Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Ex Bibliotheca ff. Prædicatorum
342511

EUCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICUIS DEMONSTRATIONIBUS, accuratisq; scholiis illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESU.

FRANCOFURTI,
Sumtibus hæredum IONÆ ROSÆ.
Anno M. DC. LIV.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON
BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON

345211

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

Unitas est, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

HActenus egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut absq; eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabiles atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, & conjuncta, ut absq; his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorum explanationem, ut doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum eæ rei Geometricæ inserviunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principiis, definit initio unitatem, docetque eam esse, secundū quā unamquodq; eorum, quę sunt,

unum esse dicitur. Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit divisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut libro primo docuimus.

II.

NUMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

Cum numerus sit multitudo quædam ex unitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt unitates eum constituentes: Ita ut unitas sit pars cujusvis numeri denominata ab ipso numero, cujus est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo unitatibus, dividitur in totidem partes, nimirum in 8. unitates quarum quælibet, octava pars dicitur octonarii. Sic quoque numerus 100. ex centum unitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

Ex his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademq; mensura, nimirum unitas ut ductum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione convenire, cum plurimæ earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles ut clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

Non est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem dixit aliquotam definit. cum hæc solum propriè dicatur metiri totum, ut ibidem latiùs explicavimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter hujus numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, ut perspicuum est.

Omnis autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cujus pars est, metitur: ut 6. pars hujus numeri 42. nomen trahit à 7 cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

Partes autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem majoris numeri, quem non metitur, non partem sed partes appellari: cujusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamvis enim, cum non metiatur, nisi per suas unitates pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat unitates,

tes, quarum quælibet decima octava pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimas octavas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, ut volunt nonnulli: alioquin supervacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

Cæterum partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cujus ille partes appellatur: Ita ut si communis deorum numerorum mensura metiatur minorem per 3 & majorem per 5. dicatur minor majoris tres quintæ, Tales partes sunt 6. hujus numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. pars. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas ejusdem numeri 10. cum unitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem judicium habeto & de reliquis.

Quod si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui majoris pars est, verum etiam illum, qui partes non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit. Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ majorem non metitur partes appellavit, sed tantum eam, quæ majorem metitur, partem. Respondemus: hujus rei causam esse, quod omnis numerus minor cujuslibet majoris aut pars est, aut partes, ut propos. 4. hujus lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinibus inæqualibus necessario minor aut pars aut partes est majoris, cum eæ persæpe sint incommensurabiles, ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes majoris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor majoris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicavit.

V.

Multiplex vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille solum numerus minor, majoris pars dicitur qui majorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus major, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur, adeo ut numerus major, cujus minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est &c. Si vero majorem minor non metiatur, nullo modo erit major minoris multiplex. Si enim major minoris multiplex esset, metiretur minor majorē, per hanc definitionem. Et vicissim, si major minoris

non fuerit multiplex, minor majorem non metietur? Nam si metiretur minor majorem, esset per hanc defin. major minoris multiplex.

VI.

Par numerus est, qui bifariam dividitur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam dividuntur bifariam, sive in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur, vel qui unitate differt à pari.

Omnes hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam dividi nequeunt. Vel certe quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16 38 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, unitatem in numeris prorsus esse individuam. Si enim divideretur, omnis numerus impar haberet dimidium: atque adeo bifariam dividi posset. Nam hujus imparis 11. dimidia pars essent quinque unitates & semis: cujus contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par est, qui bifariam dividitur, fit ut quemlibet parem aliquis numerus par, saltem bifarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cujusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

Cæterum si rectæ duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes

hoc

hoc esse absurdum ut excluderent numeros ejusmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videntur esse, addiderunt utrique definitioni particulam, tantum, ita ut numerus pariter par, secundū eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum. Pariter autē impar, quā par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit ut propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum ut dictum est. par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam utriusq; ut constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diversa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum Nicomachi, Boetii, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, ut perspicuum est & ex definitionib. traditis, in quibus nō reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunnt & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeste omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratq; omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum. Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cujusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse & pariter impares, ut sunt 12. 20. 24. 28. 98. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib 9. intelligentur.

X.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus Impar 25. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. cum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alii infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

Quod si numerum quempiam nullus numerus, sed sola unitas metiatur, ita neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos sola unitas metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura metitur.

Sicut numerus ille, quem sola unitas metitur; Primus metitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos præter unitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamvis singuli eorum habeant numeros, qui eos præter unitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15.8. sunt numeri inter se primi, quia sola unitas, mensura communis illos metitur. quamvis enim priorem metiantur hi numeri 1.& 5. posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorum utrumq; metitur, sed sola unitas utriusq; est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod præter unitatem, nullum habeant numerũ, mensurã communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Deniq; unitas, & quivis numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola unitas unitatẽ, & numerum quemvis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Numerum, quem præter unitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum. cujusmodi est hic 15. Nam eum horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuũ autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

Duo numeri, vel plures, quos præter unitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se cõpositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter unitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15.24. compositi inter se sũt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

Nu-

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. unitates procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6, si numerum 6. octies sumpserimus, toties scil. quot unitates in multiplicante 8. cõtinentur, procreaverimus eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerũ 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600, 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearive ex duobus numeris, quando alterq alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris, quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9, vel è contrario. Et sic de reliquis.

Sequitur ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad unitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, ut faciat productum, quoties in altero multiplicantium est unitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium unitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad unitatem habet. Itaque Multiplicatio sive ductus unius numeri in alium ita quoque describi poterit.

Multiplicatio numeri in numerum, est inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatem.

Sic vides ex multiplicatione, sive ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. ut 8. ad 1. Vel ita ad 8. ut 6. ad 1.

Huic definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum dividere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in iis, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

Numerus numerum dividere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis unitatibus indicat, quoties dividens numerus in divisо continetur.

Vt numerus 6, dividere dicetur numerum 48. cum sumptus fue-

rit numerus 8. qui octo ſuis unitatibus indicat, dividentem numerum 6. in diviſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. dividere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis unitatibus indicat dividentem numerum 8. in diviſo 48. contineri ſexies.

Hinc fit numerum ex diviſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus diviſus habet ad dividentem. Cum enim, ut in definitione diximus, procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat, quotiens dividens numerus in diviſo contineatur, continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diviſus dividentem continere : ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diviſione genitus ad unitatem, quam diviſus numerus ad dividentem. Itaque diviſio unius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

Diviſio numeri per numerum, eſt inventio numeri qui ad unitatem habet eandem proportionem, quam numerus diviſus ad dividentem.

Ita vides ex diviſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1 ut 48. ad 6. Item ex diviſione ejuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. ut 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur, diviſo numero per numerum, diviſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diviſionem inventi in numerum dividentem. Diviſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni, ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, ut C, ad unitatem D : Ex definitione autem diviſionis, ita quoque ſe habet A, ad B ut C, ad unitatem D perſpicuum eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerũ A, cum tam ille genitus, quam A eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, unitatem.

A, 48. B, 8. C; 6. D, 1.

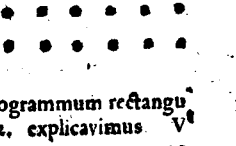
Hæc omnia conveniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis : Id eſt, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſive fracti adhæreant integris, ſive non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis. Dividere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties dividens in diviſo continetur : Ita ut in multiplicatione inveniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatẽ; In diviſione autem procreetur numerus, qui ad unitatem eandem proportionem habet, quam numerus diviſus ad dividentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ multiplicare dicitur numerum 20. quando numer. 20. toties

ties fuerit compositus, quod sunt in $\frac{1}{2}$ unitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim unitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$ sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20 multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties unitas est in 20. productusque fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. ut $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$ tertiam partem unitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$ semissem tantum continet unitatis Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$ qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$ sive $\frac{3}{6}$ & semissis numeri, sive $\frac{2}{6}$ Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

Rursus numerus $\frac{1}{2}$ dividere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, dividentem numerum $\frac{1}{2}$ vicies contineri in diviso numero 10. ita ut eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri divisi 10. ad dividentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$ dividere dicetur $\frac{1}{6}$ quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans dividentem numerum $\frac{1}{2}$ non totum contineri in diviso $\frac{1}{8}$ sed tertiam ejus partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$ idem sit qui $\frac{3}{6}$ liquido constat tertiam hujus partem, nimirum $\frac{1}{6}$ contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat divisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonstrabimus, ubi omnia hæc, quæ de multiplicatione, divisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

Cum autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorũ planus appellatur, quia secundum suas unitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cujus latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, ut latius lib. 2. explicavimus Vt

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque ejus sunt 4. & 6. quia ejus unitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cujus unum latus sex unitates, alterũ vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, ejusque latera 8. & 8.

Cæterum cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangulatem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc solo in hisce libris numerorũ disputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint & æquales, sive ambitum, sive aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conveniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono &c. quod ad ambitũ spectat: tamẽ si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Potest autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, ut numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. est genitus Ita quoque numerus planus 100. latera haber 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt altero unitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui jamjam definietur, dici potest. Verum est, unitatem, aliquando dici posse numerum planum, quamvis improprie; quia ejus latera sunt duæ unitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam unitatem producunt.

XVII.

Cum vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur. Qui autem numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 1. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24.

ap-

appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia ejus unitates in longum latum atq; profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ parellelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cujus omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; unus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nã si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium unitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur habebitur basis 6. unitarum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habẽs 1. unitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 2. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cujus altitudo continet duas unitates.

Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo unitatum, cujus longitudo B C, quatuor unitates & B F, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales. ut totus numerus solidus contineat 24. unitates, ejusque altitudo B A. unitates tres. Similiter si basis sit A B F E, sex unitatum, cujus longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet unitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietq; totus solidus numerus rursũ 24. altitudinem B C. habens quatuor unitatum. Si denique basis sit A B C D, 12. unitarum, cujus longitudo B C. quatuor continet, & latitudo A B, tres, superponetur illi alia basis similis & æqualis E F G H constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum dũæ altitudinem dabunt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6.3.2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis judicandum erit.

Denique & unitas interdum solidus appellabitur numerus, & si non proprie quia ejus latera sunt tres unitates, ipsam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

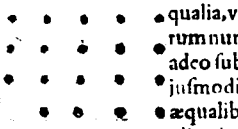
Definit autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cujus bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Pla-

Planum illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum unitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum cujus longitudo latitudini est æqualis, ita ut omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum, æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Hujusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si ejus unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum in quolibet latere habens quinque unitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

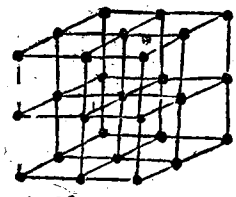


Alteruter autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter, Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

Solidum quoque illum numerū vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cujus unitates in longum, latū, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita ut omnes ejus dimensiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, sive profunditas, æquales sint, Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 33. 3. sive ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



Quilibet vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NUMERI proportionales sunt, cum primus secun-

cundi,& tertius quarti, æque multiplex eſt ; vel eadem pars,vel eædem partes: Vel certe,cum primus ſecundum & tertius quartum,æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (hujuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur,addidimus huic definitioni illa verba; *vel certe cum primus ſecundum,& tertius quartum æqualiter continet,eandemq; inſuper illius partem vel eaſdem partes.* Definitio etenim vulgata Euclidis,quam puto eſſe corruptam,cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici,ſubmultiplicive,& in proportionib. reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti,æque multiplex eſt : in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi,& tertius quarti eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis,cum primus ſecundi,& tertius quarti,eædem partes fuerit,ut vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus,quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari,ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari,& multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus primus numerus ſecundi,& tertius quarti, neque æque multiplex eſt,neq; eadem pars,neq; eædem partes ; ſed primus ſecundum, & tertius quartum,æqualiter continet,puta vel ſemel,vel aliquoties,& eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes ; ut perſpicuum eſt ex iis,quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. ubi omnes proportiones, rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt,cum primus ſecundi,& tertius quarti æque multiplex ſit,nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti,eadem pars,nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi,& tertius quarti eædem partes ſint,videl. tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4 14 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum , & tertius quartum, ſemel,& inſuper eandem partem videl. ſextam: In ſecundo autem ſemel,& eaſdem partes,nimirum tres quartas : In tertio deinde bis,& adhuc partem eandem videl. quintam continet ; In ultimo denique primus ſecundum,& tertius quartum,bis & præterea eaſdem partes complectitur,puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi,& tertius quarti,non ſit æque multiplex, vel eadem pars,vel eædem partes ; vel demique primus ſecundum, & tertius quartum,non æqualiter contineat eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes ; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

Quo-

Quotieſcunq; igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem majores cum minoribus conferantur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad majores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, ut proportionales numeri dicantur,

Ex hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint ejuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant eandemque inſuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque inſuper eorum partem, vel partes, perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerū ad æquales, eandem habere proportionem, juxta hanc definitionē.

Rurſus quia numeri ad eandem habentes eandem proportionē, ſunt illius vel æque multiplices, vel eadem pars vel eædem partes: Vel certe illum æqualiter continent, eandemque inſuper ejus partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes, Vel certe illos æqualiter continet, eandemque inſuper illorum partem vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem, manifeſtum eſt numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

Pari ratione infertur, majoris numeri ad eundem, majorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, ejuſdem ad minorem, majorem eſſe proportionem, quam ad majorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet majorem proportionē, majorē eſſe: Ad

quem

quem autem idem habet majorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

Hæc definitio convenit etiam numeris fractis, sive integri numeri simul adsint, sive non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$, quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, ut patet, si priores duo ad eandem denominationem revocentur, ut ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$ & posteriores quoque ad eandem denominationem, ut ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandē denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{2}{8}.4.\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$ cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, ut constat, si priores duo ad hos ejusdem denominationis revocentur $\frac{18}{8}.\frac{32}{8}$ & posteriores duo ad hos $\frac{10}{8}.\frac{20}{8}$ atque ita de cæteris.

XXI.

Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibusvis duobus lateribus hujus esse proportionalia, sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus laterib. hujus. Nā hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas unitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & sex similes sunt, quoniam illius latera 6.4. proportionalia sunt lateribus hujus 3.2. quamvis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2.

Eodē modo ut duo numeri solidi similes sint, non requiritur, ut quævis tria unius latera proportio, alia sint tribus quibuslibet laterib. alterius: sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum unitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus hujus 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 2.8.2. vel 6.4.3.

Itaque possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sūt enim hi numeri plani 2 4.6. similes, ut dictum est, & tamen si latera prioris sumantur & 3.8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis, 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

Hæc porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, sive in integris cū fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & ram duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunque quia fieri potest, ut interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$ 6. & alia duo $1\frac{1}{2}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

Numerus ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, juxta defin. hujus lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cujusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in unam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via ac ratione procreentur, (sunt enim præter ties dictos innumerabiles alii) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

Quod si partes omnes aliquotæ alicujus numeri simul acceptæ majores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

Luce autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri majoris pars dici potest, sive eum metiatur, sive non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adjungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & ejus interpretes uti videntur.

XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Ut numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem

numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3, numer. 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, ut propos. 16. hujus lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

Hæc quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{2}$ metiri dicitur numerum $13\frac{1}{2}$, per $5\frac{1}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{1}{4}$ gignit $13\frac{1}{4}$.

XXIV.

Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel partes, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

Quæ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartū, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdē partes, ut supra defin. 20. docuimus.

XXV.

Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi, nequeunt.

XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hæc definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. lib. 6.

Possunt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione inversaque ; de compositione, divisione & conversione rationis ; de ratione ex æqualitate ; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum convenire.

POSTULATA, SIVE PETITIONES.

I.

Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

Quolibet numero sumi posse majorem.

Quamvis enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad unitatem, individuam diminutio eveniat ; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unitatis. Quare quolibet numero proposito major exhiberi potest, ille videlicet, qui ex unius unitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. Quo-

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Vnitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

Nam unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constitui. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem.

Cum quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B, & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, ut demonstrabitur propos. 16. hujus lib.

A . . . .
B . . . . .
C . . . . . ,

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3 eundem numerum 18. per 6. hoc est, per unitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

quem metitur, vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C.

Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens compositum quoque ex ipsis metitur.

Metiatur numerus A numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos, B C, C D; erit tam B C, quam C D ipsius A, multiplex. Diviso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, æquales & ipso C D, in partes C F, F G; G D, eidem A, æquales,

erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A, Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

Metiatur numerum A, numerum B, & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B. metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diviso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D, quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam numero E D, æqualem metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C, E, E D, compositum. Quod est propositum.

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquū D C. Cum enim A, metiatur &

B C,

ꝝ C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certe B D, ipſi A, æqualis erit. Diviſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A æquales: erit reliquus numerus D C, vel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, vel ejus multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B . . . . . D . . . C
B . . . . . D C
B . . . . D C

THEOR. 1. PROPOS. 1. I.

Si duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, *quorum* C D, *minor ex majore* A B, *quoties poteſt, detrahatur: & reliquus* E B, *ex* C D, *quoties etiam poteſt; & reliquus* F D, *ex* E B: *Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatem* G B, *quæ quidem præcedentem, numerum* F D, *metitur, detractio perveniat. Dico numeros* A B, C D *eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit* H, *communi menſura præter unitatem. Quia ergo* H, *metitur numerum* C D; & C D, *numerum* A E, (*quod* C D, *vel pars ſit ipſius* A E, *vel certe ei æqualis, cum detractus ex* A B, *reliquerit numerum* E B,) a *metietur quoque* H, *ipſum* A E: *At* H; *metitur quoque totum* A B, b *Igitur & reliquum* E B, *metietur. Metitur autem* E B, *ipſum* C F. c *Igitur &* H, *ipſum* C F; *metietur; Ac propterea*, d *metietur quoque reliquum* E D. *Cum ergo* F D, *metiatur ipſum* E G; e *metietur etiam* H, *ipſum* E G: *Metiebatur autem & H, totum* E B. f *Reliquâ igitur unitatem quoque* G B, *numerus* H, *metietur partem totam. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros* A B, C D, *metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.*

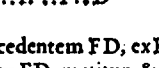
a 11. *prop. nun.*
b 12. *prop. nun.*
c 11. *prop. nun.*
d 12. *prop. nun.*
e 11. *prop. nun.*
f 12. *prop. nun.*

SCHOLIUM.

Convertemus cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem quoad assumpta sit unitas.

Sint duo numeri inter se primi A,B CD, quorum minor CD, ex majore AB, quoties potest detrahatur, & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest, & reliquus FD, ex EB, relinquens G,B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad unitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad unitatem detractio perveniat, si fieri potest, reliquus numerus GB præcedentem FD, ex BF, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, *a* metietur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur *b* metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF. *c* Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsū FD, positus sit metiri: metietur *d* quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. *e* Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde cum & ipsum EB, metiatur, ut ostensum est; *f* metietur & ipsum AB, ex utroque AE, EB. compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentē metietur, donec assumpta sit unitas. Quod est propositum.



a 11. pronun.
b 10. pronun.
c 11. pronun.
d 10. pronun.
e 11. pronun.
f 10. pronun.

Eodem modo & hoc verum est.

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem usque non perveniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

Nam si detractio hujusmodi ad unitatem usque perveniret, essent propositi numeri inter se primi, *g* ut Euclides demonstravit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

g 1. sep.

Ex his facile dignoscemus an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi nec ne. Nam detracto semper minore de majore alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentē metiatur, quoad assumpta sit unitas: ipsi erunt inter se primi, *h* ut Euclides demonstravit, si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi cum ille idem reliquus numerus utrumque numerum propositum metiatur, ut perspicuum est ex demonstratione superiori hujus scholii. Ex eo enim, quod reliquus

h 1. sep.

quus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit eundem reliquum G B, utrumque A B, & C D, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex majore A B, quoties potest, relinquatque E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de majore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem pervenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad unitatem deveniretur, a numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesin. Pervenitur ergo jam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrumque metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B, & E B, ipsum C F; b metietur quoque F D, ipsum C F, atq; adeo eum & seipsum metiatur, c metietur & totum C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum A E, metitur. d Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipsum E B: e metietur etiam totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metitur igitur F D, utrumque numerum A B, C D.

A.....E....B
C.....F..D
G------

a 1. sept.
b 11. pronun.
c 10. pronun.
d 11. pronun.
e 10. pronun.

Quòd autem F D, sit maxima mensura communis illorum ita probabimus: Si enim fieri potest, detur major mensura communi, G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrumque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E, f metietur quoque G, ipsum A E, g Igitur & residuum E B: At vero E B, metitur C F. h Metietur ergo & G, eundem C F. i Igitur & residuum F D; major minorem. Quod est absurdum. Non ergo major numerus, quam F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D maxima est mensura numerorum A B, C D,

f 11. pronun.
g 12. pronun.
h 11. pronun.

Quod si minor numerus C D, metiatur majorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & seipsum metiatur, ut in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A.....B
C.....D

i 12. pronun.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros metiri quoque maximam eorundem communem mensuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademque ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex iis, quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experiar, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem propter numeros A, & B, inter se primos.

A.....
B.....
C.....

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi *a* sit eorum maxima mensura communis inventa D, quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numer. D, communem mensuram.

a 2. *sep.*

A.....
B.....
C.....
D...

Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D. vel inter se primi vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram: metietur ejusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. hujus propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. *b* Inventa enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; *c* metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cũ idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

A.....
B.....
C.....
D.... E..

b 2. *sep.*

c 11. *pronũ.*

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in qua-

quatuor,&c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si major numerus dicatur metiri humeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, major numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quacunq; illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi a Sit earum maxima mensura E. Dico E. esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D, at D, ipsos A, & B, b metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A.....
B.....D....
C.....E..F----

a 2. sept.

b 1. pronun.

Quod autem E. sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F. major quam E, eorum mensura cõmunis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B: metietur quoque, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem; Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus major minorem, quod est absurdum. Non ergo major numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

Hoc etiam colligitur ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

Pari

Pari ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se maxima eorum communis mensura invenietur: locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, invenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum, si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura &c. Reliqua vero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

iij. ## THEOR. 2. PROPOS. 4.

Omnis numerus, omnis numeri, minor majoris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A, minor, & B, major. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur qualibet unitas numeri A, pars est numeri B: perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, unitates.

A.....
B.....

Sint deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. hujus lib.

b 3 defin.

A....
B.....

SED jam A, non metiatur ipsum B, a inventa autem maxima eorum mensura communis sit C; dividaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. b Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars ejusdem B: similiter & DE, & EF: ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A, F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor majoris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

a 12. sept.

A..D..E..F
B.....
C..

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit. quæ unus unius.

Sit numerus A, eadem pars numeri BC, quæ est numerus D, numeri EF, Dico utrumque numerum A, & D, simul utriusq; numeri BC, & EF, simul eandem esse partem, quæ est vel A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Divisis enim numeris BC, EB, in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri

A.....
B..... G..... C
D....
E.... H.... F

ri B C, *aqualis multitudini partium numeri* E F, *propterea quod eadem pars est* A, *ipsius* B C, *quæ* D, *ipsius* E F. *Quia igitur* A, & B G, *æquales sunt, si illis addantur æquales* D, & E H; *erunt* A, & D, *simul æquales ipsis* B G, & E H, *simul: Eodem argumento erunt* A, & D, *simul ipsis* G C, & H F, *simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in* B C, E F; *aggregatum numerorum* A, & D, *tot aggregatis partium numerorum* B C, & E F, *æqualis erit, quoties* A, *in* B C, *vel* D, *in* E F, *continetur: Ac propterea eadem pars erit uterq; A, & D, simul utriusque* B C, & E F, *simul, quæ est* A, *ipsius* B C, *vel* D, *ipsius* E F. *Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

Idem hoc verum est in numeris fractis, eademque prorsus demonstratio adhibebitur: ut in hoc exemplo apparet, ubi numerus A, A, $\frac{6}{9}$ D, $\frac{3}{9}$ numeri B C, & numerus D, numeri B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ C, E, $\frac{1}{9}$ H, $\frac{1}{9}$ F E F, eadem pars est; ac proinde uterq; simul A, D, utriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B C: si nimirum B C, E F, dividantur in partes B G, G C; E H, H E, ipsis A, D, æquales, &c.

Quod si quando contingat, numerum fractum dividi non posse in partes æquales propositas, propterea quod numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerũ partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cujus numerator in propositas partes dividi poterit. Vt si fractio $\frac{6}{9}$ secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit uterq; ejus numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. ut gignantur fractiones $\frac{12}{18}$. $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{6}{9}$. $\frac{6}{9}$ secunda in has tres $\frac{6}{27}$. $\frac{6}{27}$. $\frac{6}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{6}{36}$. $\frac{6}{36}$. $\frac{6}{36}$. $\frac{6}{36}$.

Rursus quando adsunt integra, revocanda prius erunt una cum fractione ad unam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partiũ, &c. Vt si numerus $4\frac{2}{7}$ secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc unicam fractionem, $\frac{30}{7}$ deinde utrumque ejus numerum per 6. multiplicabimus, ut fiat fractio $\frac{180}{42}$ cujus tres partes æquales sunt $\frac{60}{42}$. $\frac{60}{42}$. $\frac{60}{42}$. Atque hæc in sequentibus quoque propositionibus observanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alii integri.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas,

nitas, vel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc autem perspicuè in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A. | D. || A. | D...
B. G. C. | E. H. F | B. G. C | E... H... F

Possumus etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A,B,C, numerorum D E,F G,H I, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C, simul omnium numerorum D E, F G, H I, simul eandem esse partem, quæ est A, ipsius D E. Divisis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipsis A,B,C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quam numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & F L, erunt A,B, simul æquales ipsis D K, F L, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & H M; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis D K, F L, H M, simul. Simili ratione erunt A,B,C, simul æquales ipsis K E, L G, M I, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in D E, F G, H I, aggregatum numerorum A,B,C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, simul ipsorum D E, F G, H I, simul quæ A, ipsius D E.

A. | B.. | C... || A. | B. | C.
D. K. E. | F.. L.. G | H.. M... I | D. K E | F. L.. G. | H. M. I

Idem sequitur, si loco unius numerorum A,B,C, sumatur unitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures unitates, ut de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

Hæc etiam fractis numeris conveniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunq; fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel unitates, ut hic videre licet.

A, 1

A, 1.	B 1/2	C, 1/4
D 1K1E	F 1/2 L 1/2 G	H 3/4 M 3/4 I

Theorematiquoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F, erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

A....B....C..... D....E....F....

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex est unius unus, tam multiplices erunt & omnes omnium, Vt ex demonstratione liquet.

A..B..C.. D..E..F..

Quod si loco unius numerorum D, E, F, assumatur unitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

Sit numerus A B, *eadem partes numeri* C, *quæ numerus* D E, *numeri* F. *Dico utrumque* numerum A B, & D E, simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, *vel* D E, *ipsius* F. *Quoniam enim numeri* A B, D E, *in partes*

A....G...B | D....H....E C..... | F.....

tes A G, G B; *D* H, H E, *numerorum* C, *& F; erit multitudo partium in numero* A B, *æqualis multitudini partium in numero* D E: *propterea quod eadem partes est numerus* A B, *numeri* C, *quæ numerus* D E, *numeri* F. *Quia igitur, quæ pars est* A G, *numeri* C, *eadem est* D H, *numeri* F; a *erit uterque* A G, D H, *simul eadem pars utrius q; p* C, F, *simul, quæ* A G, *ipsius* C, *vel* D H, *ipsius* F. *Eadem ratione erit uterque* G B, H E, *simul eadem pars utriusque* C, F, *simul, quæ* G B, *ipsius* C, *vel* H E, *ipsius* F: *Et sic deinceps, si plures partes fuerint in* A B, D E, *erunt tot aggregata partium in numeris* A B, D E, *contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum* C, F, *simul, quæ pars est* A G, *ipsius* C; *quot partes eadem est numerus* A B, *ipsius* C, *vel* D E, *ipsius* F: *Ac proinde eadem partes erit uterque numerus* A B, D E, *simul utriusque numeri* C, F, *simul, quæ* A B, *ipsius* C, *vel* D E, *ipsius* F. *Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 5. sep.

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, una cum demonstratione: ut hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{3}$ G, $\frac{1}{2}$ B — D, $\frac{2}{3}$ H, $\frac{1}{2}$ E
C, $\frac{1}{6}$ — F, $\frac{1}{6}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros sive integros, sive fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius.

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstravimus, in scholio præcedenti, ut hic perspicuum est.

A..K..B | C...L...D | E....M....F
G..... | H..... | I.....

THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

Sit numerus A B, *eadem pars num.* C D, *quæ ablatus* A E, *ablati* C F. *Dico reliquum* E B, *eandem esse partem reliqui* F D, *quæ est totus* A B, *totius* C D. *Ponatur enim* E B, *numeri* G C, *eadem*

eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD.

A...E..B
G....C.....F....D

Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC: erit utrique A,E, EB, simul eadem pars utriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars utriusque numeri FGCD, erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD, Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsum GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum. a 5. sept.

SCHOLIVM.

A, 3/2 E, 5/2 B, G 4/3 C, 4/3 E, 3/3 D ut hic apparet. Locum etiam habet hæc propositio, una cum ejus demonstratione in numeris fractis,

Idem hoc theorema verum est tam in numeris integris, quam in fractis etiamsi ablata sit unitas AE, vel reliqua fuerit unitas EB, vel denique in integris & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A.E...B | A...E.B | A.E.B.
G...C..F....D | G..C....F..D | G..C..F..D

Cæterum & ex his theoremati quinto lib 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius.

Quod quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, ut est totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipsius CD, sit æque multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE. Quare & reliquus FD, reliqui EB. eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB, Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, ut AB, ipsius CD, est multiplex.

A.....E.....
C..F..D

b 7. sept.

Quod si ex CD, ablata fuerit unitas CF, vel reliqua sit unitas. FD. vel denique in integris & ablata sit unitas CF, & alia reliqua FD. idem demonstrabitur, ut hæc exempla commonstrant.

A...E.... | A....E..B | A....E....B
C..F..D | C..F.D. | C.F.D

THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati. Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eadem numeri C D, qua ablatus A E ablati C F. Dico reliquum E B, easdem esse partes reliqui F D, qua totus A B, est totus C D. Sumpto enim numero G H, aquali ipsi A B, erit G H, eadem partes ipsius C D, qua A B, ejusdem C D, hoc est, qua A E, ipsius C F.

A.....K.....E....B
C.....F.....
G.....L..I.....M..H

Diviso ergo G H, in partes G I, I H, numeri C D; & A E, in partes A K, K E, numeri C F, erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K E, aqualis, eademque pars tam G I, quam I H, ipsius C D, qua tum A K, quam K E, ipsius C F. Cum ergo C D, numerus major sit numero C F, erit & tam G I, quam I H, pars ipsius C D, major tam numero A K, quam K E, parte ipsius C F. Sumptis igitur numeris G L, I M, aqualibus ipsis A K, K E, erit G L, eadem pars ipsius C F, qua A K, ejusdem C F, hoc est, qua G I, ipsius C D; Ac proinde cum totus G L, totius C D, sit eadem pars, qua ablatus G L, ablati C F, a 7. sep. erit & reliquus L I, reliqui F D, eadem pars, qua totus G I, totius C D. Eodemq; argumento ostendemus M H, eandem esse partem ipsius F D, qua est totus G I, vel I H, totius C D, Quoniam ergo tam G I, quam I H, eadem est pars ipsius C D, qua est tam L I quam M H, ipsius F D; erit uterque G I, I H, simul eadem partes ipsius C D, qua uterque L I, M H ipsius F D. Est autem G H, eadem partes ipsius C D, qua A B, ejusdem C D, propter aqualitatem numerorum A B, G H; Igitur & uterque L I, M H, simul eadem partes erit ipsius F D, qua A B, ipsius C D. Quia vero si ab aqualibus A B, G H, aquales auferantur A K, K E, & G L, I M, reliqui E B, & L I M H, simul aquales sunt; Erit quoque E B, reliquus eadem partes reliqui F D, qua A B, totus totius C D, nimirum eadem qua uterque L I, M H, si-mul erat ejusdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{15} K, \frac{5}{15} E, \frac{6}{15} B$
$C, \frac{6}{15} F, \frac{6}{15} D$
$F, \frac{2}{15} L, \frac{3}{15} I, \frac{5}{15} M, \frac{7}{15} H$

In numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, ut hic manifestum est.

Non

Non demonstravit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabit hic reliquum numerum E B, alicujus numeri easdem esse partes, quæ est numerus A E, numeri C F; ibi vero perspicuum erat reliquum E B, alicujus numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, ut A E, est submultiplex ipsius C F.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertii, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, qua numerus D, numeri E F, sint que A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De hic enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Divisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quam E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur: Erit B G, ipsius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, ac propterea & uterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus utriusque E H, H E, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A 3 vel 6. sept.

A 7 / 11
B, 3/11 G, 7/11 C
D, 14/22
E, 14/22 H, 14/22 F
A.
B. G. C.
D:.....
E..... H..... F

SCHOLIVM.

In numeris fractis propositio hæc una cum ejus demonstratione locum etiam habet, ut hic perspicuum est.

Quod si loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicujus pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim unitas tertii numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertii, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

Sit numerus AB, eadem partes numeri C, qua numerus DF, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis D, E, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, qua numerus C, eſt numeri F. Diviſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & D, H, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium, in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipſius C, qua tam DH, quam HE, ipſius F. a *Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipſius DH, & GB, ipſius HE, qua C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, qua GB, ipſius HE.* b *Igitur & uterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes utriusque DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertii, qua AG, ipſius DH, hoc eſt, qua C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partus fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . . . .

a 9. ſep.
b 5. vel 6. ſep.

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{15} G, \frac{2}{15} B,$
$C, \frac{6}{15}$
$D, \frac{3}{10} H, \frac{3}{10} E$
$F, \frac{2}{6}$

Numeris fractis convenit etiam hujus propoſ. demonſtratio, ut in hoc exemplo apparet.

xij. THEOR. 9. PROPOS. 11.

Si fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

Sit ut totus numerus A, B, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, ut eſt totus AB, ad totum CD. Cum enim ſit, ut AB, ad CD, ita AE, ad CF; erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: vel certe AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AE, ipſius CD, & AE, ipſius CF, aque mul-

A . . . . . E . . . . . B
C . . . . . F . . . D

c 20. defin.

multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, aque multiplices ipsorum CD, CF. a Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, aque multiplex erit, b Quare erit, ut totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. a 7. sept. b 20. defin

Sit deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eadem partes. Quo posito erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, qua totus AB, totius CD; d Ac proinde erit ut totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A....E..B
C.....F....D
A....E..B
C.....F...D

c 7. vel 8. sept. d 20. defin.

Contineat tertio AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aqualiter, eandemque insuper illius partem vel partes. Quo posito, erit è contrario CD totus totius AB, eadem partes, qua ablatus CF, ablati AE, ut mox demonstrabimus. e Reliquus igitur FD, reliqui EB, eadem quoque partes erit, qua totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB ipsum CD, & EB, ipsum FD, aqualiter continebit, eandemque insuper illius partem vel partes, ut mox ostendemus. f Quare erit, ut totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD. e 8. sept. f 8. sept.

A.....E...B | A.....E.....B
C... F..D | C..... F.....D

Quod si AB, totus toti CD, aqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoq; esse aqualem reliquo FD. Nam si ab aqualibus aqualia demantur: qua remanent, sunt aqualia. Itaq; si fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....E...B
C.....F... D

SCHOLIVM.

Eodem modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis, quæ exemplis tertii casus demonstrationis respondent.

$A\frac{3}{5}E_{,}\frac{1}{30}B$ | $A_{,}\frac{14}{21}E\frac{28}{30}B$
$C_{,}\frac{1}{5}F\frac{2}{15}C$ | $C_{,}\frac{5}{21}F\frac{10}{29}D$

LEMMA.

Quod autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsius CF, æqualiter contineat, eademque insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit

eædem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A..P...Q...H...E
C...L...M...F

partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel vel bis, vel ter, &c eandemque insuper partem GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF, ita ut numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD. CF, vel eorum æque multiplices. Divisis igitur numeris CD, CF, in partes CI. IK. KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadem pars quæ HE, ipsius CF. Similiter divisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, EQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF. vel eorum æque multiplices, erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea que multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo una pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ una pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF, erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemq; insuper partes illius: numerus quidē AB, partes GB, numeri CD, & nūerus AE, partes HE, numeri CF: ita ut reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Divisis igitur numeris

GB,

GB,HE,in partes GI,IB,& HK,KE,numerorum CD, CF,erit multitudo partium ipsius GB,multitudini partium ipsius HE,æqualis. Similimodo, divisis numeris CD,CF,in partes CL,LM,MD,& CN,NO,OF. partibus GI,IB,&HK,KE,æquales,erit quoque multitudo partium ipsius CD,multitudini partium ipsius CF, æqualis propterea quod quælibet partium numeri GB,eadem pars est numeri CD, quæ unaquæque partium numeri HE,est numeri CF. Denique divisis numeris AG, AH,in partes AP,PQ,QG,& AR,RS,SH, eisdem partibus GI,IB,& HK,KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG,æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG,AH, vel æquales sint ipsis CD, CF,vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG,AH,quot in CD,CF,vel certe numerus partium ipsius CD,toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF,in AH,propterea aque multitudo partium numeri AG,multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB,HE,erit quoque multitudo partium numeri AB,multitunini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo una pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB,quæ una pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF,erit CD,eædem partes numeri AB,quæ CF,ipsius AE. Quod est primo propositum.

Iam verò sit CD,ipsius AB,& CF,ipsius,AE,eadē partes. Dico è contrario AB,ipsū CD,& AE,ipsūCF,æqualiter continere,eandēq; insuper illius partē,vel partes. Divisis enim numeris CD,CF,in partes numerorū AB,AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Itē divisis numeris AB,AE,in partes partib. numerorūCD,CF,æquales,erūt &hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebūtur omnes partes numeri CD,in AB, supereritq; eadē pars,vel partes ipsius CD. quoties omnes partes nūeri CE,

continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, superfunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris superfint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, C, D, E, F; *hoc est, ut A, ad* B, *ita* C, *ad* D, *&* E, *ad* F: *Dico esse quoque omnes* A, C, E, *simul ad omnes* B, D, F, *simul, ut est A, ad* B. *Sint enim primum* A, C, E, *minores quam* B, D, F. *Quoniam igitur propter eandem proportionem,* a *eadem pars est, aut partes, A, ipsius* B, *qua C, ipsius* D, *&* E, *ipsius* F, b *erit quoque uterque* A, C *simul utriusque* B, D, *simul, eadem pars, aut partes, qua A, ipsius* B, *vel* E, *ipsius* F *Rursus quia uterque* A, C, *simul, tanquam unus, utriusque* B, D *simul, tanquam unius, eadem pars est, aut partes, qua* E, *ipsius* F: c *erunt & ambo A, C, tanquam unus, &* E. *simul amborum* B, D, *tanquam unius, &* F, *simul eadem pars, vel partes, qua* A, *ipsius* B. d *Quare eadem proportio est omnium* A, C, E, *simul ad omnes* B, D, F, *simul, qua ipsius A, ad* B.

a 20. defin. b 5. vel 6. sept. c 5. sept. d 20. defin.

A . . . . . C . . E . . .
B . . . . . D . . . F . . . . .

Sint deinde A, C, E, *maiores, & aque multiplices numerorum* B, D, F. *Quo posito, erit è contrario* B, *ipsius* A, *eadem pars, qua* D, *ipsius* C, *&* F, *ipsius* E: *Atque adeo ut prius, erunt omnes* B, D, F, *simul, omnium* A, C, E, *simul eadem pars, qua* B, *ipsius* A; *ideoque & è contrario omnes* A, C, E, *simul omnium* B, D, F. *simul, &* A, *ipsius* B, *aque multiplices.* f *Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul ad omnes* B, D, F, *simul, qua est* A, *ad* B. *Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad u-*

c 5. sept.

A . . . . . C . . . . E . . . . .
B . . . . D . . F . . .

f 20. defin.

ad unitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hic apparet, adjuvante tamen scholio propos. 5. hujus lib.

A...C.....E.....	A...C...E.....	A...C...E...
B. D.. F...	D. D. F..	B. D. F.

a 20. *defin.*

Sint tertio A, C, E, *majores quam* B, D, F, *at non multiplices.* a *Quia igitur propter eandem proportionem* A, *ipsum* B, & C : *ipsum* D, & E *ipsum* F, *aequaliter continet, eandemq; insuper partem, vel partes: Erit per lemma praecedentis propos.* 5. *ipsius* A, & D, *ipsius* C & E, *ipsius* E, *eadem partes. Igitur ut prius,* b *erunt omnes* B, A.....C....E..... b 6. *sept.*
D F, *simul omnium* A, C, E, *simul* B..... D... F.....
eadem partes, quae ipsius A *atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri* A, C, E, *simul omnes numeros* B, D, F, *simul, &* A, *ipsum* B, *aequaliter, eandemque insuper partem, vel partes.* c *Quare eadem proportio est* c 20. *defin.*
omnium A, C, E, *simul, ad omnes* B, D, F, *simul, quae ipsius* A, *ad* B.

Sint quarto & ultimo A, C, E, *ipsis* B, D, F, *aequales. Quoniam igitur, si aequalibus* A, & B, *aequales addantur* C, & D, *fiunt* A, C. *simul aequales ipsis* B, D, *simul: quibus si rursum addantur aequales* E, & F, *fiunt* A.... C... E.....
& *omnes* A, C, E, *simul, omnibus* B, D, F, B.... D...F.....
simul aequales; Erunt, ut A, *ad* B, *ita omnes* A, C, E, *simul ad omnes* B, D, F, *simul, cum utrobique sit proportio aequalitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

In numeris quoque fractis propositio haec vera esse eodem modo convincetur, ut patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

Si quatuor numeri proportionales sint : Et vicissim proportionales erunt.

Sit enim A, ad B, *ut* C, *ad* D. *Dico vicissim esse* A, *ad* C, *ut* B, *ad* D. *Nam sint primum* A, & C, *minores quam* B, & D, & A, *quoque minor, quam* C. *Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius* B, & C, A... C.....
ipsius D, *eadem pars vel partes.* d *Vicissim* B.... D..... d 9. *vel* 10. *sept.*
ergo & A, *ipsius* C, & B, *ipsius* D, *eadem pars erit, vel partes:* e *ac proinde erit ut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D. e 20. *defin.*

SIN *Tdeinde* A, & C, *minores quam* B, & D; *at* A, *major quam*

C. *Quo posito, erit, ob eandem proportionem* C, *ipsius* D, & A, *ipsius* B, *eadem pars vel partes.* a *Vicissim ergo & C, ipsius* A & D, *ipsius* B; *eadem pars erit, vel partes: Atque adeo è contrario, vel* A, *ipsius* C & B; *ipsius* D, *aque multiplex erit, vel certe per lemma propos.* 11. *hujus lib.* A, *ipsum* C, & B, *ipsum* D, *aqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes.* b *Quare erit ut* A, *ad* C, *ita* B *ad* D.

a 9. *vel* 10. *sept.*

A..... C...
A.....D....

b 20. *defin.*

Sint tertio A, & C, *majores quam* B & D; *at* A, *minor quam* C, *quo posito, erit ob eandem proportionem, vel* A, *ipsius* B, & C, *ipsius* D, *aque multiplex, vel certe* A, *ipsum* B & C *ipsum* D, *continebit aqualiter eandemque insuper partem vel partes: Atque adeo è contrario erit* B, *ipsius* A, & D, *ipsius* C, *vel eadem pars, vel certe per lemma propos.* 11. *hujus lib. eadem partes.* c *Vicissim ergo* B, *ipsius* D, & A, *ipsius* C, *eadem pars erit vel partes.* d *Ac proinde eadem proportio erit* B, *ad* D, *qua* A, *ad* C, *hoc est, erit ut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D.

A...C.....
B...D....

c 9. *vel* 10. *sept.*

d 20. *defin.*

Sint quarto A, & C, *majores quam* B, & D: & A, *quoque major quam* C. *Quo posito, erit* C, *ipsius* D, & A, *ipsius* B, *ob eandem proportionem, vel aque multiplex, vel certe* C, *ipsum* D, & A, *ipsum* B, *aqualiter continebit, eandemq; insuper partem, vel partes: Atque adeo, è contrario, erit* D, *ipsius* C, & B, *ipsius* A, *vel eadem pars, vel certe per lemma propos.* 11. *hujus lib. eadem partes.* e *Vicissim ergo* D, *ipsius* B, & C, *ipsius* A, *eadem pars erit, vel partes: Ac proterea è contrario vel* B, *ipsius* D, & A, *ipsius* C, *aque multiplex erit, vel certe per lemma propos.* 11. *hujus lib.* B, *ipsum* D, & A, *ipsum* C, *continebit aqualiter, eandemque insuper partem, vel partes.* f *Quare eadem proportio erit* B, *ad* D, *qua* A, *ad* C, *hoc est, erit ut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D.

A...C....
B... D....

e 9. *vel* 10. *sept.*

f 20. *defin.*

Sint quinto A, & C, *ipsis* B, & D, *aquales,* & A, *minor quam* C. *Quoniam igitur aquales numeri* A, & B, *aqualium numerorum* C, & D, *vel eadem pars, vel eadem partes sunt;* g *Erit ut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D.

g 20. *defin*

Sint sexto A, & C, *ipsis* B, & D, *aquales, at* A, *major quam* G. *Quia igitur aquales numeri* A, & B, *aqualium numerorum* C, & D, *vel aque multiplices sunt, vel certe illi hos aqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes;* h *erit ut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D.

A .... C...
B..., D...

h 20. *defin.*

Sint septimo ac ultimo A, & C, *inter se aquales, sive ii majores sint*

sint quam B, & D, sive minores, sive æquales. a *Quoniam igitur,* a 20. *defin. ob eandem proportionem A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe A, ipsum B... D... B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eademque insuper partem, vel partes, suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca si quatuor numeri proportionales sint, vicissim & proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.*

A.....C.....

SCHOLIVM.

Quod si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

Manifestum quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur unitas.

Coacti vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, una cum lemmate propos. 11. ut earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alii interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionib. rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi majorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri minorem majoris, cum minor non metitur majorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam si existimaret, majorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supervacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. XV.

Si sint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Sint

Sint quotcunque numeri A, B, C, *& alii totidem* D, E, F, *ſitque ut* A, *ad* B; *ita* D, *ad* E; *& ut* B, *ad* C, *ita* E, *ad* F. *Dico ex æqualitate quoque eſſe ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F. *Quoniam enim eſt, ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E; *erit viciſſim, ut* A, *ad* D, *ita* B, *ad* E: *Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit ut* B, *ad* C; *ita* E, *ad* F; *erit viciſſim, ut* B, *ad* E, *ita* C, *ad* F.

a 13. ſep.

A..... D.....
B..... E.....
C.... F..,
G.....,H.....

Igitur erit ut A, *ad* D, *ita* C, *ad* F; *(Cum enim utraque proportio* A, *ad* D, *&* C, *ad* F, *eadem ſit proportioni* B *ad* E, *ut demonſtratum eſt; & ipſa inter ſe eadem erunt, ut mox oſtendetur.)* b *Ac proinde viciſſim, ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F.

b 13. ſep.

Quod ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam quemadmodum C, *ad* G, *ita* F, *ad* H: *Dico adhuc eſſe ut* A, *ad* G, *ita* D, *ad* H. *Cum enim jam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F: *ponatur autem ut* C, *ad* G, *ita* F, *ad* H; *erunt tres numeri,* A, C, G, *& alii tres* D, F, H, *qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſuſerit ut* A, *ad* G, *ita* D, *ad* H; *Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor: ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus: Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.*

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

A. D... Idem verum eſt, ſi loco unius numeri unitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perſpicuum eſt.
B.. F.....
C... F.....
G. G...

LEMMA.

Quod autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt inter ſe quoque eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſive numeri ſint integri ſive fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſi-

A..... B..... C....
D..... E..... F...

ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, vel eadē pars, vel eædem partes; vel certe B; ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F, continebit æqualiter; eandemque insuper partem, vel partes, *a* Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum. *a* 20. *defin*

Hocidem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque unitas tertium numerum metietur, & secundus quartum. xvj.

Metiatur unitas A, *numerum* B C, *& numerus* D, *numerum* E F, *æque. Dico vicissim unitatem* A, *numerum* D, *& numerum* B C, *numerum* E F, *æque metiri. Divisio enim numero* B C, *in unitates* B G, G H, H C, *& numero* E F. *in partes* E I, I K, K F, *si* D, *æquales; erit multitudo unitatum numeri* B C, *æqualis multitudini partium numeri* E F, *metietur que æque unitas* A, *numerum* D, *& unitas* B G, *ipsum* E I, *atque unitas* G H, *ipsum* I K, *& unitas* H C, *ipsum* K F: *atque idcirco eadem pars erit unitas* A, *numeri* D, *& unitas* B G: *numeri* E I, *qua unitas* G H, *numeri* I K, *& unitas* H C, *numeri* K F. *Quare per ea, quæ ad propos. 5. hujus lib. ostendimus, eadem pars erunt unitates* B G, G H, H C, *simul numerorum* E I, I K, K F, *simul, qua unitas* B G, *numeri* E I, *hoc est, qua unitas* A, *numeri* D; *Ac proinde unitas* A, *numerum* D, *& numerus* B C, *ex unitatibus* B G, G H, H C. *compositus numerum* E F, *ex numeris* E I, I K, K F, *compositum æque metietur. Si unitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.*

A. D.. B G. H C E.. I.. I.. F

SCHOLIVM.

Illud idem, quod Euclides demonstravit de numeris propos. 13. ostendit hoc loco seperatim de unitate, & tribus numeris propterea quod unitas non est numerus: Quod quidem brevius ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C. æque metitur atque numerus D, numerum E F, erit unitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstravimus, erit vicissim unitas A eadem pars numeri D, quæ nu-

numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propositio fractis numeris convenire non potest. Nam si unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque unitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; a sed solum eandem habebit rationem unitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.

a 13. sep.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.

A... B....

D.....C.....

Duo numeri A, & B, *se mutuo multiplicantes faciant numeros* C, & D, *ita ut* A *multiplicans ipsum* B, *faciat* C, *at* B, *ipsum* A, *multiplicans faciat* D. *Dico numeros* C, & D, *inter se æquales esse. Sumpta enim unitate* E; b 35. *defin.* *cum* A, *ipsum* B, *multiplicans faciat* C; b *erit* C, *ex* B, *toties compo-* c 15. *sept.* *situs, quot sunt in* A, *unitates; atque adeo unitas* E, *numerum* A, & *numerus* B, *numerum* C, *æque metietur.* c *Vicissim ergo & unitas* E, *numerum* B, & *numerus* A, *numerum* C, *metietur æque. Rur-* d 15. *defin.* *sus eodem modo, quia* B, *multiplicans ipsum* A, *facit* D: d *erit* D, *ex* A, *toties compositus, quot sunt in* B, *unitates: atque adeo unitas* E, *numerum* B, & *numerus* A *numerum* D, *æque metietur: Metiebatur autem & eadem unitas* E, *eundem numerum* B, & *numerus idem* A, *numerum* C, *æque. Æque igitur numerus* A, *utrumque numerum* C, & D, *metietur; Ac proinde* C & D, *inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, ut A, ad E unitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, ut C, ad A, ita B, ad E; unitatem. Sed ex eadem defin. ut B, ad E, unitatem, ita quoque est D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, ut C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.

A, $\frac{2}{3}$ B, $4\frac{2}{3}$.

D, $3\frac{1}{3}$. C, $3\frac{1}{3}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo

Si duo numeri se mutuo multiplicaverint, procreabitur unus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipsum B.

E.
A. . . B . . . .
C. . . . . a 15. defin.

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel unus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. ut C, ad B, ita A, ad E, unitatem: Et permutando, ut C, ad A, ita B, ad E, unitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B ad E, unitatem, ut factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, ut numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem cuiusque C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. *Dico esse, ut* B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Assumpta enim unitate* F; b *erit* D, *ex* B, *compositus toties, quoties unitas* F. *est in* A: *similiterque toties* E, *compositus erit ex* C, *quoties eadem unitas* F, *est in eodem* A; *Atque adeo* B, *ipsum* D, & C, *ipsum* E, *æque metietur. Quare* B, *ipsius* D, & C, *ipsum* E, *eadem pars erit,* c *Ac proinde, erit ut* B, *ad* D, *ita* C, *ad* d, & *permutando, ut* B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.*

F.
A. . .
B . . C . . . .
D . . . . . E . . . . . b 15. defin.
c 20. defin.
d 13. sept.

SCHOLIVM.

Si numeri A, B; C, sint fracti, vel unus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo: Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, ut A, ad F, unitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. ut D, ad B, ita E ad C. Igitur permutando, ut D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

The-

THEOR. 16. PROPOS. 18.

xix. Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Generi ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D: a a 16. sep. *et quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E: b erit, ut* b 17. sep. *A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.*

A.... B.....
C...
D..... E.....

SCHOLIVM.

Liquido constat eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel unus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, sive numeri omnes sint integri sive non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B C, D, habent: hoc est, esse, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiat E, F, c erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G, Atque ita de cæteris.

A...
B.. C... D....
E.....F.....G.....

c 17. sep. 18. sep.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

xix. Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sit

SINT *quatuor numeri proportionales* A,B,C,D, *ut quidem* A. *ad* B, *ita* C, *ad* D, *fiatque* E, *ex* A, *primo in* D, *quartum*; & F, *ex* B, *secundo in* C *tertium*, *Dico numeros* E,F, *æquales inter se esse. Fiat enim rursus* G, *ex* A, *in* C. *Quia igitur ex*

A, *in* C,D, *fiunt* G,E; a *erit, ut* C, *ad* D, *hoc* A... a 17. *sep.*
est, ut A, *ad* B, *ita* G, *ad* E. *Rursus quia ex* B..
A, & B, *in* C, *fiunt* G, & F; b *erit quoque ut* C.....
idem A, *ad* B, *ita* G, *ad* F. *Quare, per lemma* D.... b 18. *sep.*
propos. 14. *habebit* G, *ad* E, & F, *eandem* E.....
proportionem; eam videlicet, quam habet F.....
A, *ad* B; Ac *proinde* E, & F, *numeri æquales* G.....
erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. *scripsimus.*

SED *jam sit* E, *ex* A, *primo in* D, *quartum genitus, æqualis ipsi* F, *producto ex* B, *secundo in* C, *tertium. Dico quatuor numeros* A, B, C, D, *proportionales esse, ut quidem* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D. *Fiat enim rursus* G, *ex* A, *in* C. *Quia ergo ex* A, *in* C, D, *fiunt* G, E; c *erit ut* C, *ad* D, *ita* G, *ad* E, *vel ad* F, *ipsi* E, *æqualem. Habet enim* G, *ad æquales* E, F, *eandem rationem, ut ad defin.* 20. *docuimus. Rursus, quoniam ex* A, & B, *in* C, *fiunt* G, & F; d *erit quoque, ut* A, *ad* B, *ita idem* G, *ad eundem* F. *Quare proportiones* A, *ad* B, & C, *ad* D, *cum eadem sint proportioni* G, *ad* F, *eadem inter se erunt, per lemma propos.* 14. Ac *proinde erit, ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D. *Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.* c 17. *sep.* d 18. *sep.*

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem hujus propos. locum habere in numeris fractis, sive omnes fracti sint, sive non.

POTERAT hujus theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tàm in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI major fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertii ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, major erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, major fuerit eo, qui

ex secundo & tertio fit, numero; major erit proportio primi ad secundum, quàm tertii ad quartum.

SIT primum major proportio primi A, ad B, secundum, quàm C. tertii ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse majorem eo, qui fit ex B in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, ut C ad D; (sive E, numerus integer sit, sive fractus: sive integer cum fracto: qui quidem reperietur, ut ad propos. 19, lib. 9. ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus dividatur per D.) erit quoque major proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, major erit, quam E. Quare major numerus fiet ex A, in D. quam ex E, in eundem D: a At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, major erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.

A.....E.....
B....
C.....
D.....

a 19. sep.

FIAT deinde major numerus ex A in D, quàm ex B, in C. Dico majorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quam C, tertii ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C (sive E, numerus sit integer, sive fractus, aut integer cum fracto) fiet quoq; major numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde major erit A, quàm E. Quare major erit proportio A, ad B quam E, ad B: b At ita est E, ad B, ut C, ad D. Igitur major erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

b 19. sep.

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertii ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: minor erit proportio primi ad secundum, quam tertii ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, majoris, mutes in vocem minoris. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A ad B quam C, ad D: hoc est, major est proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertii ad B, quartum: major fiet numerus ex C, primo in B, quartum, sive ex B, in C, quam ex D, secundo in A, tertium, sive ex A, in D, ut demonstratum jam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B in C: hoc est, major ex B, in C, sive ex C, in B, quam ex A in D, sive ex D, in A, erit major proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertii ad B, quartum, ut

A.....E.....
B....
C...
D..

jam

iam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C: numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur: Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt: a erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

A.....
B.....D.....
C....

a 19. sept.

SED jam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C: & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, b erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

b 16. sept.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si major fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; major fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Etsi major numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: major erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Item si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se, minor proportio erit primi ad secundum,

A.....	A....
B.....D.....	B.....D.....
C.....	C.....

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, ut habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit major proportio primi ad secundum, quam tertii ad quartum, aut minor, &c. ut in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, major quidem majorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, *minimi in proportione eadem quam habent alii duo numeri majores* E, F, *ita ut sit, quemadmodum* A B, *ad* C D, *ita* E *ad* F. *Dico* A B, C D, *aquè metiri ipsos* E, F, *majorem quidem* A B, *ipsum majorem* E, *at minorem* C D, *ipsum minorem* F: *hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, ut* A B. *ad* C D, *ita* E, *ad* F; a *erit vicissim, ut* A B, *ad* E, *ita* C D, *ad* F. *Atque adeo cum* A B, C D, *minores sint, quam* E, F; b *erit* A B, *ipsius* E, *&* C D, *ipsius* F, *eadem pars vel partes. Partes quidem nequaquam: Divisis namque, si fieri potest,* A B, C D, *in partes* A G, G B; C H, H D, *numerorum* E, F; *erit multitudo partium* A G, G B, *æqualis multitudini partium* C H, H D; *Ac propterea* A G, *ipsius* E, *&* C H, *ipsius* F, *eadem pars.* c *Erit ergo, ut* A G, *ad* E, *ita* C H, *ad* F; d *&vicissim, ut* A G, *ad* C H. *ita* E, *ad* F, *vel* A B, *ad* C D; *Ac proinde numeri* A G, C H, *minores quam* A B, C D, *eandem habebunt proportionem, quam* A B, C D. *Quod est absurdum; cum* A B, C D, *in sua proportione ponantur minimi. Non ergo* A B, *ipsius* E, *&* C D, *ipsius* F, *eadem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea* A B, *ipsum* E, *&* C D, *ipsum* F, *aqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.*

A...G..B
C..H..D
E.....
F.....

a 13. *sep.*
b 20. *de fin.*
c 20 *defin.*
d 13. *sep.*

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundū, tertium, ut in hoc appositō exemplo apparet, ubi tertius numerus secundo æqualis est. Quamvis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit unitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus

mus ab adversario non dicatur esse unitas, ut diximus. Quod idcirco dixerim, ut propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua adversarius cogitur concedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primum metiri secundum, ex hac propos. quod ante negaverat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum est, quod Campanus docet.

QUOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eædem sint, sive diversæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaidem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, sive eadem sit proportio AB, ad

A...K...B C..L..D E....M....F
G.....H..... I.....

CD, quæ CD, ad EF, sive non; ita ut non possint reperiri alii numeri ipsis AB, CD. EF, minores, quorum primus ad secundum sit, ut AB, ad CD, & secundus ad tertium, ut CD, ad EF, &c. (quamvis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut AB, ad CD, & H, ad I, ut CD, ad EF. Dico AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, metiri æquè. Cum enim sit ut AB, ad CD, ita G, ad H, *a* erit vicissim ut AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit ut CD, ad EF, ita H, ad I, *b* erit quoque vicissim, ut CD, ad H, ita EF, ad I. *c* Quare AB, ipsius G, & CD, ipsius H, & EF, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Divisis enim, si fieri potest, AB, CD, EF, in AK. KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipsius G & CL, ipsius H, eadem pars. *d* Erit ergo ut AK, ad G, ita CL ad H; *e* & vicissim ut AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, ut CL, ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri

a 13. sep.
b 13. sep.
c 20. defin.
d 20. defin
e 13. sep.

AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quã AB, CD, EF. quod est absurdum, cũ hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eædem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars: Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur.

A.. B..... C...
C.... E.....F.....

Sint alii tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D, E; eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E, metientur æquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CÆTERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo convenire potest numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusvis datis, dari possunt alii minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio „tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere unam particulam, vel plures, ejusdem denominationis, mensuram communem. Aliæ autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conveniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est, semel hoc loco monuisse.

XIX. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate, in eadem ratione erunt.

SINT *tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, ut quidem A ad B, ita E, ad F: & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim*

A..... H...
B... D....
C... .. E.....
G.....F..

enim sit ut A, ad B, ita E, ad F: a erit numerus ex A, in F, genitus aequalis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, b erit eidem numero, qui fit ex B, in E, aequalis numerus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum aequalis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. c Quare erit ut A, ad C, ita D, ad F. a 19. sept. b 19. sept.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D: Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim jam sit ostensum in tribus numeris esse ut A, ad C, ita D, ad F: ponatur autem ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alii tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex aequalitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alii ipsis multitudine aequales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat. c 19. sept.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, ut constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicavit, & demonstrationibus confirmavit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, quia permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. hujus lib non alienum à nostro instituto erit, breviter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conveniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inversa ratione, sive convertendo, proportionales erunt.

SIT, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & convertendo, sive inversa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D, d erit vicissim A, ad C, ut B, ad D. Rursus quia est B, ad D, ut A, ad C, e erit vicissim B, ad A, ut D, ad C. Quod est propositum.

A..... C...
B.... D..

d 13. sextim. e 13. sept.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque divisi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad CB, ita DE ad FE. Dico dividendo esse ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; *a* erit vicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, *b* ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, ut CB, ad FE. *c* Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, ut DF, ad FE. Quod est propositum.

a 13. sep.
b 11. sep.
c 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus divisionem rationis conversam, & contrariam, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per divisionem rationis conversam esse quoque, ut CB, ad AC, ita FE ad DE. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et convertendo, ut CB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per divisionem rationis contrariam, esse quoque, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit convertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo dividendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et convertendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI divisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, ut AC, ad BC, ita DF ad EF. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; *d* erit vicissim, ut AB, ad DE, ita BC, ad EF; *e* Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, ut BC, ad EF: *f* Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC ad BC, ut DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

d 13. sep.
e 12. sep.
f 13. sep.

SIMILITER Compositio rationis conversa, & contraria ostenditur hoc loco, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conversam esse quoque, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit convertendo ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ut AC, ad AB, ita DF, ad DE, Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit convertendo, ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et convertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conversionem rationis proportionales erunt.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conversionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; *a* erit vicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; *b* Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. *c* Vicissim igitur ut AB, ad AC, ita DE ad DF. Quod est propositum.

a 13. *sep.*
b 11. *sep.*
c 13. *sept.*

A..... C..B
D .... F..E

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum: habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sexus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT ut AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item ut BC, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto ad C, secundum, ut est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartũ. Cùm enim sit, ut BG, ad C, ita EH, ad F; erit convertẽdo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est, ut AB, ad C, ita DE, ad F: & ut C, ad BG; ita F, ad EH; erit ex æqualitate, ut AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, ut AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cùm rursus sit, ut AG, ad BG, ita DH, ad EH, & ut BG, ad C, ita EH, ad F: erit ex æqualitate, ut AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

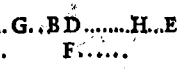
A, ...·, B..G | D..,,.....E..,H
C.... | F.....

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstravimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem: & detracti quidem habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdẽ eandem rationem habebunt:

SIT ut totus AB, ad C, ita totus DE, ad F ; Item ut detractus AG, ad C; ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, ut est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, ut AG, ad C, ita DH, ad F; erit convertendo, ut C, ad AG; ita F, ad DH. Quia igitur est, ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad AG, ita F, ad DH: erit ex æqualitate ut AB, ad AG, ita DE, ad DH. Dividendo ergo ut GB, ad AG, ita HE, ad DH; Itaque cum rursus sit, ut GB ad AG; ita HE ad DH; & ut AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, ut GB, ad, G ita HE, ad F. Quod est propositum.

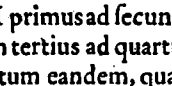


ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT ut primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & ut primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, ut est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, ut A, ad BC, ita D, ad EF; erit convertendo ut BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est ut BC, ad A, ita EF, ad D: & ut A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate ut BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, ut BG, ad CG, ita EH, ad FH; & convertendo, ut CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, ut A, ad CG, ita D, ad FH: & ut CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, ut A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.



DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alii illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alii omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius nu-

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc est, sit ut A B, ad E, ita F G, ad K; & ut B C, ad E, ita G H, ad K; & ut C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsam A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse F I, habet ad K. Cùm enim sit, ut A B, primus ad E, secundum, ita F G, tertius ad K, quartum: Item ut B C, quintus ad E, secundum, ita G H, sextus ad K, quartum; erit quoque

A... B..... C..... D | F.. G... H.... I
E..... | K.....

ut A C, primus cum quinto ad E, secundum, ita F H, tertius cũ sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, ut A C, primus ad E, secundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item ut C D, quintus ad E, secundum, ita H I, sextus ad K, quartum: erit etiam, ut A D, primus cum quinto, ad E, secundum, ita F I, tertius cum sexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris si plures fuerint.

SED habeat jam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc est, sit ut E, ad A B, ita K, ad F G; & ut E, ad B C, ita K, ad G H; & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico esse, ut E, ad omnes illos simul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes simul, utpote ad F I. Cùm enim sit, ut E, primus ad A B, secundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, sextum: erit quoque, ut E, primus ad A C, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum sexto. Rursus quia est, ut E, primus ad A C, secundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, sextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM verò his demonstratis, ostendentur novem ultimæ propositiones lib. 5. à Campano adjectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuêre: si pro magnitudinibus, intelligantur numeri sive integri, sive fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur, iidem modi hoc lib. demonstrati; ut opus non sit eos hic repetere. Satis enim est, ut dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eædemque prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxiij. PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quamipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alii minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; a metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, aquè; atque adeò secundum eundem numerum, qui sit E, ita ut C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties unitas est in E. Itaque cùm unitas numerum E, & numerus C, numerum A, aquè metiatur; b metietur & vicissim aquè unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, aquè metitur: c metietur quoque vicissim aquè unitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeò, cum idem numerus E, utrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alii numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B ....
C ------ D --
E ....

a 21. sep.
b 15. sep.
c 15. sep.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

xxij. MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, praeter unitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B: d fit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quae D, ad E. Atque adeò, cùm D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quàm A, &

A ..... B .....
C ----
D ---- E ----

d 9. pronun.
e 18. sep.

A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri, A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QUOTCUNQUE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi, A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non poſſint, quamvis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alii minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarũ proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C: metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè, per ea, quæ ad propoſ. 21. hujus lib. demonſtrauimus: atque adeò ſecundum unum eundem numerum, qui ſit G: ita ut D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties unitas eſt in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æquè metitur: a metietur quoque viciſſim æquè unitas numerum D, & numerus G, numerum A. Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æquè, atque unitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alii numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

A.....B.....C.....
D----E------F---
G----

a 15. ſep.

IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita ut G, toties metiatur ipſum A, quoties unitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties unitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties unitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties unitas eſt in D, E, F: fit ut D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C,

per ea, quæ ad propos. 18. hujus lib. ostendimus: Atque adeò, cùm D, E, F, minores sint quàm A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

xxiiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensurâ, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A: a metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cùm habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B.....
C.....D---

a 11. pronun.

xxv. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E metiens ipsum D, totiesquot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt unitates in F; b fit ut F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D: c & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D: Genitus est autem idem D, ex A, in B: Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium: d erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter se sunt: & E, ipsum C, ponitur metiri: e erit E. ad A, primus: Atque adeò E, & A, cùm sint inter se primi, f in sua proportione minimi erunt, g Æque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cùm E, metiatur utrumq; B, & C; non erunt B. & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus ergo erit D. ad ipsum C: Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....B...
C.....
D.....
E----F----

b 9. pronun.
c 16. sep.
d 19. sep.
e 25. sep.
f 23. sep.
g 21. sep.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter se fuerint : Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignatur q; C, ex A, in seipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, aequali ipsi A, erit & D, ad B, primus: Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, a erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eadem q; arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D....

a 26. septim.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT uterque A, & B, ad utrumque C, & D, primus, gignatur que E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cùm enim uterque A, & B, primus sit ad C: b erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cùm uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E: c erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A.... B...
E.....
C... D..
F.....

b 26. septim.

c 26. septim.

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque seipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C: & F, ex B, in D: Dico F, quoque esse inter se primos. Cùm enim A, B, sint inter se pri-

A... B..
C..... D....
E..... F.....
G 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

mi-

a 27. septim. *mi, a erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus : Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus : atque adeò geniti duo C, D, primi inter se erunt.*

b 27. sep. *RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, b erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus : Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrumque B, D, primus*

c 28. sep. A . . . , B . . / C . . . . . D . . . . / E . . . . . F . . . . . / G, 81. H, 16. / I, 243 K, 32. *erit ; c Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B in F, fiat H, cùm A, & C, primi sint ad B, d erit quoque E, ex ipsis genitus,*

d 26. septim. *ad B primus : Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur*

e 28. septim. *uterque A, E, ad utrumque B, F, primus est : e erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, f erit & G, ex ipsis fa-*

f 26 septim *ctus, ad B, primus : nec nō & H, ad A. g Quare & I, genitus ex A, in G,*

g. 28. septim. *ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm uterque A G, ad utrumq; B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.*

XXIX. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint : Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit : Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & utrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D.

h 22. pronum. *Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B: h metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos*

A . . . . . B . . . . C / D - - - - - *metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemque modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.*

SED jam uterque A B, B C, simul, primus sit ad unum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D.

i 10. pronum. *Quia igitur D, metitur A B, & B C: h metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum : Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemque ar-*

gu-

mi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, & B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propositi: igitur & A C, ad B C, primus erit: per primam partem ejusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos prater unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . B . . . . . .
C - - - -

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur verò ipsum C, tot ies, quot sunt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primò in E, quartum, aequalis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; a erit ut D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartum. b Quia verò primus D, ad A, primus est, cùm eum non metiatur; c erunt D, & A, in sua proportione minimi. d Quare aquè metientur ipsos B, & E, minimum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur

A . . . B . . . . . .
C . . . . . .
D . . . E . . . . . .

a 19. sep.
b 31. sep.
c 23. sep.
d 21. sep.

atur ipſum B, *metietur ſaltem ipſum* A. *Si duo ergo numeri ſeſe mu tuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtran dum.*

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint a liquem ; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis nu primus numerus ; vel certè ad ipſum ſit compoſitus : i etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus e rit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit : hoc eſt, vel D, & C, compoſit ſint inter ſe. Dico *D*, quoque ad unum ipſorum A B, compoſitum eſſe : id eſt, vel D, & A ; vel D, & B, eſſe quoque inte

a 26. ſeptim. A . . . B . . . . ſe compoſitos. Si enim *D*, ad neutrum eorum com-
C . . . . . poſitus eſt ; erit uterque A, & B, ad D, primus. a Qua-
D . . . . . re & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipſum G, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cùm non ſit primus ad utrumque.

PROBL. 31. PROPOS. 33.

XXX. OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, *qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum : Si verò compoſitus, metiatur eum numerus* C, *qui vel primus erit, vel compoſitus : Si primus, cùm metiatur ipſum*

b 11. pronun. B ; & B, *ipſum* A ; b *metietur quoque* C, *primus ipſum* A. *Si autem* C, *compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur in infinitè, veniemus tan-*
A . . . . . *dem ad aliquem numerum, quem nullus alius*
B . . . . . C . . . *metiatur, atque adeò ad primum, qui cùm metiantur omnes præcedentes,* c *metietur quoque*

c 11. pronun. *compoſitum* A. *Quod eſt propoſitum.*

ALITER. *Quia numerus* A, *compoſitus eſt, metietur eum aliqui numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus*
B, *quem dico eſſe primum. Si enim* B, *non*
A . . . . . *eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt,*
d 11. pronun. B . . . C . . . *numerus* C. *Quoniam igitur* C, *metitur ipſum* B, & B, *ipſum* A. d *metietur quoque* C, *minor ipſo* B, *ipſum* A. *Quod eſt abſurdum, cùm* B, *ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus* B. *Omnem igi-*

igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. *Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si verò compositus;* a A . . . . . *metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur, quod erat ostendendum.* a 33. sept.

PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis. xxxiiij.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, sive eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, sive non; oporteatque totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, *sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt, erunt ipsis in continuatione suarum proportionum minimi, per ea quæ ad propos. 24. hujus lib. demonstravimus. Si verò non sunt inter se primi,* b *inventa sit maxima eorum communis mensura numerus* D, *qui metiatur ipsos* A, B, C, *per numeros* E, F, G. *Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum* A, B, C. *Quòd enim easdem habeant proportiones, quas numeri* A, B, C, *sic ostendetur. Quoniam* D, *ipsos* A, B, C, *metitur per* E, F, G; c *fit, ut* D, *ipsos* E, F, G, *multiplicans faciat* A, B, C. *Quare per ea, quæ ad propos. 18. hujus lib. ostendimus, easdem rationes habebunt* E, F, G *quas numeri* A, B, C.

A . . . . . B . . . . C . . . . . .
D . .
E . . . F . . G . . . .
H - - - - I - - - - K - - - - -
L - - - -

b 3. sept.

c 9. pronun.

QVOD verò E, F, G, *sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; erunt aliqui alii ipsis minores minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi* H, I, K; *qui quoniam ipsos* A, B, C, *metiuntur æquè, ut ad propos. 21. hujus lib. ostendimus; metiantur eos per numerum* L. *Quo posito,* d *fit, ut* L, *multiplicans numeros* H, I, K, *producat numeros* A, B, C; e *& vicissim* L, *ipsos* A, B, C, *metiatur per* H, I, K. *Quoniam igitur* E, *primus multiplicans* D, *quartum facit* A; *& H, secundus multiplicans* L, *tertium facit eundem* A; f *erit, ut* E, *primus ad* H, *secundum,*

d 9. pronunt.

e 8. pronun.

f 19. sept.

dum, ita L, *tertius ad* D, *quartum*: *Est autem* E, *major, quàm* H. *Igitur &* L, *major erit, quam* D: *Atque adeo cum* L, *ipsos* A, B, C, *metiatur*: *non erit* D, *maxima mensura communis numerorum* A, B, C. *Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alii numeri minores ipsis* E, F, G, *minimi in continuatione proportionum* A, *ad* B, *&* B, *ad* C, *sed ipsi* E, F, G, *minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.*

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maximam mensuram numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metiri, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

A, *16.* B, *24.* C, *36.* D, *54.* E, *81.*
I, *8.*
F, *2.* G, *3.*

CÆTERVM contingit interdum, unum numerorum E, F, G,

A....B.....C.....	A....B..C.....
D...	D..
E. F.. G...	E.. F. G....

per hanc propos. inventorum esse unitatem; quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorũ A, B, C, æqualis est, ut ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inventos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cùm minor numerus dari non possit, quàm unitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36.

xxxvij. DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimũ metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, *&* B, *metiuntur. Sint primum dati numeri* A, *&* B, *inter se primi, seseque mutuò multiplicantes faciant* C. *Dico* C, *esse mini-*

minimum, quem A, & B, *metiuntur. Quòd enim eũ metiantur, per-*
spicuum est. Nam cùm producatur C, ex A, in B, *vel ex* B, *in* A : a *metietur A, ipsum* C, *per* B : & B, *eundem* C, *per A. Vterque igitur* A, & B, *ipsum* C, *metitur.* a 7. *pronũ*

Quòd autem C, *sit minimus omnium, quos* A, & B, *metiuntur, sic demonstrabimus. Si* C *non est minimus; metiantur, si fieri potest,* A, & B, *alium numerum D, ipso* C, *minorem: metiaturque* A, *ipsum* D, *per* E, *at* B, *eundem* D, *per* F. *Quo posito,* b *tam ex* A, *in* F, *quàm ex* B, *in* F, & *è contrario, producetur numerus* D. *Quia igitur idem numerus* D, *fit ex* A, *primo in* E, *quartum, & ex* B, *secundo in* F, *tertium,* c *erit, ut A, primus ad* B, *secundum, ita* F, *tertius ad* E, *quartum. Igitur* A, & B, *(cùm ponantur primi inter se,* d *& ob id, in sua proportione minimi)* e *aquè metientur ipsos* F, & E : *nimirum A, ipsum* F, & B, *ipsum* E. *Quoniam verò A, multiplicans* B, & E, *facit* C, & D : f *erit* C, *ad* D, *ut* B, *ad* E : *Ac propterea cùm* B, *metiatur ipsum* E, *ut ostensum est: metietur & C, numerus numerum D, majorem minorem. Quod est absurdum. Non igitur* A, & B, *metientur alium numerum minorem ipso* C, *atque adeò* C, *minimus est omnium, quos metiuntur.*

A....B.....
C.....,.....
D---------
E-------F----

b 9. *pronum.* c 19. *sept.* d 23. *sep.* e 21. *sep.* f 17 *sep.*

SINT deinde *dati numeri A, &* B, *non primi inter se.* g *Inveniantur* C, & D, *minimi in eadem proportione, ut sint quatuor numeri proportionales: nimirum A, ad* B, *ut* C, *ad* D. *Quo posito,* h *fiet idem numerus ex A, primo in* D, *quartum, & ex* B, *secundo in* C, *tertium. Factus ergo sit* E. *Dico* E, *hac via procreatum esse minimum, quem* A, & B, *metiuntur. Quòd enim eum metiantur, manifestum est Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quàm* B, *multiplicatus à* C, *ipsum* E, *producat: i metietur tàm* A, *quàm* B, *ipsum* E. *Quod verò* E, *sit minimus omnium, quos* A, & B, *metiuntur, ita probabitur. Si* E, *non est minimus, metiantur, si fieri potest,* A, & B, *alium numerum* F, *ipso* E, *minorem: metiatur autem* A, *ipsum* F, *per* G ; & B, *eundem* F, *per* H. *Quo posito,* K *fiet* F, *tam ex A, in* G, *quàm ex* B, *in* H. *Quia igitur idem numerus* F, *fit & ex A, primo in* G, *quartum, & ex* B, *secundo, in* H, *tertium:* l *erit, ut* A, *primus ad* B, *secundum, ita* H, *tertius ad* G, *quartum. Quare* C, & D, *cùm sint minimi in proportione A, ad* B, *vel* H, *ad* G, m *metientur ipsos* H, & G, *aquè, nimirum C, ipsum* H, & D, *ipsum* G. *Quia verò* A, *multiplicans* D, & G, *facit* E, & F, n *erit* E, *ad* F, *ut* D, *ad* G : *Ac propterea cùm* D, *metiatur ipsum* G, *ut ostensũ est, metietur etiã* E, *numerus numerum* F, *major minor.*

A....B.....
C..D...
E.....
F----------
G---H----

i 7. *pronum* k 9. *pronũ.* l 19. *sep.* m 21. *septim.* n 17. *septim.*

minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atque adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, major minorem, & minor majorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, majorem, & ex B, majore in C, minorem esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

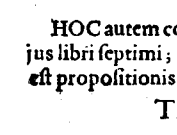
HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35, hujus libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35

XXXV. ## THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, *&* B, *quemlibet numerum* C D. *sitque alius numerus* E, *minimus, quem iidem* A, *&* B, *metiuntur. Dico &* E, *ipsum* C D, *metiri. Si enim* E, *ipsum* C D, *non metitur, ablato* E, *ex* C D, *quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm* E. *Relinquat igitur* E, *ablatus ex* C D, *quoties potest, numerum, si fieri potest* FD, *minorem se, ita ut* E, *metiatur ablatum* C F. *Quoniam igitur tam* A, *quam* B, *ipsum* E, *metitur, &* E, *ipsum* C F; a *metietur quoque tam* A, *quàm* B, *ipsum* C F. *Itaque* A, *&* B, *cùm metiantur totum* C D, *& ablatum* C F; b *metientur & reliquum* F D. *Est autem* F D, *minor quàm* E. *Non igitur* E, *minimus est numerus, quem* A, *&* B, *metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare* E, *ipsum* C D, *metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 11. *prounn.*
b 12. *prounn.*



XXXVI. ## PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. *sep.*

SIT inveniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, *metiantur.* c *Invento* D, *minimo, quem metiantur duo* A, *&* B, *metietur & eundem* D, *reliquus* C, *aut non metietur. Metiatur primum* C, *ipsum* D, *ita ut omnes tres* A, B, C, *ipsum* D, *metiantur.*

Di-

Dico numerum D, minimum inventum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest: A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immò, cùm A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur: a metietur quoque D, ipsum E, majorem minorem. Quod est absurdum. a 32. sept.

A....B....C.....
D.....
E--------

SED jam C, non metiatur ipsum D, inventum. b Invento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur: Dico E, esse minimum, quem A, b 36. sept. B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cùm A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; c metietur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quòd autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur: d metietur quoque eundem F, numerus D, minimum minimus inventus, quem numeri A, & B, metiuntur: At & adeò, cùm C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Immò cùm C, & D, metiantur ipsum F; e metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D, major minorem; Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerū ipso E, minorem metientur: sed ipse E, erit minimus. Quare propter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur numerum. Quod erat faciendum.

A..B...C....
D.....
E.....
F-- ----

c 11. pronun.

d 37. sept.

e 37. septim.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur: etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema hujus demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F; ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. hujus lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitq; F, minimus, quem iidē A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsi m D E, metiri. Si enim non metitur, metiantur ejus partem D G, relin-

A..B...C.... relinquatque numerum GE, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F. metiuntur; & F. ipſum D G, a metientur quoq; A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; b metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Metitur igitur F, ipſum D E.

D.....G----E
F.....

a 11. prænun.
b 12. prænun.

PARI ratione: Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inveniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum eſt.

xxxvij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur: ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A, *numerus* B. *Dico* A, *habere partem aliquam à* B, *denominatam. Metiatur enim* B, *ipſum* A, *toties, quot unitates ſunt in numero* C. *Quia igitur unitas ipſum* C, *&* B, *ipſum* A, *aquè metitur: a & viciſſim unitas aquè ipſum* B, *& C, ipſum* A, *metietur: at que adeò eadem pars erit unitas ipſius* B, *quæ* C, *ipſius* A: *Eſt autem unitas pars ipſius* B, *denominata ab ipſo* B, *ut ad defin. 2. hujus lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius* A, *ab eodem* B *denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.*

A.....
B...C.....

c 15. ſep.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxxviij.

SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT *numerus* A, *partem* B, *à qua numerus* C, *denominatur. Dico* C, *metiri ipſum* A. *Nam cùm* B, *pars denominetur à* C, *ſit autem & unitas pars ipſius* C, *ab eodem* C, *denominata: metietur unitas ipſum* C, *& ipſum* B, *ipſum* A, *aquè. d Viciſſim ergo & unitas ipſum* B, *& C, ipſum* A, *metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A.....
B...C.....

d 15. ſep.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 41. XXXIX.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C, Inveniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A,B,C, *numeri denominati, sive qui ipsas denominent*, D,E, F: *a minimusque, quem* D,E,F, *metiuntur, numerus* G. *Dico* G, *esse minimum, qui habeat datas partes* A,B,C. *Quod enim ejusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum* D, E,F, *ipsum* G, *metiantur*, b *habebit* G, *partes à* D,E,F, *denominatas, hoc est, partes* A,B,C, *cum ha denominentur à* D,E,F. *Quod verò* G, *sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest*, H, *ipso* G, *minor easdem partes* A,B,C. *Quia igitur* H, *habet partes* A,B,C, c *metientur ipsum numeri* D,E,F, *à partibus* A,B,C, *denominati: Atque adeo, cum* H, *minor sit quam* G, *non erit* G, *minimus, quem metiuntur* D,E,F. *Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur minor numerus, quam* G, *datas partes* A,B,C, *habebit, sed ipse* G, *minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes: Quod faciendum erat.*

D..	A, Secunda	a 38. *sep.*
E...	B, Tertia	
F....	C, Quarta	
G...		
H--------		b 39. *sep.*

c 40. *sep.*

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D,E,F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipsius G, denominatæ scilicet à D,E, F. Cum enim D,E,F, ipsum G, metiantur per I,K,L; metietur æquè unitas ipsos I, K, L, & numeri D,E,F, ipsum G. *d* Vicissim ergo metietur

A, Secunda	D.. I.....	
B, Tertia	E... K....	
C, Quarta	F....L...	
	G.....	

d 15. *sep.*

quæque unitas ipsos D,E,F, & numeri I,K,L, ipsum G, æquè, atque adeo unitas ipsorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denominata; erunt & I,K,L, ipsius G, partes denominatæ à D,E,F.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D,E,F, minimum esse, qui habeat partes A,B,C, cujusmodi sunt I,K,L, à metientibus numeris D,E,F, denominatas.

IAM verò, ut Campanus ait, si inventus minimus numerus datas

eas partes habens, duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Invento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & ejus duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; a metietur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. b Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

G ..... A, D ..
H ..... B, E ..
I ..... C, F ....
K ---------- M ----- L
N ---------- P ----- O

a 11. pronun.
b 39. septim.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum major sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K, L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. hujus lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. d Igitur & reliquum M L, metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est hujusmodi partes habens.

c 40. sept.
d 12. pronun.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet major sit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, e metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. hujus lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. f Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem major. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas:

e 40. sept.
f 12. pronun.

datas: & propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit: & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C: inveniendusq; sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, ut pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F: Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur.

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H: erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autem unitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata: Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum unitatem. Quare numerus inventus H, partem habet A; & pars A, partem B: & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdē partes eodem ordine, ita ut K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata: & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata: erit K, toties in I, quoties unitas in *D*: *a* Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K: & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I: *b* erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K: erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in unitatem, & M, fiant F, & L: erit, ut F, ad L, ita unitas ad M. Quoniam igitur est, ut H, ad I, ita G, ad K: & ut G, ad K, ita F, ad L: & ut F, ad L, ita unitas ad M: Erit per lemma I. K. L. M.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D.. E... F....
G.....
H.....
Vnitas
I----------
K----------
L----------
M---

a 15. *defin.*

b 17. *sept.*

H. G. F. Vnitas.

pro

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ. 14. huius lib. ut H, ad I, ita unitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, major. Vnitas igitur major quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitũ.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, ut manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inventum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVUM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. j.

NVMERORVM *deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico* A, B, C, D, *minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alii ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt* A, B, C, D, *& alii illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadem ratione a erit, ex æqualitate, ut A, ad D, ita E, ad H;* b *Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. Igitur tam A, ipsum E, quam D, ipsum H, aquè metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis* A, B, C, *sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt: Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.*

A..... E---
B..... F---
C..... G---
D..... H---

a 14. *sep.*
b 23. *sep.*
c 21. *sep.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C

A.... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H -------

C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, sive A, B, C, D, sint continuè proportionales, ut vult Euclides, sive non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diversæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

ij. **PROBL. 1. PROPOS. 2.**

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque jusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oportetque invenire primum tres numeros minimos in proportione data A ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est sit ut A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D: a erit ut A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; b erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in seipsos; c sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione: d Erunt & C, E extremi, inter se primi. e Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a 17. septim
b 17. sep.
c 24. septim.
d 29. sept.
e 1. oct.

IAM verò ex A, in tres inventos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, erit quoque ut A, ad B, ita H ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet: g Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in seipsos: Item procreati sunt F, & I ex A, & in C, E: nimirum F, ex A, in C, & I ex B, in E,

18. sep.

g 24. sep.

in E, a erunt & F, I, extremi, inter se primi. b *Quare F, G, H, I, in sua proportione, qua est A, ad B, minimi sunt.* a 29. sept. b 1. oct.

NON aliter, si ex A, in quatuor inventos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O: erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inveniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inventos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt quam A, B: quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18. hujus lib. demonstravimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B: quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, ut prius. c 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inventos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K: erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inveniemus sex, septem, octo, &c.

A..	B...	
C...	D.....	E.....
F, 8.	G, 12.	H, 18. I, 27.
K, 16.	L, 24.	M, 36. N, 54 O, 81.

Itaque sive A, multiplicetur in omnes inventos, & B, in ultimum: sive B, in omnes inventos, & A, in primum: producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstravit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter: ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alii sub aliis denominationibus, quæ

quæ in Algebra ſolent explicari : Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inventis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſvis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus utcunque propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inveniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inventis, non eſſent inventi, minimi, quod eſt cõtra hanc propoſ. Si vero dati majores eſſent inventis, nõ eſſent illi dati, minimi, quod eſt cõtra hypotheſin.

A.--B---- C-------- Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum.
D, 2. E, 3. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi
F, 4. G, 6 H, 9. continuè proportionales: ſumptiſque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inveniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inventis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, ut A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, ut A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademque ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademque ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si verò A, concedatur major, quam F: erunt eodem argumento & B C, majores, quam G, H, atque ideirco A, B, C, minimi non ſunt, quod eſt contra hypotheſin. Cum ergo A, minor non ſit, aut major, quam F: æqualis omnino erit, ideoque ut oſtenſum eſt, & B C, ipſis G, H, æquales erunt Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inventorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. qvemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros, ut in dato exemplo D, medius producitur ex A, in Z; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F,

B, in E, G, H, ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

Quoniam vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt, ab unitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, ut clarius demonstrabitur propos. 9. hujus lib. fit ut extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint ultimi tot continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse ultimos trium numerorum continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse ultimos quatuor numerorum ab unitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet invenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab unitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inventis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab unitate tot numeri continue proportionales in proportione, cujus denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inveniendi proponuntur. Nam ultimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continuè proportionalium inveniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inventis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab unitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum ultimus 128. erit primus octo numerorum inveniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. ut hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si majores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

Boetius autem, & alii regulam hanc ita explicant, ut & nos 5. lib. in tractatione proportionum declaravimus, ponantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cujus in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet invenire in data proportione. Nam ultimus numerus erit primus inveniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur 8. numeri minimi in proportione sesquitertia sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui ni-

mirũ denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in propor. sesquialtera, hoc est, à 6. Quod si oplentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab unitate quintupli: ut hic 1. 5. 25. 125. 626. Nam 625. est primus quinq; numerorum in proportione sesquiquinta, ut hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inveniri (quod nimirum videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. in ultimo exemplo alius numerus invenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 1287. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem hujus rei est, quod extremi hac arte inventi sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, ut ultimus non possit esse ad alium quempiam numerum, ut primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. demonstrabitur.

iij.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: illorum extremi sunt inter se primi.

Sint numeri A, B, C, D, *minimi deinceps proportionales. Dico extremos* A, & D, *inter se primos esse. Inveniantur enim duo* E, F, *minimi in ratione* A, *ad* B, *vel* B, *ad* C, *vel* C, *ad* D. *Deinde juxta viam præcedentis problematis tres minimi* G, H, I, *in eadem ratione, nec non quatuor* K, L, M, N, *& sic deinceps, donec multitudo* K, L, M, N, *æqualis sit multitudini* A, B, C, D. *Quoniam igitur* A, B, C, D, *minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt* K, L, M, N, *illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum* A, *ipsi* K, & D, *ipsi* N. *Id quod nos Geometrice demonstravimus ad finem coroll.* 1. *superioris propos. Sunt autem per coroll.* 2. *propos. præcedentis* K, & N, *inter se primi. Primi ergo quoque sunt* A, & D. *Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.*

A, 8, B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

Hæc propositio intelligẽda est de numeris minimis continue proportionalibus, ut ex ejus demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inve-

inveniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totius minimi in eadem proportione. Imo si diversæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diversis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conversum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sūt in sua proportione, ut constat ex 1. theor. Et vicissim numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, veluti hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat, ad numeros non continue proportionales, converti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut ex scholio propos. hujus lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. iv.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primum data duæ rationes in minimis numeris A, *ad* B, *&* C, *ad* D; *oporteat que invenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus.* a *Invento numero* E, *mi-* a 36. *sept.*
nimo, quem metiantur B, *&* C, *secundus &* *tertius*; *quoties* B, *ipsum* E. *metitur, toties* A, *metiatur ipsum* F; *&* *quoties* C, *eundem* E, *toties ipsum* G, *metiatur* D. *Dico* F, E, G, *minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam*

A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito,

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ---.---.--- K ---.--- L ---.---

b *A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E,* c *Quare erit, ut* b 9. *pro-*
A, ad D, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur *nun.*
ipsos E, & G; erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps c 18. *sept.*
proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua

A, 6. ,8,5. C, 4. D,3.
H,4. F,24. E. 20. G,15.
I----- K----- L----

proportione : a ipſi aquè metientur I & K, in eadem proportione exiſtentes, nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, aque metientur K, & L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C,

b37. ſep. *ipſum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod eſt abſurdum. Non erunt igitur alii numeri minores ipſis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi, F, E, G, minimi ſunt in datis rationibus.*

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B, C, ad D: & E, ad F; inveniendi, ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. c Invento rurſum numero G, minimo,

c36. ſep. *quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius: quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H: & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primum; & quoties E, ipſum I metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico*

A,6. B,5. C,4. D,3. E, 5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L---- M----- N---- O-----

H, G, I, K, minimis eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, aque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur aque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus: Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus mi-

d21. ſep. *nores ipſis, ſinguli ſinguli, ſi fieri poteſt, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; d ipſi metientur aque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, aque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metian-*

e37. ſep. *turt e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alii numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K: Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.*

f36. ſep. *Sed jam E, non metiatur ipſum I. f Invento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur: quoties I, ipſum K, metitur, totiesquoque G, ipſum L: & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, aque metian-*

tur:

tur: erit ut supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L, & ut G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B: & ut G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipsos H, G: & C, D, ipsos G, I, metiantur aque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L, & ut C, ad D, ita K, ad K. Atque ut E ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, aque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namq; non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, a ipsi sique metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur aque, videlicet antecedens C, antecedentem P: Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, b metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B & C, eundem P. Quia severo ostensum est, esse ut G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q, erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q. Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; c quod E F, in sua proportione minimi aque metiantur Q R, ejusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q: d metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, major minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alii numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea aque ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

A, 9. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ---- P ---- Q -- R -----

a 21. sep

b 37. septim.

c 12. sept.

d 37. septim.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint: inveniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus: deinde cum quarta posteriori agendum, ut nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T: inveniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B: C, ad D: & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, E, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S ipsum N, non metiatur, c sumemus O, quæ

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

c 33. sep.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2, F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

S, & N, minimum metiantur. E quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P, & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipſum, V, metiatur. His enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eò argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquę datę fuerint in numeris nõ minimis, abſolvemus nihilominus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inventionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, ut ex demonſtratione manifeſtum eſt.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita ut quilibet intermedius ſit & antecedens & conſequens, licet proportiones ſint diverſæ, quemadmodum ibi.

Porro inventis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus ſi ii multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alii in eiſdem rationibus deinceps proportionales, ut conſtat exiis quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtravimus.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quacunque C, D; poſterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita ut latera unius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G: a erit A, ad G, ut C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D & F, fecit G, & B, erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A,

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 8.

a 17. ſeptim.

re A, G, B, *sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum* C, *ad* E, *&* D, *ad* F, a *Componitur autem proportio A, ad B, ex pro-* a 27. *defin.*
portionibus A, *ad* G, *&* G, *ad* B. *Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum* C, *ad* E, *&* D, *ad* F, *componitur.*

Eodem argumento ostendemus, proportionem A, *ad* B, *compositam esse ex proportionibus* C, *ad* F, *&* D, *ad* E, *si latera* E, *&* F, *loca inter se permutent, fiatque* G, *ex mutua* D *&* F, *multiplicatione. Cum enim* D, *multiplicans* C, *&* F, *faciat* A, *&* G, b *erit* A *ad* G, *ut* C, *ad* F. *Similiter cum* F, *multiplicans* D, *&* E, *faciat* G, *&* B, *erit* G, *ad* B, *ut* D, *ad* E. *Ac proinde rursum* A, G, B, *deinceps proportionales sunt in rationibus laterum* C, *ad* F, *&* D, *ad* E. c *cum ergo proportio* A, *ad* B *componatur ex proportionibus* A, *ad* G, *&* G, *ad* B, *eadem ex proportionibus* C, *ad* F, *&* D, *ad* E, *componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.*

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.
b 17. *sep.*
c 27. *defin.*

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam ullum metietur.

Sint continue proportionales A, B, C, D, E, *&* A, *primus non metiatur* B, *secundum. Dico neque alium quenquam illorum ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit ut* A, *ad* B, *ita* B, *ad* C; C *ad* D; *&* D, *ad* E: A, *vero ipsum* B, *non metiatur, neque* B, *ipsum* C, *neque* C, *ipsum* D, *neque* D, *ipsum* E, *metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus.* d *Sumptis tribus numeris minimis* F, G, H, *in ratione* A, *ad* B, *erit ex aquo, ut* A, *ad* C, *ita* F, *ad* H. *Quia vero est ut* A, *ad* B, *ita* F, *ad* G, *non metitur autem* A, *ipsum* B: *neque* F, *ipsum* G, *metietur*: Ac *propterea* F, *non erit unitas, alias* F, *ipsum* G, *metietur, cum unitas omnem numerum metiatur.* e *Quare cum* F, *&* H, *sint inter se primi, &* F, *non sit unitas*; *non metietur* F, *ipsum* H; Atque *ob id, neque* A, *ipsum* C, *metietur. Est enim ostensum esse* A, *ad* C, *ut* F, *ad* H. *Eadem ratione ostendemus, quod nec* B, *tertium à se numerum* D, *nec* C, *tertium* E, *metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione* A, *ad* B, *simili modo demonstrabimus, neque*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.
d 2 *octa.*
e 3. *octavi.*

A quartum D, neque B, quartum E metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Si majores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullius proxime insequentis multiplex sit, constat. Nã cum sit, ut *A*, ad B, ita *B*, ad C; C, ad *D*, & D ad E, non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D, neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam *D*, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum *D*, per ea, quæ in defin. 5 lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A: (Nam cum sit D, ad E, ut C, ad *D*: B, ad C; & A, ad B: erit convertendo E, ad D ut D ad C: *C*, ad B: & B, ad *A*) Et *E*. primus secundum D, non metitur; *4* neque alius quisquam illorum ullum metietur. Quare è contrario, si majores ad minores referantur, neque quisquam illorũ ullius erit multiplex per ea, quæ in defin. 5 lib. 7. scripsimus.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

4 6. def.

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cujuslibet sequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E: & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime in sequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, ut *A*, ad B, ita B ad C; C, ad D: & D, ad E: metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D ipsum *E*, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

meti-

metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, *a* metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, *b* metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

a 11. *prop.*

b 11. *prop.*

num.

Sed jam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cujuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit ut A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A; ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cujuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inversam rationem E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, ut demonstratum est. Ac propterea è contrario, si majores ad minores referantur, & quilibet cujusque sequentium multiplex erit.

A,48. B,24. C,12. D,6. E,3.

Convertemus etiam hanc propositionem sextam, & theorema quod primo loco in scholio demonstravimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur: neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à fecundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, B, C, D, E, & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri: metietur quoque per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neq; alius quisquam ullum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cujuslibet sequentium, ex iis, quæ secundo theoremate huius scholii demonstravimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A,81. B,54. C,36. D,24. E,16.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

Sint deinceps proportionales A, B, C, D, E, *& primus extremum* A, *metiatur. Dico & primum metiri* B, *secundum. Si enim* A, *ipsum* B, *non dicatur metiri: a neque alius quisquam ullum metietur. Quare nec* A, *ipsum* E, *Quod est absurdum. Ponitur enim* A, *metiri* E. *Igitur* A, *primus* B, *secundum metietur: Atque id circo si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 6. def. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

Vt theorema quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstravimus, convertamus, amplificabimus hanc propositionem hoc modo.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cujuslibet à secundo sit multiplex, primus quoque secundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neque alius quisquam ullum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholii præcedentis. Quod est contra hypothesin.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

viij. Si inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, *medii proportionales continue* C, D: *sitque ut* A, *ad* B, *ita* E, *ad* F. *Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter* E, *& F, quot inter* A, *& B. Sumptis enim totidem numeris* G, H, I, K, *minimis in ratione* A, *ad* C, *quot sunt numeri* A, C, D, B: *erit ex æquo ut* A, *ad* B, *atque adeo ut* E, *ad* F, *ita* G, *ad* K. b *Quare cum* G, *& K, inter*

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum, a ac propterea in sua proportione minimi: b *aque metietur* G, *ipsum* E, *&* K, *ipsum* F. *Quoties ergo* G, *&* K, *ipsos* E, *&* F, *metiuntur, toties* H, *&* I, *alios numeros* L, *&* M, *metiantur, ita ut numeri* G, H, I, K, *numeros* E, L, M, F, *aque metiantur, singuli singulos.* c *Quia igitur* G, H, I, K, *multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros* E, L, M, F, *ipsos* E, L, M, F, *producunt: in eisdem rationibus erunt* E, L, M, F, *in quibus* G, H, I, K, *ut ad propos.* 18. *lib.* 7. *demonstravimus.* A, G, H, I, K, *sunt continue proportionales. Igitur &* E, L, M, F, *continue proportionales sunt: Atque idcirco cum multitudo* E, L, M, F, *aqualis sit multitudini* A, C, D, B, *tot cadent medii proportionales inter* E, *&* F, *quot inter* A, *&* B. *Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.*

A. 40. *C*, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. *I*, 2. K, 1. a 23. *sept.*
E, 8. *L*, 4. M, 2. F, 1. b 21. *sept.*

A, 27. C. 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. *I*, 3. K, 1.
E, 108. *L*, 36. *M*, 12. F, 4. c 9. *pro-nun.*

SCHOLIVM.

Non solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K. Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, unitas. Item si vel *A*, vel B, fuerit unitas existentibus E, & F, numerus, ut in exemplis apparet.

Constat etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cujusvis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum mediũ proportionalem: cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem; superparticularis vero inter numeros, sola unitate differentes: superbipartientes deniq; inter numeros, quorum differentia est binarius si inter duos numeros duplę proportionis vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis: caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & unitatẽ: vel inter numeros sola unitate differentes vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdẽ cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione potest. Nam neq; inter binarium & unitatem, neq; inter duos numeros sola unitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abest, ut aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interjicitur solum numerus

qui

qui ab utroque unitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (sive C D, unitas sit, & A B, ternarius sive non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor unitate quã A B, major vero quam C D, unitate quoque. Dico E F, non esse medium proportionalẽ inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, ut E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, ut reliqua sit unitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, ut relinquatur etiam unitas H F; erit quoque ut A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cum A G. E H, ipsis E F, C D, æquales sint ex constructione Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est unitas ad unitatem, Vt totus A B, ad totum E F, major ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

A . G . B	A . . . . . G . B
E . H . F	E . . . . . H . F
C . D	C . . . . . D

Itaque inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstravimus.

Pari ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non posse, ita demonstrabimus Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita ut sit A B, ad D, ut D, ad C: Et convertendo C, ad D, ut D, ad A B. Et quoniam unitas C, metitur D; metietur quoque D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A E a ac proinde & D, numerus metietur reliquam unitatem B E. Quod est absurdum.

A . . . . . B . E	
D . . D . . .	
C .	

a 11. *pronũ*

Cadat deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, ut prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: b ac proinde & D, numerus reliquam unitatem E B, metietur. Quod est absurdum.

A . . . , E . B	
D	
C .	

b 11. *pronũ*

Ex quibus fit, neque illud intervallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, ut Diapason, vel, ut vulgo dicitur, octava neque illud quod in tripla octava proportione reperitur, cujusmodi est

est Tonus, seu vulgo, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales illa enim proportio bifariam (quod ad propositũ attinet) secari dicitur, inter cujus terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12 hoc modo 24.12.6. Idcirco proportio quadrupla bifariam divisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctava, non cadere medium numerum proportionalem, perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui divisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum intervallorum illud in proportione sesqualtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, ut hic apparet, 2.3.4. Est enim hic proportio dupla divisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorum alterum majus, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

Rursum ex his demonstrari potest, proportionem diametri cujusvis quadrati ad latus ejusdem numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstravimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit ut proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametris ad latus. Cum ergo illa proportio, cujus duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, ut ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, qua de re plura ad 9. & ultimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum, ac unitatem medii continua proportione cadent.

Cadant inter numeros A B, inter se primos medii continue proportionales C, D. *Dico totidem cadere continue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inventis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, a sumantur in eadem proportione res minimi G, H, I,* 2 2. oct. *b quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum*

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L,12. M,18. N,27.

rum æqualis sit multitudini A,C,D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; a erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A,C,D,B, æquales sunt singuli singulis, ut K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, ut constat ex demonstratione propos. 2. hujus lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, b metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: c Metitur autem & unitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. d Proportionales ergo sunt deinceps, unitas, & numeri, E, G, K. Similiratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. hujus lib. quod F, seipsum, multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N: e metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: f Metitur autem & unitas ipsum F, per F. Æque igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N: Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. g Proportionales ergo sunt continue, unitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, (ut perspicuum est ex propos. 2. hujus lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab unitate: & tres G, H, I, tertii: & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medii continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem: & inter unitatem, & numerum N, sive B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medii, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. oct.
b 7. pronū.
c 5. pronun
d 20. defin.
e 7. pronun.
f 5. pronun.
g 20. defin.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, numeros qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque unitatem habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C, hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem, id quod in scholio propos. 2. hujus lib. quoque asseruimus.

Constat etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquèm fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. hujus lib. continue esse proportionales ab unitate.

THE-

THEOR. 8. PROPOS. 10. X.

Si inter duos numeros, & unitatem continue proportionales ceciderint numeri: quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A,B, *& unitatem, quotcunque numeri medii continue proportionales: inter A, quidem & unitatem, numeri* C,D,E: *At vero inter* B, *& unitatem, numeri* F,G,H, *illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrumque* A,B, *& unitatem. Multiplicantes enim se mutuo* C, *& F, faciant* I. *Deinde* C, *multiplicans* I, *& G, faciat* K, *& L. Rursus idem* C, *multiplicans* K, L, *& H, faciat* M,N, *& O, totidem inter* A, *& B, quot sunt inter utrumque A, & B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad* C, *ita* C, *ad* D, D, *ad* E; *& E, ad* A; *æque metietur unitas ipsum* C, *& C, ipsum* D, *& D, ipsum* E, *& E, ipsum* A: a *Metitur autem unitas ipsum* C, *per* C. *Igitur & C, ipsum* D, *& D, ipsum* E, *& E, ipsum* A, *per* C, *metietur.* b *Quare* C, *seipsum multiplicans fecit* D: *multiplicans autem* D, *fecit* E, *& multiplicans* E, *fecit* A. *Eadem ratione* F. *seipsum multiplicans fecit* G, *& multiplicans* G, *fecit* H, *& multiplicans* H, *fecit* B. *Itaq; cum* C, *multiplicans* C, *& F, fecerit* D, *& I: erit ut* C, *ad* F, *ita* D, *ad* I. *Similiter, quia* F, *multiplicans* C, *& F, fecit* I, *& G: erit ut* C, *ad* F *ita* I, *ad* G. *Sunt igitur tres* D,I,G, *continue proportionales in ratione* C, *ad* F. *Rursus quia* C, *multiplicans* D, I, G, *fecit* E,K,L: *habebunt* E,K,L, *per ea, quæ ad propos.* 18. *lib.* 7. *ostendimus, eandem proportionem continuam, quam* D,I,G, *hoc est, quam* C, *ad* F. *Eodem modo, quia* C, *& F, multiplicantes* G, *fecerunt* L, *& H: erit ut* C, *ad* F, *ita* L, *ad* H. *Quatuor ergo numeri* E,K,L,H, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* F. *Postremo, quia* C, *multiplicans* E,K,L,H, *fecit* A,M,N,O, *habebunt, ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos.* 18. *lib.* 7. A, M,N,O, *eandem continuam proportionem, quam* E,K,L,H, *hoc est, quam* C, *ad* F. *Eadem ratione, cum* C, *& F, multiplicantes* H *fecerint* O, *& B, erit, ut* C, *ad* F, *ita* O, *ad* B. *Quinque igitur numeri* A, M,N,O,B, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* F: *Ac proinde tot medii proportionales cadant inter A, & B, quot inter*

A, 81. M,162. N,324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

a 5. *prænun.*
b 9. *prænun.*
c 17. *sept.*
d 17. *sept.*
e 18. *sept.*
f 18. *sept.*

A, *vel*

A, vel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his constat, numeros, qui medii proportionales cadunt inter *A*, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod *C, D, E, A*, continue proportionales sunt ab unitate: D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tũ ad ea quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

I.

Si sint ab unitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertii ab unitate proportionem duplicatam ejus, quam habent secundi ab unitate; quarti vero ejusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

Sint numeri A, B, C, *D*, continuo ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alii E, F, G, H. Dico proportionẽ B, tertii ab unitate ad F, ab eadem tertium duplicatam esse ejus, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter utrumque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis, inter B, quidem & unitatem, numerus A; At inter F, & unitatem numerus E: *a* cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo per scholiũ hujus propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medii in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L: quot nimirum cadunt inter utrumque C, G, & unitatẽ. Nec non inter DH, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

a 8. 8.

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

tione A,ad E proportionales. Quoniam igitur ex defin. B,ad F,proportionem habet duplicatam ejus,quam habet B,ad I, est autem ut B,ad I,ita A,ad E; Habebit quoque B,ad F,rationem duplicatam ejus,quam habet A,ad E. Non aliter habebit C,ad G, rationem triplicatam rationis A,ad E; quia ratio C ad G,triplicata est proportionis C,ad K; & est ut C,ad K,ita A,ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A,ad E,& sic de cæteris.

Hoc idem demonstrabimus si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium ; Habebunt tertii ab illo numero proportionem duplicatam ejus,quam habent secundi ab eodem; quarti vero ejusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam ; & semper deinceps uno amplius.

Sint ab A,numero continue proportionales B,C,D,E,& ab eodē totidem alii F,G,H,I. Dico rursum, proportionis B,ad F, esse duplicatam proportionem C,ad G ; & D,ad H, triplicatam : & E, ad I quadruplicatam. Ex A,in se fiat K,& ex A,in K,fiat L ; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N ; & ex B,in N,fiat O, & ex B,in O, fiat P. Postremo ex F,quoque in se fiat Q, & ex F in Q,fiat R,& ex F,in R , fiat C. Quibus peractis: erunt *A*, K ; L, M continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. hujus lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionales ; nec non & F Q R S. Quia igitur ratio N,ad K, duplicata est rationis B,ad A, ex theoremate 1. hujus scholii : Est autem, ex defin. ejusdem rationis B,ad A, duplicata quoque ratio C,ad A ; Erit C,ad A, ut N,ad K. Eodem modo erit A ,ad G,ut K,ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q duplicata rationis A,ad F, & ejusdem, ex defin. duplicata est ratio A ; ad G. Quare cum sit C,ad A, ut N,ad K ; & A,ad G, ut K, ad Q ; erit ex æquo C,ad G,ut N,ad Q : Atqui ratio N,ad Q, duplicata est rationis B,ad F, ex theoremate 1. hujus scholii, quod tam B, N, quam F Q, sint ab unitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. hujus lib. Igitur & ratio C,ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem ar-

E,162. I,512.
D,54. Vnitas. H,128.
C,18. 1. G,32.
B,6. F,8.
A,2.
N,36. K,4. Q,64.
O,216. L,8. R,512.
P,1296. M,16. S,4096.

E,81. I,1.
D, 4, Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

gumentis, erit ratio D, ad H triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, sint ab unitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. hujus lib. & ejusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, ut O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, ut L, ad R: quod utraque proportio triplicata proportionis A, ad F: proportio quidem A, ad H, ex defin. ta proportio L, ad R, ex 1. theor. hujus scholii; propterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, continue proportionales sunt ab unitate, ex scholio propos. 9. hujus lib. Est ergo ex æquo D, ad H, ut O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F; ex 1. theor. eo quod tam B, N, O, quam F, Q, R, sunt continue proportionales ab unitate ex scholio propos. 9. hujus lib Igitur & ratio D, ad H, triplicata est ejusdem rationis B, ad F. non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri unius ordinis desinant in unitatem, ut ex secunda figura est manifestum, in qua I, est unitas.

Cæterum theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis universalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales eciderint numeri; quod inter utrumque ipsorum, & assumptum deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales, inter A, quidem & C, numeri D, E, F, inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoq; medios continue proportionales cadere inter A & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C & inter

inter H & C, Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defin. ratio K, ad M duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. hujus scholii, ratio quoque E, ad H duplicata est ejusdē rationis D, ad G. Igitur est ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat unus medius proportionalis L; a cadet quoque unus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, unus medius cadit: Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & L duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medii cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medii cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

A,162. Q,216. R,288. S,384. B,512.
E,54. O,72. P,96. I,128.
E,18. N,24. H,32.
D,6. G,8.
C,2.
K,9. L,12. M,16.

a 8. oct.

Hoc etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, unitas assumatur, veluti perspicuum est hac secunda figura; in qua numerus B; unitas est, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medii proportionales cadunt inter A, & B; nec non inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, proximiores.

A,1048576. Q,32768. R,1024. S,32. B,1.
F,65536. O,2048. P,64. I,2.
E,4096. N,128. H,4.
D,256. G,8.
C,16.
K,1024. L,32. M,1.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A. & B, *quorum laterā* C; & D. *Dico inter* A, & B, *unum medium proportionalem, numerum cadere: & proportionem* A, *ad* B, *quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis* C, *ad* D, *lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo* C, & D, *faciat* E. *Quia igitur* C, *multiplicans seipsum fecit* A, *quadratum, ex defin. quadrati; & ipsum* D, *multiplicans fecit* E,

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

ex conſtructione: a erit ut C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, multiplicans C, facit E, ex conſtructione: & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, facit B, quadratum: b erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medium continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet ejus, quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, ejus, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 17. ſep

b 17. ſeptim.

SCHOLIVM.

Perſpicuum eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris, C, ad latus D, ut demonſtratum eſt.

Pari ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & utrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionalem ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E ad B ut C ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem: quandoquidem eſt E, ad B, ut C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, ut C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B: habebunt E, & B, communem menſuram D: Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

xi. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam, habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere

dere: Et proportionem A, *ad* B, *cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis* C, *ad* D, *lateris ad latus. Multiplicans enim* C, *seipsum faciat* E: *&* D, *seipsum multiplicans faciat* F: *At* C, *&* D, *semutuo multiplicantes faciant* G: *Multiplicantes vero* G, *faciant* H *&* I. *Quoniam igitur* C, *seipsum, &* D *multiplicans fecit* E, *&* G, *a erit, ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* G. *Eadem ratione, cum* D, *multiplicans* C, *&seipsum, fecerit* G, *&* F: *b erit quoque ut* C, *ad* D, *ita* G, *ad* F. *propterea que* E G F, *continuè proportionales sunt in ratione* C, *ad* D. *Rursus, quia ex defin. cubi,* C, *ipsum* E, *multiplicans fecit* A, *& ex constructione multiplicans ipsum* G, *fecit* H: *c erit ut* E, *ad* G, *hoc est, ut* C, *ad* D, *ita* A, *ad* H. *Similiter cum* D. *ipsum* G, *multiplicans fecerit, ex constructione, numerum* I: *multiplicans vero ipsum* F, *ex defin. cubi, fecerit cubum* B; *d erit quoque, ut* G, *ad* F, *hoc est, ut* C, *ad* D, *ita* I, *ad* B; *e Est autem &* H *ad* I, *ut* C, *ad* D: *quod* C, *&* D, *ipsum* G, *multiplicantes fecerint ex constructione,* H, *&* I. *Igitur* A, H I B, *continuè sunt proportionales in ratione* C, *ad* D: *Atque adeo inter cubos* A, *&* B, *duo medii* H, *&* I, *cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod* A, H, I, B, *continue sunt proportionales, numerus* A, *ad* B, *triplicatam habet rationem ejus quam habet* A, *ad* H: *triplicatam quoque rationem habebit* A, *ad* B, *cubus ad cubum, ejus, quam habet* C, *ad* D, *latus ad latus, cum sit* C, *ad* D, *ut* A, *ad* H. *Quamobrem duorum cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.*

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. sep.
b 17. sep.
c 17. sep.
d 17. sept.
e 18. sep.

SCHOLIVM.

Hic quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H; & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

Eodem modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & utrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, ut C, ad D. Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, ut C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atq; adeo inter se

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

compositi sunt. Similiter cum sit *A* ad H, ut C ad *D*: metiatur autem latus C cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D ipsum H consequens consequentem: Metitur autem & latus D cubum suum B: immo & ipsum I, quod I factus sit ex multiplicatione D in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

xiij. Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes jam factos fecerint aliquos; ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

Sint continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F, *multiplicantes autem ipsos* D, E, F, *faciant* G, H, I; *& rursum multiplicantes ipsos* G, H, I, *faciant* K, L, M, *& ita deinceps. Dico quoque* D, E, F, *&* G, H, I, *&* K, L, M, *continue esse proportionales. Multiplicantes enim A, &* B, *se mutuo faciant N; &* B, C, *se mutuo multiplicantes faciant* O. *Deinde A, multiplicans N, E, faciat P,* Q. *Item* B, *multiplicans* O, F, *faciat R, S. Simili modo A,*

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. *N*, 8. *E*, 16. *O*, 32. *F*, 64.
G, 8. *P*, 16. *Q*, 32. *H*, 64. *R*, 128. *S*, 256. *I*, 512.
K, 16. *T*, 32. *V*, 64. *X*, 128, *L*, 256. *Y*, 512, *Z*, 1024, *a*, 2048. *M*, 4096.

multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B; *multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur* A, *multiplicans seipsum, &* B, *fecit* D, N, a *erit ut A, ad* B, *ita* D, *ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum fecit N, &* E; *erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur* D, N, E, *continue proportionales in ratione* A, *ad B. Rursus,* a 17. sept. *quia B, seipsum, & numerum G, multiplicans fecit E, &* O; b *erit* b 17. septim. *ut* B, *ad* C, *ita* E, *ad O. Eademque ratione, cum* C, *multiplicans* B, *& seipsum, fecerit* O, *&* F; *erit ut* B, *ad* C, *ita* O, *ad* F: *propterea quæ &* E, O, F, *continue proportionales sunt in ratione* B, *ad* C, *seu A, ad B. Quare cum* D, N, E, *in eadem ratione sint continue proportionales, in qua* E, O, F: *erit ex æquo* D, *ad E, ut E, ad F, atque adeo* D, E, F, *continue proportionales sunt.*

Deinde

Deinde, quia A, multiplicans D, N, E, *fecit* G, P, Q: *erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus,* G, P, Q, *in eadem ratione, in qua* D, N, E, *hoc est, in ratione A, ad* B *proportionales. Item quia* A, *&* B, *multiplicantes* E, *fecerunt* Q, *&* H: a *erit quoque, ut A, ad* B, *ita* Q, *ad* H. *Sunt ergo* G, P, Q, H, *proportionales in ratione* A, *ad* B. *Similiter, quia* B, *multiplicans* E, O, F, *fecit* H, R, S; *erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7.* H, R, S, *proportionales in ratione* E, O, F, *hoc est,* B, *ad* C, *seu* A, *ad* B. *Et eodem modo, cum* B, C, *multiplicantes* F, *fecerint* S, *&* I: b *erit ut* B, *ad* C, *hoc est, ut* A, *ad* B, *ita* S, *ad* I; *propterea quæ &* H, R, S, I, *proportionales sunt in ratione A, ad* B. *Quocirca, cum* G, P, Q, H, *eandem habeant proportionem continuam, quam* H, R, S, I, *erit ex æquo* G, *ad* H, *ut* H, *ad* I: *Ac proinde* G, H, I *continue sunt proportionales.* a 18. sept.

b 18. sept.

Non dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, *esse continue proportionales: & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. quod ostendendum erat.*

SCHOLIVM.

Sunt autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C, Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam ejus, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B; &c.

Iam quoque numeri secundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et sic deinceps semper uno amplius.

Brevius propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F, & in hos ex eisdem numeris G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F, & G, H, I: & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam ex scholio propos. 9. hujus lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theorema. scholii propos. 10. hujus lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C, Sed ejusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F; per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I, esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A,	2.	B, 4. C, 8.
D,	4.	E, 16. F, 64.
G,	8.	H, 64. I, 512.
K,	16.	L, 256. M, 4096.

Ex qua rursū demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione duorum numerorum; secundo vero

loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholii propos. 10. hujus lib. elicitur.

Quamvis autem in utraque demonstratione hujus propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint; quam tres. Sint namque numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G, H postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a ex demonstratis proportionales sunt. Item F, G, H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in seipsos, hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in seipsos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alii deinceps eodem modo producti.

A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.
E. 4. F. 16. G. 64. H. 256.
I. 8. K. 64. L. 512. M. 4096.

a 13. 8.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus A, *cujus latus* C, *quadratum* B, *cujus latus* D. *Dico & latus* C, *latus* D, *metiri. Multiplicantes enim se mutuo* C, *& D, faciant* E. *Quoniam igitur, ut liquet ex demonstratione propos. 11. hujus lib.* A, E, B, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* D; *Metitur autem* A, *primus extremum* B; b *metietur quoque* A, *primus secundum* E. *Quare cum sit ut* A, *ad* E, *ita* C, *ad* D, *& C, latus latus* D, *metietur.*

A. 4. E. 12. B. 36.
C. 2. D. 6.

b 7. 8.

Metiatur jam C, *latus latus* D. *Dico & quadratum* A, *quadratum* B, *metiri. Eodem enim modo erit, ut* C, *ad* D, *ita* A, *ad* E, *propterea quod* A, E, B, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* D, *ut demonstratum est propos. 11. hujus lib. Quare cum* C, *metiatur* D, *metietur quoq;* A, *primus* E, *secundum, ac proinde & extremum* B, *metietur, ex theoremate 2. scholii propos. 6. hujus lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.*

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

Metiatur cubus A, *cujus latus* C, *cubum* B, *cujus latus* D. *Dico &*

eo & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, seipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione propos. 12. hujus lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

a 7. oct.

Metiatur jam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. hujus libr. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, exiis, quæ ad propos. 6. hujus lib. demonstravimus. Ita & si cubus numerus cubum numerum metiatur; &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, b metietur & quadratus A; quadratum B. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. oct.

Sed jam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; c metietur quoque C, latus illius latus hujus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XV.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D: Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D: a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

a 15. 08.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

Sed jam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 15. 08.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi majores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi unius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. *c* Igitur & latus D, latus C, metietur: ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

c 14. & 15. 08.

Quod ſi latus C, lateris D, multiplex ſit: metietur latus D, latus C. *d* Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur. Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.

d 14. & 15. 08.

A, 36. B, 9.
C, 6. D, 3.

Atvero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex, non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. *e* Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

e 16. & 17. 08.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.
A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

Similiter ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex, non metietur D, latus latus C. *f* Igitur, nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

f 16. & 17. 08.

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A, B, *& latera illius ſint* C, D, *huius vero illis proportionalia* E, F; *ita ut* C, D, *ſe mutuo multiplicantes faciant* A, *&* E, F, *mutuo ſe multiplicantes faciant* B, *ſitque ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* F. *Dico inter* A, *&* B, *cadere unum numerum medium proportionalem, & proportionem* A, *ad* B, *eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum* C, E, *vel* D, F. *Multiplicantes ſe mutuo* D, E, *faciant* G. *Quoniam igitur eſt* C, *ad* D, *ut* E, *ad* F; *erit permutando* C, *ad* E, *ut* D, *ad* F. *Et quia* D, *multiplicans* C, *& E: fecit* A, *&* G, *a erit* A, *ad* G, *ut* C, *ad* E, *hoc eſt, ut* D, *ad* F. *Similiter quia* E, *multiplicans* D, *& F. fecit* G, *& B, b erit quoque* G, *ad B, ut* D, *ad F. Proportionales ergo ſunt* A, G, B, *in ratione* C, *ad E, vel* D, *ad* F; *Atque adeo inter* A, *&* B, *medius proportionalis cadit* G.

A. 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſep.

b 17. ſept.

Quia vero, cum A, G, B, *ſint continue proportionales,* A, *ad* B, *duplicatam habet rationem ejus, quam habet* A, *ad* G, *hoc eſt,* C, *ad E, vel* D, *ad* F: *perſpicuum eſt proportionem numeri plani* A, *ad planum* B, *eſſe duplicatam ejus, quam habet* C, *ad E, vel* D, *ad* F, *latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.*

SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F: manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum, G, E, vel D, F, aſſumptorum.

Conſtat etiam ex dictis, medium proportionalem G, & utrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. metiantur autem E, F, latera numerum B, cujus ſunt latera conſequentes conſequentem, ſi de proportionib. C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cujus ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent, tam C, quam D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad

A,ad G,ut C,ad E,vel D,ad F : metiantur autem C,D,latera ſuum planum A,antecedentes antecedentem:metientur etiam E,F,ipſum G,conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F,latera ſuum planum B,metiantur,habebunt G,B,communem menſuram tam E, quam F: ideoque erunt inter ſe compoſiti.

Ex qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorũ A,G,communes menſuras eſſe C,D,latera prioris plani A; poſteriorum autem G,B,menſuras communes eſſe E,F, latera plani poſterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

xviij.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri : Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint ſolidi numeri ſimiles A,B,& latera illius ſint C, D, E, hujus vero illis proportionalia F.G.H. ita ut ſit C. ad D. quemadmodum F. ad G. & D. ad E. ſicut G. ad H. Dico inter A. & B. cadere duos medios proportionales, & proportionem A. ad B. eſſe triplicatam ejus, quam habent latera homologa C.F, vel D G. vel E. H. Multiplicantes n. ſe mutuo C. D. faciant I: & FG. ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D.F. ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E. H ipſum L. multiplicantes faciant M. N. Quia igitur C. D. E. ipſis F. G. H proportionales ſunt : erunt & permutando proportionales, ni:rum ut C. ad F. ita D. ad G. &

A,30. M,60. N,120. B,240. I,6. L,11. K,24. C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10

a 17. ſeptim. *E. ad H. Quoniam vero D. multiplicans C. & F. fecit I. & L : a erit ut C. ad F. ita I ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D. & G, fecit L. &* b 17. ſept. *K : b erit quoque ut D. ad G. ita L. ad K. Sunt ergo I. L. K. continue proportionales in ratione C. ad F. vel D. ad G. vel E. ad H. Et quoniam A. ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C.D.E: factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C. D : ſit ut E, multiplicans I. faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F. G. H : & K, factus ex mutua multiplicatione F.G : numerus H. ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E. multiplicans I. & L. fecerit A. & M. c erit A. ad M.* c 17. ſeptim. *ut I. ad L. hoc eſt, ut C. ad F. vel D. ad G, vel E. ad H. Eadem ratione, cum H. multiplicans L. K. fecerit N. & B: d erit N. ad B. ut L. ad K.* d 17. ſept. *hoc eſt, ut C. ad F. vel D. ad G. vel E. ad H. e Eſt autem & M. ad N. ut* e 18. ſep. *E. ad H: quod E. H. multiplicantes L. fecerint ipſos M, & N. Igitur A.M.N.B. continue ſunt proportionales in ratione C. ad F. vel D. ad G.*

vel

vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medii M, N, continue proportionales cadunt.

Quoniam vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue: proportio A, B, triplicata est ejus, quam habet A, ad M: Est autem A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam ejus quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, duorum similium solidorum numerorum duo medii, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F vel D, G, vel E H, assumptorum.

Ex iis quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M. N. & utrumlibet solidorum A. B. inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D ad G vel E, ad H, hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N ad B, & C, ad F, vel D ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N ad B, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atque & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M N B, proportionales sunt ipsis I L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H, metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I. Igitur & C, D: metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus qui est A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque A, 30. M, 60. N, 120. B, 240. F, G, H, ipsum M, consequentes I, F. L, 12. K, 24. consequentem. Metiuntur vero C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10. & F, G, H, ipsum N; Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem, metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit, ex L in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F G, ipsum N, atque adeo, F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum

211. *prop.* *nun.*

later

A,30. M,60. N.120. B,240. latera ſuum ſolidũ. Igitur M, N,
I,6. L,12. K,24. B, communem habent menſu-
C,2. D,3. F,4. G,6. H,10. ram tam F, quam G, & quam H.
Quare ſunt inter ſe compoſiti.

Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A: At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

Quia vero ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducantur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium: ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum: ſive deniq; ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propoſitis quotvis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter ſe permutent. Quæ quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo ejuſmodi theorema.

Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

Sint primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & ex F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, *a* erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, *b* ita quoque eſt F, ad A: quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: ut autem D, ad B, *c* ita eſt A, ad unitatem: propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E ad B, ita F, ad unitatem: *d* atque idcirco numerus ex E, in unitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in E, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

a 15. *defin.*
b 15. *defin.*
c 15. *defin.*
d 19. *ſeptim.*

E, F,
D, A,
B, unitas.

Rurſus quia ex C, in D, fit E; *e* erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem. Sed ut C, ad unitatem, *f* ita etiam eſt G, ad B, eo quod G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B; Ut autem D, ad A, *g* ita eſt B, ad unitatem, propterea quod D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad unitatem: *h* ac pro-

e 15. *defin.*
f 15. *defin.*
g 15. *defin.*
h 19. *ſept.*

E, G,
D, B,
A, unitas.

proinde numerus factus ex B, in unitatem, id est, ipsemet numerus B, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodū igitur B, gignitur ex A, in B, & ex producto in C, ita idem B, procreatur ex B, in C, & ex producto in A, quæ est secundum.

Sint deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B. Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C, item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita ut præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diversæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim ut in tribus ostensum est idem numerus fit, sive genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, sive prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

A. 2. B. 3. C. D. 5.
E. 120.

Deinde quia ut in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

Tertio quoniam, ut in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, sive genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, sive prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod est tertium.

Quarto quia, ut in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. ed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

Quinto quoniam, ut demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C, producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D &

in D,& ex producto in B,qui ex *A*,in D,& ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui ſit ex A.in B,& ex producto in C,& ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

Sexto,quia,ut in tribus demonſtravimus,idem numerus fit ex *A*, in B,& ex producto in *C*.qui fit ex B.in C,& ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D,quam ex B,in C.& ex producto in *A*, & ex producto in D,quod eſt ſextum.

Septimo quia ut in tribus oſtendimus,idem numerus gignitur, ſive productus ex *B*.in C,ducatur prius in A, deinde hic productus in D, ſive prius in D, deinde hic productus in A: conſtat eundem numerum fieri ex B,in C,& ex producto in *D*,& ex producto in A, qui fit ex B,in C,& ex producto in A,& ex producto in D. Sed hic proxime oſtenſus eſt æqualis ei,qui fit ex A.in B,& ex producto in C,& ex producto in D,Igitur & ille,quod eſt ſeptimum.

Octavo quia,ut in tribus oſtenſum eſt,idem numerus procreatur ex A. in B. & ex producto in D. qui ex B.in D.& ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A.in B, & ex producto in *D*.& ex producto in C. qui ex B.in *D*.& ex producto in A. & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A,in B. & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur & hic Quod eſt octavum.

Nono quia,ut demonſtratum eſt in tribus,idem numerus fit ex *B*, in *C*.& ex producto in D.qui ex B.in D. & ex producto in C: procreabitur idem quoque numerus ex B in C.& ex producto in D. & ex producto in A. qui ex B.in D.&,ex producto in C. & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei,qui fit ex A in B & ex producto in C.& ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

Decimo quoniam,ut in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A.in C. & ex producto in D, qui ex C.in D.& ex producto in A. producetur quoque idem numerus ex *A*.in C.& ex producto in *D*.& ex producto in *B*. qui ex C. in D. & ex producto in A,& ex producto in B. Sed ille,ut tertio loco eſt oſtenſum,æqualis eſt ei,qui fit ex A.in B. & ex producto in C.& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A.2. B.3. C.4. D.5. E.120.

Poſtremo quoniam, ut oſtenſum eſt in tribus.idem numerus gignitur ex B. in C. & ex producto in D,qui ex C in *D*. & ex producto in B,procreabitur quoque idem numerus ex *B*. in C. & ex producto in D,& ex producto in A. qui ex C. in D,& ex producto in B. & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A.in B & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur& hic eidem æqualis erit. Quod eſt undecimum.

Eodem

Eodem argumentandi modo utendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod jam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A,B,C,DE, apparet, quorum ordinē ter immutavimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C,D,E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A,B,C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit ut quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A.B.C.D.E.
A.B.C.E.D
A.B.E.D.C.
B.C.A.D.E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis D. *Dico* A, *&* B, *esse planos similes. Sumantur* D, *&* E, *minimi in ratione* A,C,B. *Quia igitur* D,E, *minimi sunt in ratione* A, *ad* C, a *metientur* D, *&* E, *ipsos* A, *&* C, *æque: metiantur per* F. *Similiter æque metientur ipsos* C, *&* B: *metiantur per* G. b *Itaque* F, *multiplicans* D, *&* E, *faciet* A, *&* C: c *Item* G, *eosdem* D, *&* E, *multiplicans faciet* C, *&* B. *Quia ergo* E, *multiplicans* F, *&* G *facit* C, *&* B, d *erit, ut* C, *ad* B, *ita* F, *ad* G. *Vt autem* C, *ad* B, *ita erat* D, *ad* E. *Igitur erit ut* D, *ad* E, *ita* F, *ad* G, *&, permutando ut* D, *ad* F, *ita* E *ad* G, *Quoniam vero* F, *multiplicans* D, *facit* A, *erit* A, *planus, cujus latera* D,F. *Simili modo quia* G, *multiplicans* E, *facit* B, *erit &* B, *planus, cujus latera* E, G. *Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est,* D, *ad* F, *ut* E, *ad* G, *erunt ex defin.* A. B. *plani similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.*

A,24. C,72. D,216. B,648.
a 21. septim.
b 9. pronil.
c 9. pronun.
d 17. septim.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri,

CADANT *inter* A, *&* B, *duo medii proportionales* C, D. *Dico* A, *&* B. *esse similes solidos. Sumatur tres,* E,F,G,

A,24. C,72. D,216. B,648.
E, 1. F,3. G,9.
H,1.I,1.M,24.K,3.L,3.N,72.

minimi in ratione A,C,D,B. *Quoniam igitur inter* E, & G, *medius cadit proportionalis* F; a *erunt* E, & G, *plani similes : sint ipsius* E, *latera* H,I, *ipsius vero* G, *latera illis proportionalia* K,L. *Et quia* E,F, G, *cum minimi sint in ratione* A,C, D, b *aque metiuntur ipsos* A, C, D, *ejusdem rationis cum illis , metiantur per* M, *eodemque modo*, c *quia* E, F, G, *minimi aque metiuntur* C, D,B, *eandem habentes rationem cum illis : metiantur per* N : d *ita ut* M , *multiplicans* E, F, G, *faciat* A, C, D ; & N , *multiplicans eosdem* E, F,G , *faciat* C, D, B, *factus est autem* E, *ex multiplicatione mutua suorum laterum* H, & I: *nec non* G , *ex mutua multiplicatione suorum laterum* K, & E. *Igitur* A , *producitur ex mutua multiplicatione* H,I, M ; & B, *ex mutua multiplicatione* K, L ,N ; *atque adeo* A, *solidus est numerus, ex defin. latera habens* H, I, M : & B, *solidus etiam, latera habens* K, L, N. *Quia vero* M, & N, *multiplicantes* F, *faciunt* C, & D, *ut ostendimus* : e *erit* C, *ad* D, *ut* M. *ad* N : f *Sunt autem* C, & D, *in eadem ratione, in qua* E, & F : *quod* N, *multiplicans* E, & F *fecerit ipsos* C, & D : *Nec non* & E, F , *eandem habent rationem, quam* H, K, *vel* I, L. *Etenim inter planos similes* E, G, *cadit* F, *medius proportionalis, per coroll. propos* 19. *hujus lib. in ratione laterum homologorum* H, K, *vel* I, L. *Igitur erit quoque* H, *ad* K, & I, *ad* L, *ut* M, *ad* N, & *permutando* H, *ad* I, *ut* K, *ad* L : & I, *ad* M, *ut* L, *ad* N. *Proportionalia ergo sunt latera*, H, I, M, *lateribus* K, L, M ; *ac propterea similes sunt numeri solidi* A, & B. *Quamobrem si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri , &c. Quod erat demonstrandum.*

a 20. *oct.*
b 21. *septim.*
c 21. *sep.*

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3 N, 78.

d 9. *pronũ.*

A, 8. G, 12. D, 3. L, N, 3.
E, 4. E, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 12. K, 3. L, 3. N, 3.

e 18. *sep.*
f 17. *sept.*

SCHOLIVM.

Duo exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, unitatem E, esse planum numerum, & unitates H, & I, ejus latera, licet impropriè, ut in definitione numeri plani monuimus Si enim unitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quodidem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cujusmodi sunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine ulla exceptione demonstret.

THE-

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri A, B, C, *continue proportionales, sitque primus eorum* A, *quadratus. Dico & tertium* C, *quadratum esse. Nam cum inter* A, *&* C, *cadat medius proportionalis; a erunt* A, *&* C, *plani similes. Quare existente* A, *quadrato, erit &* C, *ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 20. oct. A, 9. B, 54. C, 324.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, *proportionales continue, &* A, *primus sit cubus. Dico &, quartum* D, *cubum esse. Cum enim inter* A, *&* D, *cadant duo medii proportionales* B, C: *b erunt* A, *&* D, *solidi similes. Quare existente* A, *cubo, erit &* D, *illi similis, cubus. Quamobrem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.*

b 21. oct. A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

SCHOLIVM.

Hæc est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inveniet sane mancam esse & imperfectam. cum enim ad defin. 21 lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamvis, non quibuscunque lateribus unius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus unius proportionalia sint quædam alterius: optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum unus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamē in demonstratione pro concesso, atq; omnib. perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 32. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3, & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiā si prior sit quadratus, habēs duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit: imo omnino negare, posteriorē habere alia duo latera his proportionalia, hoc est inter se quoque æqualia, atq; adeo esse quadratū: quemadmodū etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera

in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione ulla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter utramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

Sint tres numeri A.B.C: continue proportionales, & primus A. quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati *A.* cum *D.* ex defin. in se faciat A. erunt D. & A. ex scholio propos. 9. hujus lib. ab unitate continue proportionales, eritque convertendo A. ad D. ut D. ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medii proportionales multitudine æquales nimirum unus: cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholii propos. 10. hujus lib. inter unitatem, atque C. numerum, nimirum unus, qui sit E. Quoniam igitur unitas & E. *C.* numeri sunt continue proportionales: producetur C. ex E. in se ipsum, ex scholio propos. 10. hujus lib. Ac proinde C. quadratus erit ex defin. cujus latus E.

A,36. B,48. C,64.
D,6. E,8.
unitas,

Aliter. Sumptis tribus numeris D. E. F. minimis in ratione A. ad B. & B. ad C; metietur D. ipsum A. & F. ipsum C. æque, ex iis, quæ ostendimus ad propos. 1. lib. 7. Et quoniam extremi D. F. minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. hujus lib. sunt quadrati: Est autem A, quadratus ex hypothesi: a cadet inter A. & D. quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero est ex æquo, ut A. ad C. ita D. ad F; & permutando, ut *A.* ad D. ita C. ad F, *b* cadet quoque inter C. & F. unus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F primus metiatur C. ultimum; *c* metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K quoties F. ipsum H. metitur; ita ut H. ad F & K. ad I. eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L. quadratus ipsius K *d.* Itaque quia ratio L. ad F. quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K. ad I. lateris ad latus, hoc est H. ad F. Est autem & ratio C. ad F. ejusdem rationis H: ad F. ex defin. duplicata, quod convertendo sint proportionales etiam C. H. F. erit L. ad F. ut C. ad F; Ac proinde L. & C. æquales sunt. Existente ergo L. quadrato, ex constructione, & C. quadratus erit.

A,36. B,48. C,64.
G,18. H,32.
D,9. E,12. F,16.
L,64. K,8. I,4.

a 11. oct.
b 8. oct.
c 7. oct.
d 11. oct.

ALITER. *e* Quoniam A & C; similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius *A*; at F, G, ipsius C; ita ut sit D,

e 20. oct.

sit D. ad E. sicut F. ad G: assumaturque H. latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D. in E, & ex H. in se, erunt D. H. E. continue proportionales. Cum ergo sit F. ad G. ut D. ad E; cadatque inter D. & E. medius proportionalis H. *b* cadet quoque inter F. & G. unus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F. I. G. sint continue proportionales: *c* idem numerus fiet ex F. in G. qui ex I. in seipsum, Fit autem C. ex F. in G. Igitur & idem C. fiet ex I. in seipsum: Atque adeo C. quadratus erit, ex definitione, cujus latus I.

A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,3. E,12. F,4. G,16.

a 20. *sept.*

b 8. *oct.*

A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,6. E,6. F,8. G,8.

c 20. *septim.*

Sint rursum quatuor numeri *A. B. C. D.* continue proportionales, & A. primus, sit cubus. Dico & D. quartum, cubum esse. Sumpro enim E. latere cubi A; fiat ex E. in seipsum numerus F. ac proinde, ex defin. ex E. in F. cubus A. Quia ergo E. in se facit F. & in F. facit *A.* erunt ex scholio propos. 9. hujus lib. E. F. A. continue proportionales ab unitate; atque idcirco convertendo proportionales quoq; erunt numeri *A. F. E.* & unitas. Itaque cum tam inter numerum D. quam unitatem, ac eundem numerum A. cadant medii proportionales multitudine æquales, videlicet duo: cadent ex theorem. 3. scholii propos. 10. hujus lib. totidem medii inter unitatem, & numerum D. qui sint G. H. Itaque quia unitas & numeri G. H. D. continue sunt proportionales: fiet H. ex G. in se, & D. ex G. in productum H. ut ad propos. 10. hujus lib. à nobis est demonstratum. Quare D. cubus est, ex definitione, cujus latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. unitas.

Aliter. Inventis quatuor numeris minimis E. F. G. H. in ratione A. ad B. & B. ad C. & C. ad D. metietur E. ipsum A. & H. ipsum D. æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstravimus. Et quia E. H. extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. hujus lib. Est autem & A. cubus, ex hypothesi: *d* cadent inter E. *A.* cubos duo medii proportionales, qui sint I. K. Quoniam autem, ex æquo, est ut A. ad D. ita E. ad H: & permutando, ut A. ad E. ita D. ad H: *e* cadent quoque inter H. D. duo medii proportionales, qui sint L. M. Cum ergo H. primus metiatur D. extremum,

A,64. B,160. C,400. D,1000. K,32. M,500. I,16. L,250. E,8. F,20. G,50. H,125. P,1000. O,10. N,5.

d 12. *oct.*

e 8. *oct.*

mum, *f* metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita ut L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. *a* Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicatæ sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, ejusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod convertendo proportionales etiam sint D, M, L, H: erit P, ad H, ut D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit ex constructione, cubus quoque erit D.

a 12. oct.

xxij.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

Sit enim A, *ad* B, *ut* C, *quadratus ad quadratum* D; *sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit* A, *ad* B, *ut* C, *ad* D: b *cadat autem inter* C, & D, *quadratos unus medius proportionalis, videlicet* E: c *cadet quoq; inter* A, & B, *medius unus, qui sit* F. *Quia igitur tres numeri sint continue proportionales* A, F, B: d *& A, primus est quadratus: erit & B, tertius quadratus.* d *Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.*

A, 36. F, 48 B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

b 11. oct.
c 8 oct.
d 22. oct.

COROLLARIVM.

Liquet ex his, proportionem cujusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, e essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, fesset 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & 0. quod est absurdum. g Nã inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. hujus lib demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosvis non posse cadere medium proportionalem.

e 24. oct.
f 24. oct.
g 11. oct.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, h caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non posse, demõstratum à robis est in scholio propos. 8. hujus lib.

h 11. oct.
i 8. oct.

xxiiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum, sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D, a cadant autem inter C, & D, cubos duo medii proportionales, qui sint E F: b *cadent quoque inter A, & B, duo medii, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 12. oct.

A, 8.	G, 12.	H, 18.	B, 27.	b 8. oct.
C, 64.	E, 96.	F, 144.	D, 216.	

c 23. oct.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cujusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, *d* essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

d 25. oct.

xxiv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes: e cadet inter eos unus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B: erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. hujus lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, ut ad F, Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

e 18. oct.

A, 20.	C, 30.	B, 45.	
D, 4.	E, 6.	F, 9.	
A, 20.	C, 30.	B, 45.	
D, 4.	E, 6.	F, 9.	

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conversum hujus; videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, *d* Dico A, B, esse planos similes. *f* Quoniã enim inter quadratos C, D, ca-

A, 8.	B, 18.
C, 16.	D, 36.

f 11. oct.

D, cadit unus medius proportionalis: Et est, ut
a 22. oct. A, 8. B, 18. C, ad D, ita A, ad B; a cadet quoque medius pro-
b 20. oct. C, 16. D, 36. portionalis inter A, & B, b Quare A, & B, plani si-
miles sunt.

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; esset, ut modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi A, B. Dico esse, ut A, *ad* B, *ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim* A B, *sunt solidi similes;* c *cadent inter eos duo medii proportionales, qui sunt* C, *D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi* E H, *ex coroll. 1. prop. 2. hujus lib. cubi. Quare, cum ex a-*
c 19. oct. *quo sit* A, *ad* B: *ut* E, *ad H; constat ita esse* A, *ad* B, *ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.*

A. 240. C, 360. D, 540. B, 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

SCHOLIVM.

Conversum hujus etiam demonstrabimus; scilicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

Numeri enim *A, B*, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A. B. solidos esse similes. Nam cum
d 12. oct. A, 16. B, 54. sit A, ad B, ut C, ad D: d cadant autem inter C
e 8. oct. C, 64. D, 216. D, cubos duo medii proportionales, e cadent
f 1. oct. quoque inter A, B duo medii. f Sunt ergo A, & B, solidi similes.

Ex his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem,
g 18. oct. esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, g caderet inter eos medius unus proportionalis, quod fieri non posse, jam dudum ostensum est in scholio propos. 8. hujus lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo me-
h 8. oct. dii proportionales. Nam h alias caderent quoque duo medii inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola unitate, vel certe binario tantū inter se distent,

ut

ut in scholio prædicto traditum est, inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter nec duo quivis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possunt habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo unitatem, & seipsum, quamvis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quivis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit latera tantum habet duas unitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 25. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

Rursus neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamvis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo hujusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; *a* cadet inter illos unus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continue proportionales, ut in scholio propos. 24. lib. 7. demonstravimus. *Ac* propterea ex coroll. 1. propos. 2. hujus lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18. & 19. oct.

Ex his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare majorem. Nam si eum non numeraret; *b* essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, ut proxime ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes: quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensive quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitque A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, unitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, unitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur primum numerum A; sint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita ut sit C, ad E, ut D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, ut E, ad F. *c* Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, unitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, et ex D, in E. *d* Quare D, ipsum F, metietur: *e* Metitur autē F, ipsum quod B, gignatur ex E, in F. *f* Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eadem B, metietur, quod est propositum. b 31. *septim.* c 19. *sept.* d 4. *pronū.* e 4. *pronū.* f 11. *pronū.*

Hinc perſpicuum eſt, *duos numeros inter ſe primos*; quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor majorem, ut proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A,B, ſitque A, minor primus. Dico A, ipſum C, metiri. Nam cum A & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B,C, unitates, & numerus D, ipſi A, æqualis quod nullus alius numerus, præter unitatem & numerum D, ipſi A æqualem, metiatur numerum primum A: ſint E,F,G, latera numeri B, lateribus B,C,D, proportionalia, ita ut ſit B ad E ut C ad F, & D ad G. Quia igitur eſt C, ad F, ut D ad G erit permutando C, ad D ut F ad G. *a* Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium. Fit autem ex C, unitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D in F. *b* Quare D ipſum G, metietur. *c* Metitur autem G, ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B. *d* Igitur & D, hoc eſt A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2: G, 6.

a 19. *ſep.*

b 4. *pronun.*

c 4. *pronun.*

Atque ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor majorem, ut *proxime oſtendimus*. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

d 11. *pronū.*

Itaque facilis admodum eſt inventio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem: vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16 & 20. Si enim eſſent plani ſimiles: *e* haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, *f* eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

e 26. *oct.*

f 24. *oct.*

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, *g* haberent proportionem quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, *h* eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum; ponitur enim non cubus.

g 27. *oct.*

h 25. *oct.*

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONUM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, a erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, b unus medius cadit proportionalis. c Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; d erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. sept.
b 18. oct.
c 8. oct.
d 22. oct.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; e erit ut A, ad B, ita D, ad C. f At inter D, & C, quadratos unus medius cadit proportionalis. g Igitur & inter A, & B, unus medius proportionalis cadet; h Ac propterea

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. septim.
f 11. oct.
g 8. oct.
h 20. oct.

Iterum A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit.

Duo quadrati A B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati: a erit C, ex eis productus, quadratus.

a 1. noni. A, 4. B, 25. C, 100.

II.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus: Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant G, quadratum: sitque A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: b erunt A, & B, similes plani: c atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis: videlicet D. d Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

b 2. noni. c 18. oct. d 22. oct. A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

III.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum: sitque A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. hujus scholii: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20. C, 80.

IV.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem: Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multi-

multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. hujus scholii: quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. G, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim G, latus cubi A; &
ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D.
metietur C, ipsum D, per C: b Metietur autem & unitas ipsum C, per
C. Igitur eadem pars est unitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum
denominata à C: Ac proinde ut unitas ad C, ita C, ad D: Rursus
quia C, multiplicans D, fecit A; d metietur D, ipsum A, per C, Metietur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius
D, quæ D, ipsius A. e ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: sed ut C, ad D,
erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A:
atque adeo inter unitatem & numerum A, duo medii proportionales
es cadunt numeri C-D. f At quia A, ipsum B, metitur per A, quod
seipsum multiplicans fecerit B; g metitur vero & unitas ipsum
per A; Eadē erit pars unitas ipsius A, quæ A, ipsius B; h Ac propterea
rit ut unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & numerum A, cadant duo medii proportionales C, & D, i cadent totidem
inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B:
nt continue proportionales, & A, primus sit cubus, k erit quoque
, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsū multiplicans, &c.
Quod erat demonstrandum.

A, 2. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vnitas.

a 7. prænun. b 5. prænun. c 20. defin. d 7. prænun. e 20. defin. f 7. prænū. g 5. prænun. h 10. defin. i 8. oct. k 23. oct.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse
multiplicans enim A, seipsum faciat D; l
itque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, merit ut
ad B, ita D, ad C, n Ac inter A, & B, cu-
duo medii proportionales cadunt. o Igitur & inter D, & C, duo
medii

A, 8. D, 64. B, 27. C, 216.

l 3. noni. m 17. sep. n 12. oct. o 8. oct.

a 23. oct. *medii proportionales cadent:* a Ac propterea D, *existente cubo, &* C, *cubus erit. Quocirca si cubus numerum cubum numerus multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

V. Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

Fiat ex cubo A, *in numerum* B *numerus cubus* C. *Dico &* B, *cubum esse. Multiplicans enim* A, *seipsum faciat* D: b *qui cubus erit.*

b 12. noni. *Quoniam igitur* A, *multiplicans* A, *&* B, *fecit* D, *&* C, c *erit ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* C: d At *inter* D, *&* C, *cubos duo cadunt medii proportionales.* e *Totidem igitur & inter* A, *&* B, *cadent:* f Ac *proinde existente* A, *cubo, &* B, *cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c Quod ostendendum erat.*

c 17. sep. d 12. oct. e 8. oct. f 2. oct.

A, 8.	B, 27.	
D, 64.	C, 216.	

SCHOLIVM.

Ex his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

Fiat ex A, cubo in B, non cubum numerus C.

A, 8. B, 20. C, 160. Dico C, non esse cubum. Sienim C, sit cubus; g & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

g 5. noni.

II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, non cubus C,

A, 8. B, 17. C, 136. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, h & factus cubus C, cubus erit, quod est contra hypothesin.

h 4. noni.

THEOR. 6. PSOPOS. 6.

V j. Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A *faciat* B, *cubum. Dico &* A, *cubum esse, Fiat enim ex* A, *in* B, *numerus* C, *qui cubus erit. cum* A, *in se faciat* B, *& ipse* C, *ex* A, *in* B, *gignatur, atque adeo aequalis aequaliter aequalis sit, ut perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur* B, *cubus multiplicans numerum quempiam* A, *facit cubum* C: a *erit &* A, *cubus.*

A, 8. B, 64. C, 512.

Quæ-

Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a *5. noni.*

SCHOLIVM.

Aliam demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: *b* Ergo inter B, & C, cubos duo medii proportionales cadunt. *c* Quoniam vero est ut B, ad C, ita A, ad D, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; *d* cadent quoque inter A, & B, duo medii proportionales. Atque adeo existente B, cubo, & A cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, ut perspicuum est.

b *12. oct.* c *17. sept.* d *8. oct.* e *23. oct.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

Numerus compositus A, *multiplicans numerum quemlibet* B, *faciat* C. *Dico* C, *esse solidum. Cum enim* A, *sit compositus, metietur eum, praeter unitatem, numerus aliquis, metiatur* D, *ipsum* A, *per* E. *Quo posito* g, *multiplicante* D, *ipsum* E, *producetur* A. *Cum ergo* B, *ipsum* A, *multiplicans fecerit* C;

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

procreabitur C *ex mutua multiplicatione trium numerorum* D, E, B: *Ac propterea solidus erit ex defin. cujus latera* D, E, B. *Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

f *13. defin.* g *9. pronun.*

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus, simul, & quadratus, & quinq; intermittentes omnes.

Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque, A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. *Dico tertium quidem* B, *ab unitate esse quadratum, & unum intermittentes omnes, quales sunt* D, F, H, K, M: *Quartum autem* C, *cubum, & duos intermittentes omnes, cujusmodi sunt* F, I, M; *septimum vero* F, *cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum*

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est unitas ad A, *ut* A, *ad* B : *æque metitur unitas numerum* A, *& numerus* A, *numerum* B : a *Metitur autem unitas numerum* A, *per* A. *Ergo &* A, *ipsum* B, *per* A, *metietur* : b *Atque adeo* A, *multiplicans* A, *ipsum* B, *producet. Quare* B, *quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt* B, C, D, *& est* B, *quadratus* : c *erit &* D, *quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus* D, E, F, *cum* D, *sit quadratus*, d *&* F, *quadratus erit* : *Nec non & omnes unum intermittentes.*

a 5. pronun.
b 9. pronun.
c 11. oct.
d 22. oct.

Rursus quia est unitas ad A, *ut* B, *ad* C, *æque metietur unitas numerum* A, *& numerus* B, *numerum* C. e *Metitur autem unitas ipsum* A, *per* A. *Igitur &* B, *ipsum* C, *per* A, *metietur*, f *atque adeo* B, *ipsum* A, *multiplicans procreabit numerum* C. *Quare cum* A, *seipsum multiplicans faciat* B, *multiplicans vero* B, *faciat* C, *ut est ostensum, erit* C, *cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt* C, D, E, F, *& est* C, *cubus*, g *erit &* F, *cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus* F, G, H, I, *cum* F, *sit cubus*, h *& I, i, cubus erit, atque omnes semper duos intermittentes.*

e 5. pronun.
f 9. pronun.
g 23. oct.
h 23. oct.

POSTREMO quia F, *septimus ab unitate ostensus est & quadratus, & cubus : ipse erit cubus simul & quadratus : Atque eodem modo M, septimus ab* F, *intermissis nimirum quinque* G, H, I, K, L, *cubus erit simul & quadratus : Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

Si sint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono : undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime numero positos in locis tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctavo, & aliis, quæ ternarius metitur, cujusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimus sextus, decimus nonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octavo, vigesimo quarto, & aliis, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertius decimus, decimus nonus, vigesimus quintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

Nam

Nam primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post tertium ab unitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab unitate: Numeri deniq; tertii ordinis quinque semper interponunt post septimum ab unitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post unitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post unitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt. IX.

Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus unitati quadratus. Dico

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

& reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, a jam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedii C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres continue pro- a 8. noni.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

portionales sint A, B, C; sique A, quadratus; b erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; c & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales. b 22. octa. c 22. octa.

Sit jam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos intermittentes,

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

cujusmodi sunt C, & F, sint cubi, d jam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad A, ut A, ad B; atque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; e Metitur autem unitas numerum A, per ipsum A. Igitur & A, ipsum B, per seipsum metietur; f Atque adeo cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit g Quare B, cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, h & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit: i & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales d 8. noni. e 5 pronun. f 9 pronun. g 3. noni. h 23. octa. i 23. octa.

fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Non demonstravit Geometra, si numerus, qui post unitatem; sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus unitati sit cubus simul, & quadratus, quia parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, ut demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

Verum tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus unitati quadratus. Dico & omnes quadratos esse, Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C, suntque A, B, quadrati; erit & C, qua-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

dratus, ex scholio propos. 2. hujus lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntque A C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. hujus lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E: & multiplicans E, faciat F, &c.

Sit deinde A proximus unitati cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multipli-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

a 3. *noni.* cans facit B: *a* erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio A,
b 4. *noni.* multiplicans B: facit C, suntque A, B, cubi, *b* erit & C, cubus. Rur-
c 4. *noni.* sus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, cubi; *c* erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex scholio A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem, non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post unitatem, non sit cubus, neq; alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

Sint

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus unitati nō sit quadratus. Dico nec alium ullum esse quadratum, prater tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, hoc est, prater B, L, F, H, &c. Si enim prater hos alius est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo a 8. noni.

Unitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 1048. M. 4096.

& D, sit quadratus; sitque ut D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & convertendo, ut E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab unitate est quadratus, c igitur & A, primus ab unitate quadratus erit. Quod est absurdum; ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, prater dictos quadratum esse. b 8. noni. c 24. oct.

Sed jam A, proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, prater quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, videlicet prater C, F, I, &c. Nam si prater hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex aquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & convertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e Sed C, est cubus, cum sit quartus ab unitate. f igitur & A, primus ab unitate cubus erit, quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cum & C, cubus sit, sitque ex aquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & convertendo ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, h erit, & A, cubus, quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoq; eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I; neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat. d 8. noni. e 8. noni. f 25. oct. g 8. noni. h 25. oct.

SCHOLIVM.

Non est autem necesse, si numerus, qui post unitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum aliū esse cubum simul, & quadratum, prater septimum ab unitate, & quinq; intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul & quadrato.

Sit enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem non au-

a 9. noni. tem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul, & quadratum: cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint, b quadratum vero, quod tertius sit ab unitate.

b 8. noni. Vnitas. B, 8. B, 46. Sit deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul, & quadratum; c Cubum quidem, quod quartus sit ab unitate: quadratum vero, d quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

c 8. noni. Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

d 9. noni. Sit postremo A, post unitatem neque cubus neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

e 10. noni. existente quadrato, e nullus alius quadratus sit, præter tertium ab unitate, ut unum intermittentes omnes, cujusmodi sunt, ut in scholio propos. 8. hujus lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimus tertius, decimus quintus, decimus septimus, decimus nonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimus sextus, decimus nonus, &c. Perspicuum est, tantummodo septimum, tertium decimum, decimum nonum, qui quidem omnes quinq; intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octavam hujus libri expenderit.

f 10. noni.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

Sint ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, ut C, quemlibet ma-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

jorem, ut G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G; ita unitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam

g 10. defin. a 5. pron. *quam unitas & quatuor numeri A, B, C, D, g atque metiatur unitas numerum D, atque numerus C, numerum G; a Sed unitas metitur*

hume-

umerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum B, per D, metietur: Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod it ut E, ad F, ita unitas ad A &c. Sic quoque metietur, A, ipſum B, per F, cum ſit ex æquo ut A ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex his quantum abeſt major numerus à minore metiente, tantum diſtare ab unitate eum numerum, per quem minor majorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad majorem, quæ unitatis ad eum, per quem metitur minor majorem, ut ex demonſtratione apparet. Itaque B,

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter unitatem & D, tres numeri interponuntur; Et tam inter G, & F, quam inter unitatem & C, duo interjecti ſunt numeri.

Hinc rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab unitate. Si vero minor aliquis majorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à majore diſtat, quantum minor ab unitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet tum; per quem metitur, [b] producitur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit à C, quantum C, ab unitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, ut diximus. Sic quoque B, multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

[b] 9. pronun.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum metiuntur, iidem & eum, qui unitati proximus eſt, metientur.

Sint ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, unitati proximum. Si namque non metitur ipſum A: erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe pri-

[c] 13. ſeptim.

a 9. pronũ. primi erunt, Metietur E, ipſum D, per F, atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. b Quare erit ut A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; c ac proinde in ſua proportione minimi; d metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G. e atque adeo E, multiplicans G, faciat G. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, f atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. g Erit igitur ut A, primus ad E, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. quapropter cũ

b 19. ſeptim.
c 23. ſep.
d 21. ſep.
e 9. pronun.
f 9. pronũ.
g 19. ſepo

Vnitas A, 10. B 100. C, 1000. D, 100000.
E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

A, & E, ſint inter ſe primi; h ac propterea in ſua proportione minimi: i Metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B per H: k ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A. atque eidcirco A, ſeipſum multiplicans facit B, ut ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. Quare erit ut E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint: m ac proinde in ſua proportione minimi; n æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſin. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri: Quod eſt abſurdum. Metietur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcumque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, ultimus numerus ſtatuatur.

h 23. ſep.
i 21. ſep.
k 9. pronun.
l 20. defin.
m 23. ſep.
n 22. ſeptim.

ALYTER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; o erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, ut ex ſcholio propoſ. præcedentis conſtat

o 31. ſep.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

p erit B, ad E, primus. Quia ergo A & B, ad E, primi ſunt: ſit autem C, ex A in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. q erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt: & ſit D, ex A in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. r erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab unitate quot-

p 27. ſeptim.
q 26. ſept.
r 26. ſept.

ustemque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod o-
endendum erat. COROLLARIVM.

Itaque neque ullus numerus primus, qui major sit eo, qui proximus
t, unitati, neque ullus minor proximum unitati non metiens, metiri po-
est ultimum. Si namque metiretur ultimum; metiretur quoque unitati
roximum, ut demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Est autem admirabilis prima hujus propositionis demonstratio,
Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, o-
tendit demonstratione affirmativa E, ipsum A, metiri: quod videtur
ieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse al-
um ex eo, quod non est albus, parodoxum aliquid, & inopinatum
n medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum
ic est in numeris ab Euclide, & in aliis nonnullis propositionibus,
quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudi-
nibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturq; se primum omnium
ianc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non di-
sturum fuisse, si diligentius vim hujus demonstrationis expendis-
set, vel certe si expendit, eam in memoriam revocasset, quandoqui-
dem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrandi
modo, ut ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere
demonstrandi usus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12.
ut ibidem monuimus.

Cæterum ex demonstratis perspicuum est, quemcunque nume-
rum primum, qui ultimum metitur, metiri etiam omnes alios an-
te ipsum. *a* Cum enim metiatur proximum unitati: hic autem o-
mnes subsequentes: *b* quod semper minor majorem metiatur per
aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris *c* manife-
stum est quod & ille omnes metiatur.

a 12. *noni.*
b 11. *noni.*
c 11. *pro-*
nun.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiii.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proporti-
onales fuerint; qui vero post unitatem, primus sit; Maxi-
mum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in nume-
ris proportionalibus.

Sint ab unitate continue proportionales quotcunque numeri
A, B, C, D, *quorum* A, *proximus unitati sit primus. Dico nullum*
alium numerum, præter
ipsos A, B, C, *metiri ma-* *Vnitat.* A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
ximum D. *Si enim fieri* E---H---G---F---
potest, metiatur nume-
rus alius E, *diversus ab* A, B, C, *ipsum* D. *Manifestum autem est*, E,
non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extre-
mum D; d *metietur quoque ipsum* A, *unitati proximum, qui primus*
ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, *primus est sed com-*
positus: e *atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quem*

d 12. *noni.*
e 33. *sep.*

dico alium esse non posse, praeter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; a metietur quoque ille alius primus eundem D: b atque adeo & ipsum A, primum, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur jam E, ipsum D, per F. Dico F, diversum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C: c & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. d Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diversus. Quoniam vero E, metitur D, per F, e metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, ultimum: f metietur & A, proximum unitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus: g atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quē rursus dico nullum alium esse posse praeter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum: h metietur quoque ille alius primus eundem D: i atque adeo & ipsum A, proximum unitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F: k fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in scholio propos. 11. hujus lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium: l Ac proinde erit ut A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, ut ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diversus ab A, B, metitur C, ultimum (relinquimus enim jam numerum D,) per G: ostendemus similiter, G, diversum esse ab A B, & non primum, sed compositum quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diversus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G: m etietur utique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B: m & vicissim aliquis ipsorum A B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. n Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B: erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. Ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui ali-

Unitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. E. F. G. H.

a 11. pronun.
b 12. noni.
c 8. pronū.
d 11. noni.
e 8. pronun.
f 12. noni.
g 33. sept.
h 11. pronun.
i 12. noni.
k 9. pronun.
l 19. septim.
m 8. pron.
n 14. noni.

aliquis ipſorum A, B, ſed diverſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; a metietur viciſſim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. a 8. pronum. *Si enim primus ſit, metiaturque ultimum C,* b *metietur quoque numerum primum A, unitati proximum, quod eſt abſurdum.* b 12. noni. *Non ergo G primus eſt, ſed compoſitus,* c *ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium poſſe eſſe prater A. Nam ſi alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, ultimum,* d *metietur quoque illi alius primus eundem C,* e *atque adeo ipſum A, unitati proximum qui primus eſt, quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum G, metietur.* f *Iam vero quia C, ſit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in ſcholio propoſ. 11. hujus lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum,* g *& ex F, ſecundo in G, tertium.* g *Quare erit ut A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, ut demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diverſus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim jam numeros C, & D,) per H, oſtendemus ſimiliter H, diverſum eſſe ab A, quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.*

c 33. ſep. d 11. pronum. e 12. noni. f 9. pronum. g 19. ſeptim.

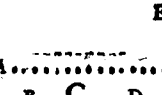
Nam ſi H, idem ſit qui A, metiaturque G, ipſum B per H: metietur utique G, ipſum B, per A: h *Et viciſſim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 11. hujus lib. erit G, idem qui A, quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diverſus.* i *Iam vero quia B, ſit ex G, in H, quod G, ipſum B, metietur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, ut in ſcholio propoſ. 11. hujus lib. docuimus: Fiet idem numerus B, ex H primo in G, tertium, & ex A, medio in ſe ipſum.* k *Quare erit ut H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, ut eſt demonſtratum. Igitur, & H, ipſum A, metietur numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, prater ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.*

h 8. pronum. i 9. pronum. k 20. ſeptim.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum prater ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim ſi fieri poteſt, primus numerus E, diverſus à B, C, D, ipſum



ipsum A, *per numerum* F. *Quia, igitur* E, *metitur* A, *per* F, *a multiplicans* E, *ipsum* F, *faciet* A, b *Quare singuli* B, C, D, *alterum ipsorum* E, F, *metientur: non quidem ipsum* E, *primum, & ab ipsis diversum: ergo ipsum* F, *qui minor est quam* A. *Quod est absurdum. Ponitur enim* A, *minimus, quem primi* B, C, D, *metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 9. *prop. 8.*
b 37. *sept.*

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E. in sua propoortione, minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G. Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus sed compositus: *c* sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot uno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, ut constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, sit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F. vel ad M. Si ad F, habemus propositum, si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit ex scholio ejusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in seipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. Quod si H, primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

c 2. *octa.*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H---- F, 2. G, 3.

Deinde metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, sit ex F, in N, erit ut prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem

dem modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

Rursus metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoque erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probavimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

Praeterea A, metiatur H, non primus quartum D, qui cum fiat ex F in P, erit H compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum: si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum: si vero ad L cum L producatur ex G in se: erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

Eodem modo si H, non primus metiatur ultimum E, ostendemus H, compositum esse ad H, Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G: atque ita in caeteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur ultimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, praeter primum & ultimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quae in lineis secundo libro Euclides demonstravit prioribus 10. theorematibus.

QVoniam ad theorema sequens demonstrandum Theon quaedam assumit in numeris, quae demonstrata sunt de lineis libro secundo perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quae Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, secetur que ipsorum alter in quot-

quotcunque partes : Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiviso, & qualibet parte numeri divisi continentur.

Sint duo numeri A B, & C, quorum A, B, dividatur in A, D, D E, E B; fiatque F, ex C, in A B; Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; *a* metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H, & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K pars erit à C, denominata, eadem nimirum quæ A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstravimus, totus A B totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; *b* Ac proinde inter se æquales erunt, F, & G K. Quod est propositum.

A . . D . . E . B C . . .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

a 2. *pronun.*

b 4. *pronū.*

II.

Si numerus in duas partes dividatur : Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim A B, dividatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B, quod est propositum.

D . . . . . .
A . . . . C . . B

Idem demonstrabitur, si A B, plures partes, quam in duas secetur, ut, ex appositâ secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E . . . . . .
A . . . C . . D . B

III.

Si numerus in duas partes dividatur : Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi,

illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

Sit numerus AB, divisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC æqualis fit: erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D....
A....C.....B

IV.

Si numerus in duas partes dividatur. Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, divisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, una cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A.....C....B

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medii, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, una cum quadrato numeri inter medii CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B, numero vero comprehenso semel sub C D, D B, una cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, ut si hic numerus factus ex C B, in D B, sumatur pro quadrato ipsius D B, una cum numero facto ex C D, in D B: numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C D, una cum reliquo numero facto ex C D, in D B, semel, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B: hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipsius C D, æqualis erit quadrto ipsius C B. Quod est propositum.

A . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, & illi aliquis alius numerus adjiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adjecto in adjectum, una cum quadrato dimidii numeri, æqualis est quadrato ejus numeri, qui ex dimidio & adjecto componitur.

Numerus enim A B, secetur in partes æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adjecto B D, tanquam uno, nimirum ex A D, in adjectum B D, una cum quadrato dimidii numeri C B, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adjecto B D, tanquam uno hoc est, quadrato ipsius C D. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, una cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratis partium C B, B D, una cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B C, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit ut si hic numerus factus ex A D, in B D, sumatur pro quadrato partis B D, una cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipsius C D, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C B, una cum numero facto ex A D, in B D, hoc est, numerus factus ex A D, in B D, una cum quadrato ipsius C B, æqualis sit quadrato ipsius C D. Quod est propositum.

A . . . . C . . . B . . D

Si nu-

VII.

Si numerus in duas partes dividatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

Dividatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, una cum quadrato partis CB æqualem esse numero bis qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex AC, in CB, si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerum AC, CB, una cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB: Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius, CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

VIII.

Si numerus in duas partes dividatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Secetur numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC; æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, sive dicta parti CB, sit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum AB, BD, una cum numero qui fit ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, una cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum, AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, una cum quadrato numeri AC, fit ut si pro quadratis numerorum AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, una cū quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . . C . . . B . . . D

Si nu-

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Divisus sit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D D B,) efficiuntur. Cum enim

A . . . . C . . . D . . B

quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D: Si communis apponatur quadratus partis D B: erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipsius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Igitur, si pro quadrato ipsius D B, una cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati ipsorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis, AC propterea quadrati partium A D, D E, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod est propositum.

X.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, adjiciatur autem illi alius quispiã numerus. Quadratus compositi numeri ex toto & adjecto, & quadratus numeri adjecti, simul dupli sunt ejus quadrati, qui ex dimidio efficitur, & ejus, qui fit à numero composito ex dimidio, & adjecto.

Sit numerus A B, divisus in partes duas æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. *Dico* quadratum numeri A D, compositi ex toto AB, & adjecto B D, & quadratum adjecti numeri B D, utrosq; simul, duplos esse quadratorũ, qui fiunt ex A C dimidio, & ex C D, composito ex C B, dimidio, & adjecto B D.

A . . . C . . . . B . . D

Cum enim quadratus ipsius A D, æqualis sit, ex 4. theorem, quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D, si communis addatur quadratus partis B D, erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una

una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD; æquales sunt quadrati numerorum CB, CD, & quadrato ipsius CB. æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD: sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est numerorum AC, CD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, ut numerus aliquis in duas partes dividatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in unum partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, ut ibi monuimus; ita demonstrabimus.

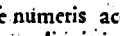
Dividatur, si fieri potest, numerus AB, in C, ita ut numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, æqualis est quadrato numeri medii AC; a erit ut AB ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, major quam AC, ita AC: Igitur & AC; major est quam CB. Ablato jam CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque ut AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est ut AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum: b erit quoque ut totus AB, ad totum AC, vel ut detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, æqualis ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est ut AC, ad CD, ita CD, ad AD: & est AC, major quam CD, erit quoque CD, major quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam ut AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, ut totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum erit, c quoque ut totus AG, ad totum CD, vel ut detractus CD, ad detractum DE; ita AD, ex AC, residuus, hoc est DE, ipsi AD, æqualis ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit ut CD, ad DE, ita DE, ad EC: sit autem CD, major quam DE; erit etiam DE, major, quam EC: Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis: & sic deinceps; nec unquam finis erit hujus detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit dividi in infinitum. Non ergo numerus AB, dividetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus; æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

a 20. sept.

b 11. sept.

c 11. sept.

Aliter. Quoniam numerus AB, in C, ita divisus est; ut is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC: erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC: Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, una



cum quadrato ipsius AC, quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, una cum quadrato ipsius AC, quadratus, quippe cum æqualis sit quadrato, numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirū is, qui quater continetur sub AB, CB, una cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, dividitur ita in C, ut is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

Verum hocidem clarius demonstrabimus ad propos. 29. hujus lib.

xvi. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E,

A, 9.	B, 12.	*in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum*
C, 16.		
D, 3.	E, 4.	*est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C.* a *Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter*

a 24. sep. b 30. sept. *se primi sunt:* b *erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit;* c *erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in D, aqualis est per 3. theorema scholii precedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E:* d *Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi*

c 26. sept. d 27. septim. *sunt A, B, simul compositi.*

e 30. sep. f 26. septim. *Deinde quia, ut prius,* e *uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E:* f *efficitur, cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D, (*f *numerum factum ex D, E, tanquam uno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanqam in E, aqualis est per 3. theorem. scholii antecedentis, &*

B, 12.	C, 16.	*numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B C, simul*

g 27. sep. A, 9. D, 3. E, 4. *compositi, ad D, primi sunt,* g *atque adeo &*

ad

ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

Poſtremo quia, ut prius, b uterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt: atque adeo è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, c erit quoque qui ſit ex D, ad compoſitum ex D, E, primus: d Ac proinde & idem ſit qui ex D, in E, ad eum qui ſit ex D E, tanquam uno, in ſe primus erit. Qui autem ſit ex D, E, tanquam uno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorem. antecedentis ſcholii, eis qui ſunt ex D, & E, in ſe ipſos, una cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui ſunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui ſiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui ſit ex D, in E, atque is qui ſit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum qui ſit ex D, in E, ut oſtenſum eſt. e Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui ſiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex eo, qui ſit ex D, in E, atque is qui ſit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui ſiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui ſit ex D, in E, ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum qui ſit ex D, in E, primi ſunt, ut oſtenſum eſt, f erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui ſiunt ex D, & E, in ſeipſos, atque is, qui ſit ex D, in E, inter ſe primi. Cum igitur ex D, in E, in ſe ipſos fiant A, & C: Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quamobrem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

b 30. ſep.
c 26. ſep.
d 27. ſep.
A, 9. C, 16.
B, 12.
D, 3. E, 4.
c 20. ſe-
f 30. ſep.

SCHOLIVM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis hoc modo ipſum proponens.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

Sint continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos: Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C: & A, C, D, ſimul ad B: & B, C, D, ſimul ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe: A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
atq; adeo eos aliquis numerus cō- E. F, 2. G, 3. H.

munis mensura metiatur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest, sitque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi: metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. hujus lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D: *a* metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 3. lib. 8. *b* metietur quoq; H, medios B, C: *c* ac propterea & compositum ex B & C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstravimus: *d* metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. *e* Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

A, 8. B, 12. C. 18. D, 27.
E --- F, 2. G, 3. H ---

a 11. pronun.
b 11. pronun.
c 10. pronun.
d 12. pronun.
e 3 oct.

Rursus, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, ut prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. hujus lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E: & E, compositus ex A, B, D: *f* metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur per coroll. 3 propos. 2. lib. 8. medios B, C, *g* metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, *h* metietur quoque H, compositum ex A D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. *i* metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. *k* Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. *l* Sed & primi inter se sunt Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

f 11. pronun.
g 11. pronun.
h 12. pronun.
i 11. pronun.
k 12. pronun.
l 3. oct.

Non aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

xvij.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint

Sint primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium numerum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, a atque adeo in sua proportione minimi: b ipsi aque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdū. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B.....
C.....

a 23. septim.
b 21. septim.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium quempiam.

Sint continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E; Sunt autem A, D, cum sint inter se primi c minimi in sua proportione. d Igitur aque metientur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C. Ergo & tum A, metiatur ipsum B: & e 11 propum B, ipsum C, metietur: e atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C: metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, f metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E----

c 23. sept.
d 21 sept.
f 11. prop.

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inveniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inveniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, ut A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut

a 16. noni. A, 4. B, 7. aut non. Si sunt inter se primi, a perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A, & B, inter se primi: multiplicans B, seipsum faciat C, Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A B, inveniri posse tertium proportionalem, imo ipsum D, esse tertium proportionalem,

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

b 9. pronū. Cum enim A, metiatur C, per D, b fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in seipsum. Igitur, qui continetur sub

c 20. sep. extremis A D, aqualis est ei, qui ex medio B, describitur; c Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inventus est tertius proportionalis ipsis A, B.

Sed non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inveniri potest, inventus sit D, ita ut sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, ut A, ad

d 20. sept. B, ita B, ad D, d erit numerus contentus suo extremis A, D, aqualis ei, qui fit ex B,

A, 6. B, 4. D - - - C, 16.

e 7. pronū. medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; e metietur A, ipsum C, per D; sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inveniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in seipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, invenire possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerabimus, &c. Quod faciendum erat.

XX.

PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri.

Sint dati tres numeri A, B, C, sive deinceps proportionales sive non, oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, ut A, ad B.

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inveniri posse quartum

f 9. pronum. proportionalem, imo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, f fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, aequalis est ei, qui sub B, C, secundo & tertio continetur; g Ac

g 19. sept. propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inventus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

Sed

Sed jam non metiatur A, *ipſum* D. *Dico ipſis* A, B, C, *non poſſe inveniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inventus quartus proportionalis* E: *ita ut ſit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E. *Quia ergo quatuor numeri* A, B, C, E, *proportionales ſunt, a erit numerus contentus ſub extremis* A, E, *aqualis ei, qui ex* B, *ſecundo fit in* C, *tertium, hoc eſt, ipſi* D. *Quare cum* D *fiat ex* A, *in* E; b *metietur* A, *ipſum* D, *per* E: *ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inveniri poteſt ipſis* A, B, C, *quartus proportionalis, quando* A, *primus non metitur* D, *productum ex* B, *ſecundo in* C, *tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis* C, B, A, *inveniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat* A, *ut* C, *ad* B. *Quocirca tribus numeris datis conſideravimus, an poſſit, &c Quod erat faciendum.*

A, 4. B, 6. C. 9. E--- D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E--- D, 40. a 19. ſept.

b 7. prom.

SCHOLIVM.

Hæc quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adjungi alius proportionalis, quamvis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi dividatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. dividatur per 3. invenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diviſis 64. per 3. fit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diviſus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$ per diviſorem 3. ut ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe, erunt 3. 8. $21\frac{1}{3}$, continue proportionales.

Datis autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus dividatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium, genitus dividatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. Cum enim diviſis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. producetur numerus diviſus 120. ex multiplicatione Quotientis $13\frac{1}{3}$ per diviſorem 9. ex iis quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diviſus ex ſecundo in tertium. Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. proportionales ſunt.

c 20. ſept.

d 19. ſept.

Ex his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adjungi. Sumptis enim tribus ultimis ſi ipſis alius poteſt inveniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus

cus Commandinus, quatuor membris hoc problema absolvunt. Aut enim (ajunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro hujus problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes in errorem, eumq; non levem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inveniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas hujus rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. sunt inter se primo, & nihilominus eis adjungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt esse ut 4 ad 8. ita 9. ad 18. cum utrobique proportio sit subdupla: Idem videri potest in exemplis aliis infinitis, ut hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10 3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adjungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalē. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet si demonstrat omnem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inveniri nullo modo posse quartū proportionalem. Si enim potest inveniri, sit ille D, ita ut

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E.---

quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, *a* & ob id minimi. *b* Igitur metiuntur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E, At vero & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inveniri nequit.

a 23. septim.
b 21. septim.

Hæc est eorum demonstratio, in qua assumunt esse ut B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris

neris B, C, D, quartus proportionalis possit inveniri, quam trium A, B, C, cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id, pro concesso assumant, ut hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (ut cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunq; quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, ut detur alius ad quem ita se habeat quartus sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione ulla exigunt, ut detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, ut B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi utuntur.

Sint enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, ut sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, ut B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo ut ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alii Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E.---

Primum vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inveniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absolvimus. a 17. noni.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint proposita primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b

Sumpto enim numero D, E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei unitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30.
D----------E. F
1

b 38. sup.

SED jam non sit primus D F. c *Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipsorum A, B, C,* c 33. sept.

A, 3. B, 5. C, 7.
105. 1.
D----------E-F
53.
G-----

a 11. prop. 20.

eundem esse. Si namque G, sit idem qui unus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C: Ac proinde inventi sunt primi numeri A, B, C, G, plures propositæ multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures invenientur quàm A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inveniri alium primum numerum ab illis diversum.

Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inveniemus eodem modo alium primum ab illis diversum, videlicet D F, si primus est, vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum, inveniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet inveniemus.

xxij. **THEOR. 19. PROPOS. 21.**

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantur quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A, B, & F, ipsius B C: & G, ipsius C, D. Quoniam igitur est ut A, B, ad E, ita B C, ad F: & C D, ad G: (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque ut A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A, B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit: Ac propterea A, D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . B . . . C . . . . . D
E . . F . . G . . . .

b 12. sup.

xxiij. **THEOR. 20. PROPOS. 22.**

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

Com-

COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares: differet quilibet unitate à pari, ex definitione. Quare

A . . . B . . . C . . . . . D . . . . . E

detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. a *Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unitatum detractarum par.* b *Igitur & totus AE compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.*

a 21. noni.
b 12. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum, AD, compositum, impares esse. Cum enim impar numerus differat unitate à pari ex definitione: ablata unitate ED, ab impari CD: erit reliquus CE, par. c *Est autem & AC, compositus ex imparibus AB, BC, multitudine paribus,*

A . . . . B . . C . . . . . E . D

par, d *igitur & AE, compositus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita unitate ED, totus AD, impar erit, cum impar à pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.*

c 12. noni.
d 21. noni.

SCHOLIVM.

Pari ratione Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta unitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat unitate. e Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa unitate, totus fiet impar cum à pari sola unitate differat. Quod est propositum.

e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit. xxv.

Ex pari numero AB, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem esse. Aut enim CB, par detractus dimidia pars est ipsius AB, aut

A . . . . . C . . . . . B

major quam dimidia pars, vel minor.

Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi CB, pari aequalis sit AC, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

Sed jam CB, par detractus major sit, vel minor dimidia partt ipsius. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidia

dias partes habent, ex definitione, sit D B. *dimidia pars ipsius* A B, *&* E B, *dimidia ipsius* C B. *Itaque cum sit ut* A B, *ad* D B, *dimidium, ita* C B, *ad* E B, *dimidium, erit permutando ut* A B, *ad* C B, *ita* D B, *ad* E B: *&*

A.....C...D...E....B
A.....D... C.. E.. B

dividendo ut A C, *ad* C B, *ita* D E, *ad* E B. *Rursusque permutando, ut* A C, *ad* D E, *ita* C B, *ad* E B, *Atqui* C B, *ipsius* E B, *duplus est. Igitur &* A C, *ipsius* D E, *duplus erit: Ac propterea* A C, *cum bifariam dividatur, (quod* D E, *sit ejus pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

Facilius demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile hoc modo. Si A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta unitate A D, erit reliquus D C, par. [a] Igitur compositus D B, par quoque erit: ac proinde, addita unitate A D, totus A B, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.

A..D....C.....B

a 23. noni.

xxvj. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, *impar detrahatur* C B. *Dico & reliquum* A C, *imparem esse. Detracta enim unitate* C D, *ex* C B, *reliquus sit numerus* D B *par. Quia igitur & totus*

A.....C. D.... B

b 24. noni.

A B, ponitur par: [b] erit & reliquus A D; *par. Dempta ergo unitate* C D, *reliquus* A C, *impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.*

xxvij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, *impar detrahatur* C B. *Dico reliquum* A C, *parem esse. Detracta enim* D B, *unitate ex imparibus* A B, C B: *erunt reliqui* A D, C D, *pares. Quia*

A.... C....D. B

ergo ex pari A D, *par aufertur* C D; *[c] erit & reliquus* A C, *par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.*

c 42. noni.

xxviij. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex

Ex impari A B, *detrahatur par* C B. *Dico reliquum* A C, *imparem esse. Detracta enim* A D, *unitate ex impare* A B, *erit reliquus* D B, *par: Ex quo cum detrahatur* C B, *par; a reliquis* D C, *par quoque erit: Ac proinde addita unitate* A D, *fiet* A C, *impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.*

A . D . . . . . C . . . . . B

a 24. *noni.*

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Fiat ex A, *impari in* B, *parem numerus* C. *Dico* C, *parem esse. Cum enim* C, *fiat ex* A, *in* B; *componetur* C, *ex tot numeris ipsi* B, *aqualibus, quot in* A, *sunt unitates. Quare cum* B, *sit par, componetur* C, *ex tot partibus ipsi* B, *aqualibus, quot sunt unitates in* A; b *Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.*

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. *noni.*

SCHOLIVM.

Eadem demonstratione ostendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Nam rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

Constat quoque ex his, parem numerum in se multiplicatum procreare parem: ut patet, si pares A, & B, componantur æquales.

A . . . B . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex impari A, *in imparem* B, *fiat* C. *Dico* C, *imparem esse. Cum enim* C, *fiat ex* A, *in* B; *componetur* C, *ex tot numeris ipsi* B, *aqualibus, quot sunt unitates in* A. *Quare cũ tam* A, *quam* B, *sit impar: componetur* C, *ex imparibus ipsi* B, *aqualib.* C, *quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini unitatum, quæ in* A, *impari continentur. Ergo* C, *impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

A . . B . . . .
C . . . . . .

c 23. *noni.*

COROL-

COROLLARIVM.

A...B... C..... Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: ut constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

a 29. noni. A... C.... B..... Metiatur impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit, a erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

b 28. noni. A... C..... B..... Metiatur impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

SCHOLIVM.

Ex his clarissime quoque demonstrabimus theorem 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 24. hujus lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita ut numerus ex AB, in CB, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur utraque pars AC, CB, impar est; aut major AC, impar, & minor CB, par; aut contra, major AC, par, & minor CB, impar: aut denique utraque pars AC, CB, par. Sit primum utraque pars AC, CB, impar. c ideoque totus numerus AB, par. d Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. hujus propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in se: erit par numerus impari æqualis, quod fieri non potest.

A ---C---B
D--- E--

c 22. noni. d 28. noni.

Deinde sit AC, impar, & CB, par: ideoque ex scholio propos. 23. hujus lib. totus AB, impar. e Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. hujus propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis, quod est absurdum.

e 28. noni.

Tertio sit AC, par, & CB, impar, ideoque ex scholio propos. 23. hujus lib. totus AB, impar. f Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est: & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. hujus lib. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.

f 29. noni.

Quare

Quarto sit utraque pars AC, CB, par. Inventis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis DE, proportionem AC, ad CB: a erunt DE, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel uterque impar, vel unus impar, & alter par. Et quia est, ut AC, ad CB, ita D, ad E: b erit convertendo, ut CB, ad AC, ita F, ad D: Et componendo, ut AB, ad AC, ita totus DE, ad D: c Est autem ut AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod numerus factus ex AB, in CB, æqualis ponatur quadrato medii AC. Igitur erit quoque ut totus DE, ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto DE, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus DE, sectus est in partes DE, quarum vel utroq; impar est, vel una impar, & altera par. ita ut numerus factus ex toto DE, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse tam demonstratum est in numero AB, quando utraque pars AC, CB, vel impar est, vel una impar, & altera par. Constat ergo propositum.

a 24. sep.
b 26. sep.
c 20. sep.
d 20 sep.

THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxiij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

Metiatur impar A, *parem* B. *Dico* A, *dimidium quoque ipsius* B, *metiri. Metiatur* A, *ipsum* B, *per* C. *Erit ergo ex iis, qua ex ante cedente propos. ex Campano demonstravimus, numerus* C, *par. Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum* A, *metiatur* B, *per* C, *& metietur quoque* C, *ipsum* B, *per* A. *Ac proinde* C, *pars erit ipsius* B, *denominata ab* A, *ut ad 3. definitionem lib 7. docuimus. Quoniam vero est ut* C, *ad dimidium sui, ita* B, *ad dimidium sui; & permutando ut* C, *ad* B, *ita dimidia pars ipsius* C, *ad dimidiam partem ipsius* B. *Est autem* C, *pars ipsius* B, *denominata ab* A, *ut ostensum est; erit & dimidium ipsius* C, *dimidii ipsius* B, *pars ab eodem* A, *denominata. Ac propterea* A, *dimidium ipsius* B, *metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.*

A .... C ....
B .....

c 8. prænum.
f 4 o. sep.

xxxiv.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A, *primus sit ad numerum* B, *cujus duplus sit* C. *Dico* A, *ad* C, *quoque primum esse. Si enim* A C, *non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit* D, *qui necessario impar erat. Nam si sit par, cum metiatur*

A .... B .....
G .....D---

a 28. noni. *tur imparem* A: *erit A, factus ex* D, *pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum, ponitur enim A, impar.*

A..... B.....
C.....D—

Quare D, *impar parem* C, *metieni, (est enim* C, *par, cum dimidium*

b 30. noni. *habeat* B.) b *metietur quoque numerum* B, *ejus dimidium: Metitur autem &* A. *Igitur* D, *ipsos* A, B, *primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad* C, *primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad ejus duplum, ut Euelides demonstravit, sed etiam ad ejus quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad

c 31. noni. duplum, c *primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.*

THEOR. 30. PSOPOS. 32.

XXXV. Numerorum à binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

Numeri à binario A, *dupli quotcunque sint* B, C, D, E. *Dico* B, C, D, E, *esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, cum* A, *sit binarius, &* B, C, D, E, *à*

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32,

binario dupli: erunt A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla. d *Quare* A, *quemlibet ipsorum*

d 11. noni. B, C, D, E, *& quilibet minor majorem sequentem metietur per aliquem ipsorum* A, B, C, D, E: *qui cum omnes sint pares, utpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum* B C, D, E, *par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.*

Quod autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, *sint ab unitate continue proportionales, sitque* A, *proximus unitati numerus primus, nimirum*

e 13. noni. *binarius: e nullus alius quemlibet ipsorum metietur, prater ipsos A, B, C, D, E: qui cum sint omnes pares, metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inveniamus, qui sint patiter pares tantum. Sint enim A, B, C, D, E, &c.

à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sũt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parẽ tantùm; præter eos, qui in hoc ordine cõtinentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm inveniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cujus pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par; (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cujus rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad unitatem veniamus. Sit ergo jam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4, B, 8, C, 16, D, 32, E, 64, F, 128.
I---H---G---

THEOR. 31. PROPOS. 33. xxxvj.

Si numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum impa-rem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus: Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoquè pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metietur eum D, par per parem E. a Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, sit ex C, binario in B; ejus dimidium. Ergo numerus factus ex C; primo in E, quartum æqualis est ei; qui fit ex D, secundo in E, tertium, b Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur; par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pa-

A.....
B.... C..
D---- E---

a 9. prop. hum.
b 19. sep.

viter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, invenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quòd enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparē. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium præter ipsos, esse pariter imparem tantùm; sed vel esse pariter parem tantùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantum	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

xxxvij. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

A .....

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diviso A, bifariam, & ejus dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metietur, a cùm impar imparem multiplicans faciat imparem: 32p. nost. *esset A factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A per parem: atque adeò vicissim par per imparem, erit ex definitione A pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.*

SCHO-

SCHOLIVM.

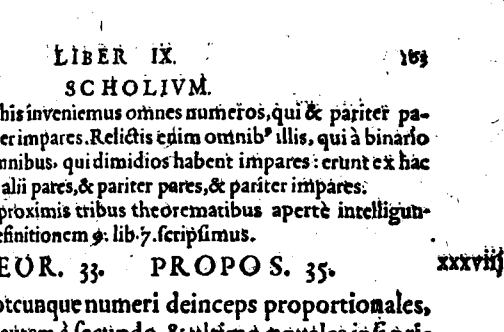
FACILE ex his inveniemus omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares. Relictis enim omnib⁹ illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares: erunt ex hac propos. omnes alii pares, & pariter pares, & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F: *& ex* B C, *secundo, &* E F, *ultimo detrahantur* C G, F H, *primo,* A, *æquales. Dico esse ut* B G, *ad* A, *ita* E H, *ad* A, B, C, *&* D, *simul. Detrahatur* F I, *ipsi* B C, *& F K, ipsi* D, *æqualis. Quoniam igitur* F I, *æqualis est ipsi* B C, *& ablatus F H, ablato* C G: *erit & reliquus* I H, *reliquo* B G, *æqualis. Quia verò est ut* A, *ad* B C, *ita* B C, *ad* D, *&* D, *ad* E F: *convertendoque ut* E F, *ad* D, *ita* D, *ad* B C, *&* B C, *ad* A: *Atque est* K F, *ipsi* D, *&* I F, *ipsi* B C, *&* H F, *ipsi* A, *& qualis: Erit quo-*



que ut E F, *ad* K F, *ita* K F, *ad* I F, *&* I F, *ad* H F. *Dividendo igitur ut* E K, *ad* K F, *ita* K I, *ad* I F, *&* I H, *ad* H F; *ac proinde ita etiam erunt omnes* E K, K I, I H, *ad omnes* K F, I F, H F, *hoc est, totus* E H, *ad* D, B C, A, *simul. (quibus sumpti sunt æquales* K F, I F, H F,*) ut* I H, *ad* H F, *hoc est, ut* B G, *ad* A: *sunt enim* B G, *&* A, *ipsis* I H, *&* H F, *æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.* à 11. *sequenti.*

I 2

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continuè proportionalium, si modo primus, secundus, & ultimus fuerint noti. Cùm enim sit ut excessus secundi ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & ultimo dematur, fiatque ut reliquus secundi ad primum, ita reliquus ultimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui ultimum antecedunt. Si igitur adjiciatur ultimus, habebitur tota summa. Invenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum ultimi, & productus dividatur in excessum secundi: ut liquet ex scholio propos. 19. hujus lib. quandoquidem tres dati numeri; quibus quartus proportionalis inveniendus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus ultimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. ultimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto ultimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si dividatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium excluso ultimo 2187. qui si addatur summæ inventæ 1093 procreabitur summa omnium 3280.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

xxxix. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione; quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri

Vnitas, A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ---- 262. H, 124. I, 248. F.---- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O---- P----

A, B, C, D, tot sumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo ut A, ad D, ita E, ad I; a Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F; ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; b ideoque I, ipsum F, metietur per A, nimirum; & ob hoc F, ipsius I, duplus

a 19. sept.
b 7. prop.

rit. *Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G,* a 35. noni.
secundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, aquales, sint q reliqui excessus M, N. a *Erit igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, aqualis ipsi E.* (*Cùm enim G, duplus sit ipsius E, ablatus q sit K, ipsi E, aqualis; erit & reliquus M, ipsi E, aqualis.*) *Ergo & N, aqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur aqualibus, nimirum numero L,* (*qui aqualis est ipsi E, ablatus*) *& numero composito ex unitate, & A, B, C, D, numeris;* (*qui compositus eidem E, per constructionem, est aqualis*) *erit compositus ex L N, nimirum ipse F, aqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cùm unitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, me-*

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G----- 62. H, 124. I, 248. F---- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O------- P----

tiantur ipsum F; (*Cùm enim F, factus sit ex E, in D;* b *metietur D,* a 17. pronun.
ipsum F; c *atque adeò eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, d qui ipsum D, metiuntur. Rursus cùm I, ipsum F, metiatur, ut* b 11. pronun.
ostensum est, c *metientur quoq; eundem F, numeri E, G, H, f qui ipsum* c 11. pronun.
I, propter proportionem duplam, metiuntur) *& nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus* d 21. pronun.
cùm aqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus. e 11. pronun.

QVOD autem nullus alius numerus, prater A, B, C, D, E, G, H, I, f 11. noni.
ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, g 9. pronũ.
alius numerus O, prater illos, ipsum F, per P: atque adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus h 19. sept.
fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium: h *ac* i 13. octa.
propterea est ut E ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus unitati primus, i
ultimum D, nullus alius, prater A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P: neque igitur E, ipsum P, metietur. Cùm ergo F, primus sit, k *erunt E, & P, inter se primi:* l *ideoque in* k 31. sept.
sua proportione minimi: m *Ac proinde aquè metietur E, ipsum O, &* l 23. sep.
P, ipsum D. n *Nullus verò alius prater A, B, C, ipsum D, metitur.* m 21. sept.
Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui n 32. octa.
B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur o 19. sept.
ex aquo, ut B, ad D, ita E, ad H: o *Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, aqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex*

P, in

P, in O, qui ex B, in H, atque adeò erit, ut P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diversus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. septim.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inveniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, juxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab unitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab unitate, exclusa unitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab unitate dupli, una cum ipsa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inventus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facilè ex subjectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1.2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. ultimum duplorum, perfectus, cujus partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 1. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1. 2. 4. & hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cujus partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inveniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosvis numeros diviso, erunt duo hi numeri Quotientibus converso ordine proportionales.

NVMERVS enim *A*, divisus per B, *C*, faciat Quotientes *D*, *E*, A, 48. B, 8. C, 3. *Dico* esse, ut B, ad *C*, ita *E*, ad D. Quoniam enim diviso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D. ut ad D, 6. E, 16. defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet

set ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primò in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: a erit ut B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum. a 19. sept.

II.

QVOLIBET numero per quotvis numeros diviso, erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus respondentibus converso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse ut B, ad C, ita G, ad F. Et ut C, ad D, ita H, ad G: Et ut D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato. Cùm enim duo B, C, dividentes A, faciant F, G, erit ut B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, dividentes A, faciant G, H: erit ut C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, dividentes A, faciant H, I: erit ut D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotvis numeros continuè proportionales diviso, erunt Quotientes converso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, ut D, ad E, ita I, ad H: Et ut C, ad D, hoc est, ut D, ad E, ita H, ad G: Et ut B, ad C, hoc est, ut C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G, 7 1/2. H, 3 3/4. I, 1 7/8.

IV.

SI sint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eisdem proportionibus; erit ut summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotvis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alii E, F,G, quorum ſumma H; ſitque ut A,ad B,ita E,ad F; & ut B, ad C,ita F,ab G. Dico eſſe,ut D, ad A, B,C, ſigillatim,ita H,ad E,F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit ut A,ad B, ita E, ad F; erit componendo,ut A, B, ſimulad B,ita E,F,ſimul ad F: Vt autem B, ad C,ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, ut A,B,ſimul,ad C,ita erit E F, ſimul ad G: Et componendo,ut A, B, C,ſimul,hoc eſt,ut D,ad C,ita E, F,G, ſimul,hoc eſt,H,ad G.

A. 3. B. 6. C. 20. D. 29.
E. 6. F. 12. G. 40. H. 58.

QVIA igitur eſt,ut D,ad C, ita H,ad G: Et convertendo, ut C, ad B,ita G,ad F; erit ex æquo,ut D,ad B,ita H,ad F.

DENIQVE quia eſt,ut D,ad B, ita H,ad F: Et convertendo,ut B, ad A,ita F,ad E; erit ex æquo,ut D,ad A, ita H,ad E. quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diviſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diviſa facit.

NAM, ut in 4. theor. oſtenſum eſt,eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde utriuſque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diviſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis: idem Quotiens omnino procreabitur,ſi utraque ſumma ſeorſum per primos numeros, quæque per ſuum,dividatur. Eademque ratio eſt,ſi per ſecundos,tertios, quartos,&c. diviſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim dividatur; & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine converſo.

SINT continuè proportionales quotvis numeri A,B,C, D, quorum ſumma E, per ipſos diviſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diviſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes,& illos eſſe eoſdem alternis,ordine converſo, hoc eſt, F,& O,eoſdem eſſe: Item G,& N: H,& M: I,& L,&c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G H,I, eandem continuam proportionem habent conversо ordine, quam numeri A, B,C,D. Et quotientes L,M,N,O, conversо ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema E, ad A, ut K, ad I. Quare cum ex divisione antecedentis

A,1.	B,2.	C,4.	D,8.	
		E,16.		
F,15.	G,7½.	H,3¾.	I,1⅞.	
		K,28⅛.		
L,1⅞.	M,3¾.	N,7½.	O,15.	

ermini per consequentem producatur denominator proportionis, iet idem Quotiens ex divisione E, per A, qui ex divisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F,& O, æquales erunt F,& O. Eadem ratione æquales erunt G,& N; H,& M; I,& L,&c. quod est propositum.

VII.

SI summa quotvis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim dividatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in ultimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in se.

SINT primum quotvis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B,C,D,E,F, quorum summa G, per ipsos sigillatim divisa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum summa O. Dico summæ O, æqualem esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K,L,M,N, sunt continuè proportionales conversо ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, ut I, ad H. Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. summa O, divisa per H,I,K,L,M,N, producit eosdem Quotientes conversо ordine, hoc est, summa O, divisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

A,1.	B,2.	C,4.	D,8.	E,16.	F,32	
		G, 63.				
H,63.	I,31½.	K,15¾.	K,7⅞.	M,3 1/16.	N,1 31/32.	
		O,124 1/32.				

a 19. sexti.

SINT deinde quotvis numeri multitudine impares continuè pro-

portionales A,B,C,D,E, quorum summa F, per ipsos sigillatim divisa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum summa M. Dico summam M, æqualem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, ut prius. Deinde verò quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt, & erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur, quod est propositum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
O, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, $60\frac{11}{16}$.

a 20. septim.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cujus latus, sive radix, est medius terminus.

ITAQVE si inveniendi sint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in ultimum gignitur, vel ex quibusvis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim dividatur; erunt Quotientes quæsiti numeri, ut ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotvis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cujus latus, sive radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumque summa per eos sigillatim dividenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, ut ex eodem hoc 7. theor liquet. Atque mirabile sanè est, posse reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in ultimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis: & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in se ipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex uno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumque summam per utrumq; dividat. Quorientes enim dabunt numeros quæsitos, ut ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in ultimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inveniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione unius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque summa 11. per utrumque dividatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$ & $2\frac{1}{5}$ sunt numeri quæsiti,

siti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{10}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum unius numerator sit unitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem & numerator C, sit unitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, ut est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim unitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, dividitur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot unitates sunt in A, ita ut quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. a Igitur eadem pars est unitas C, numeri A, quæ minutiæ C B, minutiæ A B; ac proinde est, ut unitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et convertendo, ita A, ad C, numeratorad numeratorem, ut minutia A B, ad minutiam C B, quod est propositum.

A, 6.	C, 1.
B, 11.	B, 11.

a 29. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, sive particulæ vel unitatis, vel alterius cujuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius unitatis esse accipiendas; propterea quod falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in unitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusvis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, ut exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $_1\frac{6}{7}$. & $_1\frac{7}{11}$. particulæ, verbi gratia, hujus numeri integri 44. Et quia ejus $_7\frac{1}{7}$. est 4. & $_{11}\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. ut est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. ut 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in universum de quibuscunque duabus minutiis ejusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat unitatem.

II.

NVMERATOR cujusvis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cujus est minutia.

SIT minutia quæcunque A.B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, ut est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cujus numerator C, unitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cujus numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita ut suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquivalet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum divisum est, ac proinde totum integrum contineat.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

a 31. hujus. a Quoniam igitur est, ut A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et ut C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo ut A ad D, hoc est, ut numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B, numerator A, unitas, ita ut minutia sit pars aliquota integri C, sive C, sit unitas, sive numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties unitas est in B, denominatore. Cum ergo & unitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, ut ad defin 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit unitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. b Quare erit, ut A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod est propositum.

A, 1. C, 1.
B, 5. C, 30.

b 20. defin.

DEINDE non sit unitas numerator A. Sumatur minutia D B, cujus numerator D, unitas & denominator idem B, qui minutiæ A B. c Et quia est ut A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et ut D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, ut proximè demonstravimus: erit ex æquo, ut A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.

c 1. hujus.

A, 3. D, 1. C, 1.
B, 5. B, 5. C, 30.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit hujus numeri integri 30. erit ejus $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. ubi vides ita esse 18. ad 10. ut est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT quælibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. d Quoniam enim est, ut A, ad B, nu-

d 2. hujus.

B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C, erit permutando, ut A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et convertendo, ut minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties unitas eſt in denominatore B,) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata: quod eſt propoſitum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR minutia ⅗. eſſe hujus integri 30. cujus ⅗. ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia ⅗. ſumitur reſpectu unitatis, numerator continet tres unitates, & denominator quinque,) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres unitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque unitates conficiunt 150. pars, inquâ, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat unitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet unitatem, demonſtratur hic de quibuſvis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, ut eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. *a* Quia enim eſt, ut A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam *b* cum ſit, ut C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit convertendo, ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B,) erit ex æquo, ut A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B, quod eſt propoſitum.

A, 6. C, 5.
B, 7. B, 7.

a 12. *hujus.*
b 2. *hujus.*

DATÆ minutiæ ⅔. ⅗. ſint hujus integri 28. cujus ⅔. ſunt 24. & ⅗. ſunt

& $\frac{3}{5}$. sunt 12. ubi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. ut est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris, in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, ut prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, ut est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, *a* erit ut A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, *b* ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, ut minutia A B, ad integrū, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; *c* erit ut C, ad D, ita G, ad H: Et convertendo, ut D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrū ad minutiam C D, (Nam *d* cum sit, ut C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit convertendo, ut D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque ut H, ad G, ita integrum ad minutiā C D. Ex æquo igitur erit, ut F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D, quod est propositum.

a 18. *sep.*
b 2. *hujus.*
c 18. *sep.*
d 2. *hujus.*

A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15. F, 10. G, 12.

F, A B. H, Integrum. G, C D.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ ejus, 20. at quatuor quintæ ejusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. ut 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si major, major; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum utra duarum minutiarum major sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum unus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem; alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum A B, C D, ut est H, ad summam numerorum F, G. a Quoniam enim est, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, ut summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H. (nam b ut minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D. c Et ut C, ad D, ita est G, ad H; propterea quod G, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, ut summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et convertendo; ut integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. ⋈ D, 4.
H, 15.

AB, CD, F, G,
CD, G.
Integrum. H.

a 5. *hujus.*
b 2. *hujus.*
c 18. *sup.*

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. particulæ numeri 30. cujus $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{3}{4}$ ejusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. ut est 15. ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit ut prior minutia a d posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, ut est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; d erit ut D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, e ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, ut C, ad B. quod est propositum.

D, 105. E, 35.
A, 5. A, 5.
B, 7. ⋈ C, 12.

d 17. *sept.*
e 5. *hujus.*

DVÆ minutiæ $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{1}$. sint particulæ numeri integri 42. cujus $\frac{5}{6}$. sunt 30. & $\frac{7}{1}$. ejusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. ut posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores can-

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. *a* Quoniam enim est, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et ut C ad D, ita minutia C D, ad idem integrum: ut autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia A B, ad integrum, ut minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D, quod est propositum.

a 2. hujus.

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

SED sint jam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse ut A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit ut minutia A B, ad integrum, ita minutiæ C D, ad idem integrum. *b* Est autem, ut minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, ut A, ad B, ita C, ad D, quod est propositum.

b 2. hujus.

DEINDE sit major proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico majorem esse minutiam A B, quam C D. *c* Cum enim sit, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum, & ut C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum, ponatur autem major proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque major proportio minutiæ A C, ad integrum, quam minutiæ C D, ad idem integrum. Major ergo est minutia A B, quam minutia C D, quod est propositum.

c 2. hujus.

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

VERVM sit jam minutia A B, major, quam minutia C D. Dico majorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim major proportio minutiæ A B, majoris ad integrum, quam minutiæ C D, minoris ad idem integrum. *d* Cum ergo sit, ut minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, quod est propositū.

d 2. hujus.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{12}$. integer numerus sit 24. cujus tam $\frac{3}{4}$ quam $\frac{2}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{12}$. At $\frac{3}{4}$. ejusdem numeri 24. sunt 16. ubi manifestum est numerum 18, majorē esse numero 16. ideoque minutiam $\frac{3}{4}$. majorem esse minutia $\frac{2}{12}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem nu-

tem numerator, majorem proportionem habet, illa major est: Et majoris numerator majorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, ut A, ad B, ita C, ad D: *a* ac proinde minutiæ æquales erunt, quod est propositum.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3. *a* 8. *hujus.*

SED sint jam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse, A, ad C, ut B, ad D, *b* Erit enim ut A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, ut A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.

b 8. *hujus*

DEINDE sit major proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, majorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, *c*. ac propterea major erit minutia A B, quam C D, quod est propositum.

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5. *c* 8. *hujus.*

VERVM sit jam minutia A B, major quam C D. Dico majorem proportionem esse A, ad C, quam B, ad D. *d* Erit enim major proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando major proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum.

d 8. *hujus.*

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{4}{9}$ partes integri numeri 90. ubi vides minutiam $\frac{6}{9}$ hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{4}{9}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. majorem esse minutia $\frac{4}{9}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diversarum denominationum ad alias duas ejusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D: & F, ex C, in B: & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; *e* erit ut A, ad B, ita E, ad G. *f* Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, *g* erit ut C, ad D. ita F, ad G. *h* Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

e 18. *sept.* *f* 8. *hujus.* *g* 18. *septim* *h* 9. *hujus.*

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam cujus denominator C. Sumatur unmerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, unitati A, æqualē esse: *a* Quia enim est, ut B, ad C, ita minutia B C ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, unitati, erit æqualis, quod est propositum.

B, 6. A, 1. C, 6.

a 2. *hujus.*

DEINDE sit integer numerus A, revocandus ad minutiam, cujus denominator C, E, ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, unitas D, ut fiat minutia A D, totunitatib. æqualis, quoties unitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, ut A, ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, *b* ipsæ inter se æquales erunt. Quare cum minutia A D, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est unitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, æqualis est propositum.

A, 7. B, 42. D, 1. C, 6.

b 8. *hujus.*

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A ut fiat numerator C, manente eodē denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, ut fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico utramque minutiam C B, A D, duplam esse minutiæ A B.

A, 3. B, 8. C, 6. B, 8. A, 3. D, 4.

c 4. *hujus.*

Cum enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem; *c* erit ut C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit, quod est propositum.

d 7. *hujus.*

RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem; *d* erit ut B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.

DEINDE dimidianda sit minutia A B. Dupletur denominator B, ut fiat denominator C, manente eodem numeratore A, Vel numerator A, quando par est, dimidietur, ut fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico utramque minutiam A C, D B, dimidium esse minutiæ A B.

A, 6. B, 11. A, 6, C, 22. D, 3. B, 11.

e 7. *hujus.*

Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; *e* erit ut B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutiæ

æ ad minutiam. Cum ergo ergo B, ſit per conſtructionem ipſius
, dimidium ; erit & minutiæ A C minutia A B , dimidium quod
t propoſitum.

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denomina-
orem, erit ut D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B. a 4. *hujus.*
minutia ad minutiam. Cum ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex con-
ſtructione ; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium , quod eſt
ropoſitum.

EODEM modo minutia data triplicabitur , quadruplicabitur,
cc. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem ma-
ente denominatore : vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris
ccipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi de-
ominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem nume-
atore, vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars , quarta,
&c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.

XIII.

**MINVTIA minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cu-
jus numerator ex multiplicatione mutua numeratorum,
denominator vero ex mutua denominatorum multipli-
catione procreatur.**

SIT enim A B, minutia minutiæ C D , reſpectu integri numeri
E, ſive unitatis E ; & valorem hujus minutiæ exprimat ſimplex
minutia K. Fiat F ex A, in C, & G, ex B in D. Dico datam minu-
tiam minutia æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri
E, cujus videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rur-
ſus H, ex G in B. *b* Et quoniam eſt ut A ad B, ita minutia A B, ad ſu- b 2. *hujus.*
um integrum nimirum ad minutiã C D, cujus integrum eſt F : *c* I- c 18. *ſe-*
tem ut A, ad B, ita eſt F ad H. quod A B, B ipſum C multiplicantes *ptim.*
faciant F H. Erit quoque ut minutia

A B ad minutiam C D, ita F ad H.	F, 6.	H, 9.	
Rurſus *d* quia eſt, ut C, ad D, ita mi-	A, 2.	C, 3.	E, 1.
nutia C D ad ſuum integrum E : *e*	B, 3.	D, 4.	E, 24.
Item ut C, ad D, ita eſt H, ad G, quod		G, 12.	K, 1/2.

d 2. *hujus*
e 17. *ſeptim*

B, ipſos C D , multiplicans fecerit H G, Erit quoq; ut C D, minutia ad ſuum integrũ E, ita H, ad G. Quo-
niam igitur eſt, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H : Et ut
minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo,
ut A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. A B. E.
Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, C D. H.
ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E ; quod E. G.
ſimplex minutia K , æqualis poſita ſit datæ minu-
tiæ A B , minutia C D ; cum ejus valorem reſpectu integri E,

exprimat. Igitur erit quoque ut F, ad G, ita minutia simplex K, ad
a 2. *hujus.* integrum E. *a* Cum ergo quoque sit, ut F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cujus integrum E, quod est propositum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiæ $\frac{3}{4}$ respectu integri 24. Hujus numeri $\frac{2}{3}$ sunt 18. & hujus numeri $\frac{3}{4}$ sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$; quæ huic $\frac{1}{2}$ æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

b 13. *hujus*

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D fiat F. *b* Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D, reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F, quod est propositum.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ità ut C D, sit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E, & K ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri ultimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cujus numerator, I & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12 K, 24.

c 13. *hujus* *c* Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tan-
d 13. *hujus* quam integri cujusdam. *d* Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D) minutiæ E F respectu integri, cujus E F, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris ultimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum, quod est propositum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Hujus numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & hujus numeri $\frac{3}{4}$ sunt 9. Hujus deniq; $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam qualem reducere, ita ut alterius numeri numeros hujus inventæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, et ex numeratore alterius hujus minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B ad aliam æqualem reducenda sit, cujus numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D productum: denominatorem vero denominator K, metiatur per numerum ex Ç, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in G, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & K, ex C in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per H, ex A, in D, productum, & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H. *a* erit ut A, ad B, ita G, ad H; *b* Ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit, F *c* metietur C, ipsum F per D: *d* Metietur autem & unitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ unitas ipsius D. Cum ergo unitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque Ç, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt q; numeratores, unitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; *e* constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu ejusdem integri G, cujus nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant unitatem, & denominatores numerum K, (quod numeratores sint unitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem ejusdem integri G, cujus numerator est unitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ Ç D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri C, pars erit ipsius integri C, à numero K, denominata. Quocirca numerus G, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties unitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L. numerū. Quod

G, 24.	K, 8.	
A, 2.	C, 3.	
B, 3.	F, 12.	D, 4.
H, 36.		L, 9.
C, $\frac{1}{4}$.	F, $\frac{1}{2}$.	M, $\frac{1}{8}$.

a 17. *septim.*
b 8. *hujus*
c 7. *pronū*
d 5. *pronum.*
e 13. *hujus*

est propos.

XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cujus vero numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum gignit illa major est. Et majoris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D, & ex A, in D fiat E, atque ex C in B, fiat F, sintque primum numeri E F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E factus ex A, primo in D, quartum æquales est numero F, facto ex

a 19. sept. E, 24. F, 24. C, secundo in B, tertium, a erit ut A, primus ad C,
A, 2. C, 8. secundum numerator ad numeratorem, ita B,
B, 3. ⋈ D 12. tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. b Quare minutiæ A B, C D, æquales

b 9. hujus. c 5. hujus. sunt. VEL sic. c Quoniam est ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis quod est propositum.

SED sint tam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum

d 9. hujus. e 19. septim f 5. hujus. d erit ut ut A, ad C, numerator ad numeratorem ita B ad D, denominator ad denominatorem. e Quapropter idē numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic f Quoniam est, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E F, æquales, quod est propositum.

DEINDE sit E numerus major numero F. Dico minutiam quoque A B, majorem esse minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, major quam F, gignetur F, ex

E, 24. F, 21. minore numero quam A, in D, numirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum,
G, 1¾ A, 2. C, 7.
B, 3. ⋈ D, 12. & ex G, secundo in B, tertium g erit ut

g 19. septim. G, primus ad C, secundum ita B, tertius ad D, quartum: Est autem major proportio A ad C, quam G, ad C, quod A, major sit quam G,

h 9. hujus. i 5. hujus. h Igitur major quoque erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, major erit, quam minutia C D. VEL sici. Quoniam est ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D, Est autem E, major quam F; erit quoque minutia A B, major quam minutia C D, Quod est propositum.

VERVM

VERVM sit jam minutia A B, major quam minutia C D. Dico & numerum E numero F, esse majorem. Cum enim major sit minutia A B, quam minutia C D, *a* erit major proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quã B, ad D, qui sit G. *b* Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, major fiat, quam ex C, in D, propterea quod B. major est quam G, erit quoq; B, factus ex A, in D, major quam F, ex C, in B genitus. VEL, sic. *c* Quoniam est, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E ad F. Est autem A B minutia major quam minutia C D, erit quoque E, maior quam F, quod est propositum.

a 9. *hujus.*
b 19. *septimi*
c 5. *hujus.*

ATQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, utra duarum minutiarum propositarum major sit. Id quod etiam ad 5 propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos revocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C D, ita ut minutia C D, minutia A B, sit æqualis. *d* Quoniam igitur est, ut A, ad B, ita C ad C, suntque C D, numeri minores numeris A B, non erunt A B, minimi termini in sua proportione: *e* sunt autem & minimi, cum primi inter se sint, quod est absurdum.

A, 1. C, —
B, 12. D, —

d 8. *hujus.*
e 13. *sept.*

SI vero A, B, non sint inter se primi; *f* sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; *g* producentur A B, ex C, in D, E. *h* Quare erit, ut A, ad B, ita D ad E, *i* ac propterea minutiæ A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 12.

f 2. *sept.*
g 8. *prænum.*
h 17. *sept.*
i 8. *hujus.*

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando fieri potest, revocare.

SIT data minutia A B, revocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cujus numerator E, & denominator C, datas, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Qui enim B, metitur D, per E, *a* fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. *b* Igitur erit, ut A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; *c* ideoque minutiæ A B, E C, æquales erunt, quod est propositum.

A, 3. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

a 9. pronun. *b* 19. septim. *c* 8. hujus.

QVOD si B, non metiatur D ex A, in C, procreatum, poterit data minutia *A* B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; *d* erit ut A, ad B, ita E, ad C. *e* Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. *f* Igitur B, metietur D per E, quod est absurdum. Ponitur enim ipsum D non metiri.

A, 3. E, —
B, 4. C, 10.
D, 30.

d 8. hujus. *e* 19. septim. *f* 7. pronun.

XIX.

QVANDO minor numerus per majorem dividitur, numerus Quotiens est minutia, cujus numerator est numerus minor divisus, denominator vero major numerus dividens.

SIT minor numerus A, dividendus per majorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cujus numerator A, & denominator *B*. *g* Quoniam enim est, ut A, ad B, numerus divisus ad dividentem, hoc est, ut numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad unitatem; erit ex defin. Divisionis minutia A B. Quotiens divisionis numeri A, per numerum B, quod est propositum.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

g 8. hujus.

HINC fit, si diviso numero integro majore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro invento addendam adhuc esse minutiam, cujus numerator sit numerus ex divisione reliquus; denominator vero, numerus dividens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero dividente, dividendus adhuc est per eundem numerum dividentem, qui major est. Verbi gratia Diviso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc dividenda per 4. *h* Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19. hujus.

XX.

MINVTIAS plures in unam summam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AE, CB, ejusdem denomina-

itionis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutiæ andem habent denominationem; *a* erit ut A, ad C, ita minutia a 4. *hujus*
B, ad minutiam CB. Et componendo,
it AC, simul ad C, ita minutiæ AB, CB, A,3 C,4 D,7
imul ad minutiam CB. *b* Vt autem C, ad B,10. B,10. B,10. b 4. *hujus*
), ita quoque est minutia CB, ad minuti-
m DB. Igitur ex æquo erit, ut AC, simul ad D, ita minutiæ AB,
B, simul ad minutiam DB. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint
ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.

DEINDE sint addendæ duæ minutiæ AB, CD, diversarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex
duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam EF, esse summam ex datis duabus minutiis AB, CD, collectam. *c* Quoniam enim est, ut integrum ad summam c 6. *hujus.*
duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit convertendo, ut summa minutiarum AB, d 2. *hujus.*
CD, ad integrum, ita E, ad F: *d* Vt autem E, ad E, ita quoque est minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, ut summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia, EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutiis AB, CD, collecta quod est propositum.

A,2 C,3 E,17.
B,2. D,4. F,12.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorũ in denomitores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ ejusdem denominationis, minutiis AB, CD, æquales, ut ex demonstratione propos. 10. constat: si summæ E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, cõmunis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF. summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum ejusdem denominationis, ad quas AB, CD, reductæ sunt, ut initio hujus propositionis demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutis; addendæ primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia conjungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absolvantur.

QVOD si dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{1}{7}$ & $\frac{2}{3}$. minutiæ hujus integri 60. cujus $\frac{1}{7}$. sunt 40. & $\frac{2}{3}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodū ex $\frac{1}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel & 1. insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{5}$. est $\frac{2}{2}\frac{1}{5}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{5}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12 at $\frac{4}{5}$. ejusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{5}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex majore detrahere.

EX majore minutia AB detrahenda sit minor CB, sintque primùm hæ minutiæ ejusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore majoris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse post detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur A, ex C & D. Minutia ergo AB, cujus numerator A, ex numeratoribus CD, collectus est, summa est duarum minutiarum CB, DB, ut in prima parte antecedentis propositum ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB, quod est propositum.

A, 7. / B, 10. C, 3. / B, 10. D, 4. / B, 10.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diversos denominatores detrahendaq; sit minor CD, ex majore AB. Ex C, numeratore minoris in B denominatorem majoris fiat E, & ex A, numerator majoris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat C, cui supponatur denominator ex mutua multitiplicatione denominatorum procreatus.

F, 13. E, 8.

A, 3 / B, 4. C, 2. / D, 5. C, 7. / F, 20.

Dico minutiam GH, esse reliquam post detractionem minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H, a erit ut A ad B, ita F, ad H: b ut autem A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque ut F ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H, c erit ut C ad D, ita E, ad H. d Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque ut E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est ut E primus ad H secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et ut G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia GH, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholii propos. 22. lib. 7. ut E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutiæ CD, GH, tertius

a 17. septim.
b 2. hujus.
c 19. sep.
d 3. hujus.
e 2. hujus.

tertius & ſextus numerus, ſimul, ad integrum. Vt autem E, G, ſimul: ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis. (Nam E, ex F, detractus reliquit G, (ad eundem H Igitur erit quoq;, ut F, ad H, ita minutiæ C D, G H ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit, ut eſt F, ad H, ita eſſe *minutia A B, ad integrum; erit quoque ut minutia A B, ad integrũ*, ita minutiæ C D, G H, ſimul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, ſimul. Detracta igitur *minutia C D, ex minutia A B*, reliqua erit *minutia G H, quod eſt* propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ ejuſdem denominationis *minutiis datis* æquales, ut ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat; ſi E factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio hujus propoſ. oſtenſum eſt.

IAM vero ſi dentur integra una cum minutiis, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quod ſi minutia detrahenda, major ſit quam ea, à qua fieri debet, ſubtractio, * reducenda prius erit unitas una numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint $6\frac{5}{7}$ ex $10\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{5}{7}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint $4\frac{5}{7}$ ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex una unitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{5}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{27}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{27}{28}$. *a 11. hujus*

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ hujus numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{3}{5}$ id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$ integri numeri 40. ut ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam G D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, *b* Eritque ut minutia E F, ad minutiã C D, ita C, ad H. Quia vero C, multiplicans AF, facit E H; *c* erit ut A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, ut A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit C, & F; erit

H, 60. G, 40.
A, 2. C, 4. E, 3.
B, 3. D, 5. F, 15.

b 5. hujus.

c 17. ſeq.

a 17 sup. A. G. a erit ut E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur
E. F. perturbata, ut hic apparet, erit ut A, ad B, ita G. ad
B. H. H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D : b Et ut A, ad B, ita est

b 2. hujus. minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoq; ut minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D, quod est propositum.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero unitas, ut fiat quasi minutia, cujus numerator est numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur ejusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quod unitas integro numero supposita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{5}$ per 5. fient $\frac{15}{5}$. ut hic apparet, $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{5}$.

c 11. hujus. SI vero integris minutiæ adhæreant, c revocanda erunt integra ad minutiam ejusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore hujus minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis unus' numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{3}{5}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{38}{5}$. $\frac{9}{2}$.

IAM ut multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, ut in additione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti; quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum ejus quadrato. Itaq; sint $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2}$. minutiæ hujus numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{27}{10}$. Necesse est ergo, ut $\frac{1}{5}$. numeri 60. in $\frac{9}{2}$. ejusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{27}{10}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{1}{5}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{9}{2}$. ejusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{27}{10}$. numeri 3000. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam dividere.

SIT dividenda minutia A B, per minutiam C D, & primum hujus numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ut

A, 12	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.

diviso A, per C, Quotiens sit E, & diviso B, per D, Quotiens fit F. Dico minutiam B F, esse Quotientem divisionis minutiæ A B,

AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; a gignetur A, ex C, in E, & E, ex D, in F. b Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, ut minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum sit, ut AB, minutia divisa ad CD, minutiam dividentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Divisionis minutia EF, Quotiens divisionis minutiæ AB, per minutiam CD, quod est propositum.

a 9. pronil.
b 22. hujus.

A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

DEINDE numeri CD, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB. c Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cujus numeros E, F, numeri CD, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex G, in D, procreatus ducatur in AB, ut gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G H, erit minutia G H, Quotiens divisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, ut initio hujus propos. demonstratum est, quod est propositum.

c 15. hujus.

E, 24.	A, 2.	K, 12.	C, 3.	G, 8.
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.
E, 90.	A, 6.	K, 15.	C, 3.	G, 30.
F, 135.	B, 9.		D, 5.	H, 27.

QVIA vero G H, numeri minutiæ Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, ut dictum est, satis est ad divisionem cujusvis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ dividentis, & C, numerator minutiæ dividentis in B, denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum est in omnibus minutiis, sive numeri minutiæ dividentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, sive non. Nam semper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ dividentis, & ex numeratore minutiæ dividentis in denominatorem minutiæ dividendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ dividentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia dividenda secundum doctrinam propos. 15. revocatur, ut ex ejus propos. demonstratione liquet, atq; in hoc apposito exemplo E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24. apparet, ubi numeri C, D, P, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18. numeri A, B, metiuntur per G H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex G, in D, iidem numeri CD, metiuntur per L, M: atque adeò tam minutia

tia G H, quam L M. Quotiens est minutiæ A B, per minutiam C D diuisæ.

IAM vero si numerus integer dividendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia dividenda supponenda est ei unitas, ut fiat quasi minutia, cujus numerator est datus numerus integer, & denominator 1: Vt si numerus 8. dividendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. ut in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. dividenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. ut in posteriori exemplo apparet.

8 / 1 / 16.
1. 2. 1.

1 / 8 / 1
2. 1. 16.

QVOD si minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam ejusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutæ diuidendæ in denominatorē minutæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ denominatorem autē ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam juvandam, loca numerorum minutiæ dividentis inter se permutare, ut in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis usurpare. Vt si dividenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$ per $\frac{7}{2}$. permutandi erunt numeri minutiæ dividentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. ut hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ dividendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ dividentis, juxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, ut fiat numerator, &c.

3 / 7 / 21
4. 2. 8.

SIT integer numerus 700. cujus minutia $\frac{3}{8}$. dividenda sit per ejusdem $\frac{7}{2}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est divisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{6}{8}$. id est minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inventa est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus dividatur per ejus dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inventus supra fuit, ex divisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINUTIAM in minutiam inferre.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inferenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam A B, unius particulæ minutiæ C D, ad minutiam C D: hoc est, addendas esse $\frac{1}{7}$. unius septimæ ad $\frac{6}{7}$.

F, 24.

A, 3. C, 6. G, 27
B, 4. D, 7. H, 28.

Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numeratur prioris, & composito nu-

me-

mero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe minutiæ A B, reſpectu unius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ C D, *a* reducitur ad ſimplicem minutiam A H, cujus numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D procreatus, ut in appoſito exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis eſt habens eundem denominatorẽ H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (cùm enim B, in C, D. faciat F H; *b* erit ut C, ad D, ita F, ad H; *c* ac propterea minutiæ B D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cujus numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum F H, A H, componitur, [nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A] denominator autem H idem qui earundem minutiarum F H A H: efficitur, inquam, minutiam C H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, ut initio propoſ. 29. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummã ex minutia A B, reſpectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H. collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſinuatione minutiæ A B, in minutiam C D: id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, unius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D ſimul, quod eſt propoſitum.

a 14. *hujus*

b 17. *ſeptim.*

c 8. *hujus.*

IAM vero ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inſerendæ, hoc eſt ſi minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, unius particulæ minutiæ G F, unius particulæ minutiæ G H: & minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex C numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorẽ penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator ejuſdem penultimę minutiæ E F, ut fiat numerus K. Deinde producto ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator ejuſdem minutiæ C D, ut fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adjiciatur A, numerator ejuſdem minutiæ A B, ut fiat P: atque ita deinceps ducatur ſemper ultimus numerus conflatus in denominatorẽ proxi-

A, 3.	1	A, 3.		
B, 4.	D, 7.	H, 28.		
P, 119.	M, 59.	K, 14.		
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.	
A, 1.	B, 2.	F, 3.	H, 5.	
Q, 120.	N, 60.	L, 15.		

proxime antecedentis minutiæ, productoq; numerator ejusdē proxime antecedentis minutiæ adjiciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui ultimo loco conflatus est, supponatur numerus Q ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, ut fiat L, deinde L, in D, ut fiat N, post hæc N, in B, ut fiat Q. &c. Dico minutiam P, Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem expossuimus. Nā ut in duabus minutiis ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam GH, hoc est, æqualis est summæ ex minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, *a* facit minutiam simplicem, cujus numerator C, (productus nimirum ex C, in unitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N. ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cujus numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, *b* æqualis est minutiæ K L; *c* quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionē habeant; quippe cum D, in K, L. gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cujus numerator M, ex numeratore C; & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cujus numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cujus numerator C ut denominator N, atque ex minutia, cujus numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, summæ collectæ ex minutia G H. & ex minutia E F, unius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, *d* facit minutiam simplicem, cujus numerator A, & denominator Q. ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque cujus numerator est numerus ex B, in M, procreatus; denominator vero idem numerus Q ex B, in N, productus, *e* æqualis est minutiæ M N, *f* quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cujus numerator P. ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cujus numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cujus numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, ut initio propos. 20. monstratum est; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B, unius

a 14. hujus

b 8. hujus.
c 17. sep.

d 14. hujus

e 8. hujus.
f 17. sep.

vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorē prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus AC, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: b Minutia quoque FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, factā F, H: Erit minutia GH, (quæ ex ijs, quæ ad initium propos. 20. ostendimus æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD, (hoc est, ex minutia FH,) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

E, 18. F, 24.

A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.

A. 3 C. 6 E, 18
B, 4. D, 7. H. 28.

b 8. huius.
c 17. septimi.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, suppo-

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L. 15.

natur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori sensu. Dico minutiam PQ, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam vt in duabus minutijs demonstratum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiarum EF, GH, id est, æqualis est summæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, & ex minutia GH. Deinde minutia CD, totius minutiæ EF, totius minutiæ GH, *a* facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus: *b* æqualis est minutiæ KL: *c* quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia MN, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ GH. Rursus minutia AE, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, *d* facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, siue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq; cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē est idē Q, ex B, in N, procreatus, *e* æqualis est minutiæ MN: *f* quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem: cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quē facit B, in M, cum æqualis sit, ex ijs, quæ initio prop. 20. demōstrata sunt, summæ collectæ ex minutia cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autē est idem Q; æqualis quoque erit summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF; minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 130. N, 60. L. 15.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. septimi.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. septimi.

DE

DE PROPORTIONVM *compositione.*

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquuum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit, defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest: quod pars esset vel æqualis, vel maior toto. Nã cũ hæc compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cum minore, siue minor cum maiore conferatur, vt ad def. 10. l. 5 ostẽdimus, si positis his tribus terminis cõtinue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. nõ solũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult def. 10. lib. 5. sed vere esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10, ad 100 æqualibus, vt Eucl. interpretes putant. quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 4. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, esset quoque pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4 ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16.

24.	48.	
12. 2.	3. 16.	

Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24 ad 48 compositam esse ex proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12, ad 3. & ex proportione 2 ad 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videl. subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes cõponentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harũ ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſub octupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48, reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quam totum, hoc eſt, quam proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiam ſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4 ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3, illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor aut pluribus terminis continue proportionalibus

bus, extremorũ proportio appelletur duplicata, *triplicata*, aut quadruplicata, &c. eius proportionis quam, primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex, ijs quæ iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum quælibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, supposita prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summã colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8, ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est.

3	✕	5	12	✕	40
1		5	4		8
8			256		
1			32		

Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{3}{4}$. & $1\frac{1}{2}$. quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quam 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{3}{4}$ reuocauimus ad $\frac{11}{4}$ & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligẽdum est.

18	✕	3	54	✕	6
7		2	21		4
57			342		
14			84		

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: ité ex proportione quadrupla sesquidecima quarta deducatur

proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla & dupla ſuperquadrupartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

8	3	256	12	57	3	342	4
1	1	32	4	14	2	84	4
5		40		72		864	
1.		128.		28		336	

TERTIO ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt per proportionem duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, produceturque ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1	1	4	5.	20	2	5.	10	6	10	60

QVARTO & vltimo ſi proportio ſextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionem ſeſquialteram: ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6.	864
1	3.	3.	20	12.	240	10	3.	30.	60	9.	540

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quod in proportionibus neceſſe non eſt, interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionum à nobis præſcriptã, quam auctores additionem falſo nuncupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit. conuenire, atque adeo compoſitionem illam Euclidis vere eſſe multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturque A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex conſequente vero B, in conſequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt ſi proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ dupli-

A, 6.	C, 12.		A, 3	C, 6			
B, 2.	D, 4.		B, 2.	D, 5.			
E, 72.	F, 8.		E, 18.	F, 10.			
G, 24.			G, 12.				

duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compositæ, ex sententia defin 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G, a erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus a 18 septimi. quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, b erit vt C. ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad b 17 septimi. F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multplicationem, quam tradidimus.

EADEM ratione ostenderimus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F, quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur, Dico proportionem E, ad F,

A. 9. C. 3.	A, 4. C, 6.
B, 1. D, 1.	B, 2. D, 3.
E. 9. F, 3.	D; 8. F, 12.
G, 27.	G, 24.

quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E, c 17 septimi. d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita d 17 sept. sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F.) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) demitur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Sploletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMUM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides iam tres antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarũ causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neque perfecte intelligi possunt, neq; cum res tulerit, in opus atq; vsum conferri; propterea quod plerumq; latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest; quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius lib. demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demõstrata, ita plan⁹ reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentiũ tamẽ librorũ demõstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorũ possũ sententiã ire, qui putãt ad eius intelligentiã esse necessariã eã partẽ Arithmetices, quæ de radicibus numerorũ tã rationalibus, quã irrationalibus, vt vocãt sermonẽ instituit: Imo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionẽ perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantũ abest,

abest, ut existimem, tractationem illam radicum requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, majore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad usum potest revocare, hic vero nullo modo. Hâc enim de causa & nos priora decẽ theoremata secundi lib. numeris accommodavimus, ut oblectationem animi majorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra utitur, usurpasti, ut ea res & majori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putavimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius effusuri, quam lucis aliquid majoris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adjumento, ac luce, quam his nostris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes hujus lib. ad numeros accommodare possunt per seipsos, quando volunt, præsertim cum jam hoc ipsum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQUE, ut ad institutum redeamus, inchoans rem psam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commẽsurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas lineas tam unius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidave commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cujusvis, & latus ejusdem quoniam nullam habent mensuram communẽ, ut pro-

positione ultima hujus lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq;, quanam ratione inveniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

Linearum rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cujusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura cõmunis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt ejusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, ut & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est secundum earum quadrata (est enim, ut ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cujusq; lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

Quod si quis roget, cur Euclides definierit seorsũ lineas potẽtia cõmensurabiles nõ autẽ cõmẽsurabiles longitudine, respõdendũ est, lineas lõgitudine cõmensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinũ, cũ hujusmodi lineas una communis mensura metiatur, ut dictum est: At vero quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, ut eæ propria definitione explicarentur.

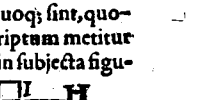
IV.

Incommensurabiles autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

Lineas reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

Habent autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi convenientiam inter se, & connexionẽ, ut li-

t lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensura-
iles potentia, ita ut nullæ lineæ dari possint commensurabiles lō-
itudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quo-
iam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur
anquam mensura communis earum quadrata, ut in subjecta figu-
a apparet: sicut enim recta AB, metitur re-
tas C D. E F. ita quoq; quadratū AG, qua-
lrata CH, EI, metitur: Non autē, ut omnes
ineæ potentia cōmensurabiles, sint etiā cō-



nēsurabiles longitudine; multæ enim lineæ sūt potētia cōmensura-
iles, hoc est, quadrata habēt cōmensurabilia, quæ tamē lōgitudine
mnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur:
Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam po-
entia, hujusmodi colligatio reperitur, ut omnes lineæ potentia
ncommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine;
Non autem contra, ut omnes lineæ longitudine incommensurabi-
es, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ
reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen
potentia, hoc est, secundum earum quadrata commensurabiles
existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9.
hujus libri.

V.

His positis, ostenditur cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potenti, aut hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam ejus verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

Linea autē illa proposita, ratione cujꝰ alię cōmensurabiles sunt, vel incōmensurabiles, dicitur Græcis ῥητή; Latinis vero Rationalis; quoniā ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa cōparatæ nō semper notæ sunt, quāvis singulæ seorsū sumptæ existāt certæ quoq;, ac notę; cū quęlibet in quotcūq; partes ęquales possit dividi.

VI.

ET huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoque Rationales, non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei cõmensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQUE ex sententia Euclidis, radix quadrata hujus numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cujus quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali; (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, ut 16. 100. &c.) quamvis longitudine, sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, *quod numero non possit exprimi.*

VII.

HUIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QUONIAM antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantũ sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt utroque modo, *longitudine* videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam hujus numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cujus quadratum est 20. vel 1000. &c. nõ posse appellari Irrationalem, cum nõ sit longitudine & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quæ certa ponitur ac nota Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesve dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensu-

mensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia, quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari juxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sunt, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita ut si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia: si vero non fuerint quadrata, sed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatiis incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: *longitudine & potentia, atque potentia tantum:* apponere fere semper vocibus istis: *commensurabiles ac incommensurabiles:* Vix autem, & rarissime his: *Rationales, & Irrationales:* Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusq;, sint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adjungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTULETUR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus ejusdem generis inæqualibus, cum major infinita non sit; minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet majorem. constat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum conferi ejusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, ut alteram excedat Atque ex hujus conditionis defectu angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diversi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNciata.

I.

MAGNITUDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITUDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITUDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

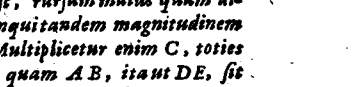
HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTE-

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propos. 13. diximus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus, ut docuimus ad initium primi libri: curavimus ut duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si unus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

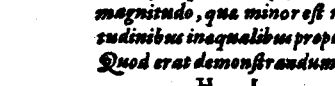
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DUABUS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ *sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinquetur tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur enim C, toties donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita ut DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam AB. Divisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales,* 

detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI, atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si DE, ipsius sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB; si ex DE, dimidium auferretur, nec non & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quam HB, auferturque ex FE; dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI: erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem, ipsius DE, qualis hic est GE, ma-

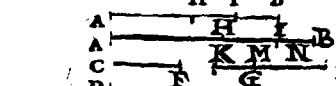
GE, majorem esse postremæ parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, major quam IB, postremæ pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, *si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, major reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum sit DB, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.*

ALITER. *Facta constructione, ut prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, ut est multiplex DE, ipsius C. Divisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH. major est quam HB, vel certe illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, major quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, major est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, major quam tota KL: Est autem DE, major adhuc, quam AB. Multo ergo major erit DE, quam KL. Quare cum sit ut DE, ad C, ita KL, ad IB; (sumpta enim fuit KL, ipsius IB. tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) erit quoque C, major quam IB. Ac proinde relicta est, IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.*

a 14. quinti.



SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione hujus Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem majorem possit superare. Id quod ad propos. 16. libr. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij. SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex majore CD, & reliqua hujus ex AB, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de majore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, qua vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta aut FAB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem ita ut AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta, FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita ut FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. a Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quadam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF. ablata major; quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quàm dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, major quã dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cùm semper auferatur majus, quàm dimidium, b relinquatur tandẽ magnitudo quadã minor quàm E.) Sit ergo jam relicta GB, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, metitur CF; c metietur quoq; E, ipsam CF: Metitur autem E, & totam CD. d Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG; e quare & E, ipsam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: f ergo E, reliquam etiam GB, metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. dec.
b 1. dec.
c 2. prop. num.
d 3. prop. num.
e 2. prop. num.
f 3. prop. num.

SCHOLIVM.

HOC Theorema convertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua sit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nũquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest metiatur FB, præcedentem ED, Quoniam igitur FB, metitur ED, & ED, metitur AF; g metietur quoque FB, ipsam AF. Metitur autem

g 2. prop.

autem & seipsam. a Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. b Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED; c Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, utramq; AB, ED, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.

a 1. pronun.
b 2. pronun.
c 1. pronun.

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

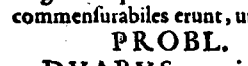
NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, ut demonstravit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de majore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramq; magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematis hujus scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri utramq; magnitudinem AB, CD. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstravit.

III. PROBL. I. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram invenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit ut si minor AB, ex majore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholii. Metiatur jam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinem AB, CD. Quod enim utramque metiatur, ita ostende-



mus.

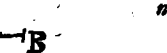
mm. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoq; FB, ipsam AF: At metitur FB, & seipsam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atq; adeò & ipsam CE, quam AB, metitur. Cùm ergo & ipsam ED, metiatur; d metietur quoq; FB, totam CD, Metitur ergo FB, utrãque AB, CD. Quare utriusq; AB, CD, communis mensura est FB.

a 2. pronun.
b 1. pronun.
c 2. pronun.
d 1. pronun.

QVOD autem FB, sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, major quàm FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, major quàm FB. Quia igitur G, metitur utramq; AB, CD; metitur autem & AB, ipsam CE, e metietur quoque G, ipsam CE: At metitur quoq; totam CD, f Igitur G, reliquam quoq; ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF. g Ergo & G, ipsam AF, metietur. Quare cùm G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. h Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm FB, communis mensura est ipsarum AB. CD. Quare FB. maxima earum communis mensura est.

e 2. pronun.
f 3. pronun.
g 2. pronun.
h 3. pronun.

QVOD si minor magnitudo AB. metiatur majorem CD, ita ut detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cùm & seipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus comm. ensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



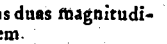
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

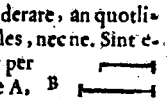
ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoq; maximam mensuram FB. Eademq; est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B. C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2 hujus lib. docuimus, an duæ A, & B. cõmensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A. B. C. esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A. & B.



SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inventa D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensurã D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; C, nõ erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesin.

SI verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. *a* Inventa enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B; *b* metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

a 3. *dec.*

b 2. *pronun.*

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, necne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

iiij. TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem invenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram invenire oporteat. c *Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inventa. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si major magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, major magnitudo minorem quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur qualibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. precedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles.* d *Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inventa. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A. B. C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B;* e *metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asserimus.*

c 3. *dec.*

d 3. *dec.*

e 2. *pro-*

QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, major quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. precedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. major magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo major magnitudo quàm E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communē.

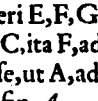
INFERTVR autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; D, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inveniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inveniēda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdē rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita G. ad H. Dico ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D. componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est cùm proportiones componentes proportionē A, ad D, æquales ponātur propottionibus, quæ proportionē E, ad H. cōpo-



nunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H, Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, ut in hoc exemplo apparet, in quo est, ut A, ad B, ita G, ad H; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIVM.

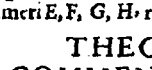
QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in aliis multis, utendum nobis erit; placuit illud hoc loco breviter demonstrare, cùm nonfacile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diversa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantùm est in quantitatibus ejusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lẽma transferri possit, cùm omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conveniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem inducant numerorum.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. *Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.* a *Sit enim earum maxima mensura inventa* C: *Et quoties ea repetita metitur* A, *toties unitas repetita metiatur numerum* D: *Et quoties eadem* C, *repetita metitur* B, *toties unitas repetita metiatur numerum* E. *Quoniam igitur magnitudo* C, *magnitudinem* A, *& unitas numerum* D, *aquè metitur; continebit aqualiter magnitudo* A, *magnitudinem* C, *atq; numerus* D, *unitatem. Quare erit ut* A, *ad* C, *ita numerus* D, *ad unitatem: Est autem & ut* C, *ad* B, *ita unitas ad numerum* E; *quod* C, *ipsam* B, *atq; unitas numerum* E, *aquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex aquo, ut* A, *magnitudo ad* B, *magnitudinem, ita* D, *numerus ad* E, *numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 3. dec.



SCHO-

SCHOLIVM.

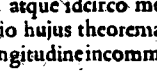
CVM Euclides ad demonstrationē hujus *theorematis* assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum, Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atque adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsisq; demonstratio hujus theorematis convenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communis mensuræ sunt expertes, ac propterea hujus theorematis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

EX *demonstratione* porrò ejusdem *hujus theorematis* liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B. libeat invenire, quam *proportionem* habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos unitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines A, & B. proportionem habent, quam numeri D, & E.

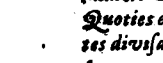
QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcunque communem earum mensuram, nihilominùs hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamvis enim numeri *D*, & E, majores inveniātur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex appositā figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inventi, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.



THEOR. 4. PROPOS. 6. VI.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT dua magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico AB, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero C, in tot aequales partes divisa intelligatur magnitudo A, quarum partium uni aqualis

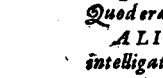


sit magnitudo E. Deinde quoties unitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties unitas in C, continebit aqualiter A, ipsam E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod E, ipsam F, & unitas ipsam D, aquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex aquo, ut A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut A, ad B. ita A, ad F, a ac propterea B, & F, magnitudines aquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsum F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, utramque A, & B, metitur: Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur dua magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

a 9. quinti.

b 1. def.

ALITER. Quod sunt unitates in C, in tot partes aquales intelligatur divisa magnitudo A, quarum partium uni aqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A, ita unitas ad C, quod E, ipsam A, & unitas ipsum D, aquè metiantur; ponaturque ut A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex aquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, commensurabiles sunt. Quod est propositum.



c 1. def.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via qua lineam rectam inveniamus, ad quam ita se habeat quævis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si invenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; dividenda erit linea A, in tot æquales partes, quot unitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium quot unitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inveniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si namque invenienda sit linea, ad cuius quadratum

ita

ta ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus
; ad numerum D, inuenienda erit primum linea F,
x iijs, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat
, vt C, ad D. Deinde accipienda inter A, & F, me-
dia proportionalis G. Etit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt a 13. *ſexti.*
C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continuè
proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt nu-
merus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D, ſic quadratum
ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque
deſcripta.

SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum. o.

SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. A
Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam B
numerus ad numerum; b erunt ipſæ commenſurabiles. b 6. *decimi.*
Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur
A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare
incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines. o.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam
numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe. Si enim

5. decimi, A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, qua numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non

habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est cõtra hypothesim. Non autem colligendũ est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5 huius lib. doquimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum, ad secundam.

Sint continuè proportionales tam quãtitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitque vt A, ad C,, ita D, ad F. Di-

co quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quãdoquidẽ eorũ proportiones duplicatæ æquales sunt.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si ta-

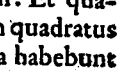
si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9.

(vii.)

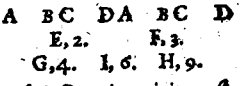
QVÆ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, *longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* CD, *proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ* AB, CD, *longitudine sunt commensurabiles;* a *erit* AB, *ad* CD, *ut numerus ad numerum. Sit ut* E, *numerus ad numerum* F; *quadrati autem ipsorum* E, & F, *sint* G, & H. *Quoniam igitur est* AB, *ad* CD, *ut* E, *numerus ad numerum* F: b *habet autem quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* CD. *duplicatam proportionem lateris* AB, *ad latus* CD: c *Item & numerus quadratus* G, *ad quadratum* H, *proportionem habet duplicatam lateris* E, *ad latus* F; *Erit proportio quadrati ex* AB, *ad quadratum ex* CD, *eadem, quæ numeri quadrati* G, *ad numerum quadratum* H; *quandoquidem amba ha proportiones, duplicata sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.*



a 5. decimi.
b 20. sexti.
c 11. octa.

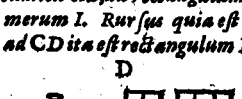
ALITER. Posita eadem constructione, continentur rectangulum BD, *sub rectis* AB, CD. *Et* E, F, *se mutuo multiplicantes faciant* I, *qui medius proportionalis erit inter quadratos* G, H, *ut constat ex demonstratione prop.* 11. *lib.* 8. *at* G, *adeo in proportione lateris* E, *ad latus* F, *ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est*



AB, ad

a 1. *sexti.* AB, *ad* CD, *vt* E. *ad* F. a *Vt autem* AB, *ad* CD, *ita est quadratum ex* AB, *ad rectangulum* BD, *ob eandem altitudinem* AB, *si* CD *ponatur basis rectanguli; Item vt* E, *ad* F *ita est* G, *ad* I: *Erit quoq; quadratum ex* AB, *ad rectangulum* BD, *vt quadratus numerus* G, *ad numerum* I. *Rursus quia est* AB, *ad* CD, *vt* E, *ad* F. b *Vt autem* AB, *ad* CD *ita est rectangulum* BD, *ad quadratum ex* CD, *ob eandem altitudinem* CD, *si* AB, *ponatur basis rectanguli; Item vt* E, *ad* F, *ita est* I, *ad* H: *Erit quoque rectangulum* BD, *ad quadratum ex* CD, *vt* I, *numerus ad numerum quadratum* H. *Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex* AB, *rectangulum* BD, *& quadratum ex* CD, *in eadem ratione continuæ sunt, in qua tres numeri* G, I, H. *Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* CD, *vt numerus quadratus* G, *ad numerum quadratum* H. *Quod est propositum.*

b 1. *sexti.*



SIT secundo quadratum ex AB, *ad quadratum ex* CD, *vt numerus quadratus* G, *ad numerum quadratum* H. *Dico rectas* AB, CD, *esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri* E, *&* F, *latera quadratorum numerorum* G, *&* H, *vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* BD, *vt quadratus numerus* G, *ad quadratum numerum* H: c *Habet autem quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* CD, *proportionem duplicatam lateris* AB, *ad latus* CD. d *Item & quadratus numerus* G, *ad quadratum numerum* H, *proportionem habet duplicatam lateris* E, *ad latus* F: *erit proportio lateris* AB, *ad latus* CD, *qua lateris* E, *ad latus* F; *quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum recta* AB, CD, *proportionem habeant, quam numeri* E, F, *ejusmodi commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.*

c 20. *sexti.*

d 11. *oct.*

e 6. *decim.*

f 1. *sexti.* *ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris.* f *Quia igitur est vt* AB, *ad* CD, *ita quadratum ex* AB, *ad rectangulum* BD; *Item vt* AB, *rursum ad* CD, *ita rectangulum* BD, *ad quadratum ex* CD, *vt supra diximus; erunt quadratum ex* AB, *rectangulum* BD, *& quadratum ex* CD, *continuè proportionalia in ratione lineæ* AB, *ad lineam* CD. *Sunt autem & numeri* G, I, H, *continuè proportionales in ratione numeri* E, *ad numerum* F, *vt supra ostendimus; ponaturque quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* CD, *vt quadratus numerus* G, *ad quadratum numerum* H. *Igitur erit per lemma præcedens* AB, *ad* CD, *vt* G, *ad* I, *hoc est, vt* E, *ad* F: g *ideoque* AB, CD, *rectæ proportionem habentes, quam numeri* E, F, *commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.*

g 6. *decimi.*

SINT

SINT tertio rectæ AB, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum, ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.

A ——————
B ——————

QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quod est absurdum, ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quã numerus ad numerum: ipsa commensurabilia erunt; *b* Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. *a 6. dec.* *b 3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas, potentia commensurabiles, non omnino, & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis. *c 3. def.* *d 6. decimi.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamẽ, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse, solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarũ

qua-

a 4. defin. b 8. decimi.

quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a potentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

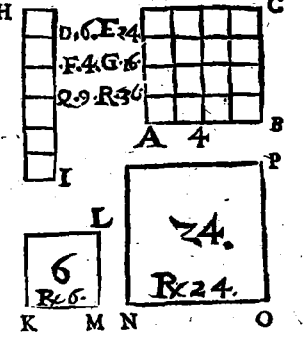
VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ; (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur. Deinde è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H,) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur

c 26. octaui,

rectan-

rectangulum HI, constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; *a* atque ipsi HI, a 14. *secti.* quadratum æquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per *di.* ea, quæ in coroll. propos. 8. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratū NP, ita se habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per constructionem; cōtinet autem quadratum KL, 6. mēsuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale AC: (constructum enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum NP, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erunt Rad. 6.



& Rad 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali AB, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterū subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. *b* Quare longitudine commensurabiles *b* 6. *decimi.* sunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eædem lineæ KM, NO, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.

RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus & G, ex 16) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q. R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q. R, cum alter ex 9: alter verò ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea cõferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadem quadrata KL, NP. considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q. R, continentur. Nam si recta K, M, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item si eædem lineæ secentur in partes tres, & sex habebunt earum quadrata mensuras quadratas, 9. & 36. quot nimirũ vnitates comprehẽdũtur in numeris quadratis Q. R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4 &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quæ describũtur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilib[9], licet interdũ longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, quãuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionẽ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato

Ratio-

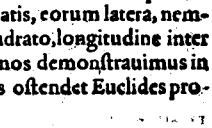
Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ rationali sint longitudine incommensurabilia. &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes medius cadat proportionalis; vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit: Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quator magnitudines A, B, C, D, *sitque* A *prima secunda* B *commensurabilis. Dico & tertiam* C, *quartæ* D, *commensurabilem esse. Quoniam enim* A, & B, *inter se commensurabiles sunt, habebit* A, *ad* B, *proportionem quam numerus ad numerum, nempe, quæ* E, *ad* F: *Ponitur autem vt* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D: *Igitur &* C, *ad* D, *proportionem habebit quam numerus* E, *ad numerum* F. b *Quare* C, & D, *cõmensurabiles inter se sunt.*



a 5. dec.

b 6. decimi.

SED sit iam A, *ipsi* B, *incommensurabilis. Dico &* C, *ipsi* D, *esse incommensurabilem. Quoniam enim* A, & B, *incommensurabiles sunt, non habebit* A, *ad* B, *proportionem quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D. *Igitur nec* C, *ad* D, *proportionem habet quam numerus ad numerum. Quare* C, & D, *incommensurabiles sunt inter se. Si quator ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.*

c 7. dec.

d 8. decimi.

SCHOLIVM.

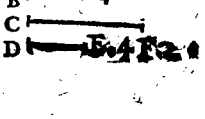
QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia

tia quartæ longitudin commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio prop. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est
a 9. def. potentia ipsi B, a erunt earum quadrata commensurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. c Est
b 5. decimi. autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex
c 22. sexti. C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã
d 6. decimi. numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt; e Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia
e 3. def. tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectę A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostẽdimus: Igitur potentia tantum sunt cõmensurabiles. Quod est propositum.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum, incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; eruntipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex ijs, quæ in scholio propos. 5 huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; f atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, sine potentia



f 6. decimi.

entia cõmenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. *a* Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum. *a* 8. *dec.*

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores verò duæ lineæ, demonſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine cõmenſurabiles eſſe vel incommenſurabiles. Si enim plana ſolidaue commenſurabilia ſint, *b* habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipſis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum. *b* 5. *dec. mi.*

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus. A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quã numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus. A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad

quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, quæ dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR *quatuor numeri* A, B, C, D, *ita vt non sit sicut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D; *& fiat ex* A, B, *numerus* E; *&* *ex* C, D, *numerus* F. *Perspicuum igitur est* E, F *numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.*

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC est est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius, qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. xj.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITÆ *rectæ lineæ* inuenire duas rectas lineneas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, *cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri* B, *&* C, *proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea* D, *ad cuius quadratum sic se habeat*

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

quadratum ex A, *vt numerus* B, *ad numerum* C. *Dico* C, *esse ipsi* A *incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim* A, *&* D, *longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex* A, *ad quadratum ex* D, *vt numerus* B, *ad numerum* C; *non est autem proportio* B. *ad* C, *qua numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex* A, *ad quadratum ex* D, *proportionem habebit quam numerus quadra-*

tus

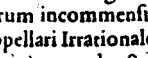
tus ad numerum quadratum. Igitur a recta A, & D, longitudine in- a 9. decim.
commensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudini sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, b ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt. b 6. da mi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. c Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare recta A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E ipsi A, incommensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum. c 13. sexti. d 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuræ cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquidò constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint cõtinuè proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autem recta D, rectæ A, incommensurabilis longitudine, e Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos 9. huius lib.



e 10. decimi.

IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedēti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

xij. viij.

QVÆ eidem magnitudini sint commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A,B *magnitudini* C, *commensurabilis. Dico &* A, B, *inter se esse commensurabiles. Cum enim* A, *&* C, *sint commensurabiles,* a *habebit* A, *ad* C, *proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus* D, *ad numerum* E. *Rursus quia* C, B, *cōmensurabiles sunt, habebit quoque* C, *ad* B, *proportionē, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus* F, *ad numerum* G, b *sumanturq; tres numeri* H, I, K, *minimi deinceps proportionales in proportionibus* D, *ad* E, *&* F, *ad* G; *sitque* H, *ad* I, *vt* D, *ad* E,

A ——— D, 10. E, 8. *hoc est, vt* A, *ad* C: *&* I, *ad* K, *vt* F, *ad*
C ——— F, 2. G, 3. G, *hoc est, vt* C, *ad* B. *Quoniam igitur*
B ——— H, 5. I, 4. K, 6. *est* A, *ad* B, *vt* H, *ad* I, *&* C, *ad* B, *vt* I, *ad* K; *erit ex æquo* A, *ad* B, *vt* H, *ad* K, *numerus ad numerum. Quare* A, B, *proportionem habentes, quam numeri* H, K, c *inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 5. dec.

b 4 oct.

c 6. dec.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se lōgitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine comensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia cōmensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. e Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad

d 5. dec.

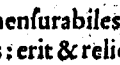
e 4. oct.

umerum K. *f* Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, *f* 6. *dec*
atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex
hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt
enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet v-
traque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis;
quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles,
potentia verò tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas
quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demon-
strabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera ve-ro sit vni cuipiam commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sit-que A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, ei-dem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

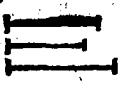


QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensura-biles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitu-dine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue poten-tia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, ei-dem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquā B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitu-dine, at verò B, potentia tantutum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. o.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidē sit cō-mensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommē-surabiles erunt magnitudines.

SINT *duæ magnitudines* A, & B, *quarum* A, *sit ipsi* C, *com-mensurabilis, &* B, *eidem* C, *incommensurabilis. Dico* A, *&* B, *in-ter se incommensurabiles esse. Si enim* B, *dicatur esse commensu-*



a 12. decimi.

rabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles, quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, b oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.

b 12. decimi.

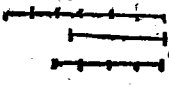
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

xiij. viij.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; c erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



c 21. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoque ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, cõmenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue

siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, *a* essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim A, ipsi C. longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, cõmensurabiles sint potentia tantùm, & A, ipsi C. potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; *b* & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B. potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

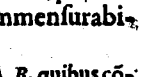
a 12. decimi.

b 12. decimi.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus cõmensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, cõmensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B. incommensurabilis; *c* erit quoq; reliqua C, eidem B, *incommensurabilis*. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incõmensurabilis; *d* erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



c 14. decimi.

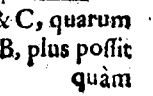
d 14. decimi.

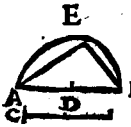
SI autem magnitudines A, B. C, D. sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmensurabiles. Si verò A, & B. incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamẽ quia hic brevius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile judicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B, & C, quarum A B, major, oporteatque invenire, quo A B, plus possit





31. quarti. quàm C. Divisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & intervallo DA, vel DB, semicirculus AEB, *a* in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quàm C, quadrato b 31. tertii. rectæ EB. *b* Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus c 47. primi. sit; *c* erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque id circo AB, plus poterit quàm AE, hoc est, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter.

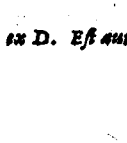
DVABVS datis rectis lineis sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta d 47. primi. AB, *d* quippe cùm quadratum ex AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.

xiv. xiij. THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quàm B, secunda quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quàm D, quartæ, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudini ipsi C: Si verò E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est ut A, ad B, ita C, ad D,



c 22. sexti. *ceriteque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E. per hypo-*

hypotheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, *ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et dividendo, ut quadratum ex* E, *ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D;* a *Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; convertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, ut in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.* a 22. ſexti.

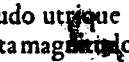
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantùm commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantùm ipſi C, eſſe commenſurabilem, ut conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. hujus lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. XV. IX.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum commenſurabilis fuerit: & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR dua magnitudines commenſurabiles AB, *BC. Dico totam quoque magnitudinem* AC, *utrique ipſarum* AB, BC, *commenſurabilem eſſe.* b *Sit enim ipſarum* AB, BC, *communis menſura* D. *Quoniam igitur* D, *ipſas* AB, BC, *metitur, & metietur quoque* D, *totam* AC, *ex ipſis compoſitam. Cùm ergo* D, *metiatur* AC, & A; *erunt* AC, AB, *commenſurabiles: Similiter cùm* D, *metiatur* AC, & BC; *erunt & AB,* BC, *commenſurabiles; Ac propterea* AC, *utrique ipſarum* AB, BC, *commenſurabilis erit.* b 3. decimi. c 1. prænun.



SED jam tota AC, *ex* AB, BC, *compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum* AB, BC, *nempe ipſi AB. Dico & AB,* BC, *inter ſe commenſurabiles eſſe.* d *Sit enim* D, *communis menſura ipſarum* AC, AB. *Quoniam igitur* D, *metitur totam* AC, & *ablatam* AB; e *metietur quoque* D, *reliquam* BC. *Quare cùm* D, *metiatur* AB, BC; *commenſurabiles erunt* AB, BC, *inter ſe. Eodem argumento oſtendemus* AB, BC, *eſſe commenſurabiles, ſi* AC, *ipſi* BC, *fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.* d 3. decimi. e 2. prænun.

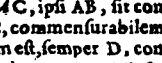
COROL-

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cùm metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles AC, BC. Quod est propositum.

xv]. THEOR. 14. PROPOS. 17.

ix. SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est utriquæ incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB,

a 3. dec. *sitque D communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur*

b 3. prænun. *D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cùm D, metiatur utramque AB, BC, erunt AB, BC commensurabiles. Quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademque ratione neq; ipsi BC, commensurabilis est.*

SED jam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit uni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoq; AB,

c 10. decimi. *BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, c erit quoque tota AC, utrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendū.*

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse, nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoq; AC. ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum,

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollariis, si de linea agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem cōmunis mensura D, &c. quam quidem solùm lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

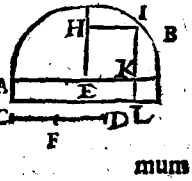
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstravimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

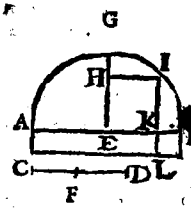
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolvi possit ex propos. 28. lib. 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiā maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, ut vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidē applicatū est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamvis, inquam, absolvi hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cū aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AC, CD, quarum AB, maior sit, oporteatq; ad AB, applicare parallogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & intervallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quàm tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est, EG. ipsi AE, æqualis, maior quàm CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturq; IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis est inter AK, KB, ut in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; *a* erit rectangulum sub AK, KB, hoc est, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; *b* (est enim KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum) EI, hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quòd quadratum ex CD, per scholium propos. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum, deficiensq; quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.

a 17. *sexti.*

b 34. *primi.*

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulũ sub partibus contentũ, æquale sit dato rectilineo, quod tamẽ maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptũ.

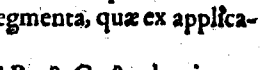
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunq; cui æquale ponatur quadratum ex CF, non majus quàm quadratum ex dimidia AE, ita ut latus CF, non majus sit latere AE. Educta ergò ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, ut priùs, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atq; adeò & recti-

rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse majus, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si majus esset, esset quoque recta CF, major quàm recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad majorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita ut DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammũ applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse. Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia;



cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB. deficiensq; figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB, sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum; atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

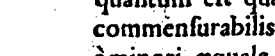
HOC facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, ut partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cùm AB, in E, secta sit bi-

sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvii. xiij. **THEOR. 15. PROPOS. 18.**

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub AD, DB, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propos. AD, major est, quàm DB; dividatur AB, bifariam in E, & ipsi ED, æqualis sumatur EF. Quo facto, cùm tota EA, EB, æquales sint, & ablata quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF. BD. æquales.



a *5. secundi.* *Et quia recta AB, divisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadratum rectanguli sub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB, Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quarto parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale est quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cùm FD, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB, quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia sunt quadrato ex AB:*

AB: Ac proinde recta AB, plus potest quàm recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur cõmensurabiles: a erit quoque totaAB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cùm utraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB: b erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm AB, composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. hujus lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quàm C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.

a 16. decimi.

b 12. decimi.

SED jam AB, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quarta parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quàm C, quadrato rectæ FD. Quare cùm AB, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm utraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis compositæ ex AF, DB; c erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeò cùm tota AB, composita ex AD, DB, longitudine sit commensurabilis ipsi DB; d erunt ipsæ AD, BD, d 16. decimi. longitudine quoque inter se cõmensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

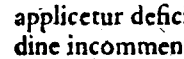
c 12. decimi.

THEOR. 16. PROPOS. 19. xviij. xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum

est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si major tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, *quarum major* A B, *quarta autem parti quadrati ex* C, *minore descripti applicetur ad* A B, *per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in rectâ* A B, *partes* A D, D B, *longitudine incommensurabiles. Dico* A B, *plus posse quàm* C, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ suprà constructis, similiter ostendemus* A B, *plus posse quàm* C, *quadrato rectæ* F D. *Hanc igitur demonstrare oportet ipsi* A, *longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ* A D. D B, *ponuntur longitudine incommensurabiles;* a *erit quæ-*



a 17. decimi. *quetota* A B, *parti* D B, *longitudine incommensurabilis. Sed* D B, *longitudine cõmensurabilis est composita ex* D B, A F, *cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium* D B, *& quæ componitur ex* D B, A F, *ipsa* D B, *longitudine sit incommensurabilis rectæ* A B: b *erit quoque reliqua composita ex* D B, A F,

b 14. decimi. *eidem* A B, *longitudine incommensurabilis:* Ac *propterea cùm* A B, *composita ex* A F, D B, *tanquam una, & ex* F D, *incommensurabilis sit longitudine compositæ ex* A F. D B, *erit eadem* A B, *per coroll. propos. 17. huius lib. & reliqua* F D, *longitudine incommensurabilis. Ergo* A B, *plus potest quàm* C, *quadrato rectæ* E D, *longitudine sibi incommensurabilis.*

IAM *verò* A B, *plus possit quàm* C, *quadrato lineæ longitudine sibi incõmensurabilis; & quartæ parti quadrati ex* C, *æquale parallelogrammum applicetur ad* A B, *deficiens figura quadrata, faciatque in rectâ* A B. *partes* A D, D B. *Dico & rectas* A D, D B, *esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus, ut prius, rectam* A B, *plus posse quàm* C, *quadrato rectæ* F D. *Quare cùm* A B, *ponatur plus posse, quàm* C, *quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit* A B, *ipsi* F D, *incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota* A B, *composita ex* F D, *& ex* A F, D B, *tanquam una longitudine incommensurabilis sit ipsi* F D; *erit eadem* A B, *per coroll. propos. 17. hùjus lib. & reliqua composita ex* A F, D B, *longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex* A F, D B, *ipsi* D B, *longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe*

qua

quæ ex AF, DB, *componitur, &* DB, *ipsa composita ex* AF, DB, *longitudine incommensurabilis sit rectæ* AB, a *erit & reliqua* DB, a 14. *decimi.* *eidem* AB, *longitudine incommensurabilis: Ac proinde cùm tota* *cimi.* AB, *composita ex* AD, DB, *incommensurabilis sit ipsi* DB, *longitudine*; b *erunt & ipsæ* AD, DB, *longitudine inter se incommen-* b 17. *desurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quarta cimi. autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit lõgitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommẽsurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensura-

biles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solùm sunt cõmensurabiles: dicũtur ipsa quoq; Rationales, potentia solùm inter se commensuabiles.

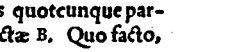
SCHOLIVM.

ITAQVE *ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei utraq; est commensurabilis. Aut denique utraque expositæ Rationali cõmensurabilis est solùm potentia. Hæc autẽ tria genera inveniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A, divisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt* A in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta una partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties unitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, *componuntur ex partibus multitudine æqualibus quæ quidẽ magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cùm habeant D, communem mensuram Inventæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine cõmensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum una nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.*

IAM verò D. metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita ut utraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur ut prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles Quare C, E, Rationali *A*, longitudine commensurabiles Rationales sunt. Cùm ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inventæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine cõmensurabiles, & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ.

a 11. *dec.* POSTREMO expositæ Rationali *A*, *a* inveniatur recta *B*, longitudine tantùm incommensurabilis, quæ fecetur in quotcunque partes

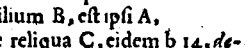
partes æquales, & sumatur C, composita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solùm esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeò & potentia; a Igitur quadrata rectarum *A*, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; b erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solùm potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inventæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia verò tantùm commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.



a 12. *decimi.*

b 14. *decimi.*

QVOD si quis optet invenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quavis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles facilè hoc modo demonstrabimus. c Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; d quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse.

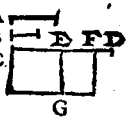
c 6. *defin.*

d 12. *sexti.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & *B*. Dico esse ut A, ad *B*, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensũ.



Ex quãtacũq; enim linea recta CD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturq; rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & B, a quoniam igitur eſt ut CE, ad EF, hoc eſt, ut A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, ut quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.

a 1. ſexti.

EODEM modo erit, ut B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, b erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cùm commenſurabilia ſint ipſi B, c inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripta commenſurabile, d Rationale eſt. Quod erat demonſtrandũ.

A B C

b 9. def.

c 12. decimi.

d 6. def.

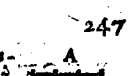
xix.
xv.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorum, (hoc eſt, ſecundum aliquid trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita ut vel altera ipſarum BC, CD, Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei utraque commenſurabilis ſit aut longi-

longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm:



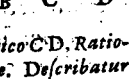
a erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, commensurabile: b Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. c Igitur & BE, illi cõmensurabile, Rationale est. Quia verò BC, hoc est, EC, & CD, longitudine cõmensurabiles sunt, (ponuntur enim BC, CD. Rationales inter se longitudine commensurabiles,) d & est ut EC, ad CD, ita EB, ad BD; e erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 1. antecedentis propos. BD, Rationali BE, commensurabile; Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. def.
b 8. def.
c 9. def.
d 1. sexti.
e 10. decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 21. XX. XVI.

SI Rationale ad Rationalem applicetur latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, sive BC, æqualis sit Rationali expositæ A, sive non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, f ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expositæ A, descripto; g Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: h Est autem ut BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine; i sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, ut in scholio propos. 12. huius lib. demonstravimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

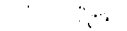


f 9. def.
g 12. decimi.
h 1. sexti.
i 6. def.

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A,



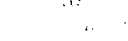
Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, ut in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt, quod eſt abſurdum. Ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles invenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tãtùm inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis



a 11. decimi.

lineas ita inveniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, *a* inveniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inventa ſit potentia tantùm ineõmenſurabilis ipſi B, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolùm commenſurabiles. Inventæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte

b 11. decimi.

reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis *b* inveniatur B; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

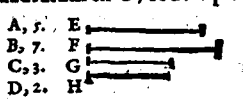
Quòd

Quòd enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; *a* erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles. *a* 6. *def.*

SCHOLIVM.

QVOD si inueniendæ sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratũ ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim



Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D,) *b* erunt ipsa, inter se commensurabilia; ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. *c* Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum. *b* 6. *dec.* *c* 9. *decimi.*

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis

commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A,B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C,D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C,D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse & ipsis A,B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B,F, proportionem habentia, quam numeri D,E, a commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cū E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex ijs, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) b erunt rectæ B,F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & E, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstravimus de numeris D, & E,) erunt A,F, longitudine incommensurabiles, &c.

A C, 10.
B D 6.
F E, 7.

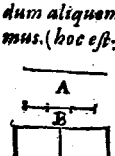
a 6. decimi.

b 9. decimi.

XXI. THEOR. 19. PROPOS. 22.

XIX. QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT expositæ Rationalis A, & rectangulum BD, *contentum sub Rationalibus* BC, CD, *potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non) Dico rectangulum* BD, *esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi* BD, *æquale est, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex* BC, *quadratum* BE, *quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus.* c *Et quoniam est vt* EC, *hoc est,* BC, *ad* CD, *vt* BE, *ad* BD: *Est autem* BC, *ipsi* CD, *longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex ijs, quæ in scholio propos.*



c 1. sexti.

propoſ.10. huius lib. tradidimus, BE, *ipſi* BD, *incommenſurabile.* a *Quare cum* BE, *commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita* A, *ſit autem* BE, *ipſi* BD, *incommenſurabile*; b *erit quoque quadratum ex Rationali expoſita* A. *eidem* BD, *incommenſurabile*; *Ac propterea* BD, *quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens.* c *Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum* BD, *Irrationalis eſt, ex* 1 *lemmate propoſ. antecedentis.*

a 9. *def.* b 14. *decimi.* c 10. *def.*

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, *Media* d *propterea quod media proportionalis eſt inter duas* BC, CD, *Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo* BD, *ſub ipſis* BC, CD, *comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.*

d 17. *ſexti.*

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Media vocabitur. e Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus: ſi dicamus eam eſſe lineã Irrationalẽ, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.

e 17. *ſexti.*

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non ſolum recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continuè proportionales, quales ſunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio prop. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum medium proportionale eſt inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari poteſt.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ commenſurabilibus, quale eſt Medium BD. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatiũ Mediũ contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe

Medijs

Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

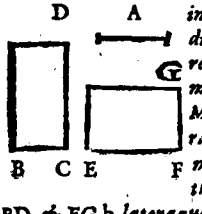
VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

xxij. xx.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum a *applicetur que ad* BC, *rectangulum* BD, *æquale quadrato ex media* A, *vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem* CD. *Dico* CD, *Rationalem esse, & ipsi* B C, *longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est, ipsa poteris rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter se cõmẽsurabilibus contentũ, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum* EG, *sub rationalibus* EF, FG, *potentia tantum commensurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum* BD, *æqualia erunt* b *14. sexti.* BD, & EG, b *lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angu-*



a 45. pri.

angulos, nempe erit vt BC, *ad* EF, *ita* FG, *ad* CD; a *Ac propterea* a 22. *sexti.*
quoque vt quadratum ex BC, *ad quadratum ex* EF, *ita quadratum ex* FG, *ad quadratum ex* CD: *Sed quadratum ex* BC, *commensurabile est quadrato ex* EF, (*quod rectæ* BC, EF, *ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum*) *Igitur* b *& quadratum ex* FG, *commensurabile erit quadrato ex* CD: *propterea quæ & rectæ* FG, CD, b 10. *decimi.*
commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum FG, *Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est expositæ Rationalis; erit quoque* CD, *expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos.* 12. *huius lib. atque adeo* CD, *ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi* BC. *Quoniam enim* EF, FG, *Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt* EF, *ad* FG, *ita quadratum ex* EF, *ad rectangulum* EG, *sub* EF, FG, *contentum, ex lemmate* 3. *propos.* 19. *huius lib.* c *erit quadratum ex* EF, c 10. *decimi.*
incommensurabile rectangulo EG, *atque adeo rectangulo* BD, *quod huic æquale est. Atqui quadratum ex* EF, *commensurabile est quadrato ex* CD. (*quod* EF, CD, *Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles*) *Igitur cum quadratum ex* CD, *commensurabile sit quadrato ex* EF, *at rectangulum* BD, *eidem quadrato ex* EF, *incommensurabile*; d *incommensurabilia erunt quadratum* d 13. *decimi.*
ex CD, *& rectangulum* BD. *Est autem ex lemmate* 3. *propos.* 19. *huius lib. quadratum ex* CD, *ad rectangulum* BD, *vt recta* CD, *ad rectam* BC. e *Incommensurabiles ergo sunt longitudine* CD, *&* BC. e 10. *decimi.*
Rationalis ergo est CD, *& Rationali* BC, *longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad *BC*, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, *f* sumatur tertia f 11. *sexti.*
proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; *g* erit rectangulum *BD*, sub extremis BC, CD, conten- g 17. *sexti.*
tum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestū est, omne mediū, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commēsurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rect-

angu-

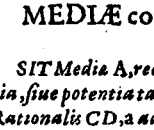
angulum hoc applicatum Medio æquale. Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

xxiiij. THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commensurabilis, Media est.

SIT Media A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis CD, a ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; b erit CE, Rationalis ipsi CD, longitudine incommensurabilis. Rursus ad CD Rationalem c applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia recta A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia DE, DF, commensurabilia. d Est autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. e Igitur EC, CF, longitudine sunt commensurabiles: Sed EC, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi CD, incommensurabilis. f Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali exposite CD, sit commensurabilis; (Nam cum EC, CF, sint longitudine ostensa commensurabiles, & EC, ipsi CD, commensurabilis saltē potentia, quod Rationalis sit; erit & CF, eidem CD, commensurabilis potentia ex ijs, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commensurabiles, g Ac proinde recta B, potens rectangulum DE, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, Media est. Media igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

a 45. primi.



b 23. decimi.

c 45. primi.

d 1. sexti.

e 10 decimi.

f 14. decimi.

g 22. decimi.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est DF, commensurabile esse Medio DE, ostensum ex eo mox fuit DF, esse quoque Medium, nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium DF, spatio Medio DE, commensurabile. Dico & DF, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum DE, Medium. (Nam cum DE, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipsum DF. Quoniam igitur DE, DF, commensurabilia sunt, erunt quoq; quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia,

bilia. Quare A,B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

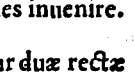
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine cõmensurabilem, dici Mediam, & ipsi cõmensurabilẽ, nõ solũ lõgitudine sed & potẽtia. Vniuerse enim quæ lõgitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt cõmensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommẽsurabilis, dicetur & sic media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniãtur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; *a* erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.



a 24. decimi.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

THEOR.

xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, *sub Medijs* AC, CD, *longitudine commensurabilibus. Dico* AD, *medium esse. Describatur ex* CD, *Media quadratum* BD, *quod erit Medium.* a *Et quoniam est*

a 1. *sexti.*

vt AC, *ad* CB, *ita* AD, *ad* DB: *Sunt autem* AC, CB, *hoc est*, AC, CD, *longitudine commensurabiles; erunt* AD, DB, *commensurabilia. Quare spatium* AD, *Medio* DB, *commensurabile, Medium est, ex coroll. precedentis prop. Quod ergo sub Medijs longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.*

xxv. xxiij.

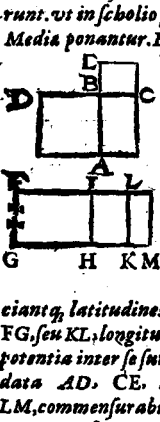
THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, *comprehensum sub Mediis* AB, BC, *potentia tantum commensurabilibus. Dico* AC, *esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex* AB, BC, *quadrata* AD, CE, *quæ Media erunt. vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus, cum recta* AB, BC,

b 45. *primi.*

Media ponantur. Exponatur Rationalis FG, b *ad quam applicetur*



FH, quadrato AD, *ex* AB, *descripto æquale; & ad HI, rectangulum IL, rectangulo* AC, *æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato* CE, *ex* BC, *descripto; erit quæ totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum pro. prop. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero* AD, CE, *Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationalem* FG, KL, (*c est enim & KL, Rationali* FG, *æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationali*) *fa-*

c 34. *primi.*

d 23. *decimi.*

cient q. latitudines GH, KM, d *erunt rectæ* GH, KM, *Rationales ipsi* FG, *seu* KL, *longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ* AB, BC, *potentia inter se sunt commensurabiles, erunt, erunt & earum quadrata* AD, CE, *atque adeo & ipsis æqualia rectangula* FH, LM, *commensurabilia:* e *Vt autem* FH, *ad* LM, *ita est recta* GH,

e 1. *sexti.*

f 10. *decimi.*

ad KM. f *Igitur* GH, KM, *longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare* GH, KM, *Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero* FG, *solum commensu-*

mensurabiles potentia: cum ei ostensa sint longitudine incommensurabiles; a *Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, ipsis AB, BE, sint aequales, vtraque vtrique)* b *& vt DB. ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; vt AD, ad AC, ita AC, ad CE, atq; adeo AD, AC, CE. proportionalia sūt. Igitur & illis aequalia FH, HL, LM, proportionalia erunt:* c *Habent autem rectae GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM, Igitur & rectae GH, HK, KM. proportionales sunt;* d *propterea & rectangulum sub GH, KM. quadrato ex HK, aequale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HL, Rationalis erit:* e *& ob hoc ipsi FG, Rationali expositae, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et siquidem HK, ipsi HI, longitudine sit commensurabilis, & rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK. longitudine commensurabilibus contentum, hoc est,* f *AC, illi aequale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi HI, potentia solum commensurabilis sit,* g *erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi aequale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus contentum vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Mediis potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.*

a 20. *decimi.*
b 1. *sexti.*
c 1. *sexti.*
d 17. *sexti.*
e 6. *defin.*
f 20. *decimi.*
g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale. *h* Si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK. *i* Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub mediis AB, BC.

h 12. *sexti.*
i 16. *sexti.*

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 28. quanam ratione inueniendæ sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Prop. verò 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, *k* rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale; *l* Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Medium & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis

k 20. *decimi.*
l 22. *decimi.*

a 25. decimi. constat *a* rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; *b* Rectangulum autem sub
b 26. decimi. duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale vel Medium.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus *Medijs* longitudine & potentia incõmensurabilibus continetur; Respondemus illlud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incõmensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM, incommensurabilia *c* Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM. *d* Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; *e* Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media *f* Potest autem rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK; (Nam vt prius ostendemus, tres GH, HK, KM, esse porportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationale non est: si enim Rationale esset, *g* faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, medium est; si enim esset Medium, *h* faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinẽ HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem quod est absurdum. ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque AC, illi æquale, Rationale erit, neque medium, sed tertiũm quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media continetur cum HI, Rationalis sit, & HK, ostẽsa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum.

c 1. sexti.
d 10. decimi.
e 22. decimi.
f 17. sexti.
g 21. decimi.
h 23. dec.

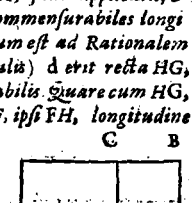
Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvi. xxij.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET *Medium* AB, *Medium* AC, *rectangulo* DB *Dico* DB, *non esse Rationale. Sit enim si fieri potest*, DB, *Rationale. Exposita ergo Rationali linea* EF, *a ad ipsam applicetur rectangulum* EG, *Medio* AB, *æquale*; *& Medio* AC, *rectangulum* EH, *æquale, vt sit reliquum* HI, *Rationali* DB, *æquale. Erunt igitur* EG, EH, *æqualia Mediis* AB, AC, *Media*; *& HI, æquale Rationali* DB, *Rationale. Quoniam ergo Media* EG, EH, *ad Rationalem* EF, *sunt applicata*, b *erunt rectæ* FG, FH, *Rationales, & ipsi* EF, *incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale* HI, *applicatum est ad Rationalem* c HK, (*cest enim recta* HK, *Rationali* EF, *æqualis*) d *erit recta* HG, *Rationalis, & ipsi* EF, *longitudine commensurabilis. Quare cum* HG, EF, *longitudine sint commensurabiles*; *& EF, ipsi* FH, *longitudine incommensurabilis, vt est ostensum*; e *erit & HG, eidem* FH, *longitudine incommensurabilis. Est autem vt* FH, *ad* HG, *ita quadratum ex* FH, *ad rectangulum sub* FH, HG, *ex tertio lemmate propos. 19. huius lib.* f *Igitur quadratum ex* FH, *incommensurabile est rectangulo sub* FH, HG. *Sed quadrato ex* FH, *commensurabile est quadratum ex* HG, (*quod sint ambo ex lineis Rationalibus* FH, HG, *descripta*) g *atque adeo & duo quadrata ex* FH, HG, *simul, quadrato ex* FH, *commensurabilia sunt: Et rectangulo sub* FH, HG, *commensurabile est id, quod bis continetur sub* FH, HG, (*quia hoc illius est duplum*) *Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex* FH, HG *simul incommensurabilia sunt rectangulo sub* FH, HG, *bis* h *Quare & compositum ex quadratis rectarum* FH, HG, *& ex rectangulo bis sub* FH, HG, *incommensurabile est composito ex quadratis rectarum* FH, HG, i *At quadratis ex* FH, HG, *una cum rectangulo bis sub* FH, HG, k *quale est quadratum ex* FG. *Igitur & quadratum* FG, *incommensurabile est composito ex quadratis rectarum* FH, HG: *Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex* FH. *Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex* FG, k *erit quadratum ex* FG, *Irrationale*, l *ac propterea & recta* FG, *Irrationalis erit. Quod est absurdum. ostensa enim est*, FG, *Rationalis longitudine ipsi* EF, *incommensurabilis. Non ergo* DB, *quo Medium* AB, *superat Medium* AC, *Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.*



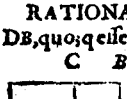
a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. dec.
f 10. dec.
g 16. decimi.
h 17. dec.
i 4. secundi.
k 10. def.
l 12. def.

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoq; esse Rationale. Quoniã enim AB. AC, Rationalia sunt; a erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; b atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC. erit quoque idem AB, reliquæ DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.



a 9. *defin.*
b 12. *dec.*

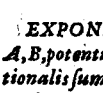
PROBL. 4. PROPOS. 28.

xxvii.

o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2 prop. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, c inter quas media proportionalis sumatur C, d fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; e erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo f cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, sunt que A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia. vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Est ergo & D, Media C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoque B, media proportionalis inter C, & D, h potest rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratũ ex B. linea Rationali. Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.



c 13. *sexti.*
d 12. *sexti.*
e 22. *dec.*
f 17. *sexti.*
g 24. *dec.*
h 17. *sexti.*

PROBL. 5. PROPOS. 29.

xxviij.

o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

EXPONANTVR per ea, qua in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles a & inter A, B, media proportionalis inuenitur D. b Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse potentia tantum commensurabiles, qua Medium contineant. Quoniam enim AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles: erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, c quod illi aquale est, d Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; Erunt quoque DE, potentia solùm commensurabiles vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, e erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Medie sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. f Rectangulum igitur sub DE aquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus, potètia solum commensurabilibus gũrrati n:le, & Mediũ. Igitur & rectangulum sub D, E, Mediume st. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. sexti.
b 12. sexti.
c 17. sexti.
d 22. dec.
e 24. dec.
f 16. sexti.
g 22. dec.

A
D
B
C
E

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quando quidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6,	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

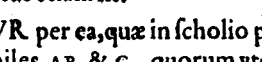
QVONIAM autem in lib. 9. *h* ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorũ vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani. si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alter um vero imparem, &c.

h 28. & 29. noni.

LEMMA. I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIATVR per ea, quæ in scholio proximo dicta
a 24. & 26. noni. sunt duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar.a Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariam in E:



Dico numerum factũ
b 2. noni. ex AB, in BD, b qui quidem quadratus est, cõpositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB: erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur, quod est propositum.

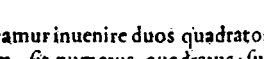
COROLLARIVM.

EX his manifestũ est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE,
c 3. noni. ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non est quadratus. Si enim quadratus esset, c numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum ponuntur enim non similes.

SCHOLIVM. II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nã quadrati numeri ex BE, ED, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratũ ex ED, numero qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus



est.

SI

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nã A...E...D.....B
similiter ostendemus quadratum C.....
ex BE, æqualem esse quadrato ex
DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus, (si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes AB. & C. pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem constructio, ita
A..H..I.E.F.G...D.....B
C.....
vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, æqualis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius ma-

ius latere BF. Erit ergo latus ipsius vel æquale numero BE, vel maius, (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vni-

A..H..I. E. F. G ... D.....B tas ipsa secetur:
C.....

Esset autē dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, æqualis reliquo quadrato ex DE; Ideoque & latus DF, lateri DE, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, æquale est numero BE. Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero BI, qui maior sit, quam BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore: maior est quadrato ex BE. latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum ex alter AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Est autem quadrato ex BE, ostensus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se, maius est latere BE. Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille cōpositus maior est quadrato ex BF.

SIT

SIT iam si fieri potest, A..H..I.E.F.G...D.....B numerus qui fit ex AB, in C.....
BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus unitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (divisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ unitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam dividitur. Quare ex 6. theorem. eorũ, quæ ad prop. 14. lib. 9. demonstravimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidẽ quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, unà cũ quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundẽ BD, producant æquales numeros; *a* habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. *a* 12. *septimi.*

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita ut qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, dividetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, unà cũ quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, unà cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF,

& DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

A..H..I.E.F.G...D.....B C.....

SCHOLIVM III.

EX hoc facilè inveniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inveniãtur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadraum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos, divisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix. xvij.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inveniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos 6. huius lib. fiat ut CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AE, accommodetur $\square$ *AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB.* a *Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo;* b *erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc est, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, ut numerus CD, ad numerum DE,* c *erunt quadrata ex AB, AF; commensurabilia; atque adeò cum quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB; descriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea que & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF, atque adeò commensurabiles saltem potentia. Quia verò quadratum*

a 31. tertii.
b 47. primi.
c 6. decimi.

dratũ ex AB, ad quadratũ ex AF, proportionẽ nõ habet, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; (cùm neque quadratus numerus CD, *ad non quadratũ* DE, *proportionẽ habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & DE, quadratus esset,* a *ut in Arithmeticis* a 74. oct.
est demonstratum, quod non ponitur) b *erunt rectæ* AB, AF, *longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur* AB, AF, *Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.* b 9. decimi

IAM *verò, quoniam est ut* CD, *ad* DE, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* AF; *erit per conversionem rationis, ut quadratus numerus* CD, *ad quadratum numerum* CE, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* FB, *(sicut enim* CD, *superat* DE, *quadrato* CE, *ita etiam quadratum ex* AB, *superat quadratum ex* AF, *quadrato ex* FB.) c *Quare rectæ* AB, FB, *longitudine commensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales* AB, AF, *potentia tantùm commensurabiles, ita ut major* AB, *plus possit, quàm minor* AF, *quadrato lineæ* FB, *sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.* c 9. decimi.

PROBL. 7. PROPOS. 31. xxx. xviij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR *Rationalis linea* AB, *inveniantur*q; *per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati* CE, ED, *ita ut ex illis compositus* CD, *non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus* CD, *secetur in duos numeros non quadratos* CE, ED: *Vtrumvis enim horum fiat, totus* CD, *ad neutrum ipsorum* CE, ED, *proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundum priorem modum, esset totus* CD, *etiam quadratus: juxta posteriorem verò, quilibet ipsorum* CE, ED, *quadratus quoque,* d *ut in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut* CD, *ad* DE, *ita quadratum ex* AB, *ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex* AF; *accommodeturque* AF, *in semicirculo* AFB, *circa* AB, *descripto. Denique connectatur recta* FB. *Poterit igitur, ut in præcedenti,* AB, *plus quàm* AF, *quadrato rectæ* FB; *Eruntque* AB, AF, *Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti*

d 24. octa. vi.

propos.

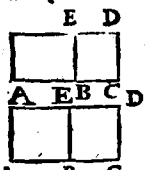
C. 144. E. 16. C. 160. D.
C..... E..... D.

propos. Quoniam verò rursus, ut prius, est per conversionem rationis, ut CD. *ad* CE, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* FB; *Non habet autem* CD, *ad* CE, *proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* FB, *proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* a *Quare recta* AB, FB, *longitudine incommensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales* AB, AF, *potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior* AB, *plus possit quàm minor* AF, *quadrato lineæ* FB, *sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.*

a 9. decimi.

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, ut AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD: eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quòd BE, ipsi BC, sit æqualis; *b* perspicuum autem est, esse ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

b 1. sexti.

EODEM modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quàm BC.

xxxj. xxiv. xxv.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

c 30. decimi.

c REPERTÆ *sint duæ Rationales* A. B. *potentia tantùm commensurabiles: ita ut* A, *major plus possit quàm* B, *minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque* C, *media proportionalis inter* A, *&* B; *& fiat ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D. *Quoniam igitur* AB, *sunt Rationales potentia solùm commensurabiles;* a *erit rectan-*

a 22. decimi.

rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. b *Quare D, Media C, commensurabilis, Media quoque est. Inventa ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; ut C, ad B, ita B, ad D;* c *Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B. Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione;* d *poterit quoque C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Invenimus igitur duas Medias, C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.*

A
C
B
D

b 24. decimi.

c 17. sexti

d 15. decimi.

QVOD si reperta sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut A, plus possit quàm B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autẽ fiant, ut prius, ostendemus eodem modo, inventas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac faciliùs idem sine ipso ostendimus, ut facilè judicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immò rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hîc ostendimus, ac in propos. 28. hujus libri.

LEMMA

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse ut AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad re-

ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiatur; rectangulum AF, Eritq; AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD, quòd
21. sexti. BE, CD, ipsi BC, æquales sint. a Perspicuum autem est esse AB, ad CD, ut AE, ad CF. Quod est propositum.

xxxij. xxxvj.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inventæ tres Rationales A, B, C, *potentia tantùm commensurabiles, itaut* A, *plus possit quàm* C, *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.* (*Hoc autem fiet in hunc modum.*
b 30. decimi. b *Repertis duabus Rationalibus* A, C, *potentia tantùm commensurabilibus, itaut* A, *plus possit quàm* C, *quadratæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; inveniatur alia* B, *utrique* A, & C, *potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstravimus*) c *Et ipsarum* A, B, *sumatur media proportionalis* D; d *fiatque ut* D, *ad* B, *ita*

c 13. sexti. d 12. sexti. C, *ad* E. *Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut* A, *ad* C, *ita rectangulum sub* A, B, *ad rectangulum sub* B, C; e *Est autem*
e 17. sexti. f 16. sexti. *rectangulo sub* A, B, *æquale quadratum ex* D, f & *rectangulo sub* B, C, *æquale rectangulum sub* D, E, *quòd proportionales sint* D, B, C, E: *Erit quoque ut* A, *ad* C, *ita quadratum ex* D, *ad rectangulum sub* D, E: *Sed ut quadratum ex* D, *ad rectangulum sub* D, E, *ita est per lemma* 3 *propos.* 19. *huius lib. recta* D, *ad rectã* E. *Igitur erit ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* E: *Sunt autem* A, C, *potentia solùm commensurabiles. Ergo* & D, E, *potentia solùm commensurabiles*
g 22. decimi. *sunt, ut in scholio propos.* 10. *huius lib. ostendimus.* g *Quia verò* D, *potens spatium sub* A, B, *Rationalibus potentia tantùm*
h 24. decimi. *commensurabilibus, Irrationalis est, &* Media; h *erit quoque* E; *ipsi ostensa commensurabilis Media. Inventa ergo sunt duæ Mediæ* D, E, *potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectan-*
i 22. decimi. *gulo sub* B, C, i *quod Medium est, (quòd* B, C, *sint Rationales potentia tantùm commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub* D, E; *erit rectangulum sub* D, E, *Medium. Denique quia ostendimus esse ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* E; *potest autem* A, *plus quàm* C, *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione;*
k 15. decimi. k *poterit etiam* D, *plus quàm* E, *quadrato lineæ longitudine sibi*

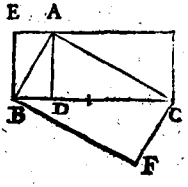
commen-

commensurabilis. Invenimus ergo duas Medias D, E, *potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior* D, *plus possit quàm minor* E, *quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.*

QVOD si reperta fuerint A, B, C, *Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut* A, *plus possit quàm* C, *quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inventas esse duas Medias* D, E, *potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior* D, *plus possit quàm minor* E, *quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere potest ex adducta demonstratione.*

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC, & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum deniq; sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.



QVONIAM ex coroll. prop. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CD, BD; *a* erit rectangulũ sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale. a 17. *sexti.*

EADEM ratione erit rectangulũ sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idẽ coroll. AC. media proportionalis est inter BC. CD.

RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulũ sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, *b* quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD. b 8. *sexti.*

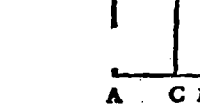
c Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum sub BC, AD; Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentũ. *d* Quoniam igitur rectangulũ CE, duplũ est trianguli ABC, nec nõ & rectãgulum c 16. *sexti.* d 41. *primi.*

gulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF, quod est propositum.

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales; erit ut maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitq; maior pars AC. Dico esse ut AC, ad CB, ita rectangulũ sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB. quadratum ADBE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritque AF, contentum sub AB, AC, & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. *a* Quoniam igitur est ut AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.



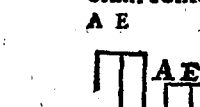
a 1. sexti.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB. BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, seceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum sub AB. BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, sub AB, BC: ducaturque DE, ipsi AB, parallela, eritque BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. *b* Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quòd & basis BC, dupla sit basis BD, constat propositum.



b 1. sexti.

EODEM modo si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod

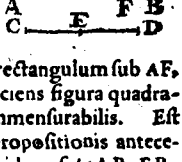
quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore, & BD, dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.

a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solùm commensurabiles, ita ut major AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur que CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. hujus lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem ut AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. ejusdem antecedentis propositionis; c quod angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit ut AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles; d erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, g æquale est quadrato ex FG, (propterea quòd angulus AGB, rectus est & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia: ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG.



a 31. decimi.

b 19. decimi.

c 31. tertii.

d 10. decimi.

e 4. def.

f 47. primi.

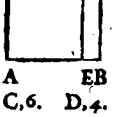
g 17 sexti.

a 22. decimi. FG, (cum FG, dimidia sit minoris CD.) a Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est, Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit ejus dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. hujus lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulũ sub AG, GB. Contentum igitur sub AG; GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inventæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, *& duo numeri* C, D, *quorum* C, *major sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiat quæ ut* C, *ad* D, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* AE; *& tandem descripto quadrato ex* AB, *educatur* EF, *ad* AB, *perpendicularis. Quoniam igitur est ut* C, *ad* D, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* AE: *Non habet autem* C, *ad* D, *proportionem, quam quadratus ad quadratum;*



b 9. decimi C, 6. D, 4. b *erunt latera* AB, AE, *dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm* AB, *tota longitudine sit incommensurabilis parti* AE, *erit eadem* AB, *& reliqua* EB, *longitudine incommensurabilis,*

c 1. sexti. d 10. decimi. *ex coroll. propos. 17. huius lib.* c *Vt autem* AB, *ad* AE, *ita est quadratum ex* AB, *ad* AF. *Igitur cùm* AB, AE, *incommensurabiles sint longitudine,* d *erunt quadratum ex* AB, *& rectangulum* AF, *incommensurabilia. Quare quadrato ex* AB, *existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit* AF, *dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodẽq; argumento ostendemus* BF, *Irrationale esse. Quia verò* AF, BF, *componunt quadratum Rationale ex* AB; *perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*

AT verò si AF, FB, *Rationalia sint, ostendemus & totum* AFB, *ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim utrumq; quæ* AF, FB,

e 16. decimi. *Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia.* e *Igitur & totum* AFB, *ex ipsis compositum utrique eorum commensurabile erit.*

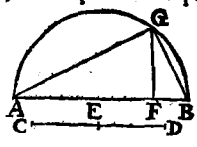
f 9. def. *Quare* AFB, *totum commensurabile utrique Rationali* AF, FB, f *Rationale quoque est. Quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut major AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratũ ex Media AB, *b* æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. hujus lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inventæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium. Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



c 32. decimi.

b 47. primi.

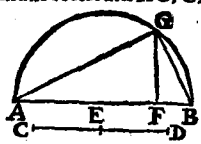
PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

c REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse.

c 33. decimi.

a 47. primi les esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, a & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus ut in 34. demonstrabimus, rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium



sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB, quod illi per 1. lemma propos. 33. hujus lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Quoniam verò AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quòd illa hujus sit dupla;

b 13. decimi, b erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed ut AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. hujus lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG: hoc est, sub AG, GB, (sunt enim rectangulum sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. hujus lib. æqualia.)

c 10. decimi. c Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inventæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque linea potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Media incommensurabiles tam longitudine, quàm potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia, quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inventæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles, Quod est propositum.

PRIN-

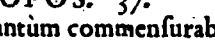
PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solùm commensurabiles, inventæ per 2. lemma propos. 21. hujus lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim *AB*, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & ut *AB*, ad BC, ita est rectangulum sub *AB*, BC, ad quadratum ex *B* C, per lemma propos. 31. *hujus* lib. *a erit rectangulum* sub *AB*, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectangulo sub *AB*, BC,



a 10. decimi.

commensurabile est ejus duplum, nempe quod bis sub *AB*, BC, continetur; & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ *AB*; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atq; adeò & compositum ex quadratis rectarum *AB*, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. ostendimus, & quod bis sub *AB*, BC, continetur, incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum *AB*, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub *AB*, *BC*, & ex composito quadratorum rectarum *AB*, *BC*, hoc est, quadratum ex tota *AC*, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, BC, unà cum rectangulo sub *AB*, BC, bis) compositò ex quadratis rectarum A *B*, *BC*, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum *AB*, BC, Rationale, quòd commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex *AC*, quadrato Rationali ex *BC*, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeò & recta ipsa *AC*, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alii loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis *AB*, BC, potentia solùm commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.

b 16. decimi.

c 4. secundi.

d 17. decimi.

e 10. def.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, f *Irrationalis est, quæ Media vocatur. At verò compositæ ex ipsis*, g *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

f 22. decimi.

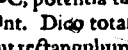
g 37. decimi.

xxxvij. xxxj.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

a 28. decimi. COMPONANTVR duæ mediæ *a* superiùs inventæ *AB*, *BC*, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad *BC*, ut rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex B C, ut in lemmate propos. 31. hujus lib. est ostensum; sunt autem A B, B C, longitudine incommensurabiles; *b* erunt rectangulum sub AB, B C, & quadratum ex B C, incommensurabilia: Sed rectangulo sub *AB*, BC, commensurabile est, quod sub A B, B C, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cùm AB, B C, potentia sint commensurabiles, c 16. decimi. erunt ipsarum quadrata commensurabilia. *c* atq; adeò & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum A B, B C, unà cum rectangulo bis sub A B, d 4. secundi. *BC*, hoc est, quadratum ex AC, *d* quod huic composito æquale, est, *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub *AB*, *BC*, bis: Est e 17. decimi. autem eidem rectangulo bis sub *A B*, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, B C, cùm hoc sit illius dimidium. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub *AB*, *BC*: Ponitur autem rectangulum sub *A* B, *B* C, Rationale, *g* Irrationale ergo est quadratum ex *AC*, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



b 10. decimi.

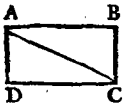
f 13. decimi.

g 10. defin.

h 11. defin.

LEMMA

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



CONTINEATVR rectangulum *ABCD*, sub Rationali AB, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, *i* faciet ipsum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod est absurdum, ponitur enim

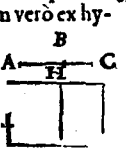
21. decimi.

ium BC, Irrationalis. Non argo AC, Rationale est.
gitur Irrationale. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles omponantur, quæ Medium contineant; tota Irratioalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* superiùs inventæ AB, BC, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, *c* æquale est duobus quadratis ex AB, BC, unà cum rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. * Quoniam verò ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; *d* erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum DG. utrivis ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Mediis AB, BC. Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, adplicantur ad Rationalem DE; (*e* est enim GH, Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt: & est ut AB, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulū sub AB, BC, ex lemmate 3. propos. 19. hujus lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC. ut in scholio propos. 10. hujus lib. ostensū est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum AB, BC: & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod continetur bis sub AB, BC, cùm hoc illius sit duplum Igitur per ea, qua in scholio propos. 14. hujus lib. diximus, erit & compositū ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF. *g* Cùm ergo sit ut DG, ad HF, ita EG, ad GF: *h* erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis: Ostensum autē jam fuit EG, GF, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantū commensurabiles,



a 29. decimi. *b* 45. primi *c* 4. secundi. *d* 16. decimi. *e* 34. primi. *f* 23. decimi. *g* 1. sexti. *h* 10. decimi.

a 37. decimi. a ac propterea & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; *Ac* propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta *AC*, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, seu ut aliis placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

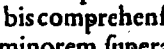
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem AC, *quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam. Hic verò lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.*

LEMMA

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitq; maior pars AB; in qua sumatur BC, minori BD, æqualis, ut sit AC, excessus, quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, simul maiora esse rectangulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniam enim quadrata ex AB, BC, *b* æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, unà cum quadrato ex AC, estq; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, unà cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quàm rectangulum bis sub *AB*, BD, quadrato rectæ AC, quod est propositum.



b 7. secundi.

COROLLARIVM.

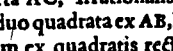
EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij. THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

tinetur Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR, duæ rectæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum Medium. Dico totam AC, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub AB, BC, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarū AB, BC, Rationale. *b* Incōmensurabile ergo est rectangulum bis sub AB, BC, compositō ex quadratis rectarum AB, BC. *c* Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est compositō ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex AB, BC; & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarū AB, BC, per lemma antecèdens, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium; rectè vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum a

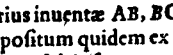


234. *decimi.* b 10. *defin.* c 17. *decimi.* d 10. *defin.* e 11. *def.* f 4. *secundi.*

THEOR. 29. PROPOS. 41. XI. XXXIV.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommmensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incom-



g 35. *dec.* h 10. *def.*

a 17. decimi.

B menſurabile rectangulo bis ſub AB,BC.a Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, vna cum rectangulo bis ſub AB,BC,hoc eſt,quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB,BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB,BC,vt diximus ſit Rationale; b erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile,Irrationale; c Ac proinde & recta AC,Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex qudratis rectarum AB,BC,& Rationale,rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB, BC. Conuenit autem Rationali Irrationali antreponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles,&c. Quod demonſtrandum erat.

A C

b 10. defin.

c 21. defin.

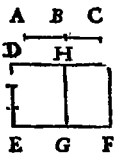
THEOR. 30. PROPOS. 42.

XLI. XXXV.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ d ſuperius inuentæ AB,BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque compoſitoex quadratis ipſarum. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, e ad quam applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG,Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, f æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC,erit reliquum HF,æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC,hoc eſt, rectangulum DG,quam rectangulum ſub AB,BC, atque adeo ex coroll. 24. huius lib. quod bis ſub AB.BC,nempe ipſum HF.(cum illi ſit commenſurabile.)Medium ponitur, g facient DH, HF, ad Rationalem DE,applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, id eſt,rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB,BC:Eidem autem rectangulo ſub AB,BC,commenſurabile eſt ipſius duplum,nempe quod bis continetur ſub AB, CB,



e 45. primi.

f 4. ſecundi.

g 23. decimi.

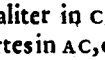
C, hoc est, ipsum HF; *a* erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quia *b* cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; *c* erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles; Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; *d* Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, *mi.* contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 8. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; *e* ideoque & recta ipsa AC. Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. de- cimi.
b 1. sexti.
c 10. decimi.
d 37. de- cimi.
e 11. def.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

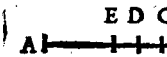
SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes in AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, *e* æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, *g* æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex



e 5. secundi.
g 4. secundi.

AD,

AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.



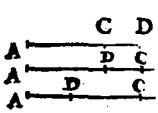
SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

a 5. secundi

xxxxij. xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVÆ ex binis nominibus ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi nō posse in alia nomina, quę scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum cōmensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt

sunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima, quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis sub AD, DB, a quod tam illa, quam hæc æqualia, sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium esse Rationale) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est. b Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis sub AC, CB, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB, Medium erit. c Quare cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum quã ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

a 4. secundi.

b 22. decimi.

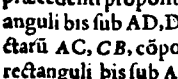
c 27. decimi.

THEOR. 32. PROPOS. 44. XLIII. XXXVII.

QVÆ ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ

quæ Rationale contineant, vt vult propoſ. 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe, in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale: Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſū rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eaundē eſſe, qui eſt cōpoſiti ex quadratis rectarū AC, CB, cōpoſiti ex quadratis rectarū AD, DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rect āguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Ratio- erit, & quod nalebis ſub AC, CB, ei quod continetur ſemel AC, CB, commenſurabile Rationale. Eo-



demque modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cum Rationale ſuperet Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt.) Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, &
a 16. *decimi.* potentia commenſurabiles, etunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. *a* Quare & compoſitum ex ipſis vtriqueipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium.
b 27. *decimi.* Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB. *b* Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

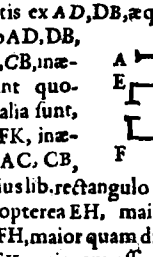
XLIV. XXXVIII.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

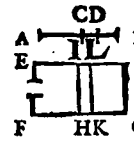
QVÆ ex binis Medijs ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant vt vult propoſ. 39. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim ſi fieri poteſt, in alia nomina AD, DB.

DB. Igitur vbicunq; punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis ſub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale eſt quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis ſub AC, CB. Eodem modo ſi ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, comprehenſo. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex AC, CB, maiora ſunt per lemma propoſ. 39. huius lib. rectangulo bis ſub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipſius FH. Eadem ratione oſtendemus FK, maiorem eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. *c* Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoque compoſitum ex ipſis, hoc eſt, EH, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cum rectangulum ſub AC, CB, ponatur Medium & erit, quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* erit HG, Rationalis ipſi HI, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus LG, Medium eſſe, & KG, Rationalem ipſi KL; longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia AC, CB, longitudine ſunt incommenſurabiles, & eſt, vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, *f* erit quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadris rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia ſint commenſurabiles, atq; adeo ipſarum quadrata commenſurabilia; *g* erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex AC, cõmenſurabile) Rectgãulo vero ſub AC, CB, cõmẽſurabile eſt, quod bis ſub AC, CB. Igitur & cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt rectãgulum EH, incõmenſurabile eſt per ſcholium. prop. 14. huius



a 45. primi.
b 4. ſecundi.
c 16. decimi.
d 23. decimi.
e 23. decimi.
f 10. dec.
g 16. decimi.



huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, ipſi IG. Quocirca *a* cum ſit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, *b* erunt FH, HG, lõgitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. *c* Igitur FG, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur; diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & FG, ex binis nominibus, diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, *d* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur AB, ex binis medijs ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

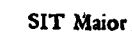
a 1. ſexti.
b 10. deciſimi.
c 37. deciſimi.
d 34. dec.

XLV. XXXIX.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulũ vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Medium. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter vt in propoſitione 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eum eſſe qui rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB., Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub AD, DB. *e* Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus, rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale; Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diui-



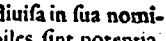
e 27. dec.

diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47. XLVI. XL.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

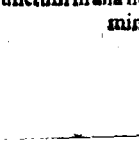
SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non a 27. decimi. eriterorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.



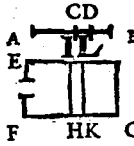
THEOR. 36. PROPOS. 48. XLVII. XLI.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum, sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri, Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina,



mina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) a faciunt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas EK, KG, Rationales esse, longitudine incōmensurabiles ipsi EF. Quia vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub AC, CB, nempe rectangulo IG; b estque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, c iam ante demonstratum est. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.



a 23. *decimi.*

b 1. *sexti.*

c 43 *decimi*

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA *Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis:*

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota *ex binis nominibus prima.*

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine

sit

tcommenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecun-
a.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudi-
ie commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex bi-
iis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato
eſtæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis

IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali com-
menſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus
quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur
ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi cõmẽſurabilis: conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis efficientur vna cum eiſdem tribus generibus alia tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile est, vt manifestum est.

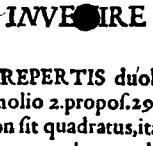
RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam verò, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

xlviij. xlij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico FG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, a commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum



a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 37. decimi.

ratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG; Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

a 9. *decimi.*

PROBL. 14. PROPOS. 50.

XLIX. XLiij.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaq; Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG. esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, *b* commensurabilia sunt; erunt & rectæ FG, EF, commensurabiles, saltē potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis; igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; *d* Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis;

b 6. *decimi*

c 9. *decimi.*

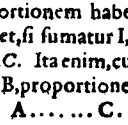
d 37. *dec.*

estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod faciendum erat.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebis ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I. & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt quam numeri quadrati. Expositaiam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. *a* Erunt ergo quadrata ex D & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, E.F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *b* erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. *c* Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles.



1. xlv.

1. xvij.

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

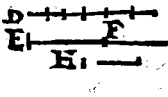
iles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commensura-
iles; a Atque idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus a 37. decimi.
appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita
quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita qua-
dratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC,
ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG. Non habet autem I,
ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum
quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habe-
bunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; b ac b 9. dec.
propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt.
Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad qua-
dratū ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex
EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma pro-
pos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in
49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoni-
am igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG quadrato
rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF,
FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt de-
monstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus
tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat fa-
ciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

LI. XLV.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D. cui longitudine commen-
surabilis sumatur EF. Erit ergo &
EF, Rationalis, cum Rationali D,
commensurabilis sit. Quod si reliqua
constituantur, vt in propos. 49. osten-
demus similiter, vt ibi, totam EG,
ex binis nominibus esse. Dico &



quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49 prop. quadratum ex EF, ma-
ius quam quadratū ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quo-
niam igitur eodem modo, vt in 49. prop. per conuersionē rationis
est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est
autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex
EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum
quadratum. c Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, c 9. dec.
& H. Itaque cum maius nomen EF, plus possit, quā minus FG, qua-

drato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53.
Lvi. xlvj. INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio. vt in propos. 59. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG: Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incõmensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

PROBL. 18. PROPOS. 54.
Lviij. xlvij. INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum: qualis est quinis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri & reli-

a 30. sept.

& reliqua fiant, ut in propoſ. 51. oſtendemusque ut ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam E G, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, ut in 51. propoſ. D, & F G, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex EF, majus, quàm quadratum ex FG. Sit ergo majus quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque ut in propoſ. 49. per converſionem rationis, eſſe ut A B, ad C B, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atque adeò quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; *a* erunt rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaq; cùm majus nomen EF, plus poſſit, quàm minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Invenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

a 9. *decimi*

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit utcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta AB, utcunque in C. Deſcribatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipſi B*D*, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi A B, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium A C, C B; utrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum eisdem partibus: At verò rectangula C D, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico *D*G, medium proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, medium eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim *b* ut HG, ad GI, ita eſt tam F H, ad DG, quàm A G, ad CI; erit ut FH, ad *D*G, ita AG, ad CI: *c* Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque ut F H, ad D G, ita DG, ad CI; Atq; adeò DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, C I.

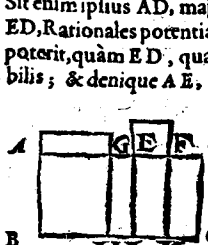
b 1. *ſexti.*
c 43. *primi*

a 1. *sexti.* RVRSVS quia est, *a* ut AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI: erit ut AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit ut AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

Xliiij. XLviij. SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub *Rationali* AB, & ex binis *nominibus prima* AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 2. lemma propos. 17. hujus lib. applicetur deficiens figura quadrata; *b* in partes longitudine commensurabiles ipsam divider. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur jam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. *c* Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, conjunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum *M*, ut latera *MO*, *MP*, unam rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera *MQ*, *MR*, unam rectam QR, ut demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem *M*, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cùm rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, *d* sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN: ideoq; quadratum,



b 18. *decimi.*

c 14. *secundi.*

d 34. *primi.*

QVO-

QVONIAM verò rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF, *a* erit ut AG, ad EF, ita EF, ad GE, *b* Ac propterea & ut AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est TM, ipsi EK. *c* Cùm ergo ipsi TM, æquale sit MS, *d* & ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeò recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima, Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 17. *sexti.* b 1. *sexti.* c 43. *primi.* d 36. *primi*

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, *e* erit & tota AE, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cùm sit majus nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. hujus lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt.

e 16. *decimi.* f 20. *decimi.*

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG, & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, ejus dimidia: erunt ex scholio propos. 14. hujus lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. *i* Igitur rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, *k* cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

g 1. *sexti.* h 10. *decimi.* i 10. *decimi.* k 1. *sexti.* l 37. *sexti.*

THEOR. 38. PROPOS. 56. LIX.

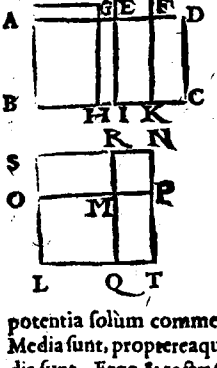
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. XLIX.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spá-

tium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, ut in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, ut ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico jam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; a erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles; b erit quoque tota AE, utrique ipsarum commensurabilis. Quare cum AE, majus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cùm ergo utraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; c erit utraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quàm AB, GE, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. Igitur d rectangula AH, GI, Media sunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



QVIA verò AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; e erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi verò AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, ejus dimidia; erunt per scholium propos. 14. hujus lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, f incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt; g Ideoque & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, a cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT,

a 13. decimi.
b 16. decimi.
c 14. decimi.
d 22. decimi.
e 10. decimi.
f 10. decimi.
g 10. decimi.
a 1. sexti.

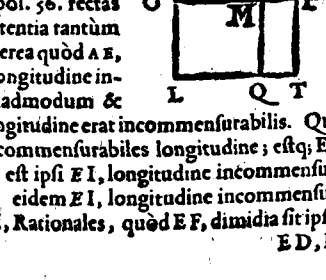
MT. Cùm ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solùm commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensurabilis; b erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. c Quare EK, rectangulum, Rationale est; Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, Rationaleq; continentes; d atque adeò OP, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

b 12. decimi. c 20. decimi. d 38. decimi.

THEOR. 39. PROPOS. 57. Ex vj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. 1.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Mediis secunda. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarũ AE, ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, ut in propos. 55. Similiter ergo, ut ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantùm commensurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam verò ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; est q; ED, ipsi AB, Rationali, hoc est ipsi EI, longitudine incommensurabilis; e erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia sit ipsius ED, Ra-



e 14. decimi.

ED, Rationalis; & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; *a* Ac propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Mediis OM, MP, continetur. Iraq; cùm OM, MP, Mediæ sint potentia solùm commensurabiles, contineantque spatium Medium; *b* erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. decimi.

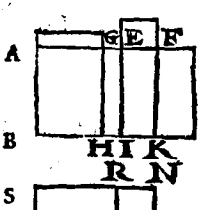
b 22. decimi.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

Lvij. Lj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Major vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, majus nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propos. 55. *c* Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus jam eodem modo, ut ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse; quæ vocatur Major. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommensurabiles sunt; *d* erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeò & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia verò AE, majus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; *e* & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.



c 19. decimi.

d 10. decimi.

e 20. decimi.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommensura-

surabilis; Et est EF, Rationalis, cùm sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. a Quare EK, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; sub OM, MP, Medium est. Quocirca cùm OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis IM, MN, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis MT, Medium; b Irrationalis erit tota OP, quæ Major nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. decimi.

b 40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

LVIIJ. LIJ.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus potest, quàm ED, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali AB Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 58. c Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propos. 55. constabit rectam OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, majus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantùm commensurabiles. d Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cùm sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. e Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & MT, sub OM, MP, contentum Rationale erit, cùm ipsi EK, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum verò MT, sub ipsis contentum, Rationale; f Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium cõtinea-

c 19. decimi.

d 22. decimi.

e 20. decimi.

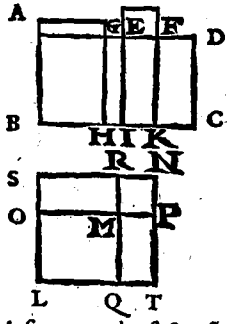
f 41. decimi.

tineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quæ spatium AG, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commensurabiles, & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis; & denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit commensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in superioribus, & eruntq; AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam verò ostendemus similiter ut in propos. 55. rectam OP, posse spatium AC. Item ut in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi ED, hæc verò eidem commensurabilis; *b* erunt AE, EF, longitudine incommẽsurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommẽsurabilia sunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



a 19. *decimi.*

b 13. *decimi.*

c 10. *decimi.*

d 1. *sexti.*

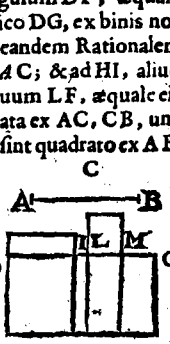
e 42. *decimi.*

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB, cujus majus nomen AC; *a* & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, unà cum rectangulo bis sub AC, CB, *b* æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per constructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, quod per quod ipsis LK, GF, parallela agatur, MN: eritque utrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. *c* Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum utrique cùm etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solùm potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeò, & quod bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. hujus lib. Quare LF. applicatum ad LK, Rationalem, *f* facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. *g* Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commensurabiles; *h* Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primâ esse,

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. hujus lib. rectangulum sub AC, CB, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB; erit quoq; LN, medium proportionale inter DH, IK, atq; adeò *i* cùm rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoq; recta LM, media proportionalis inter DI, IL. *k* Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quòd AC, CB, ponantur potentia commensurabiles;

a 45. prim

b 4. secundi.

c 37. decimi.

d 16. decimi.

e 22. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

h 37. decimi

i 1. sexti.

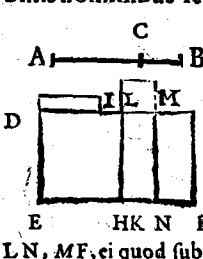
k 17. sexti.

a 10. decimi. erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. *a* Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, majus est, quàm LF, quòd & quadrata ex AC, CB, majora sint, per lemma propos. 39. hujus libri, quàm rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, b 1. sexti. major quàm LG, *b* cùm DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, major est, quàm LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM) dividiturq; DL, ad I, in partes DI, IL, c 18. decimi. longitudine commensurabiles, ut est demonstratum; *c* poterit DL, major plus quàm LG, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, majus nomen plus posse, quàm LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem majus nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo ejus, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

LXJ. LV.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.



d 45. primi SIT ex binis Mediis prima AB, cujus majus nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & utrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur e 38. decimi. AC, CB, ex binis Mediis primam AB, componentes *e* Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. *f* Cùm ergo propterea f 16. dec. & totum DK, utrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit g 23. decimi. quoque ex coroll. propos. 24. hujus lib. DK, Medium, quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, *g* erit ejus latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam

niam rectangulum AC, CB, Rationale est, erit & ejus duplum, nempe LF, Rationale, quod cùm applicatum sit ad Rationalem LK, *a* erit ejus latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cùm duarum rectarum DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, commensurabilis longitudine, at DL, longitudine incommensurabilis; *b* erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quod cùm DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solùm commensurabiles; *c* ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam verò, ut in antecedenti propos. démonstrabimus DL, majus nomen esse, & posse plus, quàm minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cùm ipsius DG, majus nomen DL, plus possit, quàm minus nomen LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen LG, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo ejus, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. *decimi.*

b 13. *decimi.*

c 37. *decimi.*

THEOR. 45. PROPOS. 63. LXII.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. LVI.

SIT ex binis Mediis secunda AB, cujus majus nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam AC, CB, ex binis Mediis secundam AB, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, & Media. *f* Cùm ergo propterea & totum DK, utrique ipsorum DH, IK, *f* sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. hujus libri DK, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, *g* erit ejus latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, CB, Medium est; erit & ejus duplum LF, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem LK; *h* erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommensurabilis; estque ut AC, ad CB, ita per lemma 3. propositionis 19. hujus libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *i* erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis

d 45 *primi*

e 39. *decimi.*

f 16. *decimi.*

g 23. *decimi.*

h 13. *decimi.*

i 10. *decimi.*

k 16. *decimi.*

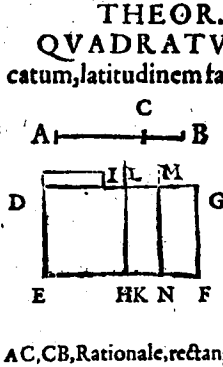
dratis rectarum AC, CB, quòd quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cùm rectæ ipsæ potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est, ejus duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, rectangulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes a longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles; b ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam verò ut in propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, posseque plus, quàm minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cùm DL, majus nomen plus possit, quàm LG, minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG. Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo ejus, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstradum.

a 10. decimi.
b 37. decimi.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

lxiij. lvij.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT major AB, cujus majus nomen AC, c & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Majorem AB, componentes, d potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum verò sub ipsis, Medium; erit quoq; DK, compositio ex quadratis rectarum AC, CB, æquale existens, Rationale; At verò LF, duplum ejus quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; e erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cùm LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK, f erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, DE, longitudine incommensurabilis. Quare cùm duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc verò eidem DE, longitudine incommensurabilis; g incommensurabiles e-

c 45. primi
d 45. decimi.
e 21. decimi.
f 22. decimi.
g 13. decimi.

lę erunt longitudine DL, LG: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; *a* ideoque DG, ex binis nominibus eſt. Iam verò ut in propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, BC, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommenſurabilia, *b* atque adeò & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò ut in propoſ. 61. oſtendimus, DL, major eſt, quàm LG, & ad DL, applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod dividit ipſam DL, ad I. in partes longitudinine incommenſurabiles, *c* poterit DL, plus quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa DL, (majus nomen ipſius DG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta, Quadratum ergo Majoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. decimi.
b 10. decimi.
c 19. decimi.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

LXIV. LVIII.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cujus maius nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeò ipſius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, *f* facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, *g* facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, IG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa verò longitudine incommenſurabilis, *h* erunt DL, MG, longitudine incommenſurabiles. Quare DL, LG, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, *i* Ac propterea DG, eſt ex binis nomi-

d 45 primi
e 41 decimi.
f 23. decimi.
g 21. decimi.
h 13. decimi.
i 37. decimi.

nibus. Iam verò, ut in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM, & ut in antecedenti propos. DL, majus nomen esse, atq; posse plus, quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur ejus, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

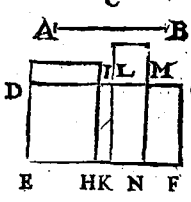
LXV. LIX.

THEOR. 48 PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

a 45. primi

SIT bina Media potens recta AB, cujus majus nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, b potentia incommensurabiles sunt, faciuntque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quàm LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale Medium. Et quia Media DK, LF, applicatâ sunt ad Rationalem DE; c erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. d Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem verò rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cùm hoc illius sit duplum; e Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, BC; hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, f longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solùm commensurabiles; g Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam verò, ut in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, posseq; plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.



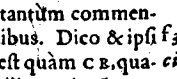
c 23. decimi.
d 42. decimi.
e 23. decimi.
f 10. decimi.
g 37. decimi.

THEOR.

THEOR. 49. PROPOS. 67. LXVJ. LX.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, divisa in sua nomina, quorum majus A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B. *a* Fiat enim ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F *b* Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; *c* erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: *d* Sunt autem A C, C B, cùm sint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; *e* erunt & D F, F E, potentia solùm commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; *f* Ac propterea D E, ex binis est nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; *g* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; *h* erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cùm utraq;, & Rationalis, & D F, eidē A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; *i* erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.



a 12. *sexti.* b 19. *quinti.* c 10. *decimi.* d 37. *decimi.* e 10. *decimi.* f 37. *decimi.* g 15. *decimi.* h 12. *decimi.* i 2. *decimi.*

AT si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; *k* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

k 15. *decimi.*

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantùm;) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui comensurabilis est, nullo modo concludemus. Nec enim sequitur, si AC, majus nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, majus nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non utraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At verò DF, potentia tantùm, ex hypothesi. Immò verò, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, ut DE, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SI Tenim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, divisa in sua nomina ad C, sitq; ei commensurabilis potentia tantùm DE, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, divisamq; esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, ut DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit utraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumq; maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. a *Quare & inter se longitudine commensubiles erunt. Et quoniam est ut AC, ad DF, ita AB, ad DE,* b *erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo utraq; AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; utraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim utrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

a 12. decimi.

b 10. decimi.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quàm CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE, c *poterit quoque DF, plus quàm FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC, plus*

c 15 decimi.

possit

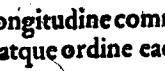
possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; a *poterit quoq; DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.* a 15. dec.

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

THEOR. 50. PROPOS. 68. LXVIJ. LXJ.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis *Medijs* AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sitq; ei recta DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB, ordine eadem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; *d* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, *Mediæ*. *e* Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, *Mediæ* sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; *f* Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *g* erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint *Mediæ*, erunt DF, FE, *Mediæ* potentia tantum cōmensurabiles; *h* Atque idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratū ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulū sub DF, FE. Cōmensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. *i* Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; *k* atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Medijs secunda: erit



b 12. sexti. c 19. quinti. d 10. decimi. e 24. decimi. f 38. decimi. g 10. decimi. h 38. vel 39. dec. i 10. decimi. k 18. decimi.

& rectangulum sub DF,FD,ei commensurabile,Medium, ex corol-
a 39. decimi, lario propos.24. huius lib. a Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs secunda. Quare ei,quæ ex binis Medijs longitudine commensurabilis,&c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE,quæ est ex binis Mediis,ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est,si modo loco: commensurabilis longitudine : in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

LXVIIJ.
LXIJ.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB. diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE,siue longitudine & potentia,siue potentia tantum. Dico & DE,Maiorem esse. Fiant enim eàdem,quæ superius ; ita vt partes AC,CB,ad partes DF,FE,eandem habeant rationem, quam tota AB,ad totam DE. Quoniam igitur AB,DE,commensurabiles sunt vel longitudine & potentia,vel potẽtia tantum; b erunt quoq; tam AC,DF,quã CB, FE,

b 10. decimi. eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC,ad DF,ita
c 22. sexti. CB,ad FE,& permutando vt AC,ad CB,ita DF,ad FE, c erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE ; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC,CB,ad quadratum ex CB,ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE ; Et conuertendo, vt quadratum ex CB,ad compositum ex quadratis rectarum AC,CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE ; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita
i cõpositũ ex quadratis rectarũ AC,CB,ad cõpositũ ex quadratis rectarum DF,FE. Cõmẽsurabile est autem quadratum ex CB,quadrato ex FE,quod rectæ CB,quadrato ex FE,ostensæ sint commensu-
d 10. decimi. rabiles vel longitudine & potentia,vel potentia tantum. d Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC,CB, commensurabile est
e 40 decimi. composito ex quadratis rectarum DF,FE. e Est autem compositum
f 9. def. illud Rationale,cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. f Igitur & hoc Rationale est.

Rursus quia est vt AC,ad CB,ita DF,ad FE ; Vt autem AC, ad CB,ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB,& vt

DF,

DF,ad FE,ita quadratum ex DF,ad rectangulum sub DF,FE,ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC,CB,ita quadratum ex DF,ad rectangulum sub DF,FE:& permutando vt quadratum ex AC,ad quadratum ex DF,ita rectangulum sub AC,CB; ad rectangulum sub DF,FE: Est autem quadratum ex AC,quadrato ex DF,commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum, a Igitur & rectangulum sub AC, CB,rectangulo sub DF,FE,commensurabile est. b Est autem rectangulum sub AC,CB,Medium. Igitur & rectangulum sub DF,FE, illi commensurabile,Medium est,ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC,ad CB,ita DF,ad FE, c sunt quæ AC,CB, potentia incommensurabiles,cum componant Maiorem AB; d Erunt quoque DF,FE,potentia incommensurabiles. Itaque cum DF, FE,sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,Medium,vt ostensum est; e erit tota DE,Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi.
b 40. decimi.
c 40. decimi.
d 10. decimi.
e 40. dec.

THEOR. 52. PROPOS. 70. LXIX. LXIIJ.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis,& ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT (repetita figura antecedentis propos.) recta AB,potens Rationale ac Medium,diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE,siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE,esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim ijsdem quæ supra,ostendemus,vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC,CB,commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF,FE: f Est autem illud compositum Medii, cum rectæ AC,CB,componant ipsam AB,potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo,vt in eadem propos. antecedenti,erit rectangulum sub AC,CB,g quod Rationale est,commensurabile rectangulo sub DF,FE,atque adeo & rectangulum sub DF,FE,Rationale est,ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt DF,FE,potentia incommensurabiles. Quare cum DF,FE,sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium,quod autem sub ipsis continetur,Rationale,vt demonstratum est; h erit tota DE,Rationale ac Medium potens,Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis,&c Quod erat demonstrandum.

f 41. decimi.
g 41. decimi.
h 41. decimi.

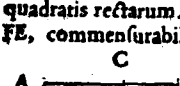
THEOR.

LXX. LXIV.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potentem. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum AB, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse commensurabile rectangulo sub DF, FE. a Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, DB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest; Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo sub AC, CB, probauimus commensurabile rectangulum sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a 42. decimi.

b 43. decimi

c 42. decimi.

LXXI. LXV.

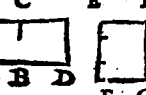
THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus; vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Tationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Æqua-

Æquale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo maius. & ex posita Rationali EF, applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad HG, aliud HI, æquale ipsi CD, vt totum EI, toti AD, sit æquale. Et quoniam AB, Rationale est, & CD, Medium, erit quoque EG, Rationale & HI, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem EF, *b* erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis; At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia EG, HI, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod EG, Rationale sit, at HI, Irrationale, nempe Medium; *d* erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; *e* Ac propterea EK, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam HK, *f* cum DH, HK, eandem rationem habeant, quam EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit & EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, *g* Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

a 45. primi.
b 21. decimi.
c 25. decimi.
d 10. decimi.
e 37. decimi.
f 1. sexti.
g 55. decimi.



Si vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EA, ex binis nominibus quartâ; ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, *h* Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

h 58. decimi.

SIT deinde AB, minus quam CD, & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius EK, ex binis nominibus & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nomini-

bus

bus ſecunda; cũ EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. *Quare recta potens ſpatium EI*, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & *Medio* CD, compoſitum, *a* Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. *decimi.*

SI vero HK, plus poſſit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, *b* Irrationalis eſt, quæ Rationale & *Medium* potens appellatur. Si igitur Rationale & *Medium* componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

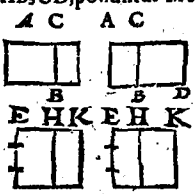
b 59. *decimi*

LXXIJ. LXVJ.

THEOR 55. PROPOS. 73.

SI duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo *Media* incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam quæ poteſt totum ſpatium AD, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus *AB*, vel maius, quam CD, *vel minus*: Æquale ſiquidem *non erit*; alias eſſent AB, CD, commenſurabilia quod non ponitur. Sit primo majus, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia AB, CD, ponuntur *Media*, & *incommẽſurabilia*; erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. *c* Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationẽ, *longitudine* incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint, applicenturque ad Rationalem EF,) *d* Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; eac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius EK, poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex definitione ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, con-



c 10. *decimi.*

d 23. *decimi.*

e 37. *decimi.*

tem-

rentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, *a* Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. a 57. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, *b* Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quopropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, *c* latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, *d*, latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

ET quadratū eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, *e* latitudinem facit ex binis nominibus secundam. d 61. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, *f* latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. e 62. decimi.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, *g* latitudinem facit ex binis nominibus quartam. f 63. dec.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem facit ex binis nominibus quintam. g 64. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem facit ex binis nominibus sextam. h 65. decimi.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse. i 66. dec.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus, & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis se-

dijt ſecunda; & Maioris; & eius, qua Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, qua poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continet propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis diuerſas punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſexta.

IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quanam linea Irrationalis ſit illa, qua poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex bis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

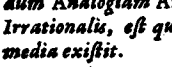
IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, qua quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis linea Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.

SIT enim quacunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis ſumatur E.



Dico E, mediam eſſe ſecundum Analogiam Arithmeticam inter AC, CB; & eſſe quoq; ex binis nominibus. Quoniam enim AD, ſuperat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, ſuperat ipſam CB. eadem recta DB; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB. in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commmenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hac illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SE-

SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

LXXIIJ. LXVIIJ.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniã enim per lẽma 3. prop. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; *a* erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (Cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur cõpositũ ex quadratis rectarũ AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC. Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. decimi.

b 16. decimi.

c 7. secundi.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, *sint Rationales potentia tantum commensurabiles; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen* AB, *& minus* AC. *Auferatur igitur* AC, *minus nomen ex maiori nomine* AB, *vt relinquatur Apotome* BC.

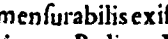
a 37. decimi.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

LXXIV. LXIX.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, *Media* AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, *b* atque adeo & compositum ex *ipsis commensurabile* erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & *Medium* Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub *AB*, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub *AB*, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum *ex quadratis rectarum* AB, AC, rectangulo bis sub AB, *AC*. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *d* Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub *AB*, *AC*, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



b 16. decimi.

c 7. dec

d 17. decimi.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à

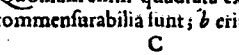
Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationali est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, *sint Media potentia solum commensurabilis, contineantque Rationale*; a *erit composita ex ipsis Irrationalis*, a 38. *decimi.* *quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen* AB, *& minus* AC. *Auferatur igitur* AC, *minus nomen ex maiori* AB, *vt relinquatur* BC, *Mediæ Apotome prima.*

THEOR. 58. PROPOS. 76. LXXV. LXX.

Si à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumq; ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ nonantur. Igitur & compositum ex ipsis vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. *d* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.



b 16. *decimi.*

c 7. *secundi.*

d 27. *decimi.*

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita posuisset proponi.

Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, *Media sunt potentia tantum commen-*
a 39. de- *surabiles, continentque Medium*; a *erit composita ex ipsis Irrationa-*
cimi. *lis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen* AB, *&* *minus* AC. *Aufertur igitur* AC, *minus nomen ex maiori* AB, *vt relinquatur* BC, *Mediæ Apotome secunda.*

LXXVj. LXXj.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquã BC, Irrationalem esse. Quoniam enim cõpositum ex quadratis

rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum, bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 10. decimi.
c 7. secundi.
d 10. defin.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, *sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod au-*
c 40. de- *tem sub ipsis continetur, Medium: erit composita ex ipsis Irratione-*
cimi. *lis, quæ*

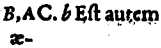
lis, quæ vocatur Maior, eiusque maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

LXXVIJ. LXXIJ.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *b* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; Reliqua Irrationalis est. &c Quod ostendendum erat.



a 10. *defin.*
b 7. *secundi.*
c 17. *decimi.*
d 10. *def.*

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis

c 41 *dec.*

quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

LXXVIII. LXXIX.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis Dico reliquam BC, esse Irrationalem.

a 7. secundi.

a Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub, AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. *b* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Sitigitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

b 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

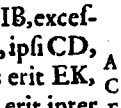
QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabile quæ composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEM

LEMMA.

SIidem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



COROLLARIVM.

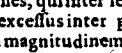
EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habent.

THEOR 62. PROPOS. 80.

LXXIX. LXXIV.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB, congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Eodem modo



erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; *a* quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum AD, BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; *b* cum & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est *d* Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. *e* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 7. secundi.

b 7. secundi.

c 16. dec.

d 22. decimi.

e 27. decimi.

LXXX. LXXV.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat AC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC,

AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potentia solùm ipsi AC, commensurabilis; *a* erit A B C D & AC, Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, ut in propos. præcedenti ostensum est; Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. hujus lib. spatium Rationale; quod utrumque sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atque adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. *c* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

A B C D

a 24. decimi.

b 16. decimi.

c 27. decimi.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

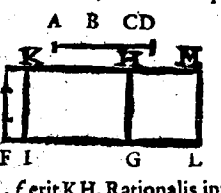
LXXXI. LXXVI.

MEDIÆ Apotomæ secundæ una tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantùm commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit medium. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

BD. Media toti AD, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. *b* Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æqnale est rectangulo bis sub AC, BC, unà cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemq; modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cùm enim BC, Media ponatur, *c* erit & AC, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est utrique eorum; atq; idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. *d* Igitur & EG, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cùm applicetur ad Rationalem EF, *e* erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. hujus lib. & ejus duplum, nempe KG, Medium: quod cùm applicetur ad Rationalem KI, *f* erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt; est; ut AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ut ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. hujus lib. *g* erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG (cùm enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles erunt & earum quadrata commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est ejus duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. docuimus. *i* Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi EH, *k* erit EK, Apotome, & illi congruet KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantùm congruit, sed linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens, quæ



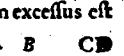
a 45. primi.
b 7. sec.
c 24. decimi.
d 16. decimi.
c 23. decimi.
f 23. decimi.
g 10. decimi.
h 74. decimi.
i 10. decimi.
k 74. decimi.

quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere. a demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83. LXXXII. LXXVII.

MINORI una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, ut in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. hujus libri; quod utrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. hujus lib. ejus duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. b Quare unum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergò una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



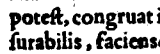
b 27. decimi.

THEOR. 66. PROPOS. 84. LXXXIII. LXXVIII.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq;

ciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum verò sub AC, BC, Rationale. Dico ipsi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum

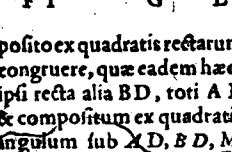


AD, BD, Medium, rectangulum verò sub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propos. 81. demonstravimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cùm utrumque sit Medium. 4 Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi AB, alia recta, quàm BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

4 27. decimi.

LXXXIV, LXXXV. THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia BD, toti AD, potentia incommensurabilis, ita ut & compositum ex quadratis rectarū AD, BD, Medium sit, & rectangulum sub AD, BD, Medium quoque, & incommensurabile composito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est, erit etiam EG, illi æquale, Medium.

dium. *a* Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & ejus duplum KG, Medium. *b* Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cùm illud hujus sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque KG, eidem composito, hoc est ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi EH; *e* erit EK, Apotome, & ei congruens, KH. Non aliter ostendemus EK, esse Aptomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ una tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. decimi.
b 23. decimi.
c 14. decimi.
d 10. decimi.
e 74. decimi.
f 80. decimi.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta,

SI

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

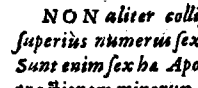
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superiùs numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex majoribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitionibus sit perspicuum.

LXXXV. LXXX. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, ut in scholio 2. propos. 29. hujus libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Erit-



que EF; cùm commensurabilis sit Rationali, D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6 hujus lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF Dico EG, esse primam Apotomen. a Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF; commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis; erit & GF, Rationalis. Quia verò AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantùm commensurabiles; c atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quàm recta GF, quadrato ex H. Et quia est, ut numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conversionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & qua-

a 6. dec.

b 9. dec.

c 74. decimi.

quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine: erit EG, ex defin. prima Apotome. Invenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. LXXXVI.

INVENIRE secundam Apotomen. LXXXI.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF, eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. hujus libri. Dico EG, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri AC, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; c erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solùm commensurabiles; d Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quàm GF, quadrato ex H. Quoniam ergo est ut AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & convertendo, ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Ostendemus jam ut in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Invenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

b 6. decimi.

c 9. decimi.

d 71. decimi.

PROBL. 21. PROPOS. 88. LXXXVII.

INVENIRE tertiam Apotomen. LXXXII.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propositione 86. sumatur alius numerus I, ut in propositione 51. hujus libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

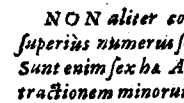
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superiùs numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, recta linea, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex majoribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitionibus est perspicuum.

LXXXV. LXXX. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, ut in scholio 2. propos. 29. hujus libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Erit-



que EF; cùm commensurabilis sit Rationali, D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6 hujus lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF Dico EG, esse primam Apotomen. a Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF; commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis; erit & GF, Rationalis. Quia verò AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantùm commensurabiles; c atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quàm recta GF, quadrato ex H. Et quia est, ut numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conversionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & qua-

a 6. dec.

b 9. dec.

c 74. decimi.

quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; a Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine: erit EG, ex defin. prima Apotome. Invenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9. decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. LXXXVI.

INVENIRE secundam Apotomen. LXXXI.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF, eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. hujus libri. Dico EG, esse secundam Apotomen. Quoniam b enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri AC, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; c erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solùm commensurabiles; d Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quàm GF, quadrato ex H Quoniam ergo est ut AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & convertendo, ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Ostendemus jam ut in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Invenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

A ..... C .... B.
D
E
F
H

b 6. decimi.

c 9. decimi.

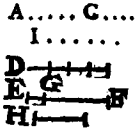
d 71. decimi.

PROBL. 21. PROPOS. 88. LXXXVII.

INVENIRE tertiam Apotomen. LXXXII.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propositione 86. sumatur alius numerus l, ut in propositione 51. hujus libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat ut l, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum

tum ex EF, per coroll. propos. 6. hujus libri. *a* Erunt que quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadratæ ex D, & EF, proportionem non habent, quàm numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. hujus lib. Dico EG, esse tertiam Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex EF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc sit commensurabilis; ut demonstravimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *d* Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea cùm ex EF, auferatur GF, potentia illi solùm commensurabilis; *e* reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo ut I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF; Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit jam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H; Ostendemusque, ut in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus possit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Invenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.



a 6. decimi.

b 9. dec.

c 6. dec.

d 9. dec.

e 74. decimi.

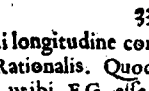
f 9. dec.

LXXXVIII PROBL. 22. PROPOS. 89.

LXXXIII. INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 2. propos. 29. hujus lib.

jus lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, ut ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, erit per conversionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H,



Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabi- a 9. dec. les. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, cimi. quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Invenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

PROBL. 23. PROPOS. 90. LXXXIX. LXXXIV.

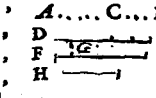
Invenire quintam Apotomen.

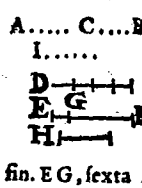
Repertis (repetita figura proxime antecedentis propositionis) duobus numeris AC, CB, ut in propositione præcedenti fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendemus, per conversionem rationis esse ut AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, ut in propos. antecedenti rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine: erit ex defin. EG, quinta Apotome. Invenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. XC. LXXXV.

Invenire sextam Apotomen.

Repertis tribus numeris AC, CB, & I, ut in propos. 54. ita ut AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, ut ibi D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommmensurabiles: Atque adeo neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit jam EF, plus





quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Invenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inveniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

a 49. decimi. *SI Tinvenienda exempli gratia, prima Aptome*, a *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cujus majus nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantũ cõmensurabiles: erunt etiã AC, DC,* b 74. decimi. *Rationales potentia tantũ cõmensurabiles.* b *Est ergo AD, Apotome.*

Et quia A B, plus potest, quam CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione ejus, quæ ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotoma prima, AD; prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inveniemus, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si minora nomina ex majoribus auferamus.

xcj. lxxxvj.

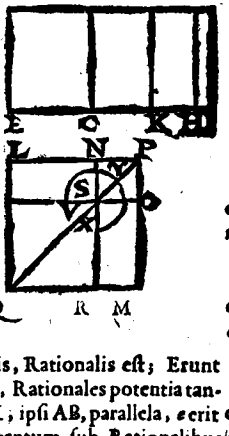
PROBL. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit Ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ; Rationales potentia solum commensurabiles: & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB: & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE. deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. hujus libr. Et quia AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: c erunt rectæ AG, GE, longitudine commensurabiles; d Ac propterea & utraque toti AE, longi-

c 18. dec. d 16. dec.

longitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & utraque *AG*, GE, ipsi AB, longitudine est commensurabilis: atque ex definitione 6. *cimi.* Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in HI, *b* erit utrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia utraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis; *c* essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commensurabiles;) *d* erit etiam utraque ipsarum DE, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam utraq; DF, FE, Rationali DF, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, *e* erit utrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.



a 12. *decimi.*

b 20. *decimi.*

c 12. *decimi.*

d 14. *decimi.*

e 22. *decimi.*

Iam vero ipsi AH, *f* fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. *g* Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, ut vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE, *h* erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; *i* Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem: erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. hujus lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: *k* Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale: Ac propterea recta TS, potest spatium AC. Dico TS, Apotomen esse.

f 14. *secundi.*

g 26. *sexti.*

h 17. *sexti.*

i 1. *sexti.*

k 36. *decimi.*

Quoniam enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia: & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM,

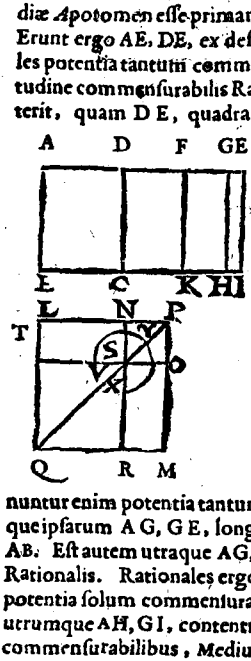
NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum: erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum unum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommensurabiles sunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. *sexti.*
b 10. *decimi.*
c 74. *decimi.*

XCII. LXXXVII. THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. *Dico* rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotome secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, *ut in* propositione præcedenti. *d* Eruntque rursus, ut in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabiles; *e* Ac propterea & utraque toti AE, longitudine commensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine *incommensurabilis*: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; *f* essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles. *g* Igitur & utraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem utraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia solum commensurabiles: *h* Atque idcirco rectangulum utrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia utraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; & ponitur DE, Rationali



b 18. *decimi.*
c 16. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 14. *decimi.*
h 22. *decimi.*

nali AB, longitudine commensurabilis; erit quoq; ut in scholio propos. 12. hujus lib. ostendimus, eidem AB, Rationali longitudine commensurabilis utraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. 4. Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, contentum sub Rationali- a 20. de-bus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, ut cimi. in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam.

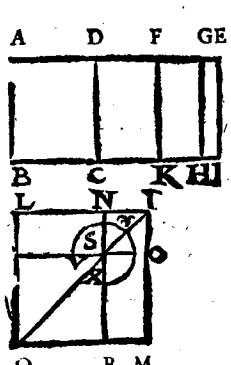
QVONIAM enim AG GE, longitudine sunt commensurabiles, b erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, b 10. de-commensurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, cimi. cõmensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (ostensa enim sunt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea q; Medio NO, incommensurabile; c erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem c 10. de-habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ cimi. sint ostensæ, & commensurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; d erit TS, Mediæ Apotome prima. Si d 75. de-ergo spatium contineatur sub rationali, & Apotoma secunda, &c. cimi. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 70. PROPOS. 94. LXXXIII LXXXVIII.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ si longitudine commensurabiles. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, ut in propos. 92. eruntque rursus, ut ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; e Ac propterea & utraq; toti AE, longitudine commen- e 16. dec. surabilis erit. Est autē AE, posita commensurabilis longitudine Rationali AB, f Igitur & utraque AG, GE, eidem AB, longitu- f 14. de-dine erit incommensurabilis. Cum ergo utraque AG, GE, Ratio- cimi. nali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles:

a 22. decimi.



b 14. decimi.

c 22. decimi.

a Ac propterea utrum; rectangulum AG, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur in commensurabilis Rationali AB; erit quoq; utraq; DF, FE, ipsi DF, longitudine commensurabilis existens, b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis sit Rationalis; erunt tam AB, DE, quã AB, GE. Rationales potentia tantum commensurabiles; c atque propterea utrumq; rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter jam demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

d 10. decimi.

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles sunt, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. hujus lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; e ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc est illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, ut constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus: erit LO, Medium.) f erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia. &c. Quod erat demonstrandum.

e 10. decimi.

f 76. decimi.

XCIV. LXXXIX. THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC. sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. *a* Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; *b* erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis, *c* erit DI, atque adeo & ejus dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; *d* incommensurabilia erunt AG, GI; eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse minorem.

a 10. decimi. b 20. decimi. c 22. decimi. d 10. decimi.

QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Idem quia F, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atqueadeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale; rectangulum vero sub ipsis, Medium; *e* erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. decimi.

THEOR. 72. PROPOS. 69. XCV. XC.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proxime antecedente) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantū commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit quam DE, quadrato rectæ si longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, ut prius. Erunt ergo

rursus, ut in antecedenti propos. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incōmensurabilis est, Rationali AB, ut in propos. 93. diximus; a erit rectangulum AL, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; b erit DI, atq; idcirco & ejus dimidium FI, Rationale. Rursus erunt, ut in præcedenti propos. AH, GI, incommensurabilia; poteritque, ut ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

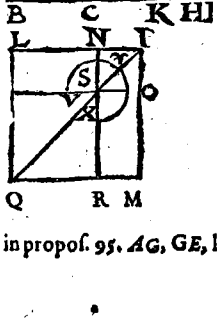
a 22. decimi.
b 20. decimi

QVONIAM enim ostensum est AI. Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstravimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, ut in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationale; c erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

c 78. decimi.

THEOR. 73 PROPOS. 97.

xcvj. SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma xcj. sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, ut supra. Erunt ergo rursus, ut in propos. 95. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia tam

tam AE, quam DE. Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; a erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; b Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sint, b erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ c cum Medio Medium totum efficit.

a 22. decimi.

b 10. decimi.

c 14. decimi.

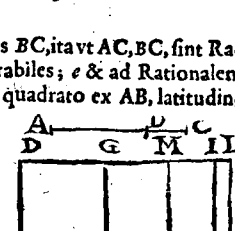
QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile; d erit reliqua TS, ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

d 79. decimi.

THEOR. 74. PROPOS. 98. XCVII. XCVIJ.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; e & ad Rationalem DE, applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primã. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit composito ex quadratis rectarum AC, BC. f Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; sin auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque ado diuisa GL, bifariam



e 45. primi

f 7. secundi

riam in M, ductaque MN. ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC,BC. Et quoniam AC,BC, Rationales sunt;erunt quoque quadrata ex AC,BC, Rationalia; ideoque commensurabilia. a Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC,BC, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, b erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; c erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale & GK, Medium, hoc est, Irrationale incommensurabilia sunt: d erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; e Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse.

a 26. decimi

b 21. decimi.

c 23. decimi.

d 10. decimi.

e 74. dec.

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB, hoc est, MK, Medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. f Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, g erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata, atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; h poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cū sit ostensum DG, esse Apotomen, & totā DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotome ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

f 17. sexti.

g 10. decimi.

h 10. decimi.

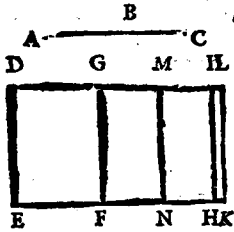
THEOR. 75. PROPOS. 99.

x cviij. xciij.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT *Mediæ* Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC,BC,ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale: *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF,latitudinem faciens DG. Dico DG,Apotomen ſecundam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ in antecedenti propoſ.ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC: & GK, æquale ei, quod ſub AC,BC,continetur; ac proinde MK,ei,quod ſub AC,BC,continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC,Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & eadem quadrata,hoc eſt,illis æqualia, DH,IK, Media & commenſurabilia; *b* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & *Medium* per coroll.prop. 14. huius libri. Cum ergo DK,applicetur ad Rationalem DE, *c* erit DL,Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale,ponitur,erit quoque eius duplum GK,Rationale. Quod cum applicetur ad Ratonalem DE,*d* erit GL, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi DE. Quia vero DK,*Medium*,id eſt,Irrationale, & GK, Rationale,incommenſurabilia ſunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ,erunt DL, GL,Rationales potentia tantum commenſurabiles; *f* Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter,vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL,plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum congruens GL,oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE.erit ex defin.DG, Apotome ſecunda. Quadratum ergo *Mediæ* Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.



a 45. *primi.*
b 16. *decimi.*
c 23. *dec.*
d 21. *decimi.*
e 10. *decimi.*
f 27. *decimi.*

THEOR. 76. PROPOS. 100.

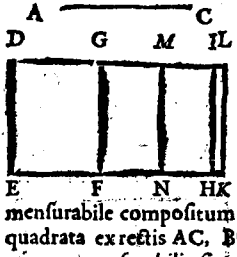
(xcix. xciv.)

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT *Mediæ* Apotome ſecunda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC,BC, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineatque *Medium*: *g* Et ad Rationalem DE,applicetur DF. æquale quadrati ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe tertiam Apo-

g 45. *decimi.*

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iam. vt in
a 23. decimi. propos. præcedenti DK, Medium esse, *a* atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id & eius duplum GK,



b 23. dec. *b* erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, *c* erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. *d* Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 24. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi GK. *e* Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensa & Rationes. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; *f* Ac proinde reliqua DG, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

c 10. decimi.

d 16. decimi.

e 10. decimi.

f 74. decimi.

C. XCV. THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero sub AC, BC, Medium: *g* & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; *h* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine com-

g 45. primi.

h 21. decimi.

ne cõmensurabilis. Item quia rectangulũ sub AC, BC, atque adeo & eius duplũ GL, Medium est; *a* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium incommensurabilia sunt: *b* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potẽtia tantum cõmensurabiles: *c* Ac propterea reliqua LG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BG, potentia sunt incommensurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum: *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis: erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur *M*inoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 74. *decimi.*
d 10. *dec.*
e 19. *decimi.*

THEOR. 78. PROPOS. 102. CI. XCVI.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali *M*edium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: rectangulum vero sub ijsdem AC, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; *g* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; *h* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales

f 45 *primi.*
g 23. *decimi.*
h 21. *decimi.*
i 10. *decimi.*

nales ostensæ. Rationales ergo sunt DI, GL, potentia solum commensurabiles: a Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est: Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedēti propos. demonstrauimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

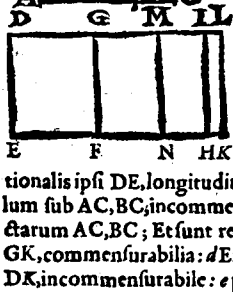
a 74. decimi.

cij. xcvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio *M*edium totum efficiens *AB*, & ipsi congruens *BC*, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum AC, *BC*, Medium & rectangulum sub ijsdem AC, BC, *M*edium, incommensurabileque compositio ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato, ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quam rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est; c Erit tam DL, quam GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum GK, commensurabilia: d Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi DK, incommensurabile: e propterea quæ rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles. f Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam DL, plus posse quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commensurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta: Quadratum ergo eius, quæ cum *M*edio *M*edium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.



b 45. primi.

c 23. decimi.

d 14. decimi.

e 10. decimi.

f 74. decimi.

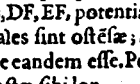
THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

ccxcviij. cciij.

RECTA linea, Apotomæ longitudine commensurabili: & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commmensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AE; *a* Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles: *c* Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine: Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles: erunt quoque ex ijs, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ; *d* reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AG, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali: erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis: Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, sit commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



a 12. sexti. *b* 12. quinti. *c* 10. decimi. *d* 74. decimi. *e* 15. decimi. *f* 12. decimi. *g* 14. decimi.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi logitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. dec.

SCHOLIVM.

IDEM hic discemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius libr. de lineis

lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum si recta DE, *commensurabilis sit ipsi* AB, *potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraq; nempe Rationalis expositæ, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est: sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero* DF, *potentia tantum ex hypothesi. Imo vero, si AB, sit Apotome primæ, secundæ, quartæ, vel quintæ, fieri nullo modo potest, vt* DE, *illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.*

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, eique congruens BC. *& sit* DE, *ipsi AB, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem* EF, *& partes AB,* BC, *ad partes* DE, EF, *eandem proportionem habere cum totis* AC, DF. *Dico nulla ratione* DE, *Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam* AC, *tota, quam tota* DF, *ex definitione Apotomæ prima, Rationali expositæ commensurabilis longitudine:* a *atque ideo & inter se longitudine commensurabiles erunt* AC, *&* DF. *Quare cum sit vt AC, ad* DF, *ita AB, ad* DE: b *erunt quoque AB, &* DE, *longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim* DE, *ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB,* DE, *Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens* BC, EF, *ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsæ inter se. Quocirca & AB,* DE, *inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

a 12. decimi.

b 10. decimi.

SEMPER tamen verum est, si AB, *est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam* DE, *quæ ipsi AB, potentia solum est commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit* AC, *plus quam* BC, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt* AC, *ad* BC, *ita* DF, *ad* EF, c *poterit quoque* DF, *plus quam* EF, *quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit* DE, *Apotome prima vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt* AC, *plus possit, quam* BC, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit quoque* DE, *Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamuis ordine non eadem ipsi AB: quia rursus, cum sit vt* AC, *ad* BC, *ita* DE, *ad* EF, d *poterit quoque DF, plus quam* EF, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit* AB, *Apotome quarta vel quinta, vel sexta.*

c 15. dec.

d 15. decimi.

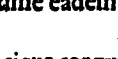
IN

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. CIV. RCIX.

Recta linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita B, C, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque BD, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, mediæ sunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; Et permutando vt AC, F, ad BC, ita D, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *h* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.



a 12. sexti. b 12. quinti. c 10. decimi. d 24. decimi. e 75. vel 76. dec. f 10. decimi. g 75. decimi. h 76. decimi.

ev. cxvj. c.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

Recta linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

Sint *Minor* AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratati rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub ijsdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, *Minorem* esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC,

a 22. *sexti.* ita DF, ad EF, *a* erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratū ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostendimus commensurabiles esse. *b* Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectanguo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, *Medium*: Erit quoque rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. *Medium*. Et quia est vt AC,

b 10. *dec.*

c 10. *sexti.* ad BC, ita DF, ad EF, sunt que AC, BC, potentia incommensurabiles; *c* erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quamobrem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, *Medium*; *d* erit DE, Minor. Recta ergo linea *Minori* commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

d 77. *dec.*

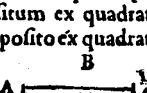
ev. cxvij. cj.

THEOR. 83. PROPOS. 107.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

Sit

Sit recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt BC, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim ijsdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potentia incommmensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. cij.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

Sit recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet cõmensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim ijsdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 105. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF; Sunt autem compositum ex quadratis rectarum

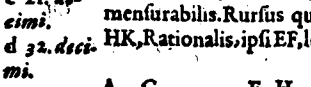
ctarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius libri compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis *Medium*; incommensurabileque
a 79. decimi. compositio ex ipsarum quadratis; *a* erit D, E, quæ cum *Medio Medium* totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum *Medio*, &c. Quod erat ostendendum.

cviiij. ciij.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus, fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectā, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, *b* ad quam applicetur rectangulum
b 45. primi. EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi GD. ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; *c* erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine com-
c 21. decimi. mensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est *d* erit
d 32. decimi. HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum



e 13. decimi. EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, *e* erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles *f* propterea que reliqua EH,
f 74. dec. Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF, erit ex defin. EH,
h 92. decimi. Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, *g* Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF, erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale.

g Mi-

a Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. dec.

THEOR 86. PROPOS. 110. CIX. GIX.

Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim constructione manente, quæ supra. Et quia EI. Medio AD, æquale. Medium est; b cimi. erit EK, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item c 21. de quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; c erit HK, Rationalis cimi. ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine d 13. de incommensurabilis; d erunt HK; EK, longitudine incommensu- cimi. rabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum cõmensurabiles; Ac proinde reliqua EH, Apotome est, & ei congru- e 74. dec. ens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, f Mediæ est Apotome prima. f 93. dec. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & g 96. de Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, g est ea, quæ cimi. cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem rationali à Medio detracto. Quod ostendendum erat.

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti. reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel

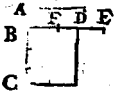
Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim ijsdem quæ supra; quoniam EI, HI, Medijs
a 23. dec. AD, CD, æqualia Media sunt, *a* erunt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine commensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur in-
b 10. dec. commensurabilia; *b* erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles;
c 74. dec. *c* Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine cmõensurabilis, cum neutra ipsarũ EK, HK, Rationali EF, lõgitudine cõmensurabilis sit ostensa; erit ex def. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum
d 94. dec. sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; *d* Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus, erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quamobrem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma
e 97. dec. sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *e* est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

cxi. cvi.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest A, aliqua ex binis nomini-
f 45. primi. bus. Exposita autem Rationali BC, *f* applicetur ad BC, rectangu-



g 98. dec. lum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est: *g* erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; *h* erit latitudo ea-
h 62. dec. dem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex def. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF, FD,

FD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa BF, Rationali BC, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; *a* erunt quoque BE, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, ſit longitudine commenſurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ *16.* huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BF, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE, Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles) *b* erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt FE, DE, potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, *c* Apotome eſt; Atque ideo irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis *nominibus*. Quod demonſtrandum erat.

a 12. *decimi*

b 14. *decimi*

c 74. *decimi*

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum *d* latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.

d 23. *decimi*

Atquadratum Apotomæ ad Rationalem applicatam, *e* latitudinem efficit Apotomen primam.

e 98. *decimi*

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatam, *f* latitudinem efficit Apotomen ſecundam.

f 99. *decimi*

Quadratum vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam.

g 110 *decimi*

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam.

h 101. *decimi*

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam.

i 102. *decimi*

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen ſextam.

k 103. *decimi*

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales: inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & à Media, & inter ſe differre.

Quoniam vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipſam ſequuntur,

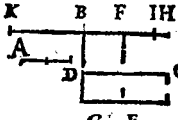
ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cũ & tam illæ, quam hæ à media differant: efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputauimus: Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

cxiij. o.

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



a 45 primi.

Sit Rationalis A, & ex binis nominibus CB, cuius maius nomen CB, a & ad EC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico BF, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione, & adhuc Apotomen BF, esse ordine eandem ipsi BC, ex binis

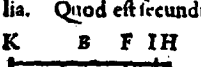
binis nominibus. *e* Applicetur enim rursus ad DC, minus no- a *45. primi*
men, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex *A*, atque adeo
rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqua-
lis IH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG, *b* erit ut BC, ad DC, b *14. vel*
ita LG, hoc est, sibi æqualis *BH*, ad BF. Et dividendo ut BD, ad *16. sexti.*
DC, ita GF, ad FB: Est autem BD, major quam DC. Igitur &
IF, major est quàm FB: Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; *c* & fiat ut c *12. sexti.*
HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo ut HF, ad
IF, hoc est, ad sibi æqualem *BF*, ita FK, ad BK. Ostensum est
autem esse ut HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque ut
BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius
BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum com-
mensurabiles. *d* Igitur & FK, BK, potentia solum commensura- d *10. de-*
biles sunt. *cimi.*

Rursus quia est ut HF, (ad BF, ad FK, ad BK, *e* erunt quo- e *12. quin-*
que HF, FK, antecedentes simul nempe tota HK, ad *BF*, & BK, ti. *decimi.*
consequentes simul, hoc est, ad totam FK, ut FK, ad BK. Ac
propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare
ut HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6.
quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia
vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato rationalis A,
æquale) ad Rationalem DC, applicatum, *f* facit DG, latitudi- f *12. decimi*
nem Rationalem ipsi DC, longitudine incommensurabilem; Erit
quoque *HB*, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine com-
mensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse ut BD, ad
DL, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quo-
que ut BD, ad D, C, ita HK, ad FK. *g* Igitur ut quadratum ex BD, g *22. sexti.*
ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex
FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC,
(quod rectæ BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles,
cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) *h* Commensu- h *10. de-*
rabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed *cimi.*
fuit ut quadratum ex HK, ad quadratum ex FK, ita recta HK, ad
BK. *i* Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; at- i *10. de-*
que adeo reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. hujus lib. Ostensa *cimi.*
est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis,
Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis,
Rationalis existit. Cum ergo ostensa FK, ipsi BK, potentia solum
commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK,
BK, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensura-
biles, k erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod k *74. de-*
est primum. *cimi.*

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totam
parti BK, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea & l *16. de-*

BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoq; BK, ex scholio propos. 12. hujus lib eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse ut BD, ad CD, ita FK, ad BK; & permutando ut BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles;

a 10. decimi. a Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



Item quia demõstravimus esse ut BD, ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominib. ipsius BC, quæ est ex binis nominib. Quod est tertium. Postremo vel BD, plus potest, quàm DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit ut BD, ad DC, ita FK, ad BK;

b 13. decimi. b poterit quoq; FK, plus quam BK, quadrato, rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. hujus lib demonstravimus. Si vero DC, sit Rationali commensurabilis longitudine: erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum

c 14. decimi. BD, DC, sit Rationali longitudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, ut constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

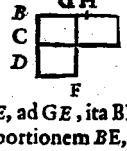
cxiij. o.

THEOR. 39. PROPOS. 114.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus sit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

Sit Ra-

Sit Rationalis A, & Apotome B, C, cui congruat CD, *a* & ad BG, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione: & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. *b* Applicetur enim rursus ad BD, totã, rectangulum BF, æquale, eidem quadrato ex A, h. e. ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; *c* erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conversionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoq; EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex iis, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus: ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoq; BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BG, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantum commensurabiles. *d* Erunt quoq; BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habent rationem cum quadratis ex BH, HE, ut demõstravimus, *e* longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensurabilis existens parti GH, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. hujus lib. At vero cum BD, Rationalis sit, nempe majus nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale, *f* erit latitudo BG, Rationalis commensurabilis, longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. hujus lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commensurabilis, Rationalis Rationales ergo sunt BH, HE, potentia solum commensurabiles; *g* Ac propterea BE, ex binis nominibus est. Quod est primum.



a 45. primi
b 45. primi
c 14. vel. 16. sext.
d 10. decimi.
e 10. decimi.
f 21. decimi.
g 37. decimi.

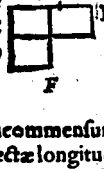
Quoniam vero ostendimus esse BH, ad HE, ut BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, ut HE, ad CD; Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis; *h* erit quoque

h 10. decimi.

que HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum.

Immo & in eadem proportione, cum demonstratum sit esse BH, in EH, ut BD, ad CD. Quod est tertium.

Postremo vel BD, plus potest quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, a poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoq; BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. hujus lib. Si vero CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si vero neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; b erit quoque neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt. Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.



a 15. decimi.

b 14. decimi.

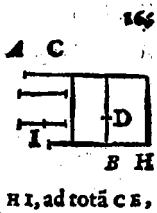
CXIV. THEOR. 91. PROPOS. 115.

Si spatium contineatur sub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

Contineatur spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cujus nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione nempe CD, ad DB, ut CE, ad AE. Possit autem recta F, spatium AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, c applicetur ad GB, quæ ex binis nominibus rectangulum CH, æquale quadrato ex G,

c 45. primi

ex G, a Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B, & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atq; adeo ut C E, A B, & permutando ut tota H I, ad totã C E, ita ablata B I, ad ablatã A E,



a 115. decimi.

b Erit ergo & reliqua B H, ad reliquã A C, ut tota H I, ad totã C E, b 19. quinti.

c Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quod utraq; H I, C E, commensurabilis fuerit longitudine ipsi C D. d Igitur & B H, ipsi A C. Longitudine est commensurabilis, e Atque idcirco & H C, ipsi B A, commensurabile erit, f cum sit ut H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea que & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

c 12. decimi.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, fieri, posse ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

In proximis autem tribus propositionibus intelligendæ sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116.

cxv. cvij.

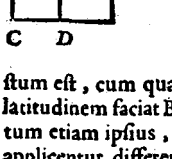
A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarũ nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius libr. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD.

Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum,

tentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. hujus lib. Possit ipsum recta *BE*, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico *BE*, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. hujus lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem *AC*, applicatum, *a* latitudinem faciat Rationalem ipsi *AC*, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem *AC*, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, ut constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. hujus lib. At verò quadratum hujus Irrationalis *BE*, ad eandem Rationalem *AC*, applicatum, faciat *AB*, latitudinem Mediam; perspicuum est Irrationalem *BE*, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem ejus quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. *decimi.*



Quod si compleatur rectangulum *DE*; erit & hoc contentum sub Rationali *BD*, & Irrationali *BE*, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta *EF*, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus *EF*, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi *BE*, Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius *EF*, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat *BE*. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à *BE*, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ invenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

cxviij.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

vij.

Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum *ABCD*, in quo diameter *AC*. Dico diametrum *AC*, longitudine incommensurabilem esse lateri *AB*. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; *b* ac propterea *AC*, *AB*, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat *AC*, ad *AB*, proportionem, quam numerus *EF*, ad numerum *G*; sintque numeri *EF*, & *G*, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est ut *AC*, ad *AB*, ita numerus *EF*, ad numerum *G*, Erit quoq; ut quadratum

b 5. *dec.*

dratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, a (Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex C: Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit dividi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit, (Si namque impar esset, cum seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; b eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum, ostensus est enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, c inter se primi sunt: & EF, ostensus est par: erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur utrumque EF, & C, binarius: atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Dividatur jam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, d & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G: & quadruplus quadrati ex EH: qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G: & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH. cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

a 20. sext. & 21. octav. vi.

b 29. noni.

c 24. septimi.

d 11. oct.

Aliter. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB: habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione: atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum quadrati ex AB: sit autem ut quadratum ex AC, ad quadratum ex AB ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ut in priori demonstratione diximus: erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est unitas, atque adeo & quadratus ex ea, unitas: erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, ut jam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus

duplus est quadratus ex G, metietur quadratus ex G, quadratum
a 14. hui. ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF.
A B Cum ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri EF, &

G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum C: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter
D C AC, longitudini lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem
E. H. E esse longitudine. Quod erat demonstrandum.
G----

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32.
b 2. noni. *64. &c. b solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate nempe 2. quadratus non sit, erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum,*
c 24. offi. *(c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diameto ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommensurabilis ergo*
d 9. decimi. *est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.*

Hoc etiam theorema aliter demonstrabimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. & in scholio propos. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quadam cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti posset. Verùm quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, in-
A —— *venietur & alia quam plurima magnitudines, plane scilicet, atque solide incommensurabiles inter se.*
B ——
C —— *Sunt enim rectæ AC, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 40. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem*

milem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; a erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

Rursus b quoniam circuli, quorum diametri A B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; positæ proportionem habent, quam rectæ A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. c Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quã rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommensurabiles sunt longitudine. d Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duo decimi. c 11. quinti d 10. decimi.

Iam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, B, e habebunt pyramides atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; f incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, g habebunt hujusmodi coni, & cylindri eandem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, h Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inventæ sunt igitur non solum lineæ & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, sive solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duo decimi. h 10. decimi.

Eadem autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, i ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, k atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POstquam Euclides in prioribus sex libris aliunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, usurpavit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in lib. 10. deinde exposuit, ut constructio, atq; natura quinq; corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc lib. 11. eam partem Geometriæ, quæ corpora, sive solida considerat, proprioq; vocabulo Stereometria est appellata.

Explicat autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum sive corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem ita tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, sive corpus, quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adjicit, superficies vocatur, ut in primo libro diximus.

Porro

Porro quemadmodum Mathematicis, ut recte intelligamus lineam, percipiunt, ut imaginemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hæc enim describit vestigium quoddam lõgum tantum, hoc est, lineam, præterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hæc enim describit vestigium longum & latum duntaxat; longum quidē propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum qui in transversum est factus: carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoq; ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquā æqualiter elevari, sive in transversum moveri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem quæ longa & lata existit: profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum sive corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentariis, qui in sphæram Ioannis de Sacro Bosco, conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

II.

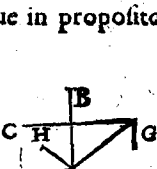
Solidi autem extremum, est superficies.

Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, sive corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

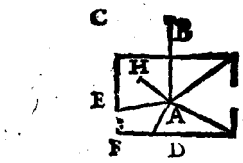
III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

Vt linea recta A B, plano D, insistens, ita ut B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cum rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A.

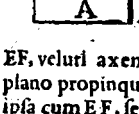


Hac enim ratione fiet, ut A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cum angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque



G deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Et propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, ducta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD, itaq; quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, qui ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

Vr autem recta quæpiam plano cuicunq; insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipsamq; tangentibus, satis est, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, ut perspicuum fiet ex propos. 4. hujus lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatque rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam unam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atq; idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumverti queat ita ut punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihil minus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, ut diximus, id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. hujus lib.

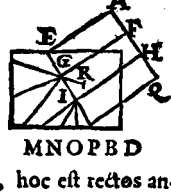


IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Insistat planum AB, plano CD, ita ut linea AQ, sit in sublimi

mi, hoc est, extra planum subjectum CD, C
ut EB, in ipso eodem plano. Sit autem ho- K
rum planorum communis sectio EB, quæ L
ut demonstrabitur propos. 3. hujus lib. recta
erit linea. In hac autem sumptis quotcun-
que punctis G, I, ex ipsis in plano AB, du-
cantur GF, IH, perpendiculares ad com-
munem sectionem EB. Si igitur lineæ



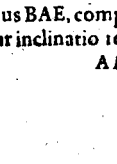
MNOPBD

FG HI. ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient utrobiq; à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD; insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planū aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas rectas esse ad reliquum planum.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea & adiuncta comprehensus.

Insistat recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B, sit extra planum in sublimi, punctū vero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planū deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad



D

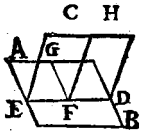
A, adiungatur recta EA; eritq; necessario angulus BAE, acutus [a] est in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis mi- [a] 17. primi
nores; & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ

AB, ad dictum planum CD; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ *AB*, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus *BAE*.

VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

Plano namque AB, insistat planum CD, ita ut pars ad C, sit in sublimi extra planum *AB*, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit *DE*. Si igitur ad *DE*, communem sectionem ex ejus puncto F, duæ perpendiculares ducantur; *FG*, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus *GFH*, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



Interdum Geometræ angulum *CFH*, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum *AB*, sive is acutus sit, sive rectus obtususve: quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem unius plani ad alterum ostendat, ut Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem elevationem unius plani supra aliud quam inclinationem unius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo unius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu elevationem unius plani supra alterum, generaliter dici consuevit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in utroque plano ad aliquod unum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cujusmodi est angulus *GFH*, sive is rectus sit, sive acutus, sive obtusus.

VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

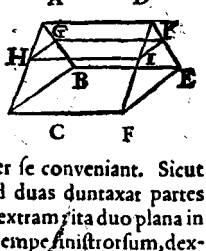
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

Intel-

Intellige, in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc est, sive ad dextram, sive ad sinistram: & sive sursum, sive deorsum, &c Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cujus fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dextram, & ad sinistram; Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cujus Basis B C F E, auferaturque fastigium A C H D K I. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana G B E K, H C F I, non convenire inter se, si ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F; producantur nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes G H, K I, conveniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistrā, & ad dextram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum atq; deorsum. Itaq; duo plana quæcunq; vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conveniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallelæ, neq; unquam conveniunt, si videlicet in diversis sint planis & in transversum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 3. lib. additum fuit; quæ cum in eodem sint plano; Hic autem simpliciter dicitur, quæ nunquam conveniunt.



IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuisset Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse judicavit ut brevitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

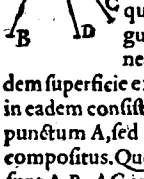
Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora similia, ex præcedenti definitione circumscribantur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur ejusmodi figuræ solidæ non solùm similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo hujusmodi solida neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus, ex eorundem vero æqualitate laterum proportionalium æqualitas, ut in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent: ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Duæ lineæ in eodē existentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt efficiunt angulum planum, ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus *BAC*, contentus duabus lineis *AB*, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, sive corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adjungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes nō debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ *AB*, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est extra planum, in quo sunt *AB*, AC, jam non componetur angulus planis totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A. tres plani consistent anguli *BAD*, DAC, CA*B*, qui, ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idē dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.



ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

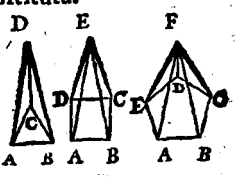
Hæc

Hæc definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. cum enim saltem tres lineæ in eodem nõ existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim *BAD*, in plano est, in quo rectæ *AB*, AD, & angulus *DAC*, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique *CAB*, in plano, in quo rectæ AC, *AB*, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continẽtur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si sese penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



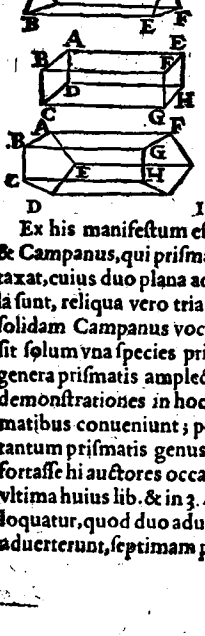
VIDELICET figuræ solidæ à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constitutæ appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana quibus Pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum pũctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim po-

eſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem, vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin triangula ſunt ABD, ACD, BCD, Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: pẽtagonæ deniq; ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.

Figuræ ſcilicet ſolidæ quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia & parallela ſunt triangula ABC, DEF, vel quadrangula ABCD, EFGH; vel pentagona ABCDE. FGHIK, &c. parallelogramma vero ACFD, ABED. CBGF, vel ABFE, ADHE, CDHG, CBGF, vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG, dicũtur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit quam columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes appoſitæ ſunt æquales ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



Ex his manifeſtum eſt, quantum hallucinentur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana adverſa parallela æqualia ſimiliaque triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt conſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib. & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpſerunt autem fortaſſe hi auctores occaſionem errandi quod Euclides & in prop. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Eu-

Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide; frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Imo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis; altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli sphæra inveniri poterit hoc etiam modo.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Cicero in libro de Vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

Axis

XV.

Axis autem sphæræ; est quiescens illa recta linea, circa eum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

Hæ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrũ semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

Conus est: quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circum assumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur. Orthogonius erit conus; Si vero minor, Amblygonius. Si vero maior, Oxygonius.

Vt si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem explcat, describetur solida quædam figura, quæ cõtinetur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curua alia eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

Quod si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videl. angulus prope verticẽ A, rectus est. Cum enim latera AB,

AB,BC,ponãtur æqualia,[a] erunt & anguli BAC,BCA æquales,qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est,erit angulus BAC,semirectus.Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppositæ semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescẽs latus AB,minus fueris circumducto BC,vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A,obtusus existit.Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA.Quare cũ hi duo æquipolleãt vni recto, propterea quod angulus ABC,ponitur rect⁹,erit BAC,semirecto maior.SimiliterBAD, maior erit semirecto:atque adeo totus CAD,recto maior erit.Si denique quiescens latus AB,maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura,appellabitur conus descriptus Oxygonius,seu acutangulus; quianimirum angulus ad verticem A,acutus est. Cum enim latus AB,maius sit latere BC,[c] erit & angulus BCA,angulo BAC,maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant,quod angulus ABC, rectus ponatur,erit BCA semirecto maior,ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD,minor esse semirecto.Igitur totus CAD,recto erit minor.

a 5. primi.
b 18. primi.
c 18. primi.

XIX.

Axis autem coni, est quiescens illa linea,circa quam triangulum vertitur.

Vt in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

Basis vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

Nimirum circulus,qui describitur ab altero latere rectum angulum,quale est BC,in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

Quoniam vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin. Non autem inclinatum,cuius axis ad basim rectus non est: placuit ex Appollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem,quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato,quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano,in quo punctum,coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto; con-

cto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousq; ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum vtraq; in infinitũ augetur, nimirũ recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

Verticem ipsius manens punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

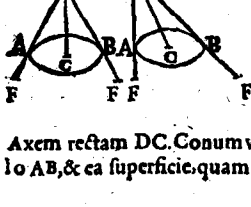
Basim, circulum ipsum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

Sit circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D, iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta EF. Si igitur recta linea DB, feratur eousque circuli AB, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à quo cæpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D, Axem rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam DB, sola describit. Coni verticem punctum



ctum D. Axem DC. Basim AB, circulum, quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum: Sin minus Scalenum.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.

Veluti si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integrum expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque connexa, quã latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur descripti.

Quales sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti. Euclides porro solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim, atque de hoc solum in lib. 12. disputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visũ est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter se æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos

ex ea-

ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur: quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

Cylindrus est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

Cylindri bases sunt circuli ipsi.

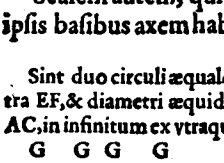
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam cylindri superficiem describere antea diximus.

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent,

Sint duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra EF, & diametri æquidistantes quoque AB, CD; Iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si



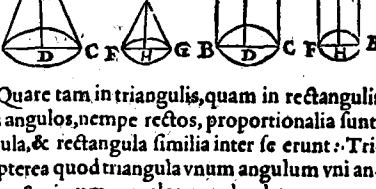
igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorum semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cæperunt, describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram AB, DC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD, Axem rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

Rectæ

Recte Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus,& baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem Axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG, ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe, quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BA, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, *a* ita dimidia BD ad dimidiam FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HE. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, *b* propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, *c* ideoque latera omnia circa angulos æquales habẽt proportionalia atq; adeo inter ſe ſimilia exiſtũt: Rectangula vero, *d* eo quod reliqua duo latera, duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



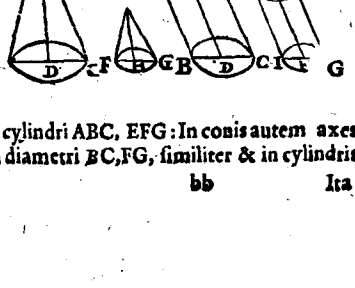
a 15. quinti.

b 6. ſexti.

c 5. ſexti.

d 34. primi.

Quod ſi coni vel cylindri fuerint inclinati, (derectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG, ſimiliter & in cylindris



Itaquè si fuerit tam in conis, quam in cylindris vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationū ADB, FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni interse & cylindri quoque inter sese similes quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum couersiones conos, & cylindros efficerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

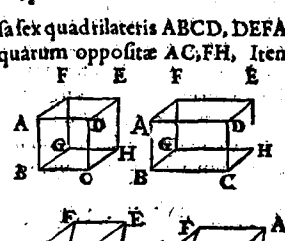
Hæc sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis *corpora* Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymeo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidē prop. 15. Tetraedri vero prop. 13. Octaedri deinde prop. 14. Dodecaedri autē prop. 17. Icosaedri deniq; prop. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporū intelligētur. In plano enim difficillimū est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem atque formam quis inueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles,

les, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit confice-re. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

Quoniam vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidq; sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

Parallelepipedū est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso, parallelæ sunt contenta.



Veluti solida figura cōprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH, Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.

Sunt autem tot parallelepipedorum genera quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedū illud, cubus respondebitque quadrato in planis figuris; si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedū altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedū illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogrāma, quæ ex aduerso æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi

quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ circum quam describitur.

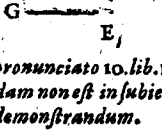
Non est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ cum interdum figura exterior plures interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

Verum duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiosè agetur.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

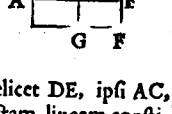
Sit enim si fieri potest, rectæ lineæ AB, *pars quidem* AC, *in subiecto plano* DE, *pars vero* CB, *in sublimi, ita vt omnia puncta partis* AC, *in plano* DE, *iaceant puncta, vero omnia partis* CB, *supra planum* DE, *existant, vel infra. Erit igitur in plano* DE, *ipsi* AB, *rectæ lineæ continua quadam rectæ lineæ in directum posita, nempe* CF. *Quãobrem duæ rectæ* AB, AF, *commune habent segmentum* AC. *Quod est absurdum, vt in pronunciato* 10. *lib.* 1. *demonstrauimus. Recta igitur linea pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum.*



SCHOLIVM.

Hæc est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, indirectum & continuum positam. Qui enim concedit rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem vero CB, in sublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari

dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ rectè, & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F. erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam idipsum Geometrice, in plano videlicet DE, ipsi AC, dare posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. *a* Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG, & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione, *b* erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.



a 11. primi.

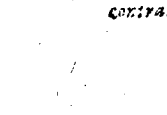
b 14. pri.

Nunc fit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omnem in vno est plano.

Rectæ lineæ AB, CD, se muto secent in E, *& in* EB, ED, *sumptis punctis* F, *&* G, *vtcunque, ducatur recta* FG, *vt fiat triangulum* EFG. *Dico triangulum* EFG, *in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli* EFG, *pars quidem nimirum* EHG, *in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua* FHI, *in sublimi, vel contra: Existent quoque rectarum* EF, GF, *partes quidem* EH, GI, *in vno plano, partes vero* HF, IF, *in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra* c *demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem* EFK, *in vno plano credatur esse; pars autem* GIK, *in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum* EG, FG, *partes quidem* EK, FI, *in vno plano, partes vero* KG, IG, *in sublimi, vel contra.*



c 1. undecimi.

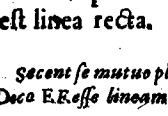
contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FH, KG, in uno concedatur esse plano pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in uno plano, partes autem HE, KE, in sublimi vel contra. Quæ omnia absurda sunt, a 1. undecimi. *ut est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.*

b 1. undecimi. *Quia vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG: b in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quidem in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.*

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

Secent se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur



in plano AB, recta EG, F, & in plano CD, recta EHF. Recta igitur EG, F, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, E, GF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secanti-

bus,

bus in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

Recta linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; a erunt ipsa in uno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; b & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi æquales. c erunt Bases GK, HI, inter se, & anguli BGK, BIH, inter se quoque æquales.

a 2. undecimi.

b 15. primi.

c 4. primi.

Rursus d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. e Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

d 15. primi.

e 26 primi.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, f erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

f 4 primi.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triãguli AKG æqualia sũt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demõstratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, à dictis lateribus comprehensi æquales.

g 8. pri.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM: & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus: h erunt quoque bases AL, AM, æquales.

h 4. primi.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis: i erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt ex defin. 10 lib. 1 Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum rectæ LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademque

i 8. primi.

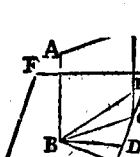
ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta, GB & KH, ducta sint, dummodo recta GI, KH, iungantur: vel certe litera disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eadem sunt litera, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CE, DF, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

Insistat recta linea AB, *tribus rectis lineis* BC, BD, BE, *se tangentibus in* B, *ad rectos angulos in communi eorum sectione, seu tactu* B. *Dico tres rectas* BC, BD, BE, *in vno plano esse.* a *Cum enim quilibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes* B, *se mutuo secent in* B; *sint* BC, BD, *in plano* FC; *Et si fieri potest, recta* BE, *non ponatur in eodem plano, sed in sublimi.* b *Quoniam vero duæ rectæ* AB, BE, *in vno sunt plano, cum se mutuo secent in* B, *sint ambæ in plano* AE. *Et quia plana* FC, AE, *sibi mutuo occurrunt in* B; *necessario producta se mutuo secabunt.* c *Sit ergo eorum communis sectio recta* BG. *Quia vero recta* AB, *ad angulos rectos ponitur rectis* BC, BD; d *erit propterea & plano* FC, *per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta* BG, *quæ ipsam in* B, *tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli* ABE, ABG, *existentes in plano* AG, *per rectas* AB, BE, *ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis* BG, BD, *in vno plano* FC, *existentibus, non erit* BE *in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.*

a 2. *vndecimi.*



b 2. *vndecimi.*

c 3. *vndecimi.*

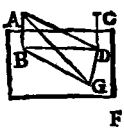
d 4. *vndecimi.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD.



Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quos ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; a erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoq; GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare recta DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaq; rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. primi.
b 8. primi.
c 3. undecimi.
d 2. undecimi.
e 20. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

In parallelis AB, CD, sumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum sunt parallelæ AB, CE. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet jam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, f quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent, quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF, Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint qualibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

f 3. undecimi.

SCHOLIVM.

Hæc eadem proposito vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, ut manifestum est ex demonstratione.

viii. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB, CD: sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim BD, *in plano*, EF, *erit per defin. 3. huius lib. angulus*

a 29 primi

CDB, rectus: a *Sunt autem duo* CDB, ABD, *duobus rectis æquales. Igitur &* ABD, *rectus erit. Iam in plano* EF, *ducatur* BG, *perpendicularis ad* BD: *ponanturq; æquales* BG, CD. *Conjungantur deinde rectæ* DG, GC, CB. *Quoniam igitur latera* CD, DB, *trianguli* GDB, *æqualia*

b 4. primi.

sunt lateribus GB, BD, *trianguli* GBD, *ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti*, CDB, GBD, *æquales, nimirum recti:* b *Erunt bases* CB, GD, *æquales; Rursus quia latera* CD, DG, *trianguli* CDG, *æqualia sunt lateribus* GB, BC, *trianguli* GBC, *&*

c 8. primi.

basis est communis CH: c *Erunt anguli* CDG, GBC, *dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem* CDG, *rectus ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta* GB, *duabus rectis* BD, BC, *se mutuo secantibus in* B, (*Si namque producerentur* DB, CB, *secarent sese in* B, *ob angulum* CBD,) *ad rectos angulos*

d 4. undecimi.

existent: d *ac proinde ad rectos angulos erit plano per* BD, BC, *ducto: Est autem in hoc eodem plano recta* AB: c *propterea quod*

c 7. undecimi.

rectæ BD, BC, *in eodem sunt plano, in quo parallelæ* AB, CD: *cum*

f 4. undecimi.

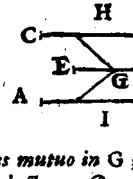
puncta B, C, D, *existant in parallelis* AB, CD. *Igitur & GB, recta rectæ* BA *ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius. lib. Quare cum* AB, *recta sit ad rectas* BG, BD; f *erit quoque* AB, *recta ad planum per* BG, BD, *ductum, hoc est, ad planum* EF. *Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.*

ix. ## THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, *ipsi* EF, *parallelæ; non sint autem in eodem*

in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, *parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto* G, *rectæ* EF, *ad ipsam* EF, *ducantur duæ perpendiculares*; GH, *quidem in plano parallelarum* AB, EF, *at* GI. *in plano parallelarum* C, D, EF. *Quoniam igitur* EG, *recta est ad duas rectas* GH, GI, *se tangentes mutuo in* G; a *erit recta quoque ad planum per ipsas* GH, GI, *ductum. Quamobrem cum sint parallelæ* AB, EF, & EF, *sit recta ad planum per* GH, GI, b *ductum*; b *erit quoque* AB, *ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ* CD, EF, *sit autem* EF, *recta ad planum per* CH, GI, c *ductum* c *erit etiam* CD, *recta ad idem planum*; d *Atque proinde rectæ* AB, CD, *cum rectæ sint ad idem planum per* GH, GI, d *ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.*



a 4. *undecimi.*
b 8. *undecimi.*
c 8. *undecimi.*
d 8. *undecimi.*

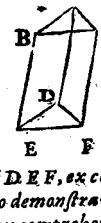
SCHOLIVM.

Data opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF, essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Supervacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas ex se mutuo tangentes sint parallelæ, nõ autem in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent.

Sint rectæ AB, AC, *se tangentes in* A, *parallelæ rectis* DE, DF, *se tangentibus in* D; *non sint autem* AB, AC, *in eodem plano, in quo* DE, DF. *Dico angulos* BAC, EDF, *ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim* AB, DE, *inter se æquales, &* AC, DF, *inter se; ducantur & rectæ* BC, EF, BE, AD, CF. *Quoniam igitur* AB, DE, *parallelæ sunt & æquales*; c *erunt quoque* BE, AD, *parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales* CF, AD. *Quare cum* BE, CF, *parallelæ & æquales sint eidē* AD, *ferunt etiam* BE, CF, *inter se parallelæ, & æquales*; g *Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ* BC, EF. *Quia ergo latera* AB, AC *trianguli* ABC, *æqualia sunt lateribus* DE, DF, *trianguli* DEF, *ex constructione*; *& basis* BC, *basi* EF, *æqualis, ut modo demonstravimus*; h *Erunt & anguli* BAC, EDF, *dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.*

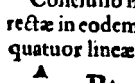


c 33. *primi.*
f 9. *undecimi.*
g 33. *primi*
h 8. *primi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

Conclusio hujus theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, sitque AB, ipsi D, E, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturque rectæ BC, EF, quæ aut in una recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in una recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt



a 29. primi AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC,

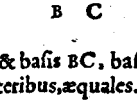
b 32. primi æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.

Non sint jam BC, EF, in una recta linea constitutæ. Ductis re-

c 33. primi ctis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem

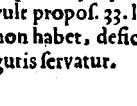
d 30. primi AD, parallelæ existentes & æquales, d inter se

e 33. primi parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaq; cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF,



f 8. primi. & basis BC, basi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.

Cæterum ut conclusio hujus theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas (sive omnes sint in eodem plano sive non) ut tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuo secent, ut ex prima & ultima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.



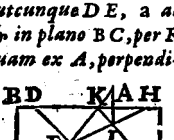
Sunt enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo eveni t, quod AD, CF, se mutuo secant. Vade quamvis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas conjungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non conjungunt ad easdem partes, ut vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio hujus theorematis locū non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus locis servatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit à puncto A, *in sublimi ad subjectum planum* BC, *ducenda perpendicularis. Ducatur in plano* BC, *recta utcunque* DE, a *ad quam ex* A, *deducatur perpendicularis* AF: *& in plano* BC, *per* F, *ad* DE, *perpendicularis ducatur* GH, b *ad quam ex* A, *perpendicularis dimittatur* AI. *Dico* AI, *esse perpendicularem ad planum subiectum* BC.



c *Ducta enim in plano* BC, *per* I, *ipsi* DE, *parallela* KL, *cum* DF, *ad* d *rectos angulos sit duabus* FA, FH, *ex constructione,* e *ac proinde recta ad planum per* FA, FH, *ductum,* f *erit quoque* KI, *ad idem planum per* FA, FH, *ductum recta.* g *Quoniam vero* AI, *in eodem est cum rectis* FA, FH, *plano, tangitque rectam* KI, *in* I; *erit per definitionem* 3. *huius lib. angulis* KIA, *rectus; atque adeo* AI, *ad rectos angulos erit duabus* KI, I F. h *Igitur* AI, *ad planum* BC, *recta erit. A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.*

a 12. *primi.*
b 11. *primi.*
c 12. *primi.*
d 31. *primi.*
e 4. *undecimi.*
f 8. *undecimi.*
g 12. *undecimi.*
h 4. *undecimi.*

SCHOLIVM.

Quod si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita ut eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis, i erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad utramque DE, GH.

i 4. *undecimi.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, rectos angulos rectam lineam excitare.

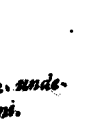
Sit à dato puncto A, *in plano* BC, *ducenda perpendicularis ad datum planum* BC. k *Ex quovis puncto* D, *in sublimi dimittatur ad planum* BC, *perpendicularis* DE, *quæ si ceciderit in* A, *punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum* E; *extensa recta per* E, *&* A, l *ducatur per* A, *ipsi* DE, *parallela* AF, *in plano* GH, *per* DE, EA, *ducto. Dico* AF, *rectam esse ad planum datum* BC. *Cum enim* DE, AF, *parallelæ sint; &* DE, *recta ad planum* BG, *ex constructione:* m *erit quoque* AF, *ad idem planum* BC, *recta.* n *Igitur quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.*

k 11. *undecimi.*
l 31. *primi.*
m 8. *undecimi.*

THEOR.

XIII. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eadem partes.



Sit datum planum AB. Dico à dato in puncto C, ad eadem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, a quo in uno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, recta sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eadem partes. Quod erat demonstrandum.

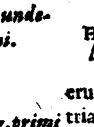
a 2. undecimi.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. undecimi.

SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in sublimi ad subjectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subjectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, c quæ in uno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum AC, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo AD, E. Quod est absurdum: d cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quovis assumpti.



c 2. undecimi.

d 17. primi

Aliter. Si AD, AE rectæ sunt ad planum BC, ipsæ e erunt inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. undecimi.

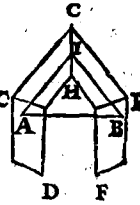
XIV. THEOR. 12. PROPOS. 24.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

Sit recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se convenient. Conveniant ad partes C, E, f & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto utcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur

f 3. undecimi.

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a *Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conveniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.*



a 17. primi

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrari poterit conversum hujus, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

Sint duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea erit recta EF. Dico EF, rectã quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens faciatq; communes sectiones cũ dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. hujus lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quæ rectæ FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, convenient, nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum L; *b* cum tota recta HGL, sit in uno plano, nempe in AB, producto: Itẽ tota recta KIL, in uno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cũ ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta *c* quoque erit EF, ad CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.

b 1. undecimi.

c 4. undecimi.

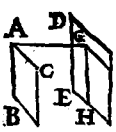
THEOR. 13. PROPOS. 15. XV.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibus & in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. c *Deinde in*

d 11. undecimi.

plano c 31. primi.



a 9. undecimi. b 29. primi

plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DB, parallel. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; a erunt & AB, GH, inter se parallelæ; b Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. hutus lib. Rectus ergo erit & angulus BAG, simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum

c 4. undecimi. d 14. undecimi.

recta GA, sit recta duabus AB, AC, c recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. d Igitur parallelæ sunt plana BC, EF. Si ergo duo recta linea se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

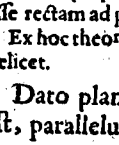
SCHOLIVM.

Quod si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF. non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si lineæ GH, GI, ponãtur parallelæ rectis AB, AC, ita ut AG, ad planum HI, per GH, GI, ductũ perpendicularis, cadat in G, ostendemus, ut prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumq; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utcunq; duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, e agatur CE, ipsi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, paralellum esse plano dato AB.



e 31. primi.

Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, f parallela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

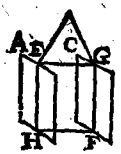
f 15. undecimi.

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GE, esse lineam

mus parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conveniunt, cum sint in plano EF, secante. Conveniant igitur in puncto I, a Quia ergo tota recta HEI, in uno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoq; est plano, videlicet in CD, producto: conveniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponatur parallela. Sunt igitur recta EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur &c. Quod erat demonstrandum.



a 17. *undecimi.*

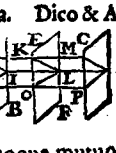
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest converti. Quamvis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm, sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conveniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorũ sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque cõmunes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, *b* erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, *c* atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano: *d* erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.

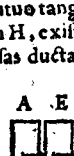


b 16. *undecimi.*

c 9. *undecimi.*

d 15. *undecimi.*

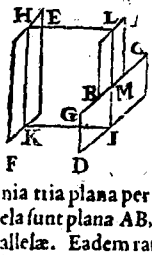
ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in utramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad



planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. demonſtravimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; *a* parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.

a 14. undecimi.

QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamẽ inter ſe, ſed conveniant, tunc idem efficiunt planũ; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conveniant, unã rectã conſtituunt lineam, veluti ad prop. 30. lib. 1. demõſtravimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conveniantq; producta ſecundũ rectam CG. Dico plana AB, CD, unum planum conſtituere. Secet enim planũ quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF, *b* erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cum rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantq; in eodem plano ſecante HI, & conveniant in M; ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, unum planum efficient; *c* propterea quod recta LI, in uno jaceat plano. Quod eſt propoſitum.



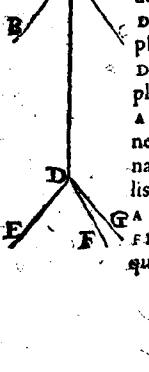
b 16. undecimi.

c 1. undecimi.

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certè ſi producta conveniant, unũ planũ conficient.

PORRO converſum quoq; propoſ. 10. facile demonſtrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea una unius anguli lineæ uni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.



IN planis enim parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela; & AC, DF, ſint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum tranſire etiam per rectã DF: ita ut AC, DF, ſint communes ſectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. *d* Hinc enim efficitur, ſectiones AC, DF, parallelas eſſe. quod eſt propoſitum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis ſectiones AC, DF, faciat ſectiones AC, DG, *e* quæ parallelæ erunt. *f* Igitur angulus FDG, angulo BAC, hoc eſt, angulo EDF, æqualis erit, quod eſt abſurdum, cum unus ſit totũ, & alter pars.

d 16. undecimi.

e 16. undecimi.

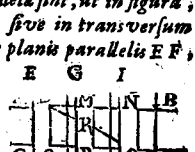
f 10. undecimi.

THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 17. xvii.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In eas-dem rationes secabuntur.

RECTÆ lineæ AB, CD, (sive ea parallela sint, ut in figura, sive non, existentes tamen in eodem plano: sive in transversum posita, in diversis existentes planis (secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & conjungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, a Eritque triangulum LNQ, in uno plano: similiter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, b erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Parirationeparallelæ erunt RP, LO. c Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Aeproinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. undecimi.

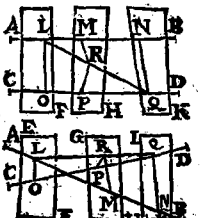
b 16. undecimi.

c Quam ob rem erit ut cimi.

e 2. sexti.

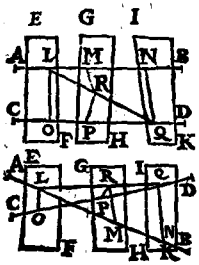
SCHOLIVM.

QVOD, si datæ rectæ AB, CD, sint in uno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, unam lineam rectam, ut in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, d quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, ut in scholio propos. 7. hujus lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, unam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.



d 16. undecimi.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, unam rectam lineam, ut in hisce duabus figuris apparet; quia e cum triangulum LOQ, sit in uno plano, & triangulum LNQ, e 2. undecimi. in uno etiam plano, quod ab illo diversum est, (Si namque duo illa



triangula in uno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ RM, RP, in diversis illis planis triangulorum: ac proinde unam rectam non constituent; a alias in uno essent plano quod est absurdum.

a 1. undecimi.

EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, ut in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc RMP, semper erit una linea recta, ut ad initium hujus scholii demonstratum est, quando AB, CD, in uno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & cōmunes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ. LNQ. rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in uno sint plano, non rectas autem, si non sint in uno plano: quemadmodum de rectis MR. RP, dictū est.

EX demonstratione porro perspicuum est, si quotlibet lineæ in uno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearum inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in uno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis L O, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, b erit ut LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, ut OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem recte demonstratio procedat in quibusvis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis unius rectæ ad ultimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, ultimum punctum rectæ CD. Idemq; servatum est in figuris hujus propos. 17.

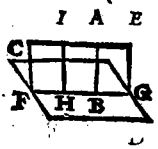
b 2. sexti.

XVIII. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum, CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam c 34. primi *FG. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta FG, c ducatur in pla-*

in plano EE, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AE, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; a erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FC, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



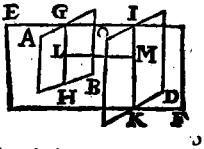
a 8. *undecimi.*

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi unum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum & idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: *b* eademque perpendicularis erit ad IK, ac propterea ex defin. 4. hujus lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad utrumq; planum AB, CD, recta eſt, *c* ipſa parallela erunt.



b 19. *primi*

c 14. *undecimi.*

SED jam parallela ſint plana AB, CD: ſitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectam eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; *d* quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpẽdiculari LM: erit hæc ex defin. 4. hujus lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. *e* Quare planum EF, per rectam LM, ductũ ad planum CD, erit rectum: ideoq; viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod eſt propoſitum

d 17. *undecimi.*

e 18. *undecimi.*

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quovis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

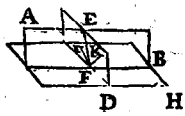
SIT data recta FG, in plano CD, ut in figura hujus propoſ. opor-

teatq; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit.
a 12. undecimi. Ex quovis puncto B, rectæ FG, a erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF, b quod
b 18. undecimi. ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

XIX. THEOREMA. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, c *recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterum rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planū GH, recta ex defin. 4 hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducatur q in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse creditur recta;* d *ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendi-*
c 13. undecimi. *culares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra* c *demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.*



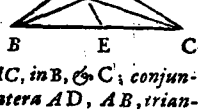
c 4. undecimi.

XX. THEOREMA. 18. PROPOS. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. *Dico quolibet duos reliquo esse majores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos majores esse reliquo: si vero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo majores esse. Quod si unus, videlicet* BAC, *sit maximus, reliqui autem sive æquales, sive inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo* BAC, *reliquo esse majorem. Dico jam hos angulo maximo* BAC, *majores quoque esse angulos duos* BAD, DAC. *In plano enim per* AB, AC, *ducto a fiat angulus* BAE, *angulo* BAD, *æqualis; & rectæ* AE, *æqualis rectæ* AD. *Deinde in eodem plano per*



a 23. primi

E, extendatur recta BC, *secans rectas* AB, AC, *in* B, & C; *conjunganturque rectæ* BD, DC. *Quoniam igitur latera* AD, AB, *trianguli* BAD, *æqualia sunt lateribus* AE, AB, *trianguli* BAE; & *anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales;* b *erunt bases* BC, BE, *æquales.* c *Quia vero latera* DB, DC, *majora sunt* c 20. primi *latere* BD; *si demantur æquales rectæ* BD, BE, *relinquetur recta* CD, *major quam* CE. *Cum igitur latera* AD, AC, *trianguli* ADC, *æqualia sint lateribus* AE, AC, *trianguli* EAC: & *basis* CD, *major basi* CE: d *erit angulus* CAD, *angulo* CAE, *major.* Additis d 25. primi *ergo æqualibus angulis* BAD, BAE, *erunt duo anguli* CAD, BAD, *majores duobus angulis* CAE, BAE, *hoc est, toto angulo* BAC, *qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. *Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis* BC, CD, DB, *erunt constituti tres anguli solidi* B, C, D, *quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe* B, *sub* CBA, ABD, DBC, AtC, *sub* BCA, ACD, DCB: D, *vero sub* CDA, ADB, BDC. e *Quoniam vero duo anguli* CBA, ABD, *maiores sunt angulo* CBD: *similiterq; duo anguli* BCA, ACD, *majores angulo* BCD: & *duo anguli* CDA, ADB, *maiores angulo* CDB: *erunt sex anguli* CBA ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, *tribus angulis* CBD, BCD, CDB, *majores.* f *Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. illi ergo sex duobus*

e 20. undecimi.

f 22. primi

rectis erunt majores. Cùm igitur sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria B A C, CAD, DAE; a32.primi. *a (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferãtur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtẽdãtur ordine in eodẽ plano existẽtes; cõstituetur pyramis, cujus vertex, datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus cõprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horũ triangulorum, (*b* cùm anguli cujuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis, quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstravimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorũ superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè basim majores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, *c* & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint majores) superabunt omnes anguli horũ triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quã quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

b32. primi

c20. undecimi.

VERVM ut res melius percipiatur, sit exempli gratia angulus solidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in uno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F, ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonã, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ solidum A. *d* Quia vero omnes anguli quinq;

d32. primi

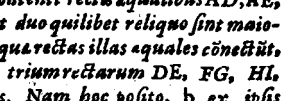
quinque triangulorum BAC,CAD,DAE,EAF,FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, continea-tur, a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis: quādoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictū est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis.

a 22. *undecimi.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A,B,C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, *hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis* DE, FC, HI, *quæ rectas illas æquales cōnectūt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum* DE, FG, HI, *quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito,* b *ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ* DE, FG, *maiores sint quam* HI, *ita ostendetur.* c *Fiat angulus* DAK, *angulo* B, *æqualis, cadatque primum* AK, *ad partes* AD, *ita vt fiat totus quidam angulus* EAK, *ex duobus* EAD, DAK, *compositus: quod quidem continget, quando duo anguli* DAE, & B, *duobus rectis sunt minores. Ponatur* AK, *ipsi* AD, *æqualis, connectanturque rectæ* KD, KE. *Quoniam igitur latera* AK, AD, *trianguli* AKD, *æqualia sunt lateribus* BF, BG, *trianguli* BFG; & *anguli ipsis contenti* DAK, & B, *æquales;* d *erunt & bases* KD, FG, *æquales. Rursus quia latera* AK, AE, *trianguli* AKE, *æqualia sunt lateribus* CH, CI, & *angulus* EAK, *maior angulo* C; *propterea quod duo anguli* DAE, & B, *maiores ponuntur angulo* C; *e erit & basis* EK, *maior base* HI: *f Sunt autem rectæ* ED, DK, *maiores recta* EK. *Igitur multo maiores erunt* ED, DK, *quam* HI. *Cum ergo* DK, *ostensa sit æqualis rectæ* EG; *erunt quoq;*



b 22. *primi.*

c 23. *primi.*

d 32. *primi.*

e 24. *primi.*

f 30. *primi.*

DE, FG maiores quam HI. Quod est propositum.

CADAT deinde AK in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponatur que AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. a Erit igitur, vt prius, DK, ipsi FG, æqualis. b Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE, & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, HI: c Ha autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum,

a 4. pri.
b 20. pri.
c 20. primi.

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK: quod demum euenit, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponatur que rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. d Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. e Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duab. CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erũt quoq; DE, DK, maiores quam CH, CI: f Ha autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; item FG, HI, maiores quam DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. g Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum.

d 4. primi.
e 21. pri.
f 20. primi.
g 22. pri.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales: h erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliquæ maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor: i erunt quoque duæ illorum bases æquales, k & basis tertij vtraque minor. Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliquæ. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue

h 4. primi.
i 4. primi.
k 24. pri.

sue inæquales; erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. a *Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B & ponatur que AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde recta DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem: erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK,* b *æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales;* b *erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, ostensus maior angulo KAE;* c *erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE;* d *Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.*

124. pri.

a 23. pri.

b 4. primi.

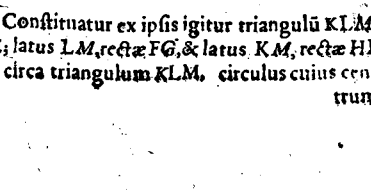
c 24. primi.

d 20 primi.

THEOR. 3. PROPOS. 23. xxiij.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

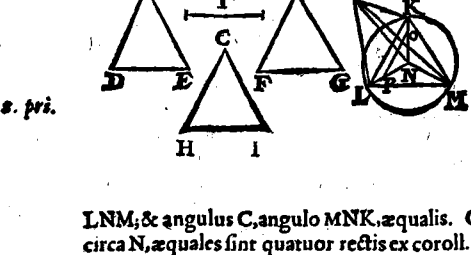
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE, FG, HI. e Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulū KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. f Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum



e 21. vndecimi.

f 5. quarti.

trum N, à quo ducantur rectæ NK, LN, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major qualibet ductarum ex centro N, Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL, & basis DE, basi KL, æqualis: *a* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia: erunt latera NK, NL, trianguli NKL, sectapro-



a 8. *pri.*

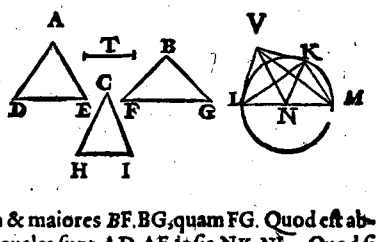
portionaliter: *b* ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. *c* Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL. NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. *d* Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. *e* Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP, *f* erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores.

b 2. *sexti.*
c 29. *pri.*
d 4. *sexti.*
e 14. *quinti.*
f 25. *primi.*

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL: erunt quoque BF, BG, æquales

est.

eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM, æquales erunt BF, BG, rectæ LM; Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoq; sunt

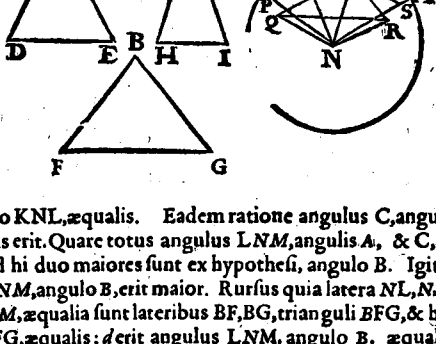


rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *b* cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. primi.

b 20. primi.

CADAT postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto prop. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD. AE, esse æquales ipsis N K, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL: si abscindantur NO, NP, ipsi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonstrabitur, vt in primo casu angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM, *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, &

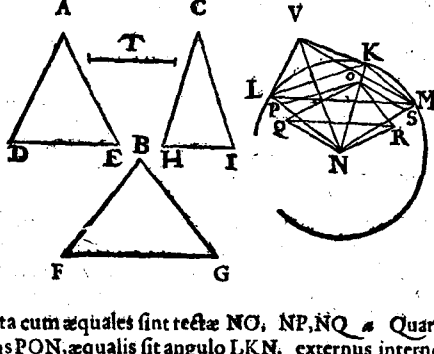


c 8. primi.

d 8. primi.

e 23. pri.

con-



connectantur OQ, OR, cadetq; OQ infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. a Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno: erit angulus QON. minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem: b erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR: & angulus LKM, maior angulo QOR: vt ostendimus: c erit basis LM, hoc est, FG, maior basi QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR: & basis FG, maior basi QR, d erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD. AE, quam NK, NL. sed neque æquales: Igitur maiores.

a 29. primi.
b 4. primi.
c 24. prim.
d 25. pri.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicũq; cẽtrũ N, existat: possit recta AD, plus quã recta NK, quadrato lineæ T. per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. e Ex centro N excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniã igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM, f ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV, æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea

e 12. undecimi.
f 46. pri.

propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti: a erit basis VK, æqualis basi VL: Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BC, CH, CI. Quamobrem cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD. AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE: b erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C, Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

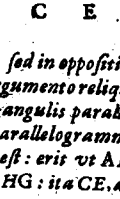
a 24. pri.

b 8. pri.

THEOR. 21. PROPOS. 24. xxiv.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersa quilibet sint parallela. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC: c Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC: erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ: Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis: d erunt anguli ABH, DCE, æquales: eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. e Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AD: & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est: erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE: Ac propterea vt BH, ad HG: ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, f cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, tri-



c 16. undecimi.

d 10. undecimi.

e 34. pri.

f 34. pri.

a 10. undecimi. CE, *trianguli* DCE; a & *angulus* ABH, *angulo* DCE, *aqualis, vt oſtenſum eſt*; b *erunt triangula* ABH, DCE, *æqualia inter ſe.* c *Quare cum triangula* ABH. DCE, *dimidia ſint parallelogrammorum* BG, CF; *erunt parallelogramma* BG, CF, *inter ſe æqualia. Similiter*

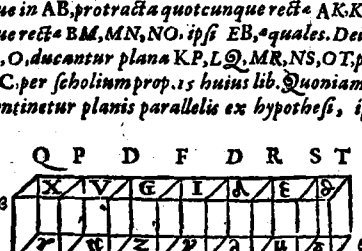
b 4. primi.

c 34. primi. *demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogramma oppoſita* AC, GE; & AF, BE. *Si ſolidum ergo parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia & æqualia. Quod erat demonſtrandum.*

XXV. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, *plano* EF, *parallelo oppoſitis planis* AD, BC. *Dico vt eſt baſis* AG, *ad baſin* BG, *ita eſſe ſolidum* AEFD, *ad ſolidum* BEFC. *Intelligatur enim parallelepipedum* ABCD, *productum in vtramque partem quantumlibet, ſumanturque in* AB, *protracta quotcunque rectæ* AK, KL, *ipſi* AE: & *quotcunque rectæ* BM, MN, NO, *ipſi* EB, *æquales. Deinde per puncta* K, L, M, N, O, *ducantur plana* KP, LQ, MR, NS, OT, *parallela planis* AD, EF, BC, *per ſcholium prop. 15 huius lib. Quoniam igitur ſolidum* AEFD, *continetur planis parallelis ex hypotheſi, ipſum parallelepipedum*



d 24. undecimi. *erit ex definitione,* d *habebitque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. Eodem modo erũt parallelepipeda* AK PD, KLQP, EB CF, BNRC, MNS R, NOTS, ELQF, EOTF, *habebuntque plana oppoſita parallelogramma ſimilia, & æqualia.* c *Quoniam vero parallelogramma* AG, KV, LX *cum ſint ſuper æquales baſes* AE, AK, KL, *æqualia ſunt: & ſimilia quoque, cum anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eadem que ratione æqualia & ſimilia, ſunt parallelogramma* AY. KZ La. *Cum igitur æqualia quoque ſint & ſimilia parallelogramma* AD, KP, LQ. *Erunt tria plana* AG, AY, AD, *ſolidi* AE, FD, *æqualia, & ſimilia tribus planis* KV, KZ, KP, *ſolidi* AKPD, *& tribus planis* LX, La, LQ, *ſolidi* KLQP: g *Sunt autẽ tria in vnoquoque ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe* AG, *ipſi* ZT; & AY, *ipſi* VF; & AD, *ipſi* EF, &c.

c 36. pri.

f 29. pri.

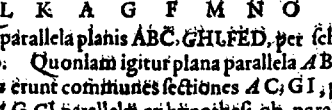
g 24. undecimi.

Igitur

igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. *Eodem argumento æqualia ostendentur solida* EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. *Quare quæ multiplex est basis* LG, *basis* AG, *tam multiplex erit solidum* LEFQ, *solidi* AEFD; *Et quam multiplex est basis* OG, *basis* BH; *tam multiplex erit solidum* OEFT, *solidi* BEFC. *Quoniam vero si basis* LG, (*multiplex basis* AG, *primæ magnitudinis,*) *æqualis est basi* OG; (*multiplici basis* BC, *secundæ magnitudinis,*) *æquale quoq; est solidum* LEFQ, (*multiplex solidi* AEFD, *tertiæ magnitudinis*) *solido* OEFT, (*multiplici solidi* BEFC, *quartæ magnitudinis;*) *propterea quod basibus* LG, OG, *æqualibus existentibus, æqualia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi* LEFQ, *sex parallelogrammis solidi* OEFT: *Si autem basis major est base, solidum quoq; solido majus est; & si minor, minus in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis* AG, *prima magnitudo, ad basin* BG, *secundam magnitudinem, ita solidum* AEFD, *tertia magnitudo, ad solidum* BEFC, *quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis* DY, *ad basin* CY, *& ut basis* AY, *ad basin* BY, *& ut basis* DG, *ad basin* CG. *Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur adversis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma *A*BCDEF, cujus plana adversa sint triangula ABC, DEF, secetur que plano GHI, adversis planis parallelo. Dico ut est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum *A*BCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in utramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta utrinq; capiantur quotcunque rectæ *A*K, KL, ipsi AG; & quotcunque rectæ FM, MN, NO, ipsi FG æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZ *a*; parallela planis ABC, GHI, FED, per schol. propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur plana parallela *A*BC, GHI, secantur plano A I *a* erunt communes sectiones *A*C, GI, parallelæ: Sunt autem & *A*G, CI, parallelæ ex hypothesi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH: *b* erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ; Sunt autem & *A*G, BH, parallelæ, ob



a 16. *undec.*

b 15. *undec.*

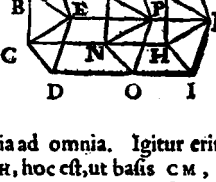
parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus GI, CH, trianguli GHI; *a* cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit æquale: *b* & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; *c* Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula. *d* Quare latera circa æquales angulos proportionalia habebunt: Atque ideirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHC, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt, & similia; nec non AH, KB, LP, & CH, QI, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. hujus lib. æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici est basis FI, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, major est base OI, prisma quoque prisinate majus est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 5. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH, & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cujus opposita plana sit polygona, nempe pentagona, fiatque plano LMNOP. Dico rursus ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resolvantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prisma-

a 34. primi
b 10. undec.
c 4. primi
d 4. sext.

ta, quo-

ta, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI, *a* Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta BP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; & ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se. *b* Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.



a 1. *sext.*

b 12. *quinti.*

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, *c* propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum, *d* ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde ut prius ostendetur prismata ex una parte inter se æqualia, nec non & prismata ex altera parte, &c.

c 16. *undecimi.*

d 10. *undecimi.*

COROLLARIVM.

(Ex his infertur, si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & simile planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo *ABC*, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.)

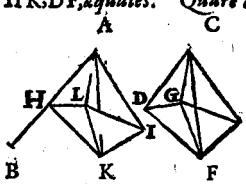
PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

AD datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, *in data recta* AB, *constituendus angulus solidus æqualis angulo solido* C, *contento tribus angulis planis* DCE, DCF, FCE, *non in eodem plano existentibus.* c Ducatur ex F, *ad planum per* CD, CE, *ductum perpendicularis* FG, *connectanturque rectæ* DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, *æqualis ipsi* CD, f *fiatque angulus* HAI, *angulo* DCE, *æqualis*; & *rectæ* AI, *rectæ* CE, *æqualis*; f 23. *pri.*

c 11. *undecimi.*

Rursus in plano per AH, A I, *ductum constituatur angulus* HAL, *æqualis angulo* DCG, *qui in plano per* C D, CE, *ducto existit, &* recta
a 12. undec. A L, *rectæ* C G, *æqualis* a Ex L, *vero ad planum, in quo sunt tres* AH, AL, AI, *erigatur perpendicularis* LK, *quæ ipsi* FG, *æqualis ponatur, &* conjungatur recta K A. *Dico angulum solidum* A, *contentum tribus planis angulis* HAI, HAK, KAI, *æqualem esse dato angulo solido* C. *Connexis enim rectis* HK, HL, IK, IL : *cum latera* AH, A L, *trianguli* A HL, *æqualia sint lateribus* CD, CG, *trianguli* CDG, *&*
b 4. pri. *anguli* HAL, DCG, *æquales per constructionem* ; b *Erunt bases* HL, DG, *æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus* HAL, DCG, *ab æqualibus* HAI, DCE, *reliqui æquales sunt* LAI, GCE : *Cumigitur &* latera AL, A I, *trianguli* ALI, *æqualia sint lateribus* CG, CE, *trianguli* CGE, *per constructionem* :
c 4. pri. c *æquales quoque erunt* LI, GE. *Quia igitur latera* L H, L K, *æqualia sunt lateribus* G D, GF: *&* anguli HLK, DCF, *recti ex defin. 3. hujus lib.* d *erunt &* bases HK, DF, *æquales. Quare cum &* latera AH, AK, *trianguli*
d 4. pri. AHK, *sint æqualia lateribus* C D, CF, *trianguli* CDF ; *ex constructione (cum enim* A L, LK, *latera lateribus* CG, GF, *æqualia sint ex constructione, comprehendantq; angulos æquales ; nimirum rectos, ex defin. 3. hujus lib.* e *erunt bases* AK,



e 4. pri. CF, *æquales*) f *Erunt quoq; anguli* HAK, DCF, *æquales. Denique*
f 8. pri. *quia latera* L I, L K, *sunt æqualia lateribus* G E, GF, *& anguli* ILK, EGF, *recti ex defin. 3. hujus lib.*
g 4. pri. g *Erunt bases* IK, EF, *æquales. Cum igitur & latera* A I, AK, *trianguli* AIK, *lateribus* CE, CF, *trianguli* CEF, *sint æqualia ex constructione* :
h 4. pri. h *Erunt quoq; anguli* IAK, ECF, *æquales. Sunt ergo tres anguli plani* HAI, HAK, KAI, *solidum angulum* A, *componentes, æquales tribus angulis planis* DCE, DCF, FCE, *angulum solidum* C, *componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo* C, *æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejusq; punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.*

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendæ erunt omnibus angulis plagis rectæ in uno eodēq; existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figurā planā polygonam constituant, pyramisque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resolvatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si

igi-

igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in triangula resolvatur BCF, BCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

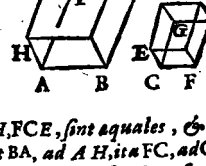
THEOR. 5. PROPOS. 27. XXVII.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta AB, *describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo* CD a *Fiat ad rectam* AB, *ejusque punctum* A, *angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani* HAI, IAB, BAH, *æquales sint tribus angulis planis* ECG, GCF, FCE *Deinde ut est,* CF, *ad* CG, b *sic fiat* AB, *ad* AI, *& ut* CG, *ad* CE, *ita* AI, *ad* AH, *eritque ex æquo, ut* CF, *ad* CE, *ita* AB, *ad* AH. *Post hæc, perficiatur parallelepipedum* AK, *completis nimirum parallelogrammis* BH, HI, IB, *& per* I, B, H *ductis planis* IK, BK, HK, *quæ parallela sint parallelogrammis* BH, HI, IB. *Dico parallelepipedum* AK, *parallelepipedo* CD, *simile esse similiterque positum. Cum enim anguli* BAH, FCE, *sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut* BA, *ad* AH, *ita* FC, *ad* CE, *ex constructione, erunt parallelogramma* HB, EF, *similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma* HI, EG, *&* IB, CF. *Tria igitur plana* BH, HI, IB *so-*

a 26. *unidec.*

b 12. *sexti.*



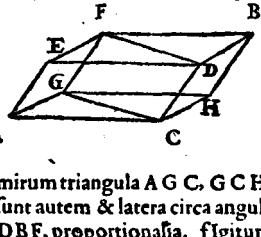
I B, solidi A K, *similia sunt, similiterque posita tribus planis* F E E G, G F, *solidi* C D. a *Sunt autem tria cujuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis.* Quare *sex plana solidi* A K, *similia sunt, similiterque posita sex planis solidi* C D: *Ac proinde ex defin. 9. hujus lib. similia sunt, similiterque posita solida* A K, C D. *A data ergo rectalinea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describemus. Quod erat faciendum.*

a 24. undecimi.

xxviij. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios adversorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallepipedum A B, in quo plana opposita sint A H, E B, quorum diagonii, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, *b* & æqualis ipsi A E, cum sint parallelogramma C E, G E; *c* erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. *d* Ac proinde, quæ ipsas conjungunt C G, D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. *e* Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G, F E D. D B F, proportionalia. *f* Igitur similia quoq; erunt dicta triangula. *g* Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B, & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, G F, prismatis A C G F E D, æqualia similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, H G, C F, prismatis H G C, D B F: propterea que prismata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



b 34. prim.
c 9. undecimi,
d 33. pri.
e 24. undecimi.
f 6. sexti.
g 24. undecimi.

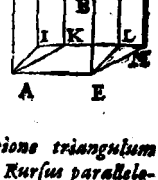
xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SUPER *basin* A B, *in eadem altitudine, hoc est, inter eadem pla-*

ua parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, *quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in rectaIM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda* ADCE, AFGE, esse inter se æqualia. a *Cum enim æqualia sint parallelogramma* AL, AM, *super eadem basi* AE, *& in eisdem parallelis constituta:* a 35. pri.

erunt, ablato communi trapezio AELK, *æqualia quoq; triangula* AIK, ELM. b *Quoniam vero omnia latera trianguli* AIK, *æqualia sunt omnibus lateribus trianguli* HCF; *erit triangulum* AIK, *triangulo* HCF, *æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus:* c *Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoq; inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum* ELM, *triangulo* BDG, *æquale erit & simile.* d *Rursus parallelogrammum* AC, *æquale est & simile parallelogrammo* ED; *& eadem ratione parallelogrammum* AF, *parallelogrammo* EG: e *Sed & IF, ipsi* LG, *cum bases* IK, LM, *sint æquales.* (f *Nam cum recta* IL, KM, *æquales sint ipsi* AE, *erunt quoq; inter se æquales: quare communi dempta* KL, *æquales erunt* IK, LM,) *Erunt ergo omnia plana prismatis* AIKFCH, *æqualia & similia omnibus planis prismatis* ELMGDB. *Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido* AHFKLDBE *æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.*



b 34. pri.

c 4. sexti.

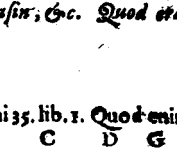
d 24. undecimi.

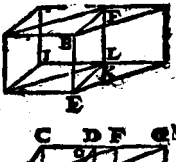
e 26. pri.

f 4. pri.

SCHOLIVM.

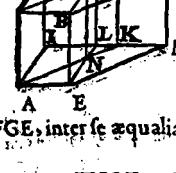
HÆC propositio perfimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum I, cadit: vel ultra I, eodem modo demonstrabuntur, ut in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia, unde ut prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demantur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia: quib. si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, ut prius, æqualia erunt prismata AIK, FCH, ELM, GDB, à

quibus si auferatur prisma commune KLNODE (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILNO, HA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur utrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE,

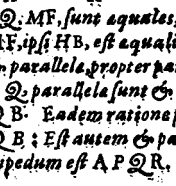


AFGE, inter se æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 39.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, *in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda* AIDK, AMFK, *quorum insistentes linea ex quatuor angulis basis exeuntes* AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, *non sint in eisdem rectis, hoc est, neque* CI, GD, *protractæ transeant per puncta* M, E, F, *neque* CG, ID, *productæ; &c. Dico parallelepipeda* AIDK, ALMFK, *esse æqualia. Cum enim plana* CD, EF, *opposita basi* AB, *sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in ea plana rectæ* CG, ID, *quarum* CG, *secet* EM, LF, *protractus in punctis* N, O; *Et* ID, *eisdem in punctis* P, Q, *adjungantur, rectæ* AN, KO, HP, BQ. a *Quia igitur rectæ* PQ, MF, *sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo* FP; *&* MF, *ipsi* HB, *est æqualis; erunt &* PQ, HB, *æquales; Sunt autem &* parallelæ, *propter parallelogrammum* HIDB. b *Igitur &* HP, BQ, *parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est* HPQB. *Eadem ratione parallelogramma erunt* HPNA, ANOK, KOQB; *Est autem &* parallelogrammum NQQP. *Igitur* parallelepipedum *est* APQR. c *Quamobrem parallelepipedum* AIDK, æqua-



a 34. primi

b 33. primi

c 29. pri.

quale est parallelepipedo APQK. cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CQ, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK. cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

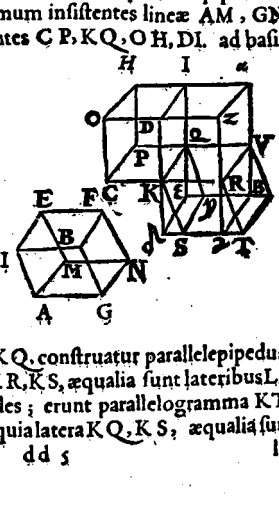
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, sive insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, sive non; in eadem sunt altitudine.

NAM si unum dicatur altius; si eo abscindatur parallelepipedū in eadem cum reliquo altitudine: erunt æqualia abscissum & reliquum. 4 Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale: æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. a 29. *vel* 30. *unde.*

THEOR. 26. PROPOS. 31. XXXI. XXXII.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano QK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod ad altitudinem perpendicularis KQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia: Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt la-

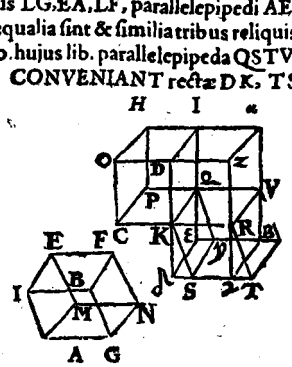


lateribus L E, L A, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod K Q, L E, rectæ ponantur ad plana K T, L G, erunt & parallelogramma Q S, E A, æqualia & similia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia sint lateribus L β, L E, & anguli Q K R, E L B, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma K V, L F, æqualia & similia. Quare cum tria plana K T, Q S, K V, parallelepipedi Q S T V, æqualia sint & similia: a tribus planis L G, E A, L F, parallelepipedi A E F G, b tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda Q S T V, E A G F, inter se æqualia.

a 24. undec.

b 24. undec.

CONVENIANT rectæ D K, T S, productæ in δ: & I Q, K Y, in



ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conveniant in α: & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Rδγ V, eandem habent basin K V, sunt quæ in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ K S, Kδ, RT, Rγ, Qε, VX, Vβ,

c 19. undec.

collocantur in eisdem rectis δT, εX, c ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V.

d 35. primi e 7. quinti f 25. undecimi.

d QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se: & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale: cum bases LG, CD, ponantur æquales. e Quare erit, ut CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: f Vt autem C D, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KLαR: cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis, CH, αR, parallelo.: Et eadem ratione, ut Kγ, ad DR, ita est solidum Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγ α, secetur plano KV, oppositis planis Dα & δ, parallelo.

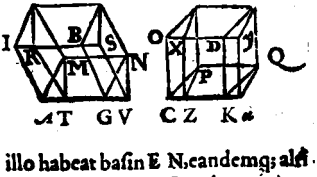
g 9. quinti.

g Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

SINT jam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad basin, CD, perpendiculares. Et à α punctis E, F, M, N, demittantur ER, ES, MT, NV, ad planum,

num, in quo basis AB, perpendiculares, Item à punctis H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qω. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yω, ωZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZωI, quæ cum sint ejusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, cum inter se æqualia, ut ostensum est. b Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZωI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

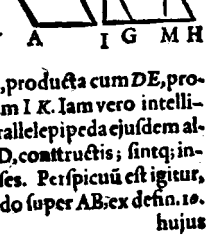
a 11. *undecimi.*



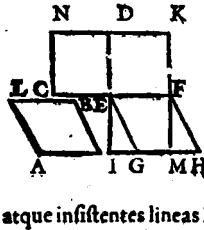
b 29. *vel* 30. *undec.*

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia: Nimirũ ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sintn. duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB, Conveniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda ejusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares addictas bases. Perspicuũ est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB; ex defin. 10.



hujus



a 29. undecimi.

hujus lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis hujus, per constructionem. a Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, cujus infimum latus EF, erectam super planum IK; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cujus infimum latus IH, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB. b Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia sunt; & EH, æquale est ipsi CD, æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, ut IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Est autem ut IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, ut CD, ad EK; ita solidum super CD, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, FK, erectis. Quare erit ut solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK. e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, æquale parallelepipedo super AB, Æqualia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.

b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. undecimi.
e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propos. 31. in hunc modum,

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

f 31. undecimi.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur major basæ alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum ejusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

xxxiii. THEOR. 27. PROPOS. 32.

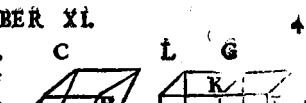
SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, *ejusdem altitudinis super bases* AB, EF. *Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin.*

g 45. prim. fin.

g *Super rectam enim* EK, *constituatur parallelogrammum* IK, æqua-

æquale parallelogrammo AB, *in angulo* IEK, *qui sit æqualis angulo* ENF. *Constituent autem parallelogramma* EF, IK; *totum parallelogrammum in* FI, *ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi* EFGH, *producantur ad partes* EG, *perficiaturq; totum unum parallelepipedũ* IFLH: *erunt parallelepipeda* ABCD, IKLM, *æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem* AB, IK, *& eandem altitudinem, ex hypothesi.* b *Quare erit ut solidum* IKLM, *ad solidum* EFGH, *ita solidum* ABCD, *ad idem solidum* EFGH: c *Est autem solidum* IKLM, *ad solidum* EFGH, *ut basis* IK, *hoc est, illi æqualis basis* AB, *ad basin* EF. *Igitur & solidum* ABCD, *erit ad solidum* EFGH, *ut basis* AB, *ad basin* EF. *Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.*



a 31. *undecimi.*
b 7. *quinti*
c 25. *undecimi.*

SCHOLIVM.

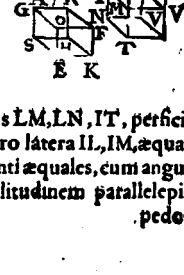
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex majori abscindantur minori æqualis. & ducatur planum basi parallelum, d eritq; ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Absciſſum ergo æquali est toti. Quod est absurdum.

d 32. *undecimi.*
e 9. *quinti.*

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvi.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR: Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO, Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sint laterihus GR, GO: f & anguli contenti æquales, cum angulus ILM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedo-



f 15. *primi.*

pedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GE, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt & æqualia LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *a* Sunt autem tria cujusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. hujus lib. Rursus completis parallelogrammis MB, *b* L, L M, perficiatur parallelepipedum MBPL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM: & BI, ad FK, hoc est, ad IN. *b* Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL: Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM: & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD ad CL, ita DL, ad LM: & BL, ad LN. *c* Sed ut AD, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis D L, ad basin LM, ita parallelelepipedum DLYQ, ad parallelepipedū LMBP; & ut basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedū LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales AD CB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB; ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. *d* Vt autem AD cB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; *e* Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonstrandum.

a 24. undec.

b 1. sex.

c 32. undec.

d 32. undec.

e 1. sex.

COROLLARIVM.

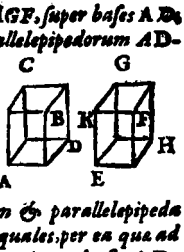
(Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedū super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THE-

THEOR. 29. PROPOS. 34. xxxiv. xxxv.

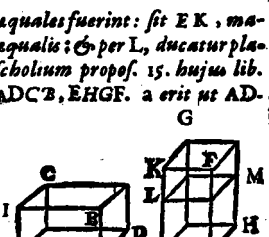
ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, *super bases* AD, EH. *Dico bases* AD, EH, *& altitudines parallelepipedorum* ADCB, EHGF. *esse reciprocas, hoc est, esse ut* AD, *ad* EH, *ita altitudinem solidi* EHGF, *ad altitudinem* ADCB. *Sint enim primum* I *insistentes lineæ* AI, EK, *perpendiculares ad bases* AD, EH, *ita ut* AI, EK, *sint per defin.* 4. *lib.* 6. *altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines* AI, EK, *sunt æquales: cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases* AD, EH, *æquales. per ea quæ ad finem propos* 31. *hujus lib. ostendimus. Quare erit, ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI: *Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.*



QVOD si altitudines AI, EK, *inæquales fuerint: sit* EK, *major, ex qua abscindatur* EL, *ipsi* AI, *æqualis; & per* L, *ducatur planum* LM, *parallelum basi* EH, *per scholium propos.* 15. *hujus lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida* ADCB, EHGF. a *erit ut* AD-CB, *ad solidum* EHML, *ita* EHGF, *ac idem solidum* EHML; b *Ut autem solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *ita est basis* AD, *ad basin* EH, *cum æquales ponantur altitudines* AI, EL. *Et ut solidum* EHGF, *ad solidum* EHML, *ita est eadem ratione basis* KM, *ad basin* LN, *cum hac ratione solida* EHGF, FHML, *eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur* KN, LN: *erunt enim inter eadem plana parallela* KN, GH. *Igitur erit ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita basis* KN, *ad basin* LN: c *Sed ut* KN, *ad* LN, *ita est recta* EK, *ad rectam* EL, *hoc est, ad* AI, *ipsi* EL, *æqualem. Quare erit ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI: *Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.*

a 7. *quinti.* b 32. *undec.*

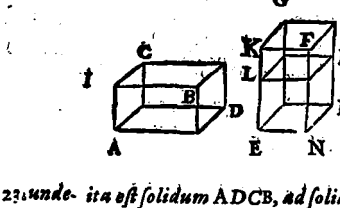


c 1. *sext.*

SINT jam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, *sunt æquales: cum sit basis* AD, *ad basin* EH, *ut altitudo* EK, *ad altitudinem* AI, *ex hypothesi; erunt & bases* AD, BH, *æquales.* d *Quare parallelepipeda* ADCB, EHGF, *cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.*

d 31. *und.*

QVOD



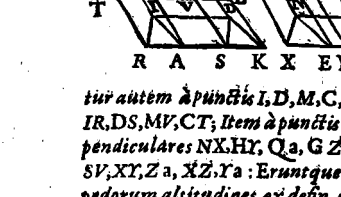
Quod si altitudo EK, *major fuerit, abscindatur* EL, *ipsi* AI, *aequalis & per* L, *ducatur planum* LM, *parallelum basi* EH. *Quia igitur ex hypothesi est, ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI, *hoc est,* EL, *ipsi* AI, *aequalem:*

a 23. *undecimi.* *Ut autem basis* AD, *ad basin* EH, *ita est solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *cum altitudines* AI, EL, *aequales ponantur*

b 1. *sext.* b *Et ut* EK, *ad* EL, *ita est* KN, *ad* LN:

c 32 *undecimi.* c *Ut autem basis* KN, *ad basin* LN, *ita est solidum* EHGF, *ad solidum* EHML, *cum solida* EHGF, EHML, *eandem habeant altitudinem, si bases ponantur* KN, LN: *erunt enim hac ratione inter plana parallela* KN, GH: *Erit ut solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *ita solidum*

d 9. *quint.* EHGF, *ad idem solidum* EHML: d *ideoque aequalia erunt solida* ADCB, EHGF.



Sed proponantur jam parallelepipeda BACD, EFGH, *aequalia, quorum insistentes lineæ* AI, KD, EM, LC, EN, OH, FQ, PG, *non sint perpendiculares ad bases* AB, EF. *Demittantur autem à punctis* I, D, M, C, *ad planum basis* AB, *perpendiculares* IR, DS, MV, CT; *Item à punctis* N, H, Q, G, *ad planum basis* EF, *perpendiculares* NX, HY, Qa, Gℤ. *connectantur quæ rectæ* RS, TV, RT, SV, XY, Za, Xℤ, Ya: *Erunt quæ perpendiculares* RI, XN, *parallelepipedorum altitudines, ex defin* 4. *lib.* 6. *Dico rursus, ut basis* AB, *ad basin* EF, *ita esse altitudinem* XN, *ad altitudinem* RI.

e 29. *vel* 30. *undecimi.* e *Cum enim æqualia sint solida* ABCD, FFGH, *ex hypothesi, sit autem* AB CD, *æquale solido* RVCD, *quod habeant eandem basin* CD, *eandemque altitudinem* RI; *&* EFGH, *eadem ratione, æquale solido* Xa GH: *Erunt & parallelepipeda* RVCD, Xa GH, *æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases* CD, GH *erit, ut jam demonstratum est, ut basis* CD, *ad basin* GH, *hoc est, ut basis* AB, *ad basin* EF, *ita altitudo* XN, *ad altitudinem* RI. *Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.*

SINT jam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB, *ad basin* EF, *ita altitudo* XN, *ad altitudinem* RI.

f 24. *undecimi.* f *Sit autem* AB, *ipsi* CD, *&* EF, *ipsi* GH, *æqualis: erit quoque ut basis* CD, *solidi* RVCD, *ad basin* GH, *solidi* Xa GH, *ita altitudo* XN, *ad altitudinem* RI. *Quare cum* X N. RI, *sint insistentes lineæ perpen-*

ua perpendiculares ad baſes CD. GH; *erunt utique oſtenſum eſt*, a 29. *vel* 30. *undec.* *æqualia parallelepipeda* RVCD, XaGH a *Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis* AbCD, EFGH, *æqualia. Igitur æqualia quoq; erunt parallelepipeda* ABCD, EFGH. *Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.*

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conveniunt quoq; priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſerventur. Nam ſi duobus priſmatis ejuſmodi ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. *b* Quare æqualia erunt ejuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia. b 29. 30. *vel* 31. *undecimi.*

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis ejuſdē altitudinis, & ſuper diverſas baſes conſtitutis adjiciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficienturū iter duo parallelepipeda ejuſdē altitudinis. *c* Quare erit parallelepipedù ad parallelepipedum, ut baſis ad baſin: *d* Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogrammæ, vel certæ ut triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet unius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangulæ. c 32. *undecimi*, d 15. *quinti.*

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, *e* quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia, *f* cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum. e 33. *undecimi.* f 15. *quinti*

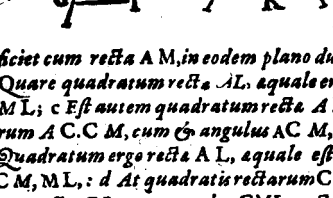
DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adjungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum priſmatis. *g* Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ: & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia *h* eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ. g 34. *undecimi.* h 15. *quinti.*

xxvii. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales B AC, EDF, *quorum verticibus* A, & D, *insistant extra ipsorum plana, sublimes recta linea* AG, D H, *ita ut angulus* BAG, *angulo* EDH, & *angulus* CAG, *angulo angulo* FDH, *sit æqualis: à sumptis autem punctis* G H, *in rectis* AG, DH, *demittantur ad plana, in quibus anguli* BAC, EDF, *existunt perpendiculares* G I, HK, *incidentes in puncta* I, K, & *adjungantur recta* IA, KD. *Dico angulos* GAI, HDK, *esse æquales inter se. Nam si* AG, D G, *sunt in æquales, auferatur à majori* AG, *ipsi* DH, *æqualis linea* A L, & *ex* L, *in plano trianguli AGI, ducatur ipsi* GI, *parallela* L M, *Quoniam igitur parallelæ sunt* GI, LM, & *est* GI, *ad planum anguli* BAC, *recta*; a *erit quoque* L M *ad idem pla-*

a 8. undec. *num recta. Ducantur autem ex punctis* MK, *ad rectas* AB, AC, DE, DF, *perpendiculares* MB, MC, KE, KF, & *connectantur rectæ* BC, BT, LC, EF, EH, HF. *Et quia* L M, *recta est ad planum anguli* BAC, *ipsa rectum angulum efficiet cum recta* A M, *in eodem plano ducta per defin. 3. hujus lib.*



b 48. pri. *Quare quadratum rectæ* AL, *æquale erit quadratis rectarum* AM, ML; c *Est autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis rectarum* AC. CM, *cum & angulus* ACM, *rectus sit, ex constructione.*

c 47. pri. *Quadratum ergo rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AC, CM, ML,: d *At quadratis rectarum* CM, ML, *æquale est quadratum rectæ* CL, *cum angulus* CML, *rectus sit per defin. 3. hujus lib.*

d 47. pri. *Igitur quadratum rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AC, CL; e Ac *proinde angulus* ACL, *rectus erit.* f *Rursus quia quadratum rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AM, ML: g *Est autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis rectarum* AB, BM,

e 48. primi

f 47. pri.

g 47. pri.

cum

cum anguli ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: a At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; b propterea q; angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera AL, DH, æqualia; c Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF: & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; d erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DEF, æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt: Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; e erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti: f erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensa rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: g Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML: & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint ex defin. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt: ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; h erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistent, &c. Quod ostendendum erat.

a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 26. primi.
f 4. primi.
g 47. primi.
h 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumq; utriq;: Erunt à punctis

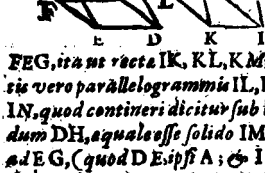
extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nã propterea quod anguli plani BAC, DFE, ponuntur æquales & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.)

xxxviii. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. *Constituatur* a *angulus solidus* E, *ex tribus angulis planis quibuscunque* DEE, DEG, FEG, *ita ut recta* DE, *ipsi* A: & EF, *ipsi* B, & EG, *ipsi* C, *sit æqualis. Compleatis autem parallelogrammis* DF, FG, GD, *perficiatur parallelepipedum* DH: *quod sub tribus rectis* A, B, C, *dicitur contineri, aut ex ipsis fieri.* a *Deinde ad rectam* IK, *ejusque punctum* K, *fiat solidus angulus* K, *æqualis solido angulo* E, *ex tribus angulis planis* IKL, IKM, LKM, *qui æquales sint tribus* DEF, DEG, FEG, *ita ut recta* IK, KL, KM, *æquales sint mediæ lineæ* B. *Compleatis vero parallelogrammis* IL, LM, MI, *perficiatur parallelepipedum* IN, *quod contineri dicitur sub linea* B, *seu ex ipsa describi. Dico solidum* DH, *æquale esse solido* IM. *Cum enim sit ut* DE, *ad* IK, *ita* KM, *ad* EG, (*quod* DE, *ipsi* A; & IK, KM, *ipsi* B, & EG, *ipsi* C, *sumpta sit æqualia,*) & *anguli* DEG, IKM, *æquales:* b *Erunt parallelogramma* DG, IM, *æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani* DEC, IKM, *sunt æquales quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales* EF, KL, *quæ æquales angulos comprehendunt tum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex* F, L, *ad plana basium* DG, IM, *demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum* DH, IN, *si bases sint* DG, IM, *inter se æquales per coroll. propos.* c *Quare parallelepipeda* DH, IN, *cum habeant bases* DG, IM, *æquales & æquales quoq; altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod erat demonstrandum.*

a 26. *undecimi.*



b 14. *sexti.*

c 31. *undecimi.*

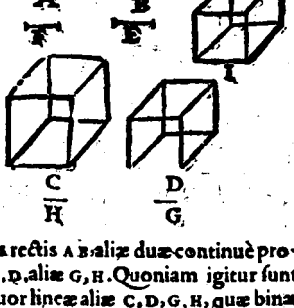
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptũ, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea

linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, ut dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorũ altitudines ex FL, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia: erunt eorum bases D G, I M, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. hujus lib. demonstravimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex constructione: habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, ut DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum. a 14. sexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxix.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D: constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta: Item supr C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, sive hæc sint illis similia sive non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia: Ut quidem solidum A: ad solidum B, ita solidum C, ad solidũ D. Inveniãtur enim per scholium propos. 12. lib. 6. duabus rectis A B, aliæ duæ continuè proportionales E, F Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur: erit ex æquo ut A, ad F, ita C, ad H. Ut autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, Et ut C, ad H, ita, solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. hujus lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

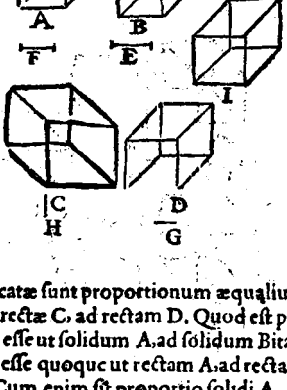
SINT jam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. *b* Tribus enim rectis b 12 sexti.

a 25. undec. A,B,C, inveniatur quarta proportionalis I, *a* super quam describatur parallelelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I: erit quoque, ut jam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. *b* Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 2. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

b 9. quint.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. *e* Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D, erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque ut rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. *d* Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D. triplicata proportionis rectæ C ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B: & solidi C ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

e 33. undecimi.



d 33. undecimi.

SCHOLIVM.

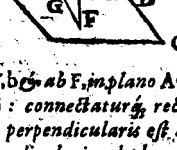
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, ejusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor

mor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ: perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio convenit etiam prismatis, quorum duo plana adversa æqualia sunt triangula, ut Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic est demonstratum, proportionalia erunt. Cum igitur, prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur. a 15. quinti

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



Planum enim AB, *rectum sit ad planum* AC, *sitq; eorum communis sectio recta* AD. *Et ab* E. *puncto plani* AB, *ad planum* AC, *perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem* AD.

Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, *& ab* F, *in plano* AC, *ducatur ad rectam* AD, *perpendicularis* FG: *connectaturq; recta* EG, *in plano* AB. *Quoniam igitur* FG, *perpendicularis est ad communem sectionem* AD, *erit quoq; perpendicularis ad planum* AB, *ex defin.* 4. *hujus lib. atque adeo & ad rectam* GE, *per* 3. *defin. hujus lib. Est autem & EF, recta ad* FG, *per eandem* 3. *defin. Igitur in triangulo* EFG, *duo anguli* EFG, EGF, *recti sunt, quod est absurdum, cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex* E, *demissa ad planum* AC, *non extra communem sectionem* AD, *cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.* h 12. primi. c 17. primi.

SCHOLIVM.

HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, *d* ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. hujus lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, ut in scholio propos. 13. hujus lib. demonstravimus. d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXX.

SI solidi parallelepipedi eorum; quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli-

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT *parallelepipedi* AB, *plana opposita* AC, BD, *quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis* I, K, L, M, N, O, P, Q, *per quæ extensa sint duo plana* IN, KO, *quorum sectio communis sit recta* RS. *Ducatur item diameter* AB. *Dico rectam* RS, *& diametrum* AB, *se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis* RB, RD, SA, SC: *considerentur duo triangula* AQS, COS. *Quoniam igitur latera* AQ, QS, *trianguli* AQS, *æqualia sunt lateribus* CO, OS, *triangulicos: (Sunt enim* AQ, CO, *dimidia rectarum æqualium* AG, CH, a *&* QS, OS, *duabus æqualibus* AN, HN, *æquales, cum sint parallelogramma* AS, HS,) b *& angulus* AQS, *æqualis alterno angulo* CQS: c *Erunt & bases* AS, CS, *æquales: & anguli* ASQ, CSO, *æquales*, d *Atqui anguli* ASQ, ASO, *æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli* CSQ, ASO, *æquales sunt duobus rectis:* e *Ac propterea* AS, CS, *unam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendetur esse æquales* BR, DR, *& unam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia utraq; recta* AD, BC, *parallela est, & æqualis rectæ* FH, *ob parallelogramma* AF, FC, f *ipsæ quoque inter se parallelæ erunt & æquales.* g *Quare & rectæ* AC, BD, *earum extrema conjungentes, parallelæ sunt & æquales: Ac proinde ipsarum dimidiæ* AS, BR, *æquales sunt. Quia vero* AC, BD, *parallelæ sunt;* h *erunt rectæ* AB, RS, *in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet* T. i *Cum autem duo anguli* AST, ATS, *trianguli* AST, *æquales sint duobus angulis* BRT, BTR, *trianguli* BRT, *& latus* AS, *lateri* BR: k *Erunt reliqua latera* TA, TS, *reliquis lateribus* TB, TR, *æqualia: Ac propterea* AB, RS *se mutuo secant bifariam in* T. *Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex adverso, &c. Quod erat ostendendum.*

a 34. primi.
b 29. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 14. primi.
f 9. undecimi.
g 33. primi.
h 7. undecimi.
i 29. & 15. primi.
k 26. primi.

COROLLARIVM.

(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam dividunt, ut hic demonstratum est rectam RS.)

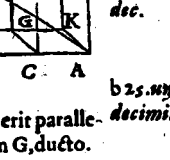
SCHOLIVM.

HVIC throremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstravimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:

trum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

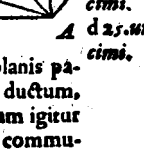
SECETVR parallelepipedum A B, plano C D, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri A B, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sic enim primo planũ C D, oppositis planis A E, B F, parallelum. a Et quia plana parallela B F, D C, E A secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem B A, bifariam in G; secabuntur quoque latera adversorum planorum A H, B I, atque quo & bases A H, B I, bifariam. b Cum igitur sit ut basis K C, ad basim C H, ita solidum A D, ad solidum C B, erit parallelepipedum A B, sectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.



a 17. undec.

b 25. undecimi.

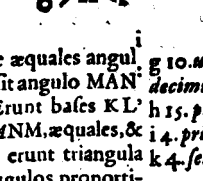
TRANSEAT secundo planum secans A I, B H, per diametros B I, A H, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum A B, c cum A B, in plano sit parallelarum A H, B I. d Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.



c 7. undecimi.

d 25. undecimi.

TERTIO planum secans A K B M, neque sit adversis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, secantur plano A K B M: e erunt communes sectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cum sint communes sectiones planorum parallelorum A L, B N, factæ à plano A K B M. Quare parallelogrammum est A K, B M: f ideoq; tam rectæ tam A K, B M, quam rectæ A M, B K, inter se erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N: & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ: g ac proinde æquales anguli O A P, L B K. h Cum igitur O A P, æqualis sit angulo M A N æquales quoque erunt anguli K B L, M A N) i Erunt bases K L, M N, inter se, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales, & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula B K L, A M N, k cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta K L, rectæ M N: & angulus B K L, angulo A M N: & angulus K B L, angulo M A N, est æqualis, ut ostendimus: erit & reliqua I K, reliquæ H M: & reliquus angulus B K I



e 16. undecimi.

f 34. primi.

g 10. undecimi.

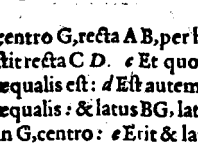
h 15. primi

i 4. primi.

k 4. sex.

reliquo AMH: & reliquus KBE. reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH. æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH. duobus rectis æquales: & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia: & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula BHM, AIK: & quadrilatera AKLF, BMNE: cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKLB HF, æquale erit solido contento planis BMNE, KIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. hujus libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, ut demonstratum est Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.

POSTREMO planum secans CD, neque adversis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neq; per ullos angulos eorum ductum: sed utrumq; secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, ut prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM: connectanturque rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, a inter se sunt parallelæ: b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano: ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est: d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis: & latus BG, lateri AG, æquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro: e Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GD, trianguli AGC: f & angulus BGD, æqualis angulo AGC: g Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docui-



a 29. undec.
b 7. undecimi.
c 29. primi

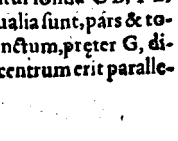
d 15. primi.
e 26. primi
f 15. primi.
g 4. primi.

mus.

mus, anguli illius angulis hujus æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & basis KL, basi MN: & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum: Ac propterea æquale & simile, cum singula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit: Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH: & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia & quadrilatera ACKI, BDMH: Item DENM, GFLK: cum & latera lateribus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. hujus lib. æquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN: cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia: Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

a 4. primi.

SED secetur jam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum CB, dividere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non dividitur bifariam, dividatur bifariam in E, ut sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonstratum est.



Ponitur autem & bifariam secari plano GD: Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, præter G, dividet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

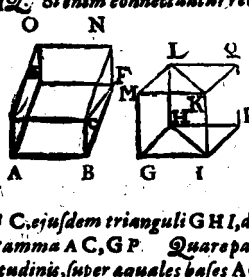
THEOR.

XLI.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata aequalis altitudinis ABCDEF, GHIKLM quorum illud basim habeat parallelogrammum BCD, hoc vero triangulum GHI: sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI duplum. Dico haec prismata esse aequalia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ. Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO, GP, MQ. Si enim connectantur rectae NO, PQ, constituta erunt duo



parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligitur ex

a 34. primi *propos. 15. hujus lib.* a *Quoniam igitur parallelogrammum GP duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum*

b 31. undecimi. *AC, ejusdem trianguli GHI, duplum: aequalia erunt parallelogramma AC, GP. Quare parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis, super aequales bases AC, GP, inter se sunt aequalia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM,*

c 32. undecimi. *(c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adversorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) aequalia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata aequalis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim jam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

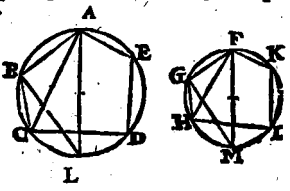
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona similia, inter se sunt, ut à diametris quadrata. 1.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similit. minem polygonorum est, ut AB, ad BC, ita FG, ad GH: a erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: b Est autem angulus ALB, angulo ACB: & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint, c nempe re-



a 6. sexti. b 21. tertii. c 31. tertii.

cti in semicirculis existentes: d erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. e Quare erit ut AL, ad AB; ita FN, ad FG: & permutando, ut AL, ad FM, ita AB, ad FG. f Igitur est ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad poly-

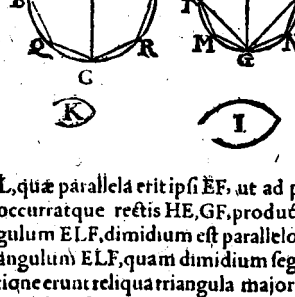
d 32. primi. e 4. sex. f 22. sexti.

polygonum FGHIK, super FG: cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterq; descriptæ. Quæ itaq; in circulis polygona similia inter se sunt, ut diametris quadrata, quod erat demonstrandum.

ii. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit vel major circulo EFGK. Si enim esset æqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo FFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, ut ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, majus erit, quã dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjungantur; rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, ut ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV: majus erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul majora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt simul quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam verò, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magni-



a 7. quinti.

b 14. pri.

c 11. dec.

gnitudo, quam K, excessus inter circulum EF,GH, & magnitudinem I. Sint jam circuli segmenta relicta EL, L F, F M, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ major est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B; & D, & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales divisa sit circumferentia ABCD, in quod distributa est circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, ut patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APB. QCR DS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, ut circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & majus. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I. circulo EFGH.

a 1. *duodecimi.*

b 14. *quinti.*

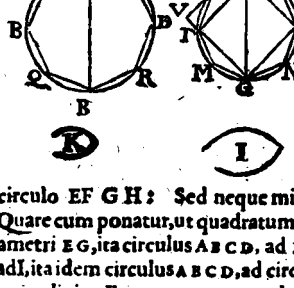
QVAMQVAM autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC, ita ut generaliter & universè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionē, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor.

SIT deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, *c* major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AG, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam in priori parte generaliter, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem; sive prior circulus major sit posteriore.

c 14. *quinti.*

sive

sive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, majorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falsum esse jam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita ut generaliter & universæ quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo majorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Non ergo major est magnitudo I, circulo EF GH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I: a sit autem ut circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulū EFGH, qui æqualis est magnitudini I: Erit quoque ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, sive circulus ABCD, circulo EFGH, major sit, sive minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.



a 7. quinti.

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.)

III.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT *pyramis, cujus basis triangulum* ABC, *vertex* D. *Secentur omnia ejus latera bifariam in* E, F, G, H, I, K, *connectantur* re-

ge

rectæ EF,FG,GE,HI,IK,KH,HE,EI,IF. Divisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH,HIKD,quarum bases triangula AEG,HIK,& vertices H,D: nec non in duo solida EBFGHI,CFGHIK,quę mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG,& triangula opposita EHG,BIF: hujus vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totum pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D,in sublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se,& similes toti: Item duo hæc prismata esse inter se æqualia,& majora dimidio ,totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD,trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter: a erunt HI, AB,parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC: & HK, AC: & EG, BC: & EF, AC: & FG, AB: & EH, BD: & EI,AD: & IF, DC: & HG, DC. b Sunt autem & rectæ FG,HI,cum parallelæ sint ipsi AB,inter se parallelæ: atque eadem ratione parallelæ sunt GH,FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH,HEBI, IDHE,EBFG,GHKC,CKIF,FGHI. Quoniam vero rectæ HE,HG,rectis DB,DC, sunt parallelæ: c erunt anguli EHG,BDC,æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC: & HGE, DCB, d proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG,lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos: ac proinde simile est triangulum HEG,triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE,HAG,AEG, triangulis DAB,DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH,pyramidi ABCD, similis est,per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI,HK, rectis AB, AC,sunt parallelæ: e erunt anguli IHK,BAC,æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC: & HKI,ACB. f Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia: ac propterea triangulum HIK,triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI,DIK,DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, ut ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. g ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta: ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22, lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo

a 2. sexti

b 9. undecimi.

c 10. undecimi.

d 4. sexti.

e 10. undecimi.

f 4. sexti.

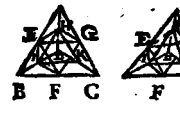
g 21. sexti.

ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & simili triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, b quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

a 34. pri.

b 34. pri.

RVRSVS, c quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FE, ob parallelogramma EHIB, FGHI, CFGE; Erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æquiangula, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: d Sunt autem & parallela, cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis, & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. e Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula GFG, HIK, æquiangula, & æquiangula inter se, ac propterea similia: f Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt ejusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK: & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis hujus, per scholium propos. 41. lib. 1. g Ipsa inter se æqualia erunt.



c 34. pri.

d 15. undecimi.

f 1.

g 14. undecimi.

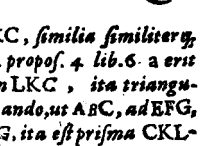
DENIQVE quia prisma EBFGHI, majus est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorū: Majora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio ejusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, major dimidium ejus superat, minor verò à dimidio

dio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraq; divisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, ejusdem altitudinis, quarum latera bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita ut pyramis utraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH, & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; ut vult propositio præcedens: Eodemque modo intelligatur esse divisa pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH: & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea divisa



est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterq; posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a *erit* a 12 *sexti, quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Ut autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, videlicet IBKLMN, ad unum prisma PFQRST* b *ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoq;, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD,* b 12. *quinti.*

factis in pyramide ABCD, *ad bina prismata in pyramidibus* EPRS STVH, *factis in pyramide* EFGH, *ut sunt bases* AIL, MNO, *illarum pyramidum ad bases* EPR, STV, *harum pyramidum, & sic deinceps eadem semper facta divisione. Sed ut illa bases ad has, ita est* L K, *basis quæ illius est æqualis & similis, ad basin* RQG, *quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis* ABC, *ad basin* EFG. *Igitur erunt quoq; ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita prismata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* ABCD, *ad prismata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* EFGH. *Ac propterea erunt quoq; ut prismata pyramidis* ABCD, *ad prismata pyramidis* EFGH, *ita prismata tam pyramidis* AILM, *ad prismata pyramidis* EPRS, *quam prismata pyramidis* MNOD, *ad prismata pyramidis* STVH: *& ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis* ABCD, *ad duo prismata pyramidis* EFGH, a *ita omnia prismata in pyramidibus* ABCD, AILM, MNOD, *&c. simul ad omnia prismata in pyramidibus* EFGH, EPRS, STVH, *&c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia: Erunt quoq; ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita omnia prismata in pyramide* ABCD, *ad omnia prismata in pyramide* EFGH. *Quocirca si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 12. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem sit LKC, & RQG; ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad basis ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur planæ parallelæ ABC, MNO, *b* secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV. cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

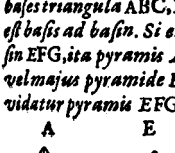
b 17. *undecimi.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ejusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. *Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC, ad basin* EFG, *ita pyramis ABCD, ad solidum X: quod vel minus erit, vel majus pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Dividatur pyramis EFGH, in duas pyramides aquales, & duo prismata aqualia, juxta propos. 3. hujus lib. Rursus eodem modo facta pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides aquales, & in bina prismata aqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; a qua majora sunt dimidio pyramidis EFGH; Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps: b relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, aqualis ponatur solidis X, Y: erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, majora solido X. Dividatur pyramis ABCD, in duas pyramides aquales, & duo prismata aqualia, & eodem modo facta pyramides AIL, MNOD, in binas pyramides aquales, & bina prismata aqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. c Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero aqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X. Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD: d erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & majora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.*



a 3. duodecimi.

b 1. dec.

c 4. duodecimi.

d 14. quinti.

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, majus. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG: Erit convertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum Y, majus ponitur pyramide EFGH: e erit & pyramis ABCD, major solido Y. Quare erit ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum.

e 14. quinti.

Ostensum enim est jam, non posse esse, ut est basis ad basin, ita pyramidē ad solidum pyrāmide minus. Non ergo majus est solidum Y pyramide EFGH, sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABCD, ad basin EFG, ita pyramis AB-
a 9. quinti. *CD, ad solidum X: a sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, ut ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem : Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

CONVERSO modo si pyramides triangulares inter se sint, ut bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim unius altitudo major credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ ; Eritque ut
b 9. quinti basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. *b* Pyramis ergo constituta æqualis erit toti pyramidi, dars toti. Quod est absurdum.

COROLLARIVM.

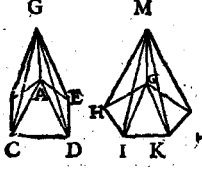
HINC sit, pyramidis ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

ITEM sequitur è converso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in converso propos. 3 (. & 31. lib. 11. demonstrando usi sumus: si tam in altitudi-
vi. ne, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygona ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico ita esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia: erit qualibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa c *Quia vero est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF: erit componendo ut basis ABCD, ad basin,*



c 5. duodecimi.

ACD

ACD, ita pyramis ABCDF, *ad pyramidem* ACDF: a *Sed rursus est ut basis* ACD, *ad basin* ADE, *ita pyramis* ACDF, *ad pyramidem* ADEF. *Igitur ex aquo ut basis* ABCD, *ad basin* ADE, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* ADEF. *Componendo ergo erit ut basis* ABCDE, *ad basin* ADE, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* ADEF. *Simili argumento erit ut basis* GHIKL, *ad basim* GKL, *ita pyramis* GHIKL, *ad pyramidem* GKLM: *& convertendo ut basis* GKL, *ad basin* GHIKL, *ita pyramis* GKLM, *ad pyramidem* GHIKLM. b *Rursus quoniam est, ut basis* ADE, *ad basin* GKL, *ita pyramis* ADEF, *ad pyramidem* GKLM: *Erunt quatuor bases* ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, *in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus* ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, *ut in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex aquo, erit ut basis* ABCDE, *ad basin* GHIKL, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* GHIKLM: *Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.*

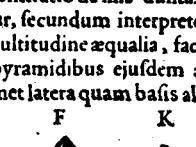
a 5. duodecimi.

ABCDE	ABG DEF
DE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

b 5. duodecimi.

SCHOLIVM.

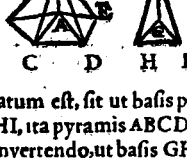
QVAMVIS hujus propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus ejusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus ejusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides ejusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, hujus vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales divisa. e Quoniam vero est, ut basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis, *ABCF*, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: & eodem modo, ut basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: d Erit ut basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem *GHIK*, quantam quantitatem. Rursus quia est, ut basis *ABCD*, prima quantitas, ad ba-



e 5. duodec.

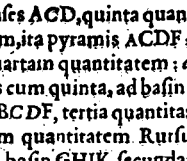
d 24. quinti.

ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo
a 5. duodecimi. est ostensum: a & ut basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyra-
b 24. quinti. midem GHIK, quartam quantitatem: b Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem,



ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper proceden. dum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, ut demonstratum est, sit ut basis polygona ABCDE, ad basin, triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque convertendo, ut basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum unius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, undecunque incipias. Quamvis enim demonstratio incipiat à polygono, ejusque pyramide, ut ex demonstratione constat, tamen convertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, ejusque pyramide, ut dictum est.

SED jam sint duæ pyramides ejusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygonæ, sintque plura latera in una basi quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis ejus in totidem divisa pyramides.



Quia vero, ut jam est demonstratum, est ut basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: & ut
c 24. quint. bases ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: c Erit etiam ut basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque, ut basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut ante

est

est ostensum; a Erit etiam ut basis ABCDE, prima quantitas cum a 24. quinquinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCD ti. EF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, convertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, ut bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. hujus lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides ejusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, ut in coroll. 5. hujus lib. diximus.)

THEOR. 7. PROPOS. 7. VI.

OMNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, *cujus duo triangula opposita æqualia ac similia* ABF, DCE. *Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe* AC, *in* ABCD: CF, *in* BCEF: FD, *in* ADEF. b *Quoniam igitur triangula* ABC, ADC, *æqualia sunt*: c b 34. pri. c 5. duodec.

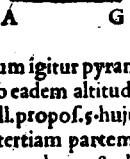
estque ut basis ABC, *ad basin* ADC, *ita pyramis* ABCF, *ad pyramidem* ADCF, *cum ha pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex* F, *vertice ad planum* ABCD, *demissam*: *Erunt & pyramides* ABCF, ADCF, *inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides* ADFC, EFDC, *super æquales bases* ADF, EFD, *constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice* C, *ad planum* ADEF, *demissa. Est autem pyramis* ADCF, *eadem pyramidi* ADFC, *cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi* ADC, *& triangulis* ADF, ACF, DCF: *hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi* ADF, *& triangulis* ADC, ACF, DCF.

Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, *seu* CDEF, (*quæ eadem est pyramidi* EFDC, *cum tam* EFDD, *quam* CDEF, *continentur planis* CDE, EFD, DCF, FCE,) *totum prisma componentes, ut perspicuum est, æquales sunt inter se: Ac propterea prisma* ABCDEF, *in tres pyramides æquales est divisum.* Quocirca *omne prisma triangularem habens basin, &c.* Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

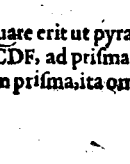
SIT enim primū pyramis BFC, triangularē habens basin ABF, & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABE. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma divisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, *a* ut demonstratum est: Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, imo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF.



a 7. *duodecimi.*

Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. hujus lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cujus basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum: & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB: *b* Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma



b 12. *quinti.*

sma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE: propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basin ABCD, constitutæ, per coroll. propos. 5. hujus lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam divisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

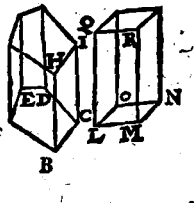
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam ejusmodi pyramis, æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. hujus lib. Quam quidem tam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

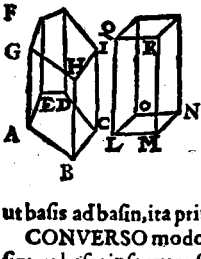
SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunq; habeant bases, inter se sunt, ut bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec non de parallelepipedis, quę nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus universe de omnibus prismatis, quorum duo plana adversa, sive bases, sunt polygona, quamvis plura latera, seu anguli in unius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur prismata ejusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases



sint

sint figuræ multilateræ. Dico ut est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. *Si enim ex omnibus angulis utriusque* basis ad unum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. prædictum hujus propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. *a* Quæ ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basin, ut ostensum est, propos. 6. ejusque scholio. Igitur erit quoq; ut basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.



a 15. quinti.

CONVERSO modo, si prismata quarumcunq; basium inter se sint, ut bases ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

*(*VNDE prismata ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine: Et prismata æqualia ejusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conversum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.*)*

SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelligantur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo prisma dici ab Euclide, ut in defin. prismatis diximus. Nam si in hujusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis ejusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia ejus pars, sed duæ tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur

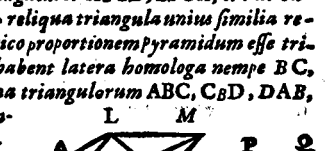
aliud

aliud æquale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constitutæ parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constituram, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma ejusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis ejusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia, atque similia. Hæc enim ratione, ut vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, ejusdemque altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, ut modo demonstravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

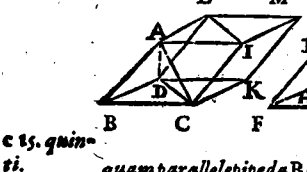
THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, *ita ut bases* ABC, EFG, *sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa nempe* BC, FG. *Extendantur enim plana triangulorum* ABC, CBD, DAB, *perficianturque parallelogramma* BI, BK, BL. *Deinde ducantur* LM, IM, *rectis* AI, AL, *parallelæ convenientes in* M, *connectaturque recta* KM. *Erit igitur completum parallelepipedum* BM, *ejusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi* BM, *sint parallelæ, ut facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum* FQ. *Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani* ABC, EFG, *sunt æquales, atque ut* AB, *ad* BC, *ita* EF, *ad* FG; *erunt parallelogramma* BI, FN, *similia. Eodem modo cum anguli* ABD, EFH, *sint æquales, sitque ut* AB, *ad* BD, *ita* EF, *ad* FH: *Item anguli* DBC, HFG, *æquales, & ut* DB, *ad* BC, *ita* HF, *ad* FG: *erunt & parallelogramma* AL, BK, *parallelogrammis* FP, FO, *simi-*



a 24. undec. b 24. undec. *similia. a Sed tam tria* BI, BK, BL, *parallelepipedi* BM, *reliquis tribus oppositis* DM, AM, CM, *quam tria* FN, FO, FP, *parallelepipedi* FQ, *reliquis oppositis tribus* HQ, EQ, GQ, *b sunt aequalia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum* BM, *similia sunt*



sex planis solidum FQ, *ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda* BM, FQ. *Quoniam vero ductis rectis* LI, PN, *c prismata* DBCILA, HFGNPE, *habent eandem proportionem,*

c 15. quinti. *quam parallelepipeda* BM, EQ, *eorum dupla; & pyramides* ABCD, EFGH, *eandem, quam prismata dicta, earum tripla: d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi* BM, *ad parallelepipedum* FQ, *sit triplicata proportionis homologorum laterum* BC, FG; *erit quoque proportio pyramidis* ABCD, *ad pyramidem* EFCH, *proportionis* BC, *ad* FG, *triplicata. Similes itaque pyramides, quae triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.*

d 11. quin. e 32. undec.

COROLLARIVM.

(Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia pluriumlaterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectae

f 20. sexti. EB, EC, LH, LI, *f* divisae erunt bases similes in triangula numero aequalia, & similia: nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, aequalis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LC, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex aequo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex aequo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH, & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex aequo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH. *g* Quare aequian-

g 5. sexti.

quiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. a Quapropter, ut demonstratum est, ut pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK; habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL, habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; b Atque idcirco erit ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, c cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH, Quod est propositum.

a 8. duodec

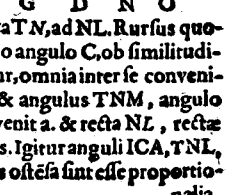
b 12. quinti,

c 12. duod.

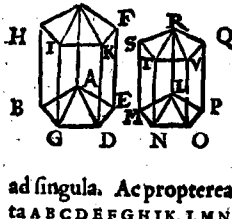
SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD: LN, LO, d erunt, ut de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt, erit ut IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem CB, ad CA: ita quoque est NM, ad NL, B ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit ut IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum: si ille huic superponatur, omnia inter se convenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Convenit a. & recta NL, rectæ CA, eo q; anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sũt, Ac, propterea cũ latera circa ipsos ostẽsa sint esse proportionalia,

d 12. simil.



halia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV, nec non



prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstravimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

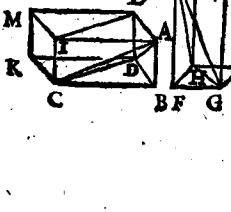
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes dividi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia dividi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex hujus scholii demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQUALIUM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT *æquales pyramides triangulares* ABCD, EFGH. *Dico earum bases* ABC, EFG, *& altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut* ABC, *ad* EFG, *ita altitudinem pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD. *Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda* BM, FQ, *earundem altitudinum cū pyramidibus, connectantur quæ recta* LI, PN: *erunt prismata* DBCILA, HFGNPE, *cū sint tripla pyramidum, quæ æquales pronuntiatæ sunt inter se æqualia; Ac proinde Parallelepipeda* BM, FQ, *cum sint*



sint prismatum dupla, aqualia quoq; erunt. a *Quare bases eorum* a 34 *un.* *& altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis* BI, *ad basin* FN, *dec.* *ita altitudo solidi* FQ, *ad altitudinem solidi* BM: b *Vt autem basis* b 15. *quin.* BI, *ad basim* FN, *ita est triangulum* ABC, *ad triangulum* EFG. *ti.* *Igitur erit quoque ut basis* ABC, *ad basin* EFG; *ita altitudo pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD; *cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum: Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.*

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. *Constructa enim figura, ut prius;* c *cum sit ut* ABC, *ad* EFG, *ita parallelogrammum* BI, *ad parallelogrammum* FN: *sint* q. c 14 *quin.* *eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum: erunt ti.* *quoq; bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ:* d *Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda* BM, FQ. d 34 *unde.* *Quare & prismata* DBCILA, HFGNPE, *eorum dimidia, æqua-cimi.* *lia erunt:* e *atque propterea pyramides quoque, prismatum tertia* *partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

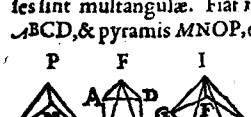
Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides

æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera revocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstravimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, ejusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. hujus lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; erit ut basis ABC, ad basin KLM, hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyrami- e 9. hujus.

dum ABCD,EFGHI , æqualium baſes & altitudines reciprocabitur.

Sed reciprocentur jam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo cum baſis KLM,æqualis ſit baſi EFGH; & altitudo pyramidis KKMN,eadem,quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem eſſe ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD,altitudinem : erit quoque ut baſis ABC,ad baſin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN,ad altitudinem pyramidis ABCD. 29.duodecimi. Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD,KLMN. Cum ergo pyramis KLMN,æqualis ſit pyramidi EFGHI,pyramidi EFGHI,pyramidi ABCD, pyramidi EFGHI,æqualis.Quod eſt propoſitum.

Sint deinde pyramides æquales ABCDE,FGHIKL, quarum baſes ſint multangulæ. Fiat rurſus triangulum MNO , æquale baſi ABCD,& pyramis MNOP,ejuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Eritque ex ſcholio propoſ. 6. hujus lib. pyramis MNOP,æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur& pyramis MNOP , æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare,ut nunc demonſtravimus , erit ut baſis MNO, hoc eſt baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE , FGHIKL , baſes & altitudines reciprocantur.



Sed reciprocentur jam harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO,æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem ut ABCD, ad FGHIK,ita altitudo pyramidis FGHIKL , ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque ut MNO.ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL,ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare ut ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP,FGHIKL. Eſt autem pyramis MNOP,pyramidi ABCDE,æqualis in propoſ.6. hujus lib. Igitur & pyramis ABCDE,pyramidi FGHIKL,æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

Omnia hæc facile quoque demonſtrabuntur convenire priſmatis quibuſcunq;. Nam ſi priſmata fuerint æqualia,erunt & eorum pyra-

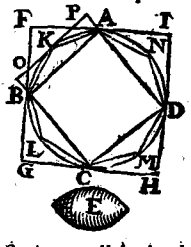
ramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cum sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. hujus lib. Vel certe duæ tertiæ si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, ut in scholio ejusdem propos. ostensum est. Quare ut modo demonstravimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum, reciprocabuntur quoque bases prismatum atq; altitudines.

Rursus, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla, vel certe sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. ix.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

Habeant conus & cylindrus basin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. *Dico* conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelligantur; super hæc quadrata sub altitudine coni & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, ut ad propos.



9. lib 4. ostendimus: *a* est; ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum ejusdem altitudinis: Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis A B C D, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus basis circulus ABCD, Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N; adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC; MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad prop. 27. lib. 3. ostendimus occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi A B O P: erit quoque prisma basis A K B,

dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis *ABOP* : cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basim, quemadmodum ad propo. 7. hujus lib. demonstravimus ; Ac propterea prisma basis AKB, majus erit, quam dimidium segmenti cylindri, cujus basis figura contenta linea recta A B, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula *BLC, CMD, DNA*, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul majora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ *AK, KB*, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata ejusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ majora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam verò si à cylindro, cujus basis circulus *ABCD*, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis *ABCD* ; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium *AKB, BLC*, &c. atque *in hunc modum* semper fiat detractio ; a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni : Sint jam segmenta cylindri relicta basium *AK, KB, BL*, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul ; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni, una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ major est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ AKBL, CMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni ; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur major est cylindrus triplo coni.

a 1. *dec.*

Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudini E, ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum *ABCD*, & circa eundem, quadratum FGHI, intelligaturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, ut ad propos. 9. lib 4. demonstravimus, b est que ut

b 6. *duodecimi.*

basis

basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis; erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, major erit dimidio coni, cujus basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adjunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propos. 27. lib. 3. demonstravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, major erit dimidio segmenti coni, cujus basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul majores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DNA, secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ majores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cujus basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam majorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cujus basis est circulus ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponantur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est de-

a 41. pri.
b 6. duodec.
c 1. dec.

monſtratum, erit hujuſcemodi priſma majus cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus, minor eſt triplo coni. Sed neque major triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea que conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

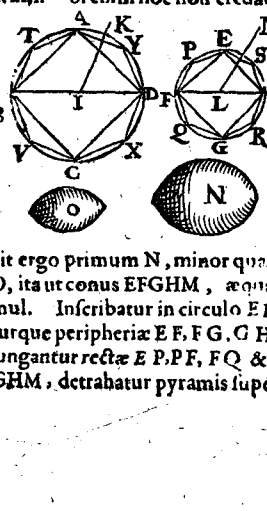
Quamvis propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis convenit, ut perſpicuum eſt ejus demonſtrationem diligenter intuenti. Itaque propoſitio univerſe ita proponi poterit.

Omnis conus ſive rectus, ſive ſcalenus, tertia pars eſt cujuslibet cylindri ſive recti, ſive ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis licet non ſit idem axis coni & cylindri.

xi. ## THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes.

Sint ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico ut eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit ut baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel major erit, vel minor cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea eſſet conus ad conum ut baſis ad baſin: quod non conceditur.



a 7. quinti

Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, dividanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P Q R S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, ejuſdem altitudinis,

nis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est: *a* relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sunt ergo jam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O; quæ prædicti coni segmentis major est: erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum EPFQCRHS, ejusdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVGXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propos. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. hujus lib. est ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EPGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, *b* & ut polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cum conis: Erit quoque ut pyramis ATBVCXYDK, ad pyramidem EPFFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, *c* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem fuit & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *dec.*

b 6. *duodecimi.*

c 14. *quinti.*

Sit secundo N, major cono EFGHM. Cum igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N: Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM, major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin hujus coni. Non ergo major est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque major est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; *d* Sit autem ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

d 7. *quinti.*

e 15. *quint.*

e Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM,

ita est cylindrus ABCDK, qui triplus est coni ABCDG,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni FEGHM.) Erit quoque ut basis ALCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, in se sunt, ut bases. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste iudicat, ita ut propositio universe proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, sive ambo recti sint, sive scaleni, sive unus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Converteretur haec propositio hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conversum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis semper eandem, vel æquales bases constitutos, sive ambo sint recti vel scaleni, sive unus, rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel una & eadem.

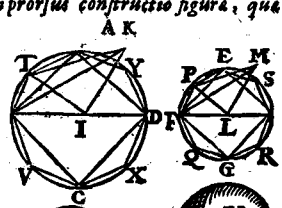
Item sequitur, conos & cylindros æquales, super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conversum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Sint coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EF, GH, *axes vero* LK, LM, *& diametri basium* BD, FH. *Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus* ABCDK, *ad aliquam magnitudinem* N, *proportionem tri-*

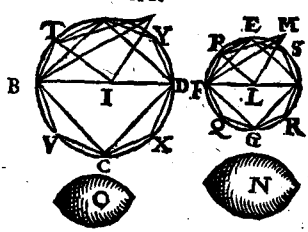
triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim esset aqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figura, quæ in præcedenti propositione, i- a 7.



taut rursus pyramis EPF QGRHSM, major ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo trianguli BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH, b ac propterea ut semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando, ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea quæ axes recti ad eorum bases; c Erunt triangula BIK, FLM, aquiangula; d Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad EP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP, (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, ut in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP, & erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita ME, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, f erunt bases KB, KT, æquales. Eadem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea recta KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique sit proportio æqualitatis. g Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT: Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT: ita MP, ad FP: Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum sit ut TK, ad KB, ita PN, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est: habebunt triangula BKT, EMP, latera proportionalia, h ideoque æquiangula e- b 15. quinti. c 6. sexti. d 4. sext. e 6. sex. f 4. pri. g 7. quinti. h 6 sexti. runt:

runt : *Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides* ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, *inter se similia esse: Qua cũ sint multitudine aqualia, erunt dicta pyramides similes ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum* BT, FP, *ex coroll. propos. 8. hujus lib. Vt autem* BT, *ad* FP, *ita est* BI, *ad* FL, *similitudinem triangulorum* BIT, FLP: a *Eut* BI, *ad* FL, *ita* BD, *ad* FH. *Igitur pyramis*

a11. *quinti.*



ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: *Ponebatur autem & proportio coni* ABCDK, *ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit ut pyramis* ATBVCXDYK, *ad pyramidem* EPFQGRHSM, *ita conus* ABCDK, *ad N. Quare cum pyramis* ATBVCXDYK, *minor sit cono* ABCDK, *pars toto,* b *erit & pyramis* EPFQGRHSM, *minor quam N. Ostensa autem est & major. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono* EFGHM.

b14. *quin.*

Sit deinde N, major cono EFGHM. *Cum ergo ponatur conus* ABCDK, *ad N, habere proportionem triplicatam diametri* BD, *ad diametrum* FH, *Habeat autem & pyramis* ATBVCXDYK, *ad pyramidem* EPFQGRHSM, *triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus* ABCDK, *ad N, ita pyramis* ATBVCXDYK; *ad pyramidem* EPFQGRHSM : *& convertendo ut N, ad conum* ABCDK, *ita pyramis* EPFQGRHSM, *ad pyramidem* ATBVCXDYK. *Quare cum ex coroll. propos. 8. hujus lib. pyramis* EPFQGRHSM, *ad pyramidem* ATBVCXDYK, *habeat proportionem triplicatam homologorum laterum* PE, *ad* TB, *hoc est, diametri* FH, *ad diametrum* BD: *habebit quoq; N, ad conum* ABCDK, *proportionem triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD. *Ponatur ut N, ad conum* ACBDK, *ita conus* EFGHM, *ad magnitudinem* O. *Habebit igitur & conus* EFGHM, *ad* O, *proportionem triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD.

c14. *quinti.*

Et quia N, *major ponitur quam conus* EFGHK : c *erit quoque conus* ABCDK, *major quam* O. *Quapropter conus* EFGHM, *ad magnitudinem* O, *minorem cono* ABCDK, *proportionem habet triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD. *Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alie-*

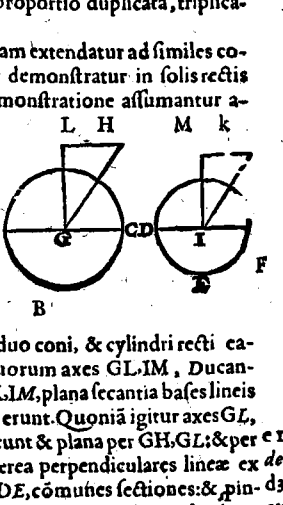
alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent basium diametri. Non ergo major est magnitudo N, cono EFGH. *Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est*; a *ac proinde conus* A B C D K, *eandem habet proportionem ad conum* EFG-HM, *& ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum* B D, *&* F H; *erit quoq; conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.* a 7. quinti.

b *Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, at q; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.* b 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si major conus, & cylindrus cum minore conferatur perspicuum est, in secunda parte hujus propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. hujus lib. minorem pyramidem ad majorem habere proportionem laterum homologorum triplicatã. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere majorem quantitatẽ ad minorem, ut habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

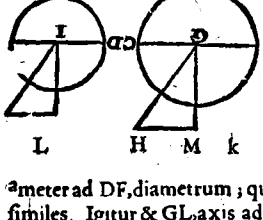
Hæc porro propositio, quamvis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos; tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similib⁹ conis & cylindris scalenis. Sunt similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABCDEF, exet vero ACH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatã. Intelligantur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM, Ducanturque per rectas GH, GL: Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basium erunt. Quoniã igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, c erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem rectas. d Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in AC, DE, cõmunes sectiones: & pinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se



c 18. undecimi.

d 38. undecimi.

se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem
a 32. primi. & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse ejusdem altitudinis; erit recta HL, per
b 29. primi axium vertices ducta ipsi AC, parallela; b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli



CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK, Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; c atque idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, similes erunt ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constat ex coroll. propos. 11. hujus lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

c 4 sexti.

d 12. duodec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

xi. Si cylindrus plano secetur adversis planis parallelo; Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Secetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo adversis planis AB, CD, *quod quidem secet axem* EF, *in* I. *Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum* GHCD, *ita esse axem* EI, *ad axem* IF. *Intelligatur enim cylindrus* ABCD, *in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo* EC, *ad cujus revolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantum libet; Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ* EK, KL, *æquales ipsi* EI. *Item quotcunque rectæ* FM, MN, NO, *æquales ipsi* FI. *Deinde per puncta* I, K, L, M, N, O, *ducantur rectæ* IH, KP, LQ, MT, NV, OX, *parallelæ, & æquales rectis* EB, FC; *quæ quidem ad revolutionem rectanguli* EC, *describent circulos* GH, PQ, ST, ZV, YXY, *parallelos æquales*

cir-

circulis A B, C D, *ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper intra æquidistantes circumferuntur.* Ac *propterea cylindri erunt* S P, P A, *A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totum cylindrum* S Q X Y. *Quoniam vero tam cylindri* S P, P *A*, A H, *super bases æquales* Q S, P R B A, *& sub altitudinibus æqualibus* K L, E K, I E, *æquales sunt, quam cylindri* X Z, Z T, *T D*, D H, *super æquales bases* X Y, V Z, Y a, C D, *& sub altitudinibus æqualibus* N O, M N, F M, *I F, ex coroll. propos. 11. hujus*

lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, *cylindri* A H, *quam multiplex est axis* I L, *ipsius axis* I E; *Item tam multiplex cylindrus* X G, *cylindri* C G, *quam multiplex est axis* I O, *ipsius axis* I F. *Quoniam autem si axis* I L, (*multiplex* I E, *primæ magnitudinis*) *æqualis est axi* I O, (*multiplici axis* I F, *secundæ magnitudinis*) *æqualis quoque est cylindrus* S H, (*multiplex cylindri* A H, *tertiæ magnitudinis,*) *cylindro* X G, (*multiplici cylindri* C G, *quartæ magnitudinis,*) *ut ex propos. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major est axe, cylindrus quoque cylindro major est. Et si minor, minor, in quascunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5 ita axis* I E, *primæ magnitudo ad axem* I F, *secundam magnitudinem, ut cylindrus* A H, *tertia magnitudo ad cylindrum* C G, *quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur adversis planis parallelo erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

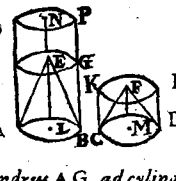
Etsi hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat, tamen ejus demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, semidiametros conjungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, ut constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

Sint

Sint ſuper baſes æquales A B, C D, *duo coni* ABE, CDF, *& duo cylindri* ABGH, CDIK, *quorum axes, ſeu altitudines* (*Nam in conis & cylindris rectis axes illi ſunt altitudines*) LE, MF. *Dico eſſe conum* A BE, *ad conum* CDF, *& cylindrum* ABGH, *ad cylindrum* CDIK, *ut eſt altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Extendatur enim cylindrus* ABGH, *ad partes* GH, *una cum ejus axe* LE, *& rectangulo* AG; *abſcindaturque axis* EN, *æqualis axi* MF, *& circa centrum* N, *intelligatur circulus* OP, *æqualis & parallelus circulo* GH, *ut fiat cylindrus* GHOP, *ejuſdem altitudinis cum cylindro* CDIK. *Quoniam igitur cylindri* HP, CI, *cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib.* a *cylindrus* AG, *ad ipſos eandem habebit proportionem.* b *Eſt autem cylindrus* AG, *ad cylindrum* HP, *ut axis ſeu altitudo* LE, *ad axem ſeu altitudinem* EN, *hoc eſt, ad altitudinem* MF, *ſibi æqualem. Igitur & cylindrus* AG, *ad cylindrum* CI, *erit quoque, ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF.



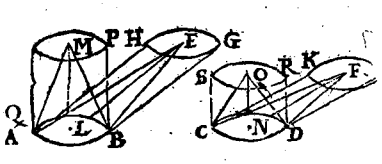
a 7. *quinti*
b 13 *duodec.*

c *Quia vero coni* ABE, CDF, *ſunt tertiæ partes cylindrorum* AG, CI; d *ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus* ABE, *ad conum* CDF, *ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat.*

c 10. *duodec.*
d 15. *quinti.*

SCHOLIVM.

Hoc idem convenire conis ſcalenis hoc modo demonſtrabimus: Sint ſuper æquales A B, C D, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, ſcaleni; quorum altitudines LMNO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, eſſe, ut eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM, Item ſuper baſin CD, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO. e Quoniam igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Eſt autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.



e 14. *duodecimi.*
f 10. *duodec.*

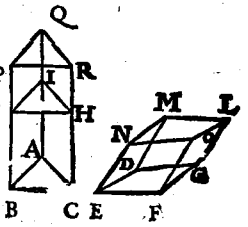
Quoniam autem coni, f cum ſint tertiæ partes cylindrorum, can-

a eandem habeant proportionem, quam cylindri; Erit quoq; conus a 15. quint. ABE, ad conum CDF, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod si. tamen eodem argumento, quo usi sumus in cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM. GDO, earundem altitudinem cum cylindris ABPQCDRS.

Idem concluditur quamvis unus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus; alter vero, nimirum conus GDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ, sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO, ut Euclides demonstravit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, c cum illi horum sint tertiæ partes. Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, ut altitudo LM, ad altitudinem NO, Quod nihilominus ostenderetur eadem ratione, qua usi sumus in cylindris, ut manifestum est. b 15. quinti c 10. duodec.

Eadem quoque hæc propositio convenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG; prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinib. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendiculares, ita ut BK, sit altitudo prismatis ABCHIK. Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini prismatis EL: & ductis rectis PQ, QR, RP, complentur prisma HIKPQR, ejusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntq; prismata HIK, PQREL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia ex coroll. 2. propos. 7. lib. d Ac propterea prisma ABCHIK, ad utrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est ut planum BI, ad planum KQ, e Et ut planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma, EL, ut BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod propositum.

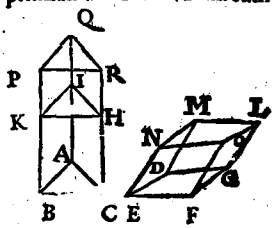


d 7. quinti e 1. sexti.

Quod si insistentes lineæ AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma

qui-

cujus insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK; Nam cum ex 2. coroll. propos. 7. hujus lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitque prisma constitutum ad prisma EL, ut illius altitudo ad hujus altitudinem, erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, ut altitudo illius, ad altitudinem hujus.



a 15. quinti.

a Quoniam vero pyramides eandem proportionem cum prismatis, b quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem.

b 10. quinti.

Eadem prorsus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

Hæc omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

Omnia quoque hæc facile converti possunt hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines bases habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, ut in converso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

xij. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

Sint æquales coni ABCD, DEF, *& æquales cylindri* ABGH, DEIK, *quorum bases* AB, DE; *axes, altitudines ve* LC, MF. *Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut* AB, *ad* DE, *ita* MF, *ad* LC. *In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines* LC, MF, *sint æquales; cum cylindri ponantur quoq; æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. propos.* 11. *hujus lib. Quare erit ut basis* AB, *ad basin æqualem* DE, *ita altitudo* MF, *ad altitudinem æqualem* LC. *Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.*

Quod

QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, major; & quæ abscindatur MN, ipsi LC, æqualis: & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum; ut in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH; DEIK: a erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO; ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: c item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales; imo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huic æqualem LC: Ac propterea reciproca sunt bases & altitudines.

a 7. quinti.
b 11. duod. dec.
c 14. duod. dec.

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. d cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris; si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, ut in figura.

d 10. duod.

SED jam bases atq; altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC: erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex 11. propos. 11. hujus lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, sive constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN: e Est autem ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH; ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: f item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO: g ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

e 11. duod.
f 14. duod.
g 9. quinti

AT vero in conis hæc erit demonstratio: Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK; cum eadem sint bases, altitudines quæ conorum; & cylindrorum. Quamobrem, ut

ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorũ tertia partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

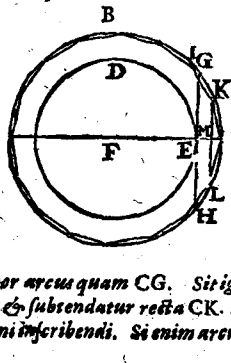
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes æquales, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Quare ut ostensum est, bases, & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales ex coroll. propos. 11. hujus lib. inter se quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, ut perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. docuimus.

XVI. PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, DE, *circa idem centrum* F, *oporteatque in majori* A B C, *inscribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem* D E. *Extendatur per centrum* F, *recta* A C, *secans circulum* D E, *in* E, *puncto*que *per* E, *ducatur* G H, *ad* A C, *perpendicularis, quæ tanget circulum* D E, *in* E, *ex coroll. propos.* 16. *lib.* 3. *Quoniam igitur arcus* A G C, *major est arcu* G C, *si ex* A G C, *auferatur dimidium* A B, *& ex residuo* B C, *dimidium* B I, *& ex residuo* I C, *dimidium* I K, *&sic deinceps; a relinquetur tandem*



X. decimi. *minor arcus quam* C G. *Sit igitur jam arcus* C K, *arcu* C G, *minor, & subtendatur recta* C K. *Dico rectam* C K, *esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcum* B I, *dividatur in partes numero & magni-*

magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot divisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC; in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, a quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod a 29. tertii. *æquales arcus CK, æquales subtendant: Describetur igitur polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & pariumlaterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam* b 29. tertii *igitur anguli GEM, KME, recti sunt: b erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, qua longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum CK, à centro I, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo, &c. quod erat faciendum.* c 14. tertii.

COROLLARIVM.

(HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Hujusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.g)

PROBL. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oportetque in majori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ recæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem;

erunt ipſæ ſectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BC, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, ut ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. *a* Deinde in majori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex C, ad EG, ducatur perpendicularis C γ, ad circumferentiam uſque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, *b* tangit in G, *ex coroll. propoſ. 16. lib. 3.* Et rectæ Gγ, *b* applicetur *c* in circulo ABCD, recta æqualis A ι. Quia vero ſi arcui Cγ, intelligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum GCγ, *c* latus Cγ, oppoſitum majori angulo, nempe recto, majus eſt latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto: erit quoque recta Cγ, major recta Aι; ac proinde arcus Cγ, arcu Aι, major erit, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 28 lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cδ, arcui Aι, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo *d* CL, dimidium LK, & ſic deinceps ſ *d* relinquetur tandem arcus minor arcu Cδ, ſeu arcu Aι. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, ſubtenſa minor quam recta Aι, hoc eſt, quam Gγ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, eſſe unum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, ut ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet: multo minus recta CK, ſubtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulum tanget, *e* Rurſus ducta diametro KN, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, ut jam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt OC, OK: atque adeo cum circuli ABCD, DOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ majoris diametri, quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur

a 16. *duod.*
b 1. *quarti.*
c 29. *primi.*
d 1. *decimi.*
e 12. *undec.*
f 18. *undec.*
g *ſchol.* 21. *ter.*

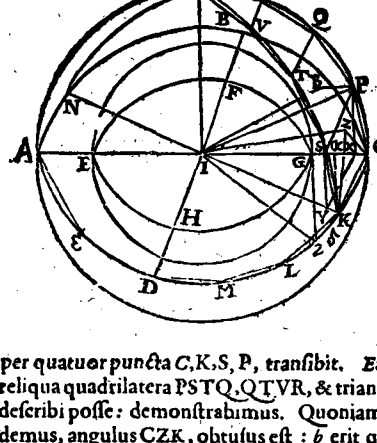
arcus

arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot divisus fuit arcus C L: & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D: *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O, K S, S T, T V, V O, æquales. Conjunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y *b* quæ in communes sectiones A C, N K, cadent: *c* Eruntque inter se parallelæ. a 29. tert. b 38. undecimi. c 6. undecimi.

QVONIAM igitur triangulorum P C X, S K I, anguli P X C, S I K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *d* & anguli P C X, S K Y, æquales, quod & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistunt: (Nam si ex semicirculis A O C, N O K, æqualibus demantur arcus æquales C P, K S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S K Y, S Y K, trianguli S K Y. Sunt autem & latera P C, S K, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare cum rectæ P Y, S Y, æquales sint & parallelæ: si connectatur recta X Y; *f* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter se. *g* At quia & rectæ C K, X Y, parallelæ sunt, quod latera I C, I K, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ C X, K Y, relinquentur & I X, I Y, æquales: A *C* proinde erit, ut I X, ad X C, ita I Y, ad I K) *b* Erunt parallelæ quoque P S, C K, inter se, cum utraque parallela sit ipsi X Y, *i* ideoque eas conjungentes rectæ C P, K S in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum C K S P, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli A B C D, perpendiculares, & connectantur rectæ Q C, T K, ostendemus similiter C K, Q T, esse parallelas: atque adeo ipsas P S, Q T, inter se parallelas esse, cum eidem C K, sint parallelæ; totumque quadrilaterum P S T Q, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterum Q T V R. *k* Est autem & triangulum R V O, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera K L, L M, M D, ductis scilicet quadrantibus O L, O M, O D, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphæra major repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O K, superaltatus C K, constructis, inscriptum erit in sphæra majori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. *Hoc* ergo dico non tangere sphæram minorem E F G H. d 27. tertii e 62. pri. f 31. primi. g 2. sex. h 15. duodec. i 17. undec. k 2. undec.

DVCATVR enim ex I, ad planum C K S P, perpendicularis I Z, connectanturque rectæ Z C, Z K. Cadere autem perpendicularem I k, intra quadrilaterum C K S P, in scholio sequenti ostendemus.

Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; a 47. pri. erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia: Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus



per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVD, circulos describi posse: demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est: b erit quadratum rectæ CK, majus quadratis rectarum ZC, ZK: ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, majus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC. b 12. sec.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendiculares K, α. Cum igitur AC, dupla ipsius AI, & A α. major sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem, cum sit, c ut AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC: erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. c 1. sexti.

d Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK, & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα: quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis, & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Kα, majus quadrato rectæ ZC. d 17. sex.

e Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK; e 47. pri.

Sunt-

Sumque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK. Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum I α, αK. Si ergo ex his demantur quadratum majus, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, majus quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ major quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ. *a* Est autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo major erit Gγ, quam ZC: Ac propterea quadratum rectæ Gγ, majus quadrato rectæ ZC. *b* Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor quam IZ. Quamobrem, cum IG, sit Sphæræ minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

a 19. primi.

b 47. pri.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, ut demonstratum est; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus Iβ P, rectus sit, *c* ex 3. defin. lib. 11. erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum IC, βP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum, IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC, majus quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, major sit, quam linea βP, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, majus erit; ideoque & linea, Iβ, major quam linea IZ. Ac proinde multo magis punctũ β, extra sphæram EFGH, existet, q̃ punctum Z: propterea q; multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram majorẽ EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana

c 47. pri.

sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus majori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

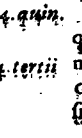
(EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro proportionem polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam ejus, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum: ut constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra majorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorū sphærarum: ut constat ex coroll. propos. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, *a* cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.)

a 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera: quæ tamen nondum sunt demonstrata: idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonstranda.

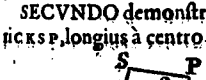
PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, major quam IY: *b* erit & KC, major quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensa ipsis P, erit quoque KC, major quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK, major erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. *c* Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ: (subtenduntur enim arcubus circulorum



b 14. quint.

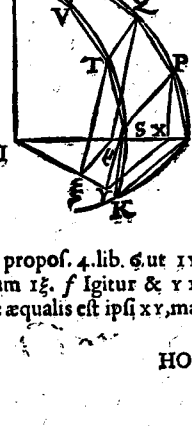
c 24. tertii

sum æquelibus, ut ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS. majores: Atque idcirco quilibet arcum CK, CP, KS, quadrantem circuli CK, SP, excedet: atque à semicirculo superabitur: ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad planam aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex I. ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante major est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto major, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est in scholio prop. 27 lib 3.



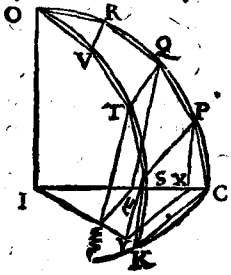
SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilatericKSP, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quocunq; aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adjungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3, lib. 11. *a* Erit latus illi oppositum Iθ, majus latere IZ, quod minori angulo Iθz: nimirum acuto, opponitur: Ac propterea punctum θ, longius à centro I. distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare. *a* 19. *pri.*

TERTIO, ac ultimo probandum est, rectam ZC, majorem esse recta 6P. Quod ut aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, majorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, &c. Demittantur deinde ex O, Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, *b* quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, *c* eruntq; inter sese parallelæ, ut de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adjungatur recta μξ: erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse æquales SP, XY. *d* Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; *e* erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. ut IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IY, major quam Iξ. *f* Igitur & YX, major erit quam ξμ: Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, major erit, quam QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.



b 38. *und.*
c 6. *undec*
d 2. *sex.*
e 30. *pri.*
f 14. *quin.*

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli egredianturque è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP: βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur major, quam βP, erit vel æqualis vel minor. Sit primum æqualis. Quia

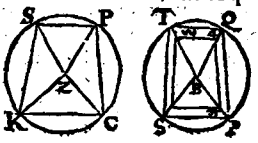


a 25. primi.

b 8. pri.

ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, major est basi PS; a erit angulus KZC, major angulo SβP: Eadem ratione major erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, majores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.

SIT deinde ZC, minor quam βP, & abscindantur βπ, βϱ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ, πϱ, ϱω, ωφ, φπ, c quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris secta sunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut βS, ad SP, ita βϱ, ad ϱπ.



c 6. sexti.

Cum ergo βS, major sit quam βϱ, d erit & SP, major quam πϱ. Eademque ratione majores erunt ST, TQ, QP, rectis ϱω, ωφ, φπ: Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πϱ, ϱω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βϱ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales: d erunt anguli ad Z, majores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis est ostensa: Major igitur est. Quod erat ostendendum.

d 14. quin.

e 25. pri.

XV.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

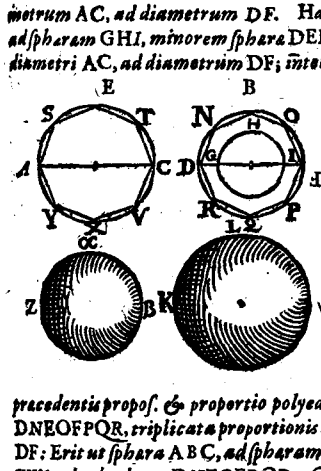
SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad dia-

me-

metrum AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæra DEF, f inscribatur in sphæra majori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI: At in huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem per coroll. precedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum sphæra ABC, major sit polyedro ASBTCVXY, a erit & sphæra GHI, major polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

f 17. duo. dec.

a 14. quin.



HABEAT secundo sphæra ABC, ad sphæram KLM, majorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. precedentis propos. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut sphæra ABC, ad sphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et convertendo, ut sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Est autem ex dicto coroll. precedentis propos. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphæra KLM, ad sphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita sphæra DEF, ad aliam sphæram Zαβ. Habebit igitur & sphæra DEF, ad sphæram Zαβ, proportionē triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia sphæra KLM, major ponitur, quam sphæra DEF, erit quoque sphæra ABC, major, quam sphæra Zαβ. Quapropter sphæra DEF, ad sphæram Zαβ,

minorem sphæra ABC, *proportionem habet triplicatam diametri* DF, *ad diametrum* AC. *Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra* ABC, *ad sphæram* KLM, *majorem sphæra* DEF, *proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF: *Sed neque ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram* DEF, *proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sunt triplicatæ rationes suorum diametrorum. Quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum simile habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

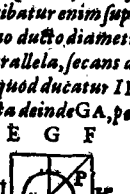
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et ſolidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; majus ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

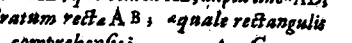
Secetur recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſit q; majus ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducto diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela, ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, erunt q; ex coroll propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. a Quia ergo eſt ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum CM, ſub AB, GB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB: & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: c Eſt autem ut AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AE, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, aqua-



a 3. def. ſexti.
b 17. ſexti.
c 1. ſexti.
d 34. prim.

æquale. Quare cum quadratum AM, *quadruplum sit quadrati* AI, *ex scholio propos. 4. lib. 2. quod lineæ* AB, *dupla ponatur lineæ* AD, *erit & gnomon* OPQ, *ejusdem quadrati* AI, *quadruplus*; *Ac propterea, si gnomoni* OPQ *addatur ipsum quadratum* AI, *quintuplum efficitur quadratum* CE, *quadrati* AI.

ALITER. *Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ* AB, *quadruplum est quadrati rectæ* AD, *quod lineæ* AB, *dupla lineæ* AD, *ponatur.* a *Est autem quadratum rectæ* AB; a *æquale rectangulis* a 2. *secund.* *sub* AB, AC, *& sub* AB, BC, *comprehensis*; *Et rursus, quod sub* AB, AC, *æquale est ei,* *quod sub* AD, AC, *bis*; (*sicut enim* AB, AD,



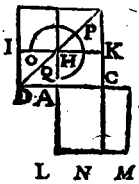
b 1. *sexti.* *est dupla,* b *ita quoq; erit rectangulum sub* AB, AC, *rectanguli sub* AD, AC, *duplum ipsius cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo* AC, *Ac propterea rectangulum sub* AD, AC, *bis sumptum æquale* c 17 *sex.* *erit rectangulo sub* AB, AC.) c *Quod vero sub* AB. BC, *æquale est quadrato rectæ* AC, *cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Igitur quadratum rectæ* AC, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis quadruplum quoq; erit quadrati rectæ* AD; *Ac proinde quadrata rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis, quintupla erunt quad* d 4. *sec.* *drati ejusdem rectæ* AD. d *Quocirca tum quadratum rectæ* CD, *æquale sit quadratis rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis*; *Erit & quadratum rectæ* CD, *quadrati rectæ* AD, *quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.*

II. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, majus segmentum reliqua pars est ejus, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, *in* C, *possitque quintuplum segmenti* AC; *sumatur autem ipsius* AC, *dupla* CD, *quæ, ut post ostendemus, major erit reliquo segmento* BC. *Dico si* CD, *secetur extrema ac media ratione, majus segmentum esse* CB, *reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super* AB, *quadratum* BF, *in quo ducta diametro* AE, *ex* C, *ducatur ipsi* AF, *parallela* CG, *secans diametrum in puncto* H, *per quod agatur* IK, *parallela ipsi* AB; *Producta deinde* GC, *perficiatur quadratum* CM, *protrahaturque* EB *ad* N. *Eruntque ex coroll propos. 4. lib. 2.* CI, KG, *quadrata rectarum* AC, CB. *Quia igitur quadratum* BF, *quintuplum ponitur*

tur quadrati CI: Si tollatur quadratum CT, relinquetur gnomon OPQ, ejusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC, Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis: erit & LC, ipsius CH, dupla. *a* Cum igitur sit ut LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK: erit quoque illud hujus duplum: *b* Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD: estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB. *c* Erit ut CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque majus segmentum CB.



a 1. *sexti.*

b 43. *pri.*

c 17. *sexti.*

ALITER, Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC: *d* estque quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis: Erit & quadrata rectarum CB, AC, una cũ rectangulo sub AC: CB, bis quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum ejusdem quadrati rectæ AC: Est autem & quadratum rectæ CD, ejusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB: (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB: cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo CB: Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub, CD, BD. Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD: *g* ideoque erit ut CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentum majus CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

C B
A ——————— D

d 4. *secund.*

e 1. *sexti.*

f 2. *secund.*

g 17. *sexti.*

LEM-

LEMMA.

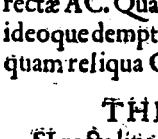
QVOD autem recta CD, major sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC; erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla ejusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, majus quadratis rectarum AC, CD, *a* cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, majus quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea majus quadrato rectæ AB; quod quintuplum ponitur ejusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, major erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, major erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

a 14. secun.

iii. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus; quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cujus majus segmentum AC, *bifariam dividatur in* D. *Dico quadratum rectæ* BD, *quadruplum esse quadrati rectæ* CD. *Describatur enim super* AB, *quadratum* AE, *in quo diametret* BF. *Deinde ex*



cantes diametrum in L, K, *punctis, per quæ agantur ipsis* AB, EF, *parallelæ* LM, NO; *quæ secent rectas* CG, DH, *in* P, Q. *Erunt que ex coroll. propos. 4. lib. 2.* LG, PQ, DO, *quadrata rectarum* AC, CD, BD. *Quoniam igitur recta* AG; *dupla est recta* CD, *erit ex scholio ejusdem propos. quadratum* LG; *quadruplum quadrati* PQ. *Est autem rectangulum* CE, *æquale quadrato* LG. (*Nam cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, *erit rectangulum sub* AB, CB *nempe* CE, *æquale quadrato rectæ* AC, *nimirum ipsi* LG.) *Igitur &* CE, *quadruplum erit quadrati* PQ. *Quia vero æqualia sunt quadrata* NH, PQ, *ob æqualitatem rectarum* AD, CD: *erunt earum latera* HK, IQ, *æqualia: ac proinde rectæ* EO, OM, *ipsis oppositæ æquales erunt.* d *Quare rectangula* IO, QE, *æqualia erunt.* e *Est autem* IO, *ipsi* ID, *æquale. Ergo &* QE, *eidem* ID. *æquale erit,*

b 17. sexti. c 34. primi d 36. pri. e 43. primi

erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO, totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD

ALITER. Cum AC, *divisa sit bifariam in* D, *& ei addita* CB, *erit rectangulum sub* AB, BC, *una cum quadrato rectæ* CD, *æquale quadrato rectæ* BD. *At rectangulum sub* AC CB, *quadruplum est quadrati rectæ* CD; (*Nam cum sit, ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *erit rectangulum sub* AB, AC, *æquale quadrato rectæ* AC: *quod cum ex scholio propos. 4. l. 2 quadruplum sit quadrati rectæ* CD: *erit & rectangulum sub* AB, BC, *quadruplum ejusdem quadrati rectæ* CD.) *Ac propterea rectangulum sub* AB, BC, *una cum quadrato rectæ* CD, *quintuplum quadrati rectæ* CD. *Igitur & quadratum rectæ* BD, *quintuplum erit quadrati rectæ* CD. *Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.*

a 6. *secund.*

b 17. *sext.*

SCHOLIVM.

CONVERSVM hujus theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium majoris segmenti quintuplum possit ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, divisa inæqualiter in C, cujus majus segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, divisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore hujus propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD; ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD; quintuplum ponatur quadrati PQ, ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum; c Ac proinde erit, ut AB, ad AC, ita AC,

c 17. *sext.*

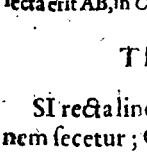
ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extremâ ac media ratione. Quod est propositum.

a 6. secundi. ALITER. Cum AC, divisa sit bifariam in D, & ei addita GB, *a* erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD : Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum ejusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD, rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD : Est autem ejusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulum sub AB,

b 17. sexti. BC. *b* Quamobrem erit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB : Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

V. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt ejus, quod à majore segmento describitur, quadrati.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum majus AC & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll propos. 4. lib 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB :

c 17. sexti. *erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ei sit IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD : erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplum quadrati IF : Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH,*

d 17. sex. *rectæ BC, ejusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.*

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB : erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeò rectangulum sub AB, CB, bis, una cum quadrato rectæ AC, tri-

c 7. secun. *plum quadrati rectæ AC. Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrati rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & me-*

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmente, simul utraq; quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

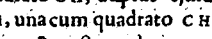
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam hujus verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex majore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita ut quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, utraque simul tripla sint quadrati majoris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, una cum quadrato CH, duplus ejusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, una cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD; Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC: a erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac propterea AB, divisa erit in C extrema ac media ratione. a 17. sext.

ALITER Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; b Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis: erit & quadratum rectæ AC, una cũ rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. b 7. secund.



Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC semel, æquale quadrato rectæ AC. c Quare ut prius erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione. c 17. sext.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest ejus, quod à majori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati: Recta

illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, majore segmento. *a* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, una cum quadrato ex AC: *b* Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum sub AB, AC, quater una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC quater, una cum quadrato ex AC,) ejusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

a 8. *secundi*

b 17. *sexti*

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratum ex AD, quadrati ex AC, majori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac media ratione. *c* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. *d* Igitur erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.

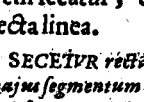
c 8. *secundi*

d 17. *sexti*.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis majori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR *recta* AB, *in* C, *extrema ac media ratione*, *sitque majus segmentum* AC, *& adjiciatur ei in rectum* AD, *æqualis majori segmento* AC. *Dico rectam* BD, *secari in* A, *extrema ac media ratione, esseque majus segmentum* AB. *Describatur enim super* AB, *quadratum* BF, *in quo ducta diametro* AE, *ducatur ex* C, *ipsi* BE, *parallela* CG, *secans diametrum in* H, *puncto, per quod agatur ipsi* BD, *parallela* IK, *& ex* D, *ducatur*

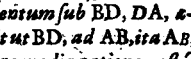


ipsi

ipſi AF, *parallela* DL, *occurrens ipſi* IK, *producta in* L. *Eruntque ex coroll. propoſ.* 4. *lib.* 2. CK, IG, *quadrata rectarum* AC, BC. *Quoniam igitur eſt ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; a *Erit rectangulum* IF, *contentum ſub* AB, BC, *æquale quadrato* CK, *recta* AC. b *Eſt autem* CK, *ipſi* AL, *æquale. Igitur* IF, *æquale erit ipſi* AL: *additoque communi* BK, *erit rectangulum* BL, *contentum ſub* BD, DA, *æquale quadrato* BF, *recta* AB: c Ac *proinde erit ut* BD, *ad* AB, *ita* AB, *ad* DA. *Quare* BD, *ſecatur in* A, *extrema ac media ratione, eſtque majus ſegmentum* AB.

a 17. *ſexti.* b 36. *primi* c 17. *ſexti.*

ALITER. *Quoniam eſt ut* AB, *ad* AC, *hoc eſt, ad* AD, *ita* AC, *ad* CB: *Erit convertendo ut* DA, *ad* AB, *ita* BC, *ad* DA: *& componendo ut* DB, *ad* AB, *ita* AB, *ad* CA, *hoc eſt, ad* AD. *Secta igitur eſt* BD, *in* A, *extrema ac media ratione. Itaque*



ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis majori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex majori ſegmento ſegmentum minus; erit majus ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cujus majus ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex majori ſegmento AB, detrahatur recta AC. æqualis minori ſegmento AD. Dico majus ſegmentum AB, diviſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit ut BD, ad AB, ita AB, ad AD, *d* erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æquale ipſi IF: *e* Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: *f* Ac proinde erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cujus ſegmentum majus eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.

d 17. *ſexti.* e 36. *primi.* f 17. *ſexti.*

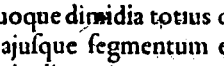
ALITER. Quoniam eſt ut tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; *g* erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, *g* 19. *quinti.* ut tota DB, ad totam AB, hoc eſt, ut AB, ad AC: Ac propterea

divisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia majoris segmenti: Erit quoque dimidia totius divisa extrema ac media ratione, majusque segmentum erit dimidium majoris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF dimidium majoris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, majusque segmentum esse DF.



Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio dupla: a erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. b Quoniam vero est, ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam hujus; Est autem ex defin. lineæ sectæ extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC, ad CB: erit quoque DE, ad DF, ut DF, ad FE: Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

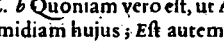
a 19. quinti.

b 25. quinti.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, *in* C, *extrema & media ratione. Dico utrumque segmentum* AC, CB, *esse lineam Irrationalem, quæ* Apotome *dicitur. Addatur enim majori segmento* AC, *recta* AD, *æqualis dimidiæ totius AB.* c *Quoniam igitur quadratum*



rectæ CD, *quintuplum est quadrati rectæ* AD: *habebit quadratum rectæ* CD, *ad quadratum rectæ* AD, *proportionem, quam numerus ad numerum.* d *Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum* CD, AD: *propterea quæ ipsa recta* CD, AD, *commensurabiles quoq; existent, saltem potentia: Est autem* AD, *Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis* AB. *Igitur &* CD, *Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum* CD, AD, *non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum,* (*ut constat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.*) e *erunt rectæ* CD, AD, *longitudine incom-*

c 1. tertiæ dec.

d 6. dec.

e 9. dec.

commensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; a erit reliqua AC, Irrationalis, qua appellatur Apotome. a 74. *deci.*

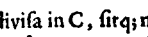
RVRSVS applicata ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB: cum sit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, b *erit rectangulum AE, aquale quadrato recta AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB,* c *facit alterum latus BE, hoc est rectam CB, illi aqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.* b 17. *sexti* c 98. *deci.*

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque majus segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione divisa in C, sitq; majus segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Divisa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. *d* Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum: *e* ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ ED, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8.) Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; *f* erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.



d 3. *tertij dec.* e 6. *decim.* f 74. *dec.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT *in pentagono æquilatero* ABCDE, *tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales* A, B, C. *Dico ipsum pentagonum esse*

quale. Quare cum quadratum AM, *quadruplum sit quadrati* AI, *ex scholio propos. 4. lib. 2. quod lineæ* AB, *dupla ponatur lineæ* AD, *erit & gnomon* OPQ, *ejusdem quadrati* AI, *quadruplus*; *Ac propterea, si gnomoni* GPQ *addatur ipsum quadratum* AI, *quintuplum efficietur quadratum* CE, *quadrati* AI.

ALITER. *Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ* AB, *quadruplum est quadrati rectæ* AD, *quod linea* AB, *dupla lineæ* AD, *ponatur.* a *Est autem quadratum rectæ* AB; *æquale rectangulis*
a 2. *secund.* *sub* AB, AC, *& sub* AB, BC, *comprehensis*; *Et rursus, quod sub* AB, AC, *æquale est ei,* *quod sub* AD, AC, *bis*; (*sicut enim* AB, AD,
b 1. *sexti.* *est dupla,* b *ita quoq; erit rectangulum sub* AB, AC, *rectanguli sub* AD, AC, *duplum ipsius cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo* AC, *Ac propterea rectangulum sub* AD, AC, *bis sumptum æquale*
c 17 *sex.* *erit rectangulo sub* AB, AC.) c *Quod vero sub* AB. BC, *æquale est quadrato rectæ* AC, *cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Igitur quadratum rectæ* AC, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis quadruplum quoq; erit quadrati rectæ* AD; *Ac proinde quadrata rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis, quintupla erunt quad.* d 4. *sec.* *drati ejusdem rectæ* AD. d *Quocirca tum quadratum rectæ* CB, *æquale sit quadratis rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis*; *Erit & quadratum rectæ* CD, *quadrati rectæ* AD, *quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.*

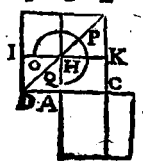
THEOR. 2. PROPOS. 2.

II.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, majus segmentum reliqua pars est ejus, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, ut post ostendemus, major erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, majus segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturque KB ad N. Eruntque ex coroll propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur

tur quadrati CI: Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, ejusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC, Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis: erit & LC, ipsius CH, dupla. *a* Cum igitur sit ut LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK: erit quoque illud hujus duplum: *b* Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD: estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB. *c* Erit ut CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque majus segmentum CB.



a 1. sexti.

b 43. pri.

c 17. sexti.

ALITER, Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC: *d* est quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, una cum rectangulo sub AC, CB, bis: Erit & quadrata rectarum CB, AC, una cũ rectangulo sub AC: CB, bis quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum ejusdem quadrati rectæ AC: Est autem & quadratum rectæ CD, ejusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB: (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, *e* ita quoque duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB: cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo CB: Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: *f* At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD: *g* ideoque erit ut CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentum majus CB. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

C B D

d 4. secun.

e 1. sexti.

f 2. secun.

g 17. sexti.

LEM-

LEMMA.

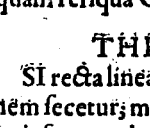
QVOD autem recta CD, major sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC; erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla ejusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, majus quadratis rectarum AC, CD, a cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, majus quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea majus quadrato rectæ AB; quod quintuplum ponitur ejusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, major erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, major erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod est propositum.

a 14. secun.

iii. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cujus majus segmentum AC, *bifariam dividatur in* D. *Dico quadratum rectæ BD, quadruplum esse quadrati rectæ* CD. *Describatur enim super* AB, *quadratum* AE, *in quo diameter* BF: *Deinde ex* C, D, *ducantur ipsis* AF, BE, *parallelæ* CG, DH, *secantes diametrum in* I, K, *punctis, per quæ agantur ipsis* AB, EF, *parallelæ* LM, NO; *quæ secent rectas* CG, DH, *in* P, Q. *Eruntque ex coroll. propos* 4. *lib.* 2. LG, PQ, DO, *quadrata rectarum* AC, CD, BD. *Quoniam igitur recta* AG, *dupla est rectæ* CD, *erit ex scholio ejusdem propos. quadratum* LG, *quadruplum quadrati* PQ. *Est autem rectangulum* CE, *æquale quadrato* LG. (*Nam cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, b *erit rectangulum sub* AB, CB *nempe* CE, *æquale quadrato rectæ* AC, *nimirum ipsi* LG.) *Igitur &* CE, *quadruplum erit quadrati* PQ. *Quia vero æqualia sunt quadrata* NH, PQ, *ob æqualitatem rectarum* AD, CD: c *erunt earum latera* HK, IQ, *æqualia*: c *ac proinde rectæ* EO, OM, *ipsis oppositæ æquales erunt.* d *Quare rectangula* IO, QE, *æqualia erunt.* e *Est autem* IO, *ipsi* ID, *æquale. Ergo &* QE, *eidem* ID. *æquale erit;*



b 17. sexti. c 34. primi d 36. pri. e 43. primi

rit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO, totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD

ALITER. Cum AC, divisa sit bifariam in D, & ei addita CB, a *erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD.* a 6. *secund. At rectangulum sub AC CB, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB;* b *erit rectangulum sub AB, AC, æquale quadrato rectæ AC: quod cum ex scholio propos. 4. l. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD: erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum ejusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.*

b 17. *sext.*

SCHOLIVM.

CONVERSVM hujus theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium majoris segmenti quintuplum possit ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, divisa inæqualiter in C, cujus majus segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, divisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore hujus propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD; ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD; quintuplum ponatur quadrati PQ, ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum; c Ac proinde erit, ut AB, ad AC, ita AC, c 17. *sext.*

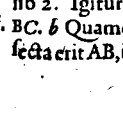
ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extremâ ac media ratione. Quod est propositum.

a 6. secundi. ALITER. Cum AC, divisa sit bifariam in D, & ei addita GB, *a* erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD : Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum ejusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD : Est autem ejusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulum sub AB,

b 17. sexti. BC. *b* Quamobrem erit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB : Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

V. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt ejus, quod à majore segmento describitur, quadrati.



SECETVR recta AB, in C, extremâ ac media ratione, sitque segmentum majus AC & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Erunt que CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll propos. 4. lib 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB :

c 17. sexti. *c erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD : erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplum quadrati IF : Ac proinde, addito quadrato IF: erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH,*

d 17. sex. *rectæ BC, ejusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.*

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB : d erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeò rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, tri-

e 7. secun. *plum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrati rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & me-*

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul utraq; quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

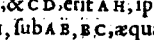
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam hujus verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex majore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita ut quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, utraque simul tripla sint quadrati majoris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, una cum quadrato CH, duplus ejusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, una cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD; Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC: a erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac propterea AB, divisa erit in C extrema ac media ratione. a 17. sexti.

ALITER Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; b Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis: erit & quadratum rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. b 7. secundi.



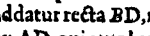
Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC semel, æquale quadrato rectæ AC. c Quare ut prius erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione. c 17. sexti.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest ejus, quod à majori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati: Recta

illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, majore segmento. *a* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, una cum quadrato ex AC: *b* Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum sub AB, AC, quater una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC quater, una cum quadrato ex AC,) ejusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod est propositum.



a 8. secundi.
b 17. sexti

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratum ex AD, quadrati ex AC, majori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac media ratione. *c* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. *d* Igitur erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.

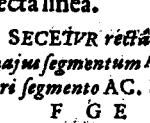
c 8. secundi

d 17. sexti.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

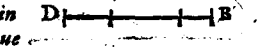
SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis majori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR *recta* AB, *in* C, *extrema ac media ratione*, *sitque majus segmentum* AC, *& adjiciatur ei in rectum* AD, *æqualis majori segmento* AC. *Dico rectam* BD, *secari in* A, *extrema ac media ratione, essque majus segmentum* AB. *Describatur enim super* AB, *quadratum* BF, *in quo ducta diametro* AE, *ducatur ex* C, *ipsi* BE, *parallela* CG, *secans diametrum in* H, *puncto, per quod agatur ipsi* BD, *parallela* IK, *& ex* D, *ducatur ipsi*



ipſi AF, *parallela* DL, *occurrens ipſi* IK, *producta in* L. *Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2.* CK, IG, *quadrata rectarum* AC, BC. *Quoniam igitur eſt ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; a *Erit rectangulum* IF, *contentum ſub* AB, BC, *æquale quadrato* CK, *recta* AC. b *Eſt autem* CK, *ipſi* AL, *æquale. Igitur* IF, *æquale erit ipſi* AL: *additoq; communi* BK, *erit rectangulum* BL, *contentum ſub* BD, DA, *æquale quadrato* RF, *recta* AB: c *Ac proinde erit ut* BD, *ad* AB, *ita* AB, *ad* DA. *Quare* BD, *ſecatur in* A, *extrema ac media ratione, eſtq; majus ſegmentum* AB. a 17. *ſexti.* b 36. *primi.* c 17. *ſexti.*

ALITER. *Quoniam eſt ut* AB, *ad* AC, *hoc eſt, ad* AD, *ita* AC, *ad* CB: *Erit convertendo ut* DA, *ad* AB, *ita* BC, *ad* DA: *& componendo ut* DB, *ad* AB; *ita* AB, *ad* CA, *hoc eſt, ad* AD. *Secta igitur eſt* BD, *in* A, *extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis majori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.*



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex majori ſegmento ſegmentum minus; erit majus ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cujus majus ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex majori ſegmento AB, detrahatur recta AC. æqualis minori ſegmento AD. Dico majus ſegmentum AB, diviſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit ut BD, ad AB, ita AB, ad AD, *d* erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB ½, & ablato communi BK, erit AL, æquale ipſi IF: *e* Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: *f* Ac proinde erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cujus ſegmentum majus eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum. d 17. *ſexti.* e 36. *primi.* f 17. *ſexti.*

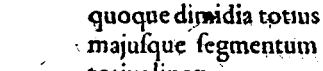
ALITER. Quoniam eſt ut tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; *g* erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, ut tota DB, ad totam AB, hoc eſt, ut AB, ad AC ½. Ac propterea g 19. *quinti.*

divisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia majoris segmenti: Erit quoque dimidia totius divisa extrema ac media ratione, majusque segmentum erit dimidium majoris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF dimidium majoris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, majusque segmentum esse DF.



Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio dupla: a erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. b Quoniam vero est, ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam hujus; Est autem ex defin. lineæ sectæ extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC: ad CB: erit quoque DE, ad DF, ut DF, ad FE: Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

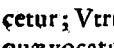
a 19. quinti.

b 15. quinti.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, *in* C, *extrema & media ratione. Dico utrumque segmentum* AC, CB, *esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim majori segmento* AC, *recta* AD, *æqualis dimidiæ totius* AB. c *Quoniam igitur quadratum* E *rectæ* CD, *quintuplum est quadrati rectæ* AD: *habebit quadratum rectæ* CD, *ad quadratum rectæ* AD, *proportionem, quam numerus ad numerum.* d *Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum* CD, AD; *propterea quæ ipsa recta* CD, AD, *commensurabiles quoq; existent, saltem potentia: Est autem* AD, *Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis* AB. *Igitur &* CD, *Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum* CD, AD, *non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum,* (*ut constat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam* 5. *ad* 1. *vel* 25. *ad* 5.) c *erunt rectæ* CD, AD, *longitudine incom-*



c 1. tertii dec.

d 6. dec.

e 9. dec.

commensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, *Rationali detrahatur* AD, *Rationalis potentia tantum commensurabilis;* a *erit reliqua* AC, *Irrationalis,* a 74.ª *deci. qua appellatur Apotome.*

RVRSVS applicata ad AB, *rectangulo* AE, *contento sub* AB, CB: *cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, b *erit rectangulum* AE, b 17. *sexti aquale quadrato recta* AC. *Quam ob rem quadratum Apotomæ* AC, *nimirum rectangulum* AE, *applicatum secundum lineam Rationalem* AB, c *facit alterum latus* BE, *hoc est rectam* c 98. *deci.* CB, *illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque majus segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione divisa in C, sitq; majus segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Divisa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. d Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum: e ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ ED, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; f erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

d 3. *tertiæ dec.*

e 6. *decim.*

f 74. *dec.*

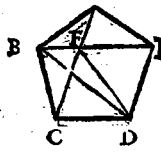
THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT *in pentagono æquilatero* ABCDE, *tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales* A, B, C. *Dico ipsum pentagonum esse*

aquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD : *& ex puncto* F, *ubi se interſecant rectæ* BF, AC, *recta ducatur* ED. *Quoniam igitur latera* AB, AE, *trianguli* ABE, *æqualia ſunt lateribus* CB, CD, *trianguli* CBD, *& anguli quoque ipſis contenti æquales; ex hypotheſi;* a *erunt & baſes* BE, BD, *& anguli* AEB, CDB, *æquales*; b *Sunt autem & anguli* BED, BDE, *æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera* BE, BD: *Toti igitur anguli* AED, CDE, *æquales erunt. Rurſus quia latera* AB, AE, *trianguli* ABE, *æqualia ſunt lateribus* BA, BC, *trianguli* BAC; *& anguli quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi*: c *Erit & baſis* BE, *baſi* AC, *æqualis, & anguli* ABE, AEB, *angulis* BAC, BCA, *æquales. Cum ergo æquales ſint anguli* ABE, BAC, *trianguli* ABF; d *erunt quoque latera* BF, AF, *æqualia*; *& propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus* BE, AC, *erunt reliquæ lineæ* FE, FC, *æquales. Itaque cum latera* AF, ED, *trianguli* FED, *æqualia ſint lateribus* FC, CD, *trianguli* FCD; *& baſis communis* FD; e *erunt & anguli dictis lateribus contenti* GED, FCD, *æquales*: *Sunt autem & anguli* AEB, BCA, *oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli* AED, BCD: *Ac proinde cum angulo* AED, *oſtenſus ſit æqualis angulus* CDE, *& angulo* BCD, *æquales ponantur anguli* ABC, BAE : *erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.*

SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. *Quoniam igitur latera* AB, AE, *trianguli* ABE, *æqualia ſunt lateribus* CB, CD, *trianguli* CBD : *& anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi*: f *Erunt & baſes* BE, BD. *& anguli* AEB, CDB, *æquales*: g *ſunt autem & anguli* BED, BDE, *æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera* BE, BD. *Igitur toti anguli* AED, CDE, *æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli* BAE, CDE : *erunt tres anguli deinceps æquales* A, E, D: *Ac proinde, ut jam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.*



a 4. pri.
b 5. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 8. pri.
f 4. primi.
g 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

xi.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ : hæc extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & majora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR *in pentagono æquilatero & æquiangulo* ABCDE, *duobus angulis, qui ſunt deinceps* C, D, *rectæ* DB, CE, *ſe mutuo*

mutuo secantes in F. *Dico ipsas secari extrema ac media ratione, majoraq; earum segmenta* FB, FE, *æqualia esse lateri cuilibet pentagoni.* a *Descripto enim circulo circa pentagonum;* b *erunt quinque arcus* AB, BC, CD, DE, EA, *æquales. Quia vero latera* CD, DB, *trianguli* CDB, *æqualia sunt lateribus* DC, CB, *trianguli* DCB: *& anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi:* c *Erunt & bases* DB, CE, *& anguli* CDB, DCE, *æquales: ac proinde cum in triangulo* CDE, *duo anguli* FCD, FDC, *sint æquales.* d *& ipsis æqualis sit externus angulus* BFC: *erit angulus* BFC, *duplus anguli* DCE: e *Est autem & angulus* BCE, *ejusdem anguli* DCE, *duplus, quod & arcus* BAE, *arcus* DE, *sit duplus. Igitur anguli* BFC, BCF, *æquales sunt:* f *Ideoq;* g *rectæ* BF, *lateri pentagoni* BC, *æqualis.* g *Quoniam autem anguli* DBC, ECD, *arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli* DBC, CDB, *triangulis* BCD, *æquales duobus angulis* DCF, FDC, *trianguli* CFD. h *Ac proinde æquiangula erunt triangula* BCD, CFD. i *Quare erit ut* BD, *ad* DC, *hoc est, ad* BF, *æqualem ipsi* DC, *ita* CD, *hoc est, sibi æqualis* BF, *ad* FD: *Ac propterea* BD, *secta est in* F, *extrema ac media ratione, estque majus segmentum* DF, *lateri pentagoni æquale, ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam* CE, *secari in* F, *extrema ac media ratione, majusq; illius segmentum* EF, *æquale esse lateri pentagoni* DE. *Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.*

a 14. quarti.
b 28. tertii.
c 4. primi.
d 32. primi.
e 33. sexti.
f 6. primi.
g 27. tert.
h 32. primi
i 4. sext.

SCHOLIVM.

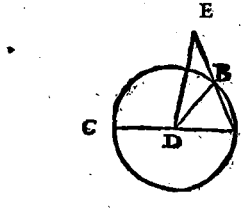
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD. parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum. k Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: l ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.

k 22. tertii
l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur; Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus.

In circulo ABC, *sit latus decagoni* AB, *cui in rectum addatur*



BE, *aqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico* EA, *rectam sectam esse in* B, *extrema ac media ratione, majusq; segmentum esse* EB, *latus hexagoni. Ducatur enim ex* A, *per centrum* D, *diametra* AC, *conjungantur q; rectæ* DB, DE. *Quoniam igitur* AB, *arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum* AB, *quinquies: Ac proinde arcus* BC, *quadruplus erit arcus* AB. a *Quare & angulus* BDC, *anguli* ADB, *quadruplus erit. Rursus quia latera* BD, BE, *sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim* BE, *latus hexagoni semidiametro* BD, *æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.)* b *erunt & anguli* BDE, BED, *æquales:* c *quibus cum æqualis sit externus* ABD: *erit angulus* ABD, *duplus anguli* BED: d *Est autem angulo* ABD, *æqualis angulus* BAD, *ob æqualitatem laterum* DA, DB. *Igitur & angulus* BAD, *duplus erit anguli* BED: *ac proinde duo anguli* DAB, DBA, *simul quadrupli erunt anguli* BED. e *Cum ergo anguli* DAB, DBA, *æqualis sit externus* BDC *erit angulus* BDC, *quadruplus ejusdem anguli* BED. *Atqui idem angulus* BDC, *ostensum fuit quadruplus anguli* ADB. *Igitur æquales sunt anguli* AED, ADB. *Quocirca cum duo anguli* AED, DAE, *trianguli* ADE, *æquales sint duobus angulis* ADB, BAD, *trianguli* ABD, f *erunt triangula* ADE, AED, *æquiangula.* g *Igitur erit ut* EA, *ad* AD, *hoc est, ad* EB, *ipsi* AD, *æqualem, ita* AD *hoc est,* EB, *sibi æqualis ad* BA: *Atque idcirco rectæ* BA, *sectæ est in* B, *extrema & media ratione, estque majus segmentum* EB, *latus hexagoni. Itaq; si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur; Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.*

a 32. *sex.* b 5. *pri.* c 32. *pri.* d 5. *primi.* e 32. *Primi* f 32. *primi.* g 4. *sex.*

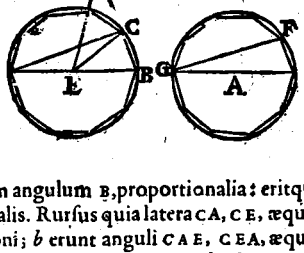
SCHOLIVM.

QVIA verò demonstravimus ad propos. 5. hujus lib. si minus segmentum lineæ divisæ extrema ac media ratione ex majori segmento detrahatur, majus segmentum secari quoque extrema & media ratione, cjusq; segmentum majus esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, majus illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est majus segmentum, divisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propos. 5. hujus lib. ostendimus. *Hoc* tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoq; hujus theorematis facilè cum Campano demonstrabimus Videlicet. SI

SI linea divisa extrema ac media ratione majus segmentum fuerit latus hexagoni alicujus circuli; Erit minus segmentum latus decagoni ejusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicujus circuli; Erit majus segmentum latus hexagoni ejusdem circuli.

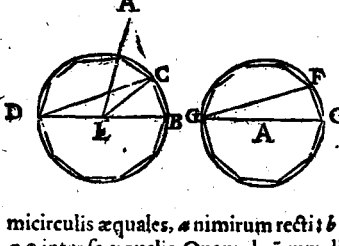
SIT enim AB, divisa in C, extrema & media ratione, sitque primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus segmentum CB, esse ejusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita ut CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: & est AC, latus hexagoni æquale semidiametro EB, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoq; ut AB, ad BE, ita EB, ad BC, *a* ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum B, proportionalia: eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rursus quia latera CA, CE, æqualia sunt, nempe latera hexagoni; *b* erunt anguli CAE, CEA, æquales; quibus cum æqualis sit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: *d* Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, BC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, simul quadrupli erunt ejusdem anguli A. *e* Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis sit externus CED; erit quoque angulus CED, ejusdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis ostensus est angulo A, quadruplus. *f* Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus semicirculi BCD, ejusdem arcus BC, quintuplus existet; ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcûs BC. Quapropter recta BC, latus est decagoni.



a 6. *sex.*

b 5. *primi.*
c 32. *primi.*
d 5 *primi.*
e 32. *pri.*
f 33. *sexti.*

SIT deinde CB, minus segmentum, latus decagoni circuli BCD, Dico majus segmentum AC, esse ejusdē circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus BC, in circulo BCD; ducaturq; diameter BED. Deinde intervallo AC, describatur circulus CFH, cujus diameter CAG; eritq, ex coroll. propos. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, secta est in C, extrema ac media ratione, estque majus segmentum AC, latus hexagoni circuli CFG: erit ut jam ostensum est, minus segmentum CB, latus decagoni ejusdem circuli CFG. Describatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum, & æquiangulum CFG: Item in circulo BCD: decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD: eruntque latera BC, CF, inter se æqualia. Quoniam verò, si con-



si connectantur rectæ E B, F G, anguli C D B, F G C, sunt æquales, ut in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similib[us] B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli B C D, C F G, in se-

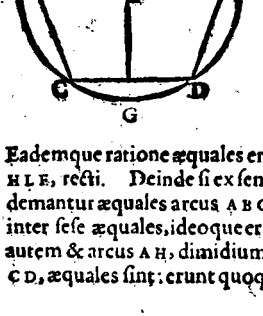
a 31. tertii. micirculis æquales, a nimirum recti; b Erunt quoque latera B D, C G inter se æqualia. Quamobrē cum diametri B D, C G, sint æquales, æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cum recta A C, sit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod est propositum.

b 3. pri.

X. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo A B C D E, cujus centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni ejusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diviso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & F F, latus hexagoni. Rursus diviso arcu AH, bifariam in K, adjungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; c erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsi contenti æquales quoque; d erunt & bases A I, B I, æquales & anguli A I F, B I E, ideoque recti:



c 27. tertii

d 4. primi.

Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L E, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B, D G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter se æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint: erunt quoque eorum dimidii arcus C O, A H, æqua-

quales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus ejusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, ejusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH: *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit ut AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. *quinti.*
b 33. *sexti.*
c 20. *tert.*
d 32. *pri.*
e 4. *sex.*
f 17. *sex.*

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit ut AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est a. & rectangulū sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF: Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH. *m* At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB: Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

g 4. *primi*
h 5. *primi.*
i 32. *primi.*
k 4 *sex.*
l 17. *sex.*
m 2. *secundi.*

COROLLARIVM I.

(HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoq; rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, dividit bifariam, dividere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

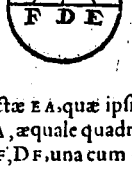
COROLLARIVM II.

(PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductum dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam divipere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum,

trum, secabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, ut constat.

SCHOLIVM

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolomeo tradidimus, qua una eademque opera in dato circulo & pentagonum; & decagonum æquilaterum describitur, ejusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cujus centrum D. Ducta autem diametro BG, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde divisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adjungaturq; recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF, *a* erit rectangulum sub CF DF, una cum quadrato rectæ DE; æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF, est æqualis. *b* Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, una cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarum AD, DE: Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD; hoc est, quadrato rectæ CD. *c* Quamobrem erit ut CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea que recta CF, divisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur majus segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF; latus decagoni ejusdem circuli, ut demonstravimus ad propo. 9 hujus lib. *d* Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, una cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pentagoni ejusdem circuli; *e* Est autem ejusdem quadratis rectarum AD; DF, æquale quadratum rectæ AF: erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF: ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.



a 6. secundi.

b 47. primi

c 17 sexti.

d 10. tertii dec.

e 47. pri.

xi.

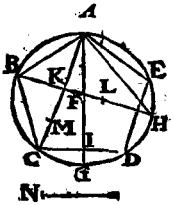
THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habent diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem: describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico ejus latus AB; esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K, Ab-

scin-

scindatur quoque ex se mediametro FH, quarta ejus pars FL: item ex recta AC, quarta ejus pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles: cum sint ejus partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, composita, a cum sit commensurabilis utrique FL, BF, Rationalis erit. a 16. dec.



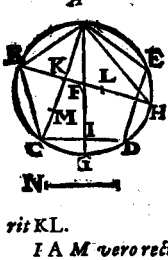
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B: secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. ejusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, b æquiangula inter se erunt. c Quamobrem erit, ut CI, ad CA, ita FK, ad FA: & permutando ut CI, ad FK, ita CA, ad FA, sive ad FH, ipsi FA, æqualem. d Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur ut CI, ad FK, ita CM, ad FL: & permutando, ut CI, ad CM, hoc est, ut CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL: Atque componendo, ut CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL: e Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò si AC, secetur extrema ac media ratione (ducta videlicet recta BD,) f major ejus segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD: g Erit quadratum rectæ compositæ ex CD, majori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, h ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL: Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. primi
c 3. sext.
d 15. quinti.
e 22. sexti.
f 8. tertii dec.
g 1. tertii dec.
h 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL: ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1 est quadratum rectæ FL, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. i habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ FL, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL: ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadra-

i 20. sexti.

dra-



a 9. dec.

b 74. dec.

dratum, (ut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, qua 25. ad 5. vel 5. ad 1.) a *Erunt rectæ* BL, KL, *longitudine incommensurabiles: ideoque cum ostensæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali* BL, *dematur Rationalis* KL, *potentia tantum commensurabilis.* b *erit reliqua* BK, *Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit* KL.

I A M vero rectæ BL, *possit plus, quam rectæ* KL, *quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ* BL, *æquale est quadratis rectarum* KL, *&* N; *Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ* BL, *talium I, fuit quadratum rectæ* KL. *Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ* BL; *Ac propterea quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem habebunt, quam numerus ad numerum.* c *Quare commensurabilia erunt: propterea quæ rectæ ipsa* BL, *&* N, *commensurabiles, saltem potentia: Est autem* BL, *ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit &* N. *Quia vero quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (ut perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, qua 5. ad 4.)* d *Erunt rectæ* BL, *&* N, *longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota rectæ* BL, *Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali* BH: *(Qualium enim partium 8. est* BH, *talium 5. est* BL,*) possitque plus, quam congruens* KL, *quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est: Erit* BK, *Apotome quarta, ex definitione.*

c 6. dec.

d 9. dec.

POSTREMO quia recta AB *est media proportionalis inter* BH, BK, *ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum* ABH, c *habet angulum* BAH, *rectum, à quo ducta est* AK, *ad basin perpendicularis.) erit quadratum rectæ* AB, *æquale rectangulo sub* BH, BK. *Quocirca cum superficiem contentam sub rationali* BH, *&* Apotoma *quarta* BK, *possit recta linea* AB: g *Erit* AB, *linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.*

c 31. tert. f 17. sexti.

g 95. dec.

THEOR. 13. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est ejus lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

In cir-

IN *circulo* ABC, *cujus centrum* D, *triangulum aequilaterum inscribatur* ABC. *Dico quadratum lateris* AB, *triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro* AE, *quae secet, ex coroll. 2. propos. 10. hujus lib. arcum* BC, *bifariam in* E, *& rectam* BC, *bifariam quoq;, & ad angulos rectos in puncto* F, *cum arcus* BC, *sit tertia pars totius peripheriae: erit arcus* BE, *ejusdem peripheriae sexta pars, ideoq; conjuncta recta* BE, *latus erit hexagoni, & aequalis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus* ABE, *continet tres sextas partes totius circuli: arcus vero* AB, *cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit ejusdem circuli. Igitur arcus* BE, *sexta pars est ejusdem, ac proinde recta* BE, *latus est hexagoni, & aequalis semidiametro* DE, *ex coroll. propos. 15. lib. 4.* a *Quoniam igitur quadratum rectae* AE, *aequale est quadratis rectarum* AB, BE, b *quod angulus* ABE, *in semicirculo rectus sit: Est autem quadratum rectae* AE, *quadruplum quadrati rectae* BF, *ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea* AE, *dupla sit lineae* BE: *erunt quadrata rectarum* AB, BE, *simul* 3 *quadrupla quoque quadrati ejusdem rectae* BE: *Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum* AB, BE, *talium partium 1. erit quadratum rectae* BE: *& idcirco talium partium 3. erit quadratum rectae* AB. *Quare quadratum rectae* AB, *triplum est quadrati rectae* BE, *quae aequalis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum aequilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.*

a 47. pri.
b 31. tertii.

COROLLARIVM I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli aequilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex *AD*, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. li. 2. quadruplum est quadrati ex A *D*, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex *AE*, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib 6. ut est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli aequilateri *AB*, perpendicularis AF, ex uno angulo ad basin demissae potentia sesquitertium. quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide 14. propos. 12.)

COROLLARIVM II.

(HINC facilè etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, à latere trianguli BC Cum enim quadratum rectae A B, triplum sit quadrati rectae BE; si ponatur quadratum rectae AB, partium 12, erit quadratum rectae BE, talium partium 4. c Est autem qua

c 47. pri.

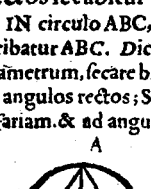
quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE: Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta DE dupla erit ipsius FE. Quocirca DE, bifariam secatur in F)

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta dividet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cujus centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. *Dico* rectam AE, per centrum D, ductam hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari à latere BC, bifariam. & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum



latera AB, AD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales quoque; *a* Erunt anguli BAD, CAD, æquales Quod est primum.

a 8. pri.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: *b* Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

b 4. pri.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; *c* erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars ejusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. *d* Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, EFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; *e* Erunt & latera DF, EF, æqualia. Quod est tertium.

c 26. tert.

d 5. pri.

e 26. pri.

XIII. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT *data sphæræ diameter* AB, *circa quam semicirculus describatur* ABC; *& ex* AB, *auferatur tertia pars* BD, *ut sit* AD, *ipsius* DB, *dupla; at vero* AB, *ejusdem* DB, *tripla; & ipsius* AD, *sesquialtera. Deinde ducta* DG, *perpendiculari ad* AB, *connectantur rectæ* AC, BC. *Ad intervallum rectæ* HE, *quæ æqualis sit ipsi* DC, *describatur circulus* EFG, *cujus centrum* H, *in quo triangulum æquilaterum inscribatur* EFG, *adjungunturque rectæ* HF, HG, *quæ singulæ æquales erunt iis, si* DC, *cum æquales sint ipsi* HE, *ad cujus intervallum describetur est circulus. Erigatur deinde ex* H, *ad planum circuli perpendicularis* HI, *quæ æqualis ponatur rectæ* AD, *& ex* I, *demittantur rectæ* IE, IF, IG. *Dico solidum contentum quatuor triangulis* FEG; IEF, IFG, IEG, *esse Pyramidem, sive Tetraedrum. Quoniam enim latera* DA, DC, *trianguli* ADC, *æqualia sunt lateribus* HI, HE, *trianguli* IHE, *& anguli ipsis contenti, recti ex hypothesi, & 3. defin. 11. erit basis* AC, *basi* IE, *æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam* AC, *æqualem esse rectis* IF, IG. *Rursus quia tres lineæ* AD, DC, DB, *proportionales sunt ex coroll propos. 8. lib. 6. erit ex coroll propos. 20. lib. 6. ut* AD, *ad* DC, *ita quadratum rectæ* AD, *ad quadratum rectæ* DC; *& componendo, ut* AB, *ad* DB, *ita quadrata rectarum* AD, DC, *simul ad quadratum rectæ* DC: *Sunt autem quadrata rectarum* AD, DC, *æqualia quadrato rectæ* AC. *Igitur erit quoque, ut* AB, *ad* DB, *ita quadratum rectæ* AC, *ad quadratum rectæ* DC: *Ac proinde cum* AB, *sit ipsius* DB, *tripla, erit quoque quadratum rectæ* AC, *triplum quadrati rectæ* HE, *cum* HE, *æqualis sit ipsi* DC: *At qui & quadratum rectæ* EF, *triplum quoque est ejusdem quadrati rectæ* HE. *Quadratum ergo rectæ* AC, *quadrato rectæ* EF, *æquale erit: & propterea recta* AC, *rectæ* EF. *Quare cum recta* AC, *ostensa quoque sit æqualis rectis* IE, IF, IG: *erunt quatuor triangula* EFG, EFI, FGI, GEI, *æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur jam est pyramis, seu, Tetraedrum, cujus basis* EFG, *vertex vero* I. *Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cujus diameter* AB: *& diametrum sphæræ* AB, *potentia sesquialteram esse lateris* EF, *vel* AC.

EXTENDATVR *perpendicularis* IH, *usque ad* K, *ut sit* HK, *ipsi* DB: *& tota* IK, *toti* AB, *æqualis. Quia ergo tres rectæ* AD, DC, DB, *proportionales sunt, quibus æquales existunt tres* IH, HE, HK: *erunt quoque* IH, HE, HK, *proportionales. Quare cum* HE, *sit ad* IK, *perpendicularis & media proportionalis inter* IH, HK, *semicirculus circa* IK, *descriptus in plano rectarum* IK, HE, *transibit per* E, *ut mox ostendetur: Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam* IK, *descri-*

1

a 4. primi

b 47. primi

c 12. tertii

ptus in plano rectarum IK, HF, *transibit per* F, *quam semicirculus circa eandem* IK, *descriptus in plano rectarum* IK, HG, *per* G *Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, qua constitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos* E, F, G, I, *incedat. Cum ergo hæ sphæra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod diameter* IK, *æqualis ponatur diametro* AB, *comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.*

QVONIAM verò tres rectæ AB, AC, AD, *proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ut* AB, *ad* AD, *ita quadratum rectæ* AB, *ad quadratum rectæ* AC, *ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta* AB, *sesquialtera rectæ* AD, *quod qualium partium 3. est* AB, *talium 2. sit* AD. *Igitur & quadratum rectæ* AB, *sesquialterum erit quadrati rectæ* AC: *Ac propterea cum* AB, *sit diameter sphæræ &* AC, *recta lateri Pyramidis* EF, *æqualis, perspicuum est, diametrum sphæræ potentia sesquialteram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.*

LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si transeat circa D, vel ultra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, *ex coroll. propos. 13. lib. 6.* Quare tam quadratum

a 17. *sexti.* rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se æqualia, & ipsæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.

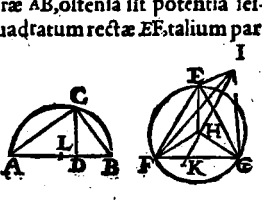
HINC manifestum est, semicirculum in superiori fi-

gura

gura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

(HINC facilè colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. est quadratum rectæ EF, talium partium 2. est quadratū rectæ HE, a quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE: Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit quę 9. ad 2.



a 12. *tertii dec.*

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem semidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla est ipsius DB: Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quę fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudine pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem quæ AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. ut hic apparet 9. 6. 4.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totam solidita

liditatem. Hanc verò praxin, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris istius octaedri.

SIT sphæra, qua constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, *circa quam semicirculus describatur* ACB, *& ex centro* D, *ad* AB, *perpendicularis ducatur* DC, *connectanturque rectæ* AC, BC, a *quæ æquales inter se erunt. Sumpta jam recta* EF, *quæ æqualis sit ipsi* AC, *vel* BC, *describatur super eam quadratum* EFGH, *in quo ducantur diametri* EG, FH, *se mutuo secantes in* I: *eruntque rectæ* IE, IF, IG, IH, *æquales; cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, ut in* 4. *lib. demonstratum est. Deinde ex* I, *in utramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis* KL, *ponanturque* IK, IL, *æquales ipsi* IE: *Et denique ex* K *&* L, *deducantur ad angulos quadrati rectæ* KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. *Dico solidum contentum octo triangulis* KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, LHG, LFG, *esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera* EI, IK, *trianguli* EIK, *æqualia sunt lateribus* FI, IH, *trianguli* FIH; *& anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem* EIK, *ex defin.* 3. *lib.* 11. *At vero* EIG, b *eo quod sit æqualis angulo* GIH, *sibi deinceps, ob æqualitatem laterum* EI, IH, GI, b 8. *primi.* IH, *& basium* EH, GH,) c *Erit & basis* EK, *basi* BH, *æqualis: Eodemque modo eidem* EH, *æqualis erit* KH; *ideoque triangulum æ-* c 4. *pri.* *quilaterum erit* KEH. *Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo* KEH, *cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati* EFGH, *singula singulis. Constitutum igitur jam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri* AB, *qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur, & diametrum sphæræ* AB, *potentia duplam esse lateris* EF, *vel* AC.

QVONIAM enim IE, *perpendicularis est ad* KL, *ex* 3. *defin. lib.* 11. *& media proportionalis inter segmenta* KI, IL: (*quod tres rectæ* KI, IE, IL, *æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.*) *Semicirculus circa* KL, *in plano rectarum* KL, IE, *descriptus transibit per punctum* E, *ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem* KL, *in plano rectarum* KL, IF, *incedet per punctum* F. *Idemque dicendum est de punctis* G, H. *Igitur quilibet horum semicirculorum circumdu-*

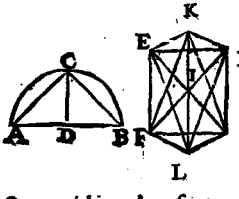
ctus,

tus, manente fixa diametro KL, *describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cujus diameter* AB; *(Nam cum rectæ* AC, EF, *æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia: Sit autem tam quadratum rectæ* AC, *duplum quadrati rectæ* AD, *quam quadratum rectæ* EF, *quadrati rectæ* EI; *Erunt & rectæ* AD, EI, *hoc est,* KI, *semidiametri æquales. Quare & tota diametri* AB, KL, *æquales erunt: ac proinde sphæra ipsarum æquales existent) comprehendetur idem octaedrum datæ sphæræ.*

QVIA *vero quadratum rectæ* AB, a *æquale est quadratis rectarum* AC, BC, *quæ æqualia sunt: erit quadratum rectæ* AB, *duplum quadrati rectæ* AC. *Quamobrem cum* AB, *sit diameter sphæræ, &* AC, *rectæ æqualis lateri octaedri* EF: *manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaq; octaedrum constituimus, & sphæræ complexi sumus, quæ & pyramidem. Quod erat faciendum.* a 47. primi

COROLLARIVM I.

(EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cum IK, recta sit ad lineas EG, HF: *b* recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: *c* Ideoque ad plana KELH, ELGK, per KI, ducta, rectæ erunt ad planum EFGH. Imò eadem ratione, ut paucis rem complectar, erit tria plana EEGH, KELH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. *d* Ita enim efficitur, ut angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.



b 4. undec
c 8. undecimi.
d 48. pri

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cujusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

COROLLARIVM III.

(SI tetraedrum & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ divisum in sex partes. a Quoniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. b Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3 est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.)

a 13. tertii dec.

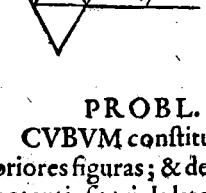
b 14. tertii dec.

COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: c Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.)

c 15 undec

SCHOLIVM.

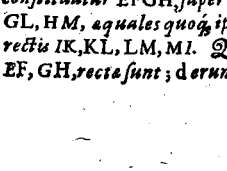


QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturq; ut hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, ut ait Albertus Durerus.

XIV. PROBL. 3. PROPOS. 15.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæra, qua prædictas figuras comprehendit, diameter AB, *circa quam semicirculus describatur* ACB: *& ex* AB, *auferatur tertia pars* BD, *ut sit* AB, *ipsius* BD, *tripla. Deinde ducta* DC, *perpendiculari ad* AB, *connectantur rectæ* AC, BC. *Super rectam* EF, *quæ recta* BC, *sit æqualis, quadratum constituatur* EFGH, *super quod erigantur perpendiculares* EI, FK, GL, HM, *æquales quoq; ipsi* BC, *quarum extrema conjungantur rectis* IK, KL, LM, MI. *Quoniam ergo rectæ* EI, FK, *ad planum* EF, GH, *rectæ sunt*; d *erunt rectæ* EI, EK, *parallelæ. Sunt autem & æqua-*



d 6. undec.

æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. a 33. primi
algitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est EFKI: In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: b Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, c cum simile sit & æquale quadrato opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, d quod ejus plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML; diametri EK, FI, GM, HI, per quas ducantur plana EKLH, FIMG. e Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bifariam secat; utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. ejusdem propos. se mutuo quoq; bifariam dividunt omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; f perpendicularis quoq; erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, ut constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri AB, ita demonstrabitur. b 34. pri. c 24. undec d 15. undecimi. e 28. undecimi. f 4. undec.

CVM quadratum rectæ EK, g æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. h Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero ejusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius g 47. pri. h 47. pri.

BD, sit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsa rectæ EL, AB. diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

QVIA *vero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est. diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæræ complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.*

COROLLARIVM I.

(EX demonstratione hujus problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum conjungunt, bifariam dividi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, *HK*, *FM*, GI, æquales esse, seseq; mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, conjungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam dividatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP æquales sunt duobus angulis NMP, NP*M*, trianguli NMP: (*a* Nam angulus OFP, æqualis est alterno N*M*P, inter lineas FI, G M, *b* quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML, *c* & angulus OPF, æqualis est opposito ad verticem NP M) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adjacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis conjungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

a 29. primi
b 16. unde.
c 15. pri.

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. *d* Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: *e* Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero *BG*, *f* Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectam AC, & rectam B€, cum angulus ACB, sit rectus

d 13. tertii dec.
e 15. tertii dec.
f 47. pri.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia confician-tur sex quadrata inter se æqualia, disponanturq; ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter

inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cujuspiam, ut constat.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter *AB*, circa quam semicirculus describatur *ACB*; Et ex *AB*, abscindatur quinta pars *BD*, ut *AB*, ipsius *BD*, sit quintupla; & ipsius *AD*, sesquiquarta: At vero *AD*, ipsius *BD*, quadrupla. Deinde ducta *CD*, perpendicularis ad *AB*, connectantur rectæ *AC*, *BC*, *d* intervallum rectæ *EF*, quæ ipsi *BC*, sit æqualis, circulus describatur ex centro *E*: *a* in quo pentagonum æquilaterum inscribatur *FGHIK*. Post hæc divisis arcubus *FG*, *GH*, *HI*, *IK*, *KF*, bifariam in punctis *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, connectantur rectæ *FL*, *FG*, *GM*, *MH* &c. nempe latera decagoni: Deinde ex centro *E*, & punctis *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, ad planum circuli *FGHIK*, perpendiculares erigantur *EQ*, *LR*, *MS*, *NT*, *OV*, *PX*, quæ æquales ponantur semidiametro, *EF*, seu rectæ *BC*. Eruntque omnes inter se æquales: *b* sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas conjungunt, nempe *EL*, *QR*, *EM*, *QS*: *EN*, *QT*: *EO*, *QV*: *EP*, *QX*. (quas tamen omnes, ut vitaremus confusionem, non duximus) *c* binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint *EL*, *EM*, &c. semidiametro *EF*: æquales quoque erunt *QR*, *QS*, *QT*, *QV*, *QX*, & inter se, & semidiametro *EF*, seu rectæ *BC*, *d* Quia vero planum per rectas *QR*, *QS*, ductum parallelum est plano *FGHIK*, per rectas *EL*, *EM*, ducto, eademque ratione planum per rectas *QS*, *QT*, ductum parallelum est plano eidem *EGHIK*, per rectas *EM*, *EN*, ducto, convenit autem planum per rectas *QR*, *QS*, cum plano per *QS*, *QT*, in recta *QS*. Igitur efficient hæc duo plana unum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per *QT*, *QV*, cum hoc plano efficere unum planum: nec non planum per *QV*, *QX*, & planum per *QX*, *QR*. Sunt ergo quinque lineæ *QR*, *QS*, *QT*, *QV*, *QX*, *in eodem plano*: Ac proinde si ex *Q*, ad intervallum *QR*, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta *S*, *T*, *V*, *X*, transibit, eritque æqualis circulo *FGHIK*. Conjungantur puncta *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, rectis *RS*, *ST*, *TV*, *VX*, *XR*. *e* Quia igitur *LR*, *PX*, æquales, & parallelæ: si concipiatur duci recta *LP*: *f* erunt quoque *LP*, *RX*, æquales & parallelæ: *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Auferet autem *LP*, quintam partem circuli *FGHIK*, nempe duas decimas partes *FL*, *FP*. Igitur & *RX*, quintam partem auferet circuli *RSTVX*. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas *RS*, *ST*,

a 11. *quar.*

b 6. *undecimi.*

c 33. *pri.*

d 15. *undec.*

e 6. *undec.*

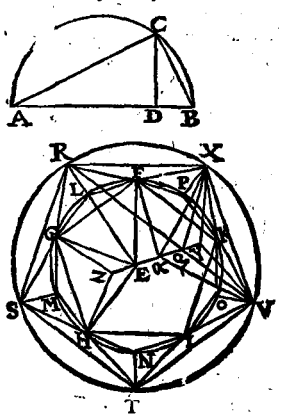
f 33. *pri.*

g 28. *tertii*

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni ; *a* erit quadratum lateris pentagoni ejusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF : *b* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR ; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ BG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales ; Ac propterea decem triangulæ RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIX, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia ; cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri. Posthæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EB, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX ; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX; hoc est, latus hexagoni, & QY latus est decagoni ejusdem circuli : *c* erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY ; *d* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad hujus planum recta ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY, Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, ut vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX,

a 10. *tertii dec.*

b 47. *pri.*



c 10. *tertii dec.*

d 47. *pri.*

VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum BG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pateremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

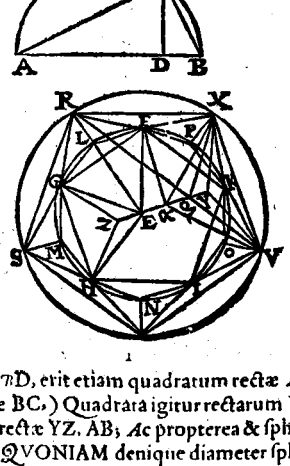
DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α, F, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, divisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK: & EZ, latus decagoni ejusdem circuli: c erit QZ, divisa in E, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium majoris segmenti, hoc est, recta αZ, d quintuplum potest ejus, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum ejusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α per omnes angulos Icosaedri

a 4. pri.
b 4 pri.
c 9. tertii dec.
d 3. tertii dec.
e 47. pri.

dri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphęræ diametri A B.

a 15. quinti b 22. sexti.

a Cum enim sit ut α Z, ad α E, ita YZ, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; b Ac propterea ut quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & ejusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectę AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit ut AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit ut AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC,) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas æquales erunt:



QVONIAM denique diameter sphærę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB. EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, c 8. decimi nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F, G, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, d Irrationalis erit linea, quę vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphęra sumus complexi, qua & antedictas figuras; demonstravimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quę vocatur Minor. Quod erat faciendum.

d 11. tertiidec.

COROL-

COROLLARIVM. I.

(EX dictis infertur, sphęrę diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri *AB*, quintuplum esse quadrati rectę BC, hoc est, semidiametri *EF*.)

COROLLARIVM II.

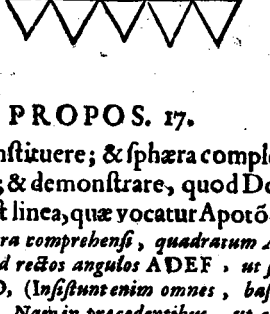
(ITEM manifestum est, sphęrę diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni ejusdem circuli: Nam YZ diameter sphęrę componitur ex *EQ*, latere hexagoni, & ex QY, *EZ*, lateribus decagoni circuli FGHIK.)

COROLLARIVM III.

(CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectę, quę ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectę LP, sit quoque parallela recta HI, ut in scholio propos. 27. lib. 3. demonstravimus; (eo quod equales sunt arcus *HL*, IP: continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentię,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas: Eademque est ratio de cęteris lateribus oppositis.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula equilatera inter se equalia, disponanturque, ut hęc figura indicat, componetur Icosaedrum, secundum totam soliditatem si rite inter sese aptentur.



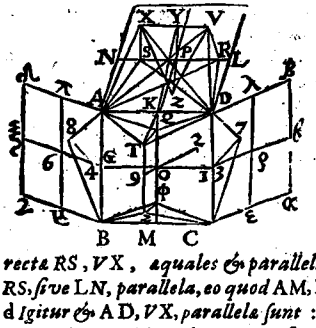
PROBL. 5. PROPOS. 17. XVI.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotõe.

SIT una basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, *cui insistat aliud æquale ad rectos angulos* ADEF, *ut sit communis horum sectio recta* AD, (*Insistunt enim omnes, bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis* EFGH, *quatuor lineæ* EI, FK, GL, HM, *ipsi basi* EFGH, *perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. hujus lib.* a Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) *Divisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis* G, H, I, K, L, M, N, *quæ rectis connectantur secantibus sese in* O, P, *centris quadratorum, ut constat ex demonstratione octavi* a 18. undec.

probl.

Problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, *extrema ac media ratione in punctis* Q, R, S, *ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares* QT, VR, SX, *æquales segmentis majoribus* OQ, PR, PS. *Conjunctis deinde rectis* AT, AX, DT, DV, VX: *Dico* ATDVX, *esse unum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum* ATDVX, *sit in uno plano, ita ostendetur, Cum* RV, SX, *sint ad quadratum* ADEF, *rectæ ipsæ erunt parallelæ: Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta majora* PR, PS, *quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, eum & lineæ sectæ* PL, PN, *æquales sint.* b) *erunt quoque contingentes*



a 6. *undecimi.*

b 33. *pri.*

rectæ RS, VX, *æquales & parallelæ:* c *Est autem & AD, eidem* RS, *sive* LN, *parallelæ, eo quod* AM, DL, *parallelæ sunt & æquales.* d *Igitur & AD,* VX, *parallelæ sunt:* e *Ac propterea rectæ conjungentes* AX, DV, *in eodem cum ipsis erunt plano, ideoq; trapezium* ADVX, *in uno existet plano: Est autem triangulum* ATD, *in uno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio* ADVX. *Ex P, namque ducatur* PY, *parallela ipsi* RV, f *quæ erit recta ad quadratum* ADEF, *quod ad idem rectam sit* RV: *Et connectantur rectæ* KT, KY. *Quoniam igitur est ut* OK, *ad* OQ, *ita* OQ, *ad* QK, *ob sectionem rectæ* OK: *Est autem* KP, *ipsi* OK, *æqualis;* (*sunt enim dimidia latera cubi,*) *&* PY, *ipsi* OQ. (*cum æqualis sit ipsi* RV, *quæ posita fuit æqualis ipsi* OQ, *majori segmento;*) *Erit quoque ut* KP, *ad* PY, *ita* OQ, *hoc est,* QT, *illis æqualis, ad* QK. *Quare cum triangula* PKY, QTK, *duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum* K, *composita,* g *ita ut homologa latera sint parallela, nempe* PK, *&* QT, *inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratũ* ABCD; *&* PY, QK, *inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum* ADEF: h *Erunt reliqua latera* KY, KT, *in rectam lineam collocata,* i *Ac propterea recta* TY, *in uno erit plano, ideoque planum* ATD, *&planum* ADVX, *unum planum constituent per rectas* TY, AD, *ductum. Quocirca pentagonum* ATDVX, *in uno existit plano.*

c 33. *pri.*

d 9. *undec.*

e 7. *undec.*

f 8. *undec.*

g 6. *undec.*

h 32. *sexti.*

i 1. *undec.*

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, *trianguli* ANS, *æqualia sint lateribus* AK, KQ, *trianguli* AKQ. (*Sunt enim* AN, AK. *dimidia latera cubi, &* NS, KQ. *segmenta minora rectarum æqualium sectarum*) *& anguli* ANS,

AKQ.

AKQ, recti; si ducatur recta AQ, a erunt bases AS, AQ, aequales: Rursus cum latera AS, SX, trianguli ASX, sint aequalia lateribus AQ, QT, trianguli AQT (Nam rectae AS, AQ, ostensa sunt aequales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum aequalium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases AX, AT, aequales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectae AT; si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectae DT, esse aequalem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV, aequalia: quibus etiam aequale ostendemus reliquum VX, hac ratione. c Quadrata rectarum PN, NS, simul triplasunt quadrati rectae PS, hoc est, quadrati rectae SX: Est autem quadrato rectae PN, aequale quadratum rectae AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectae SX. d Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, aequale sit quadratum rectae AS; erit quoque quadratum rectae AS, triplum quadrati rectae SX. Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectae SX. e Est autem quadratis rectarum AS, SX, aequale quadratum rectae AX. Quadratum ergo rectae AX, quadruplum quoque erit quadrati rectae SX, hoc est, quadrati rectae PS; hoc est, quadrati rectae XT; f Sunt enim rectae PS, XT, aequales. Cum igitur & quadratum rectae VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectae XT, ex scholio Propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XT; Erunt quadrata rectarum AX, VX, aequalia; Ac proinde rectae ipsae aequales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensae sint esse aequales; aequilaterum est pentagonum ATDVX.

a 4. pri.
b 4. pri.
c 4. tertij dec.
d 47. pri.
e 47. pri.
f 34. pri.

QVOD autem & aequiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, aqualis maiori segmento PS; g erit quoque NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. h Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati NP, hoc est, quadrati rectae AN: Est autem quadratum rectae RV, aequale quadrato rectae RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectae AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectae AN. i Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, aequalia quadrato rectae AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectae AN. k Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, aequale sit quadratum rectae AV; Erit quoque quadratum rectae AV, eiusdem quadrati rectae AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectae AN, quadruplum est quadratum rectae AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque & rectae AV, AD, aequales. Simli argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, aequales esse: ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse aequales. Quoniam igitur latera

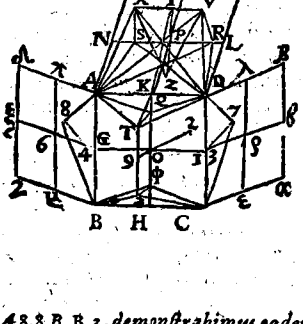
g 5. tertij dec.
h 4. tertij dec.
i 47. pri.
k 47. pri.

TA, TD, *triangulis* TAD, *æqualia sunt lateribus* DV, VX, *trianguli* DXV: *& bases* AD, DX, *æquales quoque:* a *Erunt & anguli* ATD, DVX, *æquales. Non secus ostendetur angulus* DVX, *æqualis angulo* AXV. *Ac proinde, cum in pentagono æquilatero* ATDVX, *tres habeantur anguli æquales* ATD, DVX, AXV, b *ipsum erit æquiangulum.*

a 8. pri.

b 7. tertij dec.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata C *α* β D, B *γ δ* A, *recta ad quadratum* ABCD, *in communibus sectionibus* CD, AB,



quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, Ι, μ, ξ, π, G, *punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris* ϱ, σ. *Secentur deinde* QH, OK, ϱΙ, σG, *extrema ac media ratione in punctis* ϕ, Ω, 3, 4, *ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares* ϕ2, ΩT, 37, 48, *æquales segmẽtis maioribus* ϕ0, Ω0, 3ϱ, 4σ, *coniunganturq́, rectæ* T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, *demonstrabimus eadem ratione. pentagona* T2C7D, T2B8A, *æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera* TD, TA. *Constructa igitur iam sunt triapentagona tãgentia cubi tria latera* AD, DC, AB, *& sibi mutuo cohærētia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera: constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.*

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, *& eius oppositum, planis ductis per rectas* KM, LN. *Item planum* ABCD, *& eius oppositum, planis per rectas* GI, HK, *ductis. &c.*

c 29. vndecimi. *Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana* ADEF, ABCD; c *Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum* YP, *recta sit ad planum* ADEF, *ipsa producta versus* Z, *erit communis sectio planorum per rectas* KM, LN, *ductorum. Eodem pacto si ex* O, *ad planum* ABCD, *erigatur perpendicularis* 9Oz; *erit*

a 39. vndecimi. *ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas* GI, HK, *ducuntur.* a *Quæ vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam*

fariam secant: secent se mutuo bifariam in Z. Secant autem se diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 13. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. b Quoniam parallela sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD: Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planum ADEF: erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P secta sit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est enim XY, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PZ:) d Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris cubi. f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratæ semidiametri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoq; quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadrato rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi: Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) h Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsi ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Zω, connectaturq; recta ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. a Quoniam igitur quadratum rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Zω, ωA, quadratis rectarum Zω, ωX, æqualia;

b 6. vndecimi.
c 4. tertij dec.
d 47. primi
e 15. quinti.
f 22. sexti.
g 15. tertij. dec.
h 4. pri.
a 47. pri.

Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ ipsa ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsi ωA, ωX, æquales, quod & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales,

b 9. tert.

quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis: idcoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. c *Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ ZA: his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT; propterea que & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.*

c 47. pri.

d 15. quinti.

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN; d *erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR; Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, qua Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius)* e *Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, qua vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictum figuram; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, qua vocatur Apotome. Quod erat faciendum.*

e 6. tertij dec.

COROLLARIVM. I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM. II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVO-

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni: b ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri similiter diuiditur, faciteq; minus segmentum latus dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

a 3. tertij dec.
b 5 tertij dec.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, TZ, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB: aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9 Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi, & YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales: Eadẽq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogramma KOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

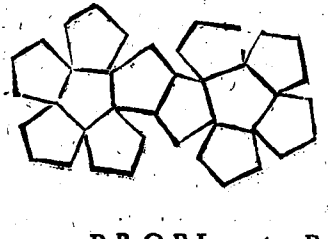
COROLLARIVM IV.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadratata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint, quadrati rectæ PZ: erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: c ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ

c 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona



æquilatera & æquiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

xviij. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæra diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita vt BD, sit ipsius pars tertia: In E, denique ita vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH: connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoniin eo circulo descripti cuius semidiameter, seu larus Haxagoni est BH, connectaturq; recta BI. Postremo BC, secetur extrema ac media ratione in K, sitque majus segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum. Dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri: AF, latus Octaedri: BG, latus cubi: BI, latus Icosaedri: BK, denique latus Dodecædri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA: AD, ex coroll propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG. Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG: *a* Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri: erit AG, latus Tetraedri.

a 23. tertij dec.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. prop. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. libr 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AF, duplum quadrati rectæ AF. *b* Quare cum diameter sphæ-

b 14. tertij dec.

ræ po-

ræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius ED, tripla, ex constructione; Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. *a* Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. *a* 15. *tertij dec.*

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH. Est autem ex constructione AB, ipsius BE quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. prop. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. *b* Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde *c* cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. *d* Quamobrem BI, latus est Icosaedri. *b* 10. *tertij dec.* *c* 47. *pri.* *d* 16. *tertij dec.*

DENIQVE cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema ac media ratione, erit BK, maius segmentum latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex corollario 1. propos. 17. huius libri. Expositа ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, quãlium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri potentia vero duplum lateris cubi Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi.

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum. *e* Ac propterea diameter sphæræ, & latera dicta- *e* 6. *decimi.*
rum figurarum lineæ sunt commensurabiles: atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt

a 9. dec. constat ex coroll. propos. 24 lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantùm comensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cũ lateta priorum sunt diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea, Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum gularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint; Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex schol. propos. 38. lib. 3.

EODEM

EODEM modo non oſtendemus, latus Octaedri majus eſſe lateri cubi. Nam BF, latus Octaedri majorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG; majus eſſe latere Icoſaedri BI, hâc arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD, *a* & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; *b* quod illud hujus triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; *c* erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectæ GD, majus eſt quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, major quam recta BH. Rurſus quia diameter ſphæræ, AB, componitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, ejusdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. hujus lib. conſtat latus decagoni HI, majus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI. recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadradrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum quintuplum enim eſt demonſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB: Sed neque major tertia parte. Si enim recta HI, dicatur major tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipſius HI, major quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis abſurdum. Non igitur major eſt HI, tertia parte ipſius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, ut oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, majores ſint rectis BH, HI, ut demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum majora: *d* Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum

a 20. ſexti.

b 15. tertii. dec.

c 10. quinti

d 47. primi.

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, majus quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, major erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, divisæ extrema ac media ratione, majus segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, majus rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul majora duplo rectanguli sub BG, GK: *a* Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cum sit, ut BG, ad BK, ita BK, ad GK; *b* erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo, sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Majus igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco majora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK. Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, majora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde unum quadratum rectæ BH, majus erit uno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK quod est absurdum, cum illa quinque his sex majora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, major erit quam recta BK: Ac propterea cum BI, major sit quam BH, multo major erit BI, latus videlicet Icosaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparavimus. Quod erat faciendum.

a 2. *sec.*

b 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ plana & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus

EX

EX quinque, angulus Icosaedri:

EX sex autem hujusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri nō potest angulus solidus. Cum enim trianguli aquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. prop 32. lib. 1. Erunt ejusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus cōstituetur. a Nā solidus omnis angulus minoribus quā quatuor à 20. unde rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex cum planis ejusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor ejusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis aquilateris, & aquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea quintam partem unius recti continebunt tres ejusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor hujusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, major sit recto, eo quod continet unum rectis, & insuper recti quintam partem: erunt quatuor majores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis cōstituetur: Ac propterea multo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus cōstabit. Nec sane ex aliis figuris aquilateris, & aquiangulis cōstitui poterit angulus solidus. Nā cū sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum: ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea duas partes sextas unius recti: continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus ejusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur: neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres majores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis aquilateris, & aquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula aquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor ejusmodi triangula conveniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinque talia triangula ad efformandū

angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis ejusmodi contentum.

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in unum punctum, ut constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conveniant ad costitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim ejusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cujuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogaverit, quotnã latera quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in unius basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in unum conveniunt, ad constitutionem unius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangulæ Pyramidis, sive Tetraedri multiplicentur in numerum laterum unius trianguli, ut in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in unius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum unius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogaverit, quotnam angulos solidos quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in unius basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in unum conveniunt, ad constitutionem unius anguli solidi, dividendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, ut numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si dividantur in 3. (Tot enim anguli constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerũ angulorum unius quadrati, fiunt

fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt unum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 60. anguli qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quod baſes in uno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solidos Tetraedrum (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocentur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM DE-CIMVM.

Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: ut alii vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMUS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque differerent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conſiſcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geome-

Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo vero subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent: in quorũ quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundũ superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam: ut hi duo libri sint instar appendicis cujusdã elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non injucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporũ regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alio: quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartus decimus, quinque vero problematibus decimus quintus absoluitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in universũ differere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adjumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulã in hoc negotio collocavit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam plurimis theorematibus problematibusque locupletavit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adjunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterũ præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex ejus proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

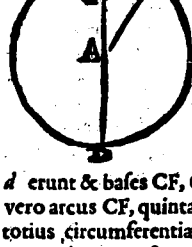
QVONIAM verò in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis discrepant: annotavimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur: Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni ejusdem circuli. Extensa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur
a 3. tertii. rectæ AC, CG, CF, BF. a Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, BEF, æ-



qualia lateribus CE, EF, trianguli CEF;
b 4. primi. Cum igitur & anguli contenti sint æquales,
c 28. tertii nempe recti; b erunt bases CF, BF, æquales;
c ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, ejusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntq; anguli contenti recti;
d 4. primi d erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus
e 33. sexti. CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit
f 20. tertii. arcus CF. e Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: f Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & hujus ad centrum eadem sit basis
g 32. primi DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: g Atqui angulus CGF, externus æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, ut ostensum est, erit GCA, re-
h 6. primi. liquum dimidium ejusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; h ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pen-

in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subrendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quae ex centro perpendicularis est ad BC, dividere arcum BC, bifariam, in F.

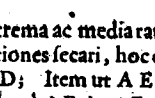
COROLLARIVM. II.

HINC quoquo fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam aequalem esse utrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. IV. ij.

SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur, ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binae rectae AB, CD, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse ut AB, ad CD, ita AE, ad CF, & EB, ad FD; Item ut AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, ut AB, ad AE, ita AE, ad EB, & ut CD, ad CF, ita CF, ad FD; *a* erit rectangulum sub AB, EB, aequale quadrato rectae AE; & rectangulum sub CD, FD, aequale quadrato rectae CF. Quam ob rem erit ut rectangulum sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectae CF, (est enim utrobique aequalitatis proportio) Ac propterea, per ea, quae demonstravimus in scholio propos. 12. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub AB, EB, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectae CF: & componendo, ut quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectae AE, ad quadratum rectae AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectae CF, ad quadratum rectae CF. *b* Sed quod quater continetur sub AB, EB, una cum quadrato rectae AE, aequale est quadrato lineae compositae ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, una cum quadrato rectae CF, aequale est quadrato lineae compositae ex CD, FD. Igitur erit quoque ut quadratum lineae compositae ex AB, EB, ad quadratum



a 17. sexti.

b 2. sec.

a 2. sec. tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD; ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, ut recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD; ad rectam CF: Et componendo ut composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AF, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; b Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita est AB, ad CD. Erit ergo ut AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum sit ut tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; c erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit ut AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique juxta omnes modos arguendi & proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

b 15. quinti.

c 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

d 9. tertii decimi. *QVONIAM enim* d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam;* e *& recta subtendens pentagoni angulum sectæ extrema ac media ratione facit majus segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *fit ut eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni; majoris segmenti ad majus, quæ majoris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, ut majus segmentum ad minus, ita tota ad majus segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, ut recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni, quod est propositum.*

e 8. tertii decimi.

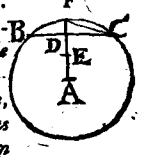
f 2. quarti decimi.

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, *ducta perpendicularis* AD, *ad latus* BC, *pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in* E, *extrema ac media ratione. Dico majus segmentum* AE, *esse æquale perpendiculari ex* A, *ad latus trianguli æquilateri ejusdem circuli ducta: minus vero segmentum* ED, *æquale esse dimidio lateris decagoni ejusdem circuli. Extensa namque recta* AD, *ad* F, *& connexa recta* FC, *erit* FC, *latus decagoni, cum ex coroll 1. propos. 1. hujus lib. arcus* BC, *nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in* F, a *Ac proinde recta composita ex* AF, *latere hexagoni, &* FC, *latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cujus majus segmentum* AF, *latus hexagoni minus vero segmentum* FC, *latus decagoni. Quare ut in hac propos. ostensum est, erit ut tota* AD, *divisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex* AF, FC, *similiter divisam, ita* AE, *majus segmentum ad* AF, *majus segmentum: &* ED, *minus segmentum ad* FC, *minus segmentum:* b *Est autem tota* AD, *dimidium totius compositæ ex* A F, FC. *Igitur & decimi.* AE, *ipsius* AF, *semidiametri &* ED, *ipsius* FC, *lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri: perspicuum est, majus segmentum* AE, *æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero* ED, *dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*



a 9. *tertii dec.*

b *quarti.*

THEOR. 3. PROPOS. 3. 15. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata, quintupla sunt ejus, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo ABCDE, cujus centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, binalatera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A; per centrum recta AFG, quæ per Coroll 2. propos. 10. lib. 13. dividat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG,

latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG: erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: *a* Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati ejusdem rectæ FG: *b* Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque quadrata, quintupla sunt ejus, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi

b 10. tertii decc.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum unum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. *c* Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG, &c.

c 3. quartidecimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicujus circuli extrema ac media ratione in C, sitque majus segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni ejusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni ejusdem circuli, adjungaturque in rectum ipsi AB, *d* eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, divisa in A, extrema ac media ratione, cujus majus segmentum BA; Ponitur

d 9. tertii decimi.

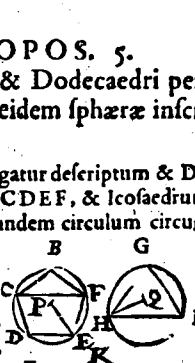
tur autem & AB, secta in C, similiter. *a* Igitur erit ut BD, tota ad majus sui segmentum AB, ita AB, tota ad majus sui segmentum AC: Sed est quoque ut BD, tota ad majus sui segmentum AB, ita AB, majus segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cujus latus hexagoni est AB; erit & AC, ejusdem circuli latus decagoni. a 2. quarti decimi.

ALITER. Adjungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis majori segmento AC; *b* eritque tota recta BD, divisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, majus segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicujus circuli, erit per ea, quæ demonstravimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum ejusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cujus AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicujus circuli, &c. Quod erat ostendendum. b 5. tertiidecimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

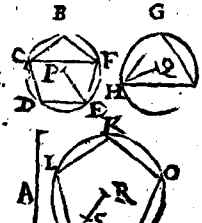
IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cujus diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cujus unum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cujus unum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, *c* ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita ut quinque latera hujus pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuivis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secetur-



c 13. tertiidecimi.

que RM, extrema ac media ratione in S; *d* eritque majus segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM; est tredecimi. d 4. quarti latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. ejusdem propos. BF, latus Dodecaedri est majus segmentum lateris



cubi CF, sécti extrema ac media ratione, *a* erit ut tota CF, ad totam RM, ita BF, majus segmentum ad RS, majus segmentum; Ac propterea ut quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo per ea; quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. ut triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: *c* Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc octensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, *d* (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit octensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; *e* sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH,) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea unum quadratum rectæ PE, uni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter BE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. *quartidecimi.*
b 22. *sexti.*
c 10. *tertiidec.*
d 3. *quartidecimi.*
e 12. *tertiidecimi.*

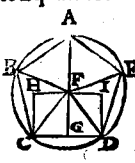
iij. vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari com-

ri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque unius basibus aliorum æqualis Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est sub FG, & CD. a Quoniam vero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cujuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem hujusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint uni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.



a 41. primi.

ALITER Facta eadem figuræ constructione, b cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque hujusmodi triangulis constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta hujusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, sumptum sexagies æquale erit superficiei Dodecaedri.

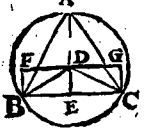
b 41. primi

THEOR. 7. PROPOS. 7.

iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli: Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum est trianguli BDC, atque adeo cujuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium; Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex hujusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint uni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



a 41. primi

b 41. primi

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta hujusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt unum: Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulū contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.

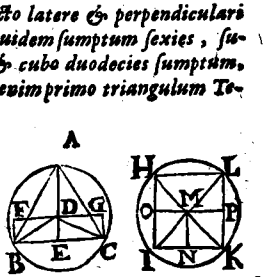
c 6. quarti decimi. d 7. quartidecimi. e 25. quinti.

c Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; d Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoq; sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quā hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. e Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulū hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnũ aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. a *Quoniã enim rectangulum* BG, *duplum est trianguli* DBC, *hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triãgula æquilatera ipsi* ABC *æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum* BG, *sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.*



a 41. pri.

SIT deinde idem triangulum ABC, *Octaedri, &c. Dico rectangulum* BG, *duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri.* b *Cũ enim rectangulum* BG, *duplum sit trianguli* DBC, *hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum æquale viginti quatuor huiusmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum* BG, *duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri.*

b 41. pri.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, *circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta* MN, *perpendiculari ad* IK, *ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur* OP, *ipsi* IK, *parallela. Dico rectangulum* IP, *contentum sub* OI, *hoc est, sub* MN, *& IK, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi.* c *Quoniam enim rectangulum* IP, *duplum est trianguli* MIK, *hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant*

c 41. pri.

ficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.

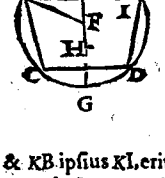
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL, (sunt enim IP, PH, æqualia cum recta OI, sit dimidiũ lateris HI, nempe æqualis ipsi MN.) constituẽt duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi; hoc est, totam superficiem cubi.

iv. viii.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum *ABCDE*, & ducta diameter *AG*, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint *AH*: Angulum vero *A*, subtendens recta *BE*, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint *BI*, & vna *IE*, ita vt *BI*, sint quintupla ipsius *IE*. Dico rectangulum comprehensum sub *AH*, *BI*, æquale esse pentagono *ABCDE*. Ducta enim recta *BF*; quoniam *AH*, continet tres quartas partes diametri, & *AF*, duas, cum sit semidiameter; erit *AH*, ipsius *AF*, sesquialtera. Quia vero recta *FA*, diuidens arcum *BAE*, bifariam, diuidit quoque rectam *BE*, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto *K*; continebit tam *KB*, quam *KE*, tres sextas rectæ *BE*; atque adeo cum *BI*, contineat quinque, continebit *KI*, duas: Ac proinde & *KB* ipsius *KI*, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt *AH*, ad *AF*, ita *KB*, ad *KI*; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis *AH*, *KI*, æquale erit rectangulo sub medijs *AF*, *KB*. *b* Est autem rectangulum sub *AF*, *KB*, duplum trianguli *ABF*, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin *AF*, & eandem altitudinem *BK*, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub *AH*, *KI*, duplum erit eiusdem trianguli *ABF*. *c* Est autem & rectangulum sub *AH*, *KI*, duplum rectanguli sub *AH*, *IE*; propterea quod & basis *KI*, dupla est basis *IE*, (continet enim *KI*, duas sextas partes ipsius *BE*, & *IE*, vnam) eademque semper altitudo *AH*. Igitur æqualia sunt triangulum *ABF*, & rectangulum sub *AH*, *IE*; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum *ABCDE*, quintuplum est trianguli *ABF*, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro *F*, vt propos. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub *AH*, *BI*, quintuplum est rectanguli sub *AH*, *IE*; quod & basis *BI*, quintupla sit basis *E*, eademque



a 16. *sexti.*
b 41. *primi.*
c 1. *sexti.*
d 1. *sexti.*

demque ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum *ABCDE*, & rectangulum ſub *AH*, *BI*, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti (a comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12 lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

a 5. *quarti dec.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

IV. viij.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, qnam latus cubi ad latus Icoſaedri.

IN circulo *ABCD*, *b* circumſcribente & pentagonum Dodecaedri & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni *BD*, & trianguli *AD*: & ex centro *E*, ducantur *AD*, *BD*, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe, vt H, latus cubi, ad *AD*, latus Icoſaedri: ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt *BD*, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; *d* Ac proinde rectangulum ſub extremis H, E F; æquale erit rectangulo ſub mediis *BD*, EG. *e* Quia vero eſt, vt H, ad *AD*, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cum baſes ſint H, AD, altitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub *AD*, EF. Quare cum ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub *BD*, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque vt H, latus cubi, ad *AD*, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque

b 5. *quarti dec.*

c 2. *quarti dec.*

d 16 *ſexti.*

e 1. *ſexti.*

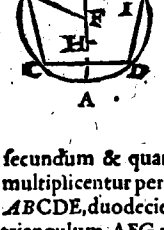
Itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. *quarti dec.*

ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub AI, BK, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.

Item rectangulum ſub AI, IF, æquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. *c* erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſumpta ad rectam IF, vigeſies ſumptam: Atqui recta BK, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinque ſextas partes ipſius BE, continebit eadem BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas ejuſdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE,) Recta vero IF, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri FG, decies ſumpto; (eo quod FG, eſt ipſius IF, dupla.) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi BE, decies ſumptum ad latus Icoſaedri FG, decies ſumptum; Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

b 1. *ſexti.*



c *ſchol.* 22. *quinti.*

d 15. *quinti.*

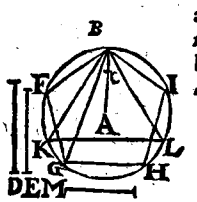
THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

IV. IX.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta *AB*, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum *AC*. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex *A*, centro ad interuallum *AB*, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum *BKL*: Si igitur *BF*, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta *BG*, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2 propos. 17. lib. 13. Quoniam vero *AC*, maius segmentum semidiametri *AB*, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum *AB*, latus est Hexagoni; *b* poterit BF, latus pentagoni & totam *AB*, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam *AB*, & minus segmentum *BC*, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum *AC*, ad M, potentem totam *AB*, & minus segmentum *BC*. *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri *BK*, triplum est quadrati semidiametri *AB*: *d* Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ *BK*, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ *BK*, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota *AB*, ad maius segmentum AC, ita tota *BG*, ad maius segmentum BF; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ AB, *ad* quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ *BG*, ad quadratum rectæ *BF*,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad



a 4. quarti dec.
b 10. tertij dec.
c 12. tertij dec.
d 4. tertij dec.
e 2. quarti dec.
f 22. sexti

qua-

quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; a Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cum igitur propositæ latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AG, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.

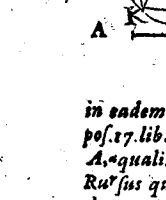
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona a quilatera BIKLM, ENOPQ, connectantur q; rectæ BK, CK, EO, FO. b Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæra; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2 prop. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, a qualis. Simili argumento a qualis erit recta EO lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ) Item arcus BGC, EHF (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.)

b 5. quarti dec.



hendit) *Erunt tam anguli* BCK, EFO, *ex definitione segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli* BKC, EOF, *inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant*: *Ac proinde ex coroll. 1 propos. 32. lib. 1. reliquus angulus* CBK, *trianguli* BCK, *reliquo angulo* FEO, *trianguli* EFO, *æqualis erit, & totum triangulum* BCK, *toti triangulo* EFO, *æquiangulum. a Quare erit vt* BK, *hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad* BC, *latus Icosaedri, ita* EO, *hoc est recta* D, *illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad* EF, *latus Icosaedri. Quod est propositum.* a 4. sexti.

PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in una sphæra, quam habent BG, BK, *latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.*

Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ, quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ, vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis

nis sectionis; & cõnectantur rectæ DE, DF. Quoniam igi-
a 47. pri. tur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; a erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqua-

lium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, *in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta.* Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex *hoc puncto in circumferentiam* circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sunt circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollar. præcedentis lemmmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB. EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex de-

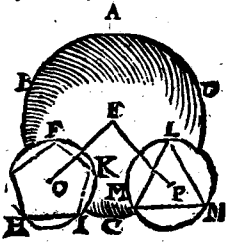
ex pefioit. 3. lib. 11. *b* Erit tam quadratum cum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphęræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ E F, reliquo quadrato rectæ E G, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter distant à centro E.

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Cõstructa enim figura, vt prius, ostendemus eodẽ modo, quadrata rectarũ EF, FB, æqualia esse qnadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, dẽptis quadratis, æqualibus rectarum æqualiũ EF, EG, cũ circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

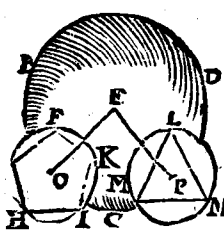
THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cui latus ad latus Icosaedri: in vna eademque sphæra. IV.

IN sphæra ABCD, *cuius centrum* E, *inscriptum sit* Dodecaedrum, *cuius vnum pentagonum* EGHIK; *Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum* LMN. *Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra* ABCD, *siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæra*



nn tan-



a 5. quarti dec.

tangunt: si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum: æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendicularis ex E, in plana circulorum deducta, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1 cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icosaedri deducta æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: resolvetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, linea rectæ ducantur, resolvetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniam autem est, ut basis FGHIK ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE. cum utriusque eadem sit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstravimus, ut duodecim bases Dodecaedri, totæ videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modo diximus) ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE, erit, per idem scholium, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri. c Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, ut cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæra: atque adeo ex scholio propos. 10. huius lib. ut latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

b 6. duodecimi.

c 9. quartidec.

d 9. quartidec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, dita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, ut latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. e Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quamcunque

e 10. quartidecimi.

que extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum: a Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunq; sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, esse inter se æquales. a 11. quinti decimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12. 13. xij.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppositi in BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, b anguli B, & C, æquales sunt: & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC: habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. c Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia sunt: ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. d Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia sint quadrata rectarum AD, ED; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD: Ac proinde, qualium partium 4 est quadratum rectæ AB, vel quadratum rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. sesquitertium est quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est, &c. Quod ostendendum erat.

b 5. primi.

c 26. vel 4. primi.

d 47. primi.

COROLLARIVM.

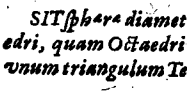
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & basis BD, basi CD, æqualis; e Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAG bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD. e 8. primi.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim BCD, unum triangulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius sphæræ, ducaturq; ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. a *Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri BC,* b *& duplum quadrati lateris Octaedri EF; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6. 4. 3.* c *ideoque communibilia erunt: Quare linea ipsa A, BC, EF, commensurabiles existent salem potentia; Atque adeo, cum A ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.*



a 13. tertij dec.
b 14. tertij dec.
c 6. decimi.

d 12. quartidec.

RVRSVS, d *quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadrati rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est: habebunt tam quadrata rectarum BC, BH quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quam numeri 4. 3.* e *Ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam linea ipsa BC, BH, quam linea EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet toti, commen-*

e 6. dec.

f 12. dec.

surabilis. f *Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt: Ac proinde cum CH, & FI, ostensa sint Rationales, e-*

g 9. decimi.

runt quoq; BH, EI, Rationales. g *Quoniam vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum*

h 12. quardec.

quadratum: (vt constat ex coroll. prop. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. h *cum ostensum sit talium partium 1. esse tam quadratum CH, quam quadratum FI, qualium 3. est tam quadratum BH, quam quadratum EI,) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles;* i *Ac proinde tam*

i 22 decimi.

rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum comensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia, rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplæ sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Mediæ erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo

BCD,

BCD, sit commẽsurabilis: (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis: (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque ex coroll. propos. 24 lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Media. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. Quod erat ostendendum,

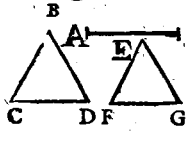
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulũ æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus sit Rationale; perspicuum est, quod inferrtur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SIT etraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribãtur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. *a* Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; *b* duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG.



a 13 *tertij dec.*

b 14. *tertij dec.*

Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadrarum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG, (*c* quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.

c 20. & 19. *sexti.*

RVRSVS, quoniam ostẽsum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG: Efficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri sit ea-

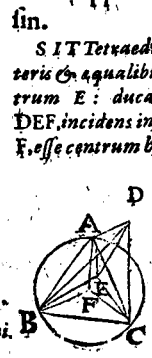
rundem partium 24. At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quamobrem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

XV.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositę, estque perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, *per* E, *centrum sphæræ recta* DF, *incidens in basin ABC, circulo inscriptam ad punctum* F. *Dico* F, *esse centrum basis ABC, &* DF, *perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex* E, *& F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC, FA, FB, FC: quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt: erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED: Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium.* a *Igitur anguli AED, CED, æquales erunt: Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt,* b *eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF duobus rectis æquentur. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales:* c *Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales:* d *erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.*



a 8. primi.

b 13. pri.

c 4. pri.

d 9. ter.

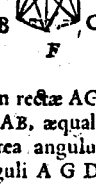
QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, *centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta* DE, *per centrum ducta, & in centrum circuli* F, *cadens perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri* ABC. *Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum* F, *quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.*

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Ductus enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet à centro ad superficiem sphæræ:



a quoniam quadratum diametri sphæræ duplũ est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1 quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cum ergo quadratum rectæ AC, æquale sit quadrato rectæ BG: erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG: *b* Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli A G D, BGC, CGD, recti. *c* Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ AC, BD, sese secantes in G, in vno existent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ACD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F: quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG: *f* Ac propterea angulus, AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nemp.

a 14. tertij dec.
b 48 pri.
c 14. pri.
d 2. undecimi.
e 7. undecimi.
f 48. pri.
g 4. undecimi.

ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo FG, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia AC,

a 14. tertij dec. est diameter sphæræ: *a* erit eius quadratum duplũ quadrati lateris AD: Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. *b* Quare angulus ADC, rectus est; Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est: quod cum sit descriptum ex latere Octaedri AB: *c* constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

b 48. pri.

c 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

o. xvij.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrũ eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

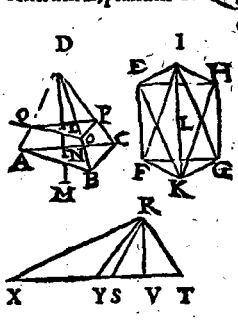
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrũ in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum ABCD, & Octaedrum EFGHIK. in vna eademque sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ DM, incidens in basin ABC, ad punctum N. *d* Erit igitur N centrum basis ABC, & DN, perpendicu-

d 15. quarti dec.

laris

laris ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphæræ, & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC: *a* Eruntque rectæ QO, OP, PQ, Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, *b* cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 5. Igitur & QOP, æquiangulum erit: Ac popterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoq; simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. *c* Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est D, L) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, *d* cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib 8. Rursus *e* quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP. vt 64. ad 36, vt in ijsdem numeris constat.



a 16. undecimi.

b 10. undecimi.

c 17. undecimi.

d 8. duodecimi.

e 20. sexti.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: *f* demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. *f* Eritque latus RT, hoc est DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

f 12. quartidecimi.

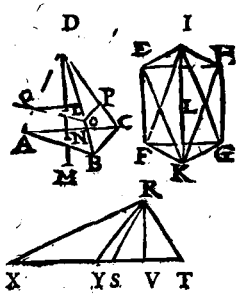
Rursus extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP; erat. vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est

seſquitertia)ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris DC,) & ſub recta TY, (quę continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

a 1. ſexti. b 41. pri. c 7. quinti.

CVM enim ductis rectis RX, RY, *a* triangulum RTX, duplum ſit trianguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: *b* Eſt autem & rectangulũ ſub RV, TY, duplũ eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX. æquale rectangulo ſub RV, TY: *c* Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum, RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum RST: *d* Eſt autem triangulum RTX. ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis *ABCD*, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis *ABCD*, ad pyramidem QOPD: *e* At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK, (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoque erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphærę ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: *e* Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea per eá quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5 oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrum EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis ſeu tetraedrum ABCD,

d 1. ſexti.



e 16. quarti decimi.

ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonstrandum.

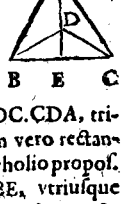
SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4 fuit, qualium 3. DP: continebit DP, seu illi aequalis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a eâ recta RT sit potentia sesquitertia rectæ RV: 12. quarti dec. *erit RV, potentia subsesquitertia ipsius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia TY fuit talium partium 32, qualium 27. ST, seu DP: (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque Tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum sub RV, qua potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

PROBL. 18. PROPOS. 18. o. xvii.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bifariã diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum lateribus DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) sit autem & basis AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC. CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BDC, dupla sit basis BE, vtriusque rectanguli; Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: *b* Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE: Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.



b 1. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliqua rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2, continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR 19. PROPOS. 19.

o. xvij. SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis dimittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10 huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumfribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; a quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. b Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli trianguli ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c cum quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. tertij dec.

b 12. tertij dec.

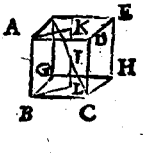
c 47. pri.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

4. xviij. DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquã basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

IT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum

I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. *a* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.



a *tertij dec.*

PRODVCTA autem KL, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, *b* quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, *c* quæ parallelæ quoq; erunt inter se; Ac propterea parallelogrammũ erit ABLK, atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perpẽdicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. prop. 15. l. 13. ostendimus; Ac propterea cum KK, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b *6. vndecimi.*

c *16. vndecimi.*

COROLLARIVM I.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. *d* Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: *e* Perspicuum autem est solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

d *15. tertij dec.*

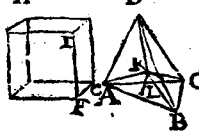
e *31. vndecimi.*

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro

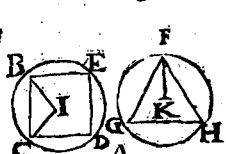
centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basin ductæ in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD. solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia pars superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, qua æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Na ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter à centro distabunt. per lemma 2. propositionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K. centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam uero prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 6. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum: Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.



THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphęræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc est, circulos BGDE, FGH, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint enim rectæ ex centris IB, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, eum subtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IG.



a 15. *tertii dec.*

b 47. *pri.*

Quare

Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI,) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus a quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG: b & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ t qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI: æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK: Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 24. tertii dec
b 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

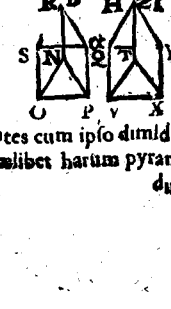
HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. c qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

c 21. quinti dec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI Octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

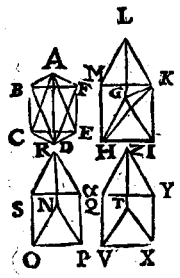
IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarũ latus communis est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD: in BDFA: cuius basis BDF: in CDEA, cuius basis CDE: & in DEFA: cuius basis DEF: quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum



dum coſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoiam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtunt, *a* inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cõſtituantur ſuper GHI, baſin tetraedri priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. *b* Quoniam igitur GHI, hoc eſt TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri; Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio prop. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perqendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perperpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 5. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum latetis tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

a 8. pri.

b 14. quarti elem.



COROL-

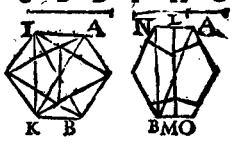
COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri, ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram. a 18. tertii dec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & majus ejus segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum: Erit majus segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri ejus sphæræ, cujus recta linea proposita diameter existit.

POSSIT *recta* AB, *rectam* CD, *& ejus segmentum majus* CE; *Item rectam* FG; *& ejus segmentum minus* HG. *Dico* CE, *esse latus* Icosaedri, *&* HG, *latus* Dodecaedri, *ejus sphæra, cujus* AB, *diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cujus diameter* AB, *descriptum* Icosaedrum AIBK, *&* Dodecaedrum ANBOQ. *Latera deinde Icosaedri opposita* AI, BK, *connectantur recta* IB, *quæ subtendet unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, ut constat ex propos.* 16. *lib.* 13.



(*Nam in ea figura, ducta recta* ZF, *erit* RSHZF, *pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia* GR, GS, GH, GZ, GF, *cadentia in superficiem sphæræ, in quo recta* RH, *latera opposita* RX, HI, *conjungens angulum* RSH, *subtendit (clariusq́, patebit ex constructione Icosaedri, quam ad finem lib.* 16. *ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero* AI, BK, *latera opposita parallela sunt, per coroll.* 3. *propos.* 16. *lib.* 13. b *erunt anguli* AIB, IBK, *æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales.* (*Ducta enim alia diametro* IK; *cum latera* AI, IB, *trianguli* AIB, *æqualia sint lateribus* KB, BI; *& bases quoque* AB, IK *æquales*; c *Erunt anguli* AIB, IBK, *æquales*) *recti erunt*; d *ideoque quadratum rectæ propositæ* AB, *æquale erit quadratis rectarum* AI, IB; *Erat autem idem quadratum rectæ* AB, *æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum* CD, CE: *Igitur quadrata rectarum* IB, IA, *æqualia sunt quadratis rectarum* CD, CE; *Ac propte-*

b 29. primi
c 8. pri.
d 47. pri.

pterea cum CE, *sit majus segmentum ipsius* CD, *divisæ extremâ ac mediâ ratione*: *Item* IA, *majus segmentum ipsius* IB, *similiter divisæ*; (*Nam* IB, *subtendit angulum pentagoni, cujus latus est* IA, *latus Icosaedri.* *Constat autem, rectâ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, à majus segmentum esse æquale lateri ejusdem pentagoni*) *æquale erit* CE, *majus segmentum ipsi* IA, *lateri Icosaedri.* b *Cum enim sit ut* CD, *ad* CE, *ita* IB, *ad* IA; c *erit quoque ut quadratum rectæ* CD, *ad quadratum rectæ* CE, *ita quadratum rectæ* IB, *ad quadratum rectæ* IA: *Ac componendo, ut quadrata rectarum* CD, CE, *ad quadratum rectæ* CE, *ita quadrata rectarum* IB, IA *ad quadratum rectæ* IA: *Ostensa sunt autem quadratis rectarum* CD, CE, *æqualia quadrata rectarum* IB, IA; d *Igitur & quadrato rectæ* CE, *æquale est quadratum rectæ* IA; *ideoq; recta* CE, IA, *æquales sunt. Quod est propositum.*

a 8. tertii decimi.
b 2. quartidecimi.
c 22. sexti

d 14. quinti.

RVRSVS *latera Dodecaedri opposita* AN, BO, *secentur bifariam in* L, & M, *punctis, quæ recta* LM, & *ipsa latera recta* NB, *conjungantur. Quoniam igitur* NL, BM, *æquales parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13.* e *erunt quoque* LM, NB, *æquales & parallelæ*: *Est autem recta* LM, *secans latera oppositæ bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit,* f *Ac proinde quadratum rectæ propositæ* AB, *æquale erit quadratis rectarum* NB, NA: *Quare cum idem quadratum rectæ* AB, *æquale sit positum quadratis rectarum* FG, HG, *æqualia erunt quadrata rectarum* NB, NA, *quadratis rectarum* FG, HG. *Ac propterea, cum* HG, *sit minus segmentum ipsius* FG, *sectæ extrema ac media ratione: Item* NA, *minus segmentum ipsius* NB, *hoc est, ipsius* LM, *similiter divisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit* HG, *minus segmentum ipsi* NA, *lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstravimus,* CE, *majus segmentum æquale esse ipsi* IA, *lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & majus ejus segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum: Erit majus segmentum prioris lineæ latus Icosaedri: minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri ejus sphæræ, cujus recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.*

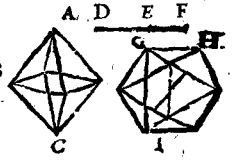
c 33. pri.
f 47. pri.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit majus & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & majus segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cujus latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cujus unum angulum subtendit recta GI; *a* erit GH, majus segmentum ipsius GI, divisæ extrema ac media ratione: *b* Ac proinde composita recta ex GI, GH; secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; *Et* unt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: *d* Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cum sit ut GI, ad GH, ita DE, ad EF. *f* Erit quoque ut quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit majus, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



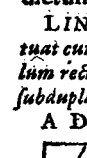
a *8. tertii dec.*
b *5. tertii dec.*
c *47. pri.*
d *14. tertii dec.*
e *2. quartidecimi.*
f *22. sexti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea divisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat; cui recta subten-

tendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri ejus sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA *recta* AB, *secta in* C, *extrema ac media ratione constituat cum recta* AD, *quæ æqualis sit minori segmento* AC, *angulum rectum* A, *cui recta subtendatur* BD, *sitque recta* E, *potentia subdupla ipsius* BD. *Dico* E, *latus esse octaedri illius sphæræ, in qua* AD, *vel* AC, *latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. majus segmentum* BC, *latus sit cubi illius sphæræ, cujus minus segmentum* AC, *vel* AD, *latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla majoris segmenti* BC, *nempe lateris cubi:* a *Sunt autem & quadrata rectarum* AB, AD, *nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla ejusdem quadrati majoris segmenti* BC. *Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum* AB, AD, *hoc est, quadrato rectæ* BD; *Ac proinde recta* BD, *diameter est sphæræ:* b *Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta* BD, *duplum rectæ* E, *quod recta* E, *ponatur potentia subdupla ipsius* BD: *Erit* E, *latus Octaedri ejusdem sphæræ, cujus* AD, *latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea divisa, &c. Quod erat demonstrandum.*



a 4. *tertii dec.*

b 14. *tertii dec.*

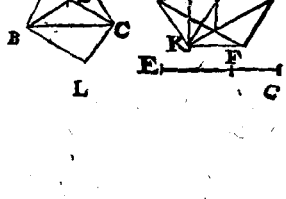
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cujus majus segmentum est AD, latus Dodecaedri, ut constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit majus segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione divisæ: Perspicuum est, si linea quævis recta (nimirum BC) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E, potentia hujus sesquialtera sit latus Octaedri, majus segmentum (nimirum AD) esse latus Dodecaedri ejusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. *tertii dec.*

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit majus & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ, latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT *Tetraedri* ABCD, *latus* BC, *majus segmentum* EF, *& minus* FG, *recta* EG, *divisa extrema ac media ratione: Sit quoq; H I, latus Icosaedri* HIK, *ejusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse*

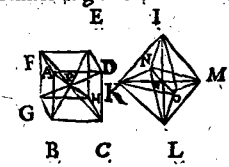
esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim rectam HK, unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, conuectatur quæ recta IK, diameter. a Quia igitur HI, est majus segmentum rectæ HK, divisæ extrema ac media ratione: b Erit quod componsita KHI, divisæ eodem modo in H. majusque segmentum HK, & minus HI. c Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCK, ita ut BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis, d Erit quoque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, ut propos. 23 hujus lib. ostendimus: Estque ut BL, ad LC, ita KH, ad HI. f Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt. g Ac propterea, ut KI, ad IH, ita BC, ad CL: & permutando, ut KI, ad BC, ita HI, ad CL. h Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FH. Si latus itaque Tetraedri possit majus, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. tertii dec.
b 5. tertii dec.
c 22. pri.
d 48. pri.
e 2. quartidecimi.
f 6. sexti.
g 4. sexti.
h 13. tertii dec.

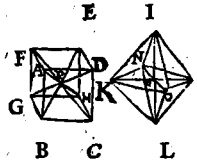
THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri: nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resolvetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. i Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum: æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad ba-



i 21. quartidecimi.

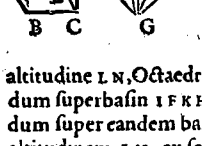


sin pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstravimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basin pyramidis Octaedri; Ideoque rursus ex eodem scholio, ut cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus ABCD, & octaedrum EFGHIK, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex semidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. hujus lib. *a* sesquialterum est quadrati ED, lateris cubi BC: Est autem & recta AB, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines AB, BM: *b* Ac propterea parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basin BD, & sub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rursus quia recta EL rectæ EN tripla est; erit & parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine EL, triplum parallelepipedi super eandem basin, & sub altitudine EN, ut in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo super basin IFKH, & sub altitudine EN: Atqui hujus parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla sit altitudinis EN. *c* Item Octaedrum EFGHIK, duplum est pyramidis IFKHE. Æquale igitur erit parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum, quia parallelepipedum super basin IFKH, & sub altitudine BM, est ad parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN, ut altitudo BM, ad altitudinem LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita est AB, ad EL. (Cum enim sit ut AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, ut AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, ut AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum super

a 18. *tertii dec.*

b 34. *unde cimi.*

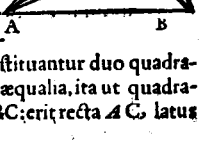


c 16. *quartidecimi.*

super basin IEKH, & sub altitudine BM, æquale est ostensū cubo ABCD; 3t parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine LN, æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque ut cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipsa sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD demonstratum est, *a* diametrum sphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus hujusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; majoris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cujus quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB: Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita ut quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri.



a 13. tertii dec.

RVRSVS *b* cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri: Fit, si ex quadrato diametri AB, detur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AC: Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis secundum doctrinam scholii propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri.

b 14. tertii dec.

DEINDE, *c* quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi: Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB: Vel si quadrato diametri AB, construantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita ut quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, juxta doctrinam ejusdem scholii prop 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratū lateris cubi BC: Quema-

c 14. tertii dec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & majus ipsius segmentum: a Majus segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cujus diameter est recta prior linea: Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, juxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quævis extrema ac media ratione divisæ ad majus segmentum: Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam divisam extremâ ac media ratione, & minus illius segmentum: b Minus segmentum latus est Dodecaedri ejus sphæræ, cujus diameter prior linea; Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione divisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.

b 23. quartidecimi.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adjiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

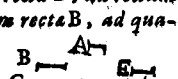
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT *quatuor rectæ* A, B, C, D, *continuè proportionales, nec non quatuor* A, E, F, G, *ita ut* A, *recta antecedens sit omnium. Dico proportionem* C, *ad* F, *tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis* B, *ad* E, *secundæ ad secundam, & proportionem* D, *ad* G, *quartæ ad quartam esse triplicatam ejusdem proportionis* B, *ad* E, *secundæ ad secundam. Cum enim recta* C, *ad rectam* A, *ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* B, *ad rectam* A: c *habeat autem & quadratum rectæ* B, *ad quadratum rectæ* A, *du-*

c 20. sexti.

duplicatam proportionem ejusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et convertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E: ut recta C, ad rectam F: a



quadr.	B,	Recta	C,	
quadr.	A.	Recta	A.	a 20. sexti
quadr.	E,	Recta	F,	

Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: b habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam b 33. undec proportionem ejusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit, ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A:

Cubus	B.	Recta	D,	
Cubus	A.	Recta	A.	
Cubus	E,	Recta	G.	

Et convertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, ut recta D, ad rectam A: & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, c 33. undec ad cubum rectæ E, ut recta D, ad rectam G; c Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idem demonstravimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-

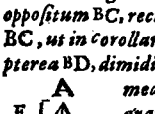
portionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero ABC, *ducatur ex angulo* A, *ad latus oppositum* BC, *recta perpendicularis* AD, *quæ bifariam secabit latus* BC, *ut in corollar. propos.* 12. *hujus lib. demonstratum est; Ac propterea* BD, *dimidium est est lateris* AB. a *Inveniatur ergo recta* E, *media proportionalis inter* AD, & BD. *Dico quadratum lateris* AB, *ad triangulum* ABC, *habere proportionem duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E. *Cum enim rectangulo sub* AD, BD, *æquale sit triangulum* ABC, *ut perspicuum est ex scholio propos* 41. *lib.* 1. b *Sit autem eidem rectangulo sub* AB, BD, *æquale quadratum rectæ* E: *Æqualia erunt triangulum* ABC, & *quadratum rectæ* E. c *Quoniam vero quadratum lateris* AB, *ad quadratum rectæ* E, *proportionem habet duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E: *Constat, quadratum lateris* AB, *ad triangulum* ABC, *proportionem habere quoque duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E. *Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 13. *sexti.*

b 17. *sexti.*

c 20. *sexti*



COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo ABC.

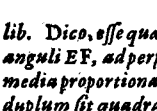
THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cujusvis ABCD, & *Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum* EFG, *in quo perpendicularis* EH, *ex angulo* E, *ad latus oppositum* FG, *deducta dividens* FG, *latus bifariam, ex coroll propos.* 12. *hujus lib.* Dico, *esse quadratum* AC, *ad triangulum* EFG, *ut latus trianguli* EF, *ad perpendicularem* EH. *Posita enim inter* EH, FH, *media proportionali* IK. d *cum quadratum lateris Tetraedri* EF, *duplum sit quadrati lateris cubi* AB: e *sit autem & duplum rectanguli sub latere* EF, & *dimidio ejus* FG, *eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe* EF: *Eris rectan-*

d 28. *tertii dec.*

e 1. *sexti.*



& angulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; a *Ac propterea* AB, *media proportionalis erit inter* EF, FH, *hoc est, tres rectæ* FH, AB, EF, *continuè erunt proportionales : Sunt autem & tres rectæ* FH, IK, EH, *continuè proportionales, ex constructione.* Igitur *cum omnium antecedens sit* FH, b *erit proportio rectæ* EF, *ad rectam* EH, *tertia ad tertiam, proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK, *secundæ ad secundam duplicatæ. Quare cum & quadratum* AC, *rectæ* AB, *ad quadratum rectæ* IK, *hoc est, ad triangulum* EFG (*est enim ex coroll. propos. 29. hujus lib. quadratum rectæ* IK, *æquale triangulo* EFG) c *proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK; *Erit quadratum cubi* AC, *ad triangulum Tetraedri* EFG, *ut latus* EF, *ad perpendicularem* EH. *Quocirca si cubus Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 17. *sexti.*

b 28. *quartidecimi.*

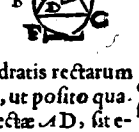
F H.
AB. IK.
EF. EH.

c 20. *sexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius : Axis vero, sive altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusq; cubi ejusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: *Axem* vero DE, potentia sesquitertium, lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* descripto circulo ABC ; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis *DE*, ut constat ex propos. 15. hujus lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris *AE*, hoc est, lateris *AB* ; *e* æquale est quadratis rectarum AD, DE, *f* & triplum quadrati semidiametri AD; Fit, ut posito quadrato lateris *AB*, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4 Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.



d 5. *quarti*

e 47. *prim.*

f 12. *tertiidec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, *g* potentia duplum est lateris cubi F; *Erit* quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis *DE*, sesquitertium est quadrati lateris cubi *F*. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

g 18. *tertii dec.*

CO-

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6, quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. a quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Eorundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, b cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio duplæ sesquiquartæ, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13. tertii decimi.

b 20. sexti

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eædem sphæræ inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet, c tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

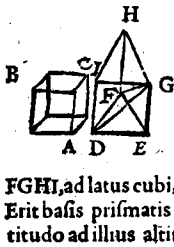
c 12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CUBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. d Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quovis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. hujus libr. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi seu prismatis ABC: Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, ut hujus altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos 9. libr. 12. demonstravimus, æqualia erunt prismata ABC. DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propos. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit ejusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

d 30. quartidecimi.



COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTUM QVINTVM DECIMUM.

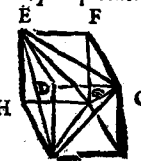
ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, *oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab uno ejus angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri* EA, EG, EC, *ex quarum extremitatibus* A, G, C, *similiter diametri ducantur* AG, GC, CA, *in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potentia dupla sint laterum æqualium quadratorum, ut in scholio propos. 47. lib. 1. demonstravimus, perspicuum est, quatuor triangula* ACE, GAC, GAE, GCE, *ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia: Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constituere ex ipsis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.*



PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

ij. IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro A B C D, *describendum octaedrum. Divisis omnibus lateribus bifariam in* B, F, G, H, I, K, *& ductis duodecim rectis* EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, *constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor* EHI, IHK, KHG, GHE, *supra planum* EIKG; *quatuor autem* IFE, EFG, HFK, KFI, *infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera* AE, AH, *trianguli* AEH, *æqualia sunt lateribus* AG, AH, *trianguli* AGH, *quod sint dimidia rectarum æqualium* AB, AD, AC; *Item & anguli contenti* EAH, GAH, *æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum* ABD, ACD: a *æquales erunt bases* EH, GH. *Eademque ratione æquales erunt rectæ* EH, HI, *& reliquæ eadem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt & æqualia inter se; ideoq; octaedrum componunt* EIKGHF; *quod quidem ex defin.* 31. *lib.* 11. *intra tetraedrum descriptum est, cum omnes ejus anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.*

a 8. *duodec.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, ac se mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14 lib. 13. demonstravimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam dividit in pyramidem HIKD, & prisma EIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF; FKHE, dividunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus quæ octaedrum bifariam quoque, & se ad angulos rectos intersecant.

b 5. *duodec.*

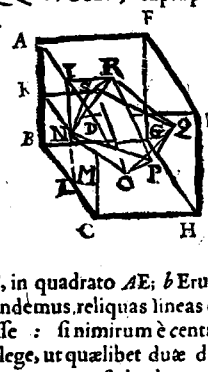
iij.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Dividantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus se in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, ut constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inveniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cujusmodi sunt NI, RI, NL, SK &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum

cuum est ex prædicta demonstratione propos. 2. lib. 4. Postremo si præfata centra conjungantur duodecim rectis NO, OP. PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis TA, AF; a angulus NIR, æqualis est recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque



ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse: si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duę rectæ, NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC. AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se: ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11, intra cubum est descriptum, cum omnes ejus sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

a 10. *undes*

b 29. *primi*

ALITER. c In cubo dato inscribatur pyramis: d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 2. hujus lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera verò pyramidis ex demonstratione propos. 1. hujus lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri: perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

c 1. *quinti dec.*

d 2. *quinti dec.*

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO (si ducentur) se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ

quæ quidem conjungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, ut docuimus coroll. 1. propos. 25. libr. 11. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, dividere.

14. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit $ABCDEF$, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit una earum pyramis $ABCDE$, cujus basis $ABCD$, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CFD, DEA: sintque horum triangulorum centra G H I K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC: CED, DEA, ex coroll. propos. 4. libr. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; & EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conveniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, ut mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. [a] Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP. [b] Est autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; & erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, convenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent $LMNO$. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, [c] non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum $ABCD$, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam [d] planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano $ABCD$, [e] ipsa, cum conveniant in punctis, M & O, unum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca $LMNO$, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO,

a 18. *quarti decimi.*
b 2. *sex.*
c 10. *undec.*
d 15. *undec.*
e 15. *undec.*

EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib. 13. a Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, b æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos (c cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis conjungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex hujusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo ejus anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. pri.

b 4. pri.

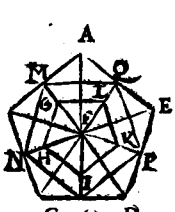
c 13. primi

V.

vi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases, sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, una pyramis ABCDEF, cujus basis pentagonum ABGDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, EP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. libr. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q: ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, d æquales quoque erunt rectæ MN, NO, O

d 4. pri.

a 8. pri. PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes: *a* Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, continentque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; *c* Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. *d* Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONG, æquales sunt duobus rectis. *e* Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Denique cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG FH, FI, FK, FL, duplæ sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propos. 18. lib. 14. *f* parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM; *g* Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter se æquales erunt. *h* Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conveniuntque in recta HI, ipsa unum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula; quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim hujusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti

c 4. primi. d 13. pri.

e 4. primi.

f 12. sext. g 10. undec h 25. undec

basi-

basium Icosaedri, consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

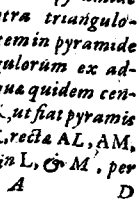
COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales: (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentium, atq; adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri: æquales erunt inter se, ex lem. 2. ejusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS *describenda sit in Octaedro* ABCDEF. *In pyramide octaedri superiori* ABCDE, *sumantur* G, *&* H, *centra trianguloru ex adverso sibi respondentium* AED, BEC; *Item in pyramide inferiori* ABCDF, *capiantur* I, *&* K, *centra triangulorum ex adverso quoque sibi correspondentium* CFD, AFB, *quæ quidem centra conjungantur sex rectis* GH, GI, GK, HI, HK, IK, *ut fiat pyramis* HIKG. *Deinde ex* A, *demittantur per centra* G, K, *recta* AL, AM, *secantes latera opposita octaedri* DE, BF, *bifariam in* L, *&* M, *per scholium propos.* 12. *lib.* 3. *conjungaturque recta* LM, *a qua ipsi* BE, *vel* FD, *æqualis & parallela erit: cum* EL, BM; *Item* DL, FM, *rectæ æquales sint & parallelæ, nimirum dimidia laterum* DE, EF, *oppositorum in quadrato* EF. *Quoniam vero rectæ* AL, AM, *sectæ sunt proportionaliter in* G, *&* K, *punctis, quod* AG, AK, *duplæ sint ipsarum* GL, KM, *ex coroll propos.* 18. *lib.* 14. b *Erunt* GK, LM, *parallelæ*; Ac *propterea, per coroll. propos.* 4. *lib.* 6. *triangula* ALM, AGK, *similia.* c *Quare erit ut* AL, *ad* LM, *ita* AG, *ad* GK; *& permutando, ut* AL, *ad* AG, *ita* LM, *ad* GK. *Est autem* AL, *ipsius* AG, *sesquialtera*; d *quod* GL, *sit tertia pars ipsius* AL, *ideoq;* AG, *ejusdem* AL, *dua tertiæ. Igitur &* LM, *hoc est, ipsi æqualis* DF, *sesquialtera erit ipsius* GK. *Hac eadem arte ostendemus & reliquarum linearum centra* G, H, I, K, *conjungentiũ sesquialtera esse latera octaedri*; Ac *proinde rectas pyramidem* HIKG, *componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq;* Tetraedrum *constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin.* 31. *lib.* 11. *in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.*



a 33. *primi.*

b 2. *sexti.*

c 4. *sexti.*

d 18. *quartidecimi.*

c 4. *quartidecimi.*

f 1. *quintidec.*

ALITER. c *In octaedro dato inscribatur cubus*, f *& in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri, & in angulis cubi collo-*

collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, utramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM, ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: Atque eadem ratione KH, ipsius FC; EA, parallelum esse: Atque id circo, planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, nec non & plano BLA, per BE, EA. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis: eliquis triangulis octaedri esse parallela; binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas videlicet binis oppositis.

a 9. *undec.* b 15. *undec.*

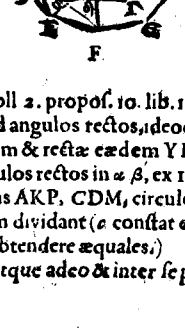
COROLLARIVM. II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumscribat & cubum & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & hujus anguli in centris basium octaedri constituantur: Atque adeo recta conjungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. hujus libr. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum conjungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deducta.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

O. vij.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quæ libet duo proxima rectis jungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll 2. propos. 10. lib. 13. bifariam divident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, convenient: Dividunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. ejusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam dividant (c constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) d Igitur A α, C β, parallelæ sunt rectæ BY, e atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimi-

c 28. *tertii.* d 28. *pri.* e 9. *undec.*

dimidia rectarum *AP*, *CM*, *a* quæ æquales sunt, cum latera *KA*, *KP*, lateribus *DC*, *DM*, æqualia sint, angulosque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes *AC*, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis *B*, *F*, quos subtendant rectæ *CL*, *EN*, per centra *R*, *S*, rectæ ducantur *BZ*, *FZ*, connectanturque rectæ *CE*, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas *CE*. $\gamma\delta$: *c* Sunt autem *AC*, *CE*, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri *AB*, *BC*, quam *CD*, *DE*, angulum pentagoni æquianguli continent, ut constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus *X*, ut figura monstrare videtur, sed extrorsum, ut ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & $\alpha\beta, \gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ $Y\alpha, Y\beta, Z\gamma, Z\delta$, æquales sint (Nam *YQ*, *YR*, *ZR*, *YS*, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum *BL*, *DM*, à centris *Q*, *R*, *S*, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* atque adeo æquales. Item $Q\alpha, R\beta, R\gamma, S\delta$, distantiæ sunt rectarum æqualium *AP*, *CM*, *CL*, *EN*, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales: *Ac* proinde & totæ $Y\alpha, Y\beta, Z\gamma, Y\delta$, æquales erunt.) *f* Erunt quoque anguli $\alpha Y\beta, \gamma Z\delta$, æquales: Ac propterea, cum & rectæ *YQ*, *YR*, *ZR*, *ZS*, æquales sint; *g* æquales quoque erunt rectæ *QR*, *RS*, centra *Q*, *R*, *S*, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula *QXR*, *RXS*, *SXT*, *TXV*, *VXQ*, sub quinque angulis solidis Dodecaedri, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

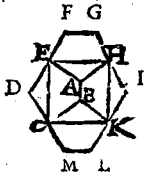
a 4. *primi.*
b 33. *primi.*
c 4. *primi.*
d 14. *tertii.*
e 14 *tertii.*
f 8. *primi.*
g 4. *primi.*

PROBL. 8. PROPOS. 8. o. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, *convenientia ad latus* AB: *duo quidem* ABCDE, ABKIH, *secundum latus idem commune* AB: *alia autem duo* AEFGH, BCMLK, *secundum angulos* EAH, CBK. *In his vero pentagonis subtendantur anguli* A, B, D, *l, recta* EH, CK, CE, HK, *quadrilaterum*

rum efficientes EHKC, *quod aquilaterum erit. Cum enim omnia latera* AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, *aqualia sint, angulos q̃ contineant aquales, ex hypothesi:* a *aquales erunt bases* EH, HK, KC, CE. b *Quoniam igitur recta* AE, BC, *aquales. auferunt ex circulo pentagonum* ABCDE, *circumscribente arcus aquales;* E*runt ex scholio propos. 27. lib. 3. recta* AB, CE, *parallela. Eadem q̃ ratione parallela erunt* AB, HK. c *Quare &* EC, HK, *inter se parallela erunt:* d *Ac propterea recta* EH, CK, *qua ipsas connectunt:*



parallela erunt, e in eodem q̃ cum ipsis plano: idcirco parallelogrammum erit EHKC, *quod ostendimus esse aquilaterum. Quia vero planum* EC, KH, *productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propositionis 10. lib. 14. circa quadrilaterum* EK, *descriptum:* f *Erunt tam anguli opposiți* E, K, *quam* C, H, *duobus rectis aquales;* g *Ac propterea cum oppositi* E, & K, *sint aquales, nec non & oppositi* C, & H: *erunt omnes quatuor anguli* E, C, K, H, *recti. Quare* EK, *quadratum erit; collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulus octo alia recta subtendantur eodem ordine: constitutum erit solidum sex quadratis* h *contentum: qua cum sint aqualia, h eo quod eorum latera aquales angulos pentagonorum aqualibus rectis comprehensos subtendentia aqualia sint, cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim ejus latera jacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, ejus q̃ octo anguli in octo Dodecaedri angulis residunt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.*

a 4. pri.
b 28. tert.
c 9. undecimi.
d 33. primi
c 7. undec.
f 22. tertii.
g 34. pri.
h 4. pri.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CB, ipsi AB, esse parallelam.

o. jx.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse dixiusus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, qua bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Recta igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum conjungentes aquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæra bifariam, & angulos rectos dividens, per coroll. 3. propos.

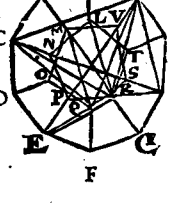
pos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiata partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a *Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos* NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, *quales sunt* NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, *æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur*; Ac *proinde octo triangula* NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, OSQ, QSO, *æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.*

a 4. pri.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato dodecaedro pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT: MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, sive tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, Lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; *b* quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis ejus sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib 14. *c* Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. *d* Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,

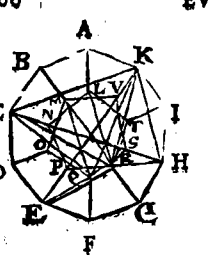


a 10. x.

b 17. tertii dec.

c 31. tertii.

d 47. pri.



& quadratis rectarum K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium K H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H, (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehensos, a æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, C R, R K, K Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C K R, C K Q, K R Q, R C Q, æquilatera sunt & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C K R Q: quod cum habeat quatuor angulos c, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. pri.

b 8. quinti decimi.

ALITER. b In proposito Dodecaedro cubus describatur: c & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant: perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

c 1. quinti decimi.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d DESCRIBATVR *in dato Icosaedro Dodecaedrum*: e *& in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri: anguli vero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur: tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri;* Ac propterea *cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus, Quod faciendum erat.*

d 5. quinti decimi.

e 8. quinti decimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

f *IN dato Icosaedro f cubus describatur,* g *& in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur.* h *Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam.* i *In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.*

f 11. quinti decimi.

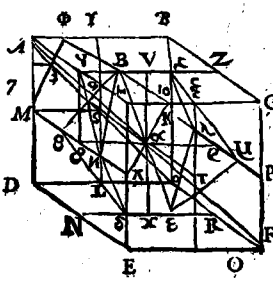
g 1. quinti decimi.

h 11. quinti decimi.

i 11. quinti

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.
IN dato cubo Dodecaedrum describere.

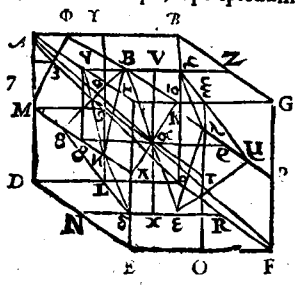


Ducatur in figura recta HaC

SIT in cubo proposito AF describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, conjunctis rectis IL, YZ, ξ O, Mπ, KP, NR, nusquam inter se coeuntibus, ita ut ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed una duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in Ş, V, T, ρ, Q, X, cõnexis rectis ST, VX, ęQ, quæ se mutuo in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. hujus lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, ut sint majora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yρ Yκ, βθ βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, βV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla ejusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale sit quadratum rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. [e] Ac propterea quadratum rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Xβ (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cũ quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ,) [f] Ideoque [f] cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectæ Y6. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet; Est autem & θκ, dupla ipsius ρκ, quod minora segmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia sint. [g] Erit igitur ut Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ, ad θκ, duplam ipsius ρκ; Est autem Y6, majus segmentum ad ρκ, rectam minori segmento βV, æqualem, ut tota ad majus segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit ut tota ad majus segmentum; Ac proinde θκ, erit majus segmentum rectæ βκ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus θκ, majus esse segmentum rectæ βθ, extrema ac media ratione sectæ, si

[a] 4. tertii dec.
[b] 47. pri.
[c] 29. pri.
[d] 4. undec.
[e] 47. pri.
[f] 20 sex.
[g] 15 quinti.

nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt βθ, βκ, constituentes triangulum Isosceles βθκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus: Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumscribente descripti, ut perspicuum est ex 11 propos. lib 4.



INTELLIGATVR jam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipsi Mπ, parallela,) per parallelas M, φ 10. ut sit planum extensum φπ, occurrens diametro AB, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque MS, a quæ parallela est utrique Aφ, 73.

a 33. primi.

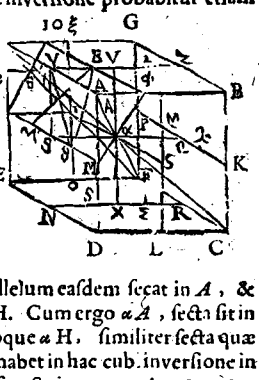
Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; b ac proinde ut AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autē AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A.7 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA, ad Aφ, ita M7, ad 73. Est autem Aφ, majus segmentum rectæ MA, divisæ extrema ac media ratione (c quod æquales sint Aφ, Yβ, nec non & MA, YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73, hoc est 7A, majus segmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, divisa erit extrema ac media ratione in 7. majusq; segmentum erit M7. e Atqui ut M7 ad 7.A, ita est S.3. ad 3.A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. majusque segmentum est S.3.f Quia vero Sκ T, parallela est ipsi Mπ: quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS: si per SκT, planum ducatur parallelum plano φπ, ducto per Mπ, g secabuntur rectæ AS, Aκ, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cum planum φπ, rectas AS, Aκ, secet in 3. & 4. at planum per SκT, ductum plano φπ, parallelum easdem secet in S, & κ. Atque idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aκ, semidiameter cubi, in 4. majusque segmentum erit κ4.

a 33. primi.
b 4 sex.
a 34. pri.
d 5. tertii decimi.
e 2. sexti.
f 33. primi.
g 17. undec

IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φπ, ut perspicuum est, si cubus invertatur, ut in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ licet bases cubi sedes mutaverint, i ta ut quadratum AC, locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura.

Quod

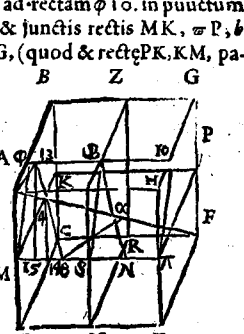
Quod tamen in prima figura, ſine hac inverſione probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi H-C, in ea figura: (Hæc deeſt in figura quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum $\phi\pi$, ſecet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano $\phi\pi$, parallelum. Quoniam igitur rectæ A α, H α, in centro α, conveniunt, ſecanturq; planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9; (Nam planum $\phi\pi$, eas ſecat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano $\phi\pi$, parallelum eaſdem ſecat in A, & H) a erit ut α 4, ad 4 A, ita α 9. ad 9 H. Cum ergo α A, ſecta ſit in 4. extrema & media ratione, erit quoque α H. ſimiliter ſecta quæ a quidem demonſtratio locum etiam habet in hac cub. inverſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectę jungantur θ 4, β 4, β 9, $\varkappa$ 9, rectilineum β 4, $\theta\varkappa$ 9, in plano $\phi\pi$, exiſtens, pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulum.



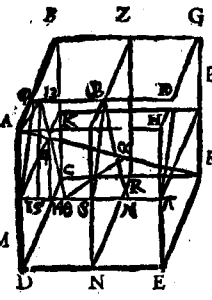
15. undec

INVERTATVR rurſum cubus, ut quadrata ADEH, ABGH, quę nimirum continennt triangulum $\beta,\theta,\varkappa$, ſive plauum $\phi\pi$, hunc ſitum habeant, quem mõſtrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi\pi$, recta conjuncta θ 4. extendatur uſque ad rectam ϕ 10. in puuctum 13. Quoniam igitur ducta recta K P, & junctis rectis M K, ϖ P, b planum M P, parallelum eſt plano A G, (quod & rectę P K, K M, parallelę ſint rectis G B, B A) c ſecatque cubum bifariam: ideoque per centrum α, tranſit, per ea quę in ſcholio propoſ. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt: ſi per rectas α 4 A, θ 4. 13. planum extendatur, d fient $\alpha\theta$, A 13. communes ſectiones planorum MP, AG, parallelę: Ac proinde triangula $\alpha\theta$ 4. 1. α 34. æquiangula erunt: e Eritque ut α 4. M ad 4. A, ita θ 4. ad 4 13. Quare cum α A, in 4, ſecta ſit extrema ac media ratione, ut oſtendimus: eodem modo erit ſecta θ 13, in 4. Rurſus plano NZ, per centrum α, tranſeunti parallelum ducatur planum per punctum 4 ex ſchol propoſ. 15. lib. 11. ſecans $\phi\pi$, recta 4. 14. f Eſt autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectę igitur α A, ρ M, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minuſque erit ſegmentum 14 M, idcoque æquale minori $\rho\theta$, ipſius M ρ.

b *15. undec*
c *32. unde.*
d *16. und.*
e *4. ſext.*
f *15. undec.*
g *17. undec*



Qua-



a 2. sext.

b 2. quartidecimi.

Quare cum ex ρ 14. majori segmento ipsius ρ M, auferatur ρ θ, minus segmentum; Erit, ut demonstravimus ad propos. 5. lib. 13. ℓ 14. divisa in θ, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit ρ θ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, α secabuntur rectæ θ 13. θ 15. proportionaliter; Ac proinde & θ 15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, majusque segmentum erit θ 14. b Quapropter erit ut ρ θ, majus segmentum ad θ 14 minus ita θ 14. majus ad 14. 15. minus: Ut autem θ 14. ad 14. 15. ita est tota θ 15. ad θ 14. majus segmentum. Igitur erit ut ρ θ, ad θ 14. ita θ 15. ad eandem θ 14. Ac propterea rectæ ρ θ, vel ρ κ, & θ 15. æquales erunt. Quoniam vero planum N Z, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secantur plano φ π, c erunt communes sectiones β ρ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13 15. β ρ, parallelæ erunt, d angulusque externus β ρ κ, interno 13. 15. θ. æqualis. Cum igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13. 15. 15. θ, sint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ β κ, 13 θ, & 4. primi. Ac proinde & earum segmenta majora θ κ, θ 4. (Ostensum enim est θ κ, esse majus segmentum ipsius β κ) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipsi β γ, in prima figura ostenditur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basin β γ, cujus vertex consistat in puncto, quod rectam I S. dividit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem θ κ, β γ æquales erunt κ 9 ℓ 9. Æquilaterum ergo est pentagonum β 4. θ κ 9. quandoquidem β γ, θ κ, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt Y V, Z V, π ρ, M ρ. Sed & æquiangulum, ut mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas M π, Y Z, N R, I L, ξ O, K P; bina ipsi β θ κ, similia, & æqualia construantur; (ita enim ad M π, duo hujusmodi triangula vides β θ κ, δ θ κ) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β 4. θ κ 9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cujus duodecim quidem anguli in sex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O. K P, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione dividunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris A α, & H α, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo hujusmodi Dodecaedrum, quamvis non proprie, cum non omnes ejus anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo

c 16. undecimi.

d 29. primi

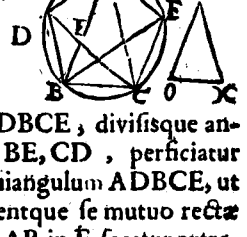
e 4. primi.

vero

vero in punctis, quę octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

LEMMA.

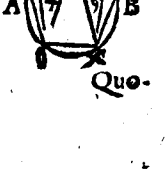
QVOD autem triangulum $\beta\theta\varkappa$, cujus basis $\theta\varkappa$, majus segmentum existat utriusque lateris $\beta\theta, \beta\varkappa$, extrema ac media ratione divisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles A B C, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, divisisque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, ut propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F. *a* Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, majusque ejus segmentum est A F, æquale lateri B C: *b* Erit ut AB, tota ad majus suum segmentum *B*C, ita $\beta\theta$, tota ad majus suum segmentum $\theta\varkappa$; Eodemque modo, ut tota AC, ad majus segmentum CB, ita $\beta\varkappa$, tota ad majus segmentum $\varkappa\theta$: Est autem quoque ut AB, ad AC, ita $\beta\theta$, ad $\beta\varkappa$, utrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur $\beta\theta\varkappa$, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item $\varkappa$, C, & β, A; propterea que uterque angulorum $\theta\varkappa$. duplus erit anguli β; & triangula $\beta\theta\varkappa$, ABC, similia.



a 3. *tertii. dec.*

b 2. *quartidecimi.*

PENTAGONVM vero β 4 $\theta\varkappa$ 9. æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum $\beta\theta\varkappa$, circulus β A $\theta\varkappa$ *B*, qui si transeat per puncta 4. & 9. perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4. & 9. Describatur in circulo dicto, juxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A $\theta\varkappa$B.



Quo-

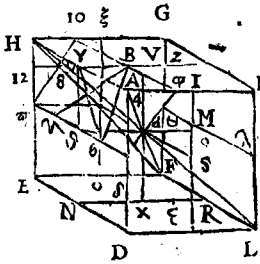
Quoniam igitur tam rectæ A θ, A ζ. quam rectæ 4 θ, 4 ζ, æquales sunt rectæ θ ϰ, cum & ζ 4 θ ϰ 9, & ζ A θ ϰ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ A, θ 4, quam duæ ζ A, 4 ζ, æquales quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo ζ θ ϰ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum ζ 4 θ ϰ 9, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



a 33. pri.
b 29. pri.
c 47. pri.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecadri β ε, intelligaturque conjuncta recta γ ε, æqualis existens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ε, æquales sint & parallelæ. Quoniam igitur angulus ζ V X, rectus est: b rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, constitutus: c Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti; Majus vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

d 15. quinti

IN eadem enim prima figura, d cum sit ut Y X, ad β V, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad β γ, duplam ipsius β V: Sit autem β V, minus segmentum ipsius Y V, sectæ extrema ac media ratione. Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Y Z, secti extrema ac media ratione: composita vero ex Y β, γ Z, hoc est, recta β ϰ (quæ dupla fuit ostensa ipsius Y β. ideoque compositæ ex Y β, γ Z, æqualis) majus segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedri e & β ϰ, seu β θ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β 9 ϰ, vel β 4 θ.

e 8. quinti dec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus; Dodecae-

caedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri $\beta\gamma$, in ipso descripti, & ex recta composita ex $Y\beta$, γZ, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim YZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. hujus lib. a Sit autem latus illius pentagoni majus segmentum lateris YZ, secti extrema ac media ratione: Erit $\beta\theta$, existens quoque majus segmentum ejusdem lateris YZ, & æqualis duabus $Y\beta$, γZ, simul, ut jam demonstravimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti. a 8. tertii. dec.

IV.

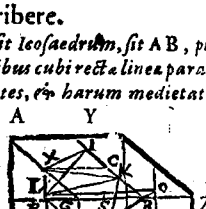
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri $\theta\varkappa$, oppositi, b æqualis est rectæ VX (quod & βV, δX, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur. b 33. pri.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, *per cujus basium centra* C, D, E, F, G, H, *lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita ut majora segmenta prope centra sint in punctis* I, K: L, M: N, O: P, Q: R, S: T, Y: *quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, ut* L, *cum* I, K, T, & R: R *cum* L, M, I, & N, *&c. ut constituantur viginti triangula* IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR: *quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo ejusdem cubi octo angulis substernuntur.* Connectantur jam rectæ XC, XI, XK. *Quoniam igitur latera* XC, CI, *trianguli* XCI, *æqualia sunt lateribus* XC, CK, *trianguli* XCK: c & *anguli contenti, recti, quod* XC, c 29. pri.



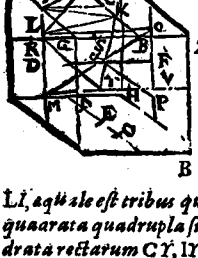
pa-

a 4. pri. *parallela sit ipsi* A Υ: a *Erunt & bases* XI, XK, *æquales. Deinde quia linea* L X, *recta est ad planum* A Z, *per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas* XI, XK, *Ac propterea, cum latera* L X, XI, *trianguli* LXI, *æqualia sint lateribus* LX, XK, *trianguli* LXK, *&*

b 4. primi. *anguli contenti, recti*; b *æquales erunt bases* LI, LK. *Rursus* c *quo-*

c 7. pri. *niam quadratum rectæ* LI; *æquale est quadratis rectarum* LX, XI; *Et quadratum rectæ* L X, *quadrato rectæ* I Υ; *quadratum vero rectæ* XI, *quadratis rectarum* XC, CI, *est æquale: Æquale erit quadratum rectæ* L I, *tribus quadratis rectarum* XC, CI, IΥ: *Sunt autem & quadrata rectarum* XC, CΥ, *æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ* LI, *æquale est tribus quadratis rectarum* CΥ, CI, IΥ: *Sed hæc tria*

d 4. tertii decimi. *quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ* C I. (d *Cum enim quadrata rectarum* CΥ, IΥ, *totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ* CI, *majoris segmenti*; *Addito quadrato rectæ* CI, *illis duobus, erunt tria quadrata rectarum* CΥ, CI, IΥ, *quadrupla ejusdem quadrati rectæ* C I) *Quadratum ergo rectæ* L I, *quadruplum est quoque quadrati rectæ* C I; *Ac propterea, cum ejusdem quadrati rectæ* CI, *quadruplum sit quadratum rectæ* K I, *ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum* LI, IK, *ideoque & rectæ ipsa æquales. Æquilaterum igitur est triangulum* IKL, *lateri cubi* A G, *subjstratum.*



NON *aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera* IK, LM, NO, PQ, RS, TV, *æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo* KTL, *latus* KL, *commune est triangulo* IKL, *& latus* KT, *triangulo* TVK, *& latus* TL, *triangulo* LMT; *perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti hujusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum ejus anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.*

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS *ex hoc propositione sequentes.*

DIA-

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, a *33. primi. & æqualis, quod & DL, FQ, parallela sint, & æquales:* b *manifestum est, quadratum diametri QM, æquale esse quadratis rectarum* b *47. primi LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est,* c *cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, sit* c *29. primi rectus.*

II.

BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum conjungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, dividunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF. FQ, trianguli αFQ, æqualia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d *æquales erunt* d *4. primi. recta αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.*

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit majus segmentum rectæ CY: e *sitque ut CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY:* f *erit* e *15. quinti.* f *2. quarti. quoque KI, latus Icosaedri, segmentum majus lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, esset majus segmentum rectæ βY, esset βY, ad illam rectam, ut CY, ad CI, hoc est, ut βY, ad KI, diversum ab illa recta. quod est absurdum.*

IV.

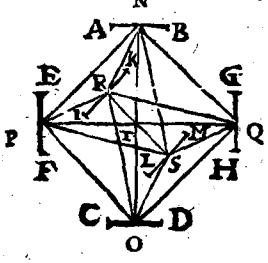
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametru connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosque alternos habentia æquales ex 4. propos. lib. 3. qua quidem in centro conveniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt: g *Atque idcirco, & triangulorum plana, per* g *15. undecimi. ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.*

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, jungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos præcedentis ostensa sunt: ducanturque rectæ NP, NK, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ, PR; PS: QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque contineant, rectos, ut dictum est: [a] Æquales erunt bases NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt & inter se æqualia: Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descriptum est, cum ejus anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 4. primi.

COROLLARIVM.

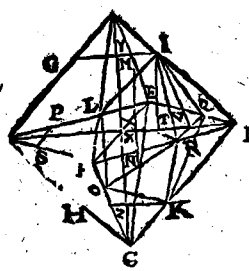
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, ubi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina juxta angulos oppositos ejusdem quadrati, qualia sunt BA, BC: DA, DC, juxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, juxta angulos oppositos A, G, quadrati AECF: Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD; juxta eosdem angulos A, C, jam sumpta fuere) EB, ED: FD, FB, juxta angulos oppositos E, F, quadrati EB, FD, (Nam latera

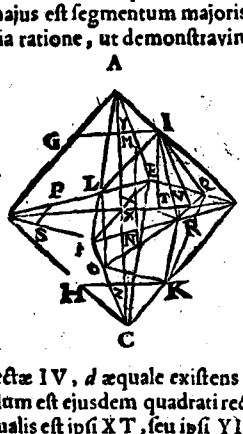
latera EA, EC; FC, FA; quadrati AECF, juxta eosdem angulos E, F; jam accepta sunt) quæ omnia fecentur extrema ac media ratione, hac lege; ut majora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinq; proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamvis non omnes ductæ sint in figura; ad evitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo



sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Ve quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis Octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horū quinq; laterum ductæ sint lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; *a* erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cum sit, *b* ut BG, ad GA, ita DI, ad IA; *c* erit GI, rectæ BD, parallela. Eaq; ratione QR, ipsi EF, parallela; *d* Ac proinde ut DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est ut AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoq; GI, rectam bifariam in Y, similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR. (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendat rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; *e* æquales erunt

a 4. primi.
b 2. quardemq; tideecimi.
c 2. sexti,
d 4. sexti,
e 4. primi.

baſes G I, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, majus eſt ſegmentum majoris ſegmenti XY, diviſi extrema ac media ratione, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. Eſt autem XY, rectæ XV, æqualis (cum ambæ ſint majora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD) *a* & YI, rectæ XT: erit XT, majus ſegmentum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmentum minus, ejusdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius, IT (*b* cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmenti, *c* tripla ſunt quadrati rectæ XT, majoris ſegmenti: Atque adeo quadratum rectæ IV, *d* æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt ejusdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV: erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: *e* At quadratis rectarum IV, VR; æquale eſt quadratum rectæ IR, *f* quod anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR: IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR: Ac propterea cum ejusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN, QMN, atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe, quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum unam latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri: duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, majore & minore: Erunt



a 34. primi

b 34. primi

c 4. tertii. dec.

d 47. primi.

e 47. primi

f 8. primi.

latera

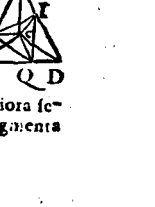
latera unius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, majore & minore; hic vero segmentis AL, AI, majore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula IQR, GIL, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidē duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri impositā, videlicet GMP, in AEB, HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conveniunt ad cōstitutionem anguli solidi (ut vides in quinq; RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, majus segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, ostensa æqualis rectæ GI, quæ duplum potest minoris segmenti AL, a cum quadratum rectæ GI, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: a 47. primi Perspicuum est, & rectam IQ, duplum posse eiusdem segmenti minoris AI.

COROLLARIVM. II.

RVRSVS sit, cum octo Icosaedri bases collatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitq; C, centrum trianguli AED. ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia sunt lateribus CE, EQ trianguli CEQ. (quod hæc latera sint ex centro, & maiora se-



gmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, ut in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases CM, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus Cl, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile est deniq; ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunq; duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O, cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF. FO, trianguli XFO. (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet (cum AG, EF, diametri sint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde per demonstrata in scholio proposit. 14. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) a Aequales erunt & bases XG, XO. Eademq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

In Octaedro Dodecaedrum describere.

b 16. quintidecimi. c 5. quintidecimi.

b INSCRIBATVR dato octaedro Icosaedrum; c & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod jubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos 16. hujus lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, ut ex defin. 31. lib. 11 apparere potest: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

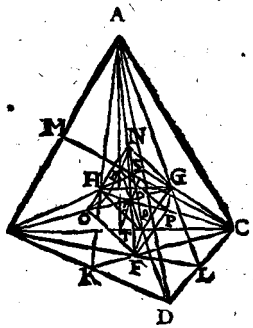
PROBL. 18. PROPOS. 18.

In data pyramide cubum describere.

d 15. quartidecimi

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus jubetur describi; sitq; ejus centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, d quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, erunque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in Punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis. quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita ut relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis conjunguntur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualium BD, CD, à centro F,) angulosq; contineant rectos, ex 3. defin. lib 11.



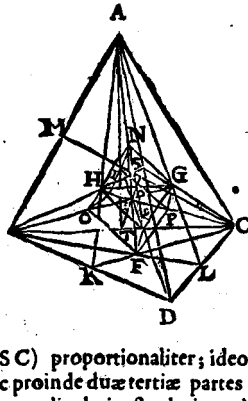
a Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, ut demonstravimus; b Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG; QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK; distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cùm latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD,) angulosq; contineant æquales: c Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus jam, ipsa plana esse atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

a 4. primi.

b 4. primi

c 4. primi.

ASSUMATUR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, conjungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constat ex figura propositionis 2. hujus lib. Nam punctum S, hujus figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, sive non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, ut mox demonstrabimus, transibit ST, per



ST, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per schol. propos. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, *b* atque idcirco, HG, parallela est lateri BC, secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus *c* quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; ejus dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitq; latera ES, ED, trianguli DES (quod quidem pars est trianguli AED) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes ejusdem SE. Quoniam igitur utraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, à rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto intersecabunt. *e* Quare in eodem sunt plano, propterea q; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ: Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

Cvm ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atq; adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. propos. 4. lib. 6. *f* Erit ut SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, ut SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH tertia pars ipsius SB; Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC, Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, ut osten-

a 18. quarti decimi.
b 2. sexti.
c 15. quartidecimi.
d 2. sexti.
e 2. undecimi.
f 2. sexti.
g 8. primi.

vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus, factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. (*a* cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; *b* eruntque quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perdendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur: vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in medijs punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 2. *sexti.*
b 15. *vndecimi.*
c 17. *vndecimi.*

COROLLARIVM. I.

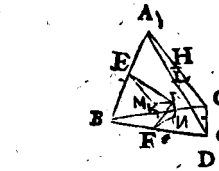
CONSTAT ex his, idem esse, centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM. II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

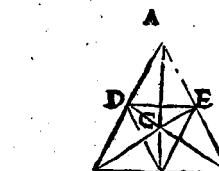
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis,& Octaedri in ea descripti,idemque centrum basis pyramidis,& basis Octaedri in ea descripti,ita demonstrabimus. Sit primum



pyramis ABCD,cuius omnia sex latera bifariam secentur in E,F,G,H,I,K;& ex L,centro pyramidis in bases ABD,BCD, perpendiculares dimittantur LM,LN,quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent,ex coroll. lemmatis 1. prop. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE,EM,LF,FN; quoniam latera LM,ME,trianguli LME,æqualia sunt lateribus LN,NF,trianguli LNF,(cum enim circuli bases ABD,BCD, circumscribentes,sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L,per lemma 2. propos. 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ LM,LN,æquales erunt. Sic quoq; æquales erunt ME,NF,distantiæ rectarum æqualium AB, BD,à centris M,& N,circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. *a* Æquales erunt rectæ LE,LF. Eademque ratione hisce æquales erunt,& inter se rectæ LG,LH,LI,LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H. I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.

a 4. primi.



SIT deinde in base pyramidis ABC, basis Octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusq; basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri; *b* erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF, quod est propositum.

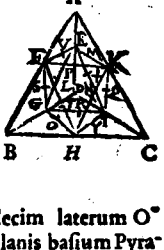
b 2. sexti.

PROBL.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inscribatur Octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum Octaedri cadentia, vt in prop. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quilibet horum punctorum cū quinque proximis coniunxermus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, deniq; latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



a 2. *quarti dec.*

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ *b* inscribatur Icosaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus: consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll propos. 16. huius lib. Deinde *d* quia eubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus

pyra-

b 19. *quinti dec.*

c 5. *quinti dec.*

d 8. *quinti dec.*

a 18. quinti dec. pyramidi inſcriptus, a quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conueniētes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarū: ſuperſunt autē duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum *Dodecaedrum* deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

xiij.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum complectentis an ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quę ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiterq; à centro diſtent, ex lemmate 2. eiusdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quolibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

b 16. quinti dec. c 5. quinti dec. *CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta: b In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde c Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ 17.*

posf.17.huius lib. Post hac in Dodecaedro d *describitur cubus, cubus octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident: ac propterea & cubus ipse in Octaedro describitur est.* a *Denique, in cubo pyramis includitur, quæ ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri residebant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.*

d 8. quinti dec.

a 1. quinti dec.

NEQVE vero pretereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. b *Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant,* c *conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido constat sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atq; pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.*

b 1. quinti dec.

c 8. quinti dec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basiũ centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5.11. & 12. In centris vero basium Octaedri propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quot quot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione quæ arte in quouis solido regulari sphæra depingatur docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

LIBER TERTIUS.

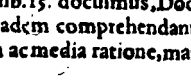
QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſus Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hac quinque corporum regularium, ſi liber hic decimus ſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D: diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus.

nus. Cum enim, vt in ſcholio vltimæ prop. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſque in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra: Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentũ ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris G, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum GD. perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G: extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H: quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, a ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: b Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema, ac media ratione, eſtque maius ſegmentum DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

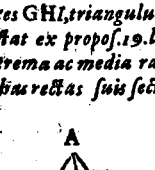
a 2. *ſexti.*
b 18. *tertij dec.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppo-

oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit A BC, *cuius latera ſecentur bifariam in* D, E, F, *iunctis rectis* DE, EF, FD, *quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in* G, H, I, *iungantur rectæ* GH, HI, IG, *conſtituentes* GHI, *triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 13. Secentur deinde latera trianguli* ABC, *extrema ac media ratione in* K, L, M, *iunctis rectis* BK, CL, AM. *Dico binas rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri* GHI, *hoc eſt rectam* BK, *tranſire per puncta* G, I; *& rectam* CL, *per puncta* H, I; *& rectam* AM, *per puncta* G, H. *Ducta enim per* H, *recta* NO, *ipſi* BC, *parallela; erit triangulum* FHO, *triangulo* FEC, *ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & triangulum* FEC, *æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo* ABC, *per idem coroll. Quare* HO, *recta æqualis eſt rectæ* FH, *maiori ſegmento rectæ* FE. *ſeu* DF, *ipſi æqualis:* (*Eſt enim &* DEF, *triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs ſcilicet æqualium laterum eiuſdem trianguli comprehenſos;* a *ideoque æqualia ſint.*) b *Eſt autem &* NH; *æqualis toti* DF, *in parallelogrammo* DH, c *propterea quod* FH, DF, *parallelæ ſunt rectis* AB, BC, *ſeu* NO. *Igitur recta* NO, *compoſita ex* NH, *tota, &* HO, *maiori ſegmento.* d *ſecta erit in* H, *extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ* BC, NO, DF, *ſimiliter ſint ſectæ in* M, H, G, *nimirum extrema ac media ratione; Recta autem* AM, *ex iis, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam* AM, *tranſire per puncta* GH. *Haud ſecus oſtendemus* BK, *per puncta* G, I; *&* CL, *per puncta* H, I, *tranſire, ſi per* G, *&* I, *rectæ ducantur parallelæ lateribus* AC, AB; *Atque idcirco rectæ* BK, CL, AM, *ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri* GHI.



AGATVR iam per G, *recta* PQ, *recta* CL, *parallela. Quoniam igitur* AF, *æqualis eſt rectæ* DF, *ſeu rectæ* FE, *cuius maius ſegmentum fuit* FH, *hoc eſt,* FO, *illi æqualis;* Erit *quoque* FO, *maius ſegmentum rectæ* AF: e *ac proinde tota* AO, *ſecta in* F, *extrema ac media ratione:* f *Eſt autem vt* AF, *ad* FO, *ita* AG, *ad* GH, *ob*

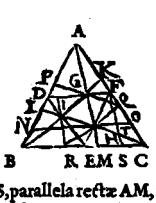
a 4. pri.
b 34. pri.
c 2. ſexti.
d 5. tertij decimi.
e 5. tertij decimi.
f 2. ſexti.

GH, *ob triangulum* AHO; *& ut* A H, *ad* GH, *ita* AQ, *ad* QC, *&* AP, *ad* P L, *ob triangula* AHC, AHL. *Igitur & recta* AH, AC, AL, *secantur in* G, Q, P, *extrema ac media ratione, suntque majora segmenta* A G, A Q, AP. *Recta ergo* A Q, AL, *segmenta majora rectarum æqualium* AC, AB, *æquales erunt. Quia vero est ut* AQ, *majus segmentum, ad* QC, *minus, ita* A L, *tota ad* A P, *majus segmentum: Et est* A Q, *recta recta* A L, *æqualis: Erit &* QC, *recta æqualis rectæ* AP. *Quare & recta* A P, *minus segmentum erit lateris* AB, *majusque reliqua* BP; *ac propterea recta* P Q, *secabit latera* B A, AC, *extrema ac media ratione. Eadem ratione recta* PR, *quæ per I, ducitur parallela rectæ* A M, *secabit latera* CB, B A, *extrema ac media ratione, ideoque in punctum* P, *cadet. Non aliter recta* R Q, *per* H, *ducta parallela rectæ* B K, *latera* A C, C B, *secabit extrema ac media ratione: atque adeo in puncta* R, Q, *cadet. Quoniam verò singula latera trianguli* P Q R, *cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum majore & minore segmento singulos,* b *æqualia inter se sunt: erit triangulum* P Q R, *ex ipsis compositum, æquilaterum, cujus quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri* GHI. *Cum enim in triangulo* ACL, *recta* P Q, *parallela sit lateri* CL: *secabuntur* PQ, LC, *in eadem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstravimus: Dividitur autem* C L, *bifariam in* H, *ob triangulum* ACL, *in quo* FH, *parallela est lateri* A L, *&* c *secans proportionaliter latera* CA, CL. *Igitur &* P Q, *bifariam secatur in* G. *Eadem* d *est ratio de reliquis* QR, RP. *Ac propterea triangulum Icosaedri* GHI, *inscriptum est triangulo æquilatero* PQR, *cujus anguli dividunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in* G, H, I, *ab angulis basis Icosaedri* GHI. *Quapropter si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.*

b 4. primi.

c 2. sexti.

COROLLARIVM.



EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, majus esse segmentum rectæ divisæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cujus basis DEF, describi; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. d Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; e sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF; minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoq; reliqua ES, reliquæ DG, majori segmento æqualis: Ideoque E C, in S, secta erit extrema ac

d 2. sex.

e 34. pri.

a 2. *sexti.* media ratione. Deinde a quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit FT, recta b æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti majus est segmentum rectæ FS, quæ dividit E C, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

b 34. *pri*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit *ABC*, cujus latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cujus anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam dividantur in G, H, I, ut in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos 16, lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI; ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

c 13. *tertii dec.* d 6. *tertii decimi.* e 6. *tertii dec.* f 6. *dec.*

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. c Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia sit commensurabile. e Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque adeo f cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.

CVM

CVM *enim latus Pyramidis in cubo descripta diameter sit basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib 15. Sit autem quadratum hujus diametri, duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descripta.*

RVRSVS, *quia rectæ conjungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli aquilateri duplum rectæ conjungentis bifarias ejus sectiones, cum ea recta a æqualis sit dimidio lateris trianguli, ut constat ex coroll propos. 4. lib. 6.* a *Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum aquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.* a 2. sexti.

DENIQVE b *quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri conjungat centra basium oppositarum, ut in coroll. propos. 3 lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.* b 14. tertii decimi.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri majus segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus propos. 10. libr. 15. Sit autem latus dodecaedri majus segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscripta: Aperte colligitur, latus Dodecaedri majus segmentum rectæ esse, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. c 5. sexti. dec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse C proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propos. 14. libr. 15. demonstra-

A
B
C

A ——— strata sunt, B, latus Icosaedri majus segmentum sit
B ——— lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ
C ——— in scholio propos. 13. ejusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit ejusdem lateris cubi: Planum sit, ita esse A, totam ad B, majus segmentum, ut B, majus segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos. 18. lib. 5. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis BC) a Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata; ut in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum ejusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

a 20. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplū est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus, quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, ut docuimus in scholio propos. ult. lib. 15. b *Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Hujus autem lateris cubi extrema ac media ratione secti majus segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.*

b 8 sexti-decc.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Ico-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione divisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta conjungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta (qualis fuit ibi recta GI. *subtendens angulum rectum* GAI, *minoribus segmentis* AG, AI, *comprehensum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare a cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta aequalia, duplum poterit unius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.* a 47. pri.

THEOR. II. PROPOS. II.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT una sex pyramidum octaedri ABCDE, cujus basis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si conjungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, ut demonstravimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 1. erit EH : *b* Atqui ut EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN. duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstravimus. Est enim LN. quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; *c* cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

b 2. sexti.

c 33. pri.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione divisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum ejus rectæ extrema

ac media ratione diviſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem Octaedro inſcripti: eius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri majus ſegmentum eſt ejus rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones conjungunt tres recta lateri cubi æquales, ut conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. ejuſque ſcholio: Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. ejuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. libr. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit majus ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diviſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri majus ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. a *Atqui diameter ſphæræ ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri majus ſegmentum ejus rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.*

a 14. tertii dec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam ejus, quam habet majus ſegmentum ad minus rectæ lineæ diviſæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quem minus ſegmentum ad majus ejuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. libr. 15. minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diviſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad majus ſegmentum, vel majoris ſegmenti ad minus (quod tota linea, majus ſegmentum, at q; minus, ſint tres rectæ continuè proportionales) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis majoris ſegmenti ad minus duplicatam.

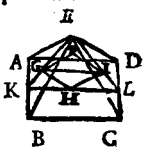
PRÆ-

PRÆTEREA, cum constet ex coroll. 1 propos. 17. lib. 13. majus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione divisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, majus segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad majus. Cum enim sit, ut tota linea ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus; Erit quoque convertendo, ut majus segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad majus. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT una ex pyramidum Octaedri ABCDE, cujus basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint *A*BE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis jungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. expositum. Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis EGK, EIL, dividentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 14, ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18. libr 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit ut EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, ut EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & EK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cujus diameter BE, & centrum

centrum I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. libr. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, ut

constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum I, centrum Icosaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I transeant, erit I, quoque centrum cubi inscripti, ideoque IK, IL, semidiametri æquales: Conjuncta autem KB, semidiametro circuli triangulum BCG, circumscribentis; erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, ut in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum est quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icosaedri BE, remanet, quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaque BK, usque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in scholio propos. 12. lib. 13. *c* erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN; Vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quod BC, sit media proportionalis inter BM & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. *d* cum angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens, Recta igitur BM, potentia quoque sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 74. *pri.*

b 15. *tertii dec.*

c 12. *quartidecimi.*

d 31. *tertii*

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum sulcet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambien-

bientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri *BE*, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BGG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diviſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, a duplum potens lateris Octaedri, conjungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, ut manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 5. Eſt autem recta, dictas ſectiones conjungentis diviſa extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17. libr. 13. Liquet, latus dodecaedri minus ſegmentum eſſe ejus rectæ extrema ac media ratione diviſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum hujuſmodi recta conjungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cujus quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt recta linea extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. tertii dec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

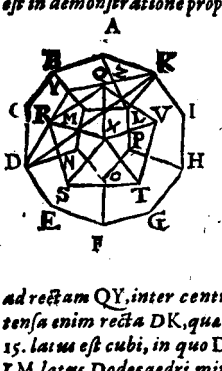
CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultima libr. 15. eadem q; ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæra pyramidem circumdantis: b Poteſt autem diameter ſphæra ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcripta: Atqui diameter circuli baſin Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. hujus lib. demonſtravimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. hujus lib. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſin Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcripta ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

b 13. tertii decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione divisæ, ad partem ejusdem lineæ inter centrum pentagoni & latus ejusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum contra Q, R, S, T, V, X (qualibet videlicet duo proxima) jungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut ostensum est in demonstratione propos. 7. libr. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basium BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propositionis 10. lib. 13. conveniunt in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur a perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad Latus Icosaedri sibi inscripti QR, ut KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK; si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q, (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorum æqualium æquales; nec non & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) b parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. libr. 6. c Quamobrem erit, ut DK, ad KY, ita QR, ad QY. d Ut autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Ut igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, ut LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. sextidec.

b 2. sexti.

c 4. sex.

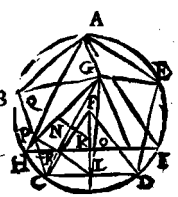
d 2. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

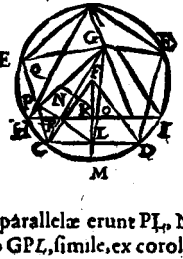
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque ejus segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum AB CDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cujus centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus AB C, AED, æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, nec non & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes ejusdem circumferentiæ, erunt reliqui arcus HC, I D, æquales; propterea quæ rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, *a* secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; conjungaturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, dividentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta *GO*, in punctum L, in quo divisa est CD, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N, O, quæ, ut constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro scripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cum enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri *HI*, secetur in K, extrema ac media ratione (quod F L, hac ratione secta faciat majus segmentum æquale perpendiculari F K, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem majori segmento F K, æqualis recta K M, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonstravimus ad propos. 5. libr. 13. majus segmentum K M, sectum quoque in L, à minori segmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ sui ipsius segmento L M. Quoniam vero juncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descri-



a *3. tertii.*

descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio ultimo lib. 4. ideoque similis illi: erunt triangula FCD, FPL (si recta duceretur FP) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare ut FG, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, ut FC, ad FL, ita CD ad LP; Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidii ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, ut ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidii ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit PQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14)



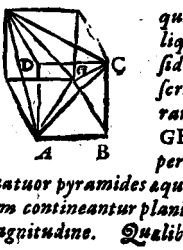
a 2. sexti. b 4. sexti.

a parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. b Igitur erit ut GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, ut GP, ad GN, ita PL, ad NO; Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est QR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR, æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, *descripta sit pyramis* ACEG. *Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem aquilateram circumstent quatuor pyramides fundata super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non residunt quatuor anguli pyramidis aquilaterae inscriptæ:* (*Nam super basin* ACE, *fundatur pyramis* ACED, *super basin* AEG, *pyramis* AEGH; *super basin* CEG, *pyramis* AEGF; *& super basin* ACG, *pyramis* ACGB: *quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex* 10. *definitione libri undecimi, cum contineantur planis similibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Qualibet enim constat tribus æqualibus & similibus*



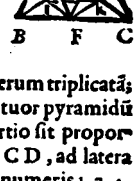
bus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilatera inscripta) *Sit autem cubus cujuslibet harum pyramidum sextuplus* (*Nam exempli causa ; pyramis* ABCG, *basin habens* ABC ; *dimidium basis cubi* BD, *altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet* BG, *tertia pars est, per coroll. 1. propos. 19. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis.* a *Cum igitur cubus duplus sit ejusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem* ABCG, *sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.*) *Efficitur ; quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram* ACEG, *cubo inscriptam ejusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscripta pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.* a 32. *undec*

ALITER. *Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultima lib. 15.* b *Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descripta, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscripta pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.* b 32. *quartidecimi.*

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, ut propos. 3 lib 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium ejusdem pyramidis ABCD, ex constructione prop. 2. lib. 15.) c Habeant autē pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatā; Erit pyramis ABCD, octupla cujuslibet illarum quatuor pyramidū octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum



dum pars erit octava pyramidis ABCD ; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octavas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars ejusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscriptio octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 22.

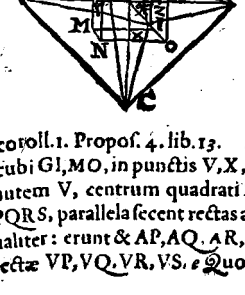
CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum : octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex a 20. *sexti-dec.* *secunda demonstratione propos. 3. lib. 15.* a *Est autem cubus pyramidis in eo descripta triplus,* b *& pyramis octaedri sibi inscripti dupla* : b 21. *sextides.* *Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum : atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN Octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ P Q, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituentes PQRS, ut in propos. 4. lib. 15. est demonstratum : & quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in



xv. undec.

coroll. 1. Propos. 4. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS ; *d* (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter : erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum

d 17. und.
e 47. pri.

rum æqualium AP,AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP, AV,VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,VQ, propterea quæ & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR,VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſchol ultimum lib. 4. Secantur enim latera PQ,QR,RS,SP, bifariam in G,K,I,H, ut conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. libr. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y,Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire Ducta jam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib 14. a Cum ergo plana PR,BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT,CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT,XT. Recta igitur VX, conjungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam vero quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, ejuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. propoſ. 7. libr. 12. cum utriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK: illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula hujus ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. trianguli illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam: Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quod & recta Aγ, d proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſqualtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8.12.18.27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8, ponitur pyramis PQRSA, talium 12. eſſe cubum GO, jam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur Octaedrum ABCDEF, ad cubum GQ, proportionem

a 17. *undec*

b 6. *undec.*

c 8. *duod.*

d 2. *ſexti.*

habet

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti, Ostendimus enim T, utriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habet. a Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstravimus habere octaedrum ad sibi inscriptum.

a 11. sexti dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

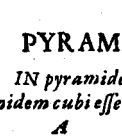
b 23 sexti dec. c 20. sexti dec.

QVONIAM ut ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; b Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis c triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

PROBL. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G H, centra duarum basium A C D, ABD, commune latus A D, habentium per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur CGS, BHS; dividentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos. per scholium prop. 12. lib. 13. ac propterea convenientes in medio puncto S. Connexa vero recta G H, cum B H, C G, dupla sint rectarum H S, G S, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur BS, C S, d parallela erunt B C, H G, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, simile. e Erit ergo ut B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad



d 2 sex. e 4. sex.

CS, ad GS: a*Est autem* CS, *ipsius* GS, *tripla. Igitur &* BC *tripla erit ipsius* HG. *Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstratum est: Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta* GH, *jungens centra* G, H, *basium* ACD, ABD, *commune latus* AD, *habentium diameter fuit basis* GNHQ, *cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis* BC, *diameter basis cubi pyramidem* ABCD, *circumscribentis:* GH, *vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Est enim ut diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit potentia dupla; Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri unius quadrati ad ipsum quadratum est, ut quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum utrobique sit proportio dupla.* b *Igitur erit quoque diameter ad latus, ut diameter ad latus. Ergo permutando, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem* BC, *diameter basis cubi circumscripti ad* GH, *diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia,* c *proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi* ABC, *proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est tripla proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem,* d *cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis* ABDC, *ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.*

a 18. *quartidecimi.*

b 22. *sexti.*

c 33. *undec.*

d 20. *sexti.*

COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in prioti cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. libri 11. in demonstratione hujus propositionis.

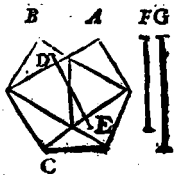
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN Octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duæ bases octaedri

octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cum enim, ut ex demonstratis in propos. 16. libr. 15. liquet. octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur: sint duæ bases Icosaedri GHI, KLM, in duabus basibus oppositis octaedri ADE, BCF; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 18. libr. 15.) ad basin ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, trianguli ADE, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli GHI, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppositæ ADE, BCF, parallela sint, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. Recta ON, productæ perpendicularis quoque erit, per scholium propos. 14. lib. 11. ad planum BCF, in ejusque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales dividitur, quarum altitudo est NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiter & Icosaedrū in 20. pyramides æquales ejusdē altitudinis NO: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basin, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cujus basis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero prisma, cujus eadem basis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON, duplum est prismatis, cujus basis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cujus basis ADE, & altitudo OP, æquale est sex pyramidibus octaedri. Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit & tertia pars prismatis super basin ADE, & sub altitudine OP, constituti: prisma videlicet cujus basis tertia pars est trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem ADE, & sub altitudine OP, cum per ea, quæ docuimus ad propos. 7 lib. 12. prismata ejusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quorum unius basis ADE, & altitudo OP, alterius autem basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia sunt octaedro ABCDEF. Non secus demonstrabimus prisma cujus basis GHI, altitudo vero OP, æquales esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea quæ triplum hujus prismatis, nempe prisma, cujus basis tripla sit basis GHI, altitudo autem eadem OP, æquales esse 18 pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum ejusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem GHI, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet,

ieet, cujus basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius vero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, aqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro aqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro aqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. libr. 12. ut bases prismatum octaedro aqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes (cum unius basis sit ADE, nempe tres tertias partes ipsius ADE, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE) ad bases prismatum Icosaedro aqualium decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes (cum unius basis tripla sit trianguli GHI nimirum novem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI.) Sint autem ut quatuor tertias partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 22. libr. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius GHI (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum unius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro aqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro aqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, ut duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.



a 15. quinti

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata ejus, quam

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum conjungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum ABC, *in quo recta* DE, *conjungat centra basium oppositarum, diameter autem ejus sit* AC; *&* F, *sit latus Icosaedri*, *&* G, *latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri* ABC, *ad sibi inscriptum Dodecaedrum compani ex proportione* F, *lateris Icosaedri ad* G, *latus cubi*, *& ex proportione triplicata diametri* AC, *ad rectam* DE. *Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppositarum*; Erit DE, *diameter Dodecaedri in Icosaedro* ABC, *descripti, cum copulet angulos ipsius oppositos in* D. *&* E, *centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis jam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet* ABC: *Dodecaedro diametri* AC, *hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum* ABC, *descripto, cum utriusque eadem sit diameter*; *& Dodecaedro diametri* DE, *intra Icosaedrum videlicet* ABC, *constructo: Proportio prima magnitudinis nempe Icosaedri* ABC, *ad tertiam videlicet ad Dodecaedrum diametri* DE, *sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri ejusdem diametri* AC, *ad Dodecaedrum diametri* DE, *in Icosaedro* ABC, *descriptum. Cum ergo Icosaedrum* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *eadem sphæra comprehensum, sit ut* F, *latus Icosaedri ad* G, *latus cubi* (a Nam

a 11. *quartædecimi.* *Dodecaedrum diametri* AC, *ad Icosaedrum* ABC, *ejusdem diametri est, ut* G, *latus cubi ad* F, *latus Icosaedri. Convertendo igitur erit Icosaedrum* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *ut* F, *latus Icosaedri ad* G, *latus cubi*,) *At vero Dodecaedrum ejusdem diametri* AC, *ad Dodecaedrum diametri* DE, *in Icosaedro videlicet* ABC, *descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DE, *id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum conjungentem, ex coroll. propos. 7. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri* ABC, *ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametr.* DE, *componi quoque ex proportione* F, *lateris Icosaedri, ad* G, *latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri* AC, *ad rectam* DE. *Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.*

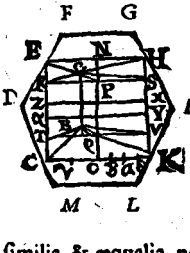
THE

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, sive latere cubi, minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

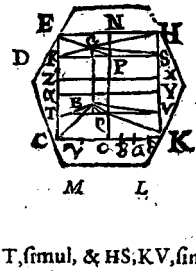
QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus convenientium; sint hujusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, convenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK: His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet CBKHAE, constans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, a triangula sunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABGDE, ABK, LI, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata CDE, HIK, b æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique est basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia, & æqualia, per 10. defin. libr. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita ut Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex hujusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cujus quidem basis deficit à CEHK basi cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in NO, junctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, &

a 4. *primi.*



b 4. *primi.*

in quam cadunt perpendiculares AP,BQ,demissæ in planum EK, ut constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO,AB, AP, BQ, hujus figuræ lineas LN, VX,VR,XS,figuræ propos.17. lib.13.) Erit utraque recta AB, PQ, majus segmentum lateris cubi NO,vel HK, & utraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB,seu majoris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propos.17. libr.13. Ac propterea si per P,Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque RT,SV, majora segmenta laterum EC,HK; atque adeo ER, CT,simul, & HS,KV,simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR,AS,BT,BV, constituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos.6. lib.12. æquales inter se erunt,cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela, cum conjungant æquales rectas,& parallelas AB, SV, RT, b parallelæ erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. libr. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus adversis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV,AT,AV,prisma est, ex definitione.



a 33. pri.

b 5. undecimi.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS,KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum utriusque HS,& KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars sit XY, ducanturque XZ, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA,CTVKB,æquales sunt ostensæ; c utriusque vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA,vel QB, constituta, d quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH: Æqualis erit pyramis TVXZB, utrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cujus basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB,quæ æqualis sit ipsi VX, ut demonstravimus in scholio propos.7. lib.12. Item ejusdem prismatis, cujus basis TX, & altitudo QB,vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cujus basis TY, & altitudo eadem QB,vertex vero pars rectæ AB,æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 23. lib.11. e quod & basis TY, duas partes tertias complectatur ba-

c 6 quod.

d 15 sexti.

sis

sis TX. Igitur & prisma, cujus basis T Y, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma oppositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendēte, & ex VS, majore segmento, ideoque à base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione investigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur hujusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum ejusdem altitudinis; constituentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu majoris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi: Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurgens parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cujus basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio majoris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Dividatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, majus segmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita ut Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB; & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio majoris segmenti; quia βK, major est, quam dimidium majoris segmenti Cβ. Cum enim sit, ut CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius majus segmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, major, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, ut tota CK, ad majus segmentum Cβ, ita majus segmentum Cβ, ad minus βK; *b* erit quoque ut CO, dimidia ipsius CL, ad Cγ, vel βε, dimidiam ipsius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiam ipsius βK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media

b 15. *quinti*

media ratione, erit majus illius segmentum C γ, vel β ε, & minus β δ. Quare & β δ, minus segmentum secabit β ε, majus segmentum extrema ac media ratione, ut demonstravimus ad propos. 5. lib. 13. eritque majus segmentum β δ, minus autem δ ε; Ac propterea rursus δ ε, minus segmentum secabit rectam δK, majori segmento β δ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C K, minore segmento ε K, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ β δ; quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti ejusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sive lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cujus & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens quam cubus, altitudo vero à latere cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto jam parallelepipedo adjungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, imo vero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam cen-

centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta conjungens centra basium oppositarum D E; *At vero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri* AC, *ad rectam* DE; *& ex proportione F, lateris cubi ad* G, *latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta* D E, *centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cujus diameter* DE, *in eadem sphæra cũ Icosaedro intra Dodecaedrum* ABC, *collocato describetur, cum eandem habeant diametrum* DE. *Intellectis jam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet* ABC; *Dodecaedro diametri* DE: *& Icosaedro ejusdem diametri* DE *intra Dodecaedrum videlicet* ABC, *descripto; Proportio Dodecaedri* ABC, *primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5. libr. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri* ABC, *primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri* D E, *secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro* DE, *descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro* ABC, *descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* DE, *proportionem habeat triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DE, *ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri* DE, *ad Icosaedrum ejusdem diametri* DE, *quod nimirum in Dodecaedro* ABC, *describitur, proportionem habeat, quam* F, *latus cubi ad* G, *latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri* ABC, *ad Icosaedrum sibi inscriptum, cujus scilicet diameter* DE, *componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri* AC, *ad diametrum* DE, *rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F. lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 11. quartidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris ejusdem cubi, altitudo denique à latere ejusdem cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quę dimidiati lateris cubi ejusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejusdem segmentũ minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sive lateri ejusdem cubi sint æquales.

QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, *a* cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat dictas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. hujus lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis hujus; non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

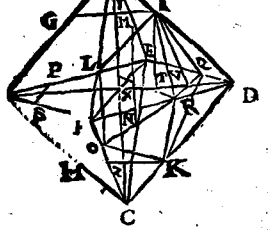
a 25. sextidec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero majus segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit A B C D E F, *repetita figura propos. 16. libr. 15. ubi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse* I Q R, K Q R, G I L,

GIL, GIM, GPS, HPS, OHK, NHK, RLQ, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS. HOS, KOR, ILR, *quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlitet omnia ejus latera extrema ac media ratione ; Item rectam* I T, *perpendicularem ad* B D, *aqualem esse majori segmento* X Y, *semidiametri* A X. *Dico octaedrum* ABC, DEF, *superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosaedri* Q R, *altitudo vero* I T, *majus segmentum semidiametri* A X. *Cum enim in quatuor basibus Octaedri* DEA, DFA, DEC, DFC, *angulum solidum Octaedri* D, *constituentibus posita sint quatuor bases Icosaedri* IMQ, ILR, KNQ, KOR; *remanebunt juxta angulum solidum* D, *in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula* IQD, IRD, KQD, KRD, *quibus si accedant duo triangula Icosaedri* QIR, KQR, *& commune triangulum* DQR, *constituentur duae pyramides super communem basem* DQR, *nempe* IDQR, KDQR, *inter se aquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem* I T, *majus videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum* A X, *secta est à recta* G I, *in* Y, *extrema ac media ratione, ita quoque secta est* CX, *à recta* HK, *in* Z. *Quare si ex* K, *ad* BD, *perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis* KDQR, a *erit ea aqualis rectae* Z X, *majori segmento semidiametri* CX, *hoc est, ipsi* I T) *Qua quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur bina pyramides & inter se, & dictis duabus aquales extra Icosaedrum praedictum : ita ut Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus aqualibus. Quia vero triangulum* DQR, *dimidium est quadrati lateris* DQ (*Cum* DQ, DR, *recta aquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum*) *erit recta* QR, *diameter illius quadrati ; Ac proinde quadratum ipsius* QR, *duplum erit quadrati lateris* DQ: *ideoque quadruplum trianguli* DQR. *Prisma igitur, sive parallelepipedum, cujus basis quadratum rectae* QR, *& altitudo* I T, *quadruplum quoq; erit prismatis, cujus basis triangulum* DQR, *& altitudo eadē* I T. *per ea, quae demonstravimus ad propos. 7. libr. 12. Prisma autem, cujus basis* DQR, *& altitudo* I T, *triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis* IDQR,



a 34. pri.

ID QR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cujus basis quadratum recta QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadrupla sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes: Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cujus basis quadratum recta QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, majus segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri conjungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. libr. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: [a] Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero majus segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, ut Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis; cui inscribitur (b quod Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet duplum Icosaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cujus basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, conjungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. *sexti.*

b 21. *sextidec.*

DE QVINQVE CORPORVM REGVlarium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

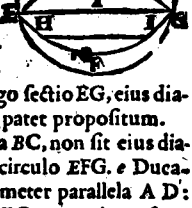
QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram constituit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, nova demonstratione confirmavit; non erit absre docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat; præsertim cum ejus ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lēmata nonnulla præmittenda sunt, quorū aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, nō tamen

mẽ propterea ordinem Euclidis pervertere censeri possumus: quippe cũ propositiones sphæricorũ elementorum, q̃b. hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant: ut commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. Incitandis autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA. I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in uno eorum linea recta; ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli *ABCD*, *EFG*: sitque primum in *ABCD*, data diameter *AD*, cui in *EFG*, ducenda sit diameter parallela. Ducatur ut in scholio propos. 18. libr. 11. docuimus per diametrum *AD*, planum rectum ad circulum *ABCD*, *a* faciens in sphæ- a 11. 1. *Theo.*



ræ superficie circulum *AEGD*. Quoniam igitur circulus *AEGD*, circulum *ABCD*, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus *AEGD*, maximus, transibitque per polos circuli *ABCD*, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli *EFG*. *b* cum paralleli eosdem polos habeant: *c* idcoque cum bifariam secabit. Communis ergo sectio *EG*, eius diameter erit: *d* quæ cum sit ipsi *AD*, parallela, patet propositum. b 1. 2. *Theo.* c 15. 1. *Theo.* d 16. *unde.*

DEINDE in circulo *ABCD*, data recta *BC*, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo *EFG*. *e* Ducatur ipsi *BC*, per centrum circuli *ABCD*, diameter parallela *AD*: cui in circulo *EFG* ducatur diameter parallela *EG*, ut proxime ostendimus. Quoniam igitur utraque *BC*, *EG*, eidem *AD*, parallela est, ex constructione, *f* ipsę quoque *BC*, *EG*, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum. e 31. *pri.* f 9. *undec.*

EADEM ratione rectæ *BC*, ducetur in circulo *EFG*, parallelæ *HI*, à diametro *EG*, diversa quæ ipsi *BC*, æqualis sit, si modo *BC*, major non sit diametro *EG*. Nam si in circulo *EFG*, ducatur ipsi *BG*, parallela *HI*, & æqualis, ut propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit quod jubetur.

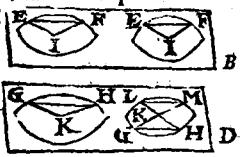
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes:

erunt

erunt duæ rectæ conjungentes extrema unius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro conjungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes EF, GH, ac tandem jungantur ad centra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas esse. Quoniam enim arcus EF, GH, similes sunt, erunt anguli IK, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3. *a* Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt. *b* Cum ergo tam illi, quam hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ sunt, & rectæ EI, GK, ad easdem partes plani per EF, GH, ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt ex iis, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstravimus, EI, GK, parallelæ: Eadem que ratione FI, HK, parallelæ erunt.



a 32. primi
b 5. primi.

DEINDE sint EF, GH, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, CK, esse parallelas. Productis enim GK, HK, jungatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, sunt æqualia *c* anguloque ad verticem K, æquales continent: *d* erunt & bases GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M. *e* Igitur arcus GH, LM, æquales sunt, *f* & rectæ GH, LM, inter se parallelæ: Ac proinde cum utraque EF, LM, ipsi GH, sit parallela, *g* erunt & EF, LM, parallelæ inter se. Quia igitur EF, LM, parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes EF, LM. (Nam cum arcus GH, sit arcui EF, similis, erit quoque arcus LM. (Nam cum arcus GH, sit arcui EF, similis, erit quoque arcus LM, qui arcui GH, æqualis est, eidem arcui EF, similis) erunt tam EI, LK, hoc est, EI, HK, quam FI, MK, hoc est, FI, GK, parallelæ. Quod est propositum.

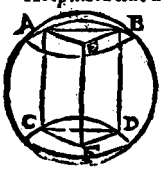
c 14. pri.
d 4. primi.
e 28. tertii
f 27. pri.
g 9. undecimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes conjungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, in quibus



sint duæ rectæ æquales & parallelæ AB, CD, ad easdem partes centrorum, quarum extrema jungantur ad easdem partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt: *a* erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Quare cum AB, CD, sint etiam æquales: *b* æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod est primum. *a* 7. *undec* *b* 33. *pri.*

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD, junctaque recta EF: erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. *c* Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. *d* Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eosdem polos sunt, *e* recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra conjungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune EF. *f* Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta est: *g* Ac propterea & utraque AC, BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum. *c* 33. *primi.* *d* 1. 2. *Theo* *e* 10. 1. *The* *f* 10. 1. *The* *g* 8. *undec.*

HÆC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, ut patet.

LEMMA IV.

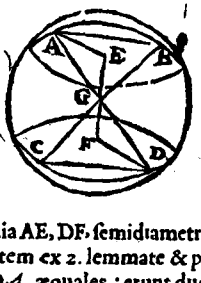
SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes conjungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes jungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales.

Quo-

a 7. *undec.* Quoniam enim *AB, CD*, parallelæ sunt: *a* erunt *AD, BC*, in eodem cum ipsis plano: ac proinde se mutuo intersecabunt, ut in puncto *H*: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra *E, F*, rectis *EA, EG*; *FD, FG*.

b 15. *primi* c 29. *pri.* d 4. *primi.* e 14. *quinti.*



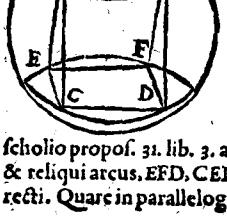
b Et quia anguli *AGB, CGD*, ad verticem æquales sunt: *c* Item tam alterni anguli *BAD, CDA*: quam alterni *ABC, DCB*; æquiangula erunt triangula *ABG, CDG*. *d* Igitur erit ut *AB*, ad *BG*, ita *DC*, ad *CG*. Item ut *AB*, ad *AG*, ita *DC*, ad *DG*. Cum ergo *AB, CD*, ponantur æquales, *e* erunt quoque tam *BG, CG*, quam *AG, DG*, inter se æquales. Rursus

f 29. *pri.* g 4. *primi.* h 7. *undecimi.* i 2. *undecimi.* k 10. 1. *Theod.* l 6. 1. *Theo.*

quia *AE, DF*, semidiametri circulorum æqualium æquales: sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, *f* ideoque anguli alterni *EAD, FDA*, æquales: erunt duo latera *EA, AG*, duobus lateribus *FD, DG*, æqualia angulosque comprehendent æquales. *g* Igitur & bases *EG, FG*, & anguli *AGE, DGF*, æquales sunt. *b* Et quia *AD*, in eodem plano est, in quo parallela *AE, DF*: *i* & *EG, FG*, in eodem plano, in quo *AD, AE, DF*: erunt *EF, FE*, in rectum & continuum constitutæ propter æquales angulos *AGE, DGF*, ut ex Procl. ad *propos. 15. lib. 1.* ostendimus. Quare *EF*, recta conjungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, ut in præcedenti lemmate demonstravimus. *k* perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo *EG, FG*, æquales sint ostensæ, erit *F*, centrum sphæræ, *l* propterea quod circuli æquales *AB, CD*, æqualiter à centro sphæræ absunt: inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta *EF*, diceretur aliud punctum quam *G*. Quocirca *AD, BC*, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales. quod est primum.

SED jam puncta extrema parallelarum æqualium *AB, CD*, ad easdem partes jungantur rectis *AC, BD*. Dico rectas *AC, BD*, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos *CAB, ABD, BCD, DCA*, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, *m* manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium conjungant. Quod autem ad *AB, CD*, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo *CD*, ad rectam *CD*, excitentur perpendiculares *CE, DF*, junganturque *EE, AE, BF*. Quia igitur anguli *ECD, FDC*, recti sunt, erunt ex

m 33. *pri.*



scholio propos. 31. lib. 3. arcus *ECD, FDC*, semicirculi, ac proinde

n 31. *tertii.*

& reliqui arcus *EFD, CEF*, semicirculi erunt, *n* & anguli *EFD, CEF*, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo *DE*, recta *CD, EF*, æqua-

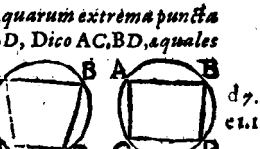
quales sunt, a ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad utramque EG, EA, & ad utramque FD, FB; ut ostendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt: ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

a 9. undec.
b 4. undec.
c 8. undec.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes conjungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, conjungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, *quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis* AC, BD, *Dico* AC, BD, *æquales esse. Quia enim parallelæ sunt* AB, CD, *d erunt* AC, BD, *in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, e fiat in sphæra circulus* ABDC, *in quo cum parallelæ sint* AB, CD: *erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus* AC, BD, *æquales: f ideoque & rectæ* AC, BD, *æquales erunt. Quod si parallelæ* AB, CD, *fuerint æquales, ita ut quadrilaterum* ABDC, *in circulo habeat duo opposita latera* AB, CD, *parallela, & æqualia: erit ex scholio propos. 31. lib. 3.* ABDC: *parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli* A, B, D, C, *recti erunt. Quod est propositum.*



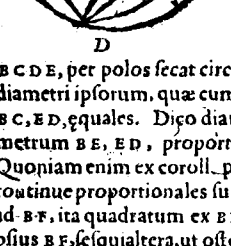
d 7. undec.
e 1. 1. Theo.
f 29. tertii.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita ut diameter sphæræ sit utriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæræ centrum *A*, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cujus diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. libr. 1. Theod. Secta autem *BD*, in F, ut BF, ipsius FD, dupla sit rerit BD, talium partium 3. qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, jungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipsi BC, parallela, connectatur

recta BE. *a* Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo *a* 29. *pri.* BED, CBE, duobus rectis æquales sunt: *b* estque tam BCD, quam *b* 31. *tertii.* BED, rectus: erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelo- *c* 34. *primi* grammum est: *c* ideoque rectæ BC, DE, æquales sunt. Diviso jam



arcu BC, bifariam in G, erit quoq; arcus EGD, divisus bifariam in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & intervallis GB, GE, circuli in superficie sphęrę describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB GC, quam GE, GD: *d* qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos. *e* Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam: erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad utramque diametrum BE, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectę BD, BC, BF, continue proportionales sunt: erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autē BD, ipsius BF, sesquialtera, ut ostensum est. Igitur & quadratum ex BD; quadrati ex BC; atque adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, utriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est, quod est propositum.

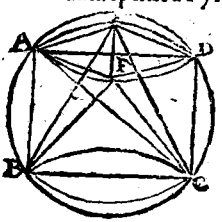
d 2. 2 *Theo.*
e 15. 1. *Theo*

D

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.



f 15. 1. *The.*

DESCRIBANTVR *in data sphæra, ex lemmate 6 duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor trian-*

gula

ſula EBC, BCF, CFE, EFB, *eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis* AE, ED, DF, F*A*, AB, C*D*, C*A*, *erit* A*C*, *diameter ſphæræ, ex lemmate* 4. *&* A*B*, *DC*, *æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex* 3. *lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *deſcriptum, ut conſtat ex propoſ.* 6. *lib.* 4. *Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ* AC, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* AD, *diametro circuli: ſi ponatur quadratum ex* AC, 3. *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, a *æquale ſit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus ſit, ex deſin.* 3. *lib.* 11. *erit quadratum ex* DC, 1. *ac proinde quadratum ex* AD, *quadrati ex* DC; *duplum erit: Eſt autem & quadratum ex* AD, *quadrati ex* DF; *duplum, ex ſcholio propoſ.* 47. *lib.* 1. *Æqualia ergo ſunt quadrata ex* DC, DF: b *quibus cum æquale ſit quadratum ex* CF, *quod angulus* CDF, *ex deſin.* 3. *lib.* 11. *rectus ſit: erit quadratum ex* CF, *quadrati ex* DF, *quoque duplum, propterea quadrati ex* AD, *æquale. Recta igitur* CF, *recta* AD, *hoc eſt, ipſi* BC, *æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur* BF; *eidem* BC, *æqualis. ideoq; & BCF, triangulum eſt æquilaterum.*

a 47. pri.

b 47. primi

RVRSVS quia quadratum ex AD, *quadrati ex* DC, *duplum eſt oſtenſum: eſt autem, ex ſcholio propoſ.* 47. *lib.* 1. *& duplum quadrati ex* DE: *æqualia erunt quadrata ex* DC, DE: c *quibus cum æquale ſit quadratum ex* CE, *quod angulus* CDE, *ex deſin.* 3. *lib.* 11. *rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex* CE, *quadrati ex* DE. *Æqualia ergo ſunt quadrata ex* CE, *AD; propterea & recta* CE, *recta* AD, *hoc eſt, rectu* BC, EF, *æqualis eſt; atque adeo & recta* CF, *quæ ipſi* BC, *oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur* CEF, *æquilaterum etiam eſt, & ipſi* BCF, *æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum* BEF, *eſſe æquilaterum, & ipſis* BCF, FCE, *æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera* BE, CE, *ipſi* BC, *oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt* EBCF, *ex deſin.* 20. *lib.* 11. *& in data ſphæra deſcripta, cum ejus anguli ſolidi* E, B, C, F, *in ſuperficie ſphæra conſiſtant quod eſt propoſitum.*

c 44. pri.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Namlatus pyramidis eſt æquale diametro AD, ut oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentiâ eſt ſeſquialtera diametri AD.

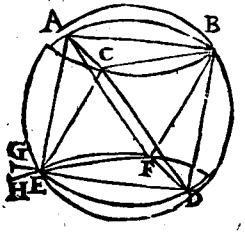
PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli

culi æquales & paralleli ABC, DEF, ita ut sphærę diameter diametri cujuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Descripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diversas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo, ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula ejus latera singulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdem partes plani per AB, GE, ducti: erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelę, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF; ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, ut in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diversas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ junctæ AD, BE (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3. (Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, est 3. quod ex corollar. 1. propos. 12. libr. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsæ DE, BD, æquales. Est autē DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentque quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

a 2. quarti



b 47. pri.

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diversas partes centrorum: erunt quoque junctę rectæ BE, CF, non ad easdem partes diametri sphærę, ex 4. lemmate, & rectæ BE, CE, æqua-

les

les inter se, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rursus, ut prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus ACDF, quadratum esse: cum junctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphęrę diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cum AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, BCD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. libr. 11. & in data sphæra descriptum, cum ejus anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphęrę superficiem attingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

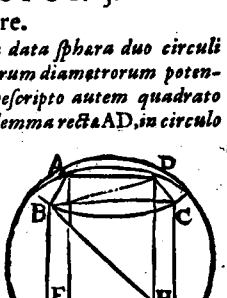
COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplum esse lateris Octaedri in ea sphæra descripti Demonstratum enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

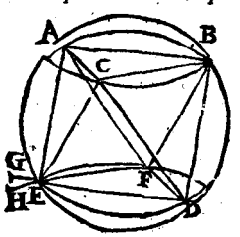
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli* ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ.* a *Descripto autem quadrato* ABCD, *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt singula ejus latera singulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum* AD, EH, *æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos.* 16. *lib.* 11. *Nam quia parallelæ sunt* AD, EH, *sunt & anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & sic de cæteris. Iungantur deniq; ad easdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma* 3. *ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico* AG, *esse cubum, hoc est, sex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *esse quadrata, & æqualia, Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate* 4. BH, *diameter sphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex* BH, *sesquialterum est quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex scholio propos.* 47. *libr.* 1. *si sumatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& quadratum*

a 6. *quarti*



dratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC,
a 47. pri. *triplum erit. Rursus quia quadratum ex BH, est 3. & quadratum ex BD, 2. a est que quadratum ex BH, aquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3 lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplum est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde recta DC, DH, æquales. Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EC, quadrata junt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25 lib. 11. & in data sphæra descriptus cum ejus anguli solidi, A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.*



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, hujus figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 12.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

b 12. sex. REPERIATVR b recta linea, *ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, ut pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiat* q, *ex coroll. propos. 6. lib. 10. ut numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius cujusdam lineæ, ad cujus intervallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur.* Hoc autem facili negotio ita fiet.
c 1. quinti *Descripto maximo circulo in sphæra data,* c *accommodetur in eo recta, quæ inventæ semidiametri sit duplæ, cum hac recta minor sit diametro sphæræ sive illius circuli maximi, ut infra probabitur. Nam*
d 11. Theo. *si per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* d *faciet id circulum* ABC, *in sphæra, cujus semidiameter, ex*

con-

constructione, potentia subtripla est recta a initio inventa. Deinde inveniatur a rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, ut pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatque ut 3 ad 1. ita per coroll. propos. 6. lib. 10. quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius lineæ, ad cujus intervallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, *parallelus: quo fiet si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ semidiametri inventæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propos. 1. lib. 4. demonstravimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectum, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium planum hoc erit circulo* ABC, *parallelum, b faciet q; in sphæra circulum* DEF, *cujus semidiameter semidiametro intentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alii duo æquales ac paralleli describantur* GHI, KLM, *quod facile fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.* c *Descripto autem in circulo* DEF, *triangulo æquilatero* DEF, *ducatur lateri* EF, *in parallelo circulo* ABC, *ex lemmate primo, recta linea* AB, *ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit uni lateri trianguli æquilateri in circulo* ABC, *descripti: Item huic* AB, *agatur ex altera parte centri, parallela* KL, *in circulo* KLM, *& æqualis: Ac denique huic* KL, *in circulo* GHI, *ducatur ex altera parte centri, parallela* HI, *& æqualis ipsi* EF, *hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo* GHI, *descripti. Completis ergo triangulis æquilateris* ABC, KLM, GHI, *erunt singula latera singulis lateribus trianguli* DEF, *parallela; nimirum* AC, ML, GH, *ipsi* DE; *at* BC, MK, GI, *ipsi* DF, *quod probabitur ex scholio propos. 16. libr. 11. ut in problemate secundo ostendimus parallelas esse* BC, EF, *ad diversas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis* ABC, KLM, *ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notavimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto* D, *rectæ* DE, DA, DM, DB, DF; *ex* G, *rectæ* GH, GK, GC, GL, GI, *&c. ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico* DG, *esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula* DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, *&c. esse æquilatera, & æqualia. Quod ut demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. libr.*

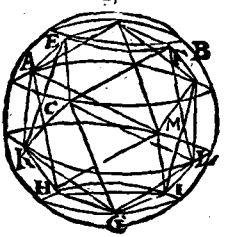
a 12. sexti.

b 1. 1. Theo.

c 2. quart.

lib.13.) fuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulis in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notavimus.

SI Tigitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum DG, *12. angulos ſtatuens in punctis* D, E, *A*, K, *H*, G, I, *L*, B, F, M, C. *Et quia 5. rectæ* DE, DA, DM, DB, DF, *æquales ſunt, cum ſint latera triangulorum æquilaterorũ æqualium; ſi ex polo* D, *per* E, *in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta* A, *M*, B, F : *ac propterea pentagonum* EAMBF, *in uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo ejus latera ſint æqualia, utpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ adfinem lib. 4. demonſtrata, ſunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit* AK, CFD, *ob quinq; rectas æquales* EA, EK, EC, EF, ED : *Et* KHMDE, *ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia* AK, AH, AM, AD, AE : *Et* HGCEA, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* KH, KG, KC, KE, KA : *Et* GIMAK, *ob latera quinque Icoſaedri æqualia* HG, HI, HM, HA, HK : *Et* ILCKH, *ob quinque rectas æquales* GI, GL, GC, GK, GH : *Et* LBMHG, *ob rectas quinque æquales* IL, IB, IM, IH, IG : *Et* BFCGI, *ob quinque rectas æquales* LB, LF, LC, LG, LI : *Et* FDMIL, *ob quinque rectas æquales* BF, BD, BM, BI, BL : *Et* DECLB, *ob rectas quinque æquales* FD, FE, FC, FL, FB; *Et* DAHIB, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* MD, MA, MH, MI, MB. *Ac tandem* GLFEK, *ob quinque Icoſaedri latera æqualia* CG, CL, CF, CE, CK, *ita ut 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, ut in ſcholio propoſ. 8. libr. 13. demonſtravimus; erit juncta recta* AB, *ipſi* EF, *parallela in pentagono* EAMBF: *& AC, juncta ipſi* DF, *parallela in pentagono* AKCFD: *Et* BC, *juncta parallela ipſi* DE, *in pentagono* DECLB. a *Plana ergo per rectas* DE, EF, *&* CB, BA, *ducta parallela ſunt,* b *faciuntque circulos parallelos in ſphæra* DEF, ABC. *Eodem modo erit juncta* KE, *ipſi* HI, *parallela in pentagono* ILCKH : *Et juncta* KM, *ipſi* GI, *in pentagono* GIMAK : *Et* LM, *juncta ipſi* GH, *in pentagono* LBMGH : *Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt* GHI, KLM. *Non aliter erit* AB, *juncta ipſi* HI, *parallela in pentagono* DAHIB : *Et juncta* KL, *ipſi* EF, *in pentagono* GLFEK. c *Igitur* EF, HI, *cum ſint eidem junctæ* AB, *vel* KL, *parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt, Eademq; ratione* DE, GI, *cum ſint eidem junctæ* BC, *vel* KM, *parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea quæ plana circu-*



a 15. *undec.*
b 1. 1. *Theo.*
c 9. *und.*

culorum DEF, GHI, *per rectas* DE, EF, & HI, GI, *ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra* DEF, ABC, KLM, GHI, *paralleli inter se sunt: & tam circuli* DEF, GHI, *inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli* ABC, KLM, *inter se etiam æquales; ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex junctis* AB, BC, CA; & KL, LM, MK, *constituuntur: quippe cum latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.*

QVI A vero juncta recta KB, *quæ connectit non ad easdem partes extrema* K, B, *parallelarum* KL, AB, *in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus* BAK, *rectus ex 4. lemmate, quod* KA, *connectat ad easdem partes extrema* K, A, *earundem parallelarum; aerit quadratum diametri* KB, *æquale duobus quadratis ex* AB, AK. *Rursus quia in* a 47. pri. *pentagono* EAMBF, *recta juncta* AB, *angulum* AMB *subtendit: Ut autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit* AB, *juncta ad* EF, *vel* AK, *ipsi* EE, *æqualem, ut hexagoni latus ad latus decagoni. Atque idcirco* b 10. tertii *cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæræ* KB (*quæ ambas* AB, AK, *potest, ut ostendimus*) *latus pentagoni in eo circulo, in quo* AB, *latus est hexagoni, &* AK, *vel* EF, *latus decagoni. Quare sphæræ diameter* KB, *ad junctam* AB, *proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad* EF, *eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni.* c *Ac proinde cum tam* AB, *latus trianguli* c 12. tertii *æquilateri in circulo* DEF, *potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli* DEF, ABC, *ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri initio inventi, minorem esse diametro sphæræ, ut supra diximus.* dec.

HIS demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam DG, *esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cujus basis triangulum* DEF, *omnes ejus anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.*

COROLLARIVM. I.

CONSTAT ex his sphæræ diametrum ad latus Icosaedri intra descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo ut si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est

esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, ut latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri majus esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni majus est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum uno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: a 22. primi ac propterea duo latera decagoni majora sint latere pentagoni, ideoque unum latus decagoni majus dimidio lateris pentagoni.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, ut latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad junctam AB, ex constructione: erit permutando, ut latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad junctum AB. b 12. tertii dec. b Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ junctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, ut in antecedenti propositione ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita ut semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, ut pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, ut pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur ejus lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis uni lateri pentagoni ejusdem circuli, ex 1. lemmate. Recta autem HI, ad diversas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, ut confusionem itaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notavimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni

ABC-

ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ sunt: quod demonstrabitur, ut in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera juncta, parallela erunt ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod ut ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra describi posse (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione 17. lib. 13.) suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos describimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem viginti puncta notavimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum A S, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, ut in scholio propos. 8. libr. 13. demonstravimus, erit juncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & juncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF: & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallelæ; atque adeo, ex eodem scholio, cum conveniant in recta FG, unum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, FI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto unum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF: LM, MN, NO, OP, PL. c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. *undec.*

b 1. 1. *Theo.*

c 4. *primi.*

DE-

DEINDE quia ex ſcholio propoſ.8.lib.13.rectæ junctæ ND,MB
a 9. *undec.* lateri CH, parallelæ ſunt in pentagonis, CHNID,BGMHC; a erunt quoque ipſæ junctæ ND,MB, parallelæ: Sunt autem & æquales
b 33. *primi.* quod æquales angulos in pentagonis æqualibus ſubtendant. b Igitur & junctæ NM,BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, junctæ NO,CE, cum cõnectant duas NO,EO, æquales ac parallelas, quod utraq; lateri DI, ſit parallela. c Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus eſt, cum ille ducatur per rectas NM,NO, hic vero
c 15. *undec.* per rectas BD,CE, quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſint.

RVRSVS quoniam junctæ rectæ EF, OV, cum ex ſcholio propoſ.8.libr.13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVKPO, æquidi-
d 9. *undec.* ſtent, d parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quod angulos
e 33. *primi.* æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant, e erunt & rectæ jun-
f 7. *undec.* ctę EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in u-
g 1.1. *Theo.* no plano eſt, f cum EF, OV, in eodem ſint plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo, g propterea quod planum in quo exiſtit, ih ſphęra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtravimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia ſint, ſubtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo ejus diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ.47.libr.1. hoc eſt, rectæ junctæ FG, quod æquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & amboquadrata ſimul earundem partium 3. Quibus h cum æquale ſit quadra-
h 47. *prim* tum junctę rectæ OG, quę diameter ſphærę eſt. (Nam cum æquales ſint junctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ.8.lib.13. erit ex lemmate 4. juncta recta OF, ad FG,
i 12. *tertii* perpendicularis, & OG, diameter ſphęrę) erit quoque quadratum
dec. diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectę FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphęrę quadrati rectę FG, triplum erit. i Eſt autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, ut quadratum
k 22 *ſex.* diametri ſphęrę ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; k atque adeo ut diameter

ſphę-

ſphęrę ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ejuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, ut diameter ſphęrę ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, ut in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque ut diameter ſphęræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad junctam rectam AB. in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit uterque circulus ABC, KLM, illius figuræ utrique circulo FGHIK, LMNOP, hujus figuræ æqualis.

Diam. ſphæra.	*Latus pentag.*
Recta FG.	*Lat. triang.*
Lat. triang.	*Lat. hexag.*

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, ut juncta recta FG, ſubtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et ut FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE: erit quoque ut latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagonii in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphęræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut proxime demonſtratum eſt. Igitur ex æquo erit, ut diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, ut diameter ſphęrę ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit uterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propoſ. utrique circulo ABCDE, QRSTV, hujus figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

Diam. ſphæra.	*Lat. pentagoni.*
Lat. triang. in circulo FGHIK.	*Lat. hexagoni.*
Lat. triang. in circulo ABCDE.	*Lat. decagoni.*

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A, à nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cujus baſis pentagonum ABCDE, omnes ejus anguli ſolidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere &tri-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ hujus propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

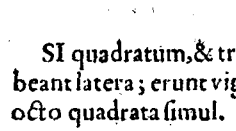
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonstravimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in una eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum majus reliquis tribus? Tertio cubum majorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse majus. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora constituxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad majora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul majora, quam octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse majora. Sit enim rectangulum CE, cujus unum latus CD, octuplum sit lateris quadrati A, & latus DE, lateri ejusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum CE, octuplum quadrati A, *a* cum sit, ut CD, ad latus quadrati *A*, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cujus unum latus FG, decuplum sit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex uno angulo trianguli ad ejus basem demissæ, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cujus unum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli, B, *b* vigecuplum est trianguli B: Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41 libr. 1. rectangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est rectangulum FH, majus esse rectangulo CE. *c* Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertium est ejus perpendicula-



a 1. *sexti.*

b 1. *sext.*

c 12. *quartidecimi.*

cularis, hoc est lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportione m habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8. hoc est FG, 5. & CD, 4. Erit major proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim major proportio 25. ad 16. super noncupartiens sextas decimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod major sit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. *a* Fiat ut FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque major quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH: *b* ac proinde major erit GH, quam HK. Ducta ergo KL, ipsi FG, parallela, erit ut IK, ipsi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. *c* Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque E H, majus, quam C E. Quod est propositum.

a 12. sexti. b 10. quin. c 14. vel 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM *duo quadrata ex diametro sphæra descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. libr. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæra æqualia quoque esse superficiei cubi ejusdem sphæra. Quod est propositum.*

d 10. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad unam basin Icosaedri ducta, major perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad unam basin octaedri, & cubi ducta.

NAM e *quia latus octaedri majus est latere Icosaedri in eadem sphæra: erit unum triangulum octaedri majus quoque uno triangulo Icosaedri. Quare si utrumque solidum ita intra sphæram constituatur, ut triangulum unius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum utrumque tribus angulis superficiem sphæra attingat; Ac proinde perpendicularis è centro sphæra ad basin Icosaedri deducta major erit perpendiculari ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi: f quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, id eoq; æqualiter à centro distent: erit quoq; perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi major. Quod est, proposition.*

e 13. tertiidec. f 21. quartidecimi.

SI

IV.

SI cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi major est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ majora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, ut theoremate 1. demonstravimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri majora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ majus sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo majora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato: erit quoque Icosaedri superficies major superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATUM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus jam, Dodecaedrum majus esse Icosaedro: Icosaedrum majus cubo: Cubum majorem Octaedro: Octaedrum denique majus Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro majus est.

QVONIAM est, *a* ut cubi latus ad latus Dodecaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: *b* est autem latus cubi latere Icosaedri majus: majus quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

a 11. *quartidecimi.*
b 18. *tertii decimi.*

II.

ICOSAEDRVM cubo majus est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in unam basin Icosaedri cadens, major est perpendiculari ex eodem centro in unam basin cubi demissa, ut in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi major quoque est: Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphęræ in unā basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentū, majus solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphęræ in unā basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, ut in scholio prop. 20. lib. 14. demonstravimus, illud solidum

dum Icosaedro sit aquale, & hoc cubo; majus quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

III.

Cubus Octaedro maior est.

Quoniam est, aut latus cubi ad semidiametrum sphæra, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæra majus (Nam b cum latus cubi majus sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, majus semidiametro sphæra; erit latus cubi multo majus semidiametro sphæra) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum. a 27. quartidecimi. b 18. tertiadecimi.

IV.

Octaedrum Tetraedro maius est.

Quoniam basis octaedri minor est basi Tetraedri, c quod basis Tetraedri ad basim octaedri proportionem habent sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæra ad unam basin Octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæra centro ad unam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro majorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri major, d cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæra in unam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficie octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæra in unam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum ex scholio propos. 20. libr. 14. illud solidum octaedro sit aquale, hoc vero Tetraedro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. c 14. quartidecimi. d 14. quintidecimi.

Aliter. Quoniam est, e ut latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aqualitate erit quoque, ut latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri. (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. e 22. quartidecimi. f 18. tertiadecimi. g 10. quinti.

Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet ut ro-

ut rectangulum sub linea potente $\frac{27}{34}$ quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autē rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod ejus latera minora sint sphæra diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod erat propositum.

a 32. quartidecim. b 27. quartidecimi.

Aliter. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri, minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ, & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, quacubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

Eodem prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 27. quartidecimi. d 18. tertii decimi.

Quoniam enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

Superficiem vero Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate 4. ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

c 27 quartidecimi.

Deinde c quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri major.

f 14. quartidecimi.

Denique f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem majorem esse Tetraedri superficie.

Vides igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita ut quo majus fuerit corpus, eo majorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam g ut supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, ut hic demonstravimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, ejus vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra de-

g 18. tertii decimi.

scripta

scripta sint latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo sustinent; ut supra ostensum est, sta contrario ordine eorundem superficies connexa, atq; soliditates semituo superant, ut hoc loco demonstravimus. a 18. tertii. decimi.

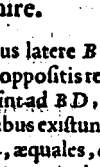
Caterum prætereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum: soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longe aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita ut Icosaedrum superet Dodecaedrum. Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denig; Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGULI INCLINATIONIS duarum basium cujuscunque solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hyspiclis præceptore.

I.

Angulum inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, invenire.

Sit pyramis A B C D, cujus latere B D, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E, quæ cum perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum A B D, C B D, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis A E C, basium A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum super rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propositæ, ipsi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, constituatur super F G triangulum F G K, habens utrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, utrique perpendiculari A E, C E, cum perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cum enim latera K F, K G, æqualia sint lateribus E A, E C: & basis F G, basi A C: æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. *d* Cum enim latus A D, vel illi æquale



b 8. primi.

c 8. primi.

d 12. quarti.

æquale AC, ſesquitertium ſit potentia utriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum utriusque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtravimus.

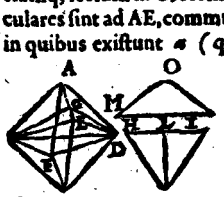
COROLLARIVM.

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis; cuiusmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eosdem ſubtendentia ſint æqualia.

II.

Angulum inclinationis duarum octaedri baſium, unius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cujus diameter BD. Ex angulis, B, & D, ad latus AE. triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt [a] (quod in triangulis BGA, BGE. anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale in quo ducta KL, perpendiculari ad HI. conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulum OMN. habens utrumque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc eſt, utriq; perpendiculari BG. DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON. æqualia ſint lateribus GB, GD, & baſis MN. baſi BD: [b] Æquales erunt anguli MON, BGD, Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum



a 6. primi.

b 8. primi.

a Cum

a Cum enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB: *b* latus vero AB, potentia sesquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ BG; ideoq; ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, majus est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus GBD, obtusus erit, ut in scholio propos. 12. lib. 2 ostendimus.

a 14. *terdecimi.*

b 12. *quartidecimi.*

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium Octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineātur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cujusmodi est BD; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

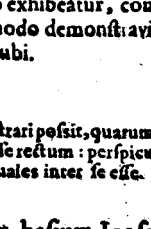
c 8. *primi.*

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alterum, invenire.

SIT cubus ABCDEFGH, *in* quo secetur latus DE, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, *in* punctis k, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; *d* quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; *e* angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, *f* angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Re- *f* 10. *undecimi.* ctus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstravimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

d 3. *primi.*



e 29. *primi.*

COROLLARIVM.

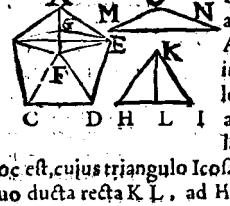
QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alterum, invenire.

ESTO pyramis ABCDEF, unaex 12. pyramidibus Icosaedri

dri, cujus basis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diviso itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in probl. 2. hujus scholij, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducũtur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Hujc igitur in plano quovis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum,



hoc est, cujus triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens utrumq; latus MO, NO; perpendiculari KL; æquale, hoc est, utriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; *a* Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB, *b* erit recta AB, major quam recta BG; ad eundemq; modum AE, major erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, majores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita ut rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, major erit angulo BAE: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper unius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.

COROLLARIVM.

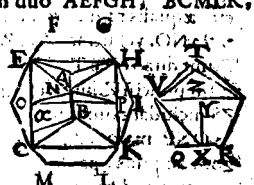
Non obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, FG, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cujusmodi est BE: omnes inter se æquales; quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales erunt.

Angu-

V.

Angulum inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

Cum per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint hujus modi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK.



His porro pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, cujus quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, L, A. Diuiso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorũ ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quouis plano hac arte constituemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cujus angulo T, recta subtendatur VS, æqualis existens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia sint, angulosq; contineant æquales. Diuisa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cũ VS, sit parallela ipsi QR, ex scholio propos 8. lib. 13. Ac postremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens utrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo inclinationis QNP. Ductis enim rectis, NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales; Æquales erunt & bases NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideo, que & residui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales sunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: nec non & angulis VXY, VYX, trianguli VXY, (sunt enim EON, HPN, VYX, ostensi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonstratum; Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus PH: Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exi-

stentes

stentes ipsi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia OE, PH, æquales sunt, ac parallelæ; erit quoque recta conjuncta OP, æqualis & parallela ipsi EH, ideoque æqualis ipsi EC, hoc est, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi OP; æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta B α. ipsi NO, parallela; cum sit quoque NB, ipsi O α. parallela, ex scholio propos. 8. lib. 11. Parallelogrammũ erit NO, α B, ideoque recta B α. ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angulo C α B, qui rectus est (æqualis nimirum interno CON) majus est latere B α. hoc est, recta NO, vel utraq; ZV, ZS. quæ ipsi NO, ostensæ fuit æquales; Erunt duæ rectæ TV. TS. majores duabus rectis ZV. ZS. Cadit igitur punctũ Z. intra triangulũ TVS. ita ut rectæ TV. TS. rectas ZV, ZS, includant omnino: Atq; proinde angulus VZS. ideoq; illi æqualis ONP. maior est angulo pentagoni T; Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est major recto. Multo igitur major recto erit angulus inclinationis ONP. ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

Patet igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum, contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt NO, NP, subtendantque à rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis: Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimi sexti Finis.