κατὰ τὸ  $Γ$ ), et verba ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, τῆς ἀπολαμβανομένης ἔντος πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ, iisque oppo-

Quoniam enim recta  $FB$  secta est utcumque in  $A$ ; quadrata ex  $FB$ ,  $BA$  aequalia sunt rectangulo bis sub  $FB$ ,  $BA$  contento et quadrato ex  $AF$  (II. 7.). Commune addatur quadratum ex  $AA$ ; ergo quadrata ex  $FB$ ,  $BA$ ,  $AA$  aequalia sunt rectangulo bis sub  $FB$ ,  $BA$  contento et quadratis ex  $AA$ ,  $AF$ . Sed ipsis eadem ex  $BA$ ,  $AA$  aequale est quadratum ex  $AB$  (I. 47.), rectus enim est ad  $A$  angulus; quadratis vero ex  $AA$ ,  $AF$  aequale est quadratum ex  $AF$ ; quadrata igitur ex  $FB$ ,  $BA$  aequalia sunt quadrato ex  $AF$ , et

propositionis 12.: ἐφ' ἧν ἐκβληθεῖσαν ἡ πᾶσιτος πίπτει, τῇς ἐκβληθευμένης ἔντος πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ, situm perpendiculari ac segmenti per illud abscissi diversum relate ad angulum ipsiusque verticem, non ad triangulum iudicare censeantur.

Obs. 3. Caeterum etiam hic pariter ac II. 12. Obs. 3. de triangulis obtusangulis dictum fuit, notari potest, in quodcumque laterum angulum acutum comprehendentium ex opposito vertice demittatur perpendicularum (Fig. 168. 169.) sive aliud  $AB$  sive  $BF$  fuerit, fore semper rectangulum inter illud laterum ductam ab angulo acuto  $B$  inde usque ad demissum perpendicularum interceptum utrimque eiusdem magnitudinis, nomen  $FB \times BA = AB \times BE$ , quod pariter vel ex ipsa propositione 12. ita ut Obs. 2. diximus, amplificata patet, vel ex I. 41. Cor. 4. consequitur, vel similiter ac in II. 12. ita adstruatur: Est  $AA^2 + AF^2 = FE^2 + AE^2$ , quia utraque summa =  $AF^2$  (I. 47.) Proinde ob  $FA^2 = BF^2 + BA^2 - 2FB \times BA$ , et  $AE^2 = BE^2 + BA^2 - 2AB \times BE$  (II. 7.)

$$\text{ita } AA^2 + BF^2 + BA^2 - 2FB \times BA \\ = FE^2 + AB^2 + BE^2 - 2AB \times BE.$$

Aequi  $AA^2 + BA^2 = AB^2$ , et  $FE^2 + BE^2 = BF^2$ , itaque  $2FB \times BA = 2AB \times BE$  et  $FB \times BA = AB \times BE$ . Cf. Praef. detex. §. 199.

Obs. 4. Similes etiam huic propositioni demonstrandae rationes adhiberi possunt, et reapse adhibitae fuerunt, ac in

ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΒΑ$  ἴσον  
 ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $Γ$   
 $ΒΔ$  ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  ἐλαττόν ἐστι τὸ  
 ἀπὸ τῶν  $ΓΒ$ ,  $ΑΒ$  τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν  $Γ$   
 $ΒΔ$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίῳ  
 καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον οὐ  
 συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὰ  $Α$ · δεῖ δὴ  
 $Α$  εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

II. 12. Obs. 4. vidimus, e quibus pariter eam, quam praeter  
 alios Ambrosius Rhodius dedit, simplicitate sua maxime cor-  
 mendabilem huc referemus. Nempe (Fig. 170.) in triangu-  
 lo ad  $B$  acutanguli  $ABΓ$  latus  $ΒΓ$ , quod non minus sit utroque  
 reliquo, demisso perpendiculo  $ΑΔ$  (quod tum necessario in  
 triangulum  $ABΓ$  cadet (I. 18. Cor. 3.) tum rectarum  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$   
 descriptis quadratis, atque hoc rursus, ut in Prop. 4. divis-  
 denique super recta  $ZH=ΒΔ$  (I. 31.) constructo quadrato  $Z$   
 quod igitur  $=ΒΔ^2=BM$  (II. 4. Dem.) erit  $AB^2=ΑΔ^2+ΒΔ^2$   
 $ΒΔ^2$  (I. 47.)  $=ΔI+ZO$ .  $ΒΓ^2=NH+ΓΑ+ΑΗ$ , itaque  
 $AB^2+ΒΓ^2=NH+ΔI+ΓΑ+ΑΗ+ZO=NH+ΔI+2.ΓΑ$   
 quia  $ΑΗ=ΓΜ$  (I. 34.) et  $ZO=ΔΑ$  (Dem.). Sed  $ΑΓ^2=NH$   
 $+ΔI$  (I. 47.) ob  $NH=ΑΓ^2$  (II. 4. Dem.), ergo  $AB^2+ΒΓ^2$   
 $=ΑΓ^2+2.ΓΑ$   
 $=ΑΓ^2+2. \text{rectang. } ΓΒ \times ΒΔ$ , ob  $ΒΑ=ΒΔ$  (II. 4. Dem.).  
 Cf. Pfeleiderer §. 197.

Obs. 5. Conversae quoque propositionum II. 12. et II.  
 13. valent, pariter ac I. 48. conversa propositionis II. 47. de-  
 monstrata fuit. Quin haec ipsa I. 48. etiam hoc loco iuncta  
 cum reliquis inferri poterit. Nempe 1) si in triangulo aliquo  
 quadratum unius lateris aequale fuerit summae quadratorum du-  
 rum reliquorum laterum, angulus illi primum nominato latus

rectangulo bis sub  $FB$ ,  $BA$  contento; quare solum quadratum ex  $AF$  minus est quam quadrata ex  $FB$ ,  $BA$ , rectangulo bis sub  $FB$ ,  $BA$  contento. Ergo in triangulis etc.

# PROPOSITIO XIV. (Fig. 171.)

Dato rectilineo aequale quadratum constituere.

Si datum rectilineum  $A$ ; oportet igitur ipsi  $A$  rectilineo aequale quadratum constituere.

propositus rectus erit. Nam si obtusus fuerit, quadratum lateris illi oppositi maius (II. 12.) si acutus fuerit, quadratum eisdem lateris minus (II. 13.) foret summa quadratorum duorum reliquorum laterum. 2) Si quadratum lateris alicuius minus fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus obtusus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut acutus (II. 13.) esse. Denique 3) si quadratum lateris alicuius minus fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus acutus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut obtusus (II. 12.) esse. Caeterum duo casus ultimo loca allati poterant etiam simili ratione demonstrari ac in propositione I. 48. factum est ab Euclide, quas demonstrationes dedit Clavius, et quod ultimum casum attinet, iam addidit Isaacus Monachus Schol. ad II. 13. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 217. 218.

Oba. 6. Triangulum scalenum igitur erit rectangulum — rectangulum — acutangulum, prout quadratum maximi eius lateris quadratis simul reliquorum duorum laterum est aequale — aut maius — aut minus: ultimo scilicet casu maximus trianguli angulus (I. 18.) acutus erit, tantoque magis caeteri. Si triangulum aequicrurum, cuius basis utroque crurum maior est (quodsi enim singula crura basi maiora sunt, non potest

Συνίσταται γὰρ τῷ  $A$  εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλλήλογραμμον ὀρθογώνιον τὸ  $BA\Gamma$ · εἰ μὲν οὖν ἴσος ἴσιν ἡ  $BE$  τῇ  $EA$ , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιπλάθει· Συνίσταται γὰρ τῷ  $A$  εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ  $BA\Gamma$ · εἰ δὲ οὐ, μία τῶν  $BE$ ,  $EA$  μείζων ἴσιν· Ἐστω μείζων ἡ  $BE$  <sup>1)</sup>, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ  $Z$

1) Iure hic Rob. Simson observat, legendum esse saltem εἰ δὲ οὐ, ἐκβεβλήσθω ἡ  $BE$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , quum nihil prorsus interest, utrum maior an minor rectarum  $BE$ ,  $EA$  productum. Nolumus tamen sine Mss. consensu aliquid mutare.

non esse acutangulum per I. 5., I. 17., I. 18., erit rectangulum — obtusangulum — acutangulum, prout quadratum basis duplo quadrato unius cruris est aequale — aut maius — aut minus. Sic comparando invicem quadrata laterum trianguli, cuius speciei sit ratione habita angulorum, erit potest: quod comparatio ipsorum laterum non praestat, nisi vel omnia aequalia sint, vel duo aequalia ac singula maiora tertio. Cf. Pflleiderer. I: c. §. 219. Alias adhuc observationes et adplicationes Prop. II. 12. II: 13. vid. in excursu ad finem huius libri.

#### PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Huic quoque problemati, pariter ac Prop. I. 11. praemitti potest Analysis. Nempe aliterutro dati parallelogrammi rectanguli non aequilateri  $BFAE$  latere  $BE$  productum donec  $BZ=EA$ , ideoque rectangulum  $BA=BE \times EZ$ ; cum recta  $BZ$  puncto  $E$  secetur in inaequalia (hyp.); applicanda propositio II. 5. gratia, quae de rectangulo segmentorum inaequalium datae rectae praecipit, eandem  $BZ$  secare etiam oportet in aequalia: quo facto in puncto  $H$ , est rectang.  $BA = BZ \times EZ + EH^2 = HZ^2$ . Quum igitur inveniendā sit ex conditione problematis recta aliqua  $A$ , cuius quadratum sit  $= BA = BZ \times EZ$ : debet esse  $A^2 + EH^2 = HZ^2$ , vel  $A^2 = HZ^2 - EH^2$ . Invenietur autem recta  $A$  (ex I. 47. Cor. 10.), si recta  $HE$  in puncto  $B$  ad rectos angulos constituatur recta  $B\Theta$ , vel



Constitnatur ipsi  $A$  rectilineo aequale parallelogrammum rectangulum  $BA$  (I. 45.) Si igitur aequalis ea  $BE$  rectae  $EA$ , factum erit propositum; constitutum est enim ipsi  $A$  rectilineo aequale quadratum  $BJ$  (I. Def. 30.); si autem non, una ipsarum  $BE$ ,  $EA$  maior est. Sit maior  $BE$ , et producatnr ad  $Z$ ,

quod eodem redit (I. 13. Cor. 1.) si recta  $AB$  producatnr, eique ab ea abscindatur ope circuli centro  $H$ , radio  $HZ$  descripti, segmentum  $E\Theta$ , eique aequalis ponatur recta  $A$ . Cf. Pfeiderer. §. 70.

Obs. 2. Pariter (Fig. 172.) proposito cuicunque parallelogrammo obliquangulo  $BEIK$ ; utpote aequali rectangulo  $BEAF$  super eadem basi et inter easdem parallelas  $BE$ ,  $FI$  (I. 35.) aequalè quadratum efficietur, lateri cuilibet  $BE$  parallelogrammi in directum adiiciendo rectam  $EZ$  aequalem lateri  $EA$  lateris huius  $BE$  ab opposito  $KI$ , et reliqua peragendo ut in constructione problematis XIV. Cf. Pfeiderer. §. 71.

Obs. 3. Quum sit  $E\Theta < H\Theta$  (I. 19.) seu (constr.)  $< HZ$ : h. e.  $< 4HZ$  seu  $< 2BZ$  seu  $< 2(BE + EA)$ , tantoque magis  $< 2BE + EI$ , ob  $EA < EI$  (I. 19.): h. e. perimenter quadrati ab  $EH$  minor est perimetro rectanguli  $BEAF$ ; tantoque magis minor perimetro parallelogrammi obliquanguli  $BEKI$ . Aequalem igitur aream quadratum sub minore perimetro quam parallelogrammum rectangulum non aequilaterum, vel parallelogrammum obliquangulum comprehendit, quod et ex II. Cor. 2. facile deducitur. Cf. Pfeiderer. §§. 72. 73.

Obs. 4. Quodsi vicissim recta data  $BZ$  ita proponitur secunda, ut rectangulum sub segmentis eius aequale sit quadrato rectae datae  $A$ , seu si parallelogrammum rectangulum constructi inbeatnr aequale quadrato rectae datae  $A$ , et summa laterum contiguorum sit datae rectae  $BZ$  aequalis, proinde perimenter  $= 2BZ$ : ut, quod requiritur, fieri possit, recta data non maior esse debet semisse

καὶ κείσθω τῇ  $EA$  ἴση ἡ  $EZ$ , καὶ τετραγώνω ἡ  $BZ$  δίχα κατὰ τὸ  $H$ , καὶ κέντρον μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $HB$ ,  $HZ$  ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ  $B\Theta Z$  καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ  $AE$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$ , καὶ ἐπεζεύχθω  $H\Theta$ .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἡ  $BZ$  τμήνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ  $H$ , εἰς δὲ ἄγισα κατὰ τὸ  $E$ · τὸ ἄρα ἐν τῶν  $BE$ ,  $EZ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ

$HZ$  rectae secundae, sen datae laterum contiguorum rectanguli describendi summae  $BZ$ : quia rectangulo sub segmentis aequalibus  $BH$ ,  $HZ$ , seu quadrato semissis rectae secundae  $BZ$  maius spatium segmentis datae  $BZ$ , seu parallelogrammo obrectangulo, cuius perimeter  $= 2BZ$ , comprehendi nequit (II. 5. Cor. 1.). Tum vero, si  $A = \frac{1}{2}BZ$ , rectam  $BZ$  bifariam in  $H$  secando, factum erit, quod iubetur: erit enim rectanguli  $BH \times HZ = HZ^2 = A^2$  (I. 46. Cor.) cum sit  $HZ = A$  (hyp.). Sed si  $A < HZ$ , ideoque  $A^2 < HZ^2$  (I. 46. Cor.) seu  $< rectang. BH \times HZ$ ; ponatur in puncto  $E$  facta rectae  $BZ$  sectio, quae obtineatur  $A^2 = \text{rectang. } BE \times EZ$ . Cum sit  $\text{rectang. } BE \times EZ + HE^2 = HZ^2$  (II. 5.): debet esse  $A^2 + HE^2 = HZ^2$  proinde (I. 47.) distantia  $HE$  puncti sectionis  $E$  quaesiti a puncto bisectionis  $H$  rectae datae  $BZ$  seu (II. 5. Cor. 4.) a midifferentia laterum  $BE$ ,  $EZ$  rectanguli construendi, aequabitur lateri circa angulum rectum trianguli rectanguli cuius hypotenusa datae  $HZ$  atque alterum latus circa angulum rectum datae  $A$  est aequale. Cf. Pfeiderer. §. 73. Efficietur autem illud (Fig. 173. 174.), rectae datae  $BZ$  bifariam in puncto  $H$  sectae, in eodem puncto  $H$  constitutendo normalem  $H\Sigma =$  datae rectae  $A$ : tum vel 1. (Fig. 173.) perpendiculum  $\Sigma O$ , ad rectam  $H\Sigma$  in puncto ductum, seu per punctum  $\Sigma$  actam rectae  $BZ$  parallelam  $\Pi O$  circulo centro  $H$ , intervallo  $HZ$  descripto, in puncto  $\Theta$  secando: quo facto erit  $\Pi\Sigma\Theta$  triangulum rectangulum, cuius hypotenusa  $H\Theta = HZ$ , atque cathetus  $H\Sigma = A$ : denique al

ponatur, ipsi  $EA$  aequalis  $EZ$  (I. 3.), et secetur  $BZ$  bifariam in  $H$  (I. 10.), et centro quidem  $H$ , intervallo vero una ipsarum  $HB$ ,  $HZ$  semicirculus describatur  $B\Theta Z$ , et producat  $AE$  in  $\Theta$ , et iungatur  $H\Theta$ .

Quoniam igitur  $BZ$  secta est in aequalia quidem  $H$ , in inaequalia vero in  $E$ ; ergo rectangulum sub  $BE$ ,  $EZ$  contentum cum quadrato ex  $HE$  aequale

secta  $BZ$  abscindendo  $HE=H\Theta$  per rectam  $\Theta E$  ex puncto  $\Theta$  ad  $BZ$  demissam perpendicularem (I. 34.). Vel 2) (Fig. 174.) recto  $Z$  intervallo  $ZP=HZ$  describendo circulum, qui datam  $BZ$  in puncto  $B$  secet; quo immediate sit  $HE$  cathetus trianguli  $ZHE$ , cuius hypotenusa  $ZE=HZ$ , atque alter cathetus  $ZH=A$ . Priore casu, ob  $HZ=A<HZ$  vel  $HT$  (supp. et constr.) punctum  $Z$ : cadit intra circulum centro  $H$ , intervallo  $HZ$ , seu circa diametrum  $BZ$  descriptum, ideoque  $HO$  rectae  $BZ$  parallela circulum hunc in duobus punctis  $\Theta$ ,  $\Pi$  ad eandem rectae  $BZ$  partes secat; ex quibus in hanc  $BZ$  demissa perpendiculari, seu ductae rectae  $HZ$  parallelae  $\Theta E$ ,  $\Pi Q$  datam rectam  $BZ$  in punctis  $E$ ,  $Q$  ita secant, ut sint rectangula  $BE \times EZ = BQ \times QZ = A^2$ . Nampe tam  $BE \times EZ + HE^2 = HZ^2$ , quam  $BQ \times QZ + HQ^2 = HB^2$  (II. 5.). Unde porro, ob  $HZ^2 = BQ^2 + HQ^2 = HE^2 + EQ^2$ , et  $HB^2 = H\Pi^2 = HQ^2 + \Pi Q^2$  (constr. et I. 47.) sequitur:  $BE \times EZ + HE^2 = HE^2 + EQ^2$ , et  $BQ \times QZ + HQ^2 = HQ^2 + \Pi Q^2$  et hinc  $BE \times EZ = EQ^2$ ,  $BQ \times QZ = \Pi Q^2$ . Cum itaque sit  $\Theta E = \Pi Q = HZ$  (I. 34.)  $= A$ ; fiunt rectangula  $BE \times EZ$ ,  $BQ \times QZ = A^2$ . Altero casu (Fig. 174.) ob  $ZH=A<HZ$  seu  $ZP$  (supp. et constr.), punctum  $H$  rectae  $BZ$  iacet intra circulum centro  $Z$  intervallo  $ZP$  descriptum; quem igitur in duobus punctis  $E$ ,  $Q$  secat haec recta  $BZ$ , idque, ob  $HE<ZE$  seu  $HZ$ ,  $HQ<ZQ$  sive  $HB$  (I. 19. et constr.) sic, ut puncta  $E$ ,  $Q$  inter puncta  $H$ ,  $Z$ ; et  $H$ ,  $B$  cadant. Atque ita rursus eodem modo, quo antea probatur, esse  $BE \times EZ = BQ \times QZ = A^2$ . Caeterum  $HE =$

ἀπὸ τῆς  $HE$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $HZ$  τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ  $HZ$  τῇ  $H\Theta$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $BE, EZ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $HE$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $\Theta E, EH$  τετραγώνων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $BE, EZ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $HE$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Theta E, EH$ . Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $HE$  τετραγώνον· λοι

$H\Omega$  in triangulis rectangulis  $HE\Theta, H\Omega\Gamma$  (Fig. 173.)  $HE = \Omega H\Xi$  (Fig. 174.) quorum hypotenusae et catheti alteri aequales sunt, atque  $HB = HZ$  (constr.): quare etiam sunt tam  $HB - HE = HZ + H\Omega$ , quam  $HB - H\Omega = HZ - HE$  h. e. tam  $B\Xi = Z\Omega$ , quam  $B\Omega = ZE$ , itaque rectangula  $BE \times EZ, B\Omega \times \Omega E$  situ tantum, non longitudine laterum differunt. Posteriori constructionem solvendo problemati aequipollenti: applicatum quadratum ad rectam datam, difficiens quadrato; seu ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato, adhibent Halley (Schol. in Cor. Apollon. P. II. p. 153. Robert. Simson. p. 380 sq. Cf. infra ad VI. 28. Prior constructio haud necessario requirit, ut normalis  $= A$  rectae  $BZ$  in puncto bisectionis  $H$  constituatur ideoque applicatu saepe commodior est altera quamvis cunctius, dum problema seorsim spectatur. Cf. Pfeiderer §. 75. Prior constructio, pariterque solutio problematis ipsius Prop. XIV. exhibent theorema: quadratum perpendicularis, quolibet circumferentiae circuli puncto in diametrum ductae aequatur rectangulo sub segmentis diametri, quae ab ipsa perpendiculari fiunt. Quod Herigonius p. 76. propositioni II. statim subiungit, et deinde ad propositiones 6—10. ipsas easdemve aliter enunciatas, alio modo demonstrandas adhibet. Cf. Pfeiderer. §. 76.

Obs. 5. Cum, ducta per verticem  $I$  (Fig. 175. 176.) trianguli  $IBE, IKE$  parallela lateri ipsius  $BE, KE$ , atque huic in altero extremo erecta, et ad occursum parallelae illius continuata normali  $EA, EB$ ; tum vel perpendicularo  $EA$ , vi

ex quadrato ex  $HZ$  (II. 5.). Aequalis autem  $HZ$  rectae  $H\theta$  (I. Def. 15.); rectangulum igitur sub  $BE$ ,  $EZ$  contentum cum quadrato ex  $HE$  aequale est quadrato ex  $H\theta$ . Quadrato autem ex  $H\theta$  aequalia sunt quadrata ex  $\theta E$ ,  $EH$  (I. 47.); rectangulum igitur sub  $BE$ ,  $EZ$  cum quadrato ex  $HE$  aequale est quadratis ex  $\theta E$ ,  $EH$ . Commune auferatur quadratum

in puncto  $A$  bisariam secto, triangulum aequale sit parallelogrammo rectangulo  $BTAE$  (I. 41. sq.) quodsi hoc aequilaterum non est; construetur quadratum aequale triangulo proposito, vel (Fig. 175.) latus  $BE$  continuando, donec sit  $EZ=EA=1/2EA$ ; vel (Fig. 176.) perpendiculum  $BE$  produciendo, donec sit  $EZ=EA=1/2KE$ , et tum (utraque Fig.) latus  $BH$  quadrati rectangulo  $BE \times EZ$  aequalis iuxta Obs. 1. determinando (Campanus, Clavius). Cf. Pfeiderer. §. 77.

Obs. 6. Hinc iam etiam patet, qua ratione solvi possit problema: propositae figurae rectilineae aequale quadratum efficeret. Nempe 1) triangulum rectilineo dato aequale construendo methodis variis, quibus id iuxta I. 37. fieri potest: tum hinc triangulo aequale quadratum describendo iuxta Obs. 2. 2) vel singulis triangulis, in quae figura proposita per diagonales dividitur, aequalia quadrata iuxta Obs. 4. determinando; tum per I. 47. iteratamque, si figura multilatera est, eius applicationem, quadratum datis illis quadratis simul aequale construendo. Atque hanc posteriorem methodum indicant Campanus, Clavius, Peletarius, Tacquet. et priore explicationem esse indicant. Cf. Pfeiderer. §. 78.

Obs. 7. Austin. p. 39. sq. propositionem II. 14. nusquam a primis sex elementorum libris citari, et planam esse per VII. 13. et VI. 17. praeterea ab obiecto libri II. secedere, et a expositione constructionis vitio ab Rob. Simson. notato (vid. quae ad textum prop. huius notavimus) laborare observari, ideoque interpolatam censet. Quibus Pfeiderer. §. 79. subiungit: suspectam quoque pari iure ac X. 117. (vid. Sa-

πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $BE$ ,  $EZ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EO$  τετραγώνῳ. Ἄλλε τὸ ὑπὸ τῶν  $BE$ ,  $EZ$  τὸ ὑπὸ τῶν  $BE$ ,  $ED$  ἐστὶ ἴση γὰρ  $ZE$  τῇ  $ED$ . τὸ ἄρα  $BD$  παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EO$  τετραγώνῳ. Ἰσον δὲ τι  $BD$  τῷ  $A$  εὐθυγράμμῳ· τὸ  $A$  ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EO$  ἀναγραφόμενῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $A$  ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς  $EO$  ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

viliū Praelect. Oxon. 1621. p. 13.) reddere posset locus, qui ponitur, tum ad calcem libri II. tum seiunctim ab Prop. 11. cuius ad Prop. 6. similis ratio est, ac 14. ad quintam: nisi alia turbati propositionum ordinis exempla exstarent in elementis, v. gr. III. 25. III. 31. VI. 23. VI. 25. VI. 31. VI. 32. Pariter rationes duae posteriores Austini contra plures elementorum propositiones sine dubio genuinas valiturae esset; ipsemetque priorem earum instantia trium ultimarum libri I. propositionum (quas nempe pariter ab argumento re liquarum libr. I. contentarum recedere, at prorsus necessaria esse dicit) infringit. Propositio 14. argumentum propositionibus I. 42. 44. 45. coeptum complere censi potest; pariter ac propositiones II. 12. 13. id quod in I. 47. sq. fuit inchoatum. Porro, quod ad reliquas duas Austini animadversiones attinet, problematis I. 44. ideoque etiam sequentis I. 45 (quae, exclusa elementis propositione II. 14. nullibi in illis ante VI. 25. supponuntur) solutio non modo aequae plana est per VI. 14. VI. 12. ac problematis II. 14. per VI. 17. VI. 13., sed magis etiam expedita ea, quae in I. 44. traditur. Problema VI. 30. expresse solvitur, quamvis eius effectio ex

et  $HE$ ; reliquum igitur rectangulum sub  $BE$ ,  $EZ$  contentum aequale est quadrato ex  $E\Theta$ . Sed rectangulum sub  $BE$ ,  $EZ$  est rectangulum sub  $BE$ ,  $EA$ , aequalis enim est  $EZ$  rectae  $EA$ ; ergo  $BA$  parallelogrammum aequale est quadrato ex  $\Theta E$ . Aequale autem est  $BA$  rectilineo  $A$ ; rectilineum igitur  $A$  aequale est quadrato ex  $E\Theta$  descripto.

Ergo dato rectilineo  $A$  aequale quadratum ex  $\Theta E$  descriptum constituitur. Quod oportebat facere,

propositionibus II. 11. VI. 17. aequè ultro consequatur, ac propositio VI. 14. per eandem VI. 17. ad VI. 13. reducitur: quod et in primis quinque libri XIII. propositionibus supponitur: ipsaque propositionis VI. 30. solutione altera, ac prioris demonstratione docetur. Propositionum 28. 29. 32. 33. libri X. constructiones, concinnitatis demonstrationum gratia, immediate per VI. 13. VI. 12. in duabus prioribus et per II. 11. 12. in posterioribus peragi iubentur. Caeterum problema II. 14. sub generali VI. 25. tanquam casus particularis comprehenditur: pariter atque eius conversum Obs. 3. sub problemate VI. 28., quod enunciatio eius ex Halleyo et Rob. Sison, ad finem Obs. 3. allata, et Lemma praemissum propositioni X. 18. indicant. Eodemque modo ad VI. 29. se habet problema ad Obs. 5. II. 11., cuius casum specialem citat II. 11. prouti etiam ex problematis VI. 30. solutione patet. Denique observat Pflleiderer. l. c. §. 80. Claudium Richardum (Euclid. Elementor. libr. XIII. Antwerp. 1643.) incongrue ipsorum demonstrationes propositionum II. 11. II. 14. in apagogicas transformare,

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ  
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν  
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Τ Ρ Ι Τ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. <sup>ν</sup> *Ι*σοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διαμέτροι ἴσαι εἰσὶν ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.

DEFIN. I.

Ea, quae hic enunciantur, non pro definitione habenda, aut certe, si quo sensu definitionis loco haberi possint, antequam applicentur, demonstranda esse, passim monuerunt viri docti. Et Tartalea quidem (Euclide tradotto fol. 37. a.) suppositum per se satis manifestum, seu postulatum potius quam definitionem esse pronunciat: Borelli (Euclid restit. p. 63.) Angel. de Marchettis (Euclid. reform. p. 10.) König (Elem. d'Euclide p. 98.) Playfair (Elem. of Geom. p. 374.) ex definitionum serie plane hanc propositionem expungunt, atque inter axiomata simpliciter, vel adiuncta qualicunque declaratione aut demonstratione referunt: aiii v. c. Billingsley (the Elem. of Euclide fol. 10. b.) Giordano da Bitonto (Euclide restituito Rom. 1680. p. 101.) Candalla (Euclid. Elem. fol. 19. b.) Clavius ad h. l. inter definitiones quidem retinent, at e generatione circuli veritatem enunciati aliquatenus demonstrare tentant: Rob. Simson. (Elem. of Eucl. 2. Ed. p. 95) omnino hanc definitionem non esse, sed theorema iudicat, in quo consentientem habet Pfeiderer. (Thes. inaug. 1782. Th. 3.) qui Thes. inaug. 1789. Th. 1—3) rem ita accuratius diiudicandam cen-



---

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

### LIBER TERTIUS.

---

#### DEFINITIONES.

1. **A**equales circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris aequales sunt.

et, demonstrandum quidem esse, circulorum areas et peripherias aequales esse, quorum radii aut diametri aequales sint, quod cum facile fieri possit, re ad Ax. 8. libri I. demonstratione directa vel indirecta, priore simili ei, quae in I. 4. posteriore analoge iis, quae in III. 5. III. 6. adhibentur, reducta, erunt itaque hanc propositionem ut theorema omissam esse in elementis, eam ipsam autem iam demonstratam in nostra definitione, certe antequam ipsa applicetur, supponi, ac tum definitionem breviorē tantum denominationem, loco expressionis: *circuli, quorum diametri, vel quorum, quae ex centris, aequales sunt*, suppeditare, (quo sensu etiam circuli aequales sumantur III. 26–29. et VI. 33.) atque ita demum absque vitiō subreptionis demonstrationibus alias metuendo adhiberi posse. Atque est quidem haec demonstratio facillima. Nempe, si fig. 204. circulum centro  $\Gamma$  radio  $\Gamma A$ , et centro  $Z$  radio  $Z A$  descriptorum diametri  $AB$ ,  $AE$ , adeoque etiam semidiametri  $AF$ ,  $AZ$  aequales fuerint, applicato centro unius  $\Gamma$  super centrum alterius  $Z$ , recta  $\Gamma A$  ponatur super recta  $Z A$ , puncta quoque  $A$ ,  $A$ , pariterque  $B$ ,  $E$  coincident (Obs. ad I. 8. Ax.). Iam, si sumatur punctum quodcunque  $H$  in

β. Εὐθεῖα κύκλον ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον <sup>1)</sup>.

γ. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἱ τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

1) Cod. a. et ex eo Peyrard. addunt: ἐπὶ μηδέτερον μέρος, quod quum nec necessarium, nec satis aptum, et in definitione quoque 3. non additum sit, nec in edit. Oxoniensi aut Basil. legatur, omisimus. Recipienda tamen haec verba putant De Lambre et Prony.

peripheria unius circuli, ducaturque recta  $FH$ , et fiat (I. 23.) angulus  $EZ\theta = B\Gamma H$ , hi quoque anguli aequales, et rectae aequales  $FH$ ,  $Z\theta$  coincident (Obs. ad I. 8. Ax.), adeoque puncta  $H$ ,  $\theta$  coincident. Omnia igitur puncta utriusque peripheriae, adeoque totae peripheriae, et areae circulorum congruunt, ac proinde (I. 8. Ax.) aequales sunt. Cf. Pfeiderer. de dimens. circul. P. II. Tub. 1790. p. 4. Aliter ita: si positis iisdem ac antè, circulisque sibi eodem modo aptatis, sumere velis, punctum  $H$  non congruere cum puncto  $\theta$  in peripheria, cadet igitur vel extra vel intra circulum, centro  $Z$  radio  $ZA = \Gamma A$  descriptum, adeoque erit vel  $FH > Z\theta$ , vel  $FH < Z\theta$ , quod utrumque fieri nequit, quum etiam ponatur  $FH = Z\theta$ . Cf. Pfeiderer. l. c. Caeterum Campanus in ipsa definitione addit: maiores circuli sunt, quorum diametri sunt maiores, minores, quorum diametri minores. Quod ipsum definitioni etiam subiungunt Clavius, Orontius Trineus, Billingsley, Borellius. Atque id quidem simili ratione probari poterit. Ex conversa quoque huius propositionis valet: nempe circuli aequales diametros quoque et semidiametros invicem habent aequales; et prout quis circulus maior, minor sit altero, illius etiam diameter maior, minor erit diametro huius, quod facile per indirectum demonstrabitur, et notatum est a Borellio, et, quoad circulos aequales, a Giordano da Bitonto.

2. Recta circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta circulum non secat.

3. Circuli contingere sese dicuntur, qui se tangentes sese non secant.

## DEFIN. II.

Robert. Simson. ad definitiones libri quarti notat, quod iam hic observari meretur, Euclidem non promiscue uti verbis *ἄρτεσθαι* et *ἐκάρτεσθαι*. Nempe, quando punctum aliquod positum est in recta, aut alia quavis linea, tum punctum illud apud geometras graecos *ἄρτεσθαι* tangere dicitur eam lineam: et quando recta, aut circulus circulo quoque modo occurrat, alter alterum *ἄρτεσθαι* dicitur. Quando vero recta et circulus occurrit circulo ita, ut ipsum non secet, dicitur *ἐκάρτεσθαι*, contingere circulum. Paucis tantum locis, nempe in Defn. IV. 5. et in III. 18. et III. 19. in textu graeco verbum simplex mutandum esse in compositum movet Rob. Simson. Quod ipsum etiam fieri debet in expositione propositionum III. 11. III. 12. Et reapse in Prop. III. 11. III. 12. et III. 18. Codex a Peyrardi habet verbum compositum, quo ipso confirmatur Simsonis observatio. Cacterum recta circulum, quod praemittendum erat, in puncto aliquo *secare* dicitur, si recta et circulus illud quidem punctum commune habeant, at puncta rectae, quae huic puncto communi adiacent, ex una parte puncti istius communis intra -- ex altera extra circulum posita sint. Et recta circulum *contingere* dicitur, quae circulo in aliquo puncto occurrens eum in hoc puncto non secet: *nusquam* enim secare, demum III. 18. coll. III. 16. probatur.

## DEFIN. III.

Similiter iis, quae sub finem definitionis praecedentis diximus, addi potest: a) Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto communi proxima sunt, ex una puncti communis parte extra

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθείαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰ κἀθετοὶ ἀγόμεναι ἴσαι ᾧσιν.

ε'. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κἀθετος πίπτει.

ς'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον στήμῳ ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῇ περιφερείᾳ τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἣτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπεζευχθειῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

alterum circulum, ex altera vero eius parte intra alterum circulum posita sint; tum duo isti circuli in puncto hoc communi se invicem secare dicuntur. b) Et duo circuli se in puncto aliquo contingere dicuntur, si punctum illud commune habeant, neque in eo se secant i. e. si ea puncta unius circuli, quae ex utraque parte isti puncto proxima sunt, vel ex utraque parte extra alterum circulum, vel ex utraque parte intra alterum circulum posita sint: (nusquam enim secare, quod hic Euclides sumit, probandum demum erit). c) Et quidem duo circuli extra se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud quidem punctum commune habent, ea vero puncta utriusvis circuli, quae illi puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum circulum. d) Duo contra circuli intra se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud punctum commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte po-

4. In circulo aequaliter distare a centro rectae dicuntur, quando perpendiculares ex centro ad ipsas rectas aequales sunt.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam maior perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est figura contenta recta et circuli circumferentia.

7. Angulus autem segmenti est, qui continetur recta et circuli circumferentia.

8. Angulus autem in segmento est, quando in circumferentia segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectae, quae est basis segmenti, coniunguntur rectae, angulus ab iunctis rectis constituitur.

9. Quando autem rectae angulum continentes abscindunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere rectae.

10. Inter alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sunt extra alterum circulum). Cf. Apollonii de Taction. quae superiunt. Gothae 1795. p. 34. 35.

#### DEFIN. IV.

Quae hic et in sequentibus Euclides rectas in circulo vocat, alii etiam rectas circulo inscriptas, vel chordas circuli appellare solent.

#### DEFIN. VI.

Conferantur, quae diximus ad Def. I. 19.

#### DEFIN. VII.

Hanc definitionem pariter ac propositionum III. 16. et III. 31. additamenta ad angulos semicirculi et segmentorum

ι. Τομὲς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου ρυσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τῇ γωνίᾳ περιεχουσῶν ἐνδοχῶς καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.  
 ια. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα ἴσας ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰς

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ  $ABΓ$ . δεῖ δὴ τοῦ  $A$  κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ  $A$  καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $A$  σημεῖον, καὶ ἀπὸ  $A$  τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $ΓA$ , καὶ διήχθω τὸ  $E$ , καὶ τετμήσθω ἡ  $ΓE$  δίχα κατὰ τὸ  $Z$ . Ἄν τὸ  $Z$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ  $H$ , καὶ ἐκζητήσωσαν αἱ  $HA$ ,  $HA$ ,  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ

spectantia, adulterina esse, non temere quem suspicari, a Vieta pronunciavit (Opp. p. 386.) Pfeiderer. Thes. inas Tub. 1783. Th. 7. Et expungi omnino poterant ex Elementis, quod etiam fecit Playfair (Elem. of Geom. contain. the first 6. Books of Euclid. 1795. p. 374.), nisi variae, quibus ortum dedere, disputationes historicarum eorum notitiam necessariam redderent. Plura vide in excursu ad finem huius libri.

### DEFIN. XI.

Haec definitio demum post III. 21. plenius intelligetur ubi ostensum fuerit, angulos in eodem circuli segmento esse inter se aequales.

### PROPOSITIO I.

Obs. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet, esse, qui contra demonstrationes apagogicas, seu indirectas nimis

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli  
est angulus, figura contenta rectis angulum  
terminantibus et circumferentia ab ipsis intercepta.

11. Similia segmenta circuli sunt, quae capiunt  
aequales angulos; vel in quibus anguli aequales inter  
sunt.

### PROPOSITIO I. (Fig. 205.)

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus  $AB\Gamma$ ; oportet igitur  $AB\Gamma$  cir-  
culi centrum invenire.

Ducatur in ipso utcumque recta aliqua  $AB$ , et se-  
ctor bifariam in puncto  $A$  (I. 10.), et a  $A$  rectae  
 $AB$  ad rectos ducatur  $\Gamma A$  (I. 11.), et producat in  
 $\Gamma$ , et secetur  $\Gamma E$  bifariam in  $Z$  (I. 10.); dico  $Z$   
centrum esse circuli  $AB\Gamma$ .

Non enim, sed, si fieri potest, sit  $H$ , et iungan-  
tur  $HA$ ,  $HA$ ,  $HB$ . Et quoniam aequalis est  $AA$

et, et quidem imperite disputent (Ramum potissimum  
videtur), non animadvertentes, quaedam nulla alia  
ratione demonstrari posse. Cuius rei exemplum esse putat  
hanc propositionem, cuius directa demonstratio afferri nequeat.  
Cum praeter circuli definitionem nullum esse principium  
de circulo, ex quo demonstrationem directam sive indirectam  
conferre liceat. Ex hac itaque definitione et propositionibus  
demonstratis necesse esse demonstrationem derivare.  
Quum igitur non liceat assumere, punctum in constructione  
inventum esse centrum (hoc quippe demonstrandum demum  
esse) manifestum esse, punctum aliud tanquam centrum assu-  
mandum esse, et, si ex hoc assumpto absurdum aliquod se-  
quitur, tum assumptum utcumque punctum non esse centrum:  
Atque ita patere necessitatem demonstrationis indirectae. At,  
quoniam in eo Rob. Simsoni facile consentiamus, nihil in

ἡ  $AA$  τῇ  $AB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $AH$ , δύο δὴ αἱ  $AA$ ,  $AH$  δυοὶ ταῖς  $HA$ ,  $AB$  ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρω ἐκατέρω, καὶ βάσει ἡ  $HA$  βάσει τῇ  $HB$  ἴσιν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ  $H$  γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AAH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $HAB$  ἴση ἐστίν. "Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὴν ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ  $HAB$ . "Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZAB$  ὀρθὴ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ZAB$  τῇ ὑπὸ  $HAB$ , ἡ μείζων τῇ ἐλάττωι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ  $H$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ  $Z$ .

Τὸ  $Z$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις εὐθείαν τινα διχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

demonstratione indirecta reprehendi posse, quae potius directam eo adhuc superare videtur, quod directa plerumque tantum evincat, rem aliquam ita esse, indirecta etiam rem aliter esse non posse, et quamvis etiam in hac propositione demonstrationem indirectam maxime convenire largiamur, (quippe eius pars prior est fere negativa, nempe: centrum circuli non esse potest nisi in recta e media basi ad angulos rectos basi erecta), id tamen Rob. Simson. non evicisse videtur, nullam esse posse directam huius propositionis demonstrationem. Quin collatis iis, quae I. 26. Cor. 5. et 6. dicta sunt, omnino directa nostrae propositionis demonstratio exhiberi posse videtur. Ducta nempe in circulo recta quacunque  $AB$ , quum rectae e centro ad  $A$  et  $B$  ductae aequales sint I. Def. 15. et 16.



rectae  $AB$ , communis autem  $AH$ , duae utique  $AA$ ,  $AH$  duabus  $HA$ ,  $AB$  aequales sunt, utraque utrique, et basi  $HA$  basi  $HB$  est aequalis (I. Def. 15. et 16.), sunt enim ex centro  $H$ ; angulus igitur  $A\hat{A}H$  angulo  $H\hat{A}B$  aequalis est (I. 8.). Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos aequales inter se facit, rectus uterque aequalium est (I. Def. 10.); rectus igitur est  $H\hat{A}B$ . Est autem et  $Z\hat{A}B$  rectus; aequalis igitur est  $Z\hat{A}B$  angulo  $H\hat{A}B$ , maior minori, quod fieri non potest (I. Ax. 9.). Igitur  $H$  non est centrum circuli  $AB\Gamma$ . Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam praeter  $Z$ .

Ergo punctum  $Z$  est centrum  $AB\Gamma$  circuli. Quod oportebat facere.

### C O R O L L A R I U M.

Ex hoc evidens est, si in circulo recta quaedam rectam quandam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

triangulum his rectis et basi  $AB$  contentum aequalicrurum, adeoque eius vertex i. e. centrum circuli necessario erit in recta  $EF$ , quae e media basi ad angulos rectos basi erigitur (I. 26. Cor. 6.). Quae cum circulo necessario occurrere debeat in duobus saltem punctis (I. Ax. 13.) occurrat ei in punctis  $E$ ,  $F$ : et quum centrum circuli ab his punctis aequaliter abesse debeat (I. Def. 15. et 16.) situm illud erit necessario in media  $EF$ . (Hoc ipsum, nempe centrum circuli (postquam demonstratum fuit esse illud in recta  $EF$ ) esse debere in media  $EF$ , in demonstratione textus graeci supponitur magis quam ostenditur. Expresse tamen id addidit Campanus, Coësius, Boërmannus, alique.) Si tamen quis acrius insistere, et concludere velit, ita tamen indirectum demonstrationis reiectum tan-

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ABΓ$ , καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ  $A$ ,  $B$ · λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ  $B$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ  $AEB$ , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ  $ABΓ$  κύκλου, καὶ ἔστω τὸ  $\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ , καὶ διήχθω ἡ  $\Delta ZE$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta A$  τῇ  $\Delta B$ , ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Delta AE$  τῇ ὑπὸ  $\Delta BE$ · καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $\Delta AE$  μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ  $AEB$ , μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta EB$  γωνία τῆς ὑπὸ  $\Delta AE$ . Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ  $\Delta AE$  τῇ ὑπὸ  $\Delta BE$ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta BB$  τῆς ὑπὸ  $ABE$ . Ὡς δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ  $AB$  τῆς  $\Delta E$ . Ἰση δὲ ἡ  $\Delta B$  τῇ  $\Delta Z$ · μείζων ἄρα ἡ  $\Delta Z$  τῆς

tum esse ad I. 26. Cor. 6. nolim equidem pertinacius disputare, quamvis certum sit, immediatam certe nostrae propositionis demonstrationem esse directam. Poterat etiam res sine I. 26. Cor. 6. ita absolvi. Quum triangula, quae efficiuntur, si e centro circuli ducantur rectae ad duo quaecunque puncta  $A$ ,  $B$  in circulo, et ad punctum  $\Delta$ , quod ductam  $AB$  bisecat, sint aequalia, et nominatim angulos ad  $\Delta$  habeant aequales (I. 8.), uterque angulorum ad  $\Delta$ , i. e. angulorum, quem recta ex centro ad  $\Delta$  ducta cum  $AB$  efficit, rectus erit (I. 13.), vel centrum circuli necessario positum erit, in recta per  $\Delta$  perpendiculariter ad  $AB$  ducta: unde reliqua ut supra consequentur. Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. III.

## PROPOSITIO II. (Fig. 206.)

Si in circuli circumferentia sumantur duo quaelibet puncta, recta haec puncta coniungens cadet intra circumulum.

Sit circulus  $AB\Gamma$ , et in circumferentia ipsius sumantur duo quaelibet puncta  $A$ ,  $B$ ; dico rectam a puncto  $A$  ad  $B$  ductam cadere intra circumulum.

Non enim, sed si fieri potest, cadat extra ut  $AEB$ , et sumatur (III. 1.) centrum circuli  $AB\Gamma$ , et sit  $\Delta$ , iunganturque  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ , et ducatur  $\Delta ZE$ .

Et quoniam  $\Delta A$  aequalis est  $\Delta B$ , aequalis igitur et angulus  $\Delta AE$  angulo  $\Delta BE$  (I. 5.); et quoniam trianguli  $\Delta AE$  unum latus  $AEB$  producit, maior igitur est angulus  $\Delta EB$  angulo  $\Delta AE$  (I. 16.). Aequalis autem  $\Delta AE$  angulo  $\Delta BE$ ; maior igitur est  $\Delta EB$  angulo  $\Delta BE$ . Maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 18.); maior igitur est  $\Delta B$  recta  $\Delta E$ . Aequalis autem  $\Delta B$  rectae  $\Delta Z$  (I. Def. 15.);

Prop. 2. Cor. Siquis autem dicat, hanc demonstrationem analyticam potius esse, quam syntheticam, contra monuerim, quoniam centrum in quovis circulo esse debere, ex ipsa circuli definitione pateat, et analysis iam ostenderit, illud nusquam esse posse, quam in perpendiculari ex  $\Delta$  ad  $AB$  erecto, synthetica, quae ex hac analysi immediate fuit, et nihil sumit, quod non ante probatum fuerit fieri posse, hoc casu nova ulteriore demonstratione haud egere.

Praeter Cor. 1. in ipsis elementis exhibitum, addi adhuc potest hoc Cor. 2. In circulo non nisi unum centrum esse potest. Si enim praeter centrum  $Z$  fuerit aliud  $H$ , erit  $HA$  pariter ac  $ZA$  ad  $AB$  perpendicularis, quod fieri nequit I. 11.

$\Delta E$ , η ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ  $B$  ἐπιγεγνημένη εὐθεΐα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὅμοιως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma$ , καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ  $\Gamma A$  εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν  $AB$  δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ  $Z$  σημεῖον. λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου, καὶ ἐστω τὸ  $E$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $EA$ ,  $EB$ .

Καὶ ἐπει ἴση ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ZE$ , δύο δὲ δυοῖν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ  $EA$  βάσις τῇ  $EB$  ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AZE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EZB$  ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεΐα ἐπὶ εὐθεΐαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὰς ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ  $AZE$ ,  $BZE$ . Ἡ  $\Gamma A$  ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν  $AB$  μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Cor. 2. sin autem in ipsa  $EF$  praeter  $Z$  aliud punctum centrum esse posse statueris, recta  $EF$  in duobus punctis bisecabitur quod fieri nequit I. Ax. 7. et 9.

### PROPOSITIO II.

Obs. Generalius haec propositio ita exprimi et direct

maior igitur est  $AZ$  recta  $AE$ , minor maiore, quod fieri nequit. Itaque recta ab  $A$  ad  $B$  ducta non cadet extra circulum. Similiter ostendemus, neque in ipsam circumferentiam cadere; intus igitur cadet. Si igitur circuli etc.

### PROPOSITIO III. (Fig. 208.)

Si in circulo recta aliqua per centrum ducta rectam aliquam non per centrum ductam bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secat; et si eam ad angulos rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus  $AB\Gamma$ , et in ipso recta aliqua  $\Gamma A$  per centrum ducta, rectam aliquam  $AB$  non per centrum ductam bifariam secet in puncto  $Z$ ; dico et ad angulos rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum circuli  $AB\Gamma$ , et sit  $E$ , et iungantur  $EA$ ,  $EB$ .

Et quoniam  $AZ$  aequalis est  $ZB$ , communis autem  $ZE$ , duae utique duabus aequales sunt, et basis  $EA$  basi  $EB$  aequalis; angulus igitur  $AZE$  angulo  $EZB$  aequalis est (I. 8.). Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (I. Def. 10.); rectus igitur est uterque angulorum  $AZE$ ,  $BZE$ . Ergo  $\Gamma A$  per centrum ducta rectam  $AB$  non per centrum ductam bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secat.

demonstrari poterit: si recta aliqua per duo puncta  $A$ ,  $B$  fig. 207. in circuli circumferentia posita transeat, omnia huius rectae puncta inter  $A$  et  $B$  posita intra circulum: omnia autem puncta in recta producta sumta extra circulum erunt. Sit enim  $E$  punctum huius rectae quodcumque inter  $A$  et  $B$ , et

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$  τὴν  $AB$  πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω  
λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἐστίν, ὅτι ἴσιν  
ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἰση ἐστὶ  
ἡ  $EA$  τῇ  $EB$ , ἰση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $EAZ$  τῇ  
ὑπὸ  $EBZ$ . Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $AZE$  ὀρθὴ  
τῇ ὑπὸ  $BZE$  ἰση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ  $EAZ$   
 $EZB$  τὰς δύο γωνίας δυοῖ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, κα-  
μὴν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἰσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν  
 $EZ$ , ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κα-  
τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσα  
ἔξει· ἰση ἄρα ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$ . Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ  
καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας  
μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας  
δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma\Delta$ , καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι  
αἱ  $AI$ ,  $BI$  τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον  
μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν  
ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε  
ἴσην εἶναι τὴν μὲν  $AE$  τῇ  $EF$ , τὴν δὲ  $BE$  τῇ  $ED$

occurrat  $AE$  circulo in puncto  $H$ , ductisque e centro  $A$  recti  
 $AA$ ,  $AB$ ,  $AE$  erunt  $AA$ ,  $AB$  aequales (I. Def. 15.) adeoque  
 $AA=AB$  (I. 5.). At  $AEA > ABA$  (I. 16.). Itaque etiam  
 $BEA > AAB$ , adeoque  $AA > AE$  (I. 18.). Et quum  $AA=AE$   
(I. Def. 15.), erit etiam  $AE > AE$ , adeoque  $E$  intra circu-  
lum. Eodem modo si sumatur in recta  $AB$  producta punctum  
quodcunque  $Z$ , et ducatur recta  $AZ$ , quae circulo occurrat in  
 $\Theta$ , erit ang.  $AZB < ABA$  (I. 16.) i. e.  $<AAZ$ , adeoque (I.

Quodsi autem  $\Gamma A$  rectam  $AB$  ad angulos rectos recet; dico et bifariam ipsam secare, hoc est, aequalem esse  $AZ$  rectae  $ZB$ .

Iisdem enim constructis, quoniam aequalis est  $EA$  rectae  $EB$  (I. Def. 15.), aequalis est et angulus  $EAZ$  angulo  $EBZ$  (I. 5.). Est autem et angulus rectus  $AZE$  recto  $BZE$  aequalis; duo igitur triangula sunt  $EAZ$ ,  $EZB$  duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune ipsis  $EZ$ , subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur est  $AZ$  ipsi  $ZB$ . Si igitur in circulo etc.

#### PROPOSITIO IV. (Fig. 210.)

Si in circulo duae rectae sese secent, non per centrum ductae, sese non secabunt bifariam.

Si circulus  $AB\Gamma A$ , et in ipso duae rectae  $AT$ ,  $BA$  sese secent in  $E$  puncto, non per centrum ductae, dico eas sese non secare bifariam.

Si enim fieri potest, sese secent bifariam, ita ut  $AE$  quidem aequalis sit  $ET$ , et  $BE$  rectae  $EA$ ; et

18.)  $AA < AZ$ , vel  $AO < AZ$ , ac proinde punctum  $Z$  extra circulum. Cf. Clavius ad h. l. Quodsi recta per centrum transeat, res per se patet.

Cor. 1. Recta circulum in pluribus quam duobus punctis secare, vel generalius plura quam duo puncta cum circulo communia habere nequit: per tria itaque puncta in eadem recta posita circulus non potest transire, aut describi. Cf. I. 16. Cor.

καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ  $AB\Gamma A$  κύκλου, καὶ ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ZE$ .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ  $ZE$  εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν  $ΑΓ$  δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ZEA$ . Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεία τις ἡ  $ZE$  εὐθεϊάν τινα τὴν  $B\Gamma$  μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ZEB$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZEA$  ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ZEA$  τῇ ὑπὸ  $ZEB$ , ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ  $ΑΓ$ ,  $B\Gamma$  τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γάρ κύκλοι οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΓΑΗ$  τεμνόμεσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ  $B$ ,  $\Gamma$  σημεία· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ  $E$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΕΓ$ , καὶ διήχθω ἡ  $EZH$  ὡς ἐνυγεν.

Cor. 2. Circuli circumferentia est linea curva, i. e. minima quidem eius pars recta est.

Cor. 3. Recta, quae per punctum aliquod intra circumlum ducitur, si opus est producta, circumlum necessario in duobus punctis (I. Ax. 13.) nec pluribus secabit. (Haec quoque Corollaria e schedis Pflidereri.)

### PROPOSITIO III.

Obs. Haec propositio est conversa III. 1. Cor. 1. idemque pronunciat, quod I. 26. Cor. 1. et 2.

Cor. Si duo circuli (Fig. 209.) ex eodem centro  $A$  de-



sumatur centrum  $AB\Gamma A$  circuli (III. 1.), et sit  $Z$ , et iungatur  $ZE$ .

Quoniam igitur recta aliqua  $ZE$  per centrum rectam aliquam  $A\Gamma$  non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit (III. 3.); rectus igitur est  $ZEA$ . Rursus, quoniam recta aliqua  $ZB$  rectam aliquam  $BA$  non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secat (III. 3.); rectus igitur est  $ZEB$ . Ostensus est autem et  $ZEA$  rectus; aequalis igitur  $ZEA$  angulo  $ZEB$ , minor maiori, quod fieri nequit.  $A\Gamma$ ,  $BA$  igitur sese non secant bifariam. Si igitur in circulo etc.

#### PROPOSITIO V. (Fig. 211.)

Si duo circuli sese secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma AH$  sese secant in puncto  $B$ ,  $\Gamma$ ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit  $E$ , et iungatur  $E\Gamma$ , et ducatur  $EZH$  utcumque.

scripsi sunt, et recta aliqua  $BF$  interiorem circulum in punctis  $B\Gamma$ , adeoque (III. 2. Cor. 3.) producta etiam exteriorem circulum in duobus punctis  $A$ ,  $E$  secet, erunt eius segmenta  $BA$ ,  $TE$  inter utrumque circulum intercepta aequalia. Quodsi  $AE$  per centrum utriusque circuli transeat, adeoque  $AE$  diameter unius,  $BF$  alterius circuli sit, patet, ob  $AA=AB$ , et  $BA=AF$  (I. Def. 15.), esse etiam  $AA-BA=AB-AF$  (I. Ax. 3.) i. e.  $AB=FE$ . Sin autem  $AE$  non per centrum transeat, demittatur ex centro  $A$  in  $BF$  perpendicularum  $AZ$  (I. 12.), eritque ex nostra propositione  $AZ=EZ$ , et  $BZ=FZ$ , adeoque  $AZ-BZ=EZ-FZ$  (I. Ax. 3.) i. e.  $AB=BF$ . Clarissus ad h. l. Gilbert. p. 115.

Καὶ ἐπεὶ τὸ  $E$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΕΓ$  τῇ  $EZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $E$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΓΔΗ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓΕ$  τῇ  $ΕΗ$ . Ἐδείχθη δὲ ἡ  $ΕΓ$  καὶ τῇ  $EZ$  ἴση· καὶ ἡ  $ZE$  ἄρα τῇ  $ΕΗ$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ  $E$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν  $ABΓ$ ,  $ΓΔΗ$  κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ  $ABΓ$ ,  $ΓΔΕ$  ἐφάπτεσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ  $Γ$  σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ZΓ$ , καὶ διήχθω ὡς ἐτυχεν ἡ  $ZΕΒ$ .

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $ZΓ$  τῇ  $BZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΓΔΕ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν  $ZΓ$  τῇ  $ZE$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $ZΓ$  τῇ  $ZB$  ἴση· καὶ ἡ  $ZE$  ἄρα τῇ  $ZB$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν  $ABΓ$ ,  $ΓΔΕ$  κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

### PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio ita intelligenda est: si non utraque per centrum transeat, nec utraque ab altera bisecabitur. Cf. Pfeleiderer.

### PROPOSITIO VI.

Obs. Demonstratio huius propositionis tacite sumere vi-

Et quoniam punctum  $E$  centrum est circuli  $AB\Gamma$ ,  $EF$  aequalis est  $EZ$  (I. Def. 15.). Rursus quoniam punctum  $E$  centrum est circuli  $\Gamma AH$ ,  $\Gamma E$  aequalis est  $EH$  (I. Def. 15.). Ostensa est autem et  $EF$  aequalis  $EZ$ ; et  $ZE$  igitur aequalis est  $EH$ , minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur  $E$  non est centrum circulorum  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma AH$ . Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 212.)

Si duo circuli sese intra contingant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma AE$  se contingant in puncto  $\Gamma$ ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit  $Z$ , et iungatur  $Z\Gamma$ , et ducatur utrumque  $ZEB$ .

Quoniam igitur punctum  $Z$  centrum est circuli  $AB\Gamma$ , aequalis est  $Z\Gamma$  rectae  $BZ$  (I. Def. 15.). Rursus, quoniam punctum  $Z$  centrum est circuli  $\Gamma AE$ , aequalis est  $Z\Gamma$  rectae  $ZE$  (I. Def. 15.). Ostensa est autem et  $Z\Gamma$  ipsi  $ZB$  aequalis; et  $ZE$  igitur rectae  $ZB$  est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur  $Z$  non est centrum circulorum  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma AE$ . Si igitur duo etc.

detur, puncta  $E$  et  $B$  non posse coincidere, vel circulos se invicem in  $\Gamma$  intus contingentes in nullo alio puncto convenire posse. Quod quamvis verissimum sit, tamen ab Euclide infra demum III. 13. demonstratum est. Utraque autem propositio III. 5. et III. 6. iunctim et generalius ita demonstrari posse videntur: si duo circuli ex eodem centro descripti sunt, nullum punctum inter se commune habebunt. Quodsi enim punctum

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου<sup>1)</sup> ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεαί τινες· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρον τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ  $ΑΔ$ , καὶ ἐπὶ τῆς  $ΑΔ$  εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ  $Ζ$ , ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ  $Ε$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Ζ$  πρὸς τὸν  $ΑΒΓΔ$  κύκλον προσπιπτέωσαν εὐθεαί τινες αἱ  $ΖΒ$ ,  $ΖΓ$ ,  $ΖΗ$ . λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ  $ΖΑ$ , ἐλαχίστη δὲ ἡ  $ΖΔ$ . τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν  $ΖΒ$  τῆς  $ΖΓ$  μείζων, ἡ δὲ  $ΖΓ$  τῆς  $ΖΗ$ .

Ἐπεξεύχθωσαν γάρ αἱ  $ΒΕ$ ,  $ΓΕ$ ,  $ΗΕ$ .

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ  $ΕΒ$ ,  $ΕΖ$ , ἄρα τῆς  $ΒΖ$  μείζονες εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ  $ΑΕ$  τῇ  $ΒΕ$ , αἱ ἄρα  $ΒΕ$ ,  $ΕΖ$  ἴσαι εἰσὶ τῇ  $ΑΖ$ . μείζων ἄρα ἡ  $ΑΖ$  τῆς  $ΒΖ$ . Παλιν, ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ  $ΒΕ$  τῇ  $ΓΕ$ , κοινὴ δὲ  $ΖΕ$ , δύο δὲ αἱ  $ΒΕ$ ,  $ΕΖ$  δυοὶ ταῖς  $ΓΕ$ ,  $ΕΖ$  ἴσαι εἰσιν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΕΖ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $ΓΕΖ$

1) Verba: ἐπὶ τῆς διαμέτρου, nisi otiosa indicare velis, nihil aliud significare possunt, quam ἐντὸς τοῦ κύκλου. Quodvis nempe punctum, quod in ipsa diametro haud saltem in puncto eius extremo situm est, est etiam intra circulum et vice versa.

aliquod ipsis commune sit, punctum istud in utroque circulo a centro communi aequaliter distabit. At vero omnia puncta

## PROPOSITIO VII. (Fig. 213.)

Si in diametro circuli sumatur aliquod punctum, quod non sit centrum circuli, atque ab eo in circumulum cadant rectae quaedam, maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; reliquarum autem, semper propinquior ei, quae per centrum remotiore maior est; binaeque tantum aequales ab eodem puncto cadent in circumulum ex utraque parte minimae.

Sit circumulus  $AB\Gamma A$ , diameter autem ipsius sit  $AA$ , et in ipsa  $AA$  sumatur aliquod punctum  $Z$ , quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit  $E$ , et a  $Z$  in  $AB\Gamma A$  circumulum cadant rectae quaedam  $ZB$ ,  $Z\Gamma$ ,  $ZH$ ; dico maximam quidem esse  $ZA$ , minimam vero  $ZA$ ; reliquarum autem  $ZB$  quidem maiorem quam  $Z\Gamma$ ; et  $Z\Gamma$  quam  $ZH$ .

Iungantur enim  $BE$ ,  $\Gamma E$ ,  $HE$ .

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt (I. 20.) erunt  $EB$ ,  $EZ$  maiores, quam  $BZ$ . Est autem  $AE$  aequalis  $BE$  (I. Def. 15.); ergo  $BE$ ,  $EZ$  aequales sunt ipsi  $AZ$ ; maior igitur est  $AZ$  quam  $BZ$ . Rursus, quoniam  $BE$  aequalis est  $\Gamma E$ , communis autem  $ZE$ , duae  $BE$ ;  $EZ$  duabus  $\Gamma E$ ,  $EZ$  aequales sunt. Sed et angulus  $BEZ$  angulo  $\Gamma EZ$

utriusque circuli a centro aequaliter distant ac punctum illud commune (I. Def. 15.). Quare omnia puncta communia erunt utrique circulo, neque iam duo, sed unus circumulus descriptus erit, quod est contra hypothesin. Hinc consequitur, si duo circuli se invicem secant, vel contingant, vel, ut generalius enonciemus, punctum aliquod commune habeant, ipsorum idem centrum non esse. (Apollonii de Taction. quae super-

μειζων βάσις ἄρα ἡ  $BZ$  βάσεως τῆς  $FZ$  μειζων ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $FZ$  τῆς  $HZ$  μειζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $EH$  μειζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ  $EH$  τῇ  $EA$  αἱ ἄρα  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $EA$  μειζονές εἰσιν. Κοινὴ ἀφηρόσθω ἡ  $EZ$ . λοιπὴ ἄρα ἡ  $HZ$  λοιπῆς τῆς  $ZA$  μειζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ  $ZA$ , ἐλαχίστη δὲ ἡ  $ZA$  μειζων δὲ ἡ μὲν  $ZB$  τῆς  $ZΓ$ , ἡ δὲ  $ZΓ$  τῆς  $ZH$ .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπесοῦνται πρὸς τὸν  $ABΓΔ$  κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς  $ZA$  ἐλαχίστης. Συνεστιάτω γὰρ πρὸς τῇ  $EZ$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $E$ , τῇ ὑπὸ  $HEZ$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $ZEΘ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ZΘ$ . Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $HE$  τῇ  $EΘ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $EZ$ , δύο δὴ αἱ  $HE$ ,  $EZ$  δυοὶ ταῖς  $ΘE$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $HEZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΘEZ$  ἴση βάσις ἄρα ἡ  $ZH$  βάσει τῇ  $ZΘ$  ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ  $ZH$  ἄλλη ἴση οὐ προσπесεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτεύω ἡ  $ZK$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $ZK$  τῇ  $ZH$  ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ  $ZΘ$  τῇ  $ZH$  καὶ ἡ  $ZK$  ἄρα τῇ  $ΘZ$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ καὶ οὕτως. Ἐπεζεύχθω ἡ  $EK$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $HE$  τῇ  $EK$ , κοινὴ δὲ ἡ  $EZ$ , καὶ βάσις ἡ

sunt. Gothae 1795. Lemm. A. p. 39.) Austin. observat, propositionem III. 6. manifesto etiam locum habere, quum duo circuli se extra contingant, neque itaque restringendam fuisse ad eum casum, quo se intus contingant, et deinde Prop. 5. et 6. una demonstratione comprehendit. Quod tamen observationem illam attinet, iam Clavius monuit, Euclidem proposuisse

maior; basis igitur  $BZ$  basi  $FZ$  maior est (l. 24.).  
Ex eadem ratione et  $FZ$  maior est quam  $HZ$ .

Rursus quoniam  $HZ$ ,  $ZE$  maiores sunt quam  $EH$ , aequalis autem  $EH$  ipsi  $EA$ ; erunt  $HZ$ ,  $ZE$  maiores quam  $EA$ . Communis auferatur  $EZ$ ; reliqua igitur  $HZ$  reliqua  $ZA$  maior est. Maxima igitur  $ZA$ , minima vero  $ZA$ ; maior autem  $ZB$  quam  $ZF$ , et  $ZF$  quam  $ZH$ .

Dico et a puncto  $Z$  duas tantum aequales cadere in circulum  $ABGA$ , ex utraque parte minimae  $ZA$ . Constituaturs enim (l. 23.) ad rectam  $EZ$ , et ad punctum in ea  $E$ , angulo  $HEZ$  aequalis  $ZEO$ , et iungatur  $ZO$ . Quoniam igitur  $HE$  aequalis est  $EO$ , communis autem  $EZ$ , duae  $HE$ ,  $EZ$  duabus  $OE$ ,  $EZ$  aequales sunt; et angulus  $HEZ$  angulo  $OEZ$  aequalis; basis igitur  $ZH$  basi  $ZO$  aequalis est (l. 4.). Dico autem ipsi  $ZH$  aliam aequalem non cadere in circulum a puncto  $Z$ . Si enim fieri potest, cadat  $ZK$ . Et quoniam  $ZK$  aequalis est  $ZH$ , sed et  $ZO$  ipsi  $ZH$ ; et  $ZK$  igitur ipsi  $OZ$  est aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum remotiori, quod fieri nequit.

Vel et hoc modo. Iungatur  $EK$ . Et quoniam  $HE$  aequalis est  $EK$ , communis autem  $EZ$ , et basis  $ZH$

hoc theorema de circulis duntaxat intus se contingentibus, quoniam circulorum extra se contingentium idem centrum esse non posse manifestum sit.

#### PROPOSITIO VII.

Obs. Duas, ex utraque parte minimae, aequales esse, Euclides ait, eas nempe, quae aequales angulos efficiunt cum

$ZH$  βάσει τῇ  $ZK$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἐπὶ  $HEZ$  γωνία τῇ ἐπὶ  $KEZ$  ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ἐπὶ  $HEZ$  τῇ ἐπὶ  $ZE\Theta$  ἐστίν ἴση· καὶ ἡ ἐπὶ  $ZE\Theta$  ἄρα τῇ ἐπὶ  $KEZ$  ἐστίν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου ἑτέρα τις προσπיעεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ  $HZ$ · μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπιοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma$ , καὶ τοῦ  $AB\Gamma$  εἰληφθῶ τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεαί τινες πρὸς τὸν κύκλον <sup>1)</sup> αἱ  $\Delta A$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta \Gamma$ , ἔστω δὲ ἡ  $\Delta A$  διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν

1) Verba: πρὸς τὸν κύκλον, quas Peyrard. cum Cod. a. omittit, ex edd. Oxon. et Basil. restituimus.

minima. Nempe in  $\triangle \Delta EZ\Theta$ ,  $EZH$  est (I. 14.) angulus  $EZH = EZH$ , adeoque et  $\Delta Z\Theta = \Delta ZH$  (I. 12.). Caeterum ex hac etiam propositione consequitur, quod iam III. 1. Cor. 2. deduximus, circulum non nisi unum centrum habere.



basi  $ZK$  aequalis; angulus igitur  $HEZ$  angulo  $KEZ$  aequalis est (I. 8.). Sed  $HEZ$  angulo  $ZE\Theta$  est aequalis; et  $ZE\Theta$  igitur angulo  $KEZ$  est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. Quare a puncto  $Z$  non cadet alia recta in circulum aequalis ipsi  $HZ$ ; una igitur sola. Si igitur circuli etc.

### PROPOSITIO VIII. (Fig. 214.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectae quaedam, quarum una per centrum, reliquae autem utcumque; earum quidem, quae ad concavam circumferentiam cadunt, rectarum maxima est quae per centrum; reliquarum autem, semper propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit; earum vero, quae in convexam circumferentiam cadunt, rectarum, minima est quae inter punctum et diametrum; reliquarum autem, semper propinquior minimae remotiore est minor. Binae autem tantum aequales a puncto cadunt in circulum, ex utraque parte minimae.

Sit circulus  $ABF$ , et extra ipsum sumatur punctum aliquod  $A$ , et ab eo ducantur ad circulum rectae quaedam  $AA$ ,  $AE$ ,  $AZ$ ,  $AF$ , sit autem  $AA$  per centrum; dico earum quidem, quae in  $AZZF$  conca-

Cor. Nullum itaque intra circulum punctum est, praeter centrum, a quo plures, quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

### PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Quenam circumferentiae pars concava, quae-  
nam convexa sit, hic ut vulgo notum supponitur, et definitus

πρὸς τὴν  $AEZΓ$  κοίλην περιφέρειαν προσπίπτουσά  
 εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ  $ΔΑ$   
 αἰ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερο  
 μείζων ἐστὶ, ἡ μὲν  $ΔΕ$  τῆς  $ΔΖ$ , ἡ δὲ  $ΔΖ$  τῆς  $ΔΓ$   
 τῶν δὲ πρὸς τὴν  $ΘΑΚΗ$  κυρτὴν περιφέρειαν προσ-  
 πίπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ  $ΔΗ$ , ἡ μεταξὺ  
 τοῦ σημείου  $Δ$  καὶ τῆς διαμέτρου  $ΑΗ$  αἰ δὲ ἡ  
 ἔγγιον τῆς  $ΔΗ$  ἐλαχίστης ἐλάττω ἐστὶ τῆς ἀπώτερον  
 ἡ μὲν  $ΔΚ$  τῆς  $ΔΑ$ , ἡ δὲ  $ΔΑ$  τῆς  $ΔΘ$ .

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου, καὶ  
 ἔστω τὸ  $Μ$  καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΜΕ$ ,  $ΜΖ$ ,  $ΜΓ$ ,  
 $ΜΚ$ ,  $ΜΑ$ ,  $ΜΘ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΜ$  τῇ  $ΕΜ$ , κοινὴ προσ-  
 κείσθω ἡ  $ΜΔ$ · ἡ ἄρα  $ΑΔ$  ἴση ἐστὶ ταῖς  $ΕΜ$ ,  $ΜΔ$ .  
 $ΑΙ$  δὲ  $ΕΜ$ ,  $ΜΔ$  τῆς  $ΕΔ$  μείζονες εἰσι καὶ ἡ  $ΑΔ$   
 ἄρα τῆς  $ΕΔ$  μείζων ἐστὶν. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  
 $ΕΜ$  τῇ  $ΖΜ$ , κοινὴ προσκείσθω ἡ  $ΜΔ$ , αἱ  $ΕΜ$ ,  $ΜΔ$   
 ἄρα ταῖς  $ΖΜ$ ,  $ΜΔ$  ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΕΜΔ$   
 γωνίας τῆς ὑπὸ  $ΖΜΔ$  μείζων ἐστὶν. Βάσις ἄρα ἡ  
 $ΕΔ$  βάσει τῆς  $ΖΔ$  μείζων ἐστὶν. Ὅμοίως δὲ δι-  
 ζομεν, ὅτι καὶ ἡ  $ΖΔ$  τῆς  $ΓΔ$  μείζων ἐστὶ· μεγίστη  
 μὲν ἄρα ἡ  $ΔΑ$ , μείζων δὲ ἡ μὲν  $ΔΕ$  τῆς  $ΔΖ$ , ἡ δὲ  
 $ΔΖ$  τῆς  $ΔΓ$ .

Καὶ ἐπεὶ αἱ  $ΜΚ$ ,  $ΚΔ$  τῆς  $ΜΔ$  μείζονες εἰσι,  
 ἴση δὲ ἡ  $ΜΗ$  τῇ  $ΜΚ$ , λοιπὴ ἄρα ἡ  $ΚΔ$  λοιπῆς τῆς  
 $ΗΔ$  μείζων ἐστὶν ὥστε καὶ ἡ  $ΔΗ$  τῆς  $ΔΚ$  ἐλάσσων  
 ἐστὶν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  
 $ΜΑΔ$  ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς  $ΜΔ$ , δύο εὐθεῖαι  
 ἐντὸς συνεσταθήσαν, αἱ  $ΜΚ$ ,  $ΚΔ$ , αἱ ἄρα  $ΜΚ$

utriusque terminus demum post III. 17. exhiberi potest. Cas-  
 terum omnis mentio concavae aut convexae circumferentiae  
 partis evitari poterat in hunc fere modum: Si e puncto aliquo

ram circumferentiam cadunt, rectorum maximam esse  $AA$ , quae per centrum; semper autem propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit, nempe  $AE$  maior quam  $AZ$ , et  $AZ$  quam  $AF$ ; earum autem, quae in  $\theta AKH$  convexam circumferentiam cadunt, rectorum, minima quidem  $AH$ , quae inter punctum  $A$  et diametrum  $AH$ ; semper autem propinquior ipsi  $AH$  minimae minor est remotiore,  $AK$  quidem minor quam  $AA$ , et  $AA$  quam  $AO$ .

Sumatur enim centrum circuli  $ABF$  (III. 1.), et sit  $M$ ; et iungantur  $ME$ ,  $MZ$ ,  $MF$ ,  $MK$ ,  $MA$ ,  $MO$ .

Et quoniam aequalis est  $AM$  ipsi  $EM$  (I. Def. 15.), communis addatur  $MA$ ; ergo  $AA$  aequalis est ipsis  $EM$ ,  $MA$ . Sed  $EM$ ,  $MA$  ipsa  $EA$  maiores sunt (I. 20.); et  $AA$  igitur ipsa  $EA$  maior est. Rursus, quoniam aequalis est  $EM$  ipsi  $ZM$ , communis addatur  $MA$ ; ergo  $EM$ ,  $MA$  ipsis  $ZM$ ,  $MA$  aequales sunt, et angulus  $EMA$  angulo  $ZMA$  maior est. Basis igitur  $EA$  basi  $ZA$  maior est (I. 24.). Similiter autem ostendemus, et  $ZA$  ipsa  $FA$  maiorem esse; maxima igitur est  $AA$ , maior vero  $AE$  quam  $AZ$ , et  $AZ$  quam  $AF$ .

Et quoniam  $MK$ ,  $KA$  maiores sunt quam  $MA$  (I. 20.), et  $MH$  aequalis  $MK$ , reliqua igitur  $KA$  reliqua  $HA$  maior est; quare et  $AH$  minor est quam  $AK$ ; minima igitur est. Et quoniam super trianguli  $MAA$  uno latere  $MA$ , duae rectae intus constituuntur;  $MK$ ,  $KA$  igitur ipsis  $MA$ ,  $AA$  minores sunt (I.

extra circulum posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una  $MA$  per centrum; ea, quae per centrum producta est, usquedum iterum cum circulo conveniat, nempe

$KA$  1) τῶν  $MA$ ,  $AA$  ἐλάττωτες εἰσιν ἴση δὲ ἡ  $MK$  τῇ  $MA$  λοιπῇ ἄρα ἡ  $AK$  λοιπῆς τῆς  $AA$  ἐλάττων ἐστίν. Ὅμοιως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ  $AA$  τῆς  $AB$  ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ  $AH$ , ἐλάττων δὲ ἡ μὲν  $AK$  τῆς  $AA$ , ἡ δὲ  $AA$  τῆς  $AB$ .

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου προσπесοῦνται 2) πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῇ  $AH$  ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ  $MA$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $M$ , τῇ ὑπὸ  $KMA$  γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ  $AMB$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $AB$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ  $MK$  τῇ  $MB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $MA$ , δυνάμει αἱ  $KM$ ,  $MA$ , ὁσοὶ ταῖς  $BM$ ,  $MA$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $KMA$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BMA$  ἴση βάσις ἄρα ἡ  $AK$  βάσει τῇ  $AB$  ἴση ἐστίν. Λέγω δὲ ὅτι τῇ  $AK$  εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ πρὸς πεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου. Ἐπεὶ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ  $AN$ . Ἐπὶ οὖν ἡ  $AK$  τῇ  $AN$  ἐστίν ἴση, ἀλλ' ἡ  $AK$  τῇ  $AA$

1) Pro: αἱ ἄρα  $MK$ ,  $KA$  Peyrard. e Cod. a habet tantum ἄρα. Nos ea verba ex edd. Oxon. et Basil. restitimus, etiam Peyrard. in versione latina et gallica habet.

2) Lectio haec προσπесοῦνται, quam e Cod. a habet Peyrardus, praefereunda omnino videtur alteri συμπεσοῦνται, quae habent edd. Oxon. et Basil.

$AA$ , erit omnium maxima, ea autem eius pars  $AH$ , quae a punctum  $H$  inter  $A$  et centrum intermedium ducitur, omnium minima; reliquarum autem semper ea maior erit, ad cuius intersectionem cum circulo recta e centro  $M$  ducta angulus cum recta  $MA$  maiorem efficit, quam ea, ad cuius intersectionis punctum recta e centro ducta minorem cum  $MA$  angulus efficit, et ad utrasque rectae  $MA$  partes binae tantum aequales erunt.

Cor. Neque extra circulum igitur ullum punctum est

71.); aequalis autem  $MK$  ipsi  $MA$ ; reliqua igitur  $AK$  reliqua  $AA$  minor est. Similiter autem ostendemus et  $AA$  minorem esse quam  $A\theta$ ; minima igitur et  $AH$ , minor vero  $AK$  quam  $AA$ , et  $AA$  quam  $A\theta$ .

Dico et duas tantum aequales a puncto  $A$  cadere in circulum, ex utraque parte ipsius  $AH$  minimae. Constituantur ad  $MA$  rectam, et ad punctum in ea  $M$ , ipsi  $KMA$  angulo aequalis angulus  $AMB$  (I. 23.), et iungatur  $AB$ . Et quoniam aequalis est  $MK$  ipsi  $MB$ , communis autem  $MA$ , duae  $KM$ ,  $MA$  duabus  $BM$ ,  $MA$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $KMA$  angulo  $BMA$  aequalis; basis igitur  $AK$  basi  $AB$  aequalis est (I. 4.). Dico autem ipsi  $AK$  rectae aliam aequalem non cadere in circulum a puncto  $A$ . Si enim fieri potest, cadat, et sit  $AN$ . Quoniam igitur  $AK$  ipsi  $AN$  est aequalis, sed  $AK$  ipsi  $AB$  est aequalis, et  $AB$  igitur ipsi  $AN$ , propinquior minimae  $AH$

a quo pares quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

Obs. 2. Consideratis hac ratione in Prop. 7. 8. punctis, quae vel extra vel intra circulum posita sunt, necessario occurrunt etiam puncta, quae in ipsa circumferentia sita sunt. In his idem fere obtinet, quod in Prop. 8. et 7. Nempe, si a puncto aliquo in ipsa circuli circumferentia posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una per centrum transeat, haec quidem omnium maxima erit; reliquarum autem ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro maiorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est, maior semper erit, quam ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro minorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est. Ete duabus puncti dati partibus binae tantum rectae aequales ad circulum duci possunt.

ἴσων ἴση· καὶ ἡ  $AB$  ἄρα τῇ  $AN$  ἴσιν ἴση, ἢ ἔργον τῆς  $AH$  ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερόν ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπεξεύχθω ἡ  $MN$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $KM$  τῇ  $MN$ , κοινὴ δὲ ἡ  $MA$ , καὶ βάσεις ἡ  $AK$  βάσει τῇ  $AN$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ  $KMA$  γωνία τῇ ὑπὸ  $NMA$  ἴση ἐστίν. Ἄλλ' ἡ ὑπὸ  $KMA$  τῇ ὑπὸ  $BMA$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $BMA$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $NMA$  ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν  $ABΓ$  κύκλον ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς  $AH$  ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ πᾶ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Quod eodem modo demonstratur ac III. 8. Hanc propositionem septimae huius libri subiungit Commandinus, qui eam quoque demonstravit in commentario in propositionem octavam libri Archimedis de spiralis, pariterque eam affert van Swinden Anfangsgründe der Messkunde.

Cor. Nec in ipsa igitur circumferentia, adeoque generatim nusquam in eo plano, in quo circulus descriptus est, praeter centrum, datur punctum, e quo plures, quam binae rectae aequales ad circumferentiam duci possunt. Binas autem in omnibus his propositionibus dicere maluimus, quam duas, quod ut Candalla monuit, sensus enunciati ita iustius exprimitur. Caeterum, quod modo de puncto in ipsa circuli circumferentia posito diximus, ad idem fere redit, quod infra

remotiore est aequalis, quod fieri non posse ostensum est.

Vel et aliter. Iungatur  $MN$ . Quoniam aequalis est  $KM$  ipsi  $MN$ , communis autem  $MA$ , et basis  $AK$  basi  $AN$  aequalis; angulus igitur  $KMA$  angulo  $NMA$  aequalis est (I. 8.). Sed  $KMA$  ipsi  $BMA$  est aequalis; et  $BMA$  igitur ipsi  $NMA$  est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur plures quam duae aequales in circulum  $AB\Gamma$  a puncto  $A$  ex utraque parte minimae  $AH$  cadent. Si igitur extra circulum etc.

### PROPOSITIO IX. (Fig. 215.)

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duae rectae aequales, sumptum punctum centrum est circuli.

III. 15. dicetur, nisi quod in III. 15. non de rectis tantum sermo est, quae ex eodem omnes puncto exeunt. Omnes tres propositiones, nempe III. 7. III. 8. eamque, quam Obs. 2. subiuimus, uno enunciato complectitur (quod facile fieri posse perspicuum est). Thom. Simpson. Elem. of Geometry Lond. 1800. p. 45. et Gilbert. p. 133. Quae porro Austin. de his propositionibus monet, dicemus ad Prop. 9.

Obs. 3. Facile patet, conversam quoque propositionum I. 8. eiusque, quam Obs. 2. habuimus, locum habere. Nempe, si e puncto aliquo in circuli plano posito, quod non sit centrum, ducantur plures rectae ad circulum, sitque una omnium maxima, erit in hac circuli centrum: ea vero, quae omnium minima est, erit, si punctum illud intra circulum fuerit, in

Ἐστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma$ , ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημείον τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον προσπιπτεύωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta \Gamma$ . λέγω ὅτι τὸ  $\Delta$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$ , καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ  $E$ ,  $Z$  σημεία, καὶ ἐπιζευχθείωσαν αἱ  $E\Delta$ ,  $Z\Delta$  διήχθωσαν ἐπὶ τὰ  $K$ ,  $H$ ,  $\Lambda$ ,  $\Theta$  σημεία.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἴση ἡ  $AE$  τῇ  $EB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $E\Delta$  δύο δὴ αἱ  $AE$ ,  $E\Delta$  δυοὶ ταῖς  $BE$ ,  $E\Delta$  ἴσων εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ  $\Delta A$  βάσει τῇ  $\Delta B$  ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AED$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BED$  ἴση ἐστὶν ὁρθὴ ἄρα ἑκατέρω τῶν ὑπὸ  $AED$ ,  $BED$  γωνιῶν ἡ  $HK$  ἄρα τὴν  $AB$  δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθείαν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ τῆς  $HK$  ἄρα ἐστὶ τὸ κέν-

directum scilicet, quae per centrum transit, ex parte puncti opposita; si vero punctum extra circulum fuerit, ea, quae omnium minima est, erit pars eius, quae per centrum transit, extra circulum sita (si punctum in ipsa circuli circumferentia fuerit, nulla dabitur omnium minima): omnibus porro casibus ea, quae maior est altera, circulum ita secabit, ut recta e centro ad punctum intersectionis maioris illius rectae et circuli ducta maiorem efficiat angulum cum recta e puncto ad centrum ducta, quam ea, quae e centro ad punctum intersectionis minoris cum circulo ducitur, efficit cum recta e puncto ad centrum ducta: denique binae rectae aequales e puncto ad circulum ductae puncta intersectionis cum circulo ita posita habebunt, ut rectae ad haec puncta e centro ductae aequales utrimque angulos efficiant cum ea, quae a puncto ad centrum ducitur. Quod facile sumto contrario evincitur. Conversam hanc, quatenus respicit III. 7., habet Clavius.



Sit circulus  $AB\Gamma$ , intra autem ipsum punctum  $A$ , ex  $A$  in circulum  $AB\Gamma$  cadant plures quam duae rectae aequales  $AA$ ,  $AB$ ,  $A\Gamma$ ; dico punctum  $A$  centrum esse circuli  $AB\Gamma$ .

Iungantur enim  $AB$ ,  $B\Gamma$ , et secentur bifariam in punctis  $E$ ,  $Z$  (I. 10.), et iunctae  $EA$ ,  $ZA$  producantur ad  $K$ ,  $H$ ,  $A$ ,  $\Theta$  puncta.

Quoniam igitur  $AE$  est aequalis  $EB$ , communis item  $EA$ , duae  $AE$ ,  $EA$  duabus  $BE$ ,  $EA$  aequales sunt; et basis  $AA$  basi  $AB$  aequalis; angulus igitur  $AEA$  angulo  $BEA$  aequalis est (I. 8.); rectus igitur uterque angulorum  $AEA$ ,  $BEA$  (I. Def. 10.).  $HK$  igitur  $AB$  bifariam secans et ad angulos rectos ipsam secat. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos angulos secet, centrum circuli est in secante (III. 1. Cor.); erit in  $HK$  cen-

#### PROPOSITIO IX.

Obs. Haec propositio facillime consequitur ex III. 7. Cor. vel generalius etiam, nulla positionis puncti intra circulum mentione facta, ope III. 8. Obs. 2. Cor. ita, ut nulla alia demonstratione opus foret. Atque ita Borellius rem expedit (Euclid. restitut. 1658. p. 72.). Caeterum debebat in demonstratione priore hic allata, si omnia iusto rigore persequi velis, distingui is casus, quo rectarum  $AB$ ,  $B\Gamma$  (Fig. 215.) alterutra per punctum  $A$  transit. Et, quum praeterea in hac demonstratione sumatur, quod apud Euclidem neque inter axiomata deprehendimus, nec alias demonstratum videmus (quo tamen etiam' utitur in demonstratione priore Prop. 10.) duas rectas nonnisi unum punctum commune habere, suspicari forte liceat, spuriam esse, quae primo loco habetur, demonstrationem. Editorum nonnulli priorem, nonnulli posterior demonstrationem omittunt. Priorem omittunt Tacquet,

τρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς  $\Theta A$  ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ  $HK$ ,  $\Theta A$  εὐθεῖαι, ἢ τὸ  $\Delta$  σημεῖον· τὸ  $\Delta$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \Lambda \Lambda \Omega \Sigma$

Κύκλου γάρ τοῦ  $AB\Gamma$  εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ  $\Delta$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον προσπιπτέ-  
τωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta \Gamma$ .  
λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ  $\Delta$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  
 $AB\Gamma$  κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $E$ , καὶ ἐπι-  
ζευχθεῖσα ἡ  $\Delta E$  διήχθω ἐπὶ τὰ  $Z$ ,  $H$  σημεία, ἡ  
 $ZH$  ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Ἐπεὶ  
οὖν κύκλον τοῦ  $AB\Gamma$  ἐπὶ τῆς  $ZH$  διαμέτρου εἰλη-  
πται τι σημεῖον τὸ  $\Delta$ , ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου,  
μεγίστη μὲν ἔσται ἡ  $\Delta H$ , μείζων δὲ ἢ μὲν  $\Delta \Gamma$   
τῆς  $\Delta B$ , ἢ δὲ  $\Delta B$  τῆς  $\Delta A$ . Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ  
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ  $E$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$

Rob. Simson., Playfair., posteriorem Campanus, Ambros.  
Rhodius, Orontius Fineus, Candalla, Giordano da Bitonto,  
Fournier, Hauff in Vers. German. Austin. monet, proposi-  
tionem 9. adeo facile deduci e septima, ut credi vix possit,  
Euclidem id non animadvertisse. Recentiores quosdam  
geometras reapse in posteriore 9. demonstratione, quae priori  
omnino praeferenda videatur, usos esse 7. At quum Euclides  
ipse, ad quem nempe priorem demonstrationem 9. referendam  
putat, 7. neque hic, neque alibi unquam utatur, nec 8. ullus  
usus sit apud Euclidem, quum praeterea theoria circuli etiam  
sine 7. et 8. perfectus esse videatur, quoad rectas ad circulum  
ductas propositionibus III. 14. III. 15. III. 35. et III. 36.

trum circuli  $AB\Gamma$ . Ex eadem ratione et in  $\Theta A$  est centrum circuli  $AB\Gamma$ . Et nullum aliud commune habent rectae  $HK$ ,  $\Theta A$  quam punctum  $A$ ; circuli  $AB\Gamma$  punctum igitur  $A$  centrum est. Si igitur circuli etc.

### A L I T E R. (Fig. 216.)

Intra enim circulum  $AB\Gamma$  sumatur aliquod punctum  $A$ , a  $A$  autem in  $AB\Gamma$  circulum cadant plures quam duae rectae aequales,  $AA$ ,  $AB$ ,  $A\Gamma$ ; dico sumptum punctum  $A$  centrum esse circuli  $AB\Gamma$ .

Non enim, sed si fieri possit, sit  $E$ , et iuncta  $AB$  producat in puncta  $Z$ ,  $H$ ; ergo  $ZH$  diameter est circuli  $AB\Gamma$ . Quoniam igitur in diametro  $ZH$  circuli  $AB\Gamma$  sumptum est aliquod punctum  $A$ , quod non est centrum circuli, maxima quidem erit  $AH$ , maior vero  $A\Gamma$  quam  $AB$ , et  $AB$  quam  $AA$  (III. 7.). Sed et aequalis, quod fieri nequit; non est igitur  $E$  centrum circuli  $AB\Gamma$ . Similiter autem ostendemus,

7. et 8. serius saltim inventum eius auctoris videri, qui propositionis 9. demonstrationem posteriorem addiderit. Obiici quidem posse, in Theodosii Sphaericis adhiberi has propositiones, et similia nonnulla de sphaeris demonstrari, at quum Theodosium tribus fere seculis post Euclidem vixisse perhibeant, ab illo quippe ab auctoris elementorum aevo nimis alieno non addisci posse, quaenam ab initio huius operis forma fuerit. Quae quamvis satis speciose dicta sint, pro certis tamen et indubitatis sumi posse non videntur, quum nondum evictum sit, posteriorem Prop. 9. demonstrationem non esse Euclidis, et propositiones 7. et 8., si non ad demonstrandas propositiones sequentes, certe tamen ad plenioram

κύκλου. Ὅμοιως δὴ δείζομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ  $\Delta$  τὸ  $\Delta$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ  $AB\Gamma$  κύκλον τὸν  $\Delta EZ$  τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ  $B, H, \Theta$ <sup>1)</sup> καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ  $B\Theta, BH$  δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ  $K, \Lambda$  σημεία καὶ ἀπὸ τῶν  $K, \Lambda$  ταῖς  $B\Theta, BH$  πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ  $K\Gamma, \Lambda M$  διήχθωσαν ἐπὶ τὰ  $\Lambda, E$  σημεία.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ  $AB\Gamma$  εὐθείᾳ τις ἢ  $AG$  εὐθείαν τινα τὴν  $B\Theta$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς  $AG$  ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ  $AB\Gamma$  εὐθείᾳ τις ἢ  $NE$  εὐθείαν τινα τὴν  $BH$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς  $NE$  ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς  $AG$ , καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ  $AG, NE$  εὐθεῖαι ἀλλήλαις

1) Editio Parisiensis, nulla exhibita Cod. auctoritate, ad exemplum tamen ed. Basil. ponit  $B, H, Z, \Theta$ . At, quum ostendendum sit, ne tria quidem puncta duobus circulis posse esse communia, restituendam omnino putavimus lectionem ed. Oxon.

accuratioremque circuli theoriam omnino pertinere videantur, cuius rei exempla etiam infra ad Prop. 11. videbimus.

### ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ X.

Huius quoque propositionis, quae generalius adhuc ita exprimi, et eadem ratione demonstrari poterat: circulus cum alio circulo non plures quam duo puncta communia habere

neque aliud praeter  $A$ ; ergo punctum  $A$  centrum est circuli  $AB\Gamma$ .

PROPOSITIO X. (Fig. 217.)

Circulus circulum non secat in pluribus punctis quam duobus.

Si enim fieri potest, circulus  $AB\Gamma$  circulum  $AEZ$  secet in pluribus punctis quam duobus,  $B, H, \Theta$ , et iunctae  $B\Theta, BH$  bifariam secantur in punctis  $K, A$  (I. 10.); et ab ipsis  $K, A$  ipsis  $B\Theta, BH$  ad rectos angulos ductae  $K\Gamma, AM$  (I. 11.) producantur in puncta  $A, E$ .

Quoniam igitur in circulo  $AB\Gamma$  recta aliqua  $A\Gamma$  rectam aliquam  $B\Theta$  bifariam et ad rectos secat, in  $A\Gamma$  erit centrum circuli  $AB\Gamma$  (III. 1. Cor. 1.). Rursum, quoniam in eodem circulo  $AB\Gamma$  recta aliqua  $N\Xi$  rectam aliquam  $BH$  bifariam et ad rectos secat, in  $N\Xi$  centrum est circuli  $AB\Gamma$  (III. 1. Cor. 1.). Ostensum autem ipsum esse et in  $A\Gamma$ , et in nullo puncto conveniunt rectae  $A\Gamma, N\Xi$  inter se praeterquam in

potest (in quo enunciato illud etiam continetur, circulos se invicem contingentes certe non plura quam duo puncta communia habere) in textu graeco duae sunt demonstrationes. In priore illud desiderari possit, quod non satis accurate demonstratum sit, rectas, quae in punctis bisectionis rectis ex hyp. utriusque circulo inscriptis ad angulos rectos ducantur, sibi invicem in puncto aliquo et quidem unico occurrere, qui defectus tamen facile expleri potest ope I. Ax. 11. et I. Ax. 10. et I. Ax. 12. Demonstratio posterior sumit sine ratione, punctum, quod pro centro unius circuli sumtum fuit, esse intra alterum circulum. Neque tamen necesse est hoc sumere,

ἢ κατὰ τὸ  $O$ . τὸ  $O$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου. Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ  $ΔΕΖ$  κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ  $O$ . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ  $O$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

### Α Α Α Ω Σ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ  $ABΓ$  κύκλον τὸν  $ΔΕΖ$  τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ  $B$ ,  $H$ ,  $Z$ , καὶ εἰληφθῶ τὸ κέντρον τοῦ  $ABΓ$  κύκλου τὸ  $K$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $KB$ ,  $KH$ ,  $KZ$ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλον τοῦ  $ΔΕΖ$  εἰληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ  $K$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $K$  πρὸς τὸν  $ΔΕΖ$  κύκλον προσπεπιτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ  $KB$ ,  $KZ$ ,  $KH$ . τὸ  $K$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΔΕΖ$  κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου κέντρον τὸ  $K$ . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ  $K$ , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

si praemissis propositionibus III. 7. III. 8. et ea, quae Obs. 2. ad III. 8. continetur, propositionem III. 9. generalius exprimas de puncto quocunque etiam non intra circulum posito. Atque ita propositiones III. 7. III. 8. et III. 8. Obs. 2. necessariae forent ad demonstrationem posteriorem III. propositionis 10. perficiendam. Etiam hic alii editores omittunt demonstrationem priorem v. c. Orontius Fineus, Borellius, Tacquet, Coëtsius, Giordano da Bitonto, Fournier, Rob. Simson, Playfair, alii posteriorem, v. c. Campanus, Candalla, Tartalea, Ambros. Rhodius, Hauff deutsche Uebersetz., Lorenz deutsche Uebersetz. 3te Ausg. 1809. Caeterum sequentia adhuc ex hac propositione et maxime ex demonstratione priore perficienda ante ut diximus, corollaria derivari possunt:

$O$ ; ergo  $O$  punctum centrum est circuli  $AB\Gamma$ . Similiter autem ostendemus, et circuli  $\Delta EZ$  centrum, esse  $O$ ; duorum igitur circulorum sese secantium  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , idem erit centrum  $O$ , quod fieri nequit (III. 5.). Circulus igitur non etc.

### ALITER. (Fig. 218.)

Circulus enim rursus  $AB\Gamma$  circulum  $\Delta EZ$  secet in pluribus punctis quam duobus,  $B$ ,  $H$ ,  $Z$ , et sumatur centrum circuli  $AB\Gamma$ ,  $K$ , et iungantur  $KB$ ,  $KH$ ,  $KZ$ .

Quoniam igitur intra circulum  $\Delta EZ$  sumptum est aliquod punctum  $K$ , et a  $K$  in circulum  $\Delta EZ$  incidunt plures quam duae rectae aequales,  $KB$ ,  $KZ$ ,  $KH$ ; ergo punctum  $K$  centrum est circuli  $\Delta EZ$  (III. 9.). Est autem  $K$  et circuli  $AB\Gamma$  centrum; duorum igitur circulorum sese secantium idem centrum est  $K$ , quod fieri nequit (III. 5.). Non igitur circulus etc.

Cor. 1. Per tria puncta non in eadem recta posita circulus describi potest, invento nempe illius centro eadem, quae prior demonstratio utitur, ratione, et tribus itaque punctis datis omnimode determinatur circulus, qui per ea transit.

Cor. 2. Recta, quae duo puncta, quibus duo circuli se secant, iungit, non per utriusque circuli centrum transit, vel non est utriusque circuli diameter. Quodsi enim esset diameter utriusque circuli, vel idem centrum esset utrique circulo, quod fieri nequit (III. 5.) vel recta haec in duobus punctis bisecaretur, quod pariter fieri non potest (I. Ax. 9.) Cf. Pheidox.

Cor. 3. Quae rectam puncta intersectionis circulorum se secantium iungentem, sive haec per centrum unius circuli

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναντήσασα πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ  $ABΓ$ ,  $ΔΔΕ$  ἐφάπτεσθωσαν <sup>1)</sup> ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ  $A$  σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου κέντρον τὸ  $Z$ , τοῦ δὲ  $ΔΔΕ$  τὸ  $H$ · λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ  $H$  ἐπὶ τὸ  $Z$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ  $A$  σημεῖον πεσεῖται.

1) ἐφάπτεσθωσαν e Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἀπτεσθωσαν, quod est in add. Oxon. et Basil. Cf. quae diximus ad Def. 2. huius libri.

transeat, sive non, bifariam secet recta, eique ad angulos rectos insistit, per centra duorum circularum transit, et vice versa. Cf. Pflaiderer.

Cor. 4. Distantia centrorum duorum circularum, qui se intersecant, minor est summa radiorum eorum (I. 20.); et quod pariter ex I. 20. consequitur, si radii inaequales sint, distantia centrorum maior est differentia radiorum eorum; et is radius, qui altero maior est, minor est summa alterius radii et distantiae centrorum. Semper nempe triangulum effici debet inter utrumque centrum et punctum sectionis circularum. Cf. Pflaiderer.

## PROPOSITIO XI.

Obs. 1. In huius propositionis enunciatione distinctius dicendum erat, quo sensu vox ἐκβαλλομένη sumta sit. Illud nempe volebat auctor, ut e demonstratione utraque patet, rectam, quae centra utriusque circuli coniungit, productam ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in contactum, vel potius in illud ipsum punctum cadere, in quo duo circuli se contingere sumebantur. Hac demum ratione, accu-



## PROPOSITIO XI. (Fig. 219.)

Si duo circuli sese intus contingant, et sumantur eorum centra, recta centra eorum coniungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta E$  sese contingant intus in puncto  $A$ , et sumatur circuli quidem  $AB\Gamma$  centrum  $Z$ , circuli autem  $A\Delta E$  centrum  $H$ ; dico rectam ab  $H$  ad  $Z$  ductam, si producat in punctum  $A$  cadere.

radius sensu enunciati determinato, patet, cur in figura punctum  $H$  centrum nempe circuli minoris vel interioris sumtum sit ex ea parte puncti  $Z$  centri circuli maioris, vel alterum comprehendentis, e qua sunt puncta  $\Delta$ ,  $\Theta$ , in quibus recta  $ZH$  circulos in demonstratione secare sumitur. Dixi, unum circulorum necessario alterum comprehendere, adeoque maiorem esse altero. Quamvis enim in iis, quae ad III. 3. Def. observata sunt, duos circulos intus se in puncto aliquo contingere dixerimus, si ea saltim puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint intra alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum) ex iis tamen, quae hactenus demonstrata sunt, colligere iam licebit, unum eorum circulorum necessario integrum intra alterum positum esse. Quodsi enim imaginari velis, duos circulos intus se in puncto aliquo contingentes, quorum tamen neuter intra alterum comprehendatur, necessario is, cuius puncta puncto  $A$  proxima intra alterum posita sint, extra hunc exire, et deinde per aliud eius punctum, vel per idem punctum iterum intra circulum redire deberet. At, si temere velis, posse esse (Fig. 220.) circulum  $AB\Delta\Gamma$ , qui alterum  $AB\Gamma E$  intus contingat, et in  $B$  extra hunc exeat versus  $\Delta$ , in  $\Gamma$  vero intra eum redeat, duo hi circuli plura

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ  $ZH\Theta$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $AZ$ ,  $AH$ .

Ἐπεὶ οὖν αἱ  $AH$ ,  $HZ$  τῆς  $ZA$  τοῦτ' ἐστὶ τῆς  $Z\Theta$ , (ὅση γὰρ ἡ  $ZA$  τῇ  $Z\Theta$ , ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω <sup>1)</sup> μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφ' ἡρῆσθω ἡ  $ZH$  λοιπὴ ἄρα ἡ  $AH$  λοιπῆς τῆς  $H\Theta$  μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ  $AH$  τῇ  $AH$  καὶ ἡ  $HA$  ἄρα τῆς  $H\Theta$  μείζων ἐστίν, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὸ  $H$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ  $A$  συναφῆς πεσεῖται ἐν αὐτῇ ἄρα. Ἐάν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἐξῆς.

$A A A \Omega \Sigma$ .

Ἀλλὰ δὲ πιπτέτω ὡς ἡ  $HZ\Gamma$ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐν εὐθείας ἡ  $HZ\Gamma$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$  σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $AH$ ,  $AZ$ .

1) Verba uncis inclusa, quae Peyrardus cum Cod. a. omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituiimus,

quam duo puncta communia habebunt, quod fieri nequit, ut in Obs. ad III. 10. monuimus. Sin autem imaginari velis circulum  $ABABA$  (Fig. 221.), qui alterum  $ABE$  intus contingat, et tamen extra eum in puncto  $B$  egrediatur, per idem punctum  $B$  autem intra illum regrediatur, necessario ille nodiformis erit, et e duabus figuris vel gyris, una  $AB$ , altera  $BA$  undequaque clausis, et in puncto  $B$  cohaerentibus constabit, in quarum altera v. g. in  $AB$  centrum circuli  $\Gamma$  positum erit. Ex centro  $\Gamma$  ducatur ad punctum aliquod  $Z$  alterius gyri recta  $\Gamma Z$ , quae, quum necessario e gyro  $AB$  exire debeat, hunc secabit in puncto aliquo  $\Theta$  (I. Ax. 13.), eruntque tam  $\Gamma\Theta$  quam  $\Gamma Z$  radii circuli, adeoque  $\Gamma\Theta = \Gamma Z$  (Def. I. 15.) pars itaque aequalis toti, quod est absurdum. Quam igitur circulus, qui alterum intus contingit, et cuius itaque

Non enim, sed si fieri potest, cadat ut  $ZH\Theta$ , et iungantur  $AZ$ ,  $AH$ .

Quoniam igitur  $AH$ ,  $HZ$  recta  $ZA$  (I. 20.), hoc est recta  $Z\Theta$  maiores sunt (est enim  $ZA$  aequalis  $Z\Theta$ , ambae quippe ex eodem centro), communis auferatur  $ZH$ ; reliqua igitur  $AH$  reliqua  $H\Theta$  maior est. Est autem  $AH$  aequalis  $AH$ ;  $HA$  igitur ipsa  $H\Theta$  maior est, minor maiore, quod fieri nequit. Non igitur a  $Z$  ad  $H$  ducta recta extr contactum  $A$  cadet. Ergo in contactum cadet. Si igitur duo circuli etc.

### ALITER.

Sed cadat ut  $HZF$ , et producat in directum  $HFZ$  ad punctum  $\Theta$ , et iungantur  $AH$ ,  $AZ$ .

puncta contactui proxima intra hunc continentur, nulla sui parte extra hunc egredi vel eum secare possit, consequitur, illam circulum prorsus ab hoc comprehendi, vel integrum intra eum situm esse, adeoque minorem esse circulo comprehendente. Unde et radius circuli comprehensi minor erit radio circuli comprehendentis. (Vid. Obs. ad III. 1. Def. sub finem.) Et illum quidem, qui e duobus se invicem contingebus circulis radium minorem habet, intra contingere, alterum, qui radium maiorem habet, contingi dicimus. His praemissis, quae ad omnes scrupulos penitus eximendos necessaria visa sunt, reliqua etiam plenius et accuratius ita expediuntur. Si duo circuli  $ABF$ ,  $AAE$  (fig. 222.) se intus contingant in puncto  $A$  (adeoque ex III. 6. centra eorum diversa sint), recta, quae centra utriusque circuli coniungit producta ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in illud ipsum punctum  $A$  cadet, in quo duo illi circuli se contingunt. Sit enim  $H$  centrum circuli interioris

Ἐπεὶ οὖν αἱ  $AH$ ,  $HZ$  μείζους εἰσὶ τῆς  $AZ$ , ἀλλὰ ἡ  $ZA$  ἴση ἐστὶ τῇ  $ZΓ$ , τοῦτ' ἐστὶ τῇ  $ZΘ$ , κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ  $ZH$ : λοιπὴ ἄρα ἡ  $AH$  λοιπῆς τῆς  $HΘ$  μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἡ  $HA$  τῆς  $HΘ$ , ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὁμοίως, κἂν ἐκτὸς ἢ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται <sup>1)</sup> ἀλλήλων ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιξευγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

1) ἐφάπτονται e Cod. a. ponit Peyrardus pro simpliciter ἄπτονται, quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. III. 11. Πρόπ.

(minoris),  $Z$  centrum circuli exterioris vel maioris. Iam, si punctum contactus  $A$  non sit in recta  $ZH$  ultra  $H$  producta, erit aut in recta  $ZH$  ultra  $Z$  producta, aut extra rectam  $ZH$ . Sit 1) si fieri potest, punctum  $A$  in recta  $ZH$  ultra centrum circuli maioris  $Z$  producta, eritque  $HA = HZ + ZA$ , adeoque  $HA > ZA$ . At ex hypoth.  $Z$  est centrum circuli maioris, vel (vid. Obs. ad III. 1. Def.) est  $ZA > HA$ . Absurdum igitur est, esse simul  $HA > ZA$ . Sit 2) punctum  $A$  extra rectam  $ZH$  positum. Recta  $ZH$  ultra  $H$  producta necessario cum utroque circulo conveniet (I. Ax. 13.). Conveniet autem cum utroque circulo vel in puncto utrique communi, vel in duobus diversis punctis. Conveniat a) si fieri potest (Fig. 223.) in puncto  $\Theta$  utrique circulo communi, ductisque ad punctum contactus  $A$  rectis  $HA$ ,  $ZA$ , constituetur triangulum  $HZA$ , in quo  $AH + HZ > ZA$  (I. 20.) i. e.  $> Z\Theta$  (I. Def. 15.), adeoque, demta communi  $ZH$ ,  $AH > H\Theta$ . At etiam  $AH = H\Theta$  (I. Def. 15.), quod est absurdum. Conveniat b) recta  $ZH$  cum circulo exteriori in puncto  $\Theta$  (Fig. 219.) cum circulo interiori in puncto

Quoniam igitur  $AH$ ,  $HZ$  maiores sunt ipsa  $AZ$  (I. 20.), sed  $ZA$  aequalis est  $ZF$ , hoc est ipsi  $Z\Theta$ , communis auferatur  $ZH$ ; reliqua igitur  $AH$  reliqua  $H\Theta$  maior est, hoc est  $HA$  ipsa  $H\Theta$ , minor maiore, quod fieri nequit. Similiter, et si extra circulum parvum sit centrum maioris circuli, ostendemus idem absurdum sequi.

### PROPOSITIO XII. (Fig. 225.)

Si duo circuli sese extra contingant, recta centra ipsorum coniungens per contactum transibit.

d, et evincetur alterutra earum demonstrationum, quae sunt apud Euclidem, id fieri non posse. (Haec autem consequentia non valeret, nisi ante ostensum fuerit, circulos se intus contingentes non simul se invicem secare posse vel punctum  $\Theta$  non intra circulum minorem esse posse.) Nequaquam igitur punctum  $A$  extra rectam  $ZH$ , nec in ipsa recta  $ZH$  ex ea huius rectae parte esse potest, qua ultra punctum  $Z$  producta est: itaque (quum centra  $Z$ ,  $H$  intra suos quodque circulos, adeoque punctum  $A$ , in circumferentia quippe circulorum positum, nec in ipsa  $ZH$  inter haec puncta situm esse possit), erit necessario in recta  $ZH$  ultra  $H$  centrum circuli interioris producta, vel, quod eodem redit, puncta  $Z$ ,  $H$ ,  $A$  centra nempe et punctum contactus in eadem recta, et quidem eo, quo nominavimus, ordine posita erunt. Aliam casus 2. b. demonstrationem ex III. 2. derivatam habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion. Alia porro, quam Coësius habet, demonstratio, dubito an efficiat id, quod probandum erat.

Cor. Et quum recta  $ZH$  necessario ex utraque parte producat circulos secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.) ex ea parte, qua ultra  $H$  producit, in uno tantum puncto  $A$  eos secare

Ἄνο γὰρ κύκλοι οἱ  $AB\Gamma$ ,  $\Lambda\Delta E$  ἐφαπτισθῶσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ  $A$  σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν  $AB\Gamma$  κύκλου κέντρον, τὸ  $Z$ , τοῦ δὲ  $\Lambda\Delta E$  τὸ  $H$ . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὸ  $H$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ  $A$  ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς αἱ  $Z\Gamma\Delta H$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ZA$ ,  $AH$ .

poterit. Quum igitur punctum contactus duorum circularum intus se contingentium positum sit in recta centra eorum coniungente, qua ultra centrum circuli interioris *producta* circulis occurrit, illa autem occurrere circulis ex hac parte non nisi in uno puncto possit, circuli, qui se intus contingunt, non nisi in uno puncto se contingent. Et quum circuli, qui se intus in puncto aliquo contingunt, nec in alio puncto se secare possint, ut supra vidimus, generalius adhuc dici potest, eos non nisi unum punctum commune habere. (Est haec pars propositionis III. 13. facile ita stabilienda, quamvis generalius expressa).

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque corollario immediate haec etiam eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem intus contingunt, recta ex centro unius circuli ad punctum contactus ducta per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. V. ad Apollon. de Taction vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. C. Habet eam quoque Coësius in Schol. ad III. 11.)

Obs. 3. Alia porro huius propositionis conversa locum habet: nempe, si duo circuli punctum aliquod  $A$  (Fig. 224.) commune habeant, sintque radii eorum ad punctum  $A$  vergentes in eadem recta, ex eadem parte puncti illius communis positi: circuli in puncto isto communi intus se contingunt. Sint enim centra duorum circularum  $H$ ,  $Z$ , quae non coincident (III. 6. Obs.), sitque  $Z$  punctum a puncto  $A$  remotius. Ex puncto  $Z$  ad punctum aliquod  $\Delta$  circuli radio  $HA$  descripti ducatur recta  $Z\Delta$ , eritque haec recta minor recta  $ZA$  (III. 7. III. 8. et Obs. 2. ad III. 8.), adeoque ex Def. 15. punctum  $\Delta$  situm

Duo enim circuli  $AB\Gamma$ ,  $A\Lambda E$  sese contingant extra in puncto  $A$ , et sumatur circuli quidem  $AB\Gamma$  centrum  $Z$ , circuli vero  $A\Lambda E$  centrum  $H$ ; dico rectam a  $Z$  ad  $H$  ductam per contactum  $A$  transire.

Si enim non, cadat, si fieri potest, ut  $Z\Gamma AH$ , et iungantur  $ZA$ ,  $AH$ .

erit intra circulum centro  $Z$ , radio  $ZA$  descriptum. Idem demonstrabitur de puncto quocunque circuli radio  $HA$  descripti ex alterutra parte rectae  $Z, A$  sumto. Itaque duo isti circuli in puncto  $A$  se intus contingunt (Obs. ad III. 3. nr. d.). (Est hoc Pappi Lemm. VI. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. CI.)

Cor. Hinc patet ratio describendorum circularum, qui se invicem intra contingant, et manifestum est, distantiam centrorum in iis aequalem esse differentia radiorum eorum, et vice versa.

## PROPOSITIO XII.

Obs. 1. In circulis etiam, qui se extra contingunt (cf. Obs. ad III. 3. Def. nr. b. c.) simili plane ratione ac in propositione praecedente demonstrabitur, eos se invicem nusquam secare posse, vel utrumque integrum extra alterum positum esse. Deinde, si in puncto  $A$  se extra contingant, punctum  $A$  necessario positum erit in ipsa recta, quae centra utriusque circuli (quae quum uterque circulus integer extra alterum sit, certe diversa erunt) coniungit. Si enim punctum contactus  $A$  non positum sit in ipsa hac recta, erit vel in recta utrumque centrum iungente ultra alterutram centrum producta, vel extra eam. Sit 1) si fieri potest (Fig. 226.) punctum  $A$  in recta, quae centrum  $Z$  unius circuli (primum vocabimus) ac centrum  $H$  alterius circuli (secundum appellabimus) coniungit, ultra secundum v. g. centrum  $H$  producta. At, quum uterque circulus integer extra alterum positus sit, recta  $ZH$ , antequam

Ἐπεὶ οὖν τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ  $ZA$  τῇ  $Z\Gamma$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $H$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $A\Delta E$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ  $AH$  τῇ  $HA$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἢ  $ZA$  τῇ  $Z\Gamma$  ἴση αἱ ἄρα  $ZA$ ,  $AH$  ταῖς  $Z\Gamma$ ,  $\Delta H$  ἴσαι εἰσὶν ὥστε ὅλη ἢ  $ZH$  τῶν  $ZA$ ,  $AH$  μείζων ἐστὶν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἢ ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὸ  $H$  ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ  $A$  επαφῆς οὐκ ἐλείσεται δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐγγίπτεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν, εἴν τε ἐντὸς ἐγγίπνεται, εἴν τε ἐκτὸς.

secundum circulum intrare possit, primum circulum secabit in puncto aliquo  $\Gamma$  (I. Ax. 13.), adeoque erit  $Z\Gamma$  radius primi circuli. At ex hypothesis eadem recta  $ZH$  producta in  $A$  occurrat puncto utrique circulo communi, adeoque etiam  $ZA$  est radius primi circuli. Erit itaque  $Z\Gamma = ZA$  (I. Def. 15.) pars toti, quod est absurdum. Punctum itaque  $A$  non situm esse potest in recta  $ZH$  ultra  $H$  producta. Eodemque modo ostenditur, non esse punctum contactus  $A$  in recta  $ZH$  ultra  $Z$  producta. Sit deinde 2) si fieri potest, punctum contactus  $A$  extra rectam  $ZH$ , rectaque  $ZH$  vel utrique circulo in eodem puncto  $\Theta$ , vel uni quidem in puncto  $\Gamma$ , alteri in puncto  $\Delta$  occurrat. Occurrat 1) si fieri potest, utrique circulo (Fig. 227.) in puncto  $\Theta$ , ductisque ad punctum contactus  $A$  rectis  $ZA$ ,  $HA$ , constituetur triangulum  $ZAH$ , in quo  $ZA + HA > ZH$  (I. 20.). At  $ZA = Z\Theta$ , et  $HA = H\Theta$  (I. Def. 15.) Itaque  $Z\Theta + H\Theta = ZA + HA$ . i. e.  $ZH = ZA + HA$  q. e. a. Occurrat deinde b) recta  $ZH$  (Fig. 225.) uni circulo in  $\Gamma$ , alteri in  $\Delta$ , et ostendetur, ut apud Euclidem, etiam hoc fieri non posse. Quum igitur punctum contactus neque extra rectam  $ZH$ , neque



Quoniam igitur  $Z$  punctum centrum est circuli  $AB\Gamma$ , aequalis est  $ZA$  ipsi  $Z\Gamma$  (I. Def. 15.). Rursum, quoniam  $H$  punctum centrum est circuli  $A\Delta E$ , aequalis est  $AH$  ipsi  $H\Gamma$  (I. Def. 15.). Ostensa est autem  $ZA$  ipsi  $Z\Gamma$  aequalis; rectae igitur  $ZA$ ,  $AH$  rectis  $Z\Gamma$ ,  $AH$  aequales sunt; quare tota  $ZH$  ipsis  $ZA$ ,  $AH$  maior est. Sed et minor (I. 20.), quod fieri nequit. Non igitur recta a  $Z$  ad  $H$  ducta per contactum  $A$  non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli etc.

### PROPOSITIO XIII. (Fig. 229.)

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

in ipsa ultra alterutrum centrum producta, nec (ut ex I. 15. Def. patet) in alterutro punctorum  $Z$ ,  $H$  situm esse possit, erit necessario inter puncta  $Z$  et  $H$  intermedium, vel, quod eodem redit, centra  $Z$ ,  $H$  et punctum contactus  $A$  hoc ordine:  $Z$ ,  $A$ ,  $H$  se invicem subsequuntur. Caeterum Campanus et Peletarius hanc propositionem cum praecedente simul uno eodemque enunciato efferunt, et casus 2. b. aliam adhuc ex III. 8. derivatam demonstrationem habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion.

Cor. 1. Et, quum recta  $ZH$  necessario ex utraque parte producta alterutrum circulum secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus, quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.), inter puncta  $Z$  et  $H$  utrumque in uno tantum puncto  $A$  secare poterit. Circuli itaque se extra contingentes non nisi in uno puncto se contingant, et, quum nec in alio puncto se secare possint, unum tantum punctum commune habebunt. (Et haec pars altera III. 13. Prop. generalius expressa.)

Cor. 2. Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, quod non sit in recta centra eorum iungente ipsa aut

Ἐν γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ  $ABΓΔ$  κύκλου τοῦ  $EBZΔ$  ἐφαπτέσθω <sup>1)</sup> πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἐν, τὰ  $B, Δ$ .

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν  $ABΔΓ$  κύκλου κέντρον, τὸ  $H$ · τοῦ δὲ  $EBZΔ$ , τὸ  $Θ$ .

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ  $H$  ἐπὶ τὸ  $Θ$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἐπὶ τὰ  $B, Δ$  πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ  $BHΘΔ$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ  $H$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΔΓ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $BH$  τῇ  $HΔ$ · μείζων ἄρα ἡ  $BH$  τῆς  $ΘΔ$ · πολλῶν ἄρα μείζων ἡ  $BΘ$  τῆς  $ΘΔ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $Θ$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $EBZΔ$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $BΘ$  τῇ  $ΘΔ$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἐν.

1) Hic quoque e Cod. a. Peyrard. ponit ἐφαπτέσθω pro simplici ἀππτεσθω edd. Oxon. et Basil. Caeterum figuram huius propositioni adiunximus, qualis fere est in editione Basileensi, textui Graeco melius respondentem, quam quae vulgo habetur.

producta, circuli hi in isto puncto se invicem secabunt. Si enim se invicem non secant, se contingunt. Atqui contingere se non possunt (III. 11. vel III. 12.), ergo secabunt.

Cor. 3. Duo itaque circuli, in quibus distantia centrorum minor est summa radiorum, et si radii inaequales sint, maior differentia radiorum, se invicem secant. Tum nempe (I. 22.) e duobus radiis et recta, quae centrorum distantiam exprimit, triangulum constitui poterit, in quo itaque punctum, in quo radii se intersecant, non erit in recta centra iungente, unde res consequitur ex Cor. praecedente.

Cor. 4. Duo circuli, qui in duobus punctis sibi occurrunt, se invicem secant. Contingere enim se non possunt

Si enim fieri potest, circulus  $ABAT$  circulum  $EBZA$  contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in  $B, A$ .

Et sumatur ipsius quidem circuli  $ABAT$  centrum  $H$  (III. 1.); ipsius autem  $EBZA$ , centrum  $\Theta$ .

Recta igitur ab  $H$  ducta ad  $\Theta$  in puncta  $B, A$  cadet (III. 11.). Cadat ut  $BH\Theta A$ . Et quoniam punctum  $H$  centrum est circuli  $ABAT$ , aequalis est  $BH$  ipsi  $HA$  (I. Def. 15.); maior igitur  $BH$  ipsa  $\Theta A$ ; ergo multo maior  $B\Theta$  ipsa  $\Theta A$ . Rursus, quoniam punctum  $\Theta$  centrum est circuli  $EBZA$ , aequalis est  $B\Theta$  ipsi  $\Theta A$  (I. Def. 15.) Ostensa est autem ipsa et multo maior, quod fieri nequit; non igitur circulus circulum contingit intus in pluribus punctis quam in uno.

(Cor. ad Obs. 1. III. 11. et Cor. 1. ad Obs. 1. III. 12.). Cf. Pfeiderer.

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque Cor. 1. immediate etiam haec eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem extra contingunt, recta ex centro unius ad punctum contactus ducta, si producat<sup>ur</sup> ultra contactus punctum, per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. III. in Apollon. de Taction. vel Coll. Math. L. VII. Pr. XCVIII.)

Obs. 3. Fæ huius propositionis alia quoque conversa locum habet. Nempe, si duo circuli punctum aliquod  $A$  commune habeant, sintque radii eorum ad hoc punctum vergentes in eadem recta, e diversis puncti illius communis partibus positi: circuli in puncto isto communi extra se contingunt. Sui enim (Fig. 228.) unius circuli diameter  $AB$  ac centrum  $H$ , alterius diameter  $AT$ , centrumque  $Z$ . Quum igitur ex hyp.  $Z$  situm sit in diametro  $BA$  producta, erit (Obs. ad III. 2.) punctum  $Z$  extra circulum  $AT$ . Unde simili ratione, ac in Obs. 5. ad propositionem præcedentem ex III. 8. demonstratur, rectas

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ  $ΑΓΚ$  κύκλου τοῦ  $ΑΒΔΓ$  ἐφαπτιέσθω ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν, τὰ  $Α$ ,  $Γ$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $ΑΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν  $ΑΒΔΓ$ ,  $ΑΓΚ$  εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ  $Α$ ,  $Γ$ , ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντός ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν  $ΑΒΔΓ$  ἐντός ἔπιασε, τοῦ δὲ  $ΑΓΚ$  ἐκτός, ὅπερ ἀτοπον οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΔΓ$ , καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ  $ΑΒΔΓ$  κύκλου, καὶ ἔστω τὸ  $Ε$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  κείσθωται ἡχθῶσαν αἱ  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΑΕ$ ,  $ΓΕ$ .

ex puncto  $Z$  ex utraque parte puncti  $A$  ductas ad puncta quaecunque circuli  $AB$  maiores esse recta  $ZA$ , adeoque puncta quaecunque circuli  $AB$  ex utraque parte puncti  $A$  sita esse extra circulum  $ΑΓ$ . Eodem prorsus modo ostendetur, puncta quaecunque circuli  $ΑΓ$  ex utraque parte puncti  $A$  sita esse extra circulum  $AB$ . Circuli itaque in puncto  $A$  extra se contingunt (Obs. ad III. 3. Def. nr. c.). Est haec propositio Pappi

Dico etiam neque extra. Si enim fieri potest, circulus  $ATK$ , circulum  $AB\Gamma A$  contingat extra in pluribus punctis quam in uno, in  $A$ ,  $\Gamma$ , et iungatur  $AT$ .

Quoniam igitur in circumferentiis circulorum  $AB\Gamma A$ ,  $ATK$  sumpta sunt duo quaelibet puncta,  $A$ ,  $\Gamma$ , recta haec puncta coniungens intra utrumque cadet (III. 2.). Eadem autem intra circulum quidem  $AB\Gamma A$  cadit, at extra circulum  $ATK$  (III. Def. 3.), quod est absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur etc.

#### PROPOSITIO XIV. (Fig. 230.)

In circulo aequales rectae aequaliter distant a centro, et quae aequaliter distant a centro aequales inter se sunt.

Sit circulus  $AB\Gamma A$ , et in eo aequales rectae sint  $AB$ ,  $\Gamma A$ ; dico ipsas aequaliter distare a centro.

Sumatur enim centrum circuli  $AB\Gamma A$  (III. 1.), et sit  $B$ , et ab  $E$  ad  $AB$ ,  $\Gamma A$  perpendiculares ducantur  $EZ$ ,  $EH$  (I. 12.), et iungantur  $AE$ ,  $\Gamma E$ .

Lemm. IV. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. XCIX.)

Cor. Hinc patet ratio describendorum circulorum, qui se extra contingunt, et manifestum est, distantiam centrorum in illis aequalem esse summae radiorum, et vice versa.

#### PROPOSITIO XIII.

Huius propositionis demonstrationem nos quidem in Cor.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ  $EZ$  εὐ-  
 θεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν  $AB$  πρὸς ὀρθὰς  
 τέμνει, καὶ δῖχα αὐτὴν τέμνει. Ἰση ἄρα ἡ  $AZ$  τῇ  
 $BZ$ · διπλὴ ἄρα ἡ  $AB$  τῆς  $AZ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ  
 καὶ ἡ  $ΓΔ$  τῆς  $ΓΗ$  ἐστὶ διπλὴ, καὶ ἐστὶν ἰση ἡ  $AB$   
 τῇ  $ΓΔ$  ἰση ἄρα καὶ ἡ  $AZ$  τῇ  $ΓΗ$ . Καὶ ἐπεὶ ἰση  
 ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $EF$ , ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$  τῷ  
 ἀπὸ τῆς  $EF$ . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AE$  ἴσα τὰ  
 ἀπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZE$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ  $Z$  γωνία·  
 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $EF$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $HF$ , ὀρθὴ  
 γὰρ ἡ πρὸς τῷ  $H$  γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AZ$ ,  
 $ZE$  ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΓΗ$ ,  $HE$ , ὡς τὸ ἀπὸ  
 τῆς  $AZ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΓΗ$ , ἰση γὰρ ἐστὶν  
 ἡ  $AZ$  τῇ  $ΓΗ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $ZE$  λοιπῷ  
 τῷ ἀπὸ τῆς  $EH$  ἴσον ἐστὶν, ἰση ἄρα ἡ  $ZE$  τῇ  $EH$ .  
 Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι  
 λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κἀθετοί  
 ἀγόμεναι ἴσαι ᾧσιν· αἱ ἄρα  $AB$ ,  $ΓΔ$  ἴσον ἀπέχουσιν  
 ἀπὸ τοῦ κέντρου.

ad III. 11. Obs. 1, et III. 12. dedimus. In ea, quae in textu  
 graeco est, nonnulla minus accurate posita esse videntur.  
 Nempe in eius parte priorē, in qua *de circulis sermo est*, qui  
 se intra contingunt, ex III. 11. adstruitur, rectam, quae per  
 centra duorum circulorum transeat, necessario, si duo contactus  
 puncta sumere velis, per utrumque eorum transire, quod tamen  
 fieri non possit. Verum enim vero in Prop. 11. illud tantum  
 demonstravit Euclides, ut in Obs. 1. ad III. 11. vidimus, rec-  
 tam  $ΘH$ , quae per centra utriusque circuli transit, *ultra*  
*centrum  $H$  minoris circuli productam* in punctum contactus  $B$   
 cadere, eandem vero *ultra centrum  $Θ$  maioris circuli pro-*  
*ductam* in alterum, quod hypothetice sumitur, punctum con-

Quoniam itaque recta aliqua  $EZ$  per centrum ducta rectam aliquam  $AB$  non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.). Igitur  $AZ$  aequalis est  $BZ$ ; ideoque  $AB$  ipsius  $AZ$  dupla. Eadem ratione et  $FA$  ipsius  $FH$  dupla est, et est  $AB$  aequalis ipsi  $FA$ ; aequalis igitur et  $AZ$  ipsi  $FH$ . Et quoniam aequalis est  $AE$  ipsi  $EF$ , aequale est et quadratum ex  $AE$  quadrato ex  $EF$ . Sed quadrato ex  $AE$  aequalia sunt quadrata ex  $AZ$ ,  $ZE$  (I. 47.), rectus enim ad  $Z$  angulus; quadrato vero ex  $EF$  aequalia sunt quadrata ex  $EH$ ,  $HF$  (I. 47.), rectus enim ad  $H$  angulus; quadrata igitur ex  $AZ$ ,  $ZE$  aequalia sunt quadratis ex  $FH$ ,  $HE$ , e quibus quadratum ex  $AZ$  aequale est quadrato ex  $FH$ , aequalis enim est  $AZ$  ipsi  $FH$ ; reliquum igitur quadratum ex  $ZE$  reliquo ex  $EH$  aequale est, aequalis igitur  $ZE$  ipsi  $EH$ . In circulo autem aequaliter distare a centro rectae dicuntur (III. Def. 4.), quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae aequales sunt; ergo  $AB$ ,  $FA$  aequaliter distant a centro.

tactus, siquidem alterum tale punctum locum habere possit, cadere debere, nequaquam fuit demonstratum. Deinde in parte posteriore, ubi de circulis agitur, qui se extra contingunt, ex III. Def. 3. sumitur, eorum utrumque integrum extra alterum situm esse, vel tales circulos se invicem non secare. At, quum lineae curvae cogitari possint, quae quamvis se in puncto aliquo extra contingant, non tamen ita comparatae sint, ut neutra alteram etiam ulterius productam secet, et oblicere quis possit, forte idem etiam in circulis obtinere posse, ad eximendum hunc scrupulum res accuratius evolvenda esse visa fuit, ut in Obs. 1. ad III. 11. et III. 12. fecimus. Robert. Simson. etiam partis prioris, in qua circuli

Ἀλλὰ δὴ αἱ  $AB$ ,  $ΓΔ$  ἐνθεῖται ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἐστίν, ἴση ἔστω ἡ  $EZ$  τῇ  $EH$ · λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ .

Τῶν γὰρ ἀντιῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστίν ἡ μὲν  $AB$  τῆς  $AZ$ , ἡ δὲ  $ΓΔ$  τῆς  $ΓΗ$ · καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $ΓΕ$ , ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$  τῷ ἀπὸ τῆς  $ΓΕ$ · ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AE$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $EZ$ ,  $ZA$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $ΓΕ$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $ΗΓ$ , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $EZ$ ,  $ZA$  ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $ΗΓ$ , ὡν τὸ ἀπὸ τῆς  $EZ$  τῷ ἀπὸ τῆς  $EH$  ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ  $EZ$  τῇ  $EH$ · λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$  λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΓΗ$  ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ  $AZ$  τῇ  $ΓΗ$ , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν  $AZ$  διπλῇ ἡ  $AB$ , τῆς δὲ  $ΓΗ$  διπλῇ ἡ  $ΓΔ$ , ἴση ἄρα ἡ  $AB$  τῇ  $ΓΔ$ . Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἑγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

intus se contingere ponuntur, aliam habet demonstrationem, quae etiam est apud Campanum et Peletarium, et huc redit. „Intus se contingant, si fieri potest, duo circuli in duobus punctis  $B$ ,  $A$ , ductaque  $BA$  intra utrumque circulum cadet (III. 2.); igitur in recta  $AM$ , quae rectam  $BA$  bifariam et ad angulos rectos secat, erit utriusque circuli centrum (III. 1. Cor. 1.), ergo  $AM$  producta in circulorum contactum cadet (III. 11.), sed in contactum non cadet, quod puncta  $B$ ,  $A$  sunt extra rectam  $AM$ , quod est absurdum.“ — At vero, quum III. 11., apud Euclidem, ut ad eam monuimus, non distincte satis evoluta sit ex Euclidea eius demonstratione,



Sed vice versa aequaliter  $AB$ ,  $\Gamma A$  distent a centro, hoc est, aequalis sit  $EZ$  ipsi  $EH$ ; dico aequalentem esse et  $AB$  ipsi  $\Gamma A$ .

Etenim iisdem constructis, similiter ostendemus duplam esse  $AB$  ipsius  $AZ$ , et  $\Gamma A$  ipsius  $\Gamma H$ ; et quoniam aequalis est  $AE$  ipsi  $\Gamma E$ , aequale est quadratum ex  $AE$  quadrato ex  $\Gamma E$ ; sed quadrato ex  $AE$  aequalia sunt quadrata ex  $EZ$ ,  $ZA$  (I. 47.), quadrato vero ex  $\Gamma E$  quadrata ex  $EH$ ,  $H\Gamma$ ; quadrata igitur ex  $EZ$ ,  $ZA$  aequalia sunt quadratis ex  $EH$ ,  $H\Gamma$ , e quibus quadratum ex  $EZ$  quadrato ex  $EH$  est aequale, aequalis enim  $EZ$  ipsi  $EH$ ; reliquum igitur quadratum ex  $AZ$  reliquo ex  $\Gamma H$  est aequale; aequalis igitur  $AZ$  ipsi  $\Gamma H$ , et est  $AB$  dupla ipsius  $AZ$ ,  $\Gamma A$  vero dupla ipsius  $\Gamma H$ . Aequalis igitur  $AB$  ipsi  $\Gamma A$ . In circulo igitur etc.

#### PROPOSITIO XV. (Fig. 231.)

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore maior est.

quam etiam Simson. habet, non satis perspicue prodire videtur, praeter contactus punctum, in quod ex III. 11. recta  $AM$  incidit, nullum aliud vel in ipsa  $AM$ , vel extra illam contactus punctum esse posse. Eandem demonstrationem Austin. docet applicari posse, sive de circulis intus sive de circulis extra se contingentibus sermo sit, dummodo posteriore hoc casu III. 12. loco III. 11. adhibeatur, et, quod mirum videri possit, inde concludit, Prop. III. 12. spuriam esse, quum in simili casu etiam in III. 6. de circulis extra se contingentibus non sermo fuerit, et praeterea in III. 12. ἀποδεικνύται positum sit. Huic ultimae tamen rationi ipse dil-

Ἐστω κύκλος ὁ  $ABΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ  $ΑΔ$ , κέντρον δὲ τὸ  $Ε$ , καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ  $Ε$  κέντρον ἔστω ἡ  $ΒΓ$ , ἀπώτερον δὲ ἡ  $ΖΗ$ . λέγω ὅτι μέγιστη μὲν ἔστιν ἡ  $ΑΔ$ , μείζων δὲ ἡ  $ΖΓ$  τῆς  $ΖΗ$ .

Ἦλθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ  $Ε$  κέντρον ἐπὶ τὰς  $ΒΓ$ ,  $ΖΗ$  κάθετοι αἱ  $ΕΘ$ ,  $ΕΚ$ . Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρον ἔστιν ἡ  $ΒΓ$ , ἀπώτερον δὲ ἡ  $ΖΗ$ , μείζων ἄρα ἡ  $ΕΚ$  τῆς  $ΕΘ$ . Κείσθω τῇ  $ΕΘ$  ἴση ἡ  $ΕΛ$ , καὶ διὰ τοῦ  $Α$  τῇ  $ΕΚ$  πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ  $ΑΜ$  διήχθω ἐπὶ τὸ  $Ν$ , καὶ ἐπεξενύχθωσαν αἱ  $ΕΜ$ ,  $ΕΝ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ  $ΕΘ$  τῇ  $ΕΛ$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΜΝ$ . Ἰάλιν, ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν  $ΑΒ$  τῇ  $ΕΜ$ , ἡ δὲ  $ΕΔ$  τῇ  $ΕΝ$ , ἡ ἄρα  $ΑΔ$  ταῖς  $ΜΕ$ ,  $ΕΝ$  ἴση ἔστιν. Ἄλλ' εἰ  $ΜΕ$ ,  $ΕΝ$  τῆς  $ΜΝ$  μείζονες εἰσι, καὶ ἡ  $ΑΔ$  ἄρα τῆς  $ΜΝ$  μείζων ἔστιν. Ἰση δὲ ἡ  $ΜΝ$  τῇ  $ΒΓ$ , ἡ  $ΑΔ$  ἄρα τῆς  $ΒΓ$  μείζων ἔστιν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $ΜΕ$ ,  $ΕΝ$  ὁσαὶ ταῖς  $ΖΕ$ ,  $ΕΗ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΜΕΝ$ , γωνίας τῆς ὑπὸ  $ΖΕΗ$  μεί-

fidere videtur, et Cod. a. habet omnino ἐγὰππωνται. Nec reliqua Austini argumenta sufficere nobis videntur. Alii quoque alias huius propositionis demonstrationes dederunt, e quibus ea, quam habet Giordano da Bitonto, similis fere est ei, quam in Obs. 5. ad III. 11. et ad III. 12. eius, quae ibi exhibetur, propositionis exhibuimus.

#### PROPOSITIO XIV.

Patet, veram adhuc esse propositionem, etiamsi rectae  $AB$ ,  $ΓΔ$  ex eadem parte centri fuerint, vel si se invicem secant, aut ex uno eodemque circumferentiae puncto ductae sint.

#### PROPOSITIO XV.

Obs. Rob. Simson. monet, ad probandum, diametrum  $ΑΔ$  maiorem esse quacunq[ue] recta  $ΒΓ$  in circulo, nihil opus

Sit circulus  $AB\Gamma A$ , diameter autem ipsius sit  $AA$ , centrum vero  $E$ , et propinquior quidem centro  $E$  sit  $BF$ , remotior vero  $ZH$ ; dico maximam esse  $AA$ , maiorem vero  $BF$  ipsa  $ZH$ .

Ducantur enim ab  $E$  centro ad  $BF$ ,  $ZH$  perpendiculares  $E\Theta$ ,  $EK$ . Et quoniam propinquior quidem centro est  $BF$ , remotior vero  $ZH$ , maior igitur  $EK$  ipsa  $E\Theta$ . Ponatur ipsi  $E\Theta$  aequalis  $EA$ , et per  $A$  ipsi  $EK$  ad rectos ducta  $AM$  producatur ad  $N$ , et iungantur  $EM$ ,  $EN$ ,  $EZ$ ,  $EH$ .

Et quoniam aequalis est  $E\Theta$  ipsi  $EA$ , aequalis est et  $BF$  ipsi  $MN$  (III. 14.). Rursus, quoniam aequalis est  $AE$  ipsi  $EM$ , et  $EA$  ipsi  $EN$ , ergo  $AA$  ipsis  $ME$ ,  $EN$  aequalis est. Sed  $ME$ ,  $EN$  ipsa  $MN$  maiores sunt (I. 20.), itaque  $AA$  ipsa  $MN$  maior est. Aequalis autem  $MN$  ipsi  $BF$ , ergo  $AA$  ipsa  $BF$  maior est. Et quoniam duae  $ME$ ,  $EN$  duabus  $ZE$ ,  $EH$  aequales sunt, et angulus  $MEN$  angulo  $ZEH$

esse linea  $MN$  aequali lineae  $BF$ , quum eadem demonstratio, quae ad  $MN$  applicatur, brevius immediate ad  $BF$  applicari possit. In Euclidea tamen demonstratione recta  $MN$  rectae  $BF$  aequalis et rectae  $ZH$  parallela ducta inservire potest, quo facilius ostendatur, esse angulum  $MEN > ZEH$ , quod nempe, ducta diametro  $AA$  parallela  $\tau\eta$   $ZH$ , vel  $MN$ , ob  $EA < EK$ , puncta  $M$ ,  $N$  diametro  $AA$  propiora sunt, quam puncta  $Z$ ,  $H$ , quod ipsum tamen clarius exponi debebat. Caeterum hanc ipsam secundam partem, et quae pariter valet, eius conversam, nempe rectarum circulo inscriptarum, quae maior sit, esse etiam centro propiore, pariter sine ope rectae  $MN$ , et anguli  $MEN$  modo simili ei, quae Euclides utitur in praecedente, et quam etiam adhibet Theodosius in Libr. I. Prop. 6. Sphaericorum in casu omnino simili ope III. 3. et

ζων ἐστὶ βάσις ἄρα ἡ  $MN$  βάσεως τῆς  $ZH$  μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ  $MN$  τῇ  $BΓ$  ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ  $BΓ$  τῆς  $ZH$  μείζων ἐστίν. Μεγίστη ἄρα ἡ  $ΑΔ$  διάμετρος, μείζων δὲ ἡ  $BΓ$  τῆς  $ZH$ . Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἐτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης ὀξείας ᾠγωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΓ$  περὶ κέντρον τὸ  $Δ$  καὶ διάμετρον τὴν  $ΑΒ$ . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ  $Α$  τῇ  $ΑΒ$  πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ  $ΑΓ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ .

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΑ$  τῇ  $ΔΓ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΔΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ . Ὄρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $ΔΑΓ$ , ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΔ$ . αἱ ἄρα <sup>1)</sup> ὑπὸ

1) Peyraud. c. Cod. a pro αἱ ἄρα ponit τριγώνου δὴ τοῦ  $ΑΓΔ$  αἱ δύο γωνίαι αἱ.

I. 47. demonstrari posse, Rob. Simson. observat, et ipse hanc demonstrationem exhibet. Conversa illa facile etiam opo partis primae et III. 14. demonstrabitur. Aliam partis secundae demonstrationem habet Campanus, in qua nihil opus est perpendicularibus e centro ductis, dum integra ille triangula  $MEN$ ,  $ZBH$  comparat. Denique observari potest, eas etiam rectas in circulo, quae ex eodem circumferentiae puncto exeunt, ita comparari posse. Cf. Prop. 8. Obs. 2.

maior; basis igitur  $MN$  basi  $ZH$  maior est. (I. 24.). Sed  $MN$  ipsi  $BF$  ostensa est aequalis, itaque  $BF$  ipsa  $ZH$  maior est. Maxima igitur est diameter  $AA$ , maior vero  $BF$  ipsa  $ZH$ . In circulo igitur etc.

### PROPOSITIO XVI. (Fig. 232.)

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadet extra circulum; et in locum, qui inter rectam et circumferentiam interiicitur altera recta non cadet; et semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus vero minor.

Sit circulus  $AB\Gamma$  circa centrum  $A$  et diametrum  $AB$ ; dico rectam lineam, quae ab extremitate  $A$  ad  $AB$  ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere.

Si enim non, cadat, si fieri potest, intus, ut  $AF$ , et iungatur  $AG$ .

Quoniam aequalis est  $AA$  ipsi  $AF$ , erit et angulus  $AAF$  angulo  $AGA$  aequalis (I. 5.). Rectus autem  $AAF$ , rectus igitur et  $AGA$ ; itaque duo anguli  $AAF$ ,

Cor. Quodsi itaque in circulo, cuius radius magnitudine datus est, magnitudine data sit recta circulo inscripta (quae nunquam maior esse potest duplo circuli radio, vel, quod eodem redit, diametro circuli) distantia eius a centro magnitudine data erit, et vice versa. Est nempe  $EA^2 = ME^2 - MA^2 = ME^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2$ , et  $MA^2 = \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = ME^2 - EA^2$ . Cf. Pfeleiderer.

### PROPOSITIO XVI.

Obs. Propositio haec (cuius etiam directa demonstratio

$\Delta ΑΓ$ ,  $ΑΓΔ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου, τῇ  $ΒΑ$  πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὅμοιως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ  $ΑΕ$ .

Λέγω δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε  $ΑΕ$  εὐθείας καὶ τῆς  $ΓΘΑ$  περιφερείας, ἐτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσείται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεπιπτέτω ὡς ἡ  $ΖΑ$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου ἐπὶ τὴν  $ΖΑ$  κάθετος ἡ  $ΔΗ$ .

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ  $ΑΗΔ$ , ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ  $ΔΑΗ$ · μείζων ἄρα ἡ  $ΑΔ$  τῆς  $ΔΗ$ . Ἰση δὲ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΔΘ$ · μείζων, ἄρα ἡ  $ΔΘ$  τῆς  $ΔΗ$ , ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἐτέρα εὐθεῖα παρεμπεσείται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς  $ΒΑ$  εὐθείας καὶ τῆς  $ΓΘΑ$  περιφερείας, ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἔστιν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς  $ΓΘΑ$  περιφερείας καὶ τῆς  $ΑΕ$  εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἔστιν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθυγράμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς  $ΒΑ$  εὐθείας καὶ τῆς  $ΓΘΑ$  περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς  $ΓΘΑ$  περιφερείας καὶ τῆς  $ΑΕ$  εὐθείας,

satis facilis exhibetur ab Orontio Fineo) ita exprimi potest :

1) recta, quae ab extremo diametri puncto diametro ad rectos angulos ducitur, tota extra circulum cadit. 2) Quae autem ab extremo diametri puncto oblique i. e. sub angulo quocunque acuto vel obtuso ad diametrum ducitur, circumferentiae iterum occurrit. 3) Angulus semicirculi, i. e. quem circumse-

$AA$  duobus rectis aequales sunt, quod fieri nequit (l. 17.). Recta igitur a puncto  $A$  ipsi  $BA$  ad rectos angulos ducta non cadet intra circulum. Similiter ostendemus, neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut  $AE$ .

Dico etiam in locum inter rectam  $AE$  et circumferentiam  $\Gamma\Theta A$  alteram rectam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat ut  $ZA$ , et ducatur a puncto  $A$  ad  $ZA$  perpendicularis  $AH$ .

Et quoniam rectus est angulus  $AHA$ , minor autem recto  $AAH$ ; erit  $AA$  maior ipsa  $AH$  (l. 19.). Aequalis autem est  $AA$  ipsi  $A\Theta$ ; maior igitur  $A\Theta$  ipsa  $AH$ , minor maiore, quod fieri nequit. In locum igitur inter rectam et circumferentiam altera recta non cadet.

Dico praeterea semicirculi angulum, comprehensum a recta  $BA$  et circumferentia  $\Gamma\Theta A$ , quovis angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero comprehensum a circumferentia  $\Gamma\Theta A$  et recta  $AE$ , quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, maior comprehenso a recta  $BA$  et circumferentia  $\Gamma\Theta A$ , minor vero comprehenso a circumferentia  $\Gamma\Theta A$  et recta  $AE$ , in locum inter circumferentiam  $\Gamma\Theta A$  et rectam  $AE$

interiecta cum diametro, efficit, maior est quovis angulo rectilineo: reliquus vero angulus, ille nempe, quem circumferentia cum recta efficit, quae diametro a puncto eius extremo ad rectos angulos ducta est, et quem angulum contingentiae vocare solent, minor est quovis angulo acuto rectilineo. De hac autem propositionis parte videbimus in excursu ad calcem huius

εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπίπτει, ἢ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττωνα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὁξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἑκρὸς ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημείον. Ἐπειδὴ περ καὶ ἡ κατὰ δύο ἀντὶ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιζ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

libri. E duabus reliquis propositionis paribus, praeter corollarium textus Graeci sequens adhuc a Rob. Simson. deducitur corollarium.

Cor. 2. Unica tantum recta lineam circulum in eodem puncto contingere potest, nempe, quae radio circuli in puncto eius extremo perpendicularis est. Quae autem ei oblique insistit, circulo ad partes anguli acuti iterum occurrit. Praeterea patet, ex hac quoque propositione consequi, quod III. 2. Cor. 3. vidimus, circuli circumferentiam esse lineam curvam i. e. ne minimam quidem eius partem esse rectam.



recta cadet, quae faciet angulum a rectis comprehensum maiorem comprehenso a recta  $BA$  et circumferentia  $\Gamma\Theta A$ , minorem vero comprehenso a circumferentia  $\Gamma\Theta A$  et recta  $AE$ . Non cadit autem; angulus igitur rectis comprehensus non erit maior angulo comprehenso a recta  $BA$  et circumferentia  $\Gamma\Theta A$ , neque minor comprehenso a circumferentia  $\Gamma\Theta A$  et recta  $AE$ . Quod oportebat ostendere.

### COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est rectam, quae ab extremitate diametri circuli ei ad rectos angulos ducitur, contingere circumulum; et rectam circumulum in unico contingere puncto. Quoniam recta in duobus punctis ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

### PROPOSITIO XVII. (Fig. 233.)

A dato puncto rectam lineam ducere, quae circumulum datum contingat.

### PROPOSITIO XVII.

Obs. 1. Duo, si rem exacte absolvere velis, casus distinguendi sunt, prout punctum datum vel extra circumferentiam dati circuli, vel in hac ipsa circumferentia datum est. (Intra datum circumulum enim esse nequit, ut ex Defin. rectae contingentis patet.) Ultimum habet casum, quo est in ipsa circumferentia, cuius solutio caeterum ex III. 16. Cor. 1. sponte fluit, addit Rob. Simson. Priore casu, quem solum habet Euclides, patet, rectam  $AZ$ , quae rectae  $EA$  ad angulos rectos ducta est, quum per punctum  $A$  intra circumulum  $AZH$

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ  $A$ , ὃ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ  $BΓΔ$ . δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου τοῦ  $BΓΔ$  κύκλου ἐφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ  $E$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $E$  διαστήματι δὲ τῷ  $EA$  κύκλος γεγράφθω ὁ  $AZH$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $A$  τῇ  $EA$  πρὸς ὀρθὰς ῥηθῶ ἡ  $AZ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $EZ$ ,  $AB$ . λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου τοῦ  $BΓΔ$  κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ  $AB$ .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ  $E$  κέντρον ἐστὶ τῶν  $BΓΔ$ ,  $AZH$  κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $EA$  τῇ  $EZ$ , ἡ δὲ  $EA$  τῇ  $EB$ . δύο δὴ αἱ  $AE$ ,  $EB$  δυοὶ ταῖς  $ZE$ ,  $EA$  ἴσαι εἰσι, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ  $E$ .

transeat, cum hoc circulo in alio adhuc praeter  $Z$  puncto v. c. in  $H$  ex altera parte rectae  $EA$  convenire, adeoque etiam ex hac parte duci posse aliam, adhuc rectam  $A\theta$ , quae circulum  $B\Gamma\Delta$  contingat: duplex itaque semper hoc casu solutio locum habebit. Reducitur autem problema ad illud: construere triangulum rectangulum  $AEB$ , cuius hypotenusa  $AE$  positione et magnitudine, alter cathetus  $EB$  autem magnitudine dantur. Caeterum comparatis duobus triangulis  $AEB$ ,  $AEO$ , in quibus hypotenusa  $AE$  communis, recta  $EB = EO$ , et anguli  $ERA$ ,  $E\theta A$ , quippe recti aequales sunt, patet, esse etiam rectas  $AB$ ,  $A\theta$  aequales, pariterque aequales esso angulos  $EAB$ ,  $EAO$ , et  $AEB$ ,  $AEO$ . Duas igitur rectas, quae ex eodem puncto extra circulum sito ita ad circulum duci possunt, ut eum contingant, inter se aequales sunt. Et, quum aequales sint anguli  $EAO$ ,  $EAB$ , et  $AEO$ ,  $AEB$ , recta  $AE$  utrumque angulorum  $\theta AB$ ,  $\theta EB$  bifariam dividit. Hinc potro nonnisi duae rectae ex eodem puncto extra circulum duci possunt, quae eum contingunt.

Obs. 2. Posteriore casu, si e puncto in ipsa circuli circumferentia dato ducenda est recta, quae circulum in hoc

Sit datum punctum  $A$ , datus vero circulus  $BFA$ ; oportet igitur a puncto  $A$  rectam lineam ducere, quae circulum  $BFA$  contingat.

Sumatur enim centrum circuli  $E$  (III. 1.), et iungatur  $AE$ , et centro quidem  $E$  intervallo vero  $EA$  circulus describatur  $AZH$  (Post. 3.), et a  $A$  ipsi  $EA$  a rectos ducatur  $AZ$  (I. 11.), et iungantur  $EZ$ ,  $AB$ ; dico a puncto  $A$  ductam esse  $AB$  circulum  $BFA$  contingentem.

Quoniam enim  $E$  centrum est circulorum  $BFA$ ,  $AZH$ , aequalis est  $EA$  ipsi  $EZ$ , et  $EA$  ipsi  $EB$ ; duae igitur  $AE$ ,  $EB$  duabus  $ZE$ ,  $EA$  aequales sunt, et angulum communem comprehendunt ad  $E$ ; basis igitur

puncto contingat, ductae ad hoc punctum diametro erigi debet in eo ipso puncto recta ad angulos rectos (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur, duos circulos, qui se in puncto aliquo  $A$  contingant, sive extra sive intra se contingant (Fig. 234. 235.) in hoc puncto ab eadem recta, quae diametris circulorum ad hoc punctum ductis (quae nempe in eadem recta positae erunt Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.) ad angulos rectos est, contingi, vel rectam, quae unum duorum circulorum in puncto aliquo  $A$  se contingentium in hoc ipso puncto  $A$  contingat, contingere in eo quoque alterum. Cf. Apollon. de Taction. Lemm. E. Cor. 7. 8.

Obs. 3. Quum ex Obs. 2. duo, eademque ratione instructi circuli eandem rectam  $BF$  in eodem puncto  $A$  contingere possint, patet, Problema describendi circuli, qui rectam positione datam  $BF$  in dato in ipsa puncto  $A$  contingat, non esse determinatum, adeoque alias aliasque condiciones huic (pariterque simili problemati describendi circuli, qui datum circulum in dato in ipsius circumferentia puncto contingat) addi posse. Unde plura huc, vel etiam ad III. 11. aut III. 12. pertinentia problemata oriuntur, quae quum sint satis

βάσει ἄρα ἡ  $AZ$  βάσει τῇ  $AB$  ἴση ἐστὶ καὶ τὸ  $EAZ$  τρίγωνον πρὸς  $EBA$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $EAZ$  τῇ ὑπὸ  $EBA$ . Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ  $EAZ$ , ὀρθῇ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $EBA$ . Καὶ ἔστιν ἡ  $EB$  ἐκ τοῦ κέντρου ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐγράφεται τοῦ κύκλου ἡ  $AB$  ἄρα ἐγράφεται τοῦ  $BGA$  κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ  $A$  τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ  $BGA$  ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ  $AB$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ.

Ἐν κύκλῳ ἐγκείνηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀκρὴν ἐπιτεταχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιτεταχθεῖσα κάθετος ἐστὶ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλον γάρ τοῦ  $ABΓ$  ἐφαπτόσθω τις εὐθεῖα ἡ  $AE$  κατὰ τὸ  $Γ$  σημεῖον, καὶ εἰλήθθω τὸ κέντρον τοῦ  $ABΓ$  κύκλου τὸ  $Z$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὸ  $Γ$  ἐπιτεταχθῶ ἡ  $ZΓ$ . λέγω ὅτι ἡ  $ZΓ$  κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν  $AE$ .

facilia, tironibus solvenda proponi possunt v. c. 1) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto contingat, et per aliud quoddam extra hanc rectam datum punctum transeat. 2) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto contingat, et per aliud quoddam extra vel intra hunc circulum datum punctum transeat. 3) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto et simul datum circulum contingat. 4) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto, et simul rectam positione datam contingat. 5) Describere circulum, qui duos circulos datos, et quidem alteram in dato

ter  $AZ$  basi  $AB$  aequalis est (I. 4.); et triangulum  $EAZ$  triangulo  $EBA$  aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis; aequalis igitur  $EAZ$  ipsi  $EBA$ . Rectus autem  $EAZ$ ; rectus igitur et  $EBA$ ; et est  $EB$  ex centro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum (III. 16. Cor. 1.);  $AB$  igitur contingit circulum  $BFA$ .

A dato igitur puncto  $A$  datum circulum  $BFA$  contingens recta linea ducta est  $AB$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XVIII. (Fig. 237.)

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, ea perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim  $ABF$  contingat aliqua recta  $AE$  in puncto  $F$ , et sumatur  $Z$  centrum circuli  $ABF$ , et a  $Z$  ad  $F$  ducatur  $ZF$ ; dico  $ZF$  perpendicularem esse ad  $AE$ .

in ipso puncto contingat. 6) Describere circulum, qui duas rectas positione datas, quae sibi invicem occurrunt, et quidem alteram in dato in ea puncto contingat. 7) Describere circulum, qui duas rectas parallelas positione datas, et quidem alteram in dato in ipsa puncto contingat, vel quod eodem redit: dato radio describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ea puncto contingat. 8) Dato radio describere circulum, qui rectam positione datam contingat, et per datum extra eam punctum transeat. 9) Dato radio circulum describere, qui duas rectas positione datas, quae inter se conveniunt, contingat. 10) Dato radio circulum describere, qui

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὴν  $\Delta E$  κάθετος ἡ  $ZH$ .

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ  $ZHG$  γωνία ὀρθή ἐστιν, ὅξεια ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ  $ZGH$  ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ  $ZG$  τῆς  $ZH$ . Ἰση δὲ ἡ  $ZG$  τῇ  $ZB$  μείζων ἄρα ἡ  $ZB$  τῆς  $ZH$ , ἡ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ  $ZH$  κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν  $\Delta E$ . Ὅμοιως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς  $ZG$  ἡ  $ZG$  ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν  $\Delta E$ . Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφαπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ  $AB\Gamma$  ἀπτεσθω<sup>2)</sup> τις εὐθεῖα ἡ  $\Delta E$  κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  τῇ  $\Delta E$  πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $\Gamma A$ · λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς  $\Delta E$  ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1) Peyrardus ex Cod. a habet μείζων ἄρα καὶ  $ZB$ . Nos praetulimus lectionem ed. Oxon. Ed. Basil. habet καὶ ἡ  $ZB$ .

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, legendum hic fuerit ἐφαπτεσθω.

circulum positione datum, et rectam positione datam contingat. 11) Dato radio circulum describere, qui circulum positione datum contingat, et per datum extra eum punctum transeat. 12) Dato radio circulum describere, qui duos datos circulos contingat. Denique 13) (quod iam ad III. 1. Cor. 1. pertinet: dato radio circulum describere, qui per duo data puncta transeat. Vid. Pappus in Praefat. libri VII. Collect.

Si enim non, ducatur a  $Z$  ad  $AE$  perpendicularis  $ZH$  (I. 12.).

Quoniam igitur angulus  $ZHF$  est rectus, acutus erit  $ZFH$  (I. 17.); maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 19.), maior igitur est  $ZF$  quam  $ZH$ . Aequalis autem  $ZF$  ipsi  $ZB$ ; maior igitur  $ZB$  ipsa  $ZH$ ; minor maiore, quod fieri non potest. Igitur  $ZH$  non est perpendicularis ad  $AE$ . Similiter ostendemus neque aliam quampiam praeter ipsam  $ZF$ ; ergo  $ZF$  perpendicularis est ad  $AE$ . Si igitur circulum etc.

#### PROPOSITIO XIX. (Fig. 240.)

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad angulos rectos recta linea ducatur, inducta erit centrum circuli.

Circulum enim  $ABF$  contingat aliqua recta  $AE$  in puncto  $F$ , et a  $F$  ipsi  $AE$  ad rectos angulos ducatur  $FA$ ; dico in  $AF$  esse centrum circuli.

Mathem. ad Taction. Apollonii, vel Apollon. de Taction. Goth. 1795. p. 18.

Obs. 4. Aliud haud inelegans problema, quod huc pertinet, affert Clavius e Cardano, quod ita habet: duobus circulis, quorum neuter alterum includit, datis, ducere rectam, quae utrumque contingat. Exempli causa figuram saltem uni casui adaptatam adponemus (Fig. 236.) e cuius adspectu solutio facile derivari poterit.

Obs. 5. Peletarius ad hunc locum sequens adhuc habet problema: Lineae rectae, quae circulum aliquem secet, aliam parallelam ducere, quae ipsum contingat, quod etiam generalius exprimi potest; rectae positione datae aliam parallelam

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἐπι-  
 ζεύχθω ἡ  $IZ$ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ  $ABΓ$  ἐραπίττειται τις εὐθεῖα  
 ἡ  $ΔΕ$ , ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφ' ἣν ἐπέξενται  
 ἡ  $ZΓ$ , ἡ  $ZΓ$  ἄρα κάθετὸς ἐστὶν ἐπὶ τὴν  $ΔΕ$ · ὁρθὴ  
 ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ZFE$ . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$   
 ὁρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ZFE$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΕ$ , ἡ  
 ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα  
 τὸ  $Z$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου. Ὁμοίως δὲ  
 δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$ . Ἐν  
 ἄρα κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίῳ  
 ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περι-  
 φέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

ducere, quae circumulum contingat, et facillime solvetur ducta  
 e centro ad rectam positione datam perpendicularari, et e puncto,  
 in quo illa circulo occurrit, parallela positione datae. Cf.  
 Gilbert. p. 203.]

### PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Poterat etiam haec propositio e III. Prop. 16.  
 cuius conversa est, ita deduci. Si  $ΓΕ$  non sit rectae  $ΙΖ$  ad  
 rectos angulos,  $ΓΕ$  secabit circumulum ex III. 16. adeoque non  
 continget in  $Γ$ , q. e. a. Orontius Finaeus simili ratione e  
 parte tertia Prop. 16. III. hanc 18. deducere conatur.

Cor. 1. Duae rectae, quae per puncta extrema eiusdem  
 diametri ductae circumulum contingunt, parallelae sunt.

Cor. 2. Vicissim, si duae rectae (Eig. 238.)  $ΑΓ$ ,  $ΔΘ$ ,  
 quae circumulum in  $B$ ,  $E$  contingunt, parallelae fuerint, recta  
 $ΒΕ$ , quae contactus puncta coniungit, erit diameter. Si enim  
 recta  $ΒΕ$  non sit diameter, erit centrum circuli extra eam



Non enim, sed si fieri potest, sit  $Z$ , et iungatur  $FZ$ .

Quoniam igitur circulum  $ABF$  contingit aliqua recta  $AE$ , a centro autem ad contactum ducta est  $ZF$ ,  $ZF$  perpendicularis est ad  $AE$  (III. 18.); rectus igitur est  $ZFE$ . Est autem et  $AFE$  rectus; aequalis igitur est  $ZFE$  ipsi  $AFE$ , minor maiori, quod fieri non potest. Igitur  $Z$  non est centrum circuli  $ABF$ . Similiter ostendemus, neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa  $AF$ . Si igitur circulum etc.

### PROPOSITIO XX. (Fig. 241.)

In circulo, angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

v. e. in  $Z$ , ducisque  $ZB$ ,  $ZE$ , erit  $ZBF$  pariter ac  $ZE\theta$  rectus, adeoque  $FBE$  pariter ac  $\theta EB$  minor recto, igitur rectae  $AF$ ,  $A\theta$  non erunt parallelae (Ax. 11. vel I. 5. Post) q. e. a.

Cor. 3. Si duae rectae circulum contingant, et recta, quae contactus puncta iungit, non sit diameter, contingentes cum hac recta obliquos angulos efficient, nec parallelae erunt.

Cor. 4. Vicissim, si duae rectae circulum contingentes non sint parallelae, recta, quae contactus puncta iungit, nequit esse diameter (Cor. 1.). Cf. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre I. Th. p. 120. sq.

Obs. 2. Alia conversa propositionis III. 26. vel, siDavis, propositionis huius III. 18. haec est: recta, quae e centro circuli ad contingentem perpendicularis demittitur, per contactus punctum transit, et vice versa.

Obs. 3. Si eadem recta duos circulos in eodem puncto contingit, duo isti circuli in eodem puncto se contingunt. Quae enim e centris circulorum ad punctum commune, in quo recta

"Εστω κύκλος ὁ  $ABΓ$ , καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ  $BEG$ , πρὸς δὲ τῇ περιφέρειᾳ, ἡ ὑπὸ  $BAG$ , ἐγέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βύσιν τὴν  $BΓ$ . λέγω ὅτι διπλασίῳν ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BEG$  γωνία τῆς ὑπὸ  $BAG$ .

Ἐπιτευχθεῖσαι γὰρ ἡ  $AE$  διήχθω ἐπὶ τὸ  $Z$ .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ  $EA$  τῇ  $EB$ , ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $EAB$  τῇ ὑπὸ  $EBA$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $EAB, EBA$  γωνίαι τῆς ὑπὸ  $EAB$  διπλασίαί εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ  $BEZ$  ταῖς ὑπὸ  $EAB, EBA$ . καὶ ἡ ὑπὸ  $BEZ$  ἄρα τῆς ὑπὸ  $EAB$  ἐστὶ διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZEG$  τῆς ὑπὸ  $EAG$  ἐστὶ διπλῇ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $BEG$  ὅλης τῆς ὑπὸ  $BAG$  ἐστὶ διπλῇ.

utrumque contingit, ducuntur rectae ad hanc contingentem perpendiculares, adeoque in eadem recta sitae erunt, unde circuli se contingunt (Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.).

Obs. 4. (Ex Clavio.) Duobus circulis ex eodem centro  $\Theta$  descriptis (Fig. 239.) erunt omnes rectae  $AF, BD$  interioris circuli productae inter se aequales, bifariamque in punctis contactus  $E, Z$  secabuntur. Ductae enim ex centro  $\Theta E, \Theta Z$  ad  $AF, BD$  perpendiculares erunt (III. 18.), itaque (III. Def. 4.)  $AF, BD$  aequaliter a centro distant, quoniam  $\Theta E = \Theta Z$ . Itaque  $AF = BD$  (III. 14.), et bifariam dividuntur a perpendicularibus  $\Theta E, \Theta Z$  (III. 3.)

#### PROPOSITIO XIX.

Obs. Haec quoque propositio, vel ut conversa III. propositionis 16. considerari atque ex ea demonstrari potest, vel, ut est apud Euclidem, ut conversa III. propositionis 18. Candel-la monente, ut exacte vera sit propositio, addi debet, rectam a contactu contingentem ad rectos angulos ductam secare debere circumulum. Id nempe vult, esse debere hanc perpendi-

Sit circulus  $AB\Gamma$ , et ad centrum eius sit angulus  $BET$ , ad circumferentiam vero  $BAT$ , habeant autem eandem circumferentiam  $B\Gamma$  pro basi; dico duplum esse angulum  $BET$  anguli  $BAT$ .

Iuncta enim  $AE$  producat ad  $Z$ .

Quoniam igitur aequalis est  $EA$  ipsi  $EB$ , aequalis est angulus  $EAB$  angulo  $EBA$  (I. 5.); anguli igitur  $EAB$ ,  $EBA$  anguli  $EAB$  dupli sunt. Aequalis autem est  $BEZ$  angulis  $EAB$ ,  $EBA$  (I. 32.); igitur  $BEZ$  ipsius  $EAB$  est duplus. Eadem ratione et  $ZET$  ipsius  $EAT$  duplus est, totus igitur  $BET$  totius  $BAT$  est duplus.

cularem ad eandem rectae contingentis partes, ad quas est circulus. Quum tamen illa utrimque produci possit, haud necessarium est id addere.

## PROPOSITIO XX.

Austin. quidem monet, hanc propositionem latius patere, quam vulgo putent, et circumferentiam, cui anguli insistant, aequae maiorem semicirculo sumi posse ac minorem. Vult igitur angulos quoque gibbos i. e. qui duobus rectis maiores sunt, sub enunciato propositionis comprehendere. Ita nempe propositionem sequentem generalius sumi posse, nec nova id additamentum demonstratione egere. At, quamvis res per se vera sit, et hoc propositionis nostrae *consectariu* etiam a Candalla, Tartalea, Commandino, Clavio, Peletario aliisque exhibeatur, et a nonnullis eorum eadem ratione ac Austin. iubet, ad generaliore Prop. 21. demonstrationem adhibeatur, valde tamen dubitamus, an Euclides de angulis gibbis in ipsa propositione comprehendendis cogitarit. Nec poterat facile ab angulis sensu consueto sumtis transire ad angulos gibbos, nisi per angulum duobus rectis aequalem, i. e. cuius crura in di-

Κεκλίωθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$ , καὶ ἐπεξευχθεῖσα ἡ  $\Delta E$  ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ  $H$ . Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $HE\Gamma$  γωνία τῆς ὑπὸ  $H\Delta\Gamma$ , ὡν ἡ ὑπὸ  $HEB$  διπλὴ ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $H\Delta B$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $BE\Gamma$  διπλὴ ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$ . Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

rectum ad oppositas partes eiusdem verticis sita sunt: talem autem angulum non agnoscere videtur Euclides; vid. Def. 8. Illud tamen certum est, demonstrationem partis primae VI. 33. non permittere considerationem angulorum gibborum ex elementis excludere. Vide Pfleiderer. Thes. 1791. Thes. 7. Magis autem necessarium fuerit, monere, praetermissum esse ab Euclide eum casum, quo unum crurum anguli, cuius vertex in circumferentia positus est, per ipsum centrum circuli transit, quem casum nominatim habent Clavius, Giordano da Bitonto, Borellius, alique. Clavius praeterea observat, tacite in demonstratione axiomatis loco sumi, si duae magnitudines duarum magnitudinum sint duplae, singulae singularum, fore quoque summam ex illis summae ex his duplum, vel: si totum totius, et ablatum ablati duplum sit, fore et reliquum reliqui duplum. Et hoc quidem Prop. V. 1. et V. 5, universaliter demonstrari, at hic de duplo ut per se notum sumi. Cf. quae ad finem Axiom. libri I. notavimus. Ipse deinde rem aliter sine hoc axiomate demonstrare docet.

### PROPOSITIO XXI.

Obs. 1. Huius propositionis, quae etiam ita exprimi potest: anguli ad circumferentiam eidem segmento insistentes, aequales sunt, duo sunt casus, prout segmentum, in quo sunt anguli, de quibus quaeritur, vel maius, vel non maius est

Rursus inflectatur ad circumferentiam alter angulus  $B\hat{A}\Gamma$ , et iuncta  $AE$  producat ad  $H$ . Similiter ostendimus duplum esse angulum  $HE\Gamma$  anguli  $H\hat{A}\Gamma$ , quorum  $HEB$  duplus est anguli  $H\hat{A}B$ ; reliquus igitur  $B\hat{E}\Gamma$  duplus est reliqui  $B\hat{A}\Gamma$ . In circulo igitur etc.

### PROPOSITIO XXI. (Fig. 242.)

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se aequales.

semicirculo. Demonstratio textus graeci priorem saltim casum complectitur. Posterioris demonstrationem dedere Commandinus, Clavius, Borrellius, Giordano da Bitonto, Baermannius, Rob. Simson. aliique. Rob. Simsonis demonstratio simplicissima est. Ea sic habet: sit (Fig. 243.) Segmentum  $BAED$  non maius semicirculo, et in ipso sint anguli  $B\hat{A}A$ ,  $B\hat{E}A$ . Ducatur ad centrum  $Z$  recta  $AZ$ , et producat ad  $F$ , iungaturque  $EF$ . Segmentum igitur  $BAEF$  est maius semicirculo, adeoque ex casu I. est  $B\hat{A}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$ . Eodem modo segmentum  $FAE$  est maius semicirculo, adeoque  $F\hat{A}A = F\hat{E}A$ . Totus igitur angulus  $B\hat{A}A$  toti  $B\hat{E}A$  est aequalis. Plures alias demonstrationes habent Commandinus, Clavius, aliique. Et necessaria est omnino casus quoque posterioris mentio ad perfectam propositionis sequentis demonstrationem. Caeterum, iuta, quae in praeparatione ad demonstrationem sumuntur, fieri possint, nempe ut centrum circuli inveniri possit ex III. 1., integer circulus datus esse supponitur. Quodsi enim segmentum tantum circuli datum foret, res demum per III. 25. effici posset. Et in textu quidem graeco integer circulus datus ponitur: *ἔστω κύκλος*. Nihil tamen impedit, etiam segmentum solum datum ponere: propositio enim III. 25. non a III. 21. pendet, et etiam ante hanc poni poterat.

Obs. 2. Vicissim, si super eadem recta  $BA$  (Fig. 244.) ad eandem eius partem constituti sint duo anguli aequales  $B\hat{A}A$ ,

Ἐστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma A$ , καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ  $BAE\Delta$  γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ  $BAA$ ,  $BEA$  λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ  $BAA$ ,  $BEA$  γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γάρ τοῦ  $AB\Gamma A$  κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $BZ$ ,  $ZA$ .

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ  $BZA$  γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ  $BAA$  πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν  $B\Gamma A$  ἡ ἄρα ὑπὸ  $BZA$  γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $BAA$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ὑπὸ  $BZA$  καὶ τῆς ὑπὸ  $BEA$  ἐστὶ διπλασίῳ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $BAA$  τῇ ὑπὸ  $BEA$ . Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

$BEA$ , circulus per puncta extrema rectae  $B$ ,  $A$ , et per verticem unius anguli descriptus transibit etiam per verticem alterius anguli. Si enim fieri potest, circulus per puncta  $B$ ,  $A$ ,  $A$  descriptus (III. 10. Cor. 1.) non transeat per punctum  $E$ , quamvis sit  $BEA = BAA$ , erit itaque punctum  $E$  vel intra vel extra circulum  $BAA$ . Sit 1) intra circulum  $BAA$ , recta itaque  $BE$  producta secabit circulum in puncto aliquo  $H$  (III. 2. Cor. 3.), ductaque  $HA$ , erit, ex hac propositione,  $BHA = BAA$ . At ex hypoth. etiam  $BEA = BAA$ . Itaque  $BHA = BEA$ , quod fieri nequit I. 16. Eadem ratione 2) ostenditur punctum  $E$  neque extra circulum cadere: cadet itaque in ipsam circuli circumferentiam. Conversam hanc habent Clavius, Giordano da Bironto, Borellius, Tacquet, aliique. Aliter, at haud satis accurate expressa ea legitur apud Gruson. Abhandl. der Kön. Acad. der Wissenschaft. zu Berlin für 1814 — 51. p. 55, §. 27.

Obs. 3. Hinc porro consequitur sequens Theorema, quod

Sit circulus  $AB\Gamma A$ , et in eodem segmento  $B\Lambda E A$  anguli sint  $B\Lambda A$ ,  $BEA$ ; dico angulos  $B\Lambda A$ ,  $BEA$  esse inter se aequales.

Sumatur enim centrum circuli  $AB\Gamma A$  (III. 1.), et sit  $Z$ , et iungantur  $BZ$ ,  $ZA$ .

Et quoniam angulus  $BZA$  est ad centrum, angulus vero  $B\Lambda A$  ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam  $B\Gamma A$  pro basi; angulus  $BZA$  duplus est anguli  $B\Lambda A$  (III. 20.). Ex eadem ratione angulus etiam  $BZA$  anguli  $BEA$  est duplus; aequalis igitur  $B\Lambda A$  ipsi  $BEA$ . In circulo igitur etc.

### PROPOSITIO XXII. (Fig. 246.)

Quadrilaterorum, quae in circulis sunt, anguli oppositi duobus rectis aequales sunt.

est apud Serenum de sectione cylindri Prop. 46. 47. Cf. Gilbert. Geom. I. Th. p. 172. Si fuerit (Fig. 245.)  $\Lambda AB$  segmentum quodcumque circuli atque in eo punctum  $\Gamma$  ita positum, ut sit recta  $\Gamma A = \Gamma B$ , et describatur centro  $\Gamma$ , radio  $\Gamma A$  circulus  $A\Theta B$ , qui itaque et per  $B$  transibit, erit summa crurum anguli cuiusvis  $\Lambda AB$  super  $AB$ , cuius vertex in segmento  $\Lambda AB$  positus est, aequalis rectae  $BE$ , quae obtinetur, si alterutrum crus producat, dum cum circulo  $A\Theta B$  conveniat. Quum enim sit, si  $B\Gamma$  ad  $Z$  producat,  $\Gamma Z = \Gamma B = \Gamma A$  (I. Def. 15.) erit triangulum  $Z\Lambda\Gamma$  aequicrurum, adeoque angulus  $Z\Lambda\Gamma = \Lambda Z\Gamma$  (I. 5.). Et, quum ex nostra propositione sit  $\Lambda AB = \Gamma B$ , adeoque et  $\Lambda\Lambda E = \Lambda\Gamma Z$  (I. 13.) et  $\Lambda E A = \Lambda Z\Gamma$  (III. 21.), erit et  $E\Lambda A = Z\Lambda\Gamma$  (I. 32. Cor. 3.)  $= \Lambda Z\Gamma = \Lambda E A$ , adeoque  $\Lambda A = \Lambda E$  (I. 6.) et  $\Lambda A + \Lambda B = \Lambda E + \Lambda B = BE$ . Et, quum eodem modo sit  $\Gamma A + \Gamma B = BZ$ , at  $BZ$ , quippe diameter circuli  $A\Theta B$  maior, quam  $BE$  (III. 15.), erit etiam  $\Gamma A + \Gamma B > \Lambda A + \Lambda B$ , i. e. inter omnia triacula super eadem

\*Εστω κύκλος ὁ  $ABΓΔ$ , καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ  $ABΓΔ$ . λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυοῖν ῥηταῖς ἴσαι εἰσὶν.

\*Επεξεύχθωσαν αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ .

\*Επεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυοῖν ῥηταῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ  $ABΓ$  ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ΓAB$ ,  $ABΓ$ ,  $BΓA$  δυοῖν ῥηταῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἰση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ  $ΓAB$  τῇ ὑπὸ  $BAΓ$ , ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσὶ τῷ  $BADΓ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΑΓB$  τῇ ὑπὸ  $ΑΔB$ , ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσὶ τῷ

basi  $AB$  constituta, et quorum angulus basi oppositus aequalis est, quae igitur in eodem circuli segmento constituuntur (Obs. 2.) triangulum aequicrurum maximam habet summam crurum, adeoque maximam laterum omnium summam: reliquorum vero crurum summa eo minor erit, quo magis  $BE$  a diametro distat (Obs. ad III. 15. sub finem.). Denique observari potest, si etiam  $AA$  producatur ad  $\Theta$ , fore et  $\Delta\Theta = \Delta B$ , et  $\Delta\Theta = \Delta A + \Delta B$ , adeoque  $= BE$ , et quum in triangulis  $E\Delta\Theta$ ,  $\Delta AB$  si  $E\Delta = \Delta A$ ,  $\Delta\Theta = \Delta B$ , et anguli ad verticem aequales (I. 15.) erit et recta  $E\Theta = AB$  (I. 4.).

#### PROPOSITIO XXII,

Obs. 1. Cor. 1. Si latus quodcunque quadrilateri in in circulo descripti extra circulum producatur, erit angulus externus aequalis angulo quadrilateri interno opposito. Habent hoc Cor. Clavius, Tacquet., alii.

Obs. 2. Cor. 2. In quadrilatero circulo inscripto summa duorum angulorum oppositorum aequalis est summae reliquorum duorum angulorum oppositorum, vel: si anguli quadrilateri circulo inscripti, initio a quovis eorum facto, ordine, quose invicem insequuntur, numeris indicentur, erit summa angulorum primi et tertii aequalis summae angulorum secundi et quarti. Hinc consequitur, rhombum et rhomboidem circulo non inscribi posse,



Sit circulus  $AB\Gamma\Delta$ , et in ipso quadrilaterum  $AB\Gamma\Delta$ ; dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse,

lungantur  $A\Gamma$ ,  $BA$ .

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), trianguli  $AB\Gamma$  tres anguli  $\Gamma AB$ ,  $AB\Gamma$ ,  $B\Gamma A$  duobus rectis aequales sunt. Aequalis autem est  $\Gamma AB$  angulo  $B\Gamma A$  (III. 21.), etiam in eodem sunt segmento  $BAA\Gamma$ , et  $\Gamma B A$  angulo  $A\Gamma B$  (III. 21.) etenim in eodem sunt segmento

Oba 3. Ea, quae in Cor. 2. dicta sunt, generalius de figura quacunque, quae parem laterum numerum habet, et circulo inscripta est, valet: nempe, si anguli talis figurae, initio facto a quovis eorum, ordine numeris indicentur, erit summa angulorum numeris imparibus 1. 3. 5. etc. notatorum aequalis summae angulorum numeris paribus 2. 4. 6. etc. notatorum. Huius propositionis demonstratio pro quavis figura circulo inscripta  $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$  . . . quae parem habet laterum numerum, ita instrui potest: Sit (Fig. 247.) centrum circuli  $A$ , atque ex eo ducantur rectae  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$ ,  $OA$  etc. quae efficiunt triangula  $OAB$ ,  $OBF$ ,  $OGA$  etc. quae singula erunt aequilatera (I. Def. 24.), adeoque in quolibet eorum anguli ad basin erunt aequales (I. 5.) i. e.

$$\text{erit } OAB = OBA$$

$$OGB = OBF$$

$$OGA = OAF$$

$$OEA = OAE$$

$$OEB = OZE$$

$$OHZ = OZH$$

$$OH\Theta = O\Theta H$$

$$OAO = O\Theta A$$

unde, omnibus in unam summam collectis, erit  $(OAB + OAO) + (OGB + OGA) + (OEA + OEB) + (OHZ + OH\Theta) = (OBA + OBF)$

*ΑΔΓΒ* ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ *ΑΔΓ* ταῖς ὑπὸ *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* ἴση ἐστίν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ *ΑΒΓ*. αἱ ἄρα ὑπὸ *ΑΒΓ*, *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* ταῖς ὑπὸ *ΑΒΓ*, *ΑΔΓ* ἴσαι εἰσίν. Ἄλλ' αἱ ὑπὸ *ΑΒΓ*, *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ *ΑΒΓ*, *ΑΔΓ* ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ *ΒΑΔ*, *ΔΓΒ* γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα σὺν συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη<sup>1)</sup>.

1) Commandinus observat, in vetusto aliquo codice verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη deesse. In omnibus tamen editionibus illa habentur, nec Peyrardus codicum varietatem in iis notat.

$+(OΔΓ+OΔΕ)+(OZE+OZH)+(OΘH+OΘA)$  i. e. integri anguli  $A+Γ+E+H=$  integris angulis  $B+Δ+Z+Θ$ . Et facile patet, idem ratiocinium continuari posse, quisquis in figura pari laterum numero circulo inscripta laterum numerus fuerit. Et simile erit ratiocinium, etiamsi integra figura inscripta sit segmento, quod non maius sit, quam semicirculus. Caeterum facillime etiam, quod Collega amicissimus Kausler, quum hanc propositionem cum eo communicassem, monuit, generaliter etiam res ita demonstrabitur. Sit propositio nostra demonstrata pro figura eiusmodi quacunque, in qua numerus laterum  $=2n$ , ac vera etiam erit propositio pro figura, cuius laterum numerus  $=2n+2$ . Sit nempe (Fig. 248.) figura  $ΑΒΓΑΕΖΗΘ$ , cuius numerus laterum  $=2n+2$ , in circulo. Jam, si ducta recta  $ΓΘ$  tria quaecunque latera figurae  $ΑΘ$ ,  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  a reliqua figura abscindantur, reliqua figurae latera  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$ ,  $ΕΖ$ ,  $ΖΗ$ ,  $ΗΘ$  erant numero  $2n-1$ , quibus si addas latus  $ΓΘ$ ,

*AAFB*. Totus igitur *AAΓ* angulis *BAG*, *AFB* aequalis est. Communis addatur *ABΓ*; ergo *ABΓ*, *BAG*, *AFB* angulis *ABΓ*, *AAΓ* aequales sunt. Sed *ABΓ*, *BAG*, *AFB* duobus rectis aequales sunt; et *ABΓ*, *AAΓ* igitur duobus rectis aequales sunt. Similiter ostendemus, et angulos *BAA*, *AFB* duobus rectis esse. In circulis igitur etc.

### PROPOSITIO XXIII. (Fig. 251.)

Super eadem recta duq segmenta circulorum similia et inaequalia non constituentur ex eadem parte.

erit figura *ΓAEZHΘ* circulo inscripta laterum numero = 3n. Atqui ex hypothesi demonstratum est, in hac figura esse angulos  $\theta\Gamma A + E + H = A + Z + H\theta\Gamma$ . Praeterea in quadrilatero *ABΓΘ* circulo inscripto est ex Obs. 2.  $A + B\Gamma\theta = B + \Gamma\theta A$ . Itaque  $A + (B\Gamma\theta + \theta\Gamma A) + E + H = B + (\Gamma\theta A + H\theta\Gamma) + A + Z$  i. e. integri anguli  $A + \Gamma + E + H =$  integris angulis  $B + A + Z + \theta$ .

Obs. 4. Propositio observatione praecedente allata totidem verbis quidem applicari nequit ad figuras circulo inscriptas, quas imparem habent laterum numerum. Prout enim, initio ab aliquo angulo facto, reliquos dextrorsum vel sinistrorsum numeres, alii aliique anguli in eandem summam convenient, unde e praecedente propositione verbotenus applicata contradictoria consequerentur. Similis tamen propositio etiam in talibus figuris *ABΓAE* (Fig. 249.) locum habet, si recta e centro circuli *O* ad verticem anguli cuiuscunque *E* ducta, hunc in duos angulos *OEA*, *OEΓ* dividamus, atque has integri anguli *E* partes separatim numeremus. Ita enim pariter summa angulorum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae angulorum numeris paribus notatorum, quod eadem ratione demonstrabitur, ac in Obs. 3. ductis nempe radiis ad omnes an-

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$  δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστήτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ  $AGB$ ,  $AAB$ , καὶ διήχθω ἡ  $AGΔ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $GB$ ,  $ΔB$ .

Ἐπεὶ οὖν ὁμοιόν ἐστι τὸ  $AGB$  τμήμα τῷ  $AAB$  τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AGB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AAB$ , ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστώσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς  $AB$ ,  $ΓΔ$  ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ  $AEB$ ,  $ΓΖΔ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AEB$  τμήμα τῷ  $ΓΖΔ$  τμήματι.

gultorum vertices. Neque tamen haec propositio ita enunciata semper valet, si integra figura inscripta sit segmento, quod minus sit semicirculo, sed tum levi aliqua mutatione opus erit quod hic monuisse sufficiat. Cf. l'Huilier de Relatione mutua Capacit. et Terminor. fig. §. 215. De figuris, quae angulos gibbos habent, neque in Obs. 3. neque in Obs. 4. sermo est: nec omnino huius generis figurae circulo inscriptae esse possunt, nisi forte e lateribus figurae alia alia secent.

Obs. 5. Propositio III. 22. vel, quod eodem redit, propositio, quam in Obs. 2. habuimus, valet etiam convversa. Nempe, si in quadrilatero duo anguli oppositi aequales fuerint duobus rectis, circulus per tres quadrilateri vertices transiens (qui semper describi potest, III. 10. Cor. 1.) transibit etiam per verticem quarti anguli. Id enim eodem modo demonstrabitur, ac in III. Prop. 21. Obs. 2. Nominatim igitur circa quadratum et rectangulum circulus describi potest.

Si enim fieri potest ad eandem rectam  $AB$  duo segmenta circulorum similia et inaequalia constituantur ex eadem parte  $AGB$ ,  $AJB$ , et ducatur  $AGA$ , et iungantur  $GB$ ,  $AB$ .

Quoniam igitur simile est segmentum  $AGB$  segmento  $AJB$ , similia autem segmenta circulorum sunt quae capiunt angulos aequales (III. Def. 11.); aequalis igitur est angulus  $AGB$  angulo  $AJB$ , exterior interiori, quod fieri nequit (I. 16.). Non igitur super eadem recta etc.

#### PROPOSITIO XXIV. (Fig. 252.)

Super aequalibus rectis similia circulorum segmenta aequalia inter se sunt.

Sint enim super aequalibus rectis  $AB$ ,  $GA$  similia segmenta circulorum  $AEB$ ,  $GZA$ ; dico aequale esse segmentum  $AEB$  segmento  $GZA$ .

Obs. 6. At, quae in Obs. 3. et 4. continentur propositiones, nequeunt converti, i. e. si v. c. in figura aliqua, quae parem laterum numerum habet, sit summa angulorum imparium 1. 3. 5. etc. aequalis summae angulorum 2. 4. 6. etc. inde haud consequitur, circulum describi posse, qui per omnes figurae vertices transeat. Sunt potius innumeri casus, quibus id fieri nequit. Sit enim v. g. (Fig. 250.) in circulo Hexagonum  $ABGAEZ$ , in quo itaque ex Obs. 3. erunt anguli  $A + B + E = ABG + A + Z$ . Producantur duo latera  $AB$ ,  $AG$  lateri  $BG$  contigua, donec rectae  $\theta H$ , quae parallela ducta est rectae  $BG$ , occurrant in punctis  $\theta$ ,  $H$ , eritque (I. 29.) angul.  $\left(\frac{A\theta H}{\theta}\right) = ABG$ , et  $\left(\frac{AH\theta}{H}\right) = BGA$ , adeoque  $A + H + E = \theta + A + Z$  i. e. figura  $A\theta HAEZ$  ita comparata est, ut summa angulorum imparium aequalis sit summae angulorum parium, neque tamen circulus per vertices figurae  $A\theta HAEZ$  transire

Ἐφαρμοζομένον γὰρ τοῦ  $AEB$  τμήματος ἐπὶ τὸ  $\Gamma Z\Delta$ , καὶ τιθεμένον τοῦ μὲν  $A$  σημείου ἐπὶ τὸ  $\Gamma$ , τῆς δὲ  $AB$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $\Gamma\Delta$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $B$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, διὰ τὸ ἴσῃν εἶναι τὴν  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ · τῆς δὲ  $AB$  ἐπὶ τὴν  $\Gamma\Delta$  ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $AEB$  τμήμα ἐπὶ τὸ  $\Gamma Z\Delta$ . Εἰ γὰρ ἡ  $AB$  εὐθεῖα ἐπὶ τὴν  $\Gamma\Delta$  ἐφαρμόσει, τὸ δὲ  $AEB$  τμήμα ἐπὶ τὸ  $\Gamma Z\Delta$  μὴ ἐφαρμόσει <sup>1)</sup>, ἥτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ  $\Gamma\Theta H\Delta$ , καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ  $\Gamma, H, \Delta$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς  $AB$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $\Gamma\Delta$  οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $AEB$  τμήμα ἐπὶ τὸ  $\Gamma Z\Delta$  ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κί.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τμήμα.

Ἐστω τὸ δοθέν τμήμα κύκλου, τὸ  $AB\Gamma$ · δεῖ δὲ ἡ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα.

1) Post verba: μὴ ἐφαρμόσει edd. Oxon. et Basil. habent: ἀλλὰ παραλλάξει, ὡς τὸ  $\Gamma\Theta H\Delta$ . Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ  $\Gamma\Theta H\Delta$  τὸν  $\Gamma Z\Delta$  κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ  $\Gamma, H, \Delta$  etc. cum qua lectione consentiunt omnes a Peyrardo collati codd. praeter codicem <sup>a</sup>, quem secutus Peyrardus ita legit, ut nos quoque expressimus. Verum etiam in hac lectione quam veriores putamus, aliquid desiderari posse videtur; quo ostendatur, ex III. 23. unum segmentum circuli neque extra neque intra alterum cadere posse. Idem sentire videntur DeLambre et Prony in relatione ad Instit. Franc. facta.

potest. Circulus enim, qui per tria puncta  $A, Z, B$  transit, per haec puncta omnimode determinatus est (III. 10. Cor. 1.),

Congruente enim segmento  $AEB$  segmento  $\Gamma ZA$ , et posito puncto  $A$  super  $\Gamma$ , recta vero  $AB$  super  $\Gamma A$ , congruet et punctum  $B$  puncto  $A$ , propterea quod aequalis est  $AB$  ipsi  $\Gamma A$ ; ipsa autem  $AB$  ipsi  $\Gamma A$  congruente, congruet et segmentum  $AEB$  segmento  $\Gamma ZA$ . Si enim  $AB$  recta ipsi  $\Gamma A$  congruat, segmentum autem  $AEB$  segmento  $\Gamma ZA$  non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel pertransibit ut  $\Gamma\Theta H A$ , et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis  $\Gamma$ ,  $H$ ,  $A$ , quod fieri non potest (III. 10.). Non igitur congruente recta  $AB$  ipsi  $\Gamma A$  non congruet segmentum  $AEB$  segmento  $\Gamma ZA$ . Congruet igitur, et aequale ipsi erit. Ergo super aequalibus etc.

#### PROPOSITIO XXV. (Fig. 253. a. b. c.)

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit datum circuli segmentum  $AB\Gamma$ ; oportet describere circulum, cuius  $AB\Gamma$  est segmentum.

nec itaque alius esse potest, quam circulus  $AZE\Gamma B$ . At hic circulus rectas  $AB$ ,  $A\Gamma$  secat alteram in punctis  $A$ ,  $B$ , alteram in punctis  $A$ ,  $\Gamma$ , neque igitur iterum eas secare potest in punctis  $\Theta$ ,  $H$  (III. 2. Cor. 1.) i. e. nequit transire per vertices  $\Theta$ ,  $H$  figurae  $A\Theta H A E Z$ . Pariter res demonstrabitur de conversa eius, quam Obs. 4. habuimus.

#### PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Quamvis verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μὴ non omitti possint ob demonstrationem, verum tamen est, quod Campa-

Τετμήσθω γὰρ ἡ  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Α$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $Α$  σημείου τῇ  $ΑΓ$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΔΒ$ , καὶ ἐπεξέχθω ἡ  $ΑΒ$ . ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ  $ΒΑΔ$  ἥτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττω.

"Ἐστὼ πρότερον μείζων, καὶ συνεσιτάτω πρὸς τῇ  $ΒΑ$  ὠθεῖα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Α$ , τῇ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $ΒΑΕ$ , καὶ διήχθω ἡ  $ΔΒ$  ἐπὶ τὸ  $Ε$ , καὶ ἐπεξέχθω ἡ  $ΕΓ$ . Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ ὑπὸ  $ΑΒΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΑΕ$ , ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ΒΕ$  εὐθεῖα τῇ  $ΕΑ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΔΓ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΔΕ$ , δύο δὴ αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔΕ$  δυοὶ ταῖς  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$  ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΓΔΕ$  ἐστὶν ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ  $ΑΕ$  βάσει τῇ  $ΓΕ$  ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ  $ΑΕ$  τῇ  $ΕΒ$  ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ  $ΒΕ$  ἄρα τῇ  $ΓΕ$  ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $ΑΕ$ ,  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρον· τῷ  $Ε$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$ , κύκλος· γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ  $ΑΒΓ$  τμήμα ἐλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ τὸ  $Ε$  κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

nus, Commandinus, Clavius, Peletarius, aliique monent, nec o diversis eiusdem rectae partibus esse posse duo segmenta similia et inaequalia, quod facile patet, si alterum eorum circa rectam communem circumvolutum ponatur, ita ut iam sint ex eadem rectae communis parte.

Obs. 2. Rob. Simson, monet, in Prop. 23. ostendendum esse, non posse ex eadem rectae  $ΑΒ$  parte constitui duo circuli segmenta similia et inaequalia, quorum alterum alterum secet (quoniam] non plura duobus punctis  $Α$  et  $Β$  communia



Secetur enim  $AT$  bifariam in  $A$  (I. 10.), et ducatur a puncto  $A$  ipsi  $AT$  ad rectos angulos  $AB$  (I. 11.), et iungatur  $AB$ . Ergo angulus  $ABA$  ipso  $BAI$  vel maior est, vel aequalis, vel minor.

Sit primum maior, et constituatur ad rectam  $BA$ , et ad punctum in ea  $A$ , angulo  $ABA$  aequalis angulus  $BAE$  (I. 23.), et producat  $AB$  ad  $E$ , et iungatur  $ET$ . Et quoniam aequalis est angulus  $ABE$  ipsi  $BAE$ , aequalis est et recta  $BE$  rectae  $EA$  (I. 6.). Et quoniam aequalis est  $AA$  ipsi  $AT$ , communis autem  $AE$ , duae  $AA$ ,  $AE$  duabus  $TA$ ,  $AE$  aequales sunt, utraque utrique, et angulus  $AAE$  angulo  $TAE$  est aequalis; rectus enim uterque; basis igitur  $AE$  basi  $TE$  est aequalis (I. 4.). Sed  $AE$  ipsi  $EB$  ostensa est aequalis; et  $BE$  igitur ipsi  $TE$  est aequalis; tres igitur  $AE$ ,  $EB$ ,  $ET$  aequales inter se sunt; ergo circulus centro  $E$ , intervallo autem una ipsarum  $AE$ ,  $EB$ ,  $ET$  descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus (III. 9.). Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est segmentum  $ABT$  minus esse semicirculo, propterea quod centrum  $E$  extra ipsum cadit.

habere possunt III. 10.) ne postea demum ad Prop. 24. id demonstrare necesse sit. Cacterum Campanus in Prop. 23. paullo prolixius distinguit casus, quibus punctum  $T$  in uno crurum anguli  $AB$ , aut extra hunc angulum, aut intra eum situm est.

#### PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Robert. Simson., postquam Prop. 23. ita ut Obs. 2. ad III. 23. diximus, demonstraverat, breviter iam ex-

Ὅμοιως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , τῆς  $AD$  ἴσης γενομένης ἐκατέρᾳ τῶν  $B\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta\Gamma$  ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ  $\Delta$  κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ  $AB\Gamma$  ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  ἐλάττω ᾖ τῆς ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , καὶ συστήσομεθα πρὸς τῇ  $B\Delta$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ  $AB\Gamma$  τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς  $AB$  ὡς τὸ  $E$ , καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγίγρεται ὁ κύκλος, οὐπὲρ ἐστὶ τὸ τμήμα. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἅντες πρὸς τοῖς κέντροις ἅντες πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβήκνυται.

Ἐστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  καὶ ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, αἱ ὑπὸ  $B\eta\Gamma$ ,  $E\theta Z$ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$ ,  $E\lambda Z$ · λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ  $B\kappa\Gamma$  περιφέρεια τῇ  $E\lambda Z$  περιφερείᾳ.

pedit hanc 24., dum provocat saltim ad 23., ut ostendat, non posse non rectis  $AB$ ,  $\Gamma A$  congruentibus etiam segmenta similia super iis posita congruere.

Obs. 2. Clavius monet, non solum segmentorum, sed nominatim etiam circumferentiarum, quae ipsorum termini sunt, aequalitatem consequi ex ostensa congruentia.

Obs. 3. Eodem observante, conversa quoque Prop. 23. et 24. locum habet. Nempe segmenta circulorum aequalia super aequalibus rectis, vel super eadem recta constituta si-

Similiter et si angulus  $ABA$  aequalis sit ipsi  $BAA$ ,  
 et  $AA$  aequali facta utrivis ipsarum  $BA$ ,  $AT$ , tres,  
 $AA$ ,  $AB$ ,  $AT$  aequales inter se erunt, et erit centrum  
 et completi circuli et  $ABT$  semicirculus.

Si autem  $ABA$  minor sit ipso  $BAA$ , et si consti-  
 tuamus ad  $BA$  rectam, et ad punctum in ea  $A$ , ipsi  
 $ABA$  angulum aequalem (I. 23.); intra  $ABT$  seg-  
 mentum cadet centrum in  $AB$ , ut  $E$ , et erit  $ABT$   
 segmentum maius semicirculo.

Segmento igitur circuli dato, descriptus est circu-  
 lus, cuius est segmentum. Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO XXVI. (Fig. 254.)

In aequalibus circulis, aequales anguli aequalibus  
 circumferentiis insistant, sive ad centra, sive ad cir-  
 cumferentias insistant.

Sint enim aequales circuli  $ABT$ ,  $AET$ , et in  
 ipsis ad centra quidem aequales anguli sint  $BHT$ ,  
 $ETZ$ , ad circumferentias autem anguli  $BAT$ ,  $ETZ$ ;  
 dico aequalem esse  $BKT$  circumferentiam circumfe-  
 rentiae  $EAT$ .

Similia erunt. Quoniam enim aequalia esse ponantur segmenta, et  
 aequales bases habeant, basibus his congruentibus etiam seg-  
 menta congruent. Nequit enim unum alterum includere,  
 quod aequalia sunt, nec unum alterum secare ex III. 10.  
 Congruentibus autem segmentis crura angulorum ad idem co-  
 mune punctum ab extremis basis ducta congruent, adeoque hi  
 anguli, et propterea omnes (III. 22.), qui in his segmentis  
 insistant, anguli aequales, et segmenta similia erunt (III. Def. 11.):

Ἐπεξήχθωσαν γὰρ αἱ  $BΓ$ ,  $EΖ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$  κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων διὰ δὴ αἱ  $BΗ$ ,  $ΗΓ$  δυσὶν ταῖς  $ΕΘ$ ,  $ΘΖ$  ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ  $H$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Θ$  ἴση ἐστὶ· βάσεις ἄρα ἡ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EΖ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ  $A$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ , ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΒΑΓ$  τμήμα τῷ  $ΕΔΖ$  τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν  $BΓ$ ,  $EΖ$  τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμή-

#### PROPOSITIO XXV.

Obs. Boermann., Rob. Simson. et Playfair eos casus, quibus segmentum datum non est semicirculus, coniunctim demonstrant. Quod ad additam observationem attinet, quibus casibus segmentum datum maius aut minus semicirculo, aut ei aequale sit, Austin. monet, eam ita positam esse, quasi ex demonstratione demum id detegatur. Campanus rem invertit, et monstrat, si segmentum minus fuerit semicirculo, fore angulum  $ΑΒΔ$  maiorem angulo  $ΒΑΔ$ ; si semicirculus, fore hos angulos aequales; si maius semicirculo, fore  $ΑΒΔ$  minorem angulo  $ΒΑΔ$ , quod ipsum ut corollarium addit Billingsley. Caeterum Campanus, Peletarius, Billingsley, Tacquet, alique problema ita etiam solvunt, ut duas quascunque chordas in segmento ducant, et eas rectis bisecent, quas ipsis ad angulos rectos erigunt: Orontius Fineus, Clavius, Billingsley, Barrov., Coëtsius, Henrion hanc solutionem simpliciorē reddunt, dum duas chordas ita ducunt, ut unum circumferentiae punctum commune habeant. Austin. denique observat, in constructione problematis sumi, angulos, et latera trianguli dato segmento inscripti dari: hoc autem posito omitti posse hanc propositionem, utpote in generaliore IV. 5. comprehensam. Quod quamvis verum sit, in solutione nostri problematis ope IV. 5. facta addi tamen debet, circuli ita descripti partem ex III. 23. cum dato segmento coincidere.

#### PROPOSITIO XXVI.

Obs. Paulo distinctius procedit demonstratio, si duo

Iungantur enim  $BF$ ,  $EZ$ .

Et quoniam aequales sunt circuli  $ABF$ ,  $AEZ$ , aequales sunt, quae ex centrīs (III. Def. 1.); duae igitur  $BH$ ;  $HF$  duabus  $EO$ ,  $OZ$  aequales sunt; et angulus ad  $H$  angulo ad  $\Theta$  aequalis est; basis igitur  $BF$  basi  $EZ$  est aequalis (I. 4.). Et quoniam aequalis est angulus ad  $A$  angulo ad  $A$ , simile igitur est segmentum  $BAF$  segmento  $EJZ$  (III. Def. 11.), et sunt super aequales rectas  $BF$ ,  $EZ$ ; quae autem sub-

casus, prout anguli ad centrum vel ad peripheriam aequales ponuntur, separatim tractantur, quod fecere Campanus, Clavius, Peletarius, Coësius. Ostendendum nempe est, et ex uno supposito consequi alterum ope III. 20. Praeterea iure adhuc addit Clavius, demonstrationem eius casus, quo anguli ad peripheriam  $BAF$ ,  $EJZ$  non sunt minores recto, adeoque, ut ex III. 25. consequitur, segmenta  $BAF$ ,  $EJZ$  non minora semicirculo. Is casus nisi in III. 20. cum Austino angulos gibbos quoque comprehendere velis, ne manca sit demonstratio, si anguli  $BAF$ ,  $EJZ$  obtusi fuerint ope III. 22. ad casum angulorum acutorum reduci debet: sin hi anguli recti fuerint, res ex I. Ax. 8. patet. Ante omnia autem monendum fuit, angulos  $BAF$ ,  $EJZ$  [vel semicirculis insistere, vel segmentis, quae maiora vel minora sint semicirculis, prout ipsi recti, obtusi aut acuti fuerint ex conversa III. 31. quae ante hanc 26. poni potest. Denique Commandinus, Clavius aliique monent, has et tres sequentes propositiones etiam in uno eodemque circulo locum habere.

Cor. 1. Hinc etiam in aequalibus circulis circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales, aequales erunt. Nempe, quum circumferentiae, quibus anguli aequales insistent, aequales sint, aequalia etiam erunt reliqua circulorum segmenta (I. Ax.) i. e. circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales.

Cor. 2. Cf. Clavius ad III. 27. vel Pappi Collect. Mathem. Comment. ad III. 52. Prop. Si in circulo fuerint duae rectae parallelae  $AA$ ,  $BF$  (Fig. 255.) et puncta earum ex-

ματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ  $B\Gamma$  τμήμα τῷ  $EAZ$  τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ ὅλης ὁ  $AB\Gamma$  κύκλος ὅλῳ τῷ  $AEZ$  κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα  $BK\Gamma$  τμήμα λοιπῷ  $EAZ$  ἴσον· ἢ ἄρα  $BK\Gamma$  περιγεγραμμά ἐστιν ἴση τῇ  $EAZ$  περιφερείᾳ. Ἐάν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἔάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἔάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι.

troma, quae ex eadem parte sunt, iungantur rectis  $AB, \Gamma A$ , erunt circumferentiae a parallelis interceptae  $AB, \Gamma A$  aequales. Ductis enim rectis  $BA, \Gamma A$ , erunt anguli  $ATB, \Gamma AA$  aequales (I. 29.), adeoque aequales erunt circumferentiae, quibus insistent (III. 26. Obs.).

COR. 3. Vid. Clavius. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo anguli inaequales fuerint (sive illi sint anguli ad centrum, sive ad peripheriam), arcus quoque, vel circumferentiae, quibus insistent, inaequales erunt, nominatim ea circumferentia, cui maior angulus insistit, etiam ipsa maior erit. Et si unus istorum angulorum sit multipulum alterius anguli, arcus quoque, cui unus angulus insistit, idem multipulum eius arcus erit, cui alter angulus insistit. Hoc corollarium etiam de angulis gibbis i. e. duobus rectis maioribus, vel, si mavis de summa angulorum duobus rectis maiore vel iis aequali valet, dummodo pro arcu, cui insistent, etiam eam circuli partem sumas, quae semicirculo vel aequalis vel maior est.

### PROPOSITIO XXVII.

Obs. Est haec propositio conversa prioris. Ad plenioram eius demonstrationem pariter ac in III. 26. separatim tra-

per aequales rectas similia sunt segmenta circulorum aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur segmentum  $BAT$  segmento  $EAZ$ . Est autem et totus  $ABT$  circulus toti  $AEZ$  circulo aequalis; reliquum igitur  $BKT$  segmentum reliquo  $EAZ$  aequale; ergo circumferentia  $BKT$  aequalis est circumferentiae  $EAZ$ . Si igitur in aequalibus etc.

### PROPOSITIO XXVII. (Fig. 256.)

In aequalibus circulis anguli aequalibus circumferentiis insistentes aequales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

utendi sunt casus, quibus circumferentiae, quae aequales ponuntur, non minores sunt semicirculo, quod simili ratione ope III. 22. fieri potest.

Cor. 1. E Clavio. Duae rectae  $AA$ ,  $BF$  (Fig. 255.), quae inter se in circulo aliquo aequales arcus  $AB$ ,  $AF$  interceptiunt, sunt parallelae. (Est haec convers. Cor. 2. III. 26. Prop.) Quum enim circumferentia  $AB$  sit aequalis circumferentiae  $FA$ , erit (III. 27. coll. Obs. ad III. 26. sub finem) angulus  $ATB = TAA$ , adeoque  $AA$ ,  $BF$  parallelae (I. 29.).

Cor. 2. Et quum etiam circumferentiae  $AAF$ ,  $AB$  aequales sint, aequales erunt anguli  $ABT$ ,  $ATB$  (III. 27.), adeoque rectae  $AB$ ,  $TA$ , nisi hi anguli simul aequales sint duobus rectis, inter se convenient, ita, ut triangulum isosceles constituent (I. 6.), cuius vertex igitur situs erit in recta, quae e media basi  $BT$  perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin  $BT$  ducta.

Cor. 3. Pariter, si puncta istarum parallelarum e diversis partibus sita iungantur rectis  $BA$ ,  $AT$ , quae se necessario intersecant in puncto aliquo  $E$ , aequales erunt anguli  $ATB$ ,  $ABT$ , adeoque (I. 6.) aequales sunt rectae  $BE$ ,  $TE$ ,

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΕΖ$ , πρὸς μὲν τοῖς  $Η$ ,  $Θ$  κέντροις γωνίαι βεβηκένωσαν αἱ ὑπὸ  $ΒΗΓ$ ,  $ΕΘΖ$ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ  $ΒΑΓ$ ,  $ΕΔΖ$ : λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $ΒΗΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΘΖ$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .

Εἰ 1) γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΗΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΘΖ$ , μία αὐτῶν μείζων ἔσται. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $ΒΗΓ$ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $ΒΗ$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Η$ , τῇ ὑπὸ  $ΕΘΖ$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $ΒΗΚ$ : αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν ἴση ἄρα ἡ  $ΒΚ$  περιφέρεια τῇ  $ΕΖ$  περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ  $ΕΖ$  τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ  $ΒΚ$  ἄρα τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ  $ΒΗΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΘΖ$ : ἴση ἄρα. Καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ  $ΒΗΓ$  ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ  $Α$ , τῆς δὲ ὑπὸ  $ΕΘΖ$  ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ  $Δ$ : ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ  $Α$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ . Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Ita cum Peyrardo ex Cod. a. omnino legendum esse videtur. Edd. Oxon. et Basil. cum omnibus reliquis a Peyrardo comparatis manuscriptis habent: *Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστὶν*· εἰ δὲ οὐ, μία αὐτῶν μείζων ἐστὶν etc. Quae tamen, quum ad finem demonstrationis denuo aequalitas angulorum  $A$  et  $\Delta$  ex aequalitate angulorum  $ΒΗΓ$ ,  $ΕΘΖ$  deducatur, minus apta videntur.

atque ex eadem ratione rectae  $AE$   $AE$ , vel punctum  $E$  quoque positum est in recta, quae e media basi  $BF$  perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin ducta. Haec Corollaria habet Gilbert. p. 127.

Cor. 4. E Clavio, qui ad Candanum de Subtilit. id re-



In aequalibus enim circulis  $AB\Gamma$ ,  $AEZ$ , aequalibus circumferentiis  $BF$ ,  $EZ$  ad centra  $H$ ,  $\Theta$ , anguli insistant  $BHF$ ,  $E\Theta Z$ , ad circumferentias vero anguli  $BA\Gamma$ ,  $EAZ$ ; dico angulum  $BHF$  angulo  $E\Theta Z$  esse aequalem, angulum vero  $BA\Gamma$  angulo  $EAZ$ .

Si enim inaequalis sit angulus  $BHF$  angulo  $E\Theta Z$ , unus ipsorum maior erit. Sit maior  $BHF$ , et constitutur ad rectam  $BH$ , et ad punctum in ea  $H$ , angulo  $E\Theta Z$  aequalis  $BHK$  (I. 23.); aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistant, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur circumferentia  $BK$  circumferentiae  $EZ$ . Sed  $EZ$  ipsi  $BF$  aequalis est, et  $BK$  igitur ipsi  $BF$  est aequalis (I. Ax. 1.), minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur inaequalis est angulus  $BHF$  angulo  $E\Theta Z$ ; aequalis igitur. Et est ipsius quidem  $BHF$  dimidius angulus ad  $A$ , ipsius vero  $E\Theta Z$  dimidius angulus ad  $A$  (III. 20.); aequalis igitur et angulus ad  $A$  angulo ad  $A$ . In aequalibus igitur etc.

fert. Cf. Gilbert. p. 150. Si (Fig. 257.) in circulo ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum  $AF$  producat, sinque quadrantes ex una parte illius in partes quocunque aequales  $I\Gamma$ ,  $ZI$ ,  $IB$ , et totidem  $AO$ ,  $\Theta H$ ,  $HB$  divisi, iunganturque rectae  $Z\Theta$ ,  $II$  etc. quae ex Cor. 1. parallelae erunt, atque ex puncto extremo  $B$  alterius diametri per punctum divisionis  $I$  ipsi ex una parte proximum recta ducatur  $IB$ , quae cum altera diametro conveniet in  $K$ : erit tota recta  $KA$  inter punctum concursus  $K$  et concavam peripheriam circuli omnibus parallelis  $II$ ,  $Z\Theta$  etc. una cum diametro  $AF$  simul sumtis, aequales. Nam quum, ob arcus aequales, rectae  $IB$ ,  $Z\Theta$ ,  $AF$  i. e.  $II$ ,  $KA$ , et  $Z\Theta$ ,  $AF$  (Cor. 1.) et ex eadem ratione  $BI$ ,  $II$  (adeoque  $IK$ ,  $IIA$ ),  $IZ$ ,  $\Theta\Gamma$

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιγερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ  $ΒΓ$ ,  $ΕΖ$ , τὰς μὲν  $ΒΑΓ$ ,  $ΕΔΖ$  περιγερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ  $ΒΗΓ$ ,  $ΕΘΖ$  ἐλάττωνας· λέγω ὅτι ἡ μὲν  $ΒΑΓ$  μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ  $ΕΔΖ$  μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ  $ΒΗΓ$  ἐλάττων περιφέρεια τῇ  $ΕΘΖ$  ἐλάττωι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ  $K$ ,  $Λ$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $BK$ ,  $KΓ$ ,  $ΕΛ$ ,  $ΛΖ$ .

(adeoque  $ZA$ ,  $ΘΓ$ ) parallelae sint, erit  $IH=KA$ , et  $ZΘ=ΔΓ$  (I. 34.) adeoque  $KA=KA+AG+GA=IH+ZΘ+GA$ .

Cor. 5. Si (Fig. 258.) semicirculus  $ADHE$  (qui in Cor. praeced. in numerum parem partium aequalium quemcunque divisus fuerat) iam dividatur in numerum imparem partium aequalium quemcunque  $AB$ ,  $BF$ ,  $FA$  etc. et ducantur per puncta aequaliter a diametro distantia rectae  $BΘ$ ,  $ΓΖ$  etc. quae inter se et cum diametro  $AOH$  parallelae erunt (Cor. 1.), et ad extremitates eius harum parallelarum, quae a diametro  $AH$  maxime distat, ducantur e centro  $O$  radii  $OA$ ,  $OE$ , summa rectarum  $βθ$ ,  $γζ$ ,  $ΔΕ$ , quas hi radii e parallelis intercipiunt, aequalis erit radio  $AO$ . Nam rectae  $AO$ ,  $EO$  productae ad  $M$ ,  $N$ , ob angulum  $MON=ΔOE$  (I. 15.) arcum  $MN=ΔE$  abscindent (III. 26.). Ductis deinde per  $A$ ,  $F$  rectis  $AA$ ,  $ΓK$  etc. parallelis rectae  $EM$ , abscidentur arcus  $MA$ ,  $AK$  etc. aequales arcibus  $ΔE$ ,  $ΔΓ$  etc. (III. 26. Cor. 2.) et, quum integer semicirculus  $MAE$  aequalis sit semicirculo  $AAH$ , adeoque tot arcus aequales inter se, et arcibus  $AB$ ,  $BF$  etc. contineat, quot habet semicirculus  $AAH$ , reliquas etiam arcus  $AK$  aequalis erit arcui  $BF$ , adeoque ducta  $BA$  parallela erit rectae  $ΓK$ .

## PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli  $AB\Gamma$ ,  $AEZ$ , et in ipsis aequales rectae  $B\Gamma$ ,  $EZ$  <sup>1)</sup>, circumferentias quidem  $BA\Gamma$ ,  $EIZ$  maiores auferentes, circumferentias vero  $BH\Gamma$ ,  $EOZ$  minores; dico maiorem quidem  $BA\Gamma$  aequalem esse maiori  $EIZ$ , minorem vero  $BHH'$  minori  $EOZ$ .

Sumantur enim centra circulorum,  $K$ ,  $A$ , et iungantur  $BK$ ,  $K\Gamma$ ,  $EA$ ,  $AZ$ .

1) In figuris et textu litteras reposuimus, quales sunt in edd. Oxon. et Basil. et in figura propositionis sequentis, quum Peyrardus nullam causam mutatarum litterarum attulerat.

Pariet rectae  $FM$ ,  $BA$  etc. inter se, et diametro  $AN$  parallelae erunt (Cor. 1.) Et quum  $FA$ ,  $AM$  sint arcus aequales, rectae  $FM$ ,  $AA$  se intersectabunt in puncto aliquo  $\delta$  sito in diametro, quae ad rectam  $AM$ , vel, quod eodem redit, ad rectam ei parallelam  $EN$  perpendicularis ducitur (Cor. 3.) i. e. ut facile patet, in diametro  $AOH$ . Eodem modo ostenduntur, rectas  $FK$ ,  $BA$  in puncto  $\alpha$  eiusdem diametri convenire etc. Et quum sit  $AO = B\delta$  (I. 34.) et  $\alpha O = B\beta$  (I. 51.), erit  $\beta\delta = \alpha\alpha$ . Eodem modo, quum sit  $\alpha O = \Gamma\epsilon$ , et  $\delta O = I\gamma$ , erit  $\alpha\epsilon = \gamma\epsilon$ . Denique est  $\delta O = AE$  (I. 34.): itaque  $\alpha\alpha + \alpha\delta + \delta O$  i. e.  $AO = \beta\delta + \gamma\epsilon + AE$ . Habet hanc propositionem Kraftius in Geom. Sublim. §. 92., qui eam La Hirio (Mémo. de Math. 1692. p. 92.) tribuit. Cf. Gilbert. l. c. p. 131.

Cor. 6. Vid. Clavium, Boermannum, aliosque. Recta  $EZ$  (Fig. 259.), quae ex medio peripheriae alicuius ducitur circumulum contingens, parallela est rectae lineae, quae peripheriam illam subtendit. Ducta enim e centro  $A$  ad con-

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ  $BK$ ,  $KΓ$  δυσὶ ταῖς  $EA$ ,  $AZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἢ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EZ$  ἴση γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ  $BKΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν ἴση ἄρα ἢ  $BΗΓ$  περιφέρεια τῇ  $ΕΘΖ$  περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ  $ΑΒΓ$  κύκλος ὅλῳ τῷ  $ΔΕΖ$  κύκλῳ ἴσος καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ  $ΒΔΓ$  περιφέρεια λοιπῇ τῇ  $ΕΔΖ$  περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τῶν ἴσων περιφερειῶν ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαὶ ἀπείλχθωσαν αἱ  $BΗΓ$ ,  $ΕΘΖ$ , καὶ ἐπεξείχθωσαν αἱ  $BΓ$ ,  $EZ$  εὐθεῖαι λέγω οὐ ἴση ἐστίν ἢ  $BΓ$  εὐθεῖα τῇ  $EZ$ .

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ  $K$ ,  $A$ , καὶ ἐπεξείχθωσαν αἱ  $BK$ ,  $KΓ$ ,  $EA$ ,  $AZ$ .

tacrum  $A$  recta  $AA$  perpendicularis est ad tangentem (III. 18.). At ductis  $AB$ ,  $AT$ , in triangulis  $ABΘ$ ,  $ATΘ$  est  $AB=AT$ , et  $ΑΘ$  communis, et ob arcus  $AB$ ,  $AT$  ex hyp. aequales, angulus  $BΑΘ=TAΘ$  (III. 27.), itaque  $BΘA=TAΑ$  (I. 4.), proinde uterque rectus est (I. 13.): itaque recta  $EZ$  parallela erit rectae  $BΓ$  (I. 28.). Hinc simul patet, rectam, quae a centro circuli ducta arcum circuli bifariam secat, secare etiam rectam illi arcui subtensam bifariam et ad angulos rectos.

COR. 7. Conversa quoque antecedentis corollarii facile demonstrabitur: nempe, si recta  $EZ$ , quae ex medio peripheriae alicuius ducitur, parallela est rectae lineae, quae il-

Et quoniam aequales circuli sunt, aequales sunt et rectae ex centrīs ductae (III. Def. 1.); duae igitur  $BK$ ,  $K\Gamma$  duabus  $EA$ ,  $AZ$  aequales sunt, et basis  $B\Gamma$  basi  $EZ$  aequalis; angulus igitur  $BK\Gamma$  angulo  $EAZ$  aequalis est (I. 8.). Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur  $BHT$  circumferentia ipsi  $EOZ$  circumferentiae. Est autem et totus  $AB\Gamma$  circulus toti  $AEZ$  circulo aequalis; igitur et reliqua circumferentia  $BA\Gamma$  reliquae circumferentiae  $EAZ$  aequalis est. In aequalibus igitur etc.

### PROPOSITIO XXIX. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae subtendunt.

Sint aequales circuli  $AB\Gamma$ ,  $AEZ$ , et in ipsis sumantur aequales circumferentiae  $BHT$ ,  $EOZ$ , et iunguntur  $B\Gamma$ ,  $EZ$  rectae; dico aequalem esse rectam  $B\Gamma$  rectae  $EZ$ .

Sumantur enim centra circulorum,  $K$ ,  $A$ , et iungantur  $BK$ ,  $K\Gamma$ ,  $EA$ ,  $AZ$ .

Ita lineam subtendit,  $EZ$  contingit circulum. Erit nempe angulus  $B\Delta\theta = \Gamma\Delta\theta$  (II. 27.)  $\Delta B\theta = \Delta \Gamma\theta$  (I. 5.), adeoque (I. 32.)  $B\theta\Delta = \Gamma\theta\Delta =$  recto (I. 15.). Unde et  $E\Delta\Delta$  rectus erit (I. 29.) et  $EA$  circulum continget (III. 17.).

Cor. 8. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo arcs inaequales fuerint, erunt etiam anguli iis insistentes inaequales, sive illi fuerint anguli ad centrum sive ad peripheriam, nominatim, qui maioribus arcubus insistent anguli, erunt maiores. Et, si unus istorum arcuum sit multipulum alterius, erit etiam angulus priori insistens idem multipulum

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BHG$  περιφέρεια τῇ  $EΘZ$  περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BKG$  τῇ ὑπὸ  $EΛZ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ  $ABG$ ,  $ΔEZ$  κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ  $BK$ ,  $KI$  δυσὶ ταῖς  $ΕΛ$ ,  $ΛZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιχουσαι βάσεις ἄρα ἡ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EZ$  ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

### Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν διχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ  $ΑΔΒ$ , δεῖ δὴ τὴν  $ΑΔΒ$  περιφέρειαν διχα τεμεῖν.

anguli alteri insistentis. Est haec conversa III. 26. Cor. 2 et pariter de angulis gibbis quoque valet.

### PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Ad pleniorē rei tractationē (Pfleidererō monente praemittenda fuerint sequentia; Si in uno circulo recta  $Bi$  per centrum transeat, in altero etiam ei aequali recta  $EA$  ipsa  $BF$  aequalis per centrum transibit. Nam si  $EZ$  non per centrum transiret, ea, quae per centrum circuli  $ΔEZ$  transit maior foret quam  $EZ$  (III. 15.) i. e. maior quam  $BΓ$ . Ea demum autem illi est aequalis (III. Def. 1.) q. e. n. Tum autem, quum circuli aequales sint, semicirculi etiam, quos diametri  $BΓ$ ,  $EZ$  auferunt (I. Def. 17.) aequales erunt. Si autem  $BΓ$  non per centrum transeat, nec ea, quae illi aequalis est,  $EZ$  per centrum transire potest: nam, si  $BΓ$  non per centrum transit, erit illa minor diametro circuli  $ABΓ$  (III. 15.) i. e. (III. Def. 1.) minor diametro circuli  $ΔEZ$ , itaque et  $EZ$  minor est diametro circuli  $ΔEZ$ , adeoque non per centrum circuli  $ΔEZ$  transit. Atque hinc deinde reliqua consequuntur ut apud Euclidem.

Cor. 1. Et quum circumferentiae, quas aequales recta

Et quoniam aequalis est circumferentia  $BHT$  circumferentiae  $EOZ$ , aequalis est et angulus  $BKT$  angulo  $EAZ$  (III. 27.). Et quoniam aequales sunt circuli  $ABF$ ,  $AEZ$ , aequales sunt et rectae ex centris ductae; duae igitur  $BK$ ,  $KT$  duabus  $EA$ ,  $AZ$  aequales sunt, et angulos aequales continent; basis igitur  $BT$  basi  $EZ$  aequalis est. In aequalibus igitur etc.

### PROPOSITIO XXX. (Fig. 268.)

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia  $AAB$ ; oportet circumferentiam  $AAB$  bifariam secare.

In aequalibus circulis vel in eodem circulo (cf. Obs. ad III. 26.) auferunt, sint aequales, anguli etiam, qui iis insistent, sive ad centrum, sive ad peripheriam aequales erunt (III. 27.) adeoque segmenta erunt similia (III. Def. 11.). Cf. Pfeiderer.

Cor. 2. Si duo aequales circuli (Fig. 261.) se intersectent in  $A$  et  $B$ , arcus  $ATB$ ,  $AAB$  erunt aequales, adeoque similes (III. 27. et III. Def. 11.).

Cor. 3. Si in aequalibus circulis aut in eodem circulo inaequales rectae constituentur, maior recta maiorem, minor minorem circumferentiam abscindet (I. 25. et III. 26. Cor. 3.), si nampe de segmentis loquamur, quae semicirculo minora sunt. In segmentis vero, quae semicirculo maiora sunt, contrarium valet, nempe minor recta maius segmentum subtendit. Cf. Clavius.

### PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Est haec conversa praecedentis. Et, siquidem circumferentia unius, circuli sit semicirculus, erit (quum circumferentiae utrimque aequales sumtae sint, et circuli etiam aequales ponantur) etiam circumferentia, quae ex altero sumta est, semicirculus, adeoque rectae subtendentes diametri. Sin

Ἐπεζεύχθω ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω διχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $AB$  εὐθείᾳ πρὸς ὁρθεὰς ἤχθω ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΔ$ ,  $\Delta B$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $\Gamma B$ , κοινὴ δὲ ἡ  $\Gamma\Delta$  δύο δὲ αἱ  $ΑΓ$ ,  $\Gamma\Delta$  ὅσοι ταῖς  $BΓ$ ,  $\Gamma\Delta$  ἴσαι εἰσὶν. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΓ\Delta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BΓ\Delta$  ἴση, ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρω βάσει ἄρα ἡ  $ΑΔ$  βάσει τῇ  $\Delta B$  ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  $ΑΔ$ ,  $\Delta B$  περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου ἴση ἄρα ἡ  $ΑΔ$  περιφέρειᾳ τῇ  $\Delta B$  περιφερείᾳ.

autem aequales sint circumferentiae  $BHΓ$ ,  $EΘZ$ , erunt, quum circuli aequales sint, etiam reliquae circumferentiae  $BAΓ$ ,  $EAZ$  aequales, et quum, ut Euclides ostendit, aequales sint anguli ad centrum, adeoque etiam anguli ad peripheriam, segmenta haec erunt similia (III. Def. 11.). Et haec propositio pariter valet, si aequales circumferentiae in eodem circulo sumtae sint. Hinc consequitur

Cor. 1. Rectae  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  (Fig. 255.) ita ductae ut III. 26. Cor. 2. aequales sunt.

Cor. 2. Si vero in aequalibus circulis, vel in eodem circulo inaequalia segmenta sumta fuerint, dum utrumque minus est semicirculo, recta, quae minori segmento subtenditur, minor est ea, quae maiori subtenditur; in segmentis contra, quae utrimque semicirculo maiora sunt, contrarium obtinet. E. Clavio.

Obs. 2. Idem Clavius et ante eum Commandinus sequentes adiciunt propositiones, quas sufficiat hic subiungere:

A.

Circuli, e quibus aequales rectae auferunt similia segmenta, aequales sunt.



Iungatur  $AB$ , et secetur bifariam in  $F$  (I. 10.), et a puncto  $F$  rectae  $AB$  ad rectos angulos ducatur  $FB$  (I. 11.), et iungantur  $AF$ ,  $AB$ .

Ex quoniam  $AF$  aequalis est  $FB$ , communis autem  $FA$ ; duae igitur  $AF$ ,  $FA$  duabus  $BF$ ,  $FA$  aequales sunt. Et angulus  $AFB$  angulo  $BFA$  aequalis, rectus enim uterque; basis igitur  $AB$  basi  $AB$  aequalis est (I. 4.). Aequales autem rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori (III. 28.); et est utraque ipsarum  $AA$ ,  $AB$  circumferentiarum minor semicirculo; igitur circumferentia  $AA$  circumferentiæ  $AB$  aequalis erit.

B.

Ex circulis inaequalibus aequales rectae dissimiles circumferentias auferunt.

C.

Rectae, quae ex circulis inaequalibus similes circumferentias auferunt, inaequales sunt.

D.

Rectae, quae ex quibuscunque circulis circumferentias similes inaequales auferunt, inaequales sunt.

Obs. 3. Ope huius propositionis varia adhuc theorematum demonstrari possunt, e quibus sequentia huc referenda videntur. 1) Si divisus sit circulus in sex partes aequales in  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $Z$  (Fig. 266.) — fieri id posse, infra ex IV. 15. patebit — ducanturque  $FE$ ,  $BZ$ , ponantur  $AF$ ,  $AE$ , occurrentes rectae  $BZ$  in  $\Theta$ ,  $H$ , dico rectam  $BZ$  trifariam esse divisam. Nempe ob aequales circumferentias  $AF$ ,  $FE$ ,  $EA$  erunt et rectae  $AF$ ,  $FE$ ,  $EA$  aequales (III. 29.), adeoque erit triangulum  $AFE$  aequilaterum, adeoque aequiangulum (I. 6. Cor.), et, quum arcus  $BF$ ,  $EZ$  sint aequales, erit  $BZ$  parallela rectae  $FE$  (III. 27. Cor. 1.), adeoque anguli  $A\Theta H$ ,  $A\Theta E$  aequales angulis  $F$ ,  $E$  (I. 29.), unde et triangulum  $A\Theta H$  erit aequiangulum, adeoque (I. 6. Cor.) aequilaterum.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια διχα τέτμηται κατὰ τὸ  $\Delta$  σημείον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ᾽.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν, ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττω ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστίν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττω ὀρθῆς.

Et, quum sit angulus  $AB\theta = B\theta A$  (I. 27.), erit  $B\theta = A\theta$  (I. 6.)  $= \theta H$ . Eodemque modo ostenditur, esse  $ZH = H\theta$ : itaque recta  $BZ$  in punctis  $\theta$ ,  $H$  trifariam divisa est. Est haec propositio Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circul. p. 169: Cf. Krafti Geom. Sublim. p. 79. et Gilbert. p. 132. 2) Si duo aequales circuli se intersecent in  $A$  et  $B$  (Fig. 267, et ex uno intersectionum puncto  $A$  describatur circulus, qui utrumque reliquorum circulorum secet, unum in  $\Delta$ , alterum in  $\Gamma$ , puncta  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  in eadem recta erunt. Ducantur enim rectae  $AB$ ,  $\Delta B$ , et  $\Delta \Gamma$  secet circulum  $A\Delta B$  in  $Z$ : et, quum angulus  $AB\Delta$  sit in utroque circulorum aequalium, arcus  $A\Delta$ ,  $AZ$ , quibus insistit, aequales erunt (III. 26.), adeoque etiam rectae  $A\Delta$ ,  $AZ$ , quae hos arcus subtendunt, aequales erunt (III. 29.) i. e. punctum  $Z$  erit in circulo, centro  $A$  radio  $A\Delta$  descripto: idem vero ex hypothesis est etiam in circulo  $A\Delta B$ , ergo erit in utroque circulo, i. a. cum puncto intersectionis  $\Gamma$  coincidet. Est haec Gregorii a St. Vinc. III. 1. p. 167. ubi plures casus speciatim expositi sunt. Cf. Gilbert. p. 158.

### PROPOSITIO XXX.

Obs. Circumferentiarum  $A\Delta$ ,  $\Delta B$  esse, ut in demonstratione dicitur, utramque minorem semicirculo, inde patet, quod ex III. 1. Cor. 1. recta  $\Gamma\Delta$ , si opus est producta per centrum transit, adeoque ex altera parte rectae  $AB$  demum

Ergo data circumferentia bifariam secta est in puncto  $A$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XXXI. (Fig. 269.)

In circulo, angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in maiore segmento, minor recto; qui autem in minore segmento maior recto. Et insuper maioris segmenti angulus maior est recto; minoris vero segmenti angulus minor recto.

circulo iterum occurrit, et semicirculum subtendit, cuius itaque pars est circumferentia  $AA$  vel  $BA$ . Plura hinc deduci possunt consecutaria:

Cor. 1. Recta, quae chordam circuli (ita vocant rectam circuli segmento subtensam) bifariam et ad angulos rectos secat, aut, quod eodem redit (III. I. Cor. 1.) diameter circuli per mediam chordam ducta, aut diameter, quae chordae ad angulos rectos ducitur, bifariam dividit utrumque segmentum, cui chorda illa subtenditur.

Cor. 2. Diameter, quae alterutrum arcum a chorda subtensum bifariam dividit, bifariam dividit quoque alterum, patet ac chordam, atque huic est ad angulos rectos.

Cor. 3. Recta, quae duos chordae alicui oppositos arcus bifariam dividit, est diameter, quae chordam bisecat, ipsoque ad angulos rectos insistit.

Cor. 4. Recta, quae chordam aliquam, et unum arcum, cui illa subtenditur, bisecat, est diameter, quae chordae ad angulos rectos insistit, et oppositum quoque arcum bisecat.

Cor. 5. Idem valet de perpendiculari ex puncto arcus alicuius in oppositam ipsi chordam demisso.

Cor. 6. Repetita problematis applicatione arcus circuli quicumque in quatuor, octo, sedecim et generaliter  $2n$  partes aequales dividitur. (Sunt haec omnia e schedis Pfeidereri.)

$Aa$

"Εστω κύκλος ὁ  $ABΓΔ$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ  $ΒΓ$ , κέντρον δὲ τὸ  $Ε$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ ,  $ΔΓ$ . Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ  $ΒΑΓ$  ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ  $ΑΒΓ$  μείζουσι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ , ἐλάττω ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ  $ΑΔΓ$  ἐλάττω τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  μείζουσι ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ  $ΑΕ$ , καὶ διήχθω ἡ  $ΒΑ$  ἐπὶ τὸ  $Ζ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΒΕ$  τῇ  $ΕΑ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΒΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΑΕ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓΕ$  τῇ  $ΕΑ$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΓΑΕ$ . ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $ΑΒΕ$ ,  $ΑΓΕ$  ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΖΑΓ$  ἐκτὸς τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΓΒ$  γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΖΑΓ$ , ὀρθή ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ  $ΒΑΓ$  ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  ὀρθή ἐστίν.

#### PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Circa ea, quae ad finem huius propositionis de angulo segmenti maioris aut minoris semicirculo dicuntur, eadem valent, quae in excursu ad hunc librum de segmento semicirculi ad Prop. 16. diximus, unde videmus etiam, qui ultimam propositionis 16. partem pro spuria habent: et idcirco omittunt, huius quoque ultimam partem ex pari ratione omittunt. Praeterea, quam in Prop. 31. doctrina de angulis in segmentis, quam Prop. 20. 21. Euclides exhibere coeperat, absolvatur, ad plenioram autem Prop. 26. expositionem contraria Prop. 31. pertinere videatur, ut ad Prop. 26. monuimus, neque tamen Prop. 31. ante III. 22. ad quam illa recurrebat, poni possit, verisimile fuerit, ab ipso auctore Prop. 31. forte statim post III. 22. positam fuisse, e quo ordine forte postea, quum III. 26. mutilata fuisset, mota, et ante II.

Sit circulus  $AB\Gamma A$ , diameter autem ipsius sit  $B\Gamma$ , centrum vero  $E$ , et iungantur  $BA$ ,  $A\Gamma$ ,  $AA$ ,  $A\Gamma$ ; dico angulum  $BAG$  in semicirculo  $BAG$  rectum esse; angulum autem  $AB\Gamma$  in segmento  $AB\Gamma$  semicirculo maiore minorem recto; angulum vero  $AA\Gamma$  in segmento  $AA\Gamma$  semicirculo minore maiorem esse recto.

Iungatur  $AE$ , et producat  $BA$  ad  $Z$ .

Est quoniam  $BE$  aequalis est  $EA$ , aequalis est et angulus  $ABE$ , angulo  $BAE$  (I. 5.). Rursus, quoniam  $TE$  aequalis est  $EA$ , aequalis est et  $AGE$  angulo  $TAE$  (I. 5.); totus igitur  $BAG$  duobus  $AB\Gamma$ ,  $A\Gamma B$  aequalis est. Est autem et angulus  $ZAG$ , extra triangulum  $AB\Gamma$ , duobus angulis  $AB\Gamma$ ,  $A\Gamma B$  aequalis (I. 32.); aequalis igitur et angulus  $BAG$  angulo  $ZAG$ ; rectus igitur uterque (I. Def. 10.); angulus igitur  $BAG$  in semicirculo  $BAG$  rectus est.

In qua nunc primum adhibetur, posita fuit. Ita de hac re indicat Pfeiderer. in sched. mscpt. Cf. Thes. inaugur. 1391. Th. 2. sqq. Eam, quae secundo loco ponitur, demonstrationem omittit Rob. Simson., Austin. contra ex ea illud quoque deducit, quod angulus in maiore segmento minor recto, angulus autem in minore segmento maior sit recto. Idem iudicat, Corollarium vulgo additum non huc pertinere, sed ad I. 32., cui propositioni etiam nos illud, paulo generalius, ut Cor. 5. subiunximus. Et manifestum est, contrarium quoque propositionis III. 31. locum habere. Nempe, si angulus aliquis ad peripheriam rectus sit, erit in semicirculo; si sit acutus, vel minor recto, erit in segmento maiore; si obtusus, vel maior recto, erit in segmento minore, quod facile, summo contrario, demonstrabitur. Ita Clavius. Potest

Καὶ ἐπεὶ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $BAΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάττωις εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ  $ABΓ$  μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ  $ABΓA$  τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίας γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $AAΓ$  δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Καὶ ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AAΓ$  γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ  $AAΓ$  ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς  $ABΓ$  περιφέρειας καὶ τῆς  $ΑΓ$  εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττωτος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς  $AAΓ$  περιφέρειας καὶ τῆς  $ΑΓ$  εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

autem etiam directe demonstrari. Idem Clavius alique sequentia addunt corollaria.

Cor. 2. In triangulo rectangulo  $BAΓ$  (Fig. 270.) si hypotenusa  $BΓ$  bisecetur in  $E$ , et centro  $E$  radio  $EB=EF$  describatur circulus, transibit ille per  $A$  verticem anguli recti, vel, ut aliter dicamus; circulus super  $BΓ$  descriptus est locus verticum omnium triangulorum rectangulorum super  $BΓ$  descriptorum. Quam enim angulus  $BAΓ$  rectus sit, erit angulus  $ABΓ$  minor recto (I. 17. Cor. 1.), adeoque circulus radio  $EB$  descriptus cum recta  $BA$  iterum conveniet (III. 16. Cor. 2.). Et quidem convenire cum ea debet in puncto  $A$ . Si enim non in  $A$  conveniat, conveniet cum recta  $BA$  in puncto aliquo ab  $A$  diverso v. c. in  $A$ , eritque angulus  $BAΓ$  rectus, utpote in semicirculo situs (III. 31.). Idem vero etiam maior est angulo recto  $BAΓ$  (I. 16.) q. e. a. Eodem modo ostenditur, circulum rectam  $BA$  non secare in puncto

Et quoniam trianguli  $AB\Gamma$  duo anguli  $AB\Gamma$ ,  $BA\Gamma$  duobus rectis minores sunt (I. 17.); rectus autem  $BA\Gamma$ ; minor igitur recto est angulus  $AB\Gamma$ ; atque est in segmento  $AB\Gamma$  semicirculo maiore.

Et quoniam  $AB\Gamma A$  est quadrilaterum in circulo, quadrilaterorum autem in circulis anguli oppositi duobus rectis aequales sunt (III. 22.), anguli  $AB\Gamma$ ,  $AA\Gamma$  duobus rectis aequales sunt. Et  $AB\Gamma$  minor est recto; reliquus igitur angulus  $AA\Gamma$  maior recto est, et est in segmento  $AA\Gamma$  semicirculo minore.

Dico praeterea maioris quidem segmenti angulum comprehensum ab  $AB\Gamma$  circumferentia et  $A\Gamma$  recta, maiorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum ab  $AA\Gamma$  circumferentia et  $A\Gamma$  recta, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quo-

aliquo  $Z$  in recta  $BA$  ultra  $A$  producta. Secabit ergo in  $A$ .

Cor. 3. Facilius hinc emergit ratio solvendi problema, quod habetur §u III. 17. Prop., descripto nempe super recta  $AE$  (Fig. 233.) circulo, qui, quum ex Cor. 2. transire debeat per puncta  $B$ ,  $\Theta$  in circulo dato  $\Gamma BA$ , puncta haec assignabitis, ad quae ex  $A$  rectae contingentes  $AB$ ,  $A\Theta$  duci possunt. simili modo solvetur problema, quod habuimus in III. 17. Obs. 4. descripto super recta  $Aa$  (Fig. 236.) semicirculo, qui punctum  $\delta$  designabit. Pari ratione solvetur problema I. 47. Cor. 10.: describere quadratum, quod aequale sit differentiae duorum quadratorum.

Cor. 4. Quadrilaterum in circulo inscriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela (Fig. 271.) parallelogrammum est rectangulum. E Clavio, et Pappi Collect. Mathem. in III. §2. Prop. cf. quae diximus ad III. 22. Obs. 2. et ad III. 22. Obs. 5. Quum enim ex hypoth. sint  $AB$ ,  $\Gamma A$  parallelae,

θῆς. Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AF$  εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἔστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς  $ABF$  περιφερείας καὶ τῆς  $AF$  εὐθείας περιεχομένη μείζων ἔστιν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν  $AF$ ,  $AZ$  εὐθειῶν ὀρθὴ ἔστιν ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς  $FA$  εὐθείας καὶ τῆς  $AGA$  περιφερείας περιεχομένη ἐλάττω ἔστιν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

### Α Α Α Ω Σ.

Ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ  $BAF$ . Ἐπὶ διπλῇ ἔστιν ἡ ὑπὸ  $AEF$  τῆς ὑπὸ  $BAE$ , ἴση γὰρ

erunt (III. 26. Cor. 1.) arcus  $BEG$ ,  $AZA$  aequales. Eodem modo ostenditur, aequales esse arcus  $A\theta B$ ,  $\Delta H\Gamma$ : erit itaque  $ABF$  semicirculus, adeoque angulus  $B$  rectus (III. 31.); eodemque modo res de reliquis angulis demonstrabitur.

Cor. 5. Si per centrum  $A$  circuli alicuius (Fig. 272. a. b. c.) circulus describatur, et per utriusque circuli centrum recta ducatur, quae posteriorem circulum secet in  $Z$ , si deinde ex puncto  $Z$  ducatur recta quaecunque, quae priorem circulum secet in  $B$ ,  $\Gamma$ : pars illius  $BI'$  intra priorem circulum contenta a posteriore secabitur bifariam in puncto aliquo  $E$ . Clavius et Pappi Collect. Mathem. VII. 91. vel ad Inclin. L. II. ad Probl. 24. cf. Gilbert. p. 158. Ducta enim  $AE$ , erit angulus  $AEZ$  rectus (III. 31.) quippe in semicirculo constitutus, adeoque recta  $BE$  in  $E$  bifariam secatur (III. 5.).

Cor. 6. Si recta aliqua  $BA$  (Fig. 269.) in circulo non transeat per centrum, adeoque circulum in segmenta inaequalia secet (Obs. ad I. 17. 18. Def.) ducaturque diameter  $BI'$ , iuncta  $AI'$ , angulus  $AI'B$  in maiore segmento differet ab angulo recto (nempe minor eo erit) angulo  $ABF$ , quem chorda  $AB$  cum diametro  $BI'$  comprehendit. Et quum angulus in segmento ad oppositas partes rectae  $AB$  posito rectum angulum



niam enim angulus a  $BA$ ,  $AF$  rectis comprehensus rectus est, qui ab  $ABF$  circumferentia et  $AF$  recta comprehenditur, maior est recto. Rursus, quoniam angulus ab  $AF$ ,  $AZ$  rectis comprehensus rectus est, qui a  $FA$  recta, et  $AFI$  circumferentia comprehenditur, minor est recto. In circulo igitur etc.

## A L I T E R.

Demonstratur angulum  $BAF$  rectum esse. Quoniam angulus  $AEF$  duplus est anguli  $BAE$ , aequalis

eadem quantitate superet, qua angulus  $BFA$  minor est recto (III. 22.), angulus in opposito isto segmento pariter differet ab angulo recto (maior eo erit) angulo  $ABF$ . Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book III. Prop. 16.

Obs. 2. Aliter propositionis III. 31. pars prima ita effertur potest: Si duae rectae  $AB$ ,  $AF$  circulo inscriptae (Fig. 269.) atque ex eodem in circulo puncto  $A$  exeuntes rectum angulum efficiant, summa quadratorum earum aequale est quadrato diametri. Nempe, quum ex I. 47. summa quadratorum earum aequale sit quadrato hypotenusae  $BF$ , quod ita effertur, nihil aliud dicit, quam hypotensam  $BF$  esse simul diametrum circuli, sive  $BAF$  esse semicirculum. Potest autem inde deduci generalior propositio, nempe: si duae rectae circulo inscriptae  $AE$ ,  $BA$  (Fig. 273. a. b.) se invicem in puncto aliquo  $\Gamma$ , sive intra, sive extra circulum posito ita secant, ut angulum rectum comprehendant, erit summa quadratorum rectarum e puncto sectionis usque ad puncta, in quibus circulo occurrunt, aequalis quadrato diametri. Omissa eo casu, quo altera rectarum  $AE$ ,  $BA$  per centrum transit, qui nihil difficultatis habet, ducantur rectae  $AA$ ,  $AE$ ,  $EB$ ,  $BA$  et diameter  $AZ$ , ac iungatur  $AZ$ , critque (Fig. 273. a.) angul.  $AAZ$

δυοὶ ταῖς ἐντός καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $AEB$  διπλὴ τῆς ὑπὸ  $EAG$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $AEB$ ,  $AEG$  διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ  $BAG$ . Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $AEB$ ,  $AEG$  δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ  $BAG$  ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

### Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυοῖν ἴσῃ ἢ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς<sup>1)</sup> ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. (Ὅταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ᾧσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.

### Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ λβ.

Ἐὰν κύκλου ἐφαπτηταί τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεΐα τέμνουσα τὸν κύκλον, ὥς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

1) Hanc lectionem ἐφεξῆς ex edd. Oxon. et Basil. restitimus. Peyrardus e Cod. a ponit τὴν ἐκείνης ἐντός. At haec lectio ad sequens: ἐφεξῆς non quadrat, et praeterea esse debebat τὴν ἐκείνου ἐκτός, quum angulus exterior nunquam ad alium angulum, sed ad triangulum referatur.

$\angle A\Gamma\Gamma$  ex III. 22. Cor. 1. Et, quum angulus  $\angle A\Gamma Z$ , upote rectus (III. 31.) aequalis sit angulo  $\angle A\Gamma B$  ex hypothesis quippe recto, erit reliquus angulus  $\angle A\Gamma Z = \angle A\Gamma B$  (I. 32.), adeoque arcus  $AZ =$  arcui  $EB$  (III. 26.), et recta  $AZ =$  rectae  $EB$  (III. 29.). Est autem in triangulo rectangulo  $\angle A\Gamma Z$  ex I. 47.  $\angle A\Gamma q + \angle AZ q = \angle A\Gamma q$ , itaque  $\angle A\Gamma q + \angle EB q = \angle A\Gamma q$ . At  $\angle A\Gamma q = \angle A\Gamma q + \angle A\Gamma q$  (I. 47.), et  $\angle EB q = \angle E\Gamma q + \angle B\Gamma q$ : itaque  $\angle A\Gamma q + \angle A\Gamma q + \angle E\Gamma q + \angle B\Gamma q = \angle A\Gamma q$ . Et, quum etiam sit  $\angle EB q = \angle A\Gamma q + \angle E\Gamma q$ , et  $\angle AB q = \angle A\Gamma q + \angle B\Gamma q$ , erit etiam  $\angle EB q + \angle AB q = \angle A\Gamma q$ .

enim duobus interioribus et oppositis (I. 32.); est autem et angulus  $AEB$  duplus anguli  $EAF$ ; anguli igitur  $AEB$ ,  $AET$  dupli sunt anguli  $BAF$ . Sed anguli  $AEB$ ,  $AET$  duobus rectis aequales sunt (I. 13.); ergo  $BAF$  rectus est. Quod oportebat ostendere.

## COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si unus angulus trianguli duobus aequalis sit, rectum esse angulum, propterea quod eius angulus deinceps iisdem est aequalis. Quando autem ipsi deinceps sunt aequales, recti sunt (I. Def. 10.)

## PROPOSITIO XXXII. (Fig. 274.)

Si aliqua recta circulum contingat, a contactu autem ducatur aliqua recta circulum secans, anguli, quos haec cum contingente facit, aequales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Casu itaque (Fig. 273. a.) utraque summa quadratorum laterum oppositorum quadranguli  $ABED$  separatim sumta aequalis erit quadrato diametri, casu autem (Fig. 273. b.) eidem quadrato diametri aequalis erit tam summa quadratorum laterum oppositorum  $AD$ ,  $EB$  (quae interposita sunt iis, quae producta angulum rectum efficiunt), quam summa quadratorum diagonalium  $AE$ ,  $AB$ . Praeterea, si ex centro  $\Theta$  demittantur in  $AB$ ,  $AE$  perpendiculares  $\Theta H$ ,  $\Theta K$ , quae chordas  $AB$ ,  $AE$  bisecabunt (III. 3.), ductaque  $\Theta \Gamma$ , erit (Fig. 273. a.)  $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q + 2\Delta\Gamma \times \Gamma B$  (II. 4.). At  $\Delta\Gamma \times \Gamma B = \Delta H q - H\Gamma q$  (II. 5.), adeoque erit  $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q + 2\Delta H q - 2H\Gamma q$ . Eodemque modo  $AEq = A\Gamma q + \Gamma E q + 2EK q - 2K\Gamma q$ , adeoque  $ABq + AEq = A\Gamma q + A\Gamma q + B\Gamma q + \Gamma E q + 2\Delta H q + 2EK q - (2H\Gamma q + 2K\Gamma q)$ , vel, ob  $\Delta\Gamma q + A\Gamma q + B\Gamma q + \Gamma E q = AZq$

Κύκλου γάρ τοῦ  $ΑΒΓΔ$  ἐφαπτιέσθω τις εὐθεία ἡ  $ΕΖ$  κατὰ τὸ  $Β$  σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ  $Β$  σημείου δ' ἄρχῃ τις εὐθεία εἰς τὸν  $ΑΒΓΔ$  κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ  $ΒΔ$  λέγω ὅτι ὡς ποιεῖ γωνίας ἡ  $ΒΔ$  μετὰ τῆς  $ΕΖ$  ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τοντέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $ΖΒΔ$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ  $ΒΑΔ$  τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ  $ΑΒΕ$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ  $ΔΓΒ$  τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ  $Β$  τῇ  $ΕΖ$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΒΑ$ , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $ΒΔ$  περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ  $Γ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔΓ$ ,  $ΓΒ$ .

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ  $ΑΒΓΔ$  ἐφάπτεται τις εὐθεία  $ΕΖ$  κατὰ τὸ  $Β$ , ἀπὸ δὲ τῆς ἀρχῆς ἵκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΒΑ$ , ἐπὶ τῆς  $ΒΑ$  ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓΔ$  κύκλου <sup>1)</sup>· ἡ ἄρα ὑπὸ  $ΑΔΒ$  γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ  $ΒΑΔ$ ,  $ΑΒΔ$  μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΒΖ$  ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ  $ΑΒΖ$  ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ  $ΒΑΔ$ ,  $ΑΒΔ$ . Κοινὴ ἀφελήσθω ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΒΖ$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ  $ΒΑΔ$ .

1) Peyrardus o Cod. a addit: ἡ  $ΒΑ$  ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓΔ$  κύκλου. Edd. Oxon. et Basil. haec verba omittunt.

ex demonstrat. et  $ΗΓq + ΚΓq = ΗΓq + ΘΗq = ΘΓq$ , erit  $ΑΒq + ΑΕq = ΑΖq + 2ΔΗq + 2ΕΚq - 2ΘΓq = ΑΖq + 2ΔΗq + 2ΘΗq + 2ΕΚq + 2ΘΚq - (2ΘΗq + 2ΘΚq) - 2ΘΓq = ΑΖq + 2ΔΘq + 2ΘΑq - 4ΘΓq = ΑΖq + 4ΘΖq - 4ΘΓq = 2ΑΖq - 4ΘΓq$ . Unde efficitur  $ΑΒq + ΑΕq + 4ΘΓq = 2ΑΖq$  i. e. = summae quadratorum chordarum  $ΑΒ$ ,  $ΑΕ$ , quae inter se angulum rectum efficiunt, si adicias quadruplum quadratum rectae  $ΘΓ$  inter centrum et punctum intersectionis chordarum contentae, effi-

Circulum enim  $AB\Gamma A$  contingat aliqua recta  $EZ$  in puncto  $B$ , et a puncto  $B$  ducatur aliqua recta  $AB$  secans circulum  $AB\Gamma A$ ; dico, angulos, quos facit  $BA$  cum contingente  $EZ$  aequales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est angulum quidem  $ZBA$  aequalem esse angulo in segmento  $BAA$  constituto, angulum vero  $ABE$  aequalem esse angulo in segmento  $AGB$  constituto.

Ducatur enim a  $B$  ipsi  $EZ$  ad rectos angulos  $BA$  (I. 11.), et sumatur in circumferentia  $BA$  quodlibet punctum  $\Gamma$ , et iungantur  $AA$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$ .

Et quoniam circulum  $AB\Gamma A$  contingit aliqua recta  $EZ$  in  $B$ , a contactu autem ducta est tangenti ad rectos angulos  $BA$ , in  $BA$  centrum est circuli  $AB\Gamma A$  (III. 19.); ergo angulus  $AAB$  in semicirculo constitutus rectus est (III. 31.); reliqui igitur  $BAA$ ,  $ABA$  uni recto aequales sunt (I. 32.). Est autem et  $ABZ$  rectus; ergo  $ABZ$  aequalis est ipsis  $BAA$ ,  $ABA$ . Communis auferatur  $ABA$ ; reliquus igitur  $ABZ$  angulus aequalis est angulo  $BAA$  in alterno circuli segmento. Et quoniam in circulo quadrilaterum est

citur duplum quadratum diametri. Et similiter in fig. 273. b. erit  $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q - 2A\Gamma \times \Gamma B$  (II. 7.), at  $A\Gamma \times \Gamma B = B\Gamma q - A\Gamma q$  (II. 6.), adeoque  $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q + 2A\Gamma q - 2B\Gamma q$ . Eodemque modo  $AEq = A\Gamma q + \Gamma E q + 2EK q - 2K\Gamma q$ , unde deinde reliqua eodem modo consequuntur ac in fig. 273. a. Denique observari potest, casu fig. 273. a. esse arcum  $AAA + BE = AAA + AZ =$  semicirculo, i. e. circumferentias  $AAA + BE$  simul semicirculum efficere, adeoque etiam reliquas sibi oppositas circumferentias  $AB + AE$  simul aequales esse semicirculo, casu autem fig. 273. b. esse circumferentias  $AZA - ZA$  i. e.  $AZA - BE =$  semicirculo, vel etiam circumferentias

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ  $AB\Gamma A$ , αἱ ὑπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δύοιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $\angle BZ$ ,  $\angle BE$  δύοιν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ  $\angle BZ$ ,  $\angle BE$  ταῖς ὑπὸ  $\angle BAA$ ,  $\angle \Gamma A$  ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ  $\angle BAA$  τῇ ὑπὸ  $\angle BZ$  ἐδείχθη ἴση λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\angle BE$  τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ  $\angle \Gamma B$ , τῇ ὑπὸ  $\angle \Gamma B$  γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

$ABA+BE=ABA+AZ=$  semicirculo. Cf. Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circuli L. III. Prop. 77. Carnot. de la Corrélat. des fig. de Géom. p. 98. sqq. et Géom. de position §. 132., ubi tamen falsa est, observante Pflaiderero, propositionis enuntiatio; Gilbert. Geometrie p. 375. sqq. et van Swinden Anfangsgr. der Messk. p. 306. sqq.

### PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Distingui debent, ut Clavius, Borellius, Tacquet et Coëtsius monuerunt, duo casus, prout recta  $BA$  ipsa ad rectos angulos est rectae  $EBZ$ , aut non. Prior quoque nihil difficultatis habet.

Cor. 1. Angulus, quem recta circulum contingens cum recta secante circulum in puncto contactus prioris rectae efficit, dimidius est anguli ad centrum segmento circuli ad eandem partes sumto insistentis (III. 20.).

Cor. 2. Si recta ducatur, quae puncta contactus duarum rectarum circulum contingentium coniungit, recta haec iuncta angulos cum utraque contingente aequales efficiet. Quorum si uterque rectus sit, adeoque contingentes parallelae (I. 28.), recta iuncta erit diameter (III. 17. Cor. 2.): sin autem hi an-

$ABTA$ , oppositi eius anguli duobus rectis aequales sunt (III. 22.). Sunt autem et ipsi  $ABZ$ ,  $ABE$  duobus rectis aequales (I. 13.); ipsi igitur  $ABZ$ ,  $ABE$  ipsis  $BAA$ ,  $BTA$  aequales sunt, quorum  $BAA$  ipsi  $ABZ$  ostensus est aequalis; reliquus igitur  $ABE$  angulo  $ATB$  in alterno circuli segmento  $ATB$  aequalis est. Si igitur circulum etc.

### PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 276.)

Super data recta describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

guli obliqui, adeoque versus unam partem rectae iunctae minores duobus rectis fuerint, contingentes ex hac parte convenient (Ax. 11. vel Post. 5. I.), eruntque inter se aequales (I. 6.).

Cor. 3. In aequalibus circulis, aut in uno eodemque circulo, quae ad extremitates duarum chordarum ducuntur rectae circulos contingentes, aequales cum his chordis angulos efficiunt.

Cor. 4. Quum duo circuli, qui se in puncto aliquo contingunt, semper ab una eademque recta in hoc puncto contingantur (III. 17. Obs. 2.) patet, rectam, quae per hoc commune contactus punctum ita ducitur, ut utrumque circulum secet, arcus ab iis abscindere, qui angulos aequales capiunt, i. e. similia abscindere segmenta. Cf. Pappi Collect. Mathem. L. IV. Lemm. ad Prop. VIII. et L. VII. Prop. CII. et CVII. vel in Apollon. de Taction. Lemm. VII. et XI. et Gilbert. p. 162.

Obs. 2. Conversa quoque valet. Nempe, si recta aliqua circulo in aliquo puncto occurrat, a puncto autem occursum ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem haec rectae inter se efficiunt, aequalis angulo in alterno circuli

"Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἐνθ' ἑνὸς σημείου ἢ πρὸς τῷ  $\Gamma$  διὰ δὴ ἐπὶ τῆς δοθεῖσας εὐθείας τῆς  $AB$  γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ . Ἡ δὲ πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνία ἥτοι ὀξεῖα ἐστὶν ἢ ὀρθή ἢ ἀμβλεία.

"Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεσταῖτω πρὸς τῇ  $AB$  εὐθεῖα καὶ τῷ  $A$  σημείῳ τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνία ἴση ἢ ὑπὸ  $BA\Gamma$  ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $BAA$ . Καὶ ἤχθω τῇ  $AA$  ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου πρὸς ὀρθάς ἡ  $AE$ , καὶ τεμνέσθω ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $Z$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθάς ἡ  $ZH$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ZH$ , δύο δὴ αἱ  $AZ$ ,  $ZH$  δυοὶ ταῖς  $ZB$ ,  $ZH$  ἴσαι εἶσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AZH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BZH$  ἴση βάσις ἄρα ἡ  $AH$  βάσει τῇ  $HB$  ἴση ἐστὶν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι δὲ τῷ  $HA$ , κύκλος γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τοῦ  $B$ . Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ  $ABE$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $BE$ . Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς  $AE$  διαμέτρον, ἀπὸ τοῦ  $A$ , τῇ  $AE$  πρὸς ὀρθάς ἐστὶν ἡ  $AA$ , ἡ  $AA$  ἄρα ἐγάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ  $ABE$  ἐγάπτεται τις εὐθεῖα ἡ  $AA$ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $A$  ἀφῆς εἰς τὸν  $ABE$  κύκλον διήκται τις εὐθεῖα ἡ  $AB$  ἡ ἄρα ὑπὸ  $LAB$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $AEB$ . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $LAB$  τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἐστὶν

segmento, prior recta circulum in puncto occursum continget, quod facile demonstrabitur, sumto contrario. Hinc consequuntur

Cor. 1. Si recta aliqua circulo occurrat, et e puncto concursus ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem habet rectae inter se efficiunt, aequalis dimidio angulo



Sit data recta  $AB$ , datus autem angulus rectilineus ad  $\Gamma$ ; oportet super data recta  $AB$  describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem ei, qui est ad  $\Gamma$ . Est autem angulus ad  $\Gamma$  vel acutus, vel rectus, vel obtusus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, et constituantur ad rectam  $AB$  et ad punctum  $A$ , angulo ad  $\Gamma$  aequalis ipse  $BAA$  (I. 23.); acutus igitur est et  $BAA$ . Ducatur (I. 10.) ipsi  $AA$  ab puncto  $A$  ad rectos angulos recta  $AE$ , et secetur  $AB$  bifariam in  $Z$ , et ducatur a puncto  $Z$  ipsi  $AB$  ad rectos angulos recta  $ZH$ , et iungatur  $HB$ . Et quoniam aequalis est  $AZ$  ipsi  $ZB$ , communis autem  $ZH$ , duae  $AZ$ ,  $ZH$  duabus  $ZB$ ,  $ZH$  aequales sunt, et angulus  $AZH$  angulo  $BZH$  aequalis; basis igitur  $AH$  basi  $HB$  aequalis est (I. 4.). Ergo centro  $H$ , intervallo vero  $HA$ , circulus descriptus transibit et per  $B$ . Describatur, et sit  $ABE$ , et iungatur  $BE$ . Quoniam igitur ab extremitate  $A$  ipsius  $AE$  diametri ipsi  $AE$  ad rectos angulos est  $AA$ , recta  $AA$  contingit circulum (III. 16.). Quoniam igitur circulum  $ABE$  tangit aliqua recta  $AA$ , et a contactu ad  $A$  in circulum  $ABE$  ducta est aliqua  $AB$ , angulus  $AAB$  aequalis est angulo  $AEB$  in alterno circuli segmento (III. 32.) Sed  $AAB$  angulo ad  $\Gamma$  est aequalis; angulus igitur ad  $\Gamma$  aequalis est angulo  $AEB$ . Super data igitur recta ad centrum segmento circuli ad easdem partes sumto insistenti, prior recta circulum continget.

Cor. 2. Si duae rectae, quae circulo occurrunt, cum chorda, quae occursus puncta coniungit, aequales angulos ex eadem parte faciant, una autem earum circulum contingat, altera quoque eum continget.

ἴση καὶ ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $AEB$ . Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς  $AB$  τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ  $AEB$ , δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ  $AEB$  ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ .

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  καὶ δεῖον ἔστω πάλιν ἐπὶ τῆς  $AB$  γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ὀρθῇ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ὀρθῇ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $BAA$ , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $Z$ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ ὅποτέρῳ τῶν  $ZA$ ,  $ZB$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $AEB$ . Ἐφάπτεται ἄρα ἡ  $AA$  εὐθεία τοῦ  $ABE$  κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ  $A$  γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $BAA$  γωνία τῇ ἐν τῷ  $AEB$  τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὔσῃ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ  $BAA$  τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἴση ἐστίν. Καὶ ἡ ἐν τῷ  $AEB$  τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς  $AB$  τμήμα κύκλου τὸ  $AEB$ , δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ .

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἀμβλεία ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τῷ  $A$  σημείῳ ἡ ὑπὸ  $BAA$ , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ  $AA$  πρὸς ὀρθὰς ἤχθῃ ἡ  $AE$ , καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $Z$ , καὶ τῇ  $AB$  πρὸς

Cor. 3. In eodem circulo aut in circulis aequalibus si ad extremitates aequalium chordarum ducantur rectae, quae aequales cum illis ad easdem partes angulos efficiunt, atque una ductarum circulum, ad quem ducta est, contingat, continget etiam altera cum, ad quem ducta est, circulum.

Cor. 4. Si duo circuli in puncto aliquo conveniant, et recta per illud punctum commune ducta ab utroque segmenta similia abscindat (e diversis rectae partibus, siquidem illa cir-

$AB$  segmentum circuli descriptum est  $AEB$ , capiens angulum  $AEB$  aequalem dato angulo ad  $\Gamma$ .

Sit deinde angulus ad  $\Gamma$  rectus; et oporteat rursus super  $AB$  describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem angulo recto ad  $\Gamma$ . Constituatur rursus angulo ad  $\Gamma$  recto aequalis  $BAA$  (I. 23.) ut in secunda figura, et secetur  $AB$  bifariam in  $Z$  (I. 10.), et centro  $Z$ , intervallo vero alterutra ipsarum  $AZ$ ,  $ZB$ , circulus describatur  $AEB$ ; contingit igitur recta  $AA$  circum  $ABE$ , quod rectus est angulus ad  $A$  (III. 16.). Et aequali est angulus  $BAA$  angulo in segmento  $AEB$ , rectus enim et ipse est in semicirculo consistens (III. 31.). Sed  $BAA$  angulo ad  $\Gamma$  aequalis est; angulus igitur in segmento  $AEB$  aequalis est angulo ad  $\Gamma$ . Descriptum est igitur rursus super  $AB$  segmentum circuli  $AEB$ , capiens angulum aequalem angulo ad  $\Gamma$ .

Sit denique angulus ad  $\Gamma$  obtusus, et constituatur ipsi aequalis ad rectam  $BA$  et ad punctum  $A$  angulus  $BAA$  (I. 23.), ut in tertia figura, et rectae  $AA$  ad angulos rectos ducatur  $AE$  (I. 10.), et secetur rursus  $AB$  bifariam in  $Z$ , et ipsi  $AB$  ad angulos rectos du-

culos e diversis puncti communis partibus secet: ex eadem rectae parte autem, si illa circulos ex eadem puncti communis parte secet, circuli in hoc puncto se contingunt. Quod demonstrabitur, ducta recta, quae unum horum circulorum in isto puncto contingat.  $EE$  enim, ut facile patet, continget etiam alterum, hinc circuli se contingunt (Obs. 3. ad III. 18.).

#### PROPOSITIO XXXIII.

Obs. Duo tantum, ut monet Rob. Simson. casus distin-

Bb

ὀρθὰς ἴχθω ἡ  $ZH$ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ πα-  
 λιν ἴση ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$ , καὶ κοινὴ ἡ  $ZH$ , δύο δὲ  
 αἱ  $AZ$ ,  $ZH$  δυοὶ καὶς  $BZ$ ,  $ZH$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ  
 γωνία ἡ ὑπὸ  $AZH$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BZH$  ἴση· βάσις  
 ἄρα ἡ  $AH$  βάσει τῇ  $BH$  ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρον  
 μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι δὲ τῷ  $HA$ , κύκλος γραφόμε-  
 νος ἦξει καὶ διὰ τοῦ  $B$ . Ἐρχέσθω ὡς ὁ  $AEB$ .  
 Καὶ ἐπεὶ τῇ  $AE$  διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς  
 ἦκται ἡ  $AD$ , ἡ  $AD$  ἄρα ἐράπτεται τοῦ  $AEB$  κύ-  
 κλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $A$  ἐπαφῆς διήκται ἡ  
 $AB$  ἡ ἄρα ὑπὸ  $BAD$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλ-  
 λὰς τοῦ κύκλου τμήματι τῷ  $AQB$  συνισταμένῃ γωνίᾳ.  
 Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $BAD$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  ἴση ἐστὶ  
 καὶ ἡ ἐν τῷ  $AQB$  ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ  
 πρὸς τῷ  $\Gamma$ . Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς  $AB$   
 γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ  $AQB$ , δεχόμενον γωνίαν  
 ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελὲν, δε-  
 χόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

guendi sunt, prout angulus datus vel rectus fuerit, vel obli-  
 quus. Et, si rectus fuerit, sufficit cum Clavio et Rob. Sim-  
 son. semicirculum super data recta describere. Ex his ratio-  
 nibus Rob. Simson. vulgarem demonstrationem ab imperito  
 aliquo depravatam putat. Caeterum paullo diversam solutio-  
 nem habent Campanus, Clavius, Peletarius, Borellius, qui  
 nempe rectam  $AB$ , si angulus datus obliquus sit, non bise-  
 care, nec perpendicularum super ea erigere iubent, sed ad  $B$   
 angulum  $ABH=BAH$  constituunt, quod, ut facile patet,  
 eodem redit. In solutione Euclideae ostendendum erat, quod  
 facile fieri potest, rectas  $ZH$ ,  $AE$  necessario convenire. In-

catur  $ZH$ , et iungatur  $HB$ . Et quoniam rursus aequalis est  $AZ$ , ipsi  $ZB$ , e communis  $ZH$ , duae  $AZ$   $ZH$  duabus  $BZ$ ,  $ZH$  aequales sunt, et angulus  $AZH$ , angulo  $BZH$  aequalis; basis igitur  $AH$  basi  $BH$  aequalis est (I. 4.). Ergo circulus centro  $H$ , intervallo vero  $HA$ , descriptus transibit et per  $B$ . Transeat ut  $AEB$ . Et quoniam diametro  $AB$  ab extremitate ad rectos angulos ducta est  $AA$ , ipsa  $AA$  contingit circulum  $AEB$  (III. 16.). Et a contactu ad  $A$  ducta est  $AB$ ; ergo angulus  $BAA$  aequalis est angulo constituto in alterno circuli segmento  $AQB$ . Sed angulus  $BAA$  angulo ad  $\Gamma$  aequalis est. Et angulus in segmento  $AQB$  aequalis est angulo ad  $\Gamma$ . Ergo super datam rectam  $AB$  descriptum est segmentum circuli  $AQB$ , capiens angulum aequalem angulo ad  $\Gamma$ . Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 276.)

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

signis huius problematis usus est in solvendis quam plurimis problematibus v. g. in iis, in quibus trianguli alicuius describendi basis, et angulus basi oppositus dantur, vel ex datis derivari possunt. Tum enim, si aliud adhuc trianguli elementum cognitum fuerit vel generalius, si alia adhuc determinatio accesserit, quae cum istis coniuncta ad efficiendum triangulum sufficiat, facilis plerumque erit trianguli constructio. Exempla habentur in appendice ad Data Euclid. ed. a Schwab. Probl. 2. 5. 26. et in append. Version. German. Lector. Planor. Apollonii Probl. 1. 5. 15. Caeterum aliam sq-

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ  $ABΓ$ , ἡ δὲ δοθεὶσα γωνία εὐθυγράμμωσεν ἢ πρὸς τῷ  $Δ$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμωσεν τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ .

Ἦχθω τοῦ  $ABΓ$  κύκλου ἐφαπτομένη ἡ  $EZ$  κατὰ τὸ  $B$  σημεῖον, καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ  $EZ$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $B$  τῇ πρὸς τῷ  $Δ$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $ZBΓ$ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ  $ABΓ$  ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ  $EZ$ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $B$  ἐπαφῆς διήκει ἡ  $BΓ$  ἡ ὑπὸ  $ZBΓ$  ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ  $BAΓ$  ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἄλλ' ἡ ὑπὸ  $ZBΓ$  τῇ πρὸς τῷ  $Δ$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ  $BAΓ$  ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ  $Δ$  γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ  $ABΓ$  τμήμα ἀφίηται τὸ  $BAΓ$ , δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμωσεν τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

lutionem huius problematis habet Thom. Simpson. Elem. of Geom. B. 5. Probl. XXII. iunixam Cor. 6. ad III. 31.

### PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Huius quoque problematis is casus facilius expediri potest, quo angulus datus rectus est. Tum nempe nihil opus est recta contingente, sed quaevis circuli diameter propositum efficit. Alia etiam problematis solutio peti potest ex

Sit datus circulus  $AB\Gamma$ , datus vero angulus rectilineus ad  $A$ ; oportet a circulo  $AB\Gamma$  segmentum auferre, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad  $A$ .

Ducatur recta  $EZ$  circulum  $AB\Gamma$  contingens ad punctum  $B$  (III. 17.), et constituatur ad rectam  $EZ$  et ad punctum in ea  $B$  angulus  $ZB\Gamma$  aequalis angulo ad  $A$  (I. 23.).

Quoniam igitur circulum  $AB\Gamma$  contingit aliqua recta  $EZ$ , et a contactu ad  $B$  ducta est  $B\Gamma$ ; angulus  $ZB\Gamma$  aequalis est angulo constituto in  $BA\Gamma$  alterno segmento (III. 32.). Sed  $ZB\Gamma$  angulo ad  $A$  aequalis est; angulus itaque in segmento  $BA\Gamma$  aequalis est angulo ad  $A$ .

A dato igitur circulo  $BA\Gamma$  segmentum ablatum est  $BA\Gamma$ , capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad  $A$ . Quod oportebat facere.

#### PROPOSITIO XXXV. (Fig. 277.)

Si in circulo duae rectae sese secant, rectangulum contentum sub segmentis unius aequale est rectangulo sub alterius segmentis contento.

III. 20. Sufficiet nempe ad centrum circuli constituere angulum duplum eius, qui datus est. Et, quum punctum  $B$  nullum determinatum in circulo dato locum obtineat, vel, quum infinite variari possit situs anguli ad centrum, qui duplus sit anguli dati, patet, novam addi posse determinationem, v. c. si quis iubeat, ut recta  $BI'$  parallela sit alii rectae datae.

#### PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Distinctio casuum plenius ita erat instituenda.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ  $ABΓΔ$  δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  περνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  διὰ τοῦ κέντρου εἰσιν, ὥστε τὸ  $E$  κέντρον εἶναι τοῦ  $ABΓΔ$  κύκλου φανερόν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$ , καὶ τὰ ὑπὸ τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΔΒ$  διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ  $ABΓΔ$  κύκλου, καὶ ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὰς  $ΑΓ$ ,  $ΔΒ$  εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ  $ZH$ ,  $ZΘ$ , καὶ ἐπέξευχθωσαν αἱ  $ZB$ ,  $ZΓ$ ,  $ZE$ .

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ  $ZH$  εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν  $ΑΓ$  πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα ἡ  $AH$  τῇ  $HΓ$ . Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ  $ΑΓ$  τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ  $H$ , εἰς δὲ ἄγιστα κατὰ τὸ  $E$ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $HE$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $HΓ$ . Προσέσθω κοινὸν τὸ ἀπὸ τῆς  $HZ$  τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΕ$ ,  $ΕΓ$  μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν  $ZH$ ,  $HE$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΓH$ ,  $HZ$ . Ἀλλὰ τοῖς

Vel 1) utraque rectarum circulo inscriptarum per centrum transit, vel 2) alterutra tantum, vel 3) neutra. Casum 2. omissum esse a Theodone sine dubio, queritur. Rob. Simson, neque enim id ab Euclide factum videri, haberi enim cum casum 1. omnium facillimum, et in sequente propositione separatim demonstrare casum, quo recta per centrum transeat.



In circulo enim  $AB\Gamma A$  duae rectae  $AT$ ,  $BA$  sese secant in puncto  $E$ ; dico rectangulum sub  $AE$ ,  $ET$  contentum aequale esse rectangulo sub  $AE$ ,  $EB$  contento.

Si igitur  $AT$ ,  $BA$  per centrum transeant (Fig. 277, a.), ita ut  $E$  centrum sit circuli  $AB\Gamma A$ ; manifestum est aequalibus existentibus  $AE$ ,  $ET$ ,  $AE$ ,  $EB$ , et ipsum sub  $AE$ ,  $ET$  contentum rectangulum aequale esse rectangulo sub  $AE$ ,  $EB$  contento.

Non autem transeant  $AT$ ,  $AB$  per centrum (Fig. 277, b.), et sumatur centrum circuli  $AB\Gamma A$  (III. 1.), et sit  $Z$ , et a  $Z$  ad  $AT$ ,  $AB$  rectas perpendiculares ducantur  $ZH$ ,  $Z\Theta$  (I. 12.); et iungantur  $ZB$ ,  $Z\Gamma$ ,  $ZE$ .

Et quoniam recta aliqua  $ZH$  per centrum rectam aliquam  $AT$  non per centrum ductam ad rectos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.); aequalis igitur  $AH$  ipsi  $HT$ . Quoniam igitur  $AT$  secta est in aequalia quidem in  $H$ , in inaequalia vero in  $E$ , rectangulum sub  $AE$ ,  $ET$  contentum cum quadrato ex  $HE$  aequale est quadrato ex  $HT$  (II. 5.). Commune addatur quadratum ex  $HZ$ ; rectangulum igitur sub  $AE$ ,  $ET$  cum quadratis ex  $ZH$ ,  $HE$  aequale est quadratis ex  $TH$ ,  $HZ$ . Sed quadratis ex  $EH$ ,  $HZ$  est aequale

Et habet omnino eum casum Campanus, qui eum deinde patenter ac Clavius, Henrion,, Coëtsius, Playfair, et Rob. Simson, in duos casus particulares distinguit, prout nempe ea, quae per centrum transit, alteram bifariam dividit aut non. Tertia denique casus ab iisdem facile reducit ad secundum, ducta nempe diametro per punctum, in quo duae rectae, quae

μὲν ἀπὸ τῶν  $EH$ ,  $HZ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ZE$ , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $GH$ ,  $HZ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ZΓ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EF$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZE$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ZΓ$ . Ἰση δὲ ἡ  $ZΓ$  τῇ  $ZB$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EF$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $EZ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ZB$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZE$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ZB$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EF$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZE$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ZB$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EF$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZE$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZE$ . Κοινὸν ἀφηγήσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $ZE$  λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EF$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται

non per centrum transeunt, se intersecant. Aliam huius propositionis demonstrationem vide apud Grisson.: Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Berlin 1814—1815. p. 56. Generaliter, observante Pfeiderero, omnium casuum demonstrationes derivari possunt ex sequente propositione, quae vicissim ex nostra hac deduci potest: Si qua recta circulo inscripta in puncto aliquo secetur utcumque rectangulum eius partium, una cum quadrato rectae, quae e centro ad punctum sectionis ducitur, aequale est quadrato radii. Cf. Gilbert. p. 357. et 359. Alii aliam Prop. 35. et 36. enunciationem et demonstrationem e doctrina de triangulis similibus petunt v. c. Whiston.

quadratum ex  $ZE$  (l. 47.), quadratis vero ex  $IH$ ,  $HZ$  aequale est quadratum ex  $ZI$  (l. 47.); rectangulum igitur sub  $AE$ ,  $EF$  cum quadrato ex  $ZE$ , aequale est quadrato  $ZI$ . Aequalis autem  $ZI$  ipsi  $ZB$ , rectangulum igitur sub  $AE$ ,  $EF$  cum quadrato ex  $EZ$  aequale est quadrato ex  $ZB$ . Ex eadem ratione et rectangulum sub  $AE$ ,  $EB$  cum quadrato ex  $ZE$  aequale est quadrato ex  $ZB$ . Ostensum est autem et rectangulum sub  $AE$ ,  $EF$  cum quadrato ex  $ZE$  aequale esse quadrato ex  $ZB$ ; rectangulum igitur sub  $AE$ ,  $EF$  cum quadrato ex  $ZE$  aequale est rectangulo sub  $AE$ ,  $EB$  cum quadrato ex  $ZE$ . Commune auferatur quadratum ex  $ZE$ ; reliquum igitur sub  $AE$ ,  $EF$  contentum rectangulum aequale est rectangulo sub  $AE$ ,  $EB$  contento. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 278.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit re-

apud Tacquet in III. 35. et Coësius. Vid. ad VI. 16. et. 17. Obs. 6. 7.

Cor. Si rectae quocunque circulo inscriptae se in uno eodemque puncto intersecant, rectangula sub segmentis cuiusque earum inter se erunt aequalia.

Obs. 2. Clavio monente conversa quoque propositionis III. 35. valet, quod facile, descripto circulo per tria quaecunque puncta extrema quatuor illorum segmentorum, per absurdum demonstratur. Ea contra, quae in praecedente corollario continetur, propositio generalior converti nequit. Conularium asserit Gilbert. l. c. p. 365.

ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ  $AB\Gamma$  εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον προσπιπέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ  $\Delta\Gamma A$ ,  $\Delta B$ · καὶ ἡ μὲν  $\Delta\Gamma A$  τεμνέτω τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον, ἡ δὲ  $\Delta B$  ἐφαπτόθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta B$  τετραγώνῳ. Ἢ ἂρα  $\Delta\Gamma A$  ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.

Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ  $Z$  κέντρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ZB$ · ὀρθὴ ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ  $ZB\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ  $\Delta\Gamma$  δίχα τέτμηται κατὰ τὸ  $Z$ , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ  $\Gamma\Gamma$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $Z\Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $Z\Delta$ . Ἰση δὲ  $Z\Gamma$  τῇ  $ZB$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZB$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $Z\Delta$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $Z\Delta$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $ZB$ ,  $B\Delta$ , ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ  $ZB\Delta$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ZB$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ZB$ ,  $B\Delta$ . Κοινὸν ἀφρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $ZB$ · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta B$  ἐφαπτομένης.

#### PROPOSITIO XXXVI.

Obs. 1. Ad generalem rei demonstrationem, observante Pfleiderero, adhiberi potest etiam haec propositio: si ad punctum aliquod extra circulum in recta circulum secante e centro ducatur recta, erit rectangulum ex integra secante et parte eius exteriori, una cum quadrato radii, aequale quadrato rectae e centro ad illud punctum ductae. Cf. Gilbert. p. 357. et 359.

ctangulum sub tota secante et exteriori segmento inter punctum et convexam circumferentiam contentum aequale quadrato ex contingente.

Extra circulum  $AB\Gamma$  sumatur aliquod punctum  $A$ , et a  $A$  ad  $AB\Gamma$  circulum cadant duae rectae  $A\Gamma A$ ,  $AB$ , et ipsa quidem  $A\Gamma A$  secet circulum  $AB\Gamma$ , ipsa vero  $AB$  contingat; dico rectangulum sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  contentum aequale esse quadrato ex  $AB$ . Ipsa igitur  $A\Gamma A$  vel per centrum transit vel non.

Transeat primum per centrum (Fig. 278. a.), et sit  $Z$  centrum circuli  $AB\Gamma$ , et iungatur  $ZB$ ; rectus igitur est  $ZBA$  (III. 18.). Et quoniam recta  $A\Gamma$  bifariam secta est in  $Z$ , adliicitur vero ipsi  $\Gamma A$ ; rectangulum sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $Z\Gamma$  aequale est quadrato ex  $ZA$  (II. 6.). Aequalis autem  $Z\Gamma$  ipsi  $ZB$ ; rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $ZB$  aequale est quadrato ex  $ZA$ . Quadrato vero ex  $ZA$  aequalia sunt quadrata ex  $ZB$ ,  $BA$  (I. 47.), rectus enim angulus  $ZBA$  (III. 18.); rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $ZB$  aequale est quadratis ex  $ZB$ ,  $BA$ . Commune auferatur quadratum ex  $ZB$ , reliquum igitur rectangulum sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  aequale est quadrato ex contingente  $AB$ .

Cor. 1. Si ex eodem puncto extra circulum ducantur plures rectae, quae circulum secant, rectangula sub unaquaque earum integra et parte eius exteriori inter se sunt aequalia. Quodvis enim eiusmodi rectangulum aequale est quadrato contingentis ex isto puncto ad circulum ductae. Cf. Clavius, Tacquet, Gilbert alii.

Cor. 2. Utramque propositionem III. 35. Cor. et III. 36.

Ἀλλὰ δὴ ἡ  $\Delta Γ Α$  μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ  $Ε$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὴν  $ΑΓ$  κάθετος ᾗχθω ἡ  $ΕΖ$ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΕΔ$  ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΕΖΔ$ . Καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ  $ΕΖ$  εὐθεΐαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν  $ΑΓ$  πρὸς ὁρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ  $ΑΖ$  ἄρα τῇ  $ΖΓ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεΐα ἡ  $ΑΓ$  τέμνεται δίχα κατὰ τὸ  $Ζ$  σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ  $ΓΔ$  τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΖΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΖΔ$ . Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $ΖΕ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$  μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν  $ΓΖ$ ,  $ΖΕ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΑΖ$ ,  $ΖΕ$ . Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΓΖ$ ,  $ΖΕ$  ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς  $ΕΓ$ , ὁρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ  $ΕΖΓ$  γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $ΑΖ$ ,  $ΖΕ$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΕΔ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΕΔ$ . Ἰση δὲ ἡ  $ΕΓ$  τῇ  $ΕΒ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΒ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΕΔ$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $ΕΔ$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $ΕΒ$ ,  $ΒΔ$ , ὁρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ  $ΕΒΔ$  γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΑΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΒ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $ΕΒ$ ,  $ΒΔ$ .

Cor. 1. uno enunciato comprehendere licet. Nempe, si e puncto aliquo sive, intra sive extra circulum sito ad circulum ducantur plures rectae, quae eum secant, rectangula e partibus cuiusque earum inter punctum [et circulum] comprehensibilia erunt aequalia. Et potest ipsa etiam III. 36. sub hoc enunciato, vel sub Cor. 1. comprehendi: nempe, si recta iam non secet circulum, sed contingat, duo sectionis puncta in unum contactus punctum coincidunt, et rectangulum sub partibus inter punctum et circulum comprehensibile abit in quadratum contingentis, quod observat Coëtsius ad III. 36. Schol. 2. Pariter, quae ad III. 35. Obs. 1. et III. 36. Obs. 1.

Sed  $\Delta\Gamma A$  non transeat per centrum circuli  $AB\Gamma$  (Fig. 278. b.), et sumatur centrum  $E$ , et ex  $E$  ad  $A\Gamma$  perpendicularis ducatur  $EZ$  (I. 12.), et iungantur  $EB$ ,  $E\Gamma$ ,  $EA$ ; rectus igitur est  $EZA$ . Et quoniam recta aliqua  $EZ$  per centrum rectam aliquam  $A\Gamma$  non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit (III. 3.);  $AZ$  igitur ipsi  $Z\Gamma$  est aequalis. Et quoniam recta  $A\Gamma$  secatur bifariam in puncto  $Z$ , adiicitur vero ipsi  $\Gamma A$ ; rectangulum sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $Z\Gamma$  aequale est quadrato ex  $ZA$  (II. 6.). Commune addatur quadratum ex  $ZE$ ; rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadratis ex  $AZ$ ,  $ZE$  aequale est quadratis ex  $AZ$ ,  $ZE$ . Sed quadratis ex  $AZ$ ,  $ZE$  aequale est quadratum ex  $E\Gamma$  (I. 47.), rectus enim est angulus  $EZF$ ; quadratis autem ex  $AZ$ ,  $ZE$  aequale est quadratum ex  $EA$  (I. 47.). Rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $E\Gamma$  aequale est quadrato ex  $EA$ . Aequalis autem  $E\Gamma$  ipsi  $EB$ ; rectangulum igitur  $AA$ ,  $A\Gamma$  cum quadrato ex  $EB$  aequale est quadrato ex  $EA$ . Quadrato autem ex  $EA$  aequalia sunt quadrata ex  $EB$ ,  $BA$  (I. 47.), rectus enim angulus  $EBA$ ; rectangulum igitur sub  $AA$ ,  $A\Gamma$

continentur propositiones, uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Gilbert. l. c.

Obs. 2. Si e puncto dato ductae sint duae tantum rectae, ita ut rectangula comprehensa sub totis, et sub segmentis puncto isti adiacentibus sint aequalia, poterit vicissim per quatuor puncta extrema reliquorum segmentorum circulis describi. Circulo nempe per tria horum punctorum descripto, ostendetur per absurdum, eum non posse non per quantum quoque transire. Sin autem e puncto dato plures duabus rectis exeant, Cor. 1. ita converti nequit. Contrarium habet Gilbert. l. c.

κέντρον ἀγχιγρῖσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $EB$ . λοιπὸν ἀρα τὸ ὑπὸ τῶν  $AA$ ,  $ΔΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ . Ἐὰν ἔρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἔκτος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἣ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνουσῆς καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσῃς ἢ προσπίπτουσα ἐφαίψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ  $ABΓ$  εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ  $Δ$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Δ$  πρὸς τὸν  $ABΓ$  κύκλον προσπιπτεύσαν δύο εὐθεῖαι αἱ  $ΔΓΑ$ ,  $ΔΒ$ , καὶ ἡ μὲν  $ΔΓΑ$  τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ  $ΔΒ$  προσπιπτεύα, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AA$ ,  $ΔΓ$  ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ . λέγω ὅτι ἡ  $ΔΒ$  ἐφαίπτεται τοῦ  $ABΓ$  κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ  $ABΓ$  ἐφαπτομένη ἡ  $ΔΕ$ , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ  $ABΓ$  κύκλου, καὶ ἔστω τὸ  $Z$ , καὶ ἐπεξεύχωσαν αἱ  $ZE$ ,  $ZB$ ,  $ZA$ . ἡ ἀρα ὑπὸ  $ZEA$  ὀρθή ἐστιν.

Obs. 3. Si in fig. 278. a rectam  $AA$  consideremus ut summam rectarum  $ZA$ , et  $ZB$ , rectam autem  $ΔΓ$  ut differentiam earum, propositio huius casus ita quoque enunciari potest; in omni triangulo rectangulo  $ABZ$  rectangulum ex hypotenuse  $ZA$  et unius lateris  $ZB$  summa ac differentia æquatur quadrato lateris alterius  $AB$ , quod consentit cum II. 4. Cor 4. Cf. Whiston. apud Tacquet. ad h. l.

Obs. 4. Pariter ea pars Cor. 1., qua una rectarum, quæ circulum secant, per centrum transit, ita exprimi poterit: si (Fig. 279. a. b.) ab angulo  $E$  trianguli alicuius  $EAA$ , cuius



cum quadrato ex  $EB$  aequale est quadratis ex  $EB$ ,  $BA$ . Commune auferatur quadratum ex  $EB$ ; reliquum igitur rectangulum sub  $AA$ ,  $AT$  aequale est quadrato ex  $AB$ . Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 280.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero in eum incidat, sit autem rectangulum sub tota secante et exteriore segmento inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; incidens continget circulum.

Extra circulum  $ABT$  sumatur aliquod punctum  $A$ , et ex  $A$  in circulum  $ABT$  incidant duae rectae  $ATA$ ,  $AB$ , et ipsa quidem  $ATA$  secet circulum, ipsa vero  $AB$  in eum incidat, sit autem rectangulum sub  $AA$ ,  $AT$  aequale quadrato ex  $AB$ , dico ipsam  $AB$  contingere circulum  $ABT$ .

Ducatur enim rectae  $AE$  circulum  $ABT$  contingens (III. 17.), et sumatur centrum circuli  $ABT$  (III. 1.), et sit  $Z$ , et iungantur  $ZE$ ,  $ZB$ ,  $ZA$ ; angulus igitur  $ZEA$  rectus est (III. 18.).

latera  $EA$ ,  $ET$  sunt inaequalia, demittatur in basin (si opus sit productam) perpendicularum  $EZ$ , erit rectangulum  $EA \times AH$  sub summa et differentia laterum  $EA$ ,  $BT$  aequale rectangulo  $TA \times AA$  sub summa et differentia rectarum  $ZA$ ,  $ZA$  inter perpendicularum et angulos basis interceptarum. Cf. Whiston. l. c. Haec ipsa propositio, eodem monente, casu, qui in figura priore sistitur, etiam ita exprimi potest: si ab angulo  $E$  trianguli  $AEA$  demittitur perpendicularis in basin  $AA$ , eam dividens in duo segmenta  $AZ$ ,  $AZ$ ; erit rectangulum sub summa et differentia laterum  $EA$ ,  $EA$  aequale rectangulo sub basi  $AA$ , et differentia segmentorum basis  $TA$

Καὶ ἐπεὶ ἡ  $\Delta E$  ἐφάπτεται τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου, τέμνεται δὲ ἡ  $\Delta\Gamma A$  τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $\Delta\Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta E$ . Ὑπόκειται δὲ <sup>1)</sup> τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta A$ ,  $\Delta\Gamma$  ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta B$ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Delta E$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta B$ . ἴση ἄρα ἡ  $\Delta E$  τῇ  $\Delta B$ . Ἔστι δὲ καὶ ἡ  $ZE$  τῇ  $ZB$  ἴση, δύο δὴ αἱ  $\Delta E$ ,  $EZ$  δυοὶ ταῖς  $\Delta B$ ,  $BZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ  $Z\Delta$ . Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta EZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta BZ$  ἐστὶν ἴση. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $\Delta EZ$  ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $\Delta BZ$ . Καὶ ἐστὶν ἡ  $BZ$  ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου ἡ  $\Delta B$  ἄρα ἐφάπτεται <sup>2)</sup> τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Ὁμοίως δὲ δευχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς  $A\Gamma$  τυγχάνη <sup>3)</sup>. Ἐν ἄρα κύκλῳ καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Pro ὑπόκειται δὲ Peyrardus ex Cod. a minus accurate habet: ἦν δὲ καὶ.

2) Verba inter utrumque ἐφάπτεται e Cod. a iure addidit Peyrardus.

3) Verba: ὁμοίως δὲ δευχθήσεται — τυγχάνη Rob. Simson. ab editore quodam inscite addita esse putat.

#### PROPOSITIO XXXVII.

Obs. Est haec propositio conversa praecedentis. Campanus eam aliter duplici modo demonstrat, vel apagogice, dum sumit, ex eadem rectae  $AZ$  parte aliam contingentem ductam esse, vel directe, dum nempe rectangulum e segmen-

Et quoniam  $\triangle E$  contingit circulum  $AB\Gamma$ , secat autem  $\triangle A$ ; rectangulum sub  $AA$ ,  $\triangle A$  aequale est quadrato ex  $\triangle E$  (III. 36.). Ponitur autem et rectangulum sub  $AA$ ,  $\triangle A$  aequale quadrato ex  $\triangle B$ ; quadratum igitur ex  $\triangle E$  aequale est quadrato ex  $\triangle B$ , aequalis igitur  $\triangle E$  lineae  $\triangle B$ . Est autem et  $\triangle E$  ipsi  $\triangle B$  aequalis, duae igitur  $\triangle E$ ,  $\triangle Z$  duabus  $\triangle B$ ,  $\triangle Z$  aequales sunt, et basis ipsarum communis  $\triangle A$ ; angulus igitur  $\triangle EZ$  angulo  $\triangle BZ$  est aequalis (I. 8.) Rectus autem  $\triangle EZ$ ; rectus igitur et  $\triangle BZ$ . Et est  $\triangle Z$  producta diameter, quae vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur contingit circulum (III. 16.); recta  $\triangle B$  igitur contingit circulum  $AB\Gamma$ . Similiter autem ostendemus, et si centrum in  $\triangle A$  sit. Si igitur extra circulum etc.

is eius rectae considerat, quae per centrum transit, et ope II. 6. ostendit, esse  $\triangle B + \triangle Z = \triangle A$ , adeoque (I. 48.) angulum  $\triangle BZ$  rectum. Caeterum insignem propositiones 35—37. utilitatem, ut per omnem geometriam, ita maxime in doctrina de tactionibus habent.

Cor. Si e puncto aliquo extra circulum duae rectae aequales in circulum incident, quarum una eum contingat, continget quoque altera. Denique ad hunc librum universe notamus, multa adhuc scitu haud inincommoda ei addi potuisse, maxime e libro tertio Gregorii a St. Vincent. de quadratura circuli, quae brevitatis studio hic omisimus.

---

## EXCURSUS I.

A D

# ELEMENTORUM

I. 29.

**D**iximus ad Propos. I. 29., in qua primum adhibetur axioma undecimum, vel postulatum quintum, multum inter Geometras non quidem de veritate huius axiomatis, at de eius evidentiâ disceptatum fuisse. Et axioma quidem ipsum ita habet:

Si in duas rectas alia recta incidens angulos internos ad easdem sui partes duobus rectis minores faciat, rectae, in quas illa incidit, productae in infinitum inter se coincident (se invicem secabunt) ad eas partes, ad quas sunt anguli duobus rectis minores. Vel, ut aliter dicamus, ad has partes cum recta incidente triangulum efficient.

Ex hoc axioma manifesto consequitur, duas rectas, quae ab una quadam recta ita secantur, ut anguli interni sint duobus rectis minores, etiam sectas a quavis alia recta in punctis duobus diversis cum illa angulos internos effigere duobus rectis minores. Quum enim ex isto axioma rectae ab una aliqua recta ita sectae inter se conveniant, necessario cum alia quavis, a qua pariter in punctis duobus diversis secantur, triangulum efficient, unde ex I. 17. duo anguli interni simul minores erunt duobus rectis.

Caeterum facile patet, hoc axioma esse conversam propositionis I. 17.: et si, quod Peletarius vult, conversae propositionum, quarum veritas demonstrata est, ipsae etiam generatim verae essent, nec demonstratione egerent, nihil attineret ulterius quaerere. Id vero non ita se habere, sed conversas, nisi sua luce fulgeant, demonstratione semper sta-

biliri debere, diximus ad I. 6. et omnes logici movent. Iam hanc conversam propositionis I. 17. ex ea ipsa demonstrare quidem tentavit Castillon. (Mémoires de l'Académie de Berlin années 1788. 1789.) at manifesto irritò conatu. Ex eo nempe, quod ex I. 17. patet, *esse nonnunquam rectas*, quae ab aliqua recta ita sectae, ut anguli interni minores sint duobus rectis, concurrant, concludit, *omnes rectas*, quae ita secantur, necessario concurrere.

Neque vero cum Proclo, aliisque nonnullis dixerim, postulatum aut axioma non esse posse propositionem, cuius conversa (hic nempe I. 17.) inter theomata demonstretur (ὅτι τὸ ἀντίστροφον τῶς ἀποδείκνυται ἐν ταῖς θεωρήματι ἀναγέγραπται.) Neque enim necesse est, ut conversa propositionis, quae per se patet, adeoque nulla demonstratione eget, etiam ipsa seque clara sit. Unum videndum est, utrum assertum aliquid per se extra omnem dubitationem positum sit. Et de hoc quidem in axioma 11. multi dubitavere. Unde factum est, ut varias excogitarent rationes, vel illud axioma (plerumque alio axioma, quod ipsis evidentius videbatur, assumpto, aut etiam parallelarum definitione mutata, aut alia ratione) demonstrandi, vel sine eius ope parallelarum theoriā adstruendi. Liceat nonnullam potissimorum, quae huc pertinent, et mihi innotuerunt, tentaminum breviter commemorare. In qua re gratus fateor eximie me adiutum fuisse opera viri doctissimi mihique amicissimi, Hauberi, Seminarii Schönthalensis professoris meritiissimi, qui, quam dudum elaboravit, de theoria et historia parallelarum commentationem, quam propediem lucem publicam visuram esse spero, benevole mecum communicare, et, ut quae meis studiis inservire putarem, inde exciperem, permisit esse voluit. Et illi quidem conamina circa hanc rem facta ad certas quasdam classes referre visum fuit, consilio sane haud improbando: ego vero, quantum fieri possit, in iis certe, qui novam aliquam in hac re methodum proposuerunt: plerumque temporis rationem sequendam putavi, quo facilius pateat, quis primus aliquam demonstrandi viam tentavit; ita tamen,

ut brevitatis studio subiungerem subinde eos, qui simili modo rem tractarunt. Neque vero omnia de hac re cogitata, quae infinita fere sunt, prolixè exponere consultum fuerit, sed posteriora saltem, et maxime e libris minus obviis deprompta summam afferre statui.

Primum itaque, Proclo referente, Ptolomaeus \*) libellum singularem composuit *περὶ τῶν τὰς ἀπ' ἐκκέντρων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένων συμπίπτειν*, quo Axioma undecimum demonstrare conatus est. Eius demonstratio, quam Proclus exhibet, eo fere redit: si duae rectae parallelae ab alia recta secantur angulos internos, qui ex una parte secantis efficiantur, aut aequales esse duobus rectis, aut iis maiores aut minores. At, quod ex una parte secantis fiat, idem etiam ex altera parte, e qua rectae pariter parallelae sint, fieri debere. Unde, si ex una parte anguli interni sumantur duobus rectis maiores, maiores etiam ex altera parte fieri necesse esse; pariterque, si minores duobus rectis ex una parte fuerint, futuros etiam ex altera minores, quod utrumque absurdum sit (I. 13.). Nihil itaque restare, quam ut rectae parallelae, si ab alia quadam recta secantur, ex utraque sui parte angulos internos efficiant duobus rectis aequales. Atque ita demonstrata propositione I. 29. facile inde deducitur axioma 11. At iure in hac demonstratione, quidquid Ramus ogganniat, reprehenditur, siue causa sumi, angulos ex utraque parte rectae secantis eiusdem semper indolis esse debere, nempe vel ex utraque parte maiores recto, vel ex utraque parte minores, vel ex utraque parte duobus rectis aequales. Playfair. Elem. of Geometry p. 363. observat, niti hanc demonstrationem fundamento, ut aiunt, rationis sufficientis, nec vero esse rationem distincte expositam sumendi, quoad angulos idem ex utraque parte rectae secantis locum habere. Similem fere suppositionem invenimus etiam apud Ohmium (Kritische Beleucht. der Math. etc. 1819.),

\*) Incertum est, an is Claudius Ptolomaeus fuerit, vixit tamen Proclus post Ptolomaeum Astronomum (Klūgel. Conat. praecip. Theoriam Parallelar. demonstrandi Recens. Gott. 1763. p. IV.

qui praeterea sumit, rectas, quae se non secant, eandem positionem habere.

Ipse deinde Proclus rem ita expedire tentat, ut primum monstrat, rectam, quae e duabus rectis parallelis unam secet, secare etiam alteram, unde postea facili negotio deducit axioma 11. In quo ita ille procedit, ut sumat cum Aristotele, duas rectas, quae ex uno eodemque puncto sub aliquo angulo exeant, si in infinitum producantur, discedere a se invicem ad distantiam data quavis maiorem. Inde porro efficit, posse itaque rectam, quae e duabus parallelis unam secet, ad distantiam produci maiorem ea, qua altera parallela ab ea distet, adeoque necessario etiam hanc alteram parallelam secare. Circa hanc demonstrationem Borellius (Euclid. restitut. p. 30.), Saccherius (Euclid. ab omni naevo vindicatus p. 31.), Klitgel. (Conat. praecip. etc. p. IV. sq.) monent, Proclo, qui in reliquis Euclidean parallelarum notionem retineat, non tamen stabilem hanc notionem videri fuisse. In hac enim demonstratione tacite eum sumere, parallelas omnes aequale aut saltem finitum intervallum servare. Cf. Hoffmann. Crit. der Parallel. Theorie I. Th. p. 22. sq.

Aliter hanc rem aggressus est Arabs, aut ut alii volunt, Persa Nassireddinus, cuius nomine exstat Arabica Euclidis Elementorum Versio impressa Romae 1591. Is inter Propos. 28. et 29. libri primi, referente Wallisio (Opera Mathem. Vol. II. p. 669. sqq.) et brevius Kaestnero (Geschichte der Mathem. I. B. p. 375. sqq.), ita fere axioma 11. demonstrare conatur. Praemittit tria Lemmata.

Lemm. 1. a) Si quaelibet duas rectae, in eodem plano positae sint (Fig. 96.) AB, CD, in quas rectae EF, GH, IK etc. ita incidunt, ut earum singulae perpendiculares sint rectae CD, rectam autem AB ita secant, ut angulorum alter acutus sit, alter obtusus, omnes puta acuti ad partes BD, obtusi autem ad partes AC: dico, duas illas rectas AB, CD propius semper accedere versus partes BD (quamdiu se mutuo non secant) et remotius distare versus partes AC: item, perpendiculares illas decrescere versus BD (usque ad inter-

sectionem) anguli vero versus AC, ita nempe, ut sit  $EF > GH$ ,  $GH > IK$  etc.

b) Item, si singulae rectae in duas illas rectas incidentes perpendiculares sint earum alteri, atque inter se continuo crescant, prout propius ad unas partes duarum illarum rectarum assumantur, decrescant vero ad alteras partes: etiam illae duae rectae AB, CD remotius ab invicem abscedunt ex ea parte, ubi perpendiculares illae longiores fiunt, propius autem ex altera parte inter se accedunt, dum se mutuo intersecant. — Perpendicularium autem illarum quaelibet eam duarum rectarum, cui non sumebantur perpendiculares esse, secabit angulis duobus, altero acuto, altero obtuso, omnesque anguli illi acuti versus eas partes erunt, quae propius accedunt duae illae rectae, omnes autem obtusi versus partes contrarias. Suntque hae duae propositiones manifestae, atque a quibusdam geometricis ita usurpantur, ut quae pro manifestis habendae sint. Non sine ratione Vallisius addit: „Esto. At, inquam, equis non facilius conceperit, ut clarum: duas rectas in eodem plano convergentes, tandem, si producantur, occurrentes, quam hunc totum apparatus.“ His addiderim, ut pateat, in conditionibus nihil inesse, quod sibi ipsi contradicat, etiam in parte prioris lemmatis illud ante omnia *demonstrandum* esse, si recta EF in rectas AB, CD incidens, perpendicularis sit ad CD, cum AB autem versus BD angulum acutum, adeoque versus AC obtusum efficiat, tum reliquas ad CD perpendiculares GH, IK etc., pariter cum AB ad easdem partes BD acutos, adeoque versus AC obtusos angulos efficere. Cf. etiam Saccherius l. c. p. 38. vsq.) Kästner. l. c. Hoffmann. Crit. I. Th. p. 115. sqq.

Lemm. 2. „Si quaelibet duae rectae (Fig. 97.) AC, BD ab eiusdem rectae AB extremis et ad easdem partes ductae ipsi sint perpendiculares, atque inter se aequales, earumque extrema iungantur recta CD: erit uterque angulus ACD, BDC rectus, praeterea erit  $CD = AB$ . Nam, si v. g. ACD non sit rectus, erit vel acutus vel obtusus. Sit, si fieri potest, acutus: erit ex Lemm. I.  $AC > BD$ . At ex hyp.



etiam  $AC=BD$ . Similis erit demonstratio, si sumatur angulus  $ACD$  obtusus." (At vero ex Lemm. 1. sumi etiam debet, ut valeat consequentia, si angulus  $ACD$  fuerit acutus, *anal. etiam*  $BDC$  obtusum esse, quod simul locum habere tunc sumit, non probat Nassireddinus.) Esse autem  $CD=AB$ , si reliqua pro demonstratis sumseris, brevius ac Wallisio interprete est apud Nassireddinum demonstrabitur ita: ducta  $BC$ , quum sit  $BDC=BAC=$  recto, et  $BC$  communis, et  $BD=AC$  ex hyp. erit ex iis, quae ad I. 26. diximus,  $CD=AB$ .

Lemm. 3. In omni triangulo rectilineo tres anguli aequantur duobus rectis. Atque illud quidem, si duo priora lemmata concedantur, in triangulo  $BAC$  (Fig. 97.) ad  $AR$  rectangulo facillime probatur, erecta in  $B$  recta  $BD$  ad  $BA$  perpendiculari, sumtaque  $BD=AC$ , ubi ex Lemm. 2. figuram  $ABCD$  quatuor angulos rectos habere, et ex I. 4. triangula  $CAB$ ,  $BDC$  aequalia prorsus esse, adeoque trianguli  $CAB$  pariter ac  $BDC$  angulos duobus rectis aequales esse efficitur. Facile deinde idem in triangulis obtusangulis et acutangulis ope trianguli rectanguli demonstratur.

His praemissis denique Nassireddinus ad axioma 11. demonstrandum accedit, cuius iterum tres casus distinguit, prout recta, quae duas alias secatur, ita, ut duo anguli interni duobus rectis minores sint, cum altera earum angulum rectum aut obtusum, aut cum utraque acutum efficit. Duo casus postremo loco positi facile ex primo demonstrantur, quem breviter adhuc videbimus.

Quodsi itaque duae rectae  $AB$ ,  $CD$  (Fig. 98.) ita ab aliqua recta  $EF$  secantur, ut ea alteri earum  $CD$  sit perpendicularis, et anguli interni  $DCE$ ,  $BEC$  simul sumti sint minores duobus rectis, rectae  $AB$ ,  $CD$ , si opus sit, productae, necessario concurrent. Ex puncto quocunque  $G$  rectae  $AB$  demittatur perpendicularum in  $EF$ , quod, quum  $BEC$  ex hyp. sit angulus acutus, ex parte huius anguli cadet, adeoque vel cum perpendicularo  $CD$  coincidet, quo facto constat, quod probandum erat, vel ultra  $CD$  versus  $F$  vel inter  $E$  et  $C$  ca-

det. Si cadat ultra CD versus F, constabit propositum ex Ax. 13. et I. 27. Si cadat inter E et C. v. c. in H (Fig. 99.), sumatur rectae HE duplum KE, triplum ME etc. usque dum perveniatur ad aliquod eius multiplum OE, quod maius sit, quam CE. Pariter in recta AB sumatur rectae GE duplum IE, triplum LE etc. usque dum habeatur eius aequemultiplex NE, quoduplex OE fuit rectae HE. Iam facile demonstratur, si ex I ad EF demittatur perpendicularis Ir (ita ut punctum r rectae EF incidat) punctum r idem fore ac punctum K, pariterque perpendiculari a L . . . N in EF demissa in punctis M . . . . O cum ea convenire — quam demonstrationem a Nassireddino praetermissam esse sine causa queruntur Kaestnerus, deceptus forte versione ipsi oblata minus accurata, et qui eum sequitur, Hoffmann. Crit. I. Th. p. 123. Est enim haec demonstratio saltem in iis, quae Wallisius ex eo affert. Nempe, si ex E erigatur ad EF perpendicularum  $EP=GH$ , erit iuncta  $PG=EH$ , et  $HGP=EPG$  rectus (Lemm. 2.). Et, quia rectae EB, EF versus BF divergunt, erit perpendicularum  $Ir > GH$  (Lemm. 1.). Abscindatur  $rn=GH$ , et iungatur  $nG$ , eritque angulus  $HGn$  pariter ac  $rnG$  rectus, et  $H=Gn$  (Lemm. 2.). Et quum etiam  $HGP$  rectus sit, erunt  $nG$ ,  $GP$  in directum (I. 14.). At quum in triangulis  $IGn=EGP$  sit  $GI=GE$  ex constr. et angulus  $IGn=EGP$  (I. 15.) et angulus  $InG$  (I. 14.) pariter ac  $GPE$  rectus erit (I. 26.)  $Gn=GP=HE=HK$ . At erat  $Gn=rH$ , itaque  $rH=HK$ , i. e. puncta r et K coincidunt. Similiter monstratur, perpendiculari a L . . . N demissa in EF cum punctis M . . . . O coincidere. Quum igitur O sit ultra C positum, recta CD (quae cum ON convenire nequit I. 27.) erit intra triangulum EON, adeoque rectam EN secabit (Ax. 13.). Ingeniosam hanc demonstrationem esse, Wallisius ait, et certe, si lemmata concedantur, haud reprobanda erit. At de his dubia nostra supra expromimus.

Clavius quanquam queratur (Euclid. Elem. Libr. XV. 1591.; primam Elementorum Editionem Clavius dederat 1574.) nunquam sibi copiam factam, Euclidem Arabicum legendi,

habet tamen in sua editione Euclidis 1591. facta p. 50. sqq. demonstrationem axiomatis 11, quae cum ea, quam ex Nassireddino attulimus, multa habet communia. Alia tamen illo supponit principia quasi per se clara, aut levi aliqua illustratione egentia. Quorum est

1) Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quae in eodem cum ea plano existit, aequaliter distat, recta est.

2) Si recta linea super aliam in transversum moveatur, constituens semper in suo extremo cum ea angulos rectos, describet alterum ipsius extremum quoque lineam rectam. (Pari scopo hanc propositionem adhibuere, et demonstrare conati sunt alii v. c. Hauf\*) Leipz. Archiv für Mathem. X. Heft S. 179). Pergit deinde Clavius:

3) Si ad rectam lineam duae perpendiculares rectae lineae erigantur inter se aequales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quovis puncto huius rectae ad priorem rectam demissa utrilibet priorum perpendicularium aequalis. Ex his deinde

4) deducit eam propositionem, qua Nassireddinus pro lemmate 2, usus erat, quam etiam alio adhuc modo demonstrare Clavius tentat, nempe ita, ut ostendat

5) Si in duas rectas lineas incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, et cum altera ex eadem parte acutum, duas istas rectas minus semper inter se distare ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distare. Atque hoc quidem, quoad rem ipsam nihil aliud est, quam Nassireddini Lemm. 1. e quo deinde

\*) Idem etiam Archiv 9. Heft No. VI. alia indirecta ratione parallelarum theoriam exhibere voluit, de quo tentamine conferatur Hoffmann. Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, nebst einer Widerlegung des Hauffschen Versuchs, Offenbach 1801, et Hoffm. Crit. p. 27. sqq. Plura alia parallelarum theoriam stabiliendi tentamina a se facta repetit, novisque auct idem Hauff (Geometriae Fundamenta solida Gandae 1819., quorum editio secunda: Nova rectarum parallelarum theoria auct. C. Hauff prodiit Francofurti 1811), quae omnia tamen, ut verum fateamur, mutare nobis videntur. Nec tamen aliorum iudicium anteverendum putamus.

pariter id, quod tertio loco posuit Clavius, eodem fere modo atque apud Nassireddinum deducitur. Quocunque autem modo Clavii propositio 3. ostensa fuerit, ex ea deinde Clavius simili plane ratione, et magis forte dilucide, ac est apud Nassireddinum, axioma 11. adstruit. Hanc autem Clavii demonstrationem in iis, quae primo et secundo loco sumit, certiore esse Euclideo axiomate vix puto quemquam sibi persuasurum esse. Cf. Giordano da Bitonto Euclid. restituto p. 63. sqq. Saccher. l. c. p. 33. sqq. Hoffmann. Crit. der Parall. Theor. I. Th. p. 12. sqq. Atque in eo etiam, quod quinto loco ponitur, et cuius demonstrationem tentavit Clavius, perpendicularis ex una duarum rectarum in alteram, et ex punctis, quibus haec illi rectae occurrant, vicissim in priorem demissis, multa desiderari circa eas harum parallelarum partes, quae duobus istorum perpendicularorum interceptae sint, monet Kaestnerus, ubi de Nassireddini Lemm. 1. agit (*Geschichte der Mathem. I. B. p. 377.*) cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie p. 15. sqq. Et quamvis has lacunas aliqua ex parte exploverit Karsten. Math. theor. elem. et sublimior 1760. §. 9. neo ipse tamen demonstravit perpendiculara, quae ab una harum rectarum ad alteram ducantur, universim omnia una ex parte semper crescere, ex altera semper decrescere. Idem fere ipso auctore ingenue faterente censendum est de similibus Hoffmanni conaminibus (*Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, 1801. cf. eiusd. Krit. der Parall. Theorie 1807. I. Th. p. 263. sq.*) qui tamen primus directe demonstrationem, in qua paucae forte supplenda fuerint, dedit, qua ostenditur, ex uno crure cuiusvis anguli acuti in alterum perpendicularum demitti posse, quod sit quavis data maius. Borellius etiam (Euclid. restitut. Pis. 1658. p. 32. sqq.) Clavii axioma 2. retinet, tum vero, quod Euclidis definitionem parallelarum, qua rectae in infinitum productae nusquam concurrere dicuntur, valde remotam et incomprehensibilem parallelarum passionem continere putabat, aliam earum definitionem substituit, quas nempe dicit esse in eodem plano sitas rectas, ad quas eadem aliqua recta perpendicularis sit. Deinde ex eo, quod diximus, axio-

nate demonstrat, si una aliqua recta ad alias duas perpendiculares sit, reliquas etiam omnes, quae ad unam parallelarum perpendiculares sint, perpendiculares fore etiam ad alteram. Hinc deinde propositionem I. 29. et axiom. 11. reliquasque, quae inde pendent, propositiones deducit, satis tamen modeste iudicat, se, si non solidius, saltem facilius ac brevius passionem parallelarum demonstrasse. Et sane id, quod ex Clavio sumit, axioma vix satis tutum fuerit.

Italus deinde Vitale Giordano da Bitonto (Euclide restituo Rom. 1680.) pariter Euclidis parallelarum definitionem reprehendit, quod negativa tantum sit (quod ipsum praeter alios etiam Hauff. repetit), nec veram earum indolem exprimat, unde ita eas definit, esse rectas, quae in eodem plano ex utraque parte in infinitum productae nec ad se invicem accedant, nec recedant, quarum rectarum possibilitatem se postea extensurum esse spondet. Ipsam deinde parallelarum theoriam sequentibus propositionibus adstruere conatur.

1) „Si duae rectae (Fig. 100.) CA, DB sub angulis aequalibus incident in tertiam aliquam rectam AB, et sit  $AC = BD$ , erit etiam perpendicularum CE ex C in AB demissum aequale perpendicularo DF ex D in AB demisso. Contra vero, si sit  $AC > BD$ , erit et  $CE > DF$ .“

2) „Si in figura quadrilatera (Fig. 97.) ABCD aequales rectae AC, BD sub aequalibus angulis rectae AB insistant, erunt etiam reliqui anguli C et D aequales.“ Atque has quidem duae propositiones facillime demonstrantur ab auctore.

3) Recta, cuius puncta extrema per aliquam curvam transiunt, spatium cum ea comprehendit.“

4) „Recta, quae per duo puncta alicuius curvae ducitur, ex parte eius concava transit.“

5) Perpendiculara, quae o punctis quibuscunque curvae alicuius in rectam quamcunque demittuntur, nequeunt omnia inter se esse aequalia. Iungantur enim ex parte cava curvae (Fig. 101.) duo puncta quaecunque A, C, recta AC, in quam ex puncto aliquo B curvae demittatur perpendicularis BD, ex

A erigatur ad AC perpendicularis AG, sumatur in recta DB producta punctum quodcunque F et fiat  $AG=DF$  iungaturque GF. Iam rectae AG, DF aut perpendiculares sunt ad GF aut non. Si perpendiculares sint, constat propositum, ob  $AG=DF > BF$ . Sin autem non sint perpendiculares, erunt certe ex 2. anguli G, F aequales: unde, quum  $AG > BF$ , erunt etiam ex 1. perpendiculara ex A et B in GF demissa inaequalia, unde iterum constat propositum. Et quum punctum F pariter ac puncta A, C in curva pro lubitu sumi possint, patet omnino, innumeras rectas GF dari, de quibus valeat propositum. Ita saltem ille concludere debebat, ut monet Klügel, (Conat. praecip. p. XX.) non autem, ut apud Italum nostrum est, perpendiculara in rectam quamcunque a curvae punctis demissa non posse omnia inter se esse aequalia.

6) „Si duae rectae aequales AB, CD (Fig. 102.) in eodem plano sitae alii rectae BD ad angulos rectos insistant, et ex puncto aliquo E iunctae AC demissum in BD perpendicularum EF aequale sit rectae AB, etiam alia quaecunque recta, ut GH ex puncto aliquo G ad BD perpendiculariter ducta aequalis erit rectae AB. Nempe, quum ex 2. anguli BAC, et et DCA sint aequales, et ex eadem ratione etiam anguli BAC et FEA, pariterque anguli DCA et FEC aequales sint, aequales erunt anguli FEA, FEC (Ax. 1.), unde FEA, FEC recti erunt (Def. 10.), adeoque etiam anguli BAC, et DCA recti sunt. Deinde, si GH, AB non sint aequales, erit GH vel maior vel minor altera AB. Sit, si fieri potest, maior, et sit  $IH=AB$ , ducanturque AF, CI. Erit itaque angulus BAI minor recto, pariterque DCI minor quam DCA i. e. minor recto. At ex 2.  $HIA=BAI$ , et  $HIC=DCI$ , unde etiam uterque HIA, HIC minor recto, adeoque AIG, et CIG uterque maior recto (I. 15.), et angulus AIC maior duobus rectis, adeoque multo magis  $AIC+ACI$  maiores erunt duobus rectis, quod fieri nequit (I. 17.). Itaque GH nequit esse maior quam AB. Similiter ostenditur, nec minorem esse posse: erunt itaque AB, GH aequales.“

7) „Si duae rectae aequales (Fig. 103.) AB, DC in eodem

plano sitae ad angulos rectos insistant alii rectae BC, et e punctis quibuscunque E ductae AD perpendiculara EF demittantur in BC, erit quodvis eorum aequale rectae AB. Si enim unum horum perpendicularorum non aequale fuerit rectae AB, nullum ei aequale erit (6.), itaque aut omnia maiora, aut omnia minora erunt, quam AB, aut alia maiora, alia minora. Atqui 1) haec perpendiculara non omnia maiora esse possunt quam AB. Quodsi enim foret, abscindatur in omnibus  $GI=AB$ , eritque linea per omnia ista puncta G ducta, curva concava versus E (4.), e cuius punctis G aequalia ad BC perpendiculara demissa sunt, quod fieri nequit (5.). (Ita Giordani Bitonto, ut iam monuimus, propositionem 5. non adeo universaliter demonstratam esse.) Simili ratione demonstratur 2) nec omnia perpendiculara minora esse posse quam AB, nec 3) alia maiora, alia minora.

8) „Si in figura quadrilatera duo latera opposita aequalia sint, et uni reliquorum laterum ad angulos rectos insistant, erunt etiam duo reliqui anguli recti. Id ope 7. iam eodem fere modo demonstratur ac pars prior 6.“ Est haec propositio Nassired. Lemm. 2. et Clavii Prop. 4.

9) „Si duae rectae (Fig. 104. 105.) AB, CD in eodem plano sitae secantur ab alia quadam recta EF, quae iis ad angulos rectos insistat, illae in infinitum productae nunquam nec ad se invicem accedent, nec recedent i. e. e definitione, erunt rectae parallelae. Nempe ex rectae AB puncto quocunque G demissum perpendicularum GH semper aequale erit perpendicularo EF. Si enim non sint aequalia, erit alterutrum maius altero. Sit 1) si fieri potest (Fig. 104.),  $GH > EF$ , sumtoque  $HI=EF$ , erit angulus FEI rectus. At FEG pariter ex hypoth. rectus est, unde foret  $FEI=FEG$ , pars toti q. e. a. (Ax. 9.). 2) Similis est demonstratio (Fig. 105.), nec GH maiorem esse posse quam EF. Erunt itaque duo perpendiculara aequalia.“

10) „Si duae rectae AB, CD (Fig. 106.) sint inter se parallelae, recta FE, quae unam earum CD ad angulos rectos secat, secabit etiam alteram AB ad angulos rectos. Se-

cetur enim ad rectos angulos utraque rectarum parallelarum AB, CD alia recta HI. (Id ipsum autem hic noster illegitime sumere videtur. Ostenderat quidem (9.), rectas ab alia recta ad angulos rectos sectas esse parallelas, at iam sumit conversam; parallelas semper ita secari ab aliqua recta, quod fieri semper posse ostendendum erat.) Sumatur deinde  $HG = IE$ , et ducatur GE: erit (8.) IEG angulus rectus. At ex hyp. etiam IEF, recta igitur EF cum EG coincidit."

11) „Si sit angulus rectilineus acutus quicumque ABC (Fig. 107.) et e puncto D quocunque rectae BA quantumlibet productae demittatur perpendicularum DE ad CB, quo magis punctum D in recta BA sumtum distat a B, eo magis etiam punctum E distabit a B. Nempe, si punctum F, e quo demittitur ad BC perpendicularum FG propius absit a B, quam D, necessario etiam erit  $BG < BE$ . Si enim neges, erit aut  $BG = BE$ , at tunc foret angulus DGB, utpote rectus, aequalis angulo FGB, totum parti q. e. a. Aut  $BG > BE$ , adeoque punctum E in punctum aliquod rectae BG v. c. in H caderet, et rectae DH, FG se intersecarent in puncto aliquo I, ac foret IGH triangulum, in quo duo anguli G et H uterque rectus esset q. e. a. (I. 17.).“ Notandum tamen est, verba: „quanto il punto preso in AB sarà più lontano dal punto B, tanto la perpendicolare segnerà la retta CB nel punto più remoto dal punto B“ involvere videri aliquam inter incrementa rectarum BD, BE rationem, quae tamen hic probari nequit.

12) „Si sit angulus rectilineus acutus quicumque ABC (Fig. 108.), et e puncto quocunque D unius e cruribus eius BC erigatur perpendicularum DE, illud, si opus sit, productum occurreret alteri cruri BA. Sumatur enim in recta BA punctum quodeunque G, et ex eo demittatur ad BC perpendicularum GH, et punctum H vel cum puncto D coincidat, vel erit H in recta BD ultra D producta, vel in ipsa BD. Duobus prioribus casibus facile patet propositum. Tercio casu auctor magis rem inde patere putat, quod ex Prop. praecedente magis magisque a B remota perpendicula e punctis rectae BA in rectam BC demitti possint, quae, quam BD finitum tantum



habeat longitudinem, BA autem in infinitum produci possit, eadem ultra DE cadere necesse sit." Quam demonstrationem non sufficere, nec licere a maiore subinde distantia a B ad distantiam data BD maiorem concludere, vix est quod monemus.

13) „Rectae AB, CD (Fig. 109.), quae in eodem plano ab alia recta EF ita secantur, ut anguli alterni BGH, CHG sint aequales, sunt parallelae. (Est haec apud Euclidem I. 27.) Bisecetur enim GHI in I, et ex I demittantur ad AB, CD perpendicularia IL, IK, erunt  $GI=IH$  ex const.:  $LGI=IKH$  (hyp.)  $L=K$  utpote recti ex hyp. unde et  $GIL=KIH$  (I. 26.) adeoque LIK erit recta (Conv. 1. Prop. I. 15.). Et quam sit ea ad AB et CD perpendicularis, hae duae rectae erunt parallelae (9.).“

14) „Pariter, si angulus externus aequalis sit interno ad eandem partes opposito, vel si duo interni aequales sint duobus rectis, parallelae erunt rectae, quae ita secantur.“ (Euclid. I. 28.)

15) „Si duae rectae parallelae secantur ab alia recta, erunt anguli alterni aequales etc.“ (Prop. I. 29.). Hanc iam simili constructione demonstrat ac 13., nisi quod ex I rectam unam parallelarum ad angulos rectos duci iubet, et ex 10. ostendit, eam etiam alteri parallelarum occurrere.

Sequuntur deinde Euclidis I. 30. et I. 31. adiecto corollario, per unum punctum extra aliquam rectam non nisi unam ei parallelam duci posse. Aliis deinde scholiis et corollariis Ax. 11. Euclidis demonstrat, atque etiam docet, rectam, quae e duabus parallelis unam secet, secare etiam alteram; porro: si duae rectae in eodem plano non sint parallelae, eas concurrere, et si non concurrant, esse parallelas, itaque omnes, quae non concurrant, nec ad se invicem accedere, nec recedere, additis ad finem rationibus, quare Euclidis definitio parallelarum pariter ac Ax. 11. et Clavii demonstratio ipsi imperfecta videatur.

Wallisius Operibus suis Mathematicis T. II. p. 665. sqq. Oxon. 1693. inseruit disertationem geometricam de postulato

quinto libri I. Elementorum. Atque ille quidem primum demonstrare conatur, iure Euclidem postulatum illud, aut, ut nos dicimus, axioma sumsisse. „Quod verum sit, ait, hoc elatum, nemo dubitat. Non autem gratis assumendum, sed probandum fuisse, contendunt aliqui, duplici saltem argumento, sed quorum neutrum me movet. Potest, inquit, demonstrari, ideoque debet, et non ut principium primum assumi quasi foret indemonstrabile. Verum illi non satis attendunt inter has communes notiones (tum ab Euclide, tum ab ipsis, qui hoc obijciunt) recenseri, non modo eas, quae omnino demonstrari non possunt, sed quae saltem demonstratione non indigent. Ecquis enim non videt, axioma sextum: aequalium dupla inter se esse aequalia, demonstrari posse ex secundo propter aequalia aequalibus addita? Sed et qui hoc effectum demonstrari posse contendunt (saltem quos ego vidi) non illud praestant, nisi assumtis aliis, quae sunt hoc ipso nihil clariora. Vel igitur fatendum illis erit, hoc Euclidi concedendum, vel aliud quid huius loco, quod non sit maius clarum, praesumendum. Obijciunt porro, utut hoc verum sit de *lineis rectis*, (nempe occurrentibus tandem esse, quae convergunt rectae) cum tamen id de *lineis universim* non sit verum (ut de curvis cum rectis, aut cum aliis curvis notum est) id de *rectis* probandum erit, quod non est de *lineis universaliter* verum. Sed et hic in eundem ipsi lapidem impingunt, dum assumunt (ne plura nominem) quod *duae rectae non comprehendunt spatium*, quod de *lineis universim* ne ipsi dixerint. Certum utique est, *duas curvas* aut etiam *unam* posse spatium comprehendere. Mihi certe res videtur tam clara, ut de ea nemo, qui rem sedate perpenderit, merito dubitet (magis quam *angulos rectos omnes esse inter se aequales*), si dicatur:

*Duae rectae in eodem plano convergentes (si satis contineantur) tandem occurrent. Et quidem ab ea parte, qua convergunt (non ea qua divaricantur). Si porro quaeratur, quatenam censendae sint convergentes? eas dicimus*

*In quas recta incidens duos internos (ex eadem parte) angulos faciat minores duobus rectis. Quippe si AB magis inclinatur ad CD, quam haec ab illa reclinatur; hoc est, si AB magis vergit ad CD quam haec ab illa refugiat, merito distantur invicem convergentes; nec video, quo caractere possint haec convergentia aptius describi, quam quod illos angulos faciat minores duobus rectis. Cum igitur luce sua sat clarum videntur, sic convergentes rectas tandem coituras (quod nemo sanus dubitabit) sitque hoc aptum  $\pi\sigma\tau\eta\eta\kappa\omega\nu$  de rectis convergentibus (quod anguli sic facti sint minores duobus rectis) non video, quin hoc Euclidi postulanti merito concedatur. Si phantasiam cuiuspiam turbet, quod (in eodem sermone) pro convergentibus inseruerit Euclides harum definitionem: poterit ipse se inde satis expedire, rem separatim considerando, prout hic proponitur. Ego certe haud difficilis concesserim. Quippe qui mente satis concipit, quid sit rectum esse, et quid in directum procedere (eorsum continuo tendens, ab ea, qua coeperat, directione nusquam devians, quod in curva non fit) non poterit dubitare, quin, si rectae sint, sintque in eodem plano, et convergentes, et in directum procedant (idem altera alterius punctum continuo respicientes eoque collimantes) non, inquam, dubitare poterit, quin si in infinitum (aut saltem quantum opus est) sic eorsum continuentur, occurrant tandem, utraque ad punctum illud, quo continuo collimabat, pertinent.*

Addit deinde, cum tamen aliquot magni viri senserint, si non necesse, saltem aequum esse, ut demonstretur, ipsique id adgressi sint, inter quos refert Ptolemaeum, Proclum, Clavium, Thomam Oliver. Anglum, Arabem Anarithum quendam et Nassireddinum, se quoque suam symbolam conferre statuisse. Tum exhibita primum Nassireddini demonstratione, cuius potissima capita supra dedimus, addit, vidisse se in alio arab. mscpto duas alias huic non multum absimiles eiusdem postulati quinti demonstrationes. Hoc autem omnium commune esse, quod, dum Euclidi haud facile postulandum concesserint, duas in eodem plano rectas convergentes, si pro-

ducantur, tandem coituras, assumant ipsi huius loco aliud aliquod, nedum plura, postulatum, unde illud operose demonstrent, quod non minus difficile concessu videatur. Quo confirmator ipse factus sit, immerito sugillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum), postulatum. Suam deinde subiungit demonstrationem, quae ad haec lemmata redit:

1 et 2) „Si finita recta, in recta infinita iacens, in directum continuetur (vel quantum libet promoveri intelligatur) etiam continuata (vel promota) iacebit in eadem recta infinita.“ Quod motum rectae adhibeat, excusat Wallisius exemplo Euclidis, aliorumque geometrarum, qui motum circuli in definitione Sphaerae, et motum trianguli in definitione Coni, quin in postulo tertio libri primi elementorum pariter motum rectae, et saepius praeterea superpositionem figurarum sumant.

3) „Si finitae rectae, in recta infinita iacenti, insistat recta angulum cum ea faciens, facit haec cum recta illa infinita eundem angulum.“

4) „Si in recta infinita, finita recta iacens, in directum promoveatur, et huic insistens recta, non variato angulo, simul feratur: facit haec ad rectam illam infinitam eosdem (seu aequales) ubique angulos.“

5) „Si in duas rectas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis: angulus externus (utrivis adiacens) opposito interno maior est.“

6) „Iisdem positis: si recta interiacens (Fig. 110.), ut AC, in directum promoveatur in situm  $ay$  (ita ut punctum A iam cum C coincidat, et simul feratur AB (manente angulo BAC invariato) in situra  $a\beta$ : dico, totam rectam  $a\beta$ , hoc est AB promotam cadere extra CD.“

7) „Iisdem positis: dico (Fig. 111.) rectam  $a\beta$ , hoc est AB promotam rectam CD prius secare, quam punctum a ad C perveniat.“

8) „Tandem, ait, praesumo (ex praesupposita rationum natura tanquam cognita, et figurarum similium definitione ut communem notionem

*Datae cuicunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse.* Hoc enim (propter quantitates continuas in infinitum divisibiles pariter atque in infinitum augibiles) videtur ex ipsa quantitatis natura fluere; figuram scilicet quamlibet continue posse (retenta figurae specie) tum minui, tum augeri in infinitum. Atque hoc revera (utut inobservati, nec ipsi forsitan animadvertentes) praesumunt omnes, et cum aliis Euclides ipse. Dum enim postulat *dato centro et intervallo circulum describere*, praesumit, circulum cuiuscunque magnitudinis; vel quocunque radio possibilem esse: quodque praesumit posse fieri, postulat te posse facere. Et quanquam non pariter aequum esset postulatum, cuiusvis figurae datae similem te posse (nondum edoctum) super data recta construere: possibile tamen esse, hoc fieri, de figura quacunque non minus praesumendum erit, quam de circulo. — Nec obstat praesumptioni huic nostrae, quod proportionalium definitio, et (quae hanc supponit) definitio similium figurarum nondum erat ab Euclide tradita (sed altera libro quinto, altera sexto post tradenda): poterat enim Euclides, si expedire visum esset, utramque libro primo praemisisse.

9) Ex his lemmatibus deinde facile demonstrat axioma Euclidis undecimum, „quod nempe, si ponuntur (Fig. 112.) anguli  $BAC + DCA < 2$  rectis, ex Lemm. 7. semper inveniri potest triangulum  $\pi Ca$ , cuius anguli ad basin iidem vel aequales sint angulis  $DCA$ ,  $BAC$ , et huic triangulo  $\pi Ca$  deinde aliud simile cogitari potest super recta  $CA$ . — Neque, ait Wallisius, hic obstat, quod super datam rectam triangulum constituere dato simile nondum docuerat Euclides: nam multa passim in  $\pi\alpha\rho\alpha\sigma\tau\epsilon\upsilon\eta$  ad demonstrationes theorematum (notat in problematum constructione secus sit) fieri posse praesumuntur et supponuntur facta, quae quomodo fiant geometrice, nondum traditur. — Cum igitur sit  $PCA$  triangulum, occurrunt invicem duae rectae  $CP$ ,  $AP$ . Erit nempe, quum triacula  $PCA$ ,  $\pi Ca$  sint similia,  $PCA = \pi Ca = DCA$ , adeoque recta  $CP$  in ipsa  $CD$  producta iacet, pariterque  $PAC = \pi aC = BAC$ , unde etiam  $AP$  in ipsa  $AB$  producta erit. Coeunt au-

tem AP, CP in puncto P, unde coeunt DC, BA in eodem puncto i. e. ad eas partes rectae AF, ubi sunt duo illi anguli duobus rectis minores. His addit Wallisius: tantum abest, ut Euclidem culpem, quod ipse id non demonstraverit, ut neque culpaverim, si plura adhuc indemonstrasset, v. c. cum Archimede, lineam rectam omnium inter eadem puncta esse brevissimam, quo posito non opus fuisset I. 20. Sed Euclides id sibi propositum habuisse videtur, ut, quam paucissimis postulatis reliqua demonstraret finissimis consequentiis. Unde factum est, ut sibi non raro facessat negotium ea probandi, quae nemo non gratis concesserit. Et quidem in omni probatione in quacunque materia praesumendum est aliquid. Nam, nisi ex praesumptis (seu praecognitis, aut ante non probatis) nulla fit probatio. Haec autem *praesumenda* quamvis ab aliis scriptoribus, de rebus aliis non soleant diserte recenseri (quod ab Euclide factum est) talia tamen *tacite praesumunt* alii, utut inobservati. Sed et Euclides ipse in processu operis praeter haec diserte memorata (ut praecipua et magis notabilia) alia, sive ex *inspectione schematis*, sive *aliunde manifesta* passim praesumit, sed quae nemo foret negaturus. — Et quidem, si adhuc plura vel *tacite praesumerat*, vel *disertim postulaverat* (quae sua luce clara sint) non foret inde culpandus — sed laudandus, qui tam distincte, quid velit, exposuerit. Nempe *lineae* (non quaelibet, sed saltim) *rectae* (non quotlibet, sed) *duae* (non utcunque sitae, sed) *in eodem plano*, (nec sit utcunque, sed) *in quas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis*, (nondum forte coeunt, sed) *si producantur* (non utcunque, sed) *in infinitum*, tandem coeunt (non quidem ad utrasque partes sic incidentis rectae, nec ad utrasvis indifferenter, sed) *ad eas partes, ubi sunt illi duo anguli minores duobus rectis*. Quod optimo consilio factum iudico. Atque haec in Euclidis vindicias sufficiant. Ita quidem Wallisius. Et, quidquid sit de eo, quod in Lemm. 8. sumitur: *datae cuiuscunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse*, et nominatim super quacun-

que recta data triangulum descriptum cogitari posse, quod simile sit triangulo dato, de qua suppositione disputari posse sane concedendum est, nescio tamen, an Klügelius (Const. præcip. etc. p. XV.) haud iusto iniquius de hoc Wallisii conamine iudicet. Putat nempe, qui axioma 11. neget, non posse non postulatum Wallisii sibi repugnans dicere. Quin demonstraturum, nulla triangula, nisi aequalia, sibi esse posse similia. Etenim, qui axioma 11. neget, pugnaturum, cuiusque trianguli BAC (Fig. 113.) angulum externum CAD maiorem esse summa duorum interiorum oppositorum. Si enim in uno casu eum illis aequalem censoret, in omnibus idem ipsi fatendum fore, id itaque, cum contra hypothesin ipsius sit, haud concessurum. Itaque affirmaturum esse, triang. CAD maiorem aut minorem summam angulorum habere quam triang. BCD, itemque triang. AED (facto angulo  $EAD = CBD$ ) maiorem vel minorem illam habere quam triang. ACD, ergo etiam quam triang. BCD. Ergo angulum AED maiorem aut minorem fore quam BCD; ergo triangula BCD et AED non fore similia, licet angulos duos singulos aequales habeant. Ita quidem Klügelius. At mihi hæc argumentatio nihil probare videtur. Ille enim, quem Klügelius fugit, adversarius ex falsa sua aut certe nondum demonstrata hypothesi illud tantum adstruere poterit, quæ a se et Wallisio ponantur, simul vera esse non posse, sibi ea, quæ Wallisius postulet, haud certa videri (falsa esse nondum demonstravit). Nec mirum. Tacite enim in iis, quæ Wallisius sumit, involvi 11. illud axioma, quod adversarius negat, nemo negaverit, quippe e suis suppositis, si iis non involutum esset, nec evolvere illud poterat Wallisius. Utra autem sententia, num Wallisii an adversarii vera sit, id inde pendebit, utra magis sua luce fulgeat, aut ex aliis indubitatis principiis derivari queat. Nec etiam omnia, quæ ad figurarum similitudinem pertinent v. c. laterum proportionalitas hic in censum veniunt, sufficit Wallisio ponere, super quacunque recta construi posse figuram alteri datæ æquiangulam, vel potius saltem construi posse triangulum alteri dato æquiangulum.

Cf. Saccherius p. 40. 41. sq. Tacquetus (Elementa Euclidea Geom. Plan. edita ab anno inde 1654. saepius, inter alia 1725. quam editionem hic citabimus p. 6.) Euclidis parallelarum definitionem e pari ratione ac Proclus reprehendit, quod dantur lineae, quae in infinitum productae, licet ad se mutuo adpropinquent ad intervallum quovis dato minus, nunquam tamen concurrant; ac rectas lineas parallelas eas esse dicit, quae in eodem plano sitae, utrimque in infinitum protractae aequalibus semper intervallis distent, vel, ut postea explicat, quorum omnia perpendiculara ex una in alteram demissa sint aequalia. Eas generari dicit, si recta ad aliam perpendicularis ad hanc semper perpendiculariter moveatur: tunc enim alterum eius extremum describere (non tantum, ut Clavius ait, rectam, sed) parallelam ei, ad quam perpendiculariter movebatur. — At facile patet, demonstrari oportere, lineam, e cuius punctis quibuscunque demissa ad rectam aliquam perpendiculara inter se aequalia sint, etiam ipsam rectam esse. Sumit deinde tria nova axiomata, quae quidem, concessa ipsius definitione, facile demonstrare poterat, adeoque demonstrare debebat, nempe p. 8. parallelas communi uti perpendiculari: et perpendiculara bina ex parallelis aequales utrimque excipere partes; denique p. 27. inter crura cuiusvis anguli rectilinei duci posse rectam uni horum crurum parallelam et quavis data recta maiorem. Quae omnia sane haud ita comparata sunt, ut Euclidis ἀξιώματα ullo modo assequantur. Cf. Hoffm. Critik der Parallel. Theorie p. 210. sqq.

Wolfii demonstratio in Elem. Geom. quum ex eadem parallelarum definitione, a Posidonio iam, ut ad Def. 35. diximus, prolata, profisciscatur, neque etiam is demonstrare tentaverit, posse perpendiculara ex una recta in alteram demissa omnia inter se esse aequalia, quum alij praeterea errores in eius argumentatione se facile prodant, v. c. quod sine demonstratione sumit, perpendicularum super una parallelarum erectum secare etiam alterum, nihil attinet, his diutius immorari. Idem circa alia etiam tentamina ex hac definitione parallelarum theoriam adstruendi monendum fuerit. Ita v. c.



La Caille (Leçons Élément, de Math. Edit. 1781. p. 261.) eandem parallelarum definitionem sumit, addit autem, quum duo puncta positionem rectae determinent, sufficere, si duo perpendicularia sint aequalia. Hoc autem ad definitionem hanc defendendam haud sufficere quisque videt. Pariter Edmund. Scarburgh. (the English Euclide 1705.) retinet quidem Euclidean parallelarum definitionem, at pro axioma sumit, parallelas eandem ubique distantiam habere, ubi eadem monenda videntur.

Similem defectum in eorum theoria locum habere, iam supra ad Def. 35. diximus, qui rectas parallelas eas esse dicunt, quae in eodem plano sitae ab alia recta ita secantur, ut anguli alterni fiant aequales, nempe probandum esse, id fieri, a quacunque recta secantur. Ex horum numero est potissimum Varignon. *Elém. de Math.* 1731., Bossut *Traité Elém. de Géom.* 1777. et multi eos secuti Galli, cum quibus etiam facit Austin. *An Examinat. of the first six Books of Euclids Elements* Oxford. 1781. p. 113., quos itaque pariter hic praetermittimus. Ipse tamen Bossut postea *Cours de Mathémat.* T. II. 1800. ait, si rectae alicui aequalia perpendicularia insistant, earumque extrema iungantur, has iunctas efficere unam rectam, ei, cui perpendicularia insistant, parallelam, de qua definitione vide, quae dicta sunt ad Def. 31.

Longe accuratius in ea re versatus est Hieron. Saccherius, edito Mediolani 1733. *Euclide* ab omni naevo vindicato. Et quamvis verum sit, quod Klügel. monet l. c. p. VI. VII. multis cum ambagibus uti, et in tam obscuris ac involutis ratiociniis facile errorem aliquem latere posse, et quamvis nec ipsum scopum penitus tetigisse fateamur, haud tamen inutile fuerit, laboribus viri paulisper immorari, eiusque demonstrandi rationem obiter saltem cognoscere, qui rem omnem diligentius, quam plerique reliquorum tractavit, et omnem lapidem movit, ut falsarum hypothesis absurditatem ostenderet, et ad certa omnia, quae huc pertinent, capita revocaret. Liceat itaque, quantum fieri potest brevissime, methodum eius indicare. Et primum quidem ostendit, quod

etiam Giord. da Bitonto (quem Saccherius, quod mirum videri possit, haud legisse, aut aliunde nosse videtur) demonstrasse diximus, duas rectas aequales, quae eidem basi ad easdem partes insistant, angulosque aequales efficiant, et quorum extrema iungantur, angulos quoque, quos cum iuncta faciant, efficere aequales: nominatim itaque, si eidem basi duo aequalia perpendicularia insistant, fore etiam, si eorum extrema iungantur, reliquorum angulorum vel utrumque rectum (quem ille casum hypothesin anguli recti vocat), vel utrumque obtusum (hypothesis anguli obtusi) vel utrumque acutum (hypothesis anguli acuti). Omnis deinde demonstratio eo redit, ut ostendat, hypothesin anguli obtusi pariter ac anguli acuti locum habere non posse, necessario itaque locum habere hypothesin anguli recti, vel, ut aliter dicamus, in figura quadrilatera, cuius duo latera opposita aequalia sint, atque ad basin perpendicularia, reliquos etiam angulos esse rectos, quod ipsum, ut supra vidimus, est Nassireddini Lemm. 2. et a Clavio quoque 4. a Giord. da Bitonto autem 8. loco positum fuit. Ac Euclideum axioma facile inde derivatur. Et hypothesin quidem anguli obtusi non consistere posse facile demonstrat, quum ea admissa veritas axiom. 11. Euclid., ex hoc autem veritas hypotheseos anguli recti consequeretur, antea autem ab ipso demonstratum fuerit, unam e tribus illis hypothesibus vel unico saltim casu admissam excludere utramque reliquarum. Hac itaque hypothesi suo tolo iugulata, incipit, ut Saccherius ait, diuturnum auctoris proelium adversus hypothesin anguli acuti, quae sola adhuc renuit veritati axiomatis Euclidean. Et hic quidem multus est auctor noster in stabiliendis variis consecratis, quae admissa una aut altera hypothesi, et maxime hypothesi anguli acuti locum habere debeant et vice versa (v. c. prout in quolibet triangulo tres anguli simul aequales aut maiores aut minores sint duobus rectis, locum habere hypothesin anguli recti (Hyp. 1. vocabimus) aut anguli obtusi (Hyp. 2.) aut anguli acuti (Hyp. 3.): pariterque in quovis quadrilatero omnes angulos simul quatuor rectis aequales fore in Hyp. 1. aut maiores in Hyp.

2. aut minores in Hyp. 3.; et simili hypothesisum diversitate angulum in semicirculo fore rectum, aut maiorem aut minorem recto etc. et vicissim). Adiectis deinde pluribus aliis Prop. XXIII. ostendit, duas rectas in eodem plano sitas vel commune habere perpendicularum, vel in alterutram eandem partem protractas semper magis ad se invicem accedere, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat. Deinde, postquam sumta Hyp. 3. magis ad se invicem ita accedere non posse ostendit, ut distantia earum semper maior sit data quadam longitudine, nihil relinqui putat, quam ut distantia earum quavis data minor sit, vel ut in infinito, ut aiunt, concurrant. Ita vero commune perpendicularum, et commune etiam segmentum habituras duas rectas in infinito concurrentes, quod quum fieri non possit, nec hypothesisin tertiam locum habere posse. Solam itaque relinqui hyp. 1. quae cum Axiom. 11. arctissime cohaereat. Praeterea aliter etiam hyp. 3. destruere conatur, quod, ea sumta, linea aliqua curva simul maior ac minor esse debeat linea aliqua recta, quod tamen eum satis perspicue demonstrasse iure dubitatur. Unde concludit, hyp. 1. solam veram esse, adeoque Ax. 11. rite habere. Abuti tamen eum voce infiniti et concursus in infinito, merito iudicat Klügel., infinitum enim natura sua esse indeterminatum, et rectas, quas in infinito concurrere metaphorice dixeris, reapse haud concurrere, nec commune perpendicularum habere.

Notari omnino meretur, Lambertum quoque in meditationes circa parallelarum theoriam incidisse, iis admodum similes, quas e Saccherio attulimus, quamvis ipse Sacchetii, quem no legisse quidem videtur, nullam mentionem faciat. Fuerunt illae conscriptae 1766., at post mortem demum viri sagacissimi, cui forte ipsi non ex omni parte satisfecere, insertae a Bernoullio Lipsiensi Pronituario Mathematico (Leipz. Magazin für Mathem. 2. St. 1786. p. 157. sqq. et 3. St. p. 325. sqq.) Lambertus post generalia circa ea, quae in parallelarum theoria adhuc desiderari possint, monita, nonnullas propositiones affert, quibus demonstratis Ax. 11. sponte

fluere ostendit, variisque modis tentat, eas ita struere, ut vix quidquam in earum demonstratione desiderari posse censeretur. Deinde ipsam parallelarum theoriam aggreditur, pariterque tres hypotheses sumit, et de iis, quae inde consequantur, disquirat, prout nempe in figura quadrangula, cuius tres anguli recti sint, reliquus quartus vel et ipse rectus, vel maior, vel minor recto fuerit, quas hypotheses alio nomine ad eas ipsas redire, quas Saccherius habuit, facillime patet, cf. Lambert. l. c. §. 30. sqq. Lambertus tamen rem aliquanto brevius et magis dilucide, quam Saccherius expedit, pariterque hypothesin anguli obtusi facile refellit, ex qua nempe consequi docet, duas rectas spatium comprehendere; hypothesin autem anguli acuti pariter magis refractariam esse deprehendit, tandem tamen etiam hanc sibi ipsi contradicere, demonstrari posse putat. Quae ipsa tamen demonstratio nititur propositione sequenti: „Si in duas rectas in eodem plano sitas tertia aliqua incidat, quae cum altera earum angulum rectum, cum altera angulum efficiat recto minorem, ita ut a recto angulo quantum libet parvo differat, rectae istae ita sectae in infinitum productae se invicem secabunt. Hanc autem propositionem, quae ax. 11. partem specialem complectitur, in praecedentibus Lambertum haud ita evicisse, ut in elementis fas erat, iure monet Hindenburg. l. c. p. 365. Ea quoque demonstratio, quam exhibet Struve (*Theorie der Parallellinien*, Königsberg 1820.) eo redit, ut hypothesin Saccherii secundam et tertiam locum non habere posse asserere conetur. Neque tamen etiam apud hunc auctorem omnia satis evicta, nec ea simplicitate posita esse videntur, quae elementarem demonstrationem decet. Eadem fere ratione, ut nempe hypothesin anguli acuti pariter atque anguli obtusi locum habere non posse (quamvis ipse hac denominatione non utatur) ostendere studeat, rem absolvere se posse putat Duttenhofer (*Versuch eines strengen Beweises der Theorie von Parallellinien* 1813.) in quo tentamine eadem, quae in reliquis huc pertinentibus notavimus, desiderari adhuc videntur.

Praetereo hic Hausenii demonstrationem in Elem. Mathe-

seos Lips. 1734. quum in ea aperte, etiam Kliigelio iudice l. c. §. VI. sumatur, quod probandum erat. Satis concinne tamen Hausenius omnia ad eum casum reduxit, quo altera duarum rectarum, quae ab alia quadam recta secantur, huic ipsi ad angulos rectos insistit, altera cum ea angulum acutum efficit. Pariter nihil opus esse puto, omnia hac in re conamina v. c. ab Hanko., Behn., Malexisu., Cataldo., Pardies., König., Ebert., Voigt., Maas., Vieth., Lazar. Bendavid. (de quo conferantur imprimis Pfeleiderer. Thes. inaugur. 1786. Thes. 1—5.) Kircher., Lüdicke. aliasque facta, quae vel Kliigel. et Hoffmann. habent, vel e schedis Hauberianis aut aliunde mihi cognita sunt, hic afferre, quum vel nihil, quod ipsis proprium sit, aut praec reliquis emineat, habeant, vel manifestis etiam parallogismis innituntur.

Praeterea etiam liceat, quae Segner. (Vorl. üb. Rechenk. und Geom. 1767. V. Abschn.) Karsten, (Praelect. Mathes. theor. et element. 1760.) Lorenz. (Erster Cursus der reinen Mathem. 1804.) habent, qui sumunt aut demonstrare tentant, rectam, quae per punctum intra aliquem angulum situm ducatur, necessario alterutrum certe crus huius anguli secare, quam nec haec satis circumspecte evicta aut extra omnem dubitationem posita esse facile pateat.

Alia autem ratione Kaestner. (Anfangsgr. der Arithm. und Geom. 1758.) Segner. (Vorlesung. über Rechenk. und Geometrie 1767. IV. Abschn. §. 57. et Vorrede zu den 6 ersten Büchern der geometr. Anfangsgr. Euklids 1775.) Kliigel. (Encyclop. 1782.), G. G. Schmidt. (Anfangsgr. der Mathem. 1797.) et recentissimis adhuc temporibus Herrmann. (Versuch einer einfachen Begründ. des 11. Euklid. Axioms. Frankf. 1815.) et Bürger. (vollständ. Theorie der Parallelen, Karlsruhe 1816.) hanc rem ita certe illustrare studuerunt, ut tutius deinde axioma 11. sumere liceat. Eorum argumentationes, quarum initia iam apud Wallisium deprehendimus, eo fere redeunt. Si duae rectae BA, DC (Fig. 114.) ab alia quadam AC ita secari ponantur, ut summa angulorum BAC, DCA minor sit duobus rectis, consequitur, angulum BAF maiorem

esse angulo DCA. Quodsi igitur recta DC, manente angulo DCA, versus A promoveatur, manifestum est, ubi punctum C ad A pervenerit, rectam DC intra angulum BAF sitam fore v. c. in AG. Iam, si vice versa AG, manente angulo GAF  $\equiv$  DCA, versus C regrediatur, patet, non statim totam ultra AB recessuram (ita enim angulus GAF non posset manere) sed primum inferiores saltem eius partes, quae rectae AC proximae sunt, ultra AB v. c. in eum situm, quo rectam ce videmus, perventuras, quum interea partes ab AC longius remotae, ut de adhuc cis AB positae sint. Et, quum recta quaecvis ut AG vel *cd* in infinitum produci queat, semper, quemcumque recta ita promota situm habuerit, infinita eius puncta cis AB remanebunt, ut itaque hic rectae motus continuari possit, quamdiu libuerit, v. c. dum iterum ad CD regressa sit, nec unquam situm obtinere poterit, quo non aliqua eius puncta citra, alia ultra AB sita fuerint, unde et rectae AB, CD, si opus sit, productae se invicem secare censendae sunt. Atque haec quidem ad illustrandum axioma 11. quam maxime facere, quin huic scopo sufficere videri possint, perfectam tamen in iis demonstrationem contineri, perspicacissimi humani illustrationis auctores nec ipsi putarunt, nec aliis persuasum fuit. Maxime etiam analogia curvarum quarundam, quae asymptotas, ut vocant, habent rectas, a quibus non secantur, quamvis ab ipsis his rectis, si retento situ priori parallelo promoveantur, eas secari certum sit, praecipitare hac in re iudicium vetare videtur. Cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie I. Th. p. 61. sq. 104. sq. 147. sq. Par fere ratio est eorum, qui, si in praecedente figura alter angulus v. c. BAC rectus, alter DCA acutus sit, ostendunt, ex CD maiora subinde perpendiculara ad AC duci posse, quae ex AC pariter maiora segmenta puncto C adiacentia abscindant, unde deinde colligunt (quamvis fortasse haud accurate ostensum sit, segmenta illa data quavis recta tandem maiora esse, vel incrementa etiam segmentorum eadem semper aut maiora etiam fore), tandem aliquod horum perpendicularorum cum recta BA coincidere, aut etiam ultra eam cadere debere, quo praeter Clavium, cos-

que quos cum ipso nominavimus, pertinet le Gendre \*) (Elem. de Géometr. 1794. et 1817.) de quo vide Gilberti monita (die Geometrie nach le Gendre, Simpson etc. 1798. p. 76. sqq.) et Franceschini (la Theoria delle parallele rigorosamente dimostrata in eius Opuscoli Mathematic. 1787. cf. Playfair. Elem. of Geom. p. 561.). Recentissime quoque similem viam ingressus est Metternich (Vollständ. Theorie der Parallelen 1815) sed haud meliore ac reliqui fortuna. Nam et ipsi haud conigit, ostendere, bases triangulorum, quae sumit, tandem quavis data maiores fore. Cf. Zeitschrift für Astron. 1816. H. B. S. 61. flg.

Eodem fere tempore, quo apud nos Kaestner., Segner., Karsten. aliique de parallelarum theoria laborarunt, in Anglia idem aggressus est Rob. Simson. Is nempe in latina Elementorum editione, quam publici iuris fecit 1756., professus primo est p. 345., axioma 11. inter communes sententias non ponendum videri, sed neque demonstrationem stricte loquendo admittere, explicatione autem quadam indigere, ut dilucidior fiat, atque hanc ipsam explicationem ita dedit, ut rectas, quae eidem rectae ad rectos angulos sint, aequidistantes quoque esse pronuntiaret, rectas autem, quae ab eodem puncto exant, a se invicem magis et magis divaricare et divergere (quod idem fere Procli assertum est), atque inde axiomatis 11. veritatem ostendi posse putaret. Si enim (Fig. 115.) rectae DF, AB ab alia recta HE ita secantur, ut anguli interiores et ad eandem partes DFE, BEF simul minores sint duobus rectis, constitui posse angulum HFG aequalem BEF, unde demonstrari possit, rectas FG, AB eidem alicui rectae ad angulos rectos, adeoque inter se aequidistantes esse. Quum autem ex constr. FD cadat inter aequidistantes FG, AB, rectas FG, FD ex eodem puncto exeuntes necessario tandem magis inter se distare, quam aequidistantes FG, AB, adeo-

\*) Idem in subsequentibus elementorum editionibus variis aliis modis rem tentavit, quorum qui ex functionum, ut aiunt, theoria desumpti sunt, ut nihil aliud moneamus, ad elementa certe non pertinent, qui autem magis elementares sunt, nec ipsi auctori plane satisfacere videntur.

que FD tandem fore ad partes rectae AB contrarias ei, ad quas sit punctum F, adeoque tandem convenire rectae AB. In anglica deinde Elementorum editione, quae primum prodit Glasg. 1762. accuratius adhuc rem demonstrare aggreditur hoc fere modo:

Def. 1. „Distantia puncti a recta est perpendicularum e puncto in rectam demissum.“

Def. 2. „Recta ad aliam rectam propius accedere, aut ab ea recedere dicitur, prout distantiae punctorum prioris rectae a posteriore decrescant semper aut crescant: aequidistantes autem dicuntur duae rectae, si puncta unius ab altera eandem semper distantiam teneant.“

Axioma. „Fieri nequit, ut recta aliqua primum propius ad aliam rectam accedat, deinde iterum ab ea recedat, antequam eam secuerit: pariter recta nequit primum recedere ab alia recta, deinde propius ei accedere; nec recta primum alii rectae aequidistans esse, deinde ei propius accedere, aut magis ab ea recedere potest; recta enim eandem semper servat directionem.“ Hinc facile demonstrat

Prop. 1. „Si duae rectae (Fig. 116.) AC, BD aequales inter se alii cuidam rectae AB ad angulos rectos insistant, et a puncto quocunque F iunctae CD demittantur ad AB perpendicularum, erunt EF, AC, BD aequales. Quodsi enim non ita esset, recta CD accederet primo, deinde recederet a recta AB, quod fieri nequit.“ Est haec propositio Clavii 3. et 7. Giord. da Bitonto.

Prop. 2. „Si eidem rectae ex eadem parte ad aequales angulos constituentur duae rectae aequales, earumque extrema iungantur, iuncta haec pariter rectos angulos efficiet cum istis, quarum extrema iungit.“ Facile patet, esse id ipsum Lemma 2. Nassireddini, vel Clavii Prop. 4. vel Saccherii Hyp. 1. Hinc deducitur in parallelogrammo, cuius tres anguli recti sint, quartum etiam rectum fore.

Prop. 3. „Si duae rectae angulum (acutum) comprehendant, in utraque earum punctum inveniri potest, a quo



perpendicularum in alteram demissum maius sit data quavis recta."

Prop. 4. „Si duae rectae ab alia recta ad eandem partem sub angulis aequalibus, altero interno, altero extremo, secantur, erit etiam aliqua recta, quae eas ad angulos rectos secet."

Prop. 5. Haec eadem est cum Euclidis axioma 11. et simili fere modo ac in ed. Simsonis latina demonstratur.

Apparet, Simsonis demonstrationem aliqua ex parte convenire cum Claviana. Et maxime etiam axioma a Simsone tantum iisdem fere dubiis obnoxium est, ac Clavii lemma 2. Conf. Hoffmanni Kritik der Parallelen Theorie p. 74. sq. Austin. (l. c. p. 11.) quoque monet, eadem fere, quae contra Euclidis axioma 11. Proclus observaverit, valere quoque contra hoc axioma Roberti Simson. (Haud multum a theoria Rob. Simsonis differre videtur demonstratio prior Müllerf. Ansführ. und evidente Theorie der Parallelen. Nürnberg. 1819. Demonstratio eius posterior paralogismo laborare videtur. Nec ea, quae in appendice adiecta est, demonstratio omnia exhauret.) Alius Anglus, Thom. Simpson. (Elem. of Geometry, quorum editionem quintam Lond. 1800. editam inspicere mihi licuit), sita in hac re versatur, ut primum doceat, distantiam puncti alicuius a recta esse perpendicularum ab hoc puncto in rectam demissum, deinde sequens axioma praemittat.

„Si duo puncta alicuius rectae inaequaliter ab alia recta in eodem plano posita distent, hae rectae in infinitum productae ex ea parte concurrent, qua minus distant." Hinc porro facile deducit, duas rectas, quae non concurrant, (vel quae ex Euclidis mente parallelae sint) eandem semper inter se distantiam habere, vel, omnia perpendiculara ab una ad alteram demissa esse aequalia, adeoque per unum idemque punctum non posse plures una recta alicui rectae parallelas duci, et rectas, quae eidem rectae parallelae sint, parallelas esse inter se, unde deinde reliqua et nominatim Prop. I. 29. facile consequuntur. Et fatendum omnino est, concesso axioma, reliqua inde rite derivari. Quamvis autem Playfair.

(Elem. of Geom. p. 369.) hanc demonstrationem omnium simplicissimam atque elegantissimam esse indicet, alii tamen nec hoc axioma multum ab Euclideo differre iudicarunt. Playfair ipse pro axioma sumit, eidem rectae per idem punctum unam tantum parallelam duci posse.

Verum mittamus haec, et quaedam adhuc demonstrationum genera consideremus, quibus nostra aetate parallelarum theoriam stabilire nonnulli tentarunt. Et primum quidem eorum est, qui ex accuratiore theoria situs rem expediri posse putare. Kaestnerus inter primos fuisse videtur, qui ita iudicaret in adiecto Kliigelii dissertationi de parallelis, quam saepius laudavimus, epistolio, ubi ita ait: „habitueros nos aliquando veram parallelarum theoriam vix speraverim, nisi diligentius exculta theoria situs.“ Qua in re haud consentientem habet Pflaederer. (Thes. inaugur. 1782. Th. I.) Karstenius deinde primum in Progr. inaugurali Halae 1778. edito rem maxime eo deducere studuit, ut ostenderet, duas rectas in eodem plano positas, quae cum tertia aliqua secante aequales efficiant angulos exteriorem et interiorem oppositum ad easdem partes, etiam cum alia quacunque ipsas secante angulos modo denominatos aequales efficere. Id quod inde adstruere tentat, quod, assumpto contrario, eadem illae duae rectae in plano, in quo ductae sunt, simul habiturae essent positionem eandem, ac diversam, seu non eandem (forte rectius similem ac dissimilem.) (Ita certe accuratius Proclus ad I. 30. dicit: καὶ γὰρ ἐστὶν ὁμοιότης θέσεως ἢ παραλλήλότης.) Hac autem argumentandi ratione haud acquieturum fuisse Euclidem, iudicat Pflaederer. l. c. Thes. 13. maxime si conferantur eius propositiones 7. 8. 9. 10. 11. libri V. et VI. 21. Ulterius deinde Karstenius rem explicavit, edito Halae 1786. libro (Mathem. Abhandlungen S. 130—145.) Theoria eius a Pflaederer. (Thes. inaugur. 1786. Th. 6.) ad haec capita reducta sistitur:

1) „Rectae, quae se mutuo secant, seu non parallelae sunt, habent directionem, vel positionem, diversam, non eandem“ (§. 20.).

2) „Duæ rectæ, quæ a duobus punctis protenduntur secundum eandem directionem, seu quæ in eodem plano eandem habent positionem, se mutuo non secant (§. 22. Cor. 2.) adeoque parallelæ sunt“ (§. 28.).

3) „Duæ rectæ in eodem plano, quæ cum eadem tertia ipsas secante efficiunt angulum exteriorem æqualem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano habent positionem vel directionem“ (§. 23.).

4) „Quæ autem non efficiunt angulum exteriorem æqualem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano non habent positionem vel directionem, sed diversam“ (§. 25.).

5) „Duæ rectæ, quæ in eodem plano eandem habent positionem, vel iuxta eandem directionem protenduntur, secant ab eadem tertia efficiunt angulum exteriorem æqualem interiori opposito ad easdem partes“ (§. 26. Cor. 1. §. 29. Cor. 2.).

6) „Contra, quæ eandem positionem vel directionem non habent, cum tertia ipsas secante non efficiunt angulum exteriorem æqualem interiori opposito ad easdem partes“ (§. 25. Cor. 3. §. 30.).

7) „Rectæ, quæ se invicem secant, cum eadem tertia ipsas secante faciunt angulum exteriorem maiorem interiori opposito ad eas partes, ad quas concurrunt (§. 26.), adeoque angulos interiores ad has partes minores duobus rectis.“ His stabilitis, Pfeiderer indicat, reliqua brevius, quam a Karstenio factum sit, expediri posse, at Thes. 8. addit: „in præmissis, earumque demonstrationibus scrupulos movere non inanes videtur 1) conceptus identitatis directionis duarum rectarum in eodem plano præmissus theoriæ parallelarum; 2) identitatis situs seu positionis in eodem plano attributa duabus rectis diversis, contra notiones communes modi, quo rectæ in plano positio dari intelligitur (§. 18. 22.); 3) axiomata tacta supposita in demonstrationibus Prop. 3. 4. (§. 23. 25.): duarum rectarum, quæ ab eiusdem tertiæ situ in plano aliquo ad easdem partes divergant angulis æqualibus, eandem

Ec

esse positionem in plano; et rectam, quae positione vel directione differat ab una duarum tractarum eandem in plano positionem habentium, pariter cum altera non habere positionem eandem: quae, si geometricè enuncientur, ultimo resolvuntur prius quidem in I. 28. Euclidis, posterius in propositionem: non posse eidem rectae per idem punctum duci plures una parallelas."

Huc etiam pertinet Hindenburg. qui in Promtuarium Lipsiensi (Leipz. Magazin der Natürl. Math. und Oekon. 1781. p. 145—168 et 342—371.) et brevius, at, ut ipse dicit, accuratius postea in eodem Promtuarium (1786. III. St. p. 367—389.) parallelarum theoriam exposuit. Haec theoria eo maxime nititur, ut ostendatur, rectas, quae eidem tertiae parallelas sint, parallelas esse inter se. Quod quidem casu I. nullo negotio evincitur, si nempe illa tertia, inter duas, cum quibus comparatur, intermedia sit. Casu II. autem, quo illa extra utramque reliquarum posita est, demonstrationem ita instruit auctor, ut dicat, rectas, quae parallelas sint alicui tertiae extra ipsas positae, necessario aut

- 1) omnes inter se parallelas esse, aut
- 2) nullam earum parallelam esse uni e reliquis, aut
- 3) aliquas quidem inter se parallelas esse, alias non.

Iam vero id, quod secundo et tertio loco positum erat, excludere studet, ut itaque primus saltem casus reliquus sit. Nempe tertium quidem casum haud obtinere posse putat: omnes enim rectas, quae alicui tertiae parallelas sint, eo ipso determinatum situm habere: id vero fieri non posse, si eorum aliae inter se parallelas esse possint, aliae non. Itaque aut omnes inter se parallelas, aut omnes non parallelas fore. At nec secundum casum locum habere posse, eo enim sumto consequi inde manifesto contradictoria. Quodsi enim sumatur (Fig. 116.), tam AB quam CD parallelas esse rectae EF extra ipsas positae, easque ex hypothesis hic facta inter se parallelas esse non posse, necessario sequi, ut per punctum aliquod I rectae AB duci possit recta GH rectae CD parallela (I. 31. quae ex controverso Ax. 11. non pendet.) Ita tam GH quam

EF parallelas fore rectae CD inter ipsas positae, adeoque ex  
 casu I. parallelas fore inter se. Quum vero etiam CD paral-  
 lela ponatur rectae EF, ex hypothesi nunc sumpta, GH, CD  
 require inter se parallelas esse, quod contradicat ei, quod  
 eis summum fuerat. Et in hac argumentatione ad casum se-  
 cundum facta fateor nihil me videre, quod iure reprehendi  
 possit. Ipse autem Hindenburg. aliam adhuc huius casus  
 demonstrationem addit, recta CD circa immotam EF cir-  
 cumvoluta, quam ipse priore adhuc certiorum esse putat, quae  
 vero meo iudicio pluribus adhuc dubiis obnoxia fuerit. Quid-  
 quid sit, mihi cardo rei non in hoc secundo casu, sed in  
 tertio, quem ante secundum leviter tantum perstringere visum  
 fuit auctori, versari videtur. Neque enim illud ipsum: re-  
 ctas, quae eidem tertiae parallelae sint, determinatum situm  
 habere, satis clare expositum est, neque etiam, si id conce-  
 datur, inde fluere videtur, non posse harum ita determinata-  
 rum rectarum alias inter se parallelas, alias non parallelas esse.  
 Cf. Pfleiderer. Thes. inaug. 1782. Th. 14. et Hoffm. Crit. I.  
 St. p. 230. Pariter ex ratione situs theoriā parallelarum de-  
 rivat Schwab. (Tentamen novae parallelarum theoriae, notiones  
 situs fundatae Stuttg. 1801.) et aliquanto brevius in alio li-  
 bello (Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum  
 Stuttg. 1814.). Est nempe ei situs certus modus, quo plura  
 coexistunt (§. 18. libelli modo citati): angulus planus recti-  
 lineus autem diversitas situs duarum rectarum in plano con-  
 currentium §. 26.: rectae autem parallelae sunt, si eundem  
 situm habent, vel si situs unius idem est ac situs alterius §.  
 27. (Distinguit nempe inter situm et positionem vel directio-  
 nem.) Duo tandem adiungit axiomata, quorum prius est: si  
 duae rectae habent eundem situm inter se, habebunt situm  
 aequae diversum a situ rectae tertiae. Posterius; si duae re-  
 ctae habent situm aequae diversum a situ rectae tertiae, ha-  
 bebunt situm eundem inter se. Hinc facile deducuntur  
 propositiones I. 29. I. 28. I. 27. I. 30. ac deinde axioma  
 11. Denique adstruitur, duas rectas parallelas nec inter se  
 vacuare, et vice versa: si duae rectae ex neutra parte con-

current, esse eas parallelas: denique, rectas parallelas aequidistantes, et lineam, quae ab alia recta aequidistet, et ipsam rectam esse. Quae omnia satis inter se cohaerere, suppositis rite deduci nemo negaverit. At scrupulus restat, ista idea *identitatis* situs *duarum* aut *plurium* rectarum, nec facile concipitur, quā ratione lineae *diversae* eundem situm habere dicantur. Praeterea axiomata praemissa, si usitata geometria terminis exprimantur, nihil aliud esse videntur quam ipsae propositiones I. 29, et I. 28. Cf. Hoffmanns. I. Th. p. 198. sq. Notandum denique Vermehren. (Versuch die Lehre von parallelen und konvergenten Linien aus einigen Begriffen vollständig herzuleiten Götting. 1816.) ex dem fere principiis procedere. Minus tamen exacta videtur eius demonstratio. Sumit enim ut axiomata 1) rectas, quae versus aliquam tertiam eandem directionem habeant, habere eandem directionem inter se, i. e. si consueto more remotae primas: quae eidem tertiae parallelae sint, parallelas esse inter se, (quod certe Hindenburg. demonstrandum esse putaverit et quod solum omnino sufficit reliquis demonstrandis). Si duae rectae habeant eandem directionem inter se, et una ad tertiam aliquam inclinatur, inclinari ad eam etiam alteram (i. e. rectam, quae unam e duabus parallelis secet, secet etiam alteram, quod pariter solum sufficiebat, at probandum erat). Olimius etiam, de quo supra, quum de Ptolomaeo sensus esset, diximus, aliqua ex parte huc pertinet. Alterum inest restat genus eorum, qui superficiem planam infinitam, cum anguli in infinitum productis interiacentem characterem magnitudinis anguli constituerent (aut pro mensura anguli sumerent), quo pertinet Bertrand. (Développement nouveau de la partie élém. des Mathém. Vol. I. Préf. p. 21. et Vol. II. P. I. Ch. I. §§. 4. et 12—24.) et Schulz. (Entdeckte Theorie der Parallelen 1784. ac denuo in alio libro: Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen, Königsb. 1786.), quibus adiungi potest Crelle (über Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie, Berlin 1786.) et Lacroix (Elémens de Géom. 1803.). Theoriae B

et Schulzii Epitomen et Epicrisin ab Hindenburgio, et  
 parte a Kaestnero factam continet Promptuarium Lipsiense  
 an. Magazin für reine u. angew. Mathem. 1786. 3. St.  
 21. sqq.) cum quo conferri meretur Karstem. (Mathem.  
 Handl. Nr. 11. §. 52—76.). De Crelle videantur Annales  
 Heidelbergeneses (Heidelb. Jahrb. der Literat. 1818. Nr. 54.)  
 Lacroix Hoffm. Crit. I. Th. p. 81. sq. Schulzium etiam  
 varias eius theoriae oppositas obiectiones defendere stu-  
 dii Gensichen. (Bestätigung der Schulzischen Theorie der Pa-  
 rallelen, und Widerlegung der Bendauidischen Abhandl. über  
 die Parallellinien, Königsb. 1786.). Olim etiam, quod notat  
 Meiderer. (Thes. inaugur. 1784. Thes. 6. 7.) fuere, qui an-  
 gulum pronuntiarent esse spatium indefinitum, quod cruribus  
 alicuius interiacet, nectendis tamen inde consequentiis penitus  
 transierunt e. g. Schott. in Cursu Mathem. L. I. C. III.  
 Art. II. §. 2. Lamy Elém. de Géom. L. II. Sect. I. Def. 1.  
 Müller. Vorber. zur Geom. C. IV. §. 13. Et Ramus iam  
 Geom. Math. 1599. p. 115. totam geometriam locis omnibus  
 punctum aut superficiem aut corpus facere dixerat. Cf. etiam  
 Proclus ad I. Def. 8. At hanc rationem nominatim etiam,  
 hoc illegitime, ex eadem causa, ob quam longitudinis crurum  
 ratio in ea non haberi debet, reprehenderunt. Orontius Fringius  
 Geom. L. I. C. IV. §. 1. Maler. Geometrie u. Markscheidek.  
 C. I. §. 50. Bossut. Traité Elém. de Géom. Not. génér.  
 §. 9. Quidquid sit, ii omnes, quos hac ratione theoriā pa-  
 rallelarum tractasse diximus, in eo consentiunt, ut spatium  
 inter duas parallelas infinite productas contentum pro nihilo  
 aut infinite parvo habendum putent, si comparetur cum spatio  
 inter duo alicuius anguli crura infinite producta contento.  
 Quod ita se efficere posse putant, ut dicant, angulum quem-  
 cunque pluribus vicibus iuxta se ipsum poni posse, ita, ut  
 tandem omne infinitum spatium circa aliquod punctum in  
 plano positum expleat aut superet; spatium contra intra duas  
 parallelas contentum si totidem, quot angulus ille, vicibus  
 iuxta se ponatur, semper tamen ad utramque sui partem infi-  
 nitum spatium haud expletum relinquere, unde patere putant

hoc inter parallelas contentum spatium pro nihilo habendam esse comparatum cum spatio angulari inter crura infinite producta. His positis deinde axioma 11. Euclidis ita adstruunt, „Quodsi duae rectae Fig. 117.) AB, CD ab alia recta EF ita secantur, ut anguli interni BGH, DHG simul sumti minores sint duobus rectis, AB, CD productae tandem concurrerent. Facile enim patet, angulum DHF maiorem esse angulo BGH, unde, si angulus FHI fiat aequalis angulo BGH, recta HI intra angulum DHF cadet, et parallela erit rectae BG. Jam cum spatium angulare inter crura DH, HI infinite producta contentum ex praecedente infinites maius esse debeat spatio inter parallelas HI, GB infinite productas contentum, manifestum est, spatium illud angulare non concludi posse intra terminos huius a parallelis comprehensi spatii i. e. rectam HD necessario tandem limites rectae GB praetergressuram esse, seu duas has rectas inter se concurrere.“ Contra hanc demonstrandi rationem multa praeclare monuerunt Hindenburg. (Allgem. Litter. Zeit. 1785. Nr. 54. et Leipz. Magazin 1786. 3. St. p. 392. sqq.) Karsten. (Mathematische Abhandlungen Nr. II. §. 52—76.) Pfeleiderer. (Thes. inaugur. 1784. Thes. 6—19. et Thesaur. inauguralis 1786. Thes. 9, 10.) et Fächler. (de Theoria parallelarum Schulziana Lips. 1786.) Haec monita eo potissimum redeunt: conceptum superficiei angularis non indefinitae sed reapse infinitae haud satis clarum esse, et ob stare, quo minus demonstrationes illi innixae possint esse aequae evidentes et apodicticae, ac ulla Euclidea, neque enim spatia infinita dari et construi posse; principia geometrica, quae tantum de quantitibus finitis valeant, nominatim principium congruentiae ad demonstranda theorematum de spatiis angularibus infinitis non aequae clare et tuto applicari posse; spatia evanescentia et nihilo equiparanda, si non absolute, tamen relative ad alia nec per se accurate sumi posse, nec unquam demonstrationem rigorosam, sed aliquam tantum ad verum approximationem admittere; aliis evidentibus geometriae principiis v. c. axioma I. 9. „totum sua parte maius esse“ manifesto vim fieri, et e geometria elementari eriminos etiam infinite magni et parvi esse proscribendos.



Longis his disquisitionibus finem tandem faciemus, adiectis duobus recentioribus tentaminibus, quibus rem, et alter certe novis plane ac hactenus intentatis cuniculis (quod vix fieri posse videbatur) aggressi sunt duo viri doctissimi, Wachter. et Thibaut. Wachter nempe, postquam (*Zeitschr. für Astron.* 1816. P. II. p. 64. sqq.) theoriam parallelarum a Metternich. editam diiudicaverat, eiusque lacunas ostenderat, simul novam methodum breviter indicavit. Postea edito libello singulari (*Demonstratio Axiom. Geom. in Euclideis undecimi Gledani* 1817.) ex iisdem progressus principiis, alia tamen via ad scopum pervenire conatus est. Nempe (priori loco (*Zeitschr. für Astron.* I. c. p. 76. sq.) ostendit, si duae rectae ab aliqua tertia ita secantur, ut altera earum secanti sit perpendicularis, has rectas, si fieri possit, ut ipso inter se non convenient, propius semper alteram ad alteram accessuras esse, ita ut una asymptota alterius fieri debeat. His autem summis manifestam contradictionem inesse ostendere studuit. Deinde in libello postea edito, re ulterius explicata, ostendere anuntiat, vel nondum stabilita parallelarum theoria demonstrari posse, per quatuor puncta in spatio proutlibet data (addendum tamen: dum non plura duobus punctis sint in eadem recta, nec plura tribus in eodem plano) superficiem sphaericam, et, quod inde consequatur, per tria puncta in dato plano, modo non in una eademque recta iaceant, circulum describi posse. Tum axioma Euclidean ita demonstrari posse docet. Data quaevis recta AB (Fig. 118.) in punctis A, B terminata in C bifariam secetur, et ex puncto C recta CD rectae AB ad perpendicularum ducatur. E punctis A, B ducantur in eodem plano cum AB et CD rectae AE, BF, datae AB ad quemvis angulum recto minorem insistentes (ita nempe, ut sit angulus  $\angle CAE = \angle CBF$ ). Ex puncto C aliae rectae CG, CH illis AE, BF ad perpendicularum normantur, quae hasce in punctis G, H secant. Producantur CG, CH usque ad I, K, ita, ut sit  $CI = 2CG$ ,  $CK = 2CH$ , quo facto tribus punctis C, I, K circulus circumscribi potest, cuius centrum, ut quidem ex constructione percipitur, in recta CD ipsius punctum intersectionis

nis cum recta AG vel BH efficit." Ita quidem ille non necessitatem tantum intersectionis istarum rectarum, sed constructionem exhibere tentat, qui ipsum intersectionis punctum inveniat. Et illud certum videtur, siquidem sine parallelarum theoria probari possit, posse per tria quaecunque puncta non in eadem recta sita circulum describi, nihil iam difficultatis superfuturum. At, ut verum fateamur, quae Wachterus attulit, quamvis ingeniosa sint, valde tamen dubitamus, an in elementis ita proponere liceat: quin in ipsa etiam demonstratione multa adhuc subobscurae dicta videntur, quae subinde quidem promittit auctor se ad summam evidentiam adducturum, aut asserit, facillime ea demonstrari. Antequam autem se ea fide liberarit, nostrum de argumentatione ista iudicium suspendere liceat.

Thibaut. autem in libro, cui titulum fecit: *Gründriss der reinen Mathematik*, Gött. 1818. in eo cum Wachtero convenit, ut earum propositionum, quae ex parallelarum theoria consequuntur, aliquam immediate adstruere tentet, et deinde ordine inverso ab huius demonstratione ad parallelarum theoriā procedat. Ita nimirum ratlocinatur ad I. 32. immediate demonstrandam. Sit (Fig. 119.) triangulum quodcunque ABC, et sumto in latere CA ultra A producto puncto quocunque b' recta Ab' circa A convertatur, usquedum punctum b' in punctum  $\beta'$  rectae AB cadat. Deinde recta A $\beta'$  in recta AB promoveatur, usquedum punctum A cum puncto B coincidat, et  $\beta'$  in b'' cadat. Denuo recta Bb'' circa B convertatur, dum b'' in punctum  $\beta''$  rectae BC cadat, et iam recta B $\beta''$  in recta BC descendat, dum punctum B cum puncto C coincidat, et  $\beta''$  in b''' cadat. Denique recta Cb''' circa C convertatur, dum b''' in punctum  $\beta'''$  rectae CA cadat. Quo facto patere ait, rectam Ab' conversam fuisse aribus vicibus, atque tribus his gyrationibus, dum iterum cum recta CA, in qua primum posita erat, coincideret, angulos tres externos trianguli descripsisse. At, cum iisdem gyrationibus recta Ab' in rectam CA, in qua primum posita erat, iterum redierit (poterat nempe C $\beta'''$  adhuc in CA promoveri, ita ut C cum A et  $\beta'''$  cum b' coincideret), adeo-

que omnes angulos, qui circa unum punctum A esse possunt, i. e. quatuor rectos emensa sit, patere, omnes angulos externos trianguli cuiuscunque aequales esse quatuor rectis. Quum vero anguli externi trianguli cum angulis internis simul sumti aequales sint sex rectis (I. 15. Cor.) anguli interni soli aequales erunt duobus rectis. Atque hinc Ax. 11. facile deduci potest. Et haec quidem satis speciose. Liceat tamen observare, dum recta  $Ab'$  in AB promoveatur, ita ut punctum A cum puncto B coincidat, rectam  $Ab'$ , angulo  $\beta'Ab'$  invariato, in situm Bd pervenire, ita, ut Bd sit parallela rectae  $Ab'$  vel CA (I. 28.). Iam vero, quum recta  $B\beta''$  in BC promovetur, usquedum B cum C coincidat, recta Bd invariato angulo  $dB\beta''$  simul descendet, et ut certi simus, rectam  $Ab'$  facta adhuc tertia gyratione ac C nec plus, nec minus iis angulis absolvisse, qui circa unum punctum sunt, demonstrari oportebit, rectam Bd, postquam ad C descenderat, in ipsam rectam CA *caders*. Quod tam demum certum erit, si demonstratum ante fuerit, angulum  $dB\beta''$  aequalem esse angulo  $\beta''Cb'$  i. e. si I. 29. ante demonstrata fuerit. At I. 29. pendet ex Ax. 11: itaque haud vicissim Ax. 11. ex Thibautii demonstratione propositionis I. 32. derivari poterit.

Caeterum alios etiam, quamvis aliis rationibus, et hactenus non feliciori successu tentasse I. 32. immediate adstruere, et exinde parallelarum theoriam demonstrare, supra iam diximus, quo pertinent Hauff. (Geom. Fundam. solida Gandae 1819.) et le Gendre. Et de hoc quidem, praeter ea, quae supra diximus, cf. Biblioth. Univers. Oct. 1819., ubi auctor anonymus partes le Gendre. suscepit, eumque contra Iohn. Leslie, qui in Elém. of Geom. Edinb. 1817. ipsum reprehenderat, et contra alium geometram Anglum, nescio an satis feliciter, defendere tentavit.

Excussis iam tot et tam variis hac in re conaminibus, in quibus omnibus aliquid adhuc desiderari posse fassus sumus, iniqui tamen fuerimus, si negare velimus, eorum auctores multa subtiliter admodum rimatos esse, et magna perspicaciae atque acuminis specimina dedisse, et miram quaestionis sim-

plicitatem, quae vix permittat, ut ea in simpliciora adhuc  
resolvi et quasi extenuari possit, maxime in causa esse, per  
rem acu tangere nondum contigerit. Neque tamen haec ipsa  
molimina prorsus inutilia fuisse censenda sunt. Multa enim  
vel ipsi illi novae alicuius parallelarum theoriae conditores,  
vel ii etiam, quos nacti sunt, adversarii ingeniose observa-  
runt, quibus doctrina mathematica augeretur; et limitibus  
certae ac omnibus numeris absolutae scientiae accuratius, ac  
ante factum, definitis, quam modeste de nostris viribus indi-  
candum sit, hoc etiam exemplo comprobatum est. Caeterum  
eam axiomatis controversi *illustrationem*, quam post Wal-  
sium Kaestnerus aliique dederunt, tironibus sufficere posse  
confidimus.

---

---

EXCURSUS II.  
AD  
ELEMENTORUM

I. 47.

1) Quamvis, quae una aliqua fractione certa esse demonstratum est, multiplicato demonstrationum numero nequeant certiora fieri, unde etiam plures eiusdem theorematum demonstrationes, ne nimii fiamus, plerumque afferre noluimus, in hoc tamen celebratissimo theoremate ab ista regula paululum discedere, et ex iis, quae maxime notatu digna a variis Mathematicis circa eius demonstrationem excogitata esse vidimus, nonnulla certe maxime simplicia seligere, et breviter huc conferre visum fuit. Pleniorum variorum hoc problema demonstrandi conavimus historiam dederunt, ipsasque potiores demonstrationes exhibuerunt Scherz. in Dissertat. de Theoremate Pythagorico Argentor. 1743 et Ietze. pariter in Dissertat. Academ. Praeside Lang. edita Halae Magdeb. 1752, quos secuti sunt Hoffmann.: der Pythagor. Lehrs. mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen Mainz 1819, et Müller: System. Zusammenstell. der wichtigen bisher bekannten Beweise des Pythag. Lehrsatzes u. s. w. Nürnberg 1819, Et Scherz. quidem et Müller. historiam theorematum ab antiquissimis inde temporibus repetunt; Ietze. et Hoffmann. varias, quae quadrata cathetorum, vel hypotenusae inter se habere possunt, positiones distinguunt, atque inde varias his casibus accommodatas demonstrationes derivant. Praeter Euclidis itaque demonstrationem, quam primam vocabimus<sup>1</sup>, veritas theorematum etiam adstrui poterit, ut sequitur.

2) Sit (Fig. 120.) triangulum  $ABC$  ad  $B$  rectangulum, et constituentur super cathetis  $AB, BC$  quadrata  $ABGF, BCDE$ , et producantur rectae  $DE, FG$ , donec in  $L$  — pariterque rectae  $EC, GA$ , donec in  $K$  conveniant, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 5.), eruntque ex Constr.  $EK, GL$ , pariterque  $EL, KG$  parallelae, adeoque  $GKEL$  parallelogrammum in  $E$  rectangulum, et quum sit  $EK=AD$  (I. 34.)  $=AB+BC$ , pariterque  $LE=FC$  (I. 34.)  $=FB+BC=AB+BC$ , erit  $EK=LE$ , adeoque  $GLEK$  quadratum (I. 29. I. 34. I. Def. 30.). Iam, si sumatur  $EH=KC=AB$  (unde erit  $LH=CE=BC$ ), pariterque sumatur  $LI=KC=AB$  (unde erit  $IG=CE=BC$ ), et ducantur rectae  $AI, CH, IH$ ; erit  $AIHC$  quadratum hypotenusae. Nam, quum  $EH=KC$  (ex Constr.),  $EC=CB$  (ex Constr.)  $=AK$  (I. 34.) et angulus  $HEC=AKC$  ex constr. erit (I. 4.) triangulum  $HEC=CKA$ , et nominatim  $HC=CA$ , et angulus  $CHE=ACK$ , et  $HCE=CAK$ . At, quum  $CHE+HCE=$  recto (I. 32.), erit etiam  $ACK+HCE=$  recto, unde  $ACH$  erit rectus (I. 13. Cor. 2.). Eodem modo ostenditur, esse triangulum  $HLI=CEH=AKC=IGA=CBA$ , et  $HI=HC=AC=AI$ , et angulum  $HIA$  rectum, pariter ac  $IAC, IHC$ . Erit itaque  $AIHC$  quadratum hypotenusae  $AC$  (Def. 30.) Et est hoc quadratum, additis quatuor triangulis rectangulis  $CKA, HEC, ILH, AGI$  aequale quadrato  $GLEK$ . Pariter autem quadrata  $ABGF, BCDE$ , additis duobus rectangulis  $ABCK, BFLD$  aequalia sunt quadrato  $GLEK$ . Adeoque, quum triangula  $CKA, HEC, ILH, AGI$  simul aequalia sint rectangulis  $ABCK, BFLD$ , erunt quadrata  $ABGF, BCDE$  simul sumta aequalia quadrato  $AIHC$ . Ad hoc ipsum fere redit demonstratio Henrici Boad. in geometria Londini 1735. edita, ut refert Klügel, (Mathemat. Wörterb. Artik.: Pythagor. Lehrs. III, Th. p. 932. sqq.) et ea, quam habet Thom. Simpson. Elem. of Geom. p. 33. pariterque ea, quam dedit Winkler. Institut. Mathem. Physic. Geom. §. 365. Scherz. Demonstr. 5, et 6., Müller, Demonstr. 1. et Demonstr. 5. apud Devey Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. §. 41. Denique patet quadrato hypotenusae ex altera

parte rectae AC constituto, eandem demonstrationem locum habere. Cf. Schmid. Elem. der Form und Größe p. 344. Similem demonstrationem ad varias positiones, quae quadrata in Theor. Pythagor. habere possunt, applicat Hoffm. l. c. Dem. 9—16.

3) Sit triangulum (Fig. 121.) ABC ad B rectangulum, et constituentur ut ante super cothetis quadrata ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in I. conveniant (I. 29. Cor. 5.) ductaque LB cum hypotenusa conveniat in M, eique parallelae agantur rectae AI, CH, quae rectis EL, GL occurrant in punctis H, I, denique iungatur HI. Iam, quum parallelae sint AB, GF (I. 28.) i. e. AB, IL, pariterque ex Construct. AI, BL, erit AIBL parallelogrammum (Def. 36.), adeoque rectae parallelae AI, BL aequales erunt (I. 34.). Eodem modo ostenditur, etiam CH, BL aequales ac parallelas esse. Unde AI, CH aequales (I. Ax. 1.) et parallelae (I. 30.) erunt. Hinc etiam AC, HI aequales ac parallelae sunt (I. 33.). Praeterea, quum  $BD=BC$  (I. Def. 30.), pariterque  $DL=BF$  (I. 34.)  $=AB$ , et angulus BDL, utpote rectus (I. 13.) aequalis sit angulo ABC, erit etiam (I. 4.)  $BL=AC$ , et  $BLD=BAM$ . Unde, quum sit  $BL=AI=CH$ , et  $BL=AC=IH$ , erunt AI, CH, AC, IH inter se aequales. Denique, quum sit  $LBD=BAI$  (I. 29.) et, uti modo vidimus,  $BLD=BAM$ , erit  $LBD+BLD=BAI+BAM=IAM$ : at  $LBD+BLD=$  angulo recto (I. 32.), adeoque IMA erit rectus, unde omnes anguli parallelogrammi ACHI erunt recti (I. 34. Cor. 10.), adeoque, quum etiam latera aequalia sint, ACHI erit quadratum hypotenusae (I. Def. 30.). Est autem quadratum ABGF  $=$  parallelogrammo ABIL (I. 35.)  $=$  rectangulo AIMN (I. 35.), pariterque quadratum BCDE  $=$  parallelogrammo BCLH (I. 35.)  $=$  rectangulo CHMN (I. 35.). Itaque quadrata ABGF, BCDE cathetorum simul sumta aequalia erunt rectangulis AMIN, CHMN simul i. e. quadrato hypotenusae. Cf. Müller., qui l. c. Dem. 7. hanc demonstrationem, quam ex Clavio repetit, omnium hactenus cogitarum simplicissimam et praestantissimam iudicat. No-

tandum est, simili constructione ac demonstratione theorema longe generalius exhiberi posse. Nempe, si super duobus lateribus AB, BC trianguli cuiuscunque constituentur parallelogramma quaecunque ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in L convenient, iunctaque LB cum tertio latere ipso vel producto in M convenient, et rectae LB parallelae ducantur AI, CH, quae rectis GL, EL in punctis, I, H occurrant, denique iungatur IH: erit ACHI parallelogrammum, quod, si punctum M in ipsam AC cadat, summae parallelogrammorum ABGF, BCDE siq in AC productam cadat, differentiae earum aequale erit. Huius propositionis partem potissimam habet Pappus Collect. Mathem. IV. 1. cf. Castillon. Mém. de l'Acad. de Berlin. 1766. p. 345. Clavius p. 88. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre etc. p. 298. Klügel. Encyclop. II. Th. Müller. I. c. p. 79.

4) Multum cum praecedente similitudinis habet sequens demonstratio, nisi quod quadratum hypotenusae ex opposita parte describitur. Constructis (Fig. 122.) super AB, BC, AC quadratis ABGF, BCDE, ACKM producantur MA, KC, usquedum rectis EL, GL in H, I occurrant, et, quum angulus ACK rectus sit (I. Def. 30.) rectus erit ACH (I. 15.), at rectus est etiam BCE (I. Def. 30.), unde, si dematur communis BCH, erit  $ACB = HCE$  (I. Ax. 3.). Et, quum praeterea  $BC = CE$ , et angulus ABC, utpote rectus, = recto CEH (I. Def. 30.), triangulum ABC aequale est triangulo HEC (I. 26.), et nominatim  $HC = AC = CK$ . Eodem modo ostenditur, triangulum ABC aequale esse triangulo AGI, et nominatim esse  $AI = AC = AM$ . Ducta deinde BL, erit, ob  $BD = BC$ ,  $DL = BF = AB$ , et angulum  $BDL = ABC$ , etiam triangulum  $BDL = CBA$  (I. 4.), et angulus  $BLD = BAC = CHE$ , itaque LB [parallela erit rectae HC (I. 28.)], adeoque, si LB producat, dum secet rectas AC, MK in N, O, erit LB perpendicularis ad AC, MK (I. 29.). Et ob  $AI = AM$ , rectangulum AMNO aequale erit parallelogrammo ABIL (I. 36.) = quadrato ABGF (I. 35.), pariterque rectangulum KCNO aequale parallelogrammo BCLH (I. 36.) = quadrato BCDE (I.



35.) Itaque quadratum  $ACKM = ABGF + BCDE$  simul. Hanc demonstrationem habet Scherz., estque apud ipsum nr. XI. Eadem etiam utitur Thom. Simpsoni Elem. of Geom. p. 31. Müller. Dem. 14.

5) Pariter cum praecedente §. 3. similitudinem habet, et satis fecilis est ea, quae sequitur, demonstratio. Constructis, ut ante (Fig. 123.) quadratis  $ABGF$ ,  $BCDE$ , erigantur in  $A$ ,  $C$ , rectae  $AI$ ,  $CH$  ad  $AC$  perpendiculares, et producantur, usque dum cum rectis  $GF$ ,  $DE$  ipsis, aut productis in  $I$ ,  $H$  conveniant, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 3.), et iungatur  $HI$ , eritque angulus  $GAB = IAC$ , quia uterque rectus est, unde, demto communi  $IAB$ , erit angulus  $GAI = BAC$  (I. Ax. 3.), et, quum etiam angulus  $AGI = ABC$ , et  $AG = AB$  (I. Def. 30.), erit (I. 26.)  $AI = AC$ . Eodem modo ostendetur, esse  $CH = AC$ , unde etiam  $AI = CH$  (I. Ax. 1.), et, quum praeterea  $AI$  parallela sit rectae  $CH$  (I. 28.), erunt etiam  $HI$ ,  $AC$  aequales et parallelae (I. 34.) et  $ACIH$  erit quadratum hypotenusae (I. 30.). Et quum triangulum  $ABI$ , et quadratum  $ABGF$  in eadem basi, et in iisdem parallelis sint, erit quadratum  $ABGF$  duplum trianguli  $ABI$  (I. 41.): eadem ratione, si per  $B$  ducatur recta  $NBM$  parallela rectae  $AI$ , erit rectangulum  $AIMN$  duplum trianguli  $ABI$  (I. 41.), unde quadratum  $ABGF$  aequale est rectangulo  $AIMN$  (I. Ax. 6.). Simili modo ostenditur, esse quadratum  $BCDE$  aequale duplo triangulo  $BHC$  i. e. rectangulo  $NMHC$ . Totum itaque quadratum  $ACIH$  aequale est duobus quadratis  $ABGF$ ,  $BCDE$  simul. Hanc demonstrationem habent Clavius (Euclid. Elem. 1591. p. 85.), Sturmius (Mathes. enucleat. p. 32.), Coëtsius (Euclid. Elem. 6. libri prior. 1692. p. 140.), Scherz. l. c. demonstr. III., Ietze l. c. demonstr. XIII., Müller demonstr. 3., Hoffmanni. demonstr. 5. Sturmius observat, triangula  $AGI$ ,  $HCE$  ita considerari posse, quasi triangulum  $ABC$  circa punctum  $A$  vel  $C$  conversum in situm pervenisset, quem habent haec triangula.

6) Clavius ibid. et ex eo Ietze l. c. Dem. II., et Müller. Dem. 6. afferunt adhuc hanc demonstrationem. Constructis,

ut ante (Fig. 124.) quadratis ABGF, BCDE, et figura ACHI, quae eodem modo demonstratur esse quadratum hypotenusae AC, ducatur per G recta GKML, parallela rectae AC, quae rectis AI, CI, CH occurrat in punctis K, M, L, pariterque per E recta EQPON parallela rectae AC, quae cum rectis AI, AB, BC, CH in punctis N, O, P, Q conveniat, et ostendatur, ut ur. 5. esse triangula AGI, ABC aequalia, et nominatim  $GI=BC$ , vel ob  $BC=CE$ , etiam  $GI=CE$ . Et, quum praeterea ex constructione GK, EQ, rectae AC parallelae sint, erunt parallelae inter se (I. 30.), et pariter ac AC cum AI, CH rectos angulos efficient (I. 29.). Et, quum pariter rectae GI, EC parallelae sint, erit angulus  $IGK=CEQ$  (I. 29. Cor. 5.). Denique anguli ad K et Q recti sunt, erit itaque (I. 26.) triangulum  $GKI=EQC$ , et nominatim  $IK=CQ$ . Et quum etiam  $HI=AC$  (I. 34.), erit rectangulum  $IKHL=ACNQ$  (I. 34. Cor. 21.). Est autem  $ACNQ=ACOE$  (I. 35.)  $=BCDE$  (I. 35.). Itaque quadratum ABGF = parallelogrammo AGMC (I. 35.) = rectangulo ACKL (I. 35.) Itaque quadrata BCDE, ABGF simul aequalia sunt rectangulis IKHL, ACKL simul i. e. quadrato ACHI.

7) Aliam demonstrationem admodum concinnam habet Müller. I. c. Dem. 15. Cf. eiusdem mathem. kritische Bearbeitung des ersten Buchs der Elemente, et Tempelhof. Geometrie für Soldaten etc. Constructis (Fig. 125.) super lateribus trianguli ABC in B rectanguli quadratis BCDE, ABFG, ACMK, constituitur super MK triangulum MIK ita, ut  $MI=BC$  et  $KI=AB$ , unde ob  $MK=AC$ , erit triangulum  $MIK=$  triangulo CBA (I. 8.), eidemque triangulo CBA, ducta recta FD, aequale erit triangulum DBF (I. 8.). Porro ducatur recta GB, quae efficiet angulum GBA semirectum (I. 5. et I. 32.), adeoque (Obs. ad I. 15.) in directum erit cum ducta BE, quae angulum DBE ex iisdem rationibus semirectum efficit. Denique ducatur recta BI. Iam, ut breviter dicamus, omnis demonstratio eo redit, ut ostendatur, utrumque quadrilaterorum BAMI, IKCB aequale esse alterutri quadrilaterorum GFDE, GACE, quod, quum tria latera, quae aequalia sunt lateribus

trianguli  $ABC$ , et anguli, quos illa latera comprehendunt, utrimque eodem ordine aequalia sint, adeoque figurae congruant, facillime probatur. Ablatis deinde a duobus quadrilateralis  $BAMI$ ,  $IKCB$  triangulis  $MIK$ ,  $CBA$ , pariterque a duobus quadrilateralis  $GFDE$ ,  $GACE$ , triangulis  $DBF$ ,  $CBA$  reliquetur quadratum  $ACKM$  aequale quadratis  $BAGF$ ,  $BCDE$  simul.

8) Aliam demonstrationem ab Euclideâ haud multum differentem, nisi quod hic integra parallelogramma adhibentur, ubi Euclides, usus fuit saltem triangulis, quae dimidia erant horum parallelogrammorum, habet Schierz. I. c. Dem. XII. Müller. Dem. 13. Constructis nempe (Fig. 126.) quadratis  $ABFG$ ,  $BCDE$ ,  $ACKM$ , ducantur  $EII$ ,  $GL$  parallelae rectae  $AC$ ,  $BO$  parallela rectae  $AM$ ,  $KI$  parallela rectae  $BC$ , eritque iuncta  $MI$  parallela rectae  $AB$ . Quum enim ex Constr.  $BCKI$  sit parallelogrammum, erit  $KI=BC$ , et quum  $KI$  parallela sit rectae  $BC$  ex Constr. et  $MK$  parallela rectae  $AC$  (I. 27.) erit angulus  $MKI=ACB$  (I. 29. Cor. 5.): est autem etiam  $MK=AC$  (I. Def. 10.), quare (I. 4.) angulus  $KMI=CAB$ . Quum vero etiam sint  $AMK$ ,  $PAC$  aequales, ut recti, aequales erunt (I. Ax. 3.)  $PAB$ ,  $AMI$ , adeoque  $AB$ ,  $MI$  erunt parallelae (I. 28.). Est autem quadratum  $ABGF=$  parallelogrammo  $ACGL$  (I. 35.). Parallelogrammum  $ACGL$  autem  $=$  parallelogrammo  $ABMI$  (I. 34. Cor. 21.), est enim  $GA=AB$ ,  $AC=AM$ , et angulus  $GAC=BAM$ ; denique  $ABMI=$  rectangulo  $AMNO$  (I. 35.), adeoque quadratum  $ABGF=$  rectangulo  $AMNO$ . Eodem modo ostenditur, esse quadratum  $BCDE$  aequale rectangulo  $CNOK$ , quare quadrata  $ABGF$ ,  $BCDE$  simul aequalia erunt quadrato  $ACKM$ .

9) Aliam satis simplicem theorematis nostri demonstrationem habet Ietzer, quae apud ipsum est octava, et ita habet. Construantur (Fig. 127.) super lateribus  $AB$ ,  $BC$  trianguli in  $B$  rectanguli, versus partem hypotenusae  $AC$ , quadrata  $BCDE$ ,  $ABFG$ , et producat  $FG$  ad  $M$ , donec fiat  $GM=BC$ , ducaturque  $AM$ . Erit itaque, quum  $AG=AB$  (I. Def. 30.),  $GM=BC$  ex Constr. et angulus  $AGM$ , utpote rectus,  $Ff$

$\angle ABC$ , et (I. 4.)  $AM=AC$ , et  $MAG=\angle BAC$ , adeoque, addito communi  $CAG$  (I. Ax. 2.)  $MAC=\angle GAB=\text{recto}$ . Ducatur iam  $MK$  parallela rectae  $AC$ , et  $CK$  parallela rectae  $AM$  (I. 31.), eruntque  $MK=AC=AM=CK$  (I. 34.) et anguli figurae  $AMCK$  omnes recti (I. 34. Cor. 10.), unde  $ACMK$  erit quadratum hypotenusae. Conveniet autem  $DE$ , si opus est, producta, cum recta  $FG$  in  $O$  (I. 29. Cor. 3.), iungatur  $OK$ , eruntque  $DO, OK$  in directum. Nam, quum parallelae sint rectae  $EC, GF$  (I. 28.), erit  $\angle DOF=\angle DEC$  (I. 29.)  $=\text{recto}$  (I. Def. 30.). At sumtum fuit  $GM=BC=OF$ , adeoque erit  $OM=FG=AB$ , et ostensa fuit  $MK=AC$ , et angulus  $AMK$  rectus  $=\angle AMG+\angle MAG$ , unde, demto communi  $\angle AMG$ , erit  $\angle OKM=\angle MAG=\angle BAC$ : itaque (I. 4.) triangulum  $MOK=\angle ABC$ , et nominatim angulus  $\angle MOK=\angle ABC=\text{recto}$ , et  $OK=BC$ . At, quum  $\angle DOF$ , ut vidimus, rectus sit,  $DO, OK$  erunt in directum (Obs. ad I. 15.). Ducatur  $BO$ , et producat, dum cum recta  $MK$  conveniat in  $P$ ; et quum sit  $OK$  aequalis et parallela rectae  $BC$ , erit etiam  $BO$  parallela rectae  $CK$  (I. 33.), adeoque  $BO$  erit perpendicularis ad  $AC, MK$  (I. 29.). His praemissis, erit quadratum  $BCDE = \text{parallelogrammo } BCOK$  (I. 35.)  $= \text{rectangulo } NCKP$  (I. 35.): eodemque modo quadratum  $ABGF = \text{parallelogrammo } AMBO$  (I. 35.)  $= \text{rectangulo } AMNP$  (I. 35.), adeoque quadrata  $BCDE, ABGF$  aequalia rectangulis  $NCKP, AMNP$  simul, i. e. quadrato  $ACMK$ .

10) Constructis omnibus, ut ad Nr. 5. eodem modo, ut ad Nr. 5. (Fig. 128.) ostendetur, esse  $ACHI$  quadratum hypotenusae  $AC$ , et triangulum  $AGI$  esse aequale triangulo  $ABC$ . Pariterque, ob  $AC=CH, CB=CE$  (I. Def. 30.) et angulos ad  $B, E$  rectos, erit (I. 4.) triangulum  $ABC=\angle HEC$ , unde, addito communi  $BLC$ , erit triangulum  $ACL=\angle HEC+\angle BLC$  i. e.  $=\angle BCDE+\angle HLD$ . Est autem, ob  $HE=AB=GF$ , et  $DE=BC=GI$ , etiam (I. Ax. 3.)  $HD=IF$ , et quum praeterea sit angulus  $\angle FIK=\angle GAI$  (I. 32.)  $=\angle BAC=\angle LHD$ , et anguli ad  $F$  et  $D$  recti sint, erit (I. 26.) triangulum  $IFK=\angle HLD$ . Itaque triangulum  $ACL = \text{quadrato } BCDE \text{ addito}$

triangulo IFK. Denique, quum sit  $HC=AC$ , angulus  $HCK=CHE$  (I. 29.)  $=BAC$ , et angulus  $CHK$  rectus, adeoque  $=ACH$ , erit triangulum  $CHK =$  triangulo  $ACL$ , adeoque, demto communi  $BCL$ ,  $HLBK = \triangle ABC = \triangle AGI$ . Itaque  $\triangle ACL + HLBK + ABKI = BCDE + IFK + AGI + ABKI$  i. e. quadratum  $ACHI =$  quadratis  $BCDE$ ,  $ABFG$  simul. Hanc demonstrationem habet Gregorius a St. Vincentio in opere geometrico de circuli quadratura L. I. P. II. Prop. XLIII. p. 30. Convenit cum ea, quam Schkoten Andreae ab Oudtshorn tribuit. Cf. Scherz. l. c. Dem. 10. Müller. Dem. 9.

11) Construat (Fig. 129.) super  $BC$  quadratum  $BCDE$ , sumitque  $DF=AB$ , constituatur super  $DF$  quadratum  $FDGI$ , quod (ob  $DF=AB$ ) aequale erit quadrato ex  $AB$  (I. 46. Cor.), eruntque (ob angulos rectos  $BDE$ ,  $FDG$ )  $ED$ ,  $DG$  in directum (I. 14.). Deinde ducatur recta  $AI$ , eritque, ob  $DF=BA$  (ex constr.), si auferatur communis  $BF$ ,  $AF=BD=BC$ . Et, quum sit  $FI=FD=AB$ , erit (I. 4.)  $AI=AC$ , et angulus  $FAI=ACB$ , adeoque  $FAI+FAC=ACB+FAC=$  angulo recto (I. 32.). Si deinde per  $C$  ducatur  $CH$  parallela rectae  $AI$ , quae cum recta  $EG$  conveniat in  $H$ , et iungatur  $HI$ , erit  $ACHI$  quadratum hypotenusae. Nam, quum ex constr. sit  $CH$  parallela rectae  $AI$ , et  $CAI=FAI+FAC=$  angulo recto, erit  $ACH$  rectus (I. 29.), adeoque  $ACH=BCE$  (I. Def. 30.), vel, demto communi  $BCH$ , erit  $ACB=HCE$  (I. Ax. 3.). Et quum praeterea sit  $CB=CE$  (I. Def. 30.) et  $ABC=CED$  (I. Def. 30.), erit (I. 26.)  $CH=CA=AI$ , et triangulum  $CEH=CBA$ . Quum itaque  $CH$ ,  $AI$  sint aequales et parallelae, erunt etiam  $AC$ ,  $HI$  aequales et parallelae (I. 33.), adeoque etiam angulorum  $AIH$ ,  $CHI$  uterque rectus est (I. 29.) et  $ACHI$  quadratum hypotenusae  $AC$ . Hoc autem quadratum aequale est quadratis  $FG$ ,  $BE$  simul. Habet enim cum iis communia spatia  $IFKH$ ,  $CBK$ , et triangulum  $ABC$  ostensum fuit aequale esse triangulo  $HEC$ , pariterque triangulum  $AFI$  aequale erit triangulo  $HGI$  (I. 4.) ob  $AI=IH$ ,  $IF=IG$ , et angulos  $AFI$ ,  $FIG$  rectos, adeoque, demto communi  $FIH$ , angulum

$AIF=HIG$ . Hanc demonstrationem, quam ad Schootenium refert, habet etiam Christ. Sturmius Math. enunc. p. 31. et Develey. Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. N<sup>o</sup>. 42. Dem. 4.

12) Reliquis constructis et demonstratis ut nr. 10. ducatur (Fig. 130.) per H recta HM parallela rectae BD (quo itaque angulus HMK rectus efficitur) et per L recta OLN parallela rectae BC, et ostendetur, ut No. 10. esse triangulum  $AGI=ABC$ , pariterque triangulum  $IFK=HLD=LOH$  (I. 34.). Praeterea autem est  $LDEN=LBMO$  (I. 43.) et triangulum  $CNL=KMH$  (I. 26.): est enim  $HM=BD$  (I. 34.)  $=DE$  (I. Def. 30.)  $=LN$  (I. 34.), angulus  $M=N$  (I. Def. 30.), et angulus  $KHM=EHIC$  (quia, addito communi  $MHC$ , utrimque rectus prodit)  $=NLC$  (I. 29.). Totum igitur quadratum ex  $AC=$  quadratis ex  $AB, BC$  simul. Hanc demonstrationem habet Coërsius p. 158. sqq.

Caeterum, omissis pluribus aliis demonstrationibus, quae habentur apud Coërsium, Scherzium, Ietzius, qui viginti tres habet, Hoffmannum, qui triginta duas exhibet, Müllerum, aliosque, addimus adhuc nonnullas alias, quae, quamvis narrantur propositionibus ab Euclide posthac demum demonstrandis, vitio tamen logico, quod circulum in demonstrando vocant, minime laborant, quod nempe eae, quibus nostrae hae iunguntur, propositiones non vice versa ope theorematum Pythagorici, aut aliorum ab eo pendentium theorematum, sed ita potius demonstrari possunt, ut, si quis velit, ea ante I. 47. ponere possit. Huc pertinet

13) Haud inelegans demonstratio Coërsii p. 148. sqq. et Sturmii in Mathesi enuncleata p. 183., quam etiam habet Scherz. Dem. 7., Müller. Dem. 3., et Ietze. Dem. XV., qui eandem etiam prolatam dicit ab Hombergero Franco in Dissertatione de Magistro Matheseos. Wittenberg. 1701. Praeside Feuerlein. edita. Ea huc fere redit. Triangulum rectangulum  $ABC$  aut aequicrurum erit, aut non. Sit 1) aequicrurum, et constructis (Fig. 131.) quadratis  $BG, BE$ , ducantur diametri  $AF, CD$ , et iungantur  $FD$ , eritque  $ACFD$  quadratum hy-

potentiae. Nempe  $\triangle ABC$ ,  $ABF$ ,  $CBD$ ,  $FBD$  aequalia sunt (I. 4.), adeoque  $AC=AF=CD=FD$ , et ob angulos aequales et semirectos (I. 32. Cor. 7.)  $BAC=BCA=BDC=BDF=BFA=BAF$ , anguli  $FAC$ ,  $ACD$ ,  $CDF$ ,  $DFA$  recti sunt, et figura  $ACDF$  est quadratum (I. Def. 30.). Et, quum triangula  $ABC$ ,  $ABF$ ,  $CBD$ ,  $FBD$  aequalia sint, quodvis eorum quarta pars est quadrati  $ACFD$ . At triangulum  $ABF$  est pars dimidia quadrati  $AG$  (I. 34.), et triangulum  $CBD$  pars dimidia quadrati  $BE$  vel quadrati  $AG$ : itaque quadrata  $AG$ ,  $BE$  simul aequantur quadrato  $ACFD$ . (Hinc, ut hoc obiter notemus, deducitur, in quovis triangulo, rectangulo isosceli quadratum hypotenusae quadruplum esse trianguli propositi.). Sit vero 2) (Fig. 132.) triangulum  $ABC$  ad  $B$  rectangulum non aequicrurum, sed  $AB > BC$ , et a) facile demonstrabitur, quadratum hypotenusae superare triangulum  $ABC$  quater sumtum quadrato, quod fit a differentia reliquorum laterum, seu, quod idem est, quadratum hypotenusae esse aequale triangulo proposito quater sumto, una cum quadrato differentiae reliquorum laterum. Nempe, constructis quadratis  $BG$ ,  $BE$ , producantur rectae  $AG$ ,  $EC$ , donec in  $K$  convenient, deinde, constructo super  $AC$  quadrato  $ACHI$ , ducatur  $ILN$  parallela rectae  $CK$  (I. 31.) et  $HNM$  parallela rectae  $GK$ , eritque angulus  $IAL + KAC$  utpote rectus (I. Def. 30.)  $= KCA + KAC$  (I. 32.), adeoque  $IAL = KCA$ , et, ob angulos  $L$ ,  $K$  rectos, et  $AI = AC$ , est triangulum  $IAL = ACK$  (I. 26.). Eodem modo ostendetur, aequalia esse omnia triangula  $ACK$ ,  $IAL$ ,  $HIN$ ,  $CHM$ ,  $CAB$ . Praeterea, quum sit  $KL = AL - AK = CK - AK = AB - BC$ , et eodem modo  $LN = NM = KM = AB - BC$ , et anguli  $K$ ,  $L$ ,  $N$ ,  $M$ , recti, erit  $KLMN$  quadratum differentiae  $AB - BC$ , adeoque quadratum  $ACHI =$  triangulo  $ABC$  quater sumto, una cum quadrato differentiae laterum  $AB$ ,  $BC$ , vel, quod eodem redit, quadratum  $ACHI$  aequale est duplo rectangulo sub  $AB$ ,  $BC$  una cum quadrato differentiae horum laterum. Iam vero b) ex II. 7. sumere licet, quadratum differentiae laterum  $AB$ ,  $BC$  aequale esse quadratis ex  $AB$ ,  $BC$ , demto duplo rectan-

gulo sub  $AB, BC$ . Itaque quadratum  $ACHI$  æquale erit quadratis ex  $AB, BC$ .

Aliæ adhuc demonstrationes nituntur doctrina de proportionibus et figurarum similitudine, quam pariter certum est, sine ope theorematum Pythagoræi adstrui et posse et solere. Huic pertinet

14) Sequens demonstratio. Constructo (Fig. 133.) super hypotenusa  $AC$  trianguli  $ABC$  ad  $B$  rectanguli quadrato  $ACMK$ , ducatur  $BNO$  parallela rectæ  $CK$ , eritque  $BN$  perpendicularis ad  $AC$  (I. 29.), itaque similia erunt triangula  $ABC, ANB, BNC$  (VI. 8.) unde erit  $AC:AB=AB:AN$  (VI. Def. 1.) adeoque quadratum ex  $AB =$  rectangulo ex  $AC, AN$  (VI. 17.) i. e. rectangulo  $ANOM$ : pariterque  $AC:BC=BC:CN$  (VI. Def. 1.), adeoque quadratum ex  $BC =$  rectangulo ex  $AC, CN$  (VI. 17.) i. e. rectangulo  $CNOK$ . Quadrata igitur ex  $AB, BC$  simul æqualia erunt rectangulis  $AO, NK$  simul i. e. quadrato ex  $AC$ .

Haec demonstratio est apud Scherzium XIV., et Coësius ea nititur in scholio ad VI. 17. Eandem demonstrationem habet Devey. *Elém. de Géom.* L. IV. Ch. III. Th. 9. Müller. *Dem.* 16. Hoffmann. *Dem.* 26. Caeterum eodem ea credit, quo illa, quam a Grusonio exhibitam esse diximus in I. 41. Cor. 6., nisi quod Grusonius rem sine consideratione proportionum ac figurarum similium expedit.

15) Paulo aliter similis demonstratio ita sisti poterit. Triangulum  $ABN$  (Fig. 133.) erit ad triangulum  $ABC$ , ut  $ABq$  ad  $ACq$  (VI. 19.), et triangulum  $BNC$  ad triangulum  $ABC$ , ut  $BCq$  ad  $ACq$  (VI. 19.). Hinc  $\triangle ABN + \triangle BNC : \triangle ABC = ABq + BCq : ACq$  (V. 24.). Atqui  $\triangle ABN + \triangle BNC = \triangle ABC$ , itaque  $ABq + BCq = ACq$  (V. Def. 5.). Hanc demonstrationem habet Bézout. *Elém. de Géom.* Hoffmann. *Bew.* 27.

16) Brevior adhuc erit sequens demonstratio. Quam ex VI. 31. in triangulo rectilineo figura quaecunque rectilinea super hypotenusa descripta æqualis sit duabus similibus et similiter descriptis figuris super cathetis, nominatim idem



valet de quadratis, quippe quae sunt figurae rectilineae similes (VI. Def. 1.). Haec demonstratio ultimo loco habetur apud Scharzium l. c. et Ietza l. c. et apud Coëtium in scholio 2. ad VI. 31.

17) Finem his demonstrationibus faciat sequens, quae est apud Ietrium 20., et quam ille ad Ioann. Ioachim. Langium Mathes. Prof. Halensem refert. Sit (Fig. 134.) triangulum ad  $B$  rectangulum, super hypotenusa  $AC$  construat quadratum  $ACHI$  (I. 46.), et centro  $C$  radio  $CA$  describatur semicirculus  $LAM$ , eritque  $LB = LC - BC = AC - BC$ , et  $BM = CM + BC = AC + BC$ . Sumta deinde  $CE = BC$  (I. 3.) construat super  $CE$  quadratum  $CEFD$ , quod itaque aequale erit quadrato ex  $BC$ , eritque  $DH = CH - CD = AC - BC$ , pariterque  $AE = AC - CE = AC - BC$ . Producat  $EF$ , dum cum recta  $IH$  conveniat in  $G$ , eritque  $GI = AE$  (I. 34.)  $= AC - BC = DH$ . Denique producantur  $AI$  et  $EG$  ad  $N$  et  $K$  ita, ut  $IN = GK = GH = CE = BC$ , et iungatur  $NK$ , eritque  $IGNK$  rectangulum (I. 33. et 34.), idque  $=$  rectangulo  $FGHD$  (I. 34. Cor. 21.) quia  $FG = IG$ , et  $GK = GH$ . Quadratum igitur  $ACHI$  aequale est quadrato  $EFDC$  simul cum rectangulis  $AEGI$ ,  $FDGH$  i. e. quadrato ex  $BC$  una cum rectangulo  $AENK$ . Hoc ipsum rectangulum autem continetur sub rectis  $AE = AC - BC$ , et  $AN = AI + IN = AC + BC$ ; itaque quadratum hypotenusae  $AC$  aequale est quadrato unius catheti  $BC$ , una cum rectangulo, quod continetur sub summa huius catheti et hypotenusae  $(AC + BC)$ , et sub differentia earum  $(AC - BC)$ . At, ductis rectis  $AL$ ,  $AM$  angulus in semicirculo rectus erit (III. 31. quae non pendet a I. 47.), adeoque (VI. 8.) erit  $LB : BA = BA : BM$ , i. e.  $AC - BC : BA = BA : AC + BC$ , ac proinde (VI. 17.)  $BA^2 = (AC - BC) \times (AC + BC)$ . Itaque quadratum hypotenusae aequale est quadratis ex  $BC$  et  $AB$  simul.

Cor. Ex hac observatione, quod nempe in triangulo rectangulo  $ABC$  semper sit  $AC - BC : BA = BA : AC + BC$  facile deduci possunt, quod Langius ad finem dissertationis Ietzii

notat, regulæ pro inveniendis numeris integris, quorum quadrata (numeri quadrati) ita comparata sint, ut duo simul aequalia sint tertio. Posito nempe  $AC - BC = a$ ,  $BA = b$ , erit  $a : b = b : \frac{b^2}{a}$ , adeoque  $AC + BC = \frac{b^2}{a}$ , unde  $(AC$

$$+ BC) + (AC - BC) = 2AC = a + \frac{b^2 - a^2 + b^2}{a}, \text{ adeoque}$$

$$AC = \frac{a^2 + b^2}{2a}, (AC + BC) - (AC - BC) = 2BC = \frac{b^2}{a} - a = \frac{b^2 - a^2}{a}, \text{ adeoque } BC = \frac{b^2 - a^2}{2a}. \text{ Tres igitur rectæ } AB, BC,$$

$$AC, \text{ vel numeri iis analogi esse poterunt hi } b, \frac{b^2 - a^2}{2a}, \frac{b^2 + a^2}{2a};$$

dummodo duo ultimi sint numeri integri, vel, si omnes per  $2a$  multiplicentur:  $2ab$ ;  $b^2 - a^2$ ,  $b^2 + a^2$ , quicum sumitis  $a$  et  $b$  numeris integris quibuscunque omnes sint numeri integri, efficient, quod erat propositum. Hanc ipsam regulam supra ad I. 48. attulimus. Ex ea etiam derivari possunt reliquæ duæ, quæ ad Pythagoram et Platonem referuntur. Nempe in regulâ a Pythagora allata numerus, qui hypotenusam exprimit, unitate semper excedit numerum alterius catheti. Quodsi itaque ponas  $b^2 + a^2 - 2ab = 1$ , erit  $(b - a) = 1$ , adeoque etiam  $b - a = 1$ , vel  $b = a + 1$ . Iam; si hoc sumas, erunt tres numeri  $2ab = 2a^2 + 2a$ ;  $b^2 - a^2 = 2a + 1$ ;  $b^2 + a^2 = 2a^2 + 2a + 1$  eadem formâ comprehensi, quæ supra exhibita fuit. Pariter in regulâ a Platone data numerus, qui hypotenusam exprimit, bilaris semper excedit numerum alterius catheti. Quodsi ponas  $b^2 + a^2 = (b^2 - a^2) = 2$ , vel  $2a^2 = 2$ , adeoque  $a^2 = 1$ , et  $a = 1$ , erit  $2ab = 2b$ ; et  $b^2 - a^2 = b^2 - 1$ , et  $b^2 + a^2 = b^2 + 1$ , quæ ipsa est regula Platonis. Denique patet, quod Largius observat, multas alias speciales regulas hæc generaliore contineri, v. c. si quis velit, ut numerus hypotenusæ numerum alterius catheti quaternario superet, erit  $b^2 + a^2 - 2ab = 4$ , adeoque  $b - a = 2$ , vel  $b = a + 2$ , et numeri  $2ab = 2a^2 + 4a$ ;  $b^2 - a^2 = 4a + 4$ ;  $b^2 + a^2 = 2a^2 + 4a + 4$ . Vel

generalius, si ponatur  $b^2 + a^2 - 2ab = m^2$ , adeoque  $b - a = m$ ,  
 vel  $b = a + m$ , erit  $2ab = 2a^2 + 2am$ ;  $b^2 - a^2 = 2am + m^2$ ;  $b^2 +$   
 $a^2 = 2a^2 + 2am + m^2$ . Conferri hic meretur Müller. system.  
 Darstell. der wichtigst. bisher. Beweise des pythagor. Lehr-  
 satzes, mit einer ausführlichen Theorie der Zahlen-Dreiecke.  
 Nürnberg. 1819.

---

---

### EXCURSUS. III.

A D

## ELEMENTORUM

I. 47. 48. II. 12. 13.

1) **P**rouit in triangulo aliquo angulus aliquis rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, quadratum lateris huic angulo oppositi fore aequale, aut maius, aut minus, quam summa quadratorum duorum reliquorum laterum eiusdem trianguli, et vice versa vidimus ad I. 47. II. 12. 13. Pariter autem angulorum trianguli, laterumque ipsis oppositorum mutua aliqua relatio e sequentibus patebit, quibus praeterea nonnullae propositionum istarum adplicationes continentur. Brevitatis causa ad initium statim monemus, omnia, quae in hoc excursu sequuntur, ad nr. usque 23. desumpta esse e Pflaedereri Schol. saepius citatis 220—245.

2) Si recta a vertice trianguli ad punctum, quo basis bifariam secatur, ducta aequalis est semissi basis, angulus ad verticem est rectus, quod facile deducitur e I. 32. contra angulus ad verticem obtusus vel acutus erit, prout recta ab eo ad punctum, quo basis bisecatur, ducta semisse basis est minor aut maior, quod consequitur ex I. 18. I. 52. I. 13.

3) Et vice versa, si angulus ad verticem trianguli rectus est, recta ab eo ad punctum ducta, quo bifariam secatur basis, aequalis est semissi basis; si ille angulus obtusus fuerit, haec recta minor erit semisse basis; demique, si ille angulus acutus fuerit, haec recta maior erit semisse basis, quod apagogice facile demonstratur.

4) Quae e vertice trianguli sequicruri ad punctum, quo bifariam secatur basis, ducitur recta, ad angulos rectos basi insistit (I. 8. vel Obs. ad I. 10.). Quae autem a trianguli non sequicruri vertice ad punctum bisectionis basis agitur recta, oblique in basin incidit, ita ut angulum obtusum cum ea efficiat ad partes cruris maioris, acutum ad partem cruris minoris (I. 25. I. 15.).

5) In triangulo igitur non aequicruro, cuius anguli ad basin ambo sunt acuti, perpendicularum ab vertice in basin demissum hanc in inaequalia secat, sic, ut maius segmentum adiaceat cruri maiori, minus minori (nr. 4. et Cor. I. 17.). Idem etiam consequitur ex I. 47.

6) In quocunque triangulo non aequicruro differentia quadratorum crurum aequalis est duplo rectangulo sub basi et sub eius segmento duobus intercepto punctis, quorum uno bifariam secatur basis, altero in ipsam incidit perpendicularum ex vertice trianguli super eam demissum.

Sint (Figg. 177. 178. 179.) triangula non aequicrura, nominatim sit  $AC > AB$ , sintque eorum bases bifariam sectae in puncto G.

a) Si (Fig. 177.) rectus est angulus B, qui cruri maiori opponitur: est  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  (I. 47.)  $= AB^2 + 2GB \times BC$  (II. 2. Cor. 1.).

b) Si (Fig. 178.) angulus ABC est obtusus, et AD perpendicularis ad BC: est  $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD \times BC$  (H. 12.)  $= AB^2 + 2GB \times BC + 2BD \times BC$  (II. 2. Cor. 1.)  $= AB^2 + 2GD \times BC$  (II. 1.).

c) Si (Fig. 179.) angulus ABC est acutus, et AD perpendicularis ad BC: est  $AC^2 + 2DB \times BC = AB^2 + BC^2$  (II. 13.)  $= AB^2 + 2GB \times BC$  (II. 2. Cor. 1.)  $= AB^2 + 2GD \times BC + 2DB \times BC$  (II. 1.), itaque  $AC^2 = AB^2 + 2GD \times BC$ . Proinde in triangulo rectangulo  $AC^2 - AB^2 = 2GB \times BC$ , in triangulis obliquangulis  $AC^2 - AB^2 = 2GD \times BC$ .

Aliter ita: cum angulus C, qui lateri  $AB < AC$  opponitur, acutus sit (I. 28. I. 17.), generatim (Obs. 1. ad II. 13.) est  $AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2BC \times CD$ , seu (II. 2. Cor. 1. et II. 1.)

$AC^2 + 2BC \times CG = AB^2 + 2BC \times CD$ , igitur  $AC^2 = AB^2 + 2BC \times GD$ , et  $AC^2 - AB^2 = 2BC \times GD$ . Huc redeunt demonstrationes Whistoni p. 61. sq. Gilberti p. 295.

7) Duobus casibus posterioribus nr. praeced. sunt

$$AC^2 = CD^2 + AD^2; AB^2 = BD^2 + AD^2,$$

unde  $AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2$ . Porro sunt

$$CD^2 - BD^2 = (CD + BD)(CD - BD) \text{ (II. 5. Cor. 10.)},$$

et casu anguli obtusi  $CD + BD = 2GD$ ,  $CD - BD = BC$ ,

casu autem anguli acuti  $CD + BD = BC$ ,  $CD - BD = 2GD$ .

Quare utroque casu  $CD^2 - BD^2 = 2BC \times GD$ . Utrumque assertum  $AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2 = 2BC \times GD$  complectuntur, et posterius ex prior alterutro modo hic indicato inferunt Pappi Lemma 2. vel 4. in Apollonii Locor. Plan. L. II. (Collect. Math. fol. 232. b. sq.), Apollonius von Pergea ebene Oerter p. 13. sq. 27. sq. 208. sq. ac Gilbert. die Geometrie nach le Gendre, Simpson u. s. w. I. Th. Halle 1798. p. 304. sq.). Lemma Pappi de triangulo universim enunciatur. Schema ei adiunctum non nisi casum anguli acuti exhibet, demonstratio tamen aequae ad casum anguli obtusi pertinet. Ac II. Prop. 1, Apollonii, quae posteriore huius lemmatis parte nititur, eam non solum ad hos casus, sed etiam ad casum anguli recti extensam requirit.

8) Cuiusvis trianguli quadrata duorum crurum simul duplicata sunt quadratorum dimidiaae basis ac rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum, quo basis bifariam secatur.

Triangulorum ABC (Fig. 177—180.) bases BC bifariam in puncto G secantur, et ab verticibus A ad puncta G ducantur rectae AG,

a) Cum in triangulo aequicruro (Fig. 180.) recta AG sit basi perpendicularis (Obs. ad I. 10.), ideoque sit  $AC^2 = AB^2 = GC^2 + AG^2 = GB^2 + AG^2$  (I. 47.) est  $AC^2 + AB^2 = 2(GB^2 + AG^2)$ .

Sint, ut (Fig. 177—179.) triangulorum ABC crura inaequalia, nempe  $AC > AB$ . Cum in his recta AG oblique in basin BC incidat (nr. 4.): sit  $\alpha$  ipsum crus minus AB basi BC perpendicularare: tum  $AC^2 = AG^2 + GC^2 + 2CG \times GB$  (nr.

4. et II. 12.)  $= AGq + GBq + 2GBq$ , ob  $CG = OB$  (constr.): itaque  $ACq + ABq = AGq + ABq + GBq + 2GBq = 2AGq + 2GBq$ , ob  $ABq + GBq = AGq$  (I. 47.). Aliter ita:  $ACq = ABq + BCq$  (I. 47.)  $= ABq + 4GBq$  (Constr. et II. 4. Cor. 2.), quare  $ACq + ABq = 2ABq + 4GBq = 2(ABq + GBq) + 2GBq = 2AGq + 2GBq$  (I. 47.).  $\beta$ ) Si etiam crux minus AB basi BC oblique insistat, ex vertice A demittatur in basin BC perpendicularum AD, quod ad partes anguli acuti AGB cadet (nr. 4.). Tunc cum angulus AGC sit obtusus, AGB acutus, sunt  $ACq = AGq + CGq + 2CG \times GD$  (II. 12.)  $= AGq + GBq + 2GB \times GD$ , ob  $CG = GB$  (Constr.) at  $ABq = AGq + GBq - 2GB \times GD$  (II. 13. et Obs. 1. ad II. 13.). Quare  $ACq + ABq = 2(AGq + GBq)$ .

Aliter ita:  $ACq = ADq + CDq$  (I. 47.)

$$ABq = ADq + BDq$$

$$\begin{aligned} \text{igitur } ACq + ABq &= 2ADq + CDq + BDq \\ &= 2ADq + 2GDq + 2GBq \text{ (II. 9. aut II. 10.)} \\ &= 2AGq + 2GBq \text{ (I. 47.).} \end{aligned}$$

9) Propositionem nr. praeced. traditam exhibent Pappi lemma 4. vel 6. in Apollonii Locor. Planor. Lib. II. Collect. Mathem. fol. 234. b. sq.; Apollonius von Perger ebenes Oert. p. 15. 29. 254. sq.; Serenus de Coni sectione Prop. 16. p. 46. sq.; Clavius Euclid. Elem. Francof. 1607. p. 208. sq.; Gregorius a St. Vincentio p. 28. sq.; Franc. a Schooten. Exercitat. Mathem. libr. V. Lugd. Bat. 1657. Prop. Geom. Prop. 18. p. 62. sq.; Viviani de locis solidis libr. III. Prop. 6. p. 34. sq.; Whiston. p. 62.; Playfair. p. 65. sq.; van Swinden. p. 78.; Gilbert. p. 307. sq.; Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 37. Et Simpson. quidem facile adhuc inde et ex I. 34. Cor. 1. deducit sequens theorema: si e puncto aliquo intra rectangulum ducantur rectae ad quatuor eius angulos, summa quadratorum duarum rectarum ad duos oppositos angulos ductarum aequalis est summae quadratorum duarum reliquarum rectarum. Idem theorema van Swinden. Anfangsgr. der Messk. Iena 1797. p. 74. ex I. 47. et I. 34. deducit. Pappus ac Whiston, casum

nr. b.  $\beta$ . solum, hic priori, ille posteriori methodo demonstratum sistunt, propositum autem generatim enunciant, quod et supponit Apollonii libr. II. Prop. 5., cui apud Pappum illud inservit. Clavius ac Franc. a Schooten. omnes recensent ac demonstrant casus: ille casum nr. b.  $\alpha$ . modo posteriori, hic priori; alterum nr. b.  $\beta$ . uterque modo posteriori. Gregorius casu nr.  $\alpha$ . omisso casum nr. b.  $\alpha$ . adstruit methodo priori: et casum nr. b.  $\beta$ . in duos dividit, quorum priorem, ubi nempe triangulum est rectangulum, pariter modo priori, alterum posteriori stabilis. Serenus, Viviani, Gilbert. hic exposito, illi strictim indicato et ad I. 47. remisso casu nr.  $\alpha$ . duos casus nr. b. una demonstratione complectuntur: Viviani quidem ac Gilbert. priori modo iuxta Obs. 1. ad II. 13., cui licet alteram casus nr. b.  $\beta$ . demonstrationem subiungit, Serenus autem sequenti methodo simili priori nr. b.  $\beta$ . Cum ob  $AC > AB$  (supp.) sit (Fig. 181–183.) angulus  $AGC$  obtusus,  $AGB$  acutus (nr. 4.): ad huius partes cadit perpendicularum  $BF$  ex puncto  $B$  in rectam  $AG$  demissum, quicumque sit anguli  $ABC$ ,  $BAG$ ; et perpendicularum  $CK$  ex puncto  $C$  in eandem  $AG$  demissum in ipsam ultra  $AG$  productam incidit ad partes anguli  $CGK$  deinceps positi obtuso  $AGC$  (I. 17. Cor. 5.): atque ob  $GC = GB$  (Constr.) et angulos  $K = BFG$  (Constr.),  $CGK = BCF$  (I. 15.), est  $GK = GF$  (I. 26.). Proinde  $ACq = AGq + GCq + 2AG \times GK$  (II. 12.)  $= AGq + GBq + 2AG \times GF$ .  $ABq = AGq + GBq - 2AG \times GF$  (Obs. 1. ad II. 13.), et  $ACq + ABq = 2(AGq + GBq)$ . Textus Sereni praeter figuram trianguli aequicruri et acutanguli adiuncta est tertia angulum  $ABC$  sistens obtusum: eo itaque saltim modo extensam supponens propositionem II. 13. qui Obs. 1. a. ad II. 13. indicatur: quod tamen ad propositum universim evincendum haud sufficit.

10) Casum propositionis praecedentis (Fig. 180.), quo  $AF = AC$ ,

$$\text{adeoque } ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2(AGq + GBq)$$

$$\text{et } ABq = AGq + GBq,$$

etiam exprimit assertum: trianguli isoscelis quadratum cruris



aequari quadrato rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum bisectionis basis et rectangulo sub segmentis basis, in quae puncto illo dividitur, simul. Quod assertum perstat, quodcumque basis punctum M loco puncti bisectionis G accipitur. Etenim

$$\begin{aligned} AB^2 &= AG^2 + GB^2 \text{ (I. 47.)} \\ &= AG^2 + GM^2 + BM \times MC \text{ (II. 5.)} \\ &= AM^2 + BM \times MC \text{ (I. 47.).} \end{aligned}$$

Sed, si (Fig. 184.) punctum M sumitur in basi BC producta:

$$\begin{aligned} \text{fit } AB^2 &= AG^2 + GB^2 \text{ (I. 47.)} \\ &= AG^2 + GM^2 - BM \times MC \text{ (II. 6.)} \\ &= AM^2 - BM \times MC \text{ (I. 47.)} \end{aligned}$$

$$\text{seu } AB^2 + BM \times MC = AM^2.$$

Trianguli igitur isoscelis quadratum cruris excedit quadratum rectae ab vertice trianguli ad punctum quodcumque ipsius basis ductae, rectangulo sub segmentis basis, quae punctum hoc dirimit: sed quadratum rectae ab vertice trianguli ad quodlibet basis continuatae punctum ductae excedit quadratum cruris, rectangulo sub rectis, quae pariter puncto illi et extremis basis interiacent.

Generatim differentia quadratorum cruris trianguli isoscelis, et rectae ab vertice eius ductae ad punctum quodcumque basis ipsius, vel productae, aequalis est rectangulo sub rectis, quae puncto illi et extremis basis interiacent.

Lemma hoc Rob. Simson. praemittit propositioni 76. datorum (p. 107 sq.). Priorem eius partem demonstrationi primae eiusdem propositionis apud ipsos 67., ex veteri Scholiaste subiungit Claud. Hardy. (p. 121. sq.): in nota annectit Dav. Gregorius (p. 503). Eandem propositionem tradit Gilbert. (p. 351. 357.) et Gruson. eam pro novo affert l. c. supra in l. 41. Cor. 4. §. 21.

11) Quodsi autem ab trianguli non aequicruri ABC vertice A ducitur AM recta (Fig. 185. 186.) ad punctum quodcumque M basis BC, ab puncto bisectionis eius G diversum; bifariam vero in L secatur AM, et iungitur GL recta: quadrata crurum trianguli simul excedunt quadratum rectae AM

et quadruplum quadratum rectae GL, duplo rectangulo sub segmentis BM et MC. Et si ad basis productae (Fig. 187. 188.) punctum quodcunque M ab vertice A recta AM agitur, pariterque in L bifariam secatur, ac recta GL iungitur: quadratum rectae AM et quadruplum rectae GL quadratum simul excedunt summam quadratorum crurum trianguli duplo sub BM et MC rectangulo. Nempe ducta AG recta, sunt

$$ACq + ABq = 2AGq + 2GBq \text{ (nr. 8.)}$$

$$= 2AGq + 2GMq + 2BM \times MC \text{ si M in ipsa basi situm est}$$

$$= 4ALq + 4GLq + 2BM \times MC \text{ (nr. 8.)}$$

$$= AMq + 4GLq + 2BM \times MC \text{ (II. 4. Cor. 2.)}$$

$$\text{vel } = 2AGq + 2GMq - 2BM \times MC \text{ si M in producta basi fuerit,}$$

$$= 4ALq + 4GLq - 2BM \times MC \text{ (nr. 8.)}$$

$$= AMq + 4GLq - 2MB \times MC \text{ (II. 4. Cor. 2.)}$$

12) Eadem constructio applicatur ad triangulum aequicrurum (vid. Fig. 180. 184.). Tum vero, ob angulum AGM rectum (Obs. ad I. 10.) est  $GL = AL = ML$  (nr. 3.);  $2GL = AM$ ;  $4GLq = AMq$  (II. 4. Cor. 2.). Unde ex praeced. si punctum M in ipsa basi fuerit,

$$\text{erit } ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2AMq + 2MB \times MC$$

$$ABq = AMq + BM \times MC$$

si vero punctum M sit in basi producta, erit

$$ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2AMq - 2BM \times MC$$

$$\text{et } ABq = AMq - BM \times MC$$

conformiter nr. 10.

13) Si in trianguli aequicruri alterutrum crus perpendicularis demittitur ex vertice oppositi anguli ad basin; rectangulum sub hoc crure et sub eius segmento, quod basi et perpendiculari interiacet, dimidium est quadrati basis (Pappi Theor. 1. subiunctum, Prop. XXV. lib. V. Collect. mathem. fol. 89.).

Ob angulos ad basin BC trianguli aequicruri ABC (Fig. 189—191) acutos (I. 5. I. 32.), ad partes anguli C cadit perpendicularum BD in crus AC demissum ex vertice B anguli

oppositi ad basin (I. 17. Cor. 5.): idemque cum altero crure BA coincidit (Fig. 189.), si trianguli ad verticem A angulus est rectus; intra triangulum in crus ipsum CA cadit (Fig. 190.), si angulus A est acutus; extra triangulum in productam crus CA incidit (Fig. 191.), si trianguli ad verticem angulus BAC est obtusus (I. 17. Cor. 5.).

Primo casu est  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (I. 47.)  $= 2CA^2$ , ideoque  $CA^2 = \frac{1}{2}BC^2$ .

Secundo casu est  $BC^2 + 2CA \times AD = AB^2 + AC^2$  (II. 13.)  
 $= 2CA^2 = 2CA \times AD + 2AC \times CD$  (II. 2.)

igitur  $BC^2 = 2AC \times CD$

et rectang.  $AC \times CD = \frac{1}{2}BC^2$ .

Tertio casu est  $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2CA \times AD$  (II. 12.)  
 $= 2(AC^2 + CA \times AD) = 2AC \times CD$  (II. 3.), itaque  
 rectang.  $ACD = \frac{1}{2}BC^2$ .

Ita Pappus apud Commandinum. Succinctius et generatim ob angulum C acutum est omnibus casibus

$$AB^2 + 2AC \times CD = BC^2 + AC^2 \text{ (Obs. 1. ad II. 13.)}$$

et ob  $AB = AC$ ,  $2AC \times CD = BC^2$

rectang.  $AC \times CD = \frac{1}{2}BC^2$ .

1) Sit 1) ABCD parallelogrammum rectangulum (Fig. 192.), cuius iungantur diagonales AC, BD, erit

$$AZ^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (I. 47.)}$$

$$BD^2 = AB^2 + CD^2 + DA^2$$

$$CD^2$$

ideoque  $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$   
 $= 2(AB^2 + BC^2)$ .

Posteriorius immediate etiam inde consequitur, quod parallelogrammi rectanguli diagonales invicem sunt aequales (I. 34. Cor. 17.).

2) Sit (Fig. 193.) ABCD parallelogrammum obliquangulum, cuius igitur duo anguli, qui eidem lateri e. gr. AB adiacent, et qui (I. 29.) simul valent duos rectos, sunt unus DAB acutus, alter CBA obtusus. Ductis eius diagonalibus AC, BD (quarum prior, quae vertex angulorum acutorum parallelogrammi iungit, seu obtusis eius angulis opponitur,

Gg

altrea maior est (I. 34. Cor. 17.); in latus parallelogrammi quodlibet AB, si parallelogrammum est aequilaterum, et in laterum contiguum maius AB, si parallelogrammum non est aequilaterum, ab extremis D, C lateris oppositi CD demittantur perpendiculara DE, CF: quorum prius, ob angulum

$\angle DBA < \angle DAB$  (Supp. et I. 5. I. 18.) ideoque acutum (I. 17.

Cor. 1.), pariterque (Supp.) acutum DAB intra triangulum ABD, alterum ob angulum CBA obtusum, extra triangulum ABC cadit (I. 17. Cor. 5.), ita ut sit  $BF = AE$  (I. 26.), ob  $BC = AD$  (I. 34.) atque angulos  $CBF = DAF$  (I. 29.) et  $F = AED$  rectos (Constr.).

Igitur  $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BF$  (II. 12.)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AE \text{ (Obs. 1. a. ad II. 13.)}$$

$$= CD^2 + AD^2 - 2AB \times BF \text{ (I. 34. et Dem.)}$$

atque  $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ .

Proinde in omni parallelogrammo quadrata diagonalium aequalia sunt quadratis laterum simul, seu dupla sunt quadratorum duorum laterum contiguum.

Et eo, qui hic traditur, modo (simpliciter tamen pro  $BD^2$  in subsidium vocata II. 13. nec indicata lateris AB, in quod perpendiculara deducuntur determinatione, quae demum, ad quaecunque triangula iuxta Obs. 1. b. extensa propositione II. 13. superflua fit) propositum de parallelogrammis demonstrant Lagny (sur une proposition de géométrie élémentaire Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris. Ann. 1707. Amst. p. 412. sq.) Baermannus p. 55.

15) Idem Gregorius a S. Vincentio p. 33.; Viviani de locis solidis L. III. p. 110. sq.; Gilbert. p. 313. inferunt ex propositione demonstrata nr. 8. Nempe cum diagonales parallelogrammi ABCD se mutuo bifariam secant (I. 34. Cor. 1.) sunt  $AB^2 + BC^2 = 2GB^2 + 2GA^2$

$$CD^2 + DA^2 = 2GD^2 + 2GA^2 \text{ (nr. 8.)}$$

$$= 2GB^2 + 2GA^2.$$

Quare  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4GB^2 + 4GA^2 = BD^2 + AC^2$  (II. 4. Cor. 2.).

16) Viciissim propositum de triangulis ex propositione nr. 14. de parallelogrammis demonstrata potest deduci. Trianguli enim cuiuscunque ABD (Fig. 192. 193.) basi BD bifariam in puncto G secta: tum ab trianguli vertice A ad punctum G ducta AG recta, eaque continuata, donec sit  $GC = GA$ , et ab extremis B, D basis ad punctum C ductis BC, DC rectis: ob  $GB = GD$ ,  $GA = GC$  (Constr.) et angulum  $AGB = CGD$  (I. 15.); sunt (I. 4.)  $AB = CD$ , et angulus  $CAB = ACD$ , igitur rectae AB, CD parallelas (I. 27.), et aequales (Dem.). Proinde (I. 33.) quadrilaterum ABCD est parallelogrammum. Cf. I. 34. Cor. 8. Et hinc  $2(ABq + ADq) = ACq + BDq$  (nr. 14.)  $= 4AGq + 4GBq$  (Constr. et II. 4. Cor. 2.) idaeoque  $ABq + ADq = 2AGq + 2GBq$ .

17) Cum parallelogrammi utraque diagonalis alteram secet bifariam (I. 34. Cor. 1.) et viciissim quadrilaterum, cuius ambae diagonales se mutuo bifariam secant, sit parallelogrammum (nr. 16. vel I. 34. Cor. 8.); sequitur: quadrilateri non parallelogrammi, seu trapezii ambas diagonales se mutuo bifariam non secare.

1. Bifariam in E secet (Fig. 194. 195.) trapezii ABCD diagonalis BD ipsa, vel producta, alteram AC; ipsa autem BD bifariam secta sit in puncto F. Erunt:

$$ABq + BCq = 2AEq + 2BEq \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$CDq + DAq = 2AEq + 2DEq$$

$$\text{igitur } ABq + BCq + CDq + DAq = 4AEq + 2BEq + 2DEq.$$

$$\text{Sed } BEq + DEq = 2DFq + 2EFq \quad (\text{II. 9. 10.})$$

$$\text{Quare } ABq + BCq + CDq + DAq = 4AEq + 4DFq + 4EFq \\ = ACq + BDq + 4EFq \quad (\text{II. 4. Cor. 2.})$$

2. Neutra trapezii ABCD diagonalis (Fig. 196. 197.) ipsa, vel producta alteram secet bifariam: seu ab puncto, in quo diagonales AC, BD se mutuo secant, diversa sint puncta E, F, quibus bifariam secantur ipsae AC, BD: rectae igitur BE, DE triangulum constituent super diagonali BD, intra quod cedit EF recta. Tum rursus

$$AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + BE^2 \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$CD^2 + DA^2 = 2AE^2 + 2DE^2$$

$$\text{Quare } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AE^2 + 2(BE^2 + DE^2).$$

$$\text{Sed pariter } BE^2 + DE^2 = 2BF^2 + 2EF^2 \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$\text{Etiamnunc itaque } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

$$= 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2$$

$$= AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \quad (\text{II. 4. Cor. 2.})$$

In quovis igitur trapezio, seu quadrilatero non parallelogrammo quadrata laterum simul aequalia sunt quadratis diagonalium et quadruplo quadrato rectae interceptae punctis, quibus diagonales bifariam secantur.

18) Theorema hoc, quod singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam complecti iure praedicat, et nusquam adhuc neque prolatum, neque demonstratum esse profitetur Leonh. Eulerus in dissertatione inscripta: *Variae demonstrationes geometricae ac Novis Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. I. ad annum 1747. et 1748. (Petrop. 1750.) inserta, ipse (§. 25. sqq. p. 63. sqq.) ab parallelogrammorum proprietate nr. 14. sq. ostensa sic fere deducit: circa trapezii ABCD (Fig. 198.) latera contigua AB et AD, BC et CD compleantur parallelogramma ABKD, BCDL, et praeter trapezii ac parallelogrammorum diagonales AC, BD, AK, CL, ducantur rectae AL, CK. Ita erunt anguli CDB = DBL, KDB = DBA (I. 29.). Quare (I. 4.) CK = AL, et angulus CKD = LAB. Sed et angulus DKA = BAK (I. 29.). Igitur angulus CKA = LAK, ideoque (I. 27.) CK, AL sunt parallelae. Quare, cum et aequales sint (Demonstr.) ALKC pariter est parallelogrammum (I. 53.). Igitur*

$$2(BC^2 + CD^2) = BD^2 + CL^2$$

$$CL^2 + AK^2 = 2(AC^2 + CK^2) \quad (\text{nr. 14. sq.}).$$

$$\text{Unde } 2(BC^2 + CD^2) + AK^2 = BD^2 + 2(AC^2 + CK^2).$$

$$\text{Sed et } 2(AB^2 + AD^2) = BD^2 + AK^2 \quad (\text{nr. 14. sq.}).$$

$$\text{Ergo } 2(AB^2 + AD^2) + 2(BC^2 + CD^2) = 2BD^2 + 2(AC^2 + CK^2).$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2 + CK^2$$

h. e. summa quadratorum laterum trapezii excedit summam quadratorum diagonalium eius quadrato rectae CK, qua tra-

pezii ABCD et parallelogrammi ABKD tria puncta D, A, B communia habentium, puncta diversa C, K iunguntur, atque ut ait Eulerus (§. 26. p. 65.) discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur.

Porro per punctum F, in quo parallelogrammi ABKD diagonales AK, BD se mutuo secant, idque bifariam (I. 34. Cor. 1.), per quod proinde etiam transit altera parallelogrammi BCDL diagonalis CL (I. 34. Cor. 1.) rectis AC, CK parallelas aguntur FM, FE, itaque describatur parallelogrammum FMCE, cuius latera  $EC=FM$ ,  $EF=CM$  (I. 34.). Cum, ob  $AF=FK$  (I. 34. Cor. 1.) et angulos  $F AE=K FM$ ,  $AFE=FKM$  (I. 29.), etiam sint (I. 26.)  $AE=FM$ ,  $EF=MK$ : erunt  $AE=EC$  (h. e. AC bifariam in E secabitur) et  $CM=MK=EF$ , adeoque  $CK=2EF$   $CK=4EF$  q (II. 4. Cor. 2.) et  $AB$  q  $+BC$  q  $+CD$  q  $+AD$  q  $=BD$  q  $+AC$  q  $+4EF$  q.

Eiusdem propositionis, ab Eulero sine subiuncta demonstratione cum ipso communicatas demonstrationem analytico trigonometricam eodem in T. Commentar. Petrop. p. 131. sq. dedit Kraftius. Demonstrationem Euleri etiam exponunt Wacherer. Einige geometr. Sätze. Progr. 1780. §. 30. ff. Kleine Schriften Carlruhe 1799. S. 133. f. ac Gilbert. p. 312. sq.

19) In quadrilateralis igitur summa quadratorum laterum vel adaequat (nempe in parallelogrammis nr. 14. sq.) vel excedit (nimirum in non parallelogrammis nr. 17. sq.) summam quadratorum diagonalium: nunquam ea est minor; seu nullum exhiberi potest quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit, quam summa quadratorum diagonalium (Euler. I. c. p. 65.).

20) In trapezio, cuius duo latera opposita sunt parallela, latera haec inaequalia sunt (Append. ad I. 34. nr. 3.) et neutra diagonalis alteram secant bifariam (Append. ad I. 34. nr. 5.). At, quae in trapezio, cuius duo latera parallela sunt, eisdem lateribus per punctum bisectionis unius diagonalis parallela agitur recta, bifariam quoque secant alteram diagonalem (Append. ad I. 34. nr. 6.); ipsaque recta, punctis, quibus

diagonales bifariam secantur, intercepta, est semidifferentia laterum parallelorum trapezii (Append. ad I. 34. nr. 7.): unde consequitur, in trapezio, cuius latera sunt parallela, quadrata laterum simul aequalia esse quadratis diagonalium, et quadrato differentiae laterum parallelorum. Sint enim (Fig. 199.) in trapezio ABCD parallela latera AB, CD, et  $AB > CD$ . Bifariam in E secetur altera eius diagonalis AC et per punctum E agatur lateribus AB, CD parallela EF, diagonalem BD secans in puncto F, eritque  $EF = \frac{AB - CD}{2}$  (Append. ad I. 34. nr. 7.), ideoque  $2EF = AB - CD$ ,  $4EF^2 = (AB - CD)^2$  (II. 4. Cor. 2.); itaque (nr. 18. sq.)  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (AB - CD)^2$ .

21) Ob  $AB^2 + CD^2 = 2AB \times CD + (AB - CD)^2$  (II. 7.) porro fit  $BC^2 + DA^2 + 2AB \times CD + (AB - CD)^2$   
 $= AC^2 + BD^2 + (AB - CD)^2$  (nr. 20.)

vel  $BC^2 + DA^2 + 2AB \times CD = AC^2 + BD^2$ ,

h. e. in trapezio, cuius duo latera sunt parallela, quadrata diagonalium simul aequalia sunt quadratis laterum nonparallelorum, et duplo sub lateribus parallelis rectangulo.

22) Trapezii ABCD (Fig. 200.) latera AB, CD sint parallela, atque altera duo AD, BC sint aequalia: et sit  $AB > CD$ . Per C ducta lateri AD parallela CN; sunt (I. 34.)  $AN = CD$ ,  $CN = AD = CB$ . Itaque angulus CBN = CNB (I. 5.) = DAB (I. 29.). Et hinc ob  $BC = AD$ ,  $AB = AB$ , est  $AC = BD$  (I. 4.): et  $2AC^2 = 2BC^2 + 2AB \times CD$  (nr. 21.) vel  $AC^2 = BC^2 + AB \times CD$ . Trapezii igitur, cuius duo latera sunt parallela, et altera duo aequalia, diagonales invicem sunt aequales, et cuiuslibet diagonalis quadratum aequale est rectangulo sub lateribus parallelis trapezii et quadrato unius laterum nonparallelorum simul. Caeterum ob triangulum BNC isosceles, et  $AN = CD$  (Demonstr.) immediate etiam ex parte posteriori propositionis 10, consequitur, esse

$$AC^2 = BC^2 + 2CD \times AB.$$

23) Pariter propositum nr. 21. potest ad partem posteriorem nr. 11. reduci. In trapezio enim ABCD (Fig. 201.) cu-



ios latera AB, CD sunt parallela, et  $AB > CD$ , per punctum C ducta CN lateri AD parallela: fit ANCD parallelogrammum, cuius igitur latera  $AN = CD$ ,  $CN = AD$  (I. 34.), ac diagonales AC, DN se mutuo bifariam secant in L (I. 34. Cor. 1.). Per punctum L agatur alteri trapezii ABCD diagonali BD parallela LG, et per punctum G, ubi haec lateri AB occurrat, recta GI parallela rectae DN. Erunt (I. 34.)  $GL = DI$ ,  $GI = DL$ . Quare ob  $DL = NL$  (Dem.), etiam  $GI = NL$ . Praeterea sunt anguli  $IGB = LNG$ ,  $IBG = LGN$  (I. 29.), ideoque (I. 26.)  $BG = GN$ ,  $BI = GL$ . Sed et  $DI = GL$  (Dem.). Ergo  $BD = 2GL$ . Trianguli igitur BNC basin BN bifariam dividit punctum G: et ad basis huius BN productae punctum A ab trianguli vertice C ducta est AC recta, quae pariter bifariam dividitur puncto L: proinde est (nr. 11.)  $AC + 4GL = BC + CN + 2NA \times AB$ .

Sed et  $2GL = BD$ ,  $CN = DA$ ,  $NA = CD$  (Dem.). Ergo

$$AC + BD = BC + DA + 2CD \times AB.$$

24) Quae nr. 17. 18. de trapezii dicta sunt, possunt sequentem in modum ad figuras rectilineas plurium laterum applicari. Sit v. c. (Fig. 202.) ABCDEFGH figura rectilinea octo lateribus comprehensa, in qua ducantur primo a quovis angulo figurae diagonales ad angulum qui secundus ab ipso est, nempe AC, BD, CE, DF etc. (has diagonales primi ordinis vocabimus): pariterque ducantur a quovis angulo figurae diagonales ad angulum, qui tertius ab ipso est, nempe AD, BE, CF, DG etc. (quas diagonales secundi ordinis vocabimus), et efficient singulae hae diagonales secundi ordinis cum ternis lateribus figurae propositae trapezia, quorum diagonales eadem erunt, ac diagonales figurae, quas primi ordinis diximus. Quodsi igitur singulae hae diagonales primi ordinis bisecentur in punctis a, b, c, d etc. et iungantur ab, bc, cd, de etc.

erit ex nr. 17. 18. in trapezio ABCD

$$AB + BC + CD + DA = AC + BD + 4ba$$

Pariter in trapezio BCDE erit

$$BC + CD + DE + EB = BD + CE + 4cd$$

in trapezio CDEF

$$CD\ q + DE\ q + EF\ q + FC\ q = CE\ q + DF\ q + 4de\ q$$

in trapezio DEFG

$$DE\ q + EF\ q + FG\ q + GD\ q = DF\ q + EG\ q + 4ef\ q$$

in trapezio EFGH

$$EF\ q + FG\ q + GH\ q + HE\ q = EG\ q + FH\ q + 4fg\ q$$

in trapezio FGHA

$$FG\ q + GH\ q + HA\ q + AF\ q = FH\ q + GA\ q + 4gh\ q$$

in trapezio GHAB

$$GH\ q + HA\ q + AB\ q + BG\ q = GA\ q + HB\ q + 4ha\ q$$

denique in trapezio HABC

$$HA\ q + AB\ q + BC\ q + CH\ q = HB\ q + AC\ q + 4ab\ q$$

Quodsi itaque omnia in unam summam colligamus, erit

$$\begin{aligned} & 3(AB\ q + BC\ q + CD\ q + DE\ q + EF\ q + FG\ q + GH\ q + HA\ q) \\ & + AD\ q + BE\ q + CF\ q + DG\ q + EH\ q + FA\ q + GB\ q + HC\ q \\ & = 2(AC\ q + BD\ q + CE\ q + DF\ q + EG\ q + FH\ q + GA\ q + HB\ q) \\ & + 4(ab\ q + bc\ q + cd\ q + de\ q + ef\ q + fg\ q + gh\ q + ha\ q) \end{aligned}$$

i. e. erit triplex summa quadratorum laterum figurae, si ei addas summam quadratorum diagonalium secundi ordinis, aequalis duplici summae quadratorum diagonalium primi ordinis, si ei adicias quadruplicem summam quadratorum earum rectorum, quae puncta proxima bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Et facile patet, etiam in figuris plurium laterum, quocunque ea fuerint, eandem valere demonstrationem. Caeterum, quum diagonales secundi ordinis primam in Pentagonis locum habeant (in quibus ipsis tamen coincidunt cum diagonalibus primi ordinis) etiam hoc propositum, altim si verba sensu proprio ac solito sumantur, incipiendo tantum a Pentagonis valebit, sensu tamen improprio illud e. a. n. ad ipsa trapezia, quin ad triangula adeo adplicare possis, dum nempe in illis pro diagonalibus secundi ordinis ipsa trapezii ABCD latera sumas, diagonales primi ordinis autem quatuor nempe AC, BD, CA, DB in computum ducas, pariterque rectas, quae earum bisectionis puncta iungunt (quarum proprie una tantum est) quatuor (nam nempe quater repetitam a prima diagonali ad secundam, a secunda ad tertiam,

a tertia ad quartam, et a quarta denuo ad primam) numeres; in triangulis autem diagonales secundi ordinis nullae sunt, diagonales primi ordinis autem cum lateribus trianguli coincidunt.

25) Quodsi polygonum sit regulare v. c. octogonum regulare (Fig. 203.), erunt non tantum omnia latera polygoni inter se aequalia, verum etiam omnes diagonales primi ordinis, ut facile ex I. 4. patet, pariterque omnes diagonales secundi ordinis, et omnes rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Quare tum in omnibus polygonis  $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$ .

26) Hoc casu, si nempe polygonum sit regulare,  $AD$ , diagonalis secundi ordinis aequalis est  $AB + 2ab$  nempe lateri polygoni et duplo rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungit. Quum enim (I. 4.) triangula  $ABH$ ,  $BAC$ ,  $CBD$  etc. sint aequalia, et nominatim sit  $HB = AC = BD$  etc. et  $ABH = CBD = CDB$  etc. erit triang.  $HAC = HBC$  (I. 8.) et nominatim  $AHC = BCH$ . Quum vero etiam  $HAB = ABC$  (Hyp.) erit  $AHC + HAB = BCH + ABC$ , adeoque, quum omnes anguli quadrilateri  $ABHC$  sint quatuor rectis aequales (I. 32. Cor. 12.) erunt  $AHC + HAB$  aequales duobus rectis, adeoque  $AB$  et  $HC$  parallelae (I. 29.): eodemque modo ostenditur, esse  $BC$ ,  $AD$  parallelas. Et, quum in trapezio  $ABCD$  recta  $bc$  bisecet (Hyp.) utramque diagonalem  $AC$ ,  $BD$ , erit  $bc = \frac{AD - BC}{2}$  (nr. 7. Append. ad I. 34.), vel  $2bc = AD - BC$ , vel  $AD = BC + 2bc = AB + 2ab$ .

27) Quum nr. 25. sit  $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$ , et  $AD = AB + 2ab$  adeoque  $ADq = ABq + 4AB.ab + 4abq$  (II. 4.) erit  $4ABq + 4AB.ab + 4abq = 2ACq + 4abq$ , vel  $4ABq + 4AB \times ab = 2ACq$ , vel  $2ABq + 2AB \times ab = ACq$  vel  $ABq + 2AB \times ab = ACq - ABq$ , vel  $AB \times (AB + 2ab) = ACq - ABq$ , vel  $AB \times AD = ACq - ABq$ . In polygono regulari quocunque igitur rectangulum contentum inter latus polygoni et diagonalem secundi ordinis aequale erit excessui, quo quadratum diagonalis primi ordinis superat quadratum lateris polygoni.

Cacterum ea, quae nr. 25-27. de polygono regulari diximus, etiam in quovis trapezio  $ABCD$  locum habent, cuius tria latera  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  aequalia sunt, et quod etiam diagonales  $AC$ ,  $BD$  aequales habet. In eo quippe semper  $AD$ ,  $BC$  parallelae erunt (I. 29.), quum in triangulis aequalibus (I. 8.)  $ABC$ ,  $BCD$ , anguli  $ABC$ ,  $BCD$ , pariterque in triangulis aequalibus (I. 8.)  $BAD$ ,  $CDA$  anguli  $BAD$ ,  $CDA$  sint aequales, adeoque  $ABC + BAD = BCD + CDA = 2$  rectis (I. 32. Cor. 12.). Unde ex nr. 22. erit  $3ABq + ADq = 2ACq + (AD - BC)q$ , vel (nr. 7. Append. ad I. 34.)  $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$ , unde consequitur, ut supra, esse  $AB \times AD = ACq - ABq$ .

28) Quae nr. 24. de relatione mutua quadratorum laterum figurae alicuius, et quadratorum diagonalium primi et secundi ordinis dicta sunt, porro in polygonis, quorum numerus laterum maior est, generalius adhuc exprimi possunt, in computum vocatis etiam quadratis diagonalium tertii, quarti et aliorum superiorum ordinum. Et, si quis tentare, et loco trapeziorum  $ABCD$ ,  $BCDE$  etc. (Fig. 202.) iam pentagona  $ABCDE$ ,  $BCDEF$  etc. considerare, et ad haec dicta nr. 24. adplicare velit, facile regulam generalem analogam ei, quam nr. 24. habuimus, satis simplicem locum habere, deprehendet. Nos tamen haec talia, quamvis haud infructuosa esse videantur, quum elementorum fines excedere fere videantur, aut certe, ne nimis longi simus, consulto praetermittimus.

---

## EXCURSUS IV.

A D

## ELEMENTORUM

## III. 16.

**D**iximus ad III. 16. tertiam eius partem in textu graeco affirmare, angulum semicirculi (i. e. ut volunt, angulum, quem circumferentia circuli cum diametro efficiat) maiorem esse quovis angulo acuto rectilineo; angulum contra, quem circumferentia cum recta, diametro in puncto eius extremo ad angulos rectos ducta efficiat (quem angulum contingentiae vel contactus vocant) minorem esse quovis angulo acuto rectilineo.

Iam super hac tertia Prop. III. 16. parte magnae apud nonnullos Euclidis interpretes lites ortae sunt, quarum brevem commemorationem, quamvis non admodum magni momenti esse videantur, nolimus tamen hoc loco praetermittere. Et constat, praecipuos huius disceptationis coryphaeos Peletarium fuisse ac Clavium, quorum ille quidem primus in editis ab ipso Euclidis Elementis movit, angulum illum contactus quem vocant, re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem. Namque ita saltem geometriam sibi ipsi constare, et multa paradoxa, et sibi ipsis repugnantia, quae e contraria opinione nascerentur, declinari posse putavit. Paradoxa autem illa, quorum partem iam Campanus, Cardanus, alique observaverant, erant fere eiusmodi:

1) Euclidem docere X. 1.: si a maiore duarum magnitudinum auferatur maius quam dimidium, et a residuo ma-

ius quam dimidium, et id semper fiat, relinqui tandem magnitudinem, quae minor sit minore duarum, quae primo exhibitae erant, magnitudinum. Atqui, si is, quem circumferentiam cum contingente efficere dicant, angulum, vere pro angulo habere velis, isque ex propositione hac III. 16. minor sit quovis angulo acuto rectilineo, consequens esse, angulum acutum rectilineum, quamvis ei semper plus quam dimidium detrahas, partem tamen relinquere angulo illo contactus maiorem, quod cum X. Prop. 1. conciliari nequeat. Idem fere aliter, ut Cardanus habeat (libro de subtilitate), ita exprimi posse: aliquam quantitatem (angulum contactus) posse continue, atque adeo infinite augeri, alteram autem (angulum aliquem acutum) infinite minui, et tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper fore huius decremento.

2) Si angulus circumferentiae (quem circumferentia cum diametro efficiat) maior sit quovis angulo acuto rectilineo; posse transiri a minori (angulo acuto) ad maius (angulum rectum), vel contra per omnia media, neque tamen transiri per aequale (nempe per angulum aequalem angulo semicirculi), quod Campanus moneat. His aliisque difficultatibus se expedire se posse putat Peletarius, si asserat, angulum illum, quem dicunt, contactus re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem; rectam, quae circumferentiam contingat, in puncto contactus potius cum circumferentia coincidere, non ad eam inclinari, quod ipsum tamen ad naturam anguli pertineat, qui in *sectione* consistat, non in *contactu*; angulum autem semicirculi omnino rectum esse, vel recto rectilineo aequalem; circulos autem se contingentes, sive extra, sive intra id fiat, angulum non efficere.

Clavius autem se paradoxa illa, quae e Cardano et Campano asferantur, nec negare nec reformidare testatur, eam vero, quam inter III. Prop. 16. et X. 1. intercedere dicat Peletarius discrepantiam, aut contradictionem potius neminem anxium reddere debere, non enim veram esse illam discrepantiam, Euclidem quippe X. Prop. 1. de quantitativibus tantum *homogeneis* loqui, angulos autem rectilineos non eius-

dem generis esse ac angulum contactus, quamvis etiam hic veri nominis quantitas sit, quod inde patet, quod et ipse non quidem per lineam rectam, at per arcus maioris circuli in infinitum dividi possit.

Cacterum Euclidem, si angulum contactus nihilum prosumus, et angulum semicirculi angulo recto aequalem esse putasset, non tantopere desudaturum fuisse ut demonstraret, angulum contactus esse minorem quovis angulo acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem.

Haec praecipua fere erant, de quibus Peletarium inter ac Clavius, edita etiam a Peletario Apologia, cui iterum respondit Clavius, variis hinc inde argumentis disputabantur. Quamvis autem postea plerique summi geometrae quoad partem potissimam in Peletarii sententiam abierint, cum quo hodie etiam tantum non omnes faciunt, ut nempe angulum illum contactus non esse veri nominis angulum affirmant, negati tamen nequit, post Peletarium demum rem omnem a viris sagacissimis perfecte expositam ac dilucidatam fuisse.

Et Vieta quidem (Varior. cap. XIII.) primus fuisse videtur, qui tertiam illam partem propositionis III. 16. spuriam, et a Proclo aliove additam iudicaret, et Peletarii sententiam firmiter rationibus stabiliret, quas postea adoriri tentavit Ioannes Camillus Gloriosus Neapolitanus (Dec. II. Exercitat. Mathem.). Galilaus contra in epistola ad Gloriosum missa (Dec. III. Exercitat. Mathem.) dubia Gloriosi refellere sagaciter, eique adstipulatur etiam Vincentius Viviani. Cf. Carlieri Elementi Piani e Solidi d'Euclide Firenze 1769. P. I. p. 148. Galilaus maxime angulum illum contactus, quem dicunt, et a circumferentia circuli rectaque contingente effici volunt, non esse veri nominis angulum, quin ne quantitatem quidem, ita potissimum ostendere studet, ut circuli circumferentiam compareret cum perimetro figurae regularis illi inscriptae. Rectam  $AR$  (Fig. 281.), quae ad latus  $CD$  alicuius polygoni ita applicetur, ut illud non secet, sed cum eo coincidat, nullum certe cum hoc latere angulum efficere ait, quem demum constituat cum latere proxime sequente  $DE$ , eandem

autem esse rationem circumferentiae circuli comparatae cum recta eum contingente, quae lateris  $CD$  cum recta  $AB$ ; angulo hic non locum esse. Et, quod alii obiciant, posse tamen locum inter circumferentiam circuli rectaeque illum contingentis per arcus maioris circuli in infinitum dividi, nihil ad rem facere. Idem enim obtinere circa perimetros similium polygonorum (Fig. 282.) his circulis inscriptorum  $BIOS \dots BCDF \dots$  quorum latera  $BI$ ,  $BC$  coincidunt, adeoque cum recta  $AE$  circulos in  $B$  contingente unum eundemque angulum  $IBE$ , vel  $CBE$  efficiant. Nempe in his quoque perimetrum polygoni maioris locum quidem inter contingentem  $BE$  et perimetrum polygoni minoris interceptum pertransire ac dividere, ipsum autem angulum  $IBE$  non secare aut dividere. Iam si cogitare velis polygonum laterum numero infinitorum maiori circulo inscriptum, ita ut angulus  $CBE$  infinite parvus evadat, semper tamen minori circulo polygonum totidem laterum ac in priore polygono sunt, inscriptum cogitari posse, quod habiturum sit angulum  $IBE$  aequalem angulo  $CBE$ , nunquam itaque talem angulum dividi a recta  $CB$ , quodsi autem dividi non possit, non esse quantitatem, si quantitas non sit, non esse veri nominis angulum, sed aequivoco ita dictum. Viviani praeterea illud maxime urget, ex ipsa Euclidis anguli plani definitione (I. 18. Def.), qua dicat, angulum planum esse duarum linearum in plano se tangentium, et non in directam iacentium mutuum inclinationem, satis apparere, illi sermonem tantum esse de angulis, qui a lineis rectis efficiantur: in his solis enim evenire posse, ut una alteri in directum iaceat, quoad angulos igitur, quos Proclus L. II. ad Def. 8. aliqui curvilineos aut mixtilineos vel corniformes, aut quos alios effingant, prorsus superfluum futuram fuisse Euclidis illam determinationem. Accedere, quod nullibi ille ex professo, ut dicunt, theorema aliquod aut problema de angulis istiusmodi proponat, unde cum Vieta (Oper. Mathem. p. 386.) suspicari licere, fuisse eorum mentionem in libro tertio factam ab alio quodam adsutam. Ab eodem forte etiam mutatum fuisse (I. Def. 8.), quae primum ita habuerit: angulus est

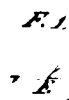


mutae inclinatio duarum rectarum in eodem plano positarum, quae quum in eodem puncto sibi occurrant, non tamen in directum iacent. Si quis vero haec neget, et (I. Def. 8.) Euclidean esse affirmet, circumferentiam tamen circuli, cuius diversae partes aliam aliamque versus rectam contingentem inclinationem habeant, non dici posse certum aliquem angulum cum ea efficere, atque ex his pariter ac ex allatis a Galileo rationibus consequi, angulum illum contactus, quem dicant, non esse veri nominis angulum aut quantitatem. Idem fere, quamvis e rationibus paullo diversis dilucide explicatum fuit (nempe diverticulum illud contingentiae, ut vocat, non esse angulum, et circulum efficere cum tangente non unicam sed infinitas inclinationes) Borellius in *Euclide restituto*. Aliiter paullo, at, ut mihi videtur, minus feliciter rem aggressus erat Tacquet., qui affirmat, nullum angulum esse quantitatem, sed modum tantum quantitatis. Esse enim angulum linearem inclinationem, inclinationem autem non magis esse quantitatem ac curvitatem aut inflexionem et fractionem. Atque ita ille omnes scopulos evitare posse putat, quod (X. 1.), quae de quantitibus tantum agat, non applicari possit ad non-quantitates. At nescio, an non in alios graviores incidat, dum aequalitatem adeo aut inaequalitatem angulis abinducendum esse, nec nisi sensu improprio pro similitudine ac dissimilitudine de iis praedicari censet.

Ceterum eadem fere ac Tacqueti opinio fuisse videtur Gregorii a St. Vincentio, qui in opere suo, *Geometr. Quadratae circuli* p. 871. angulos tam rectilineos, quam curvos et mixtos ad quantitatem tantum spectare, nec ipsos esse quantitatem dixit, sed tantum aliquid ad quantitatem pertinens. Nisi enim hoc sumatur, putat, necessario consequi, omnes angulos contactus a maioribus, minoribusque circulis factos esse aequales, adeoque totum esse aequale parti. Hanc Gregorii opinionem contra Vincentii Leotaud., qui in *cyclometria* ab ipso edita cum Clavio fere in hac re consentiebat, obiectiones defendere studuit Aynsoom. *Expositio ac dilucidatio Geometr. Quadrat. Circuli Gregorii a. St. Vincent. 1656*

Longe autem copiosissime, et perspicue pariter ac subtiliter in causa hac versatus est Wallisius, in cuius *Opera Mathematica*. Tom. II. 1693. p. 605—661. peculiaris est tractatus de angulo contactus et semicirculi editus ante iam 1656, cum nova, quae 1685, ei accesserat, defensione prelo iam repetitus. Is nempe ante omnia monet, ex Euclidis definitione I. 8. *angulum planum esse mutuum aliorum seu inclinationem duarum rectarum in plano se tangentium, et non in directum positarum rem diiudicandam esse*. Quamvis igitur non requiratur, ut lineae (quod Peletarius voluerat) productae se invicem *secent*, id certe requiri, ut lineae, quae angulum constituent, mutuo erga se *inclinentur*. Ideo, si quae lineae concurrant, nec tamen inclinentur, quod ipsum fiat, quam circumferentia a recta aliqua contingatur, eas nullum inter se angulum constituere. Angulum praeterea iudicari non nisi ex ea linearum concurrentium inclinatione, quam sortiantur in ipso concursus puncto. Denique verba: *(μῦ) ἐν' εὐθείας ἀλλήλων* aliter, ac vulgo sumuntur, explicare studet. Putat nempe, ea significare non lineas tantummodo rectas continuatas, siue duo segmenta contigua eiusdem rectae (sic enim continuatam peripheriam in singulis sui punctis angulum formare dicendam fuisse, quod tamen nec Euclides nec alius quisquam affirmet), sed per lineas in directum positas eas intelligi, quae se mutuo continuare dici possint, ut exinde una linea fiat. Et quamvis admodum dubitemus, an haec ultima verborum *ἐν' εὐθείας ἀλλήλων* explicatio, quam caeterum iam Clavius ad I. Def. 8. proposuerat, probari, et cum usu loquendi conciliari possit, caetera tamen pleraque, quae Wallisius habet, ita comparata sunt, ut facile omnium assensum extorquere debeant. Nempe angulum, quem contactus vocant, cum Peletario nullum esse statuit, quod recta circumferentiam contingens ad circumferentiam in contactus puncto non inclinetur, sed super ipsam *ἐκλινῶς* iaceat, vel cum ipsa coincidat, angulum autem semicirculi rectum esse affirmat, et simul Clavio ad ea, quae Peletario opposuerat, et postea Leotaudo quoque respondet. Omnia huc referre longum fuerit. Summa haec

lare redit. Verum quidem esse, nonnisi magnitudines eiusdem generis inter se comparari posse, at angulos curvilineos et mixtilineos (ubi nempe pro directione curvae in puncto contactus semper sumitur recta curvam in hoc puncto contingens) tam inter se, quam cum rectilineis eiusdem generis esse, quod variis modis, maxime quod unus multiplicatus alterum superare possit, demonstrari queat. Itaque necesse esse e rationibus a Peletario allatis angulum contactus pro nullo, angulum autem semicirculi pro angulo recto habere. Multa praeterea ingeniose excoitata ad stabiliendam suam sententiam adiicit. Et sane post ea, quae Peletarius, Galilaei, Viviani, et Wallisius, quibus nostra aetate praecipue adhuc accesserunt Karsten. in libro inscripto: *Mathem. Abhandl. Halle 1786.*, ubi p. 396—422. de hac re fusius disputat, et se prorsus cum Wallisio consentire fatetur, et Gilbert: *die Geometrie nach le Gendre* p. 122. sqq. ad rem diiudicandam conculcare, nihil prorsus superesse videtur, de quo ulla ratione ambigi possit. Res omnino eo fere redit. Curvae quaecunque, quam earum partes aliae alio diriguntur, non dici possunt *integrae* certam aliquam directionem, vel constantem erga aliam lineam, nominatim erga rectam aliquam, inclinationem habere. Proprie loquendo igitur non sermo esse potest de angulo, quem curva aliqua integra cum alia curva, aut cum linea recta efficiat, sed tantum de angulo, quem elementa eius in puncto contactus cum illis factura essent, siquidem eam, quam ibi habent, directionem ulterius prosequi possent. At haec elementorum curvae directio, ut ipsum directionis vocabulum indicat, coincidit cum directione rectae curvam in hoc puncto contingentis i. e. cum ipsa hac recta contingente. Curva igitur, vel potius curvae elementum in ipso contactus puncto cum recta contingente, cum, qua in hoc puncto coincidit, nullum angulum efficit, cum ea autem recta, quae ad rectam contingentem perpendicularis est, curva, aut potius curvae elementum contactus puncto proximum etiam ipsum angulum rectum efficere dicendum erit, siquidem angulum appellare velis inclinationem *elementi infinito parvi* ad



rectam contingenti perpendicularem. Itaque pars tertia III. Prop. 16., ut in Elementis legitur, nihil prorsus continet, quod non etiam in parte secunda contineatur, et poterat illa, sive ab Euclide ait, sive, quod multi, nominatim Rob. Simson. putant, ab alio quodam addita fuerit, egregie omitti, quod etiam factum videmus tum ab antiquioribus, tum a recentioribus nonnullis, nominatim a Giordano da Bitonto, Borellio, Cötsio, Playfairo, Roberto Simson, et nobis fortasse excusatione opus fuerit, quod rei, quae simulac rite evoluta fuerit, nihil difficultatis habere potest, tam diu immorati simus: noluimus tamen hanc causam intactam relinquere, vel, quod ad historiam geometriae pertinere videbatur, vel quod, ut monet Karstenius (mathem. Abhandl. p. 108. sqq.) subinde adhuc sunt, qui in sublimioribus quoque Matheseos partibus doctrina de angulo contactus male intellecta abutuntur ad falsas suas de infinite parvi natura notiones tuendas ac fulciendas.

---

---

B O N N A E,

EX OFFICINA BÜSCHLERIANA

APUD ANTONIUM HACKERUM.



F.1.



F.1.



F.1.

F.1.



F.1.



F.1.



