ad usum
F. Joãis Damasceni à S. Maximin.
Augustin. Discal.

EUCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

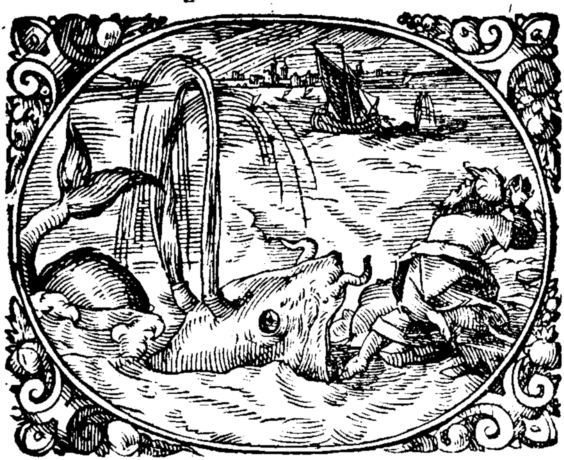
Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICUIS DEMONSTRA-[illegible]ibus, accuratisq́; scholiis illustrati: nunc quarto [illegible]i, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO

Bambergensi è Societate IESU.



FRANCOFURTI,

Sumtibus hæredum IONÆ ROSÆ,

Anno M. DC. LIV.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

Unitas est, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

HActenus egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut absq; eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neq; intelligi. Nam non raro pleraq; laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabiles atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, & conjuncta, ut absq; his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorum explanationem, ut doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum eæ rei Geometricæ inserviunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principiis, definit initio unitatem, docetque eam esse, secundũ quã unamquodq; eorum, quę sunt,

 unum

unum esse dicitur. Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit divisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut libro primo docuimus.

II.

NUMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

Cum numerus sit multitudo quædam ex unitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt unitates eum constituentes: Ita ut unitas sit pars cujusvis numeri denominata ab ipso numero, cujus est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo unitatibus, dividitur in totidem partes, nimirum in 8. unitates quarum quælibet, octava pars dicitur octonarii. Sic quoque numerus 100. ex centum unitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

Ex his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademq; mensura, nimirum unitas ut ductum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione convenire, cum plurimæ earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles ut clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

Non est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem dũtaxat aliquotam desinit. cum hæc solum propriè dicatur metiri totum, ut ibidem latiùs explicavimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter hujus numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, ut perspicuum est.

Omnis autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cujus pars est, metitur: ut 6. pars hujus numeri 42. nomen trahit à 7 cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IV.

Partes autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem majoris numeri, quem non metitur, non partem sed partes appellari: cujusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamvis enim, cum non metiatur, nisi per suas unitates pars ipsius dici non debeat; aptè tamẽ congruenterq; partes poterit appellari, quod quinq; contineat unitates,

tes,quarum quælibet decima octava pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimas octavas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum,non autem & aliquantam,ut volunt nonulli: alioquin supervacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

Cæterum partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris,per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet,qui partes dicitur,& eum, cujus ille partes appellatur: Ita ut si communis deorum numerorum mensura metiatur minorem per 3 & majorem per 5. dicatur minor majoris tres quintæ, Tales partes sunt 6. hujus numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. pars. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas ejusdem numeri 10. cum unitas,eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem judicium habeto & de reliquis.

Quod si roges,cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat,qui majoris pars est,verum etiam illum, qui partes non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit. Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ majorem non metitur partes appellavit,sed tantum eam, quæ majorem metitur, partem. Respondemus: hujus rei causam esse, quod omnis numerus minor cujuslibet majoris aut pars est,aut partes, ut propos. 4. hujus lib. ostendetur; pars quidem,cum ipsum metitur, partes verò,cum non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim propositis duabus magnitudinibus inæqualibus necessario minor aut pars aut partes est majoris, cum eæ persæpe sint incommensurabiles,ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes majoris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor majoris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem,& partes explicavit.

V.

Multiplex vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille solum numerus minor, majoris pars dicitur qui majorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus major, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur, adeo ut numerus major, cujus minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est &c. Si vero majorem minor non metiatur, nullo modo erit major minoris multiplex. Si enim major minoris multiplex esset, metiretur minor majorē, per hanc definitionem. Et vicissim, si major minoris non fuerit multiplex, minor majorem non metietur? Nam si metiretur minor majorem, esset per hanc defin. major minoris multiplex.

VI.

Par numerus est, qui bifariam dividitur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. pares vocantur, quoniam dividuntur bifariam, sive in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2.5.20.50.500.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur, vel qui unitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5.11.15 37.101.1001. impares nominantur, quia bifariam dividi nequeunt. Vel certe quia unitate differunt ab his paribus 4.10.14.36 100.1000. vel etiam ab his 6.12.16.38.102. 1002 Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, unitatem in numeris prorsus esse individuam Si enim divideretur, omnis numerus impar haberet dimidium: atque adeo bifariam dividi posset. Nam hujus imparis 11. dimidia pars essent quinque unitates & semis: cujus contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par est, qui bifariam dividitur, fit ut quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cujusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

Cæterum si rectæ duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes

hoc

hoc esse absurdum ut excluderent numeros ejusmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videntur esse, addiderunt utrique definitioni particulam, tantum, ita ut numerus pariter par, secundũ eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum. Pariter autẽ impar, quã par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit ut propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum ut dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam utriusq; ut constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diversa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum Nicomachi, Boetii, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, ut perspicuum est & ex definitionib. traditis, in quibus nõ reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunnt & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeste omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonstratq; omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum. Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cujusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse & pariter impares, ut sunt 12. 20. 24. 28 98. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus Impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alii infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

Quod si numerum quempiam nullus numerus, sed sola unitas metiatur, ita neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c. Nam eos sola unitas metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura metitur.

Sicut numerus ille, quem sola unitas metitur; Primus metitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos præter unitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamvis singuli eorum habeant numeros, qui eos præter unitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15.8. sunt numeri inter se primi, quia sola unitas, mensura communis illos metitur. quamvis enim priorem metiantur hi numeri 1.& 5. posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorum utrumq; metitur, sed sola unitas utriusq; est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter se dicentur, quod præter unitatem, nullum habeant numerũ, mensurã communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Deniq; unitas, & quivis numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola unitas unitatẽ, & numerum quemvis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Numerum, quem præter unitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum. cujusmodi est hic 15. Nam eum horum numerorum 3.5. metitur. Perspicuũ autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prẹter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIV.

Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

Duo numeri, vel plures, quos præter unitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se cõpositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter unitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sũt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur; licet per se sumptus, Primus vocetur.

Nu-

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates. & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. unitates procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scil. quot unitates in multiplicante 8. cõtinentur, procreaverimus eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerũ 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600, 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreari ve ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris, quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

Sequitur ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad unitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, ut faciat productum, quoties in altero multiplicantium est unitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties aliter multiplicantium unitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad unitatem habet. Itaque Multiplicatio sive ductus unius numeri in alium ita quoque describi poterit.

Multiplicatio numeri in numerum, est inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatem.

Sic vides ex multiplicatione, sive ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. ut 8. ad 1. Vel ita ad 8. ut 6. ad 1.

Huic definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum dividere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in iis, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

Numerus numerum dividere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis unitatibus indicat, quoties dividens numerus in diviso continetur.

Vt numerus 6, dividere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit

rit numerus 8. qui octo suis unitatibus indicat, dividentem numerum 6. in diviso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. dividere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis unitatibus indicat dividentem numerum 8. in diviso 48. contineri sexies.

Hinc fit numerum ex divisione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus divisus habet ad dividentem. Cum enim, ut in definitione diximus, procreatus numerus suis unitatibus indicare debeat, quotiens dividens numerus in diviso contineatur, continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus divisus dividentem continere: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex divisione genitus ad unitatem, quam divisus numerus ad dividentem. Itaque divisio unius numeri per alium ita quoque poterit describi.

Divisio numeri per numerum, est inventio numeri qui ad unitatem habet eandem proportionem, quam numerus divisus ad dividentem.

Ita vides ex divisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. ut 48. ad 6. Item ex divisione ejusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. ut 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur, diviso numero per numerum, divisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per divisionem inventi in numerum dividentem. Diviso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni, ex

A, 48. B, 8. C; 6. D, 1.

ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, ut C, ad unitatem D: Ex definitione autem divisionis, ita quoque se habet A, ad B ut C, ad unitatem D perspicuum est, numerum ex C, in B, genitum esse numerũ A, cum tam ille genitus, quam A eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, unitatem.

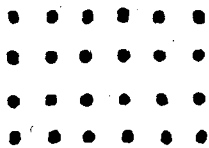
Hæc omnia conveniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis; Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (sive fracti adhæreant integris, sive non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis. Dividere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties dividens in diviso continetur: Ita ut in multiplicatione inveniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatẽ; In divisione autem procreetur numerus, qui ad unitatem eandem proportionem habet, quam numerus divisus ad dividentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ multiplicare dicitur numerum 20. quando numer. 20. toties

ties fuerit compositus, quod sunt in $\frac{1}{2}$ unitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim unitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$ sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20 multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$ si $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties unitas est in 20. productusque fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. ut $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ se mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$ tertiam partem unitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$ sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$ semissem tantum continet unitatis Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$ qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$ sive $\frac{3}{6}$ & semissis numeri $\frac{1}{3}$ sive $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusque ad finem lib. 9.

Rursus numerus $\frac{1}{2}$ dividere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, dividentem numerum $\frac{1}{2}$ vicies contineri in diviso numero 10. ita ut eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri divisi 10. ad dividentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$ dividere dicetur $\frac{1}{6}$ quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans dividentem numerum $\frac{1}{2}$ non totum contineri in diviso $\frac{1}{6}$ sed tertiam ejus partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$ idem sit qui $\frac{3}{6}$ liquido constat tertiam hujus partem, nimirum $\frac{1}{6}$ contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat divisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonstrabimus, ubi omnia hæc, quæ de multiplicatione, divisioneque fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

Cum autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorũ planus appellatur, quia secundum suas unitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cujus latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ ineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangu um continere dicuntur, ut latius lib. 2. explicavimus. Vt nume-

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque ejus sunt 4. & 6. quia ejus unitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cujus unum latus sex unitates, alterũ vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, ejusque latera 8. & 8.

Cæterum cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc solo in hisce libris numerorũ disputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint & æquales, sive ambitum, sive aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conveniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono &c. quod ad ambitũ spectat; tamẽ si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Potest autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, ut numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. est genitus Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt altero unitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui jamjam definietur, dici potest. Verum est, unitatem, aliquando dici posse numerum planum, quamvis improprie; quia ejus latera sunt duæ unitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam unitatem producunt.

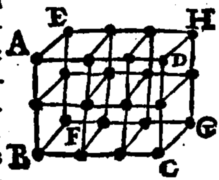
XVII.

Cum vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur. Qui autem numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel deniq; ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24.

ap-

appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia ejus unitates in longum latum atq; profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ parellelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cujus omnes tres dimẽsiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; unus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nã si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas; Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium unitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur habebitur basis 6. unitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habẽs 4. unitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cujus altitudo continet duas unitates.



Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo unitatum, cujus longitudo B C, quatuor unitates & B F, latitudo duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales. ut totus numerus solidus contineat 24. unitates, ejusque altitudo B A. unitates tres. Similiter si basis sit A B F E, sex unitatum, cujus longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet unitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietq; totus solidus numerus rursũ 24. altitudinem B C. habens quatuor unitatum. Si denique basis sit A B C D, 12. unitatum, cujus longitudo B C. quatuor continet, & latitudo A B, tres, superponetur illi alia basis similis & æqualis E F G H constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6.3.2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris solidis judicandum erit.

Denique & unitas interdum solidus appellabitur numerus, & si non proprie quia ejus latera sunt tres unitates, ipsam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

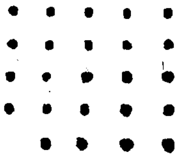
Definit autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cujus bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Pla-

Planum illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum unitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum cujus longitudo latitudini eſt æqualis, ita ut omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum, æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Hujuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi ejus unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum in quolibet latere habens quinque unitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

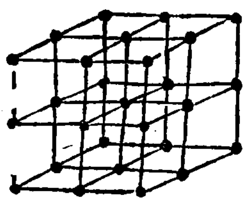


Alteruter autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter, Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

Solidum quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cujus unitates in longum, latũ, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita ut omnes ejus dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, ſive profunditas, æquales ſint, Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſive ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.



Quilibet vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NUMERI proportionales ſunt, cum primus ſe-

cun-

cundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (hujusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; *vel certe cum primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem vel easdem partes.* Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto esse corruptam, cum manca sit, atque imperfecta, comprehendit solum proportionales numeros in proportione multiplici, submultiplicive, & in proportionib. reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est: in submultiplici vero, cum primus secundi, & tertius quarti eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, ut vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus primus numerus secundi, & tertius quarti, neque æque multiplex est, neq; eadem pars, neq; eædem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdemve partes; ut perspicuum est ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. ubi omnes proportiones, rationales copiose explicuimus. Itaque hi numeri 12.4.9.3. proportionales sunt, cùm primus secundi, & tertius quarti æque multiplex sit, nimirum triplus. Item hi 4.12.3.9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri 6.8.9.12. quod primus secundi, & tertius quarti eædem partes sint, videl. tres partes quartæ. Deniq; & 7.6.14.12. & 7.4.14.8. & 11.5.22.10. & 12.5.24.10. sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eandem partem videl. sextam: In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas: In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem videl. quintam continet: In ultimo denique primus secundum, & tertius quartum, bis & præterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, non sit æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

Quo-

Quotiescunq: igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem majores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur; Vel certe primus secundum & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad majores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti esse partem eandem, vel partes easdem: Et è contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam si de proportione æqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto æqualem debere esse, ut proportionales numeri dicantur,

Ex hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales esse. Cum enim æquales numeri sint ejusdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium sit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes, perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerũ ad æquales, eandem habere proportionem, juxta hanc definitionẽ.

Rursus quia numeri ad eandem habentes eandem proportionẽ, sunt illius vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illum æqualiter continent, eandemque insuper ejus partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes, Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem vel partes, secundum hanc eandem definitionem, manifestum est numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

Pari ratione infertur, majoris numeri ad eundem, majorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, ejusdem ad minorem, majorem esse proportionem, quam ad majorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet majorem proportionẽ, majorẽ esse: Ad quem autem idem habet majorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

Hæc definitio convenit etiam numeris fractis, sive integri numeri simul adsint, sive non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales, $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, ut patet, si priores duo ad eandem denominationem revocentur, ut ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$ & posteriores quoque ad eandem denominationem, ut ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$ Quo pacto autem fracti numeri ad eandē denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$ cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, ut constat, si priores duo ad hos ejusdem denominationis revocentur $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$ & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$ atque ita de cæteris.

XXI.

Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quælibet duo illius latera quibusvis duobus lateribus hujus esse proportionalia, sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus laterib. hujus. Nā hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas unitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & sex similes sunt, quoniam illius latera 6.4. proportionalia sunt lateribus hujus 3.2. quamvis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2.

Eodē modo ut duo numeri solidi similes sint, non requiritur, ut quævis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet laterib. alterius: sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum unitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus hujus 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 2.8.2. vel 6.4.3.

Itaque possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sūt enim hi numeri plani 24.6. similes, ut dictum est, & tamen si latera prioris sumantur & 3.8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis, 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

Hæc porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, sive in integris cũ fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunque quia fieri potest, ut interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$ 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

Numerus ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, juxta defin. hujus lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cujusmodi sunt hi numeri 6. 28, 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in unam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alii) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

Quod si partes omnes aliquotæ alicujus numeri simul acceptæ majores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

Luce autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partib. sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri majoris pars dici potest, sive eum metiatur, sive non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adjungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & ejus interpretes uti videntur.

XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem nume-

numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numer. 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, ut propos. 16. hujus lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

Hæc quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$ metiri dicitur numerum $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$ gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIV.

Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel partes, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

Quæ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartū, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdē partes, ut supra defin. 20. docuimus.

XXV.

Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi, nequeunt.

XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hæc definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. lib. 6.

Possunt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione inversaque ; de compositione, divisione & conversione rationis ; de ratione ex æqualitate ; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum convenire.

POSTULATA, SIVE PETITIONES.

I.

Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

Quolibet numero sumi posse majorem.

Quamvis enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad unitatem individuam diminutio eveniat ; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unitatis. Quare quolibet numero proposito major exhiberi potest, ille videlicet, qui ex unius unitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æque multiplex est, vel æque multiplices sunt æquales inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV. Quo-

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Vnitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum metitur.

Nam unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constitui. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per unitatem.

Cum quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B, & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, ut demonstrabitur propos. 16. hujus lib.

A.... B.....
C.........

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per unitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.

Metiatur enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C.

A....B..
C........

Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens compositum quoque ex ipsis metitur.

Metiatur numerus A numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos, B C, C D; erit tam B C, quam C D ipsius A, multiplex. Diviso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, æquales & ipso C D, in partes C F, F G; G D, eidem A, æquales,

A...
B....E.... C....F.... G....D

erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A, Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

Metiatur numerum A, numerum B, & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B. metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D, erit C D, ipsius B, multiplex. Diviso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D, quandoquidem

A...
B.........
C.........E.........D

numerum B, tam numero C E, quam numero E D, æqualem metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C, E, E D, compositum. Quod est propositum.

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquũ D C. Cum enim A, metiatur &

B C.

B C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipsius A, multiplex, aut certe B D, ipsi A, æqualis erit. Diviso ergo tam B C, quam B D, in partes ipsi A, æquales: erit reliquus numerus D C, vel una pars numeri B C, ipsi A, æqualis, vel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipsi A, vel ejus multiplex. Metitur igitur A, ipsum D C. Quod est propositum.

A . . .
B . . . . D . . . C
B . . . . D C
B . . . . D C

THEOR. 1. PROPOS. 1. I.

Si duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit unitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

Sint duo numeri propositi inæquales A B, C D, *quorum* C D, *minor ex majore* A B, *quoties potest, detrahatur: & reliquus* E B, *ex* C D, *quoties etiam potest; & reliquus* F D, *ex* E B: *Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatem* G B, *quæ quidem præcedentem, numerum* F D. *metitur, detractio perveniat. Dico numeros* A B, C D *esse inter se primos, hoc est, solam unitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit* H, *communi mensura præter unitatem. Quia ergo* H, *metitur numerum* C D; *&* C D, *numerum* A E, (*quod* C D, *vel pars sit ipsius* A E, *vel certe ei æqualis, cum detractus ex* A B, *reliquerit numerum* E B,) a *metietur quoque* H, *ipsum* A E: *At* H, *metitur quoque totum* A B, b *Igitur & reliquum* E B, *metietur. Metitur autem* E B, *ipsum* C F. c *Igitur &* H, *ipsum* C F, *metietur; Ac propterea, cum & totum* C D, *metiatur*, d *metietur quoque reliquum* F D. *Cum ergo* F D, *metiatur ipsum* E G; e *metietur etiam* H, *ipsum* E G: *Metiebatur autem & H, totum* E B. f *Reliquã igitur unitatem quoque* G B. *numerus* H, *metietur, partem totam. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros* A B, C D, *metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.*

A . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H - - - -

a 11. pronun.
b 12. pronun.
c 11. pronun.
d 12. pronun.
e 11. pronun.
f 12. pronun.

SCHOLIVM.

Convertemus cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

 Si duo-

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem quoad aſſumpta ſit unitas.

Sint duo numeri inter ſe primi A,B CD, quorum minor CD, ex majore AB, quoties poteſt detrahatur, & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt, & reliquus FD, ex EB, relinquens G,B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad unitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad unitatem detractio perveniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus

A . . . . E . . G - - B
C . . . . . . F . . D

a 11. pronun. GB præcedentem FD, ex BF, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG, *a* metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſeipſum metiatur *b* metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF. *c* Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſũ FD, poſitus ſit metiri: metietur *d* quoque ipſum CD, ex CF, FD, compoſitum. At vero CD, metitur ipſum AE. *e* Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde cum & ipſum EB, metiatur, ut oſtenſum eſt; *f* metietur & ipſum AB, ex utroque AE, EB, compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentẽ metietur, donec aſſumpta ſit unitas. Quod eſt propoſitum.

b 10. pronun. c 11. pronun. d 10. pronun. e 11. pronun. f 10. pronun.

Eodem modo & hoc verum eſt.

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem uſque non perveniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

Nam ſi detractio hujuſmodi ad unitatem uſque perveniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, *g* ut Euclides demonſtravit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.

g 1. ſep.

Ex his facile dignoſcemus an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi nec ne. Nam detracto ſemper minore de majore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentẽ metiatur, quoad aſſumpta ſit unitas: ipſi erunt inter ſe primi, *h* ut Euclides demonſtravit, ſi vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti cum ille idem reliquus numerus utrumque numerum propoſitum metiatur, ut perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori hujus ſcholii. Ex eo enim, quod reliquus

h 1. ſep.

quus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit eundem reliquum G B, utrumque A B, & C D, metiri.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur duo numeri A B, C D, *non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor* C D, *ex majore* A B, *quoties potest, relinquatque* E B, *numerum, qui ex* C D, *subtractus relinquat* F D, *& sic deinceps semper minor de majore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem pervenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad unitatem deveniretur,* a *numeri* A B, C D, *essent inter se primi; quod est contra* a 1. sept.
hypothesin. Perventum ergo jam sit ad reliquum numerum F D, *qui detractus ex* E B, *nihil relinquat, sed eum metiatur.* Dico F D, *esse maximam mensuram communem numerorum* A B, C D, *Quod enim utrunque metiatur, ita ostendemus. Quia* F D, *metitur ipsum* E B, *&* E B, *ipsum* C F, b *metietur quoque* F D, *ipsum* C F, *atq; adeo cum & seipsum metiatur,* c *metietur & totum* C D, *ex* C F, F D, *compositum.* At C D, *ipsum* A E, *metitur,* d *Igitur &* F D, *eundem* A E, *metietur, Ac propterea cum* F D, *metiatur quoque ipsum* E B: e *metietur etiam totum* A B, *ex utroque* A E, E B, *compositum.* Metitur *igitur* F D, *utrumque numerum* A B, C D.

A..............E......B
C......F..D
G------

b 11. pronun.
c 10 pronun.
d 11. pronun.
e 10. pronun.

Quòd autem F D, *sit maxima mensura communis illorum ita probabimus: Si enim fieri potest, detur major mensura communis,* G, *quam* F D. *Quoniam ergo* G, *metitur utrumque* A B, C D; Et C D, *metitur ipsum* A E, f *metietur quoque* G, *ipsum* A E, g *Igitur & residuum* E B: At *vero* E B, *metitur* C F. h *Metietur ergo &* G, *eundem* C F. i *Igitur & residuum* F D; *major minorem. Quod est absurdum. Non ergo major numerus, quam* F D, *numeros* A B, C D, *metitur; Ac proinde* F, D *maxima est mensura numerorum* A B, C D.

f 11. pronun.
g 12. pronun.
h 11. pronun.
i 12. pronun.

Quod si minor numerus C D, *metiatur majorem* A B, *ita ut detractus ex* A B, *nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & seipsum metiatur, ut in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.*

A.........B
C.....D

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros metiri quoque maximam eorundem communem mensuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem Eademque ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex iis, quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A,B,C, Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A & B, sint inter se primi : Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem propter numeros A, & B, inter se primos.

A..........
B.......
C.....

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi a sit eorum maxima mensura communis inveta D, quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numer. *D*, communem mensurã.

a 2. *sep.*

A...............
B............
C.........
D...

Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & *D*. vel inter se primi vel non : Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram : metietur ejusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. hujus propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesin. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. *b* Inventa enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; *c* metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cũ idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

A..........
B......
C.....
D...

b 2. *sep.*
c 11. *pronũ.*

A.............
B..........
C......
D.... E..

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus ; si quinque, in qua-

quatuor,&c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Dentur tres numeri A, B, C, *non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit* D, *maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo* D, *metiatur quoque ipsum* C, *perspicuum est* D, *esse maximam mensuram numerorum datorum* A, B, C. *Nam si major numerus dicatur metiri numeros* A, B, C, *metietur idem, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam mensuram numerorum A, & B, major numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero* D, *non metiatur ipsum* C; *erunt saltem* D, *&* C, *inter se compositi. Cum enim sint* A, B, C, *inter se compositi, metietur quacunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt* D, *&* C, *inter se compositi* a *Sit eorum maxima mensura* E. *Dico* E. *esse maximam mensuram communem datorum numerorum* A, B, C. *Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam* E, *metitur numeros* C, *&* D, *at* D, *ipsos* A, *&* B, b *metietur quoque* E, *ipsos* A, *&* B; *Ac proinde tres numeros* A, B, C, *metietur.* a 2. sep. b 1. pron. nun.

A . . . .
B . . . . D . . . .
C . . . . . . E . . F - - - -

Quod autem E. *sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit* F, *major quam* E, *eorum mensura communis. Quia igitur* F, *metitur numeros* A, *&* B: *metietur quoque, per coroll. propos. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam eorum mensuram communem; Metitur autem &* C. *Igitur* F, *metiens* D, *&* C, *metietur quoque* E, *eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus major minorem, quod est absurdum. Non ergo major numerus, quam* E, *numeros* A, B, C, *metitur; atque adeo* E, *maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.*

COROLLARIUM.

Hinc perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

Hoc etiam colligitur ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

Pari

Pari ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se maxima eorum communis mensura invenietur: locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, invenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum, si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura &c. Reliqua vero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

iij. THEOR. 2. PROPOS. 4.

Omnis numerus, omnis numeri, minor majoris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A, minor, & B, major. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur qualibet unitas numeri A, pars est numeri B: perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, unitates.

A.....
B.......

Sint deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3. hujus lib.

b 3. defin.

A....
B.........

SED jam A, non metiatur ipsum B, a inventa autem maxima eorum mensura communis sit C; dividaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singula ipsi C, sint aquales. b Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars ejusdem B: similiter & DE, & EF: ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A, F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor majoris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

a 12. sep.

A..D..E..F
B.......
C..

THEOR. 3. PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Sit numerus A, eadem pars numeri BC, qua est numerus D, numeri EF, Dico utrumque numerum A, & D, simul utriusq; numeri BC, & EF, simul eandem esse partem, qua est vel A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Divisis enim numeris BC, EB, in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A, & D, aquales; erit multitudo partium nume-

A...... | D....
B......G......C | E....H....F

ri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt, si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æqualis erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterq; A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quæ est A, ipsius B C, vel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Idem hoc verum est in numeris fractis, eademque prorsus demonstratio adhibebitur: ut in hoc exemplo apparet, ubi numerus A, numeri B C, & numerus D, numeri EF, eadem pars est; ac proinde uterq; simul A, D, utriusque B C, E F, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius B C: si nimirum B C, E F, dividantur in partes B G, G C; E H, H E, ipsis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$

B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C, E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

Quod si quando contingat, numerum fractum dividi non posse in partes æquales propositas, propterea quod numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerũ partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cujus numerator in propositas partes dividi potest. Vt si fractio $\frac{5}{9}$ secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit uterq; ejus numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. ut gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{8}$. $\frac{5}{8}$. secunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

Rursus quando adsunt integra, revocanda prius erunt una cum fractione ad unam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partiũ, &c. Vt si numerus $4\frac{3}{7}$ secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc unicam fractionem. $\frac{31}{7}$ deinde utrumque ejus numerum per 6. multiplicabimus, ut fiat fractio $\frac{93}{21}$ cujus tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in sequentibus quoque propositionibus observanda sunt, quando fractionibus accommodantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alii integri.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas,

nitas, vel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc autem perspicuè in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A. | D. | | A. | D...

B. G. C. | E. H. F | | B. G. C | E...H...F

Possumus etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A,B,C, numerorum D E, F G, H I, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C, simul omnium numerorum D E, FG, H I, simul eandem esse partem, quæ

A... | B... | C..

D....K....E | F...L...G | H..M..I

est A, ipsius D E. Divisis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipsis A,B,C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quam numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & F L, erunt A,B, simul æquales ipsis D K, F L, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & H M; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis D K, F L, H M, simul. Simili ratione erunt A,B,C, simul æquales ipsis K E, L G, M I, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in D E, FG, H I, aggregatum numerorum A,B,C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, simul ipsorum D E, FG, H I, simul quæ A, ipsius D E.

Idem sequitur, si loco unius numerorum A,B,C, sumatur unitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures unitates, ut de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A. | B.. | C... | | A. | B. | C.

D.K.E. | F..L..G | H...M...I | | D.KE | F.L..G. | H.M.I

Hæc etiam fractis numeris conveniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunq; fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiam si aliqui numerorum sint integri, vel unitates, ut hic videre licet.

A, 1.	B $\frac{1}{2}$	C, $\frac{3}{4}$
D 1 K 1 E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{3}{4}$ M $\frac{3}{4}$ I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D, Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F, erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, simul omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

A........ B...... C....

D.... E... F..

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex est unius unus, tam multiplices erunt & omnes omnium, Vt ex demonstratione liquet.

Quod si loco unius numerorum D, E, F, assumatur unitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.

A.. B.... C...... | A.. B.. C..

D. E.. F... | D. E. F.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

Sit numerus A B, *eadem partes numeri* C, *qua numerus* D E, *numeri* F. *Dico utrum*que numerum A B, & D E, simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, *vel* D E, *ipsius* F. *Divisis enim numeris* A B, D E, *in partes*

A...G...B | D....H....E

C......... | F..........

tes A G,G *B* ; *D H,H* E,*numerorum* C,*&* *F*; *erit multitudo partium in numero* A B, *æqualis multitudini partium in numero* D E: *propterea quod eadem partes est numerus* A *B* , *numeri* C , *qua numerus* D E,*numeri* F. *Quia igitur,quà pars est* A G, *numeri* C, *eadem est* D H,*numeri* F;a *erit uterque* A G,D H,*simul eadem pars utriusq;* C,F,*simul,qua* A G,*ipsius* C,*vel* D H,*ipsius* F. *Eadem ratione erit uterque* G B,H E, *simul eadem pars utriusque* C,F, *simul, qua* G B,*ipsius* C,*vel* H E,*ipsius* F : *Et sic deinceps,si plures partes fuerint in* A B,*D* E, *erunt tot aggregata partium in numeris* A B, *D E,contenta,quorum quodlibet eadem pars est numerorum* C, F,*simul,qua pars est* A G,*ipsius* C ; *quot partes eadem est numerus* A B, *ipsius* C,*vel* D E,*ipsius* F: *Ac proinde eadem partes erit uterque numerus* A B,D E,*simul utriusque numeri* C ,F,*simul,qua* A B, *ipsius* C,*vel* D E,*ipsius* F. *Si numerus ergo numeri partes fuerit,&c. Quod erat demonstrandum.*

a 5. sep.

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis,una cum demonstratione : ut hoc exemplum demonstrat.

A,$\frac{1}{9}$ G,$\frac{1}{9}$ B   D,$\frac{2}{7}$ H,$\frac{2}{7}$ E

C,$\frac{1}{7}$ F,$\frac{8}{9}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros sive integros,sive fractos extendentes,hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum,eædem partes ; Et omnes omnium simul eædem partes erunt,quæ unus unius.

Eadem enim est demonstratio,si modo pro quinta propos. assumatur id,quod secundo loco demonstravimus , in scholio præcedenti,ut hic perspicuum est.

A . . K . . B	C . . . L . . . D	E . . . . M . . . . F
G	H	I . . . .

THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij.

Si numerus numeri pars fuerit , qualis ablatus ablati : Et reliquus reliqui eadem pars erit,qualis totus totius.

Sit numerus A B,*eadem pars num.* C D , *qua ablatus* A E, *ablati* C F. *Dico reliquum* E B , *eandem esse partem reliqui* F D, *qua est totus* A B , *totius* C D. *Ponatur enim* E B , *numeri* G C, *eadem*

eadem pars, qua est AE, A...E..B
ipsius C F, *vel totus* AB, G.... C.......... F.... D
totius C D.

Quia igitur A E, *eadem est pars ipsius* C F, *qua* EB, *ipsius* G C: a *erit uterque* A, E, EB, *simul eadem pars utriusque simul* C F, G C, *qua* A E, *ipsius* C F, *hoc est, qua totus* A B, *totius* C D; *Ac propterea cum* AB, *eadem sit pars utriusque numeri* F G C D, *erunt ipsi numeri* FG, CD, *inter se aequales. Dempto ergo communi* C F, *aequales remanebunt* G C, FD, *Eadem igitur pars erit* E B, *ipsius* F D, *qua ipsius* G C, *hoc est, qua totus* A B, *totius* C D. *Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.* a 5. sep.

SCHOLIUM.

A, $\frac{1}{2}$ E, $\frac{2}{5}$ B,
G, $\frac{3}{5}$ C, $\frac{4}{8}$ E, $\frac{4}{5}$ D

Locum etiam habet hæc propositio, una cum ejus demonstratione in numeris fractis, ut hic apparet.

Idem hoc theorema verum est tam in numeris integris, quam in fractis etiamsi ablata sit unitas A E, vel reliqua fuerit unitas E B, vel denique in integris & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A. E... B	A... E. B	A. E. B.
G...... C.. F.... D	G.. C..... F.. D	G.. C.. F.. D

Cæterum & ex his theoremati quinto lib 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius.

Quod quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita esse multiplicem, ut est totus A B, totius CD. Cum enim A B, ipsius C D, sit æque multiplex, atque AE, ipsius C F, erit è contrario totus C D, totius AB, eadem pars, qua ablatus C F, ablati AE. A...... E.... B
b Quare & reliquus F D, reliqui E B. eadem C... F.. D
pars erit, quæ totus CD, totius A B, Ac proinde è contrario E B, ita multiplex erit ipsius F D, ut A B, ipsius CD, est multiplex. b 7. septim.

Quod si ex C D, ablata fuerit unitas CF, vel reliqua sit unitas. FD, vel denique in integris & ablata sit unitas CF, & alia reliqua F D, idem demonstrabitur, ut hæc exempla commonstrant,

A... E.....	A.... E.. B	A..... E.... B
C. F.. D	C.. F. D.	C. F. D

THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati. Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

Sit numerus A B, partes eadem numeri C D, *qua ablatus* A E *ablati* CF. Dico *reliquum* E B, *easdem esse partes reliqui* F D, *qua totus* A B, *est totius* C D. *Sumpto enim numero* G H, *aquali ipsi* A B, *erit* G H, *eadem partes ipsius* C D, *qua* A B, *ejusdem* C D, *hoc est, qua* A E, *ipsius* CF.

A......K......E....B
C.................F......
G......L..I.......M..H

Diviso ergo G H, *in partes* G I, I H, *numeri* C D; *&* A E, *in partes* A K, K E, *numeri* C F, *erit multitudo partium* G I, I H, *multitudini partium* A K, K, E, *aqualis, eademque pars tam* G I, *quam* I H, *ipsius* C D, *qua tam* A K, *quam* K E, *ipsius* C F. *Cum ergo* C D, *numerus major sit numero* C F, *erit & tam* G I, *quam* I H, *pars ipsius* C D, *major tam numero* A K, *quam* K E, *parte ipsius* C F. *Sumptis igitur numeris* G L, I M, *aqualibus ipsis* A K, K E, *erit* G L, *eadem pars ipsius* C F, *qua* A K, *ejusdem* C F, *hoc est, qua* G I, *ipsius* C D; *Ac proinde cum totus* G L, *totius* C D, *sit eadem pars, qua ablatus* G L, *ablati* C F, a *erit & reliquus* L I, *reliqui* F D, *eadem pars, qua totus* G I, *totius* C D. *Eodemq; argumento ostendemus* M H, *eandem esse partem ipsius* F D, *qua est totus* G I, *vel* I H, *totius* C D, *Quoniam ergo tam* G I, *quam* I H, *eadem est pars ipsius* C D, *qua est tam* L I *quam* M H, *ipsius* F D; *erit uterque* G I, I H, *simul eadem partes ipsius* C D, *qua uterque* L I, M H *ipsius* F D. *Est autem* G H, *eadem partes ipsius* C D, *qua* A B, *ejusdem* C D, *propter aqualitatem numerorum* A B, G H; *Igitur & uterque* L I, M H, *simul eadem partes erit ipsius* F D, *qua* A B, *ipsius* C D. *Quia vero si ab aqualibus* A B, G H, *aquales auferantur* A K, K E, *&* G L, I M, *reliqui* E B, *&* L I M H, *simul aquales sunt*; Erit *quoque* E B, *reliquus eadem partes reliqui* F D, *qua* A B, *totus totius* C D, *nimirum eadem qua uterque* L I, M H, *simul erat ejusdem* F D. *Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.*

a 7. sep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$ K, $\frac{2}{19}$ E, $\frac{6}{19}$ B
C, $\frac{6}{19}$ F, $\frac{6}{19}$ D
F, $\frac{2}{19}$ L, $\frac{1}{19}$ I, $\frac{2}{19}$ M, $\frac{3}{19}$ H

In numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, ut hic manifestum est.

Non

Non demonstravit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabit hic reliquum numerum E B, alicujus numeri easdem esse partes, quæ est numerus A E, numeri C F, ibi vero perspicuum erat reliquum E B, alicujus numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, ut A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertii, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, qua numerus D, numeri E F, sintque A, B, C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Divisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quam E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur: Erit B G, ipsius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F, a ac propterea & uterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus utriusque E H, H E, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A....
B....G....C
D.:...
E......H......F

a 5. vel 6. sept.

SCHOLIVM.

In numeris fractis propositio hæc una cum ejus demonstratione locum etiam habet; ut hic perspicuum est.

A $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{14}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

Quod si loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicujus pars sit, quæ alter numer' alterius: Erit vicissim unitas tertii numeri eadẽ pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A.
B.G.C:
D:.....
E:.......H:::::.F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertii, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus AB, eadem partes numeri C, qua numerus DF, numeri F, sintque A, B, C, ipsis D, E, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, qua numerus C, est numeri F. Divisis enim numeris AB, DE, in partes

A . . G . . B
C . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

AG, GB, & D, H, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, aqualis multitudini partium, in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, qua tam DH, quam HE, ipsius F. a *Vicissim ergo eadem pars erit aut partes AG, ipsius DH, & G, B, ipsius HE, qua C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, qua GB, ipsius HE.* b *Igitur & uterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes utriusque DH, HE, simul, nimirum DE, tertii, qua AG, ipsius DH, hoc est, qua C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 9. sep.
b 5. vel 6. sep.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$, B,
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{9}{10}$

Numeris fractis convenit etiam hujus propos. demonstratio, ut in hoc exemplo apparet.

xij. THEOR. 9. PROPOS. 11.

Si fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

Sit ut totus numerus A, B, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, ut est totus AB, ad totum CD. Cum enim sit, ut AB, ad CD, ita AE, ad CF; c *erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: vel certe AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, aqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primum AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, aque mul-*

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . . . F . . . D

c 20. defin.

multiplex. Quo posito, erit è contrario C D, *totus totius* A B, *eadem pars, quæ ablatus* C F, *ablati* A E, *propter* A B, A E, *æque multiplices ipsorum* C D, C F. a *Igitur & reliquus* F D, *reliqui* E B, *eadem pars erit, quæ totus* C D, *totius* A B; *Ac propterea è contrario* A B, *ipsius* C D, *&* E B, *ipsius* F D, *æque multiplex erit*, b *Quare erit, ut totus* A B, *ad totum* C D, *ita* E B, *reliquus ad reliquum* F D. a 7. sept. b 20. defin.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

Sit deinde A B, *ipsius* C D, *&* A E, *ipsius* C F, *eadem pars, vel eadem partes. Quo posito* c *erit & reliquus* E B, *reliqui* F D, *eadem pars, vel partes, quæ totus* A B, *totius* C D; d *Ac proinde erit ut totus* A B, *ad totum* C D, *ita* E B, *reliquus ad reliquum* F D. c 7. vel 8. sept. d 20. defin.

Contineat tertio A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter, eandemque insuper illius partem vel partes. Quo posito, erit è contrario* C D, *totus totius* A B, *eadem partes, quæ ablatus* C F, *ablati* A E, *ut mox demonstrabimus.* e *Reliquus igitur* F D, *reliqui* E B, *ea-* e 8. sept.

A . . . . . . E . . . B | A . . . . . . E . . . . B
C . . .   F . . D | C . . . . . F . . . . D

dem quoque partes erit, quæ totus C D, *totius* A B; *Ac propterea è contrario* A B, *ipsum* C D, *&* E B, *ipsum* F D, *æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, ut mox ostendemus.* f *Quare erit, ut totus* A B, *ad totum* C D, *ita* E B, *reliquus ad reliquum* F D. f 8. sept.

Quod si A B, *totus toti* C D, *æqualis fuerit, & ablatus* A E, *ablato* C F; *perspicuum est reliquum* E B, *quoque esse æqualem reliquo* F D. *Nam si ab æqualibus æqualia demantur: quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.*

A . . . . E . . . B
C . . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

Eodem modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis, quæ exemplis tertii casus demonstrationis respondent.

A, $\frac{3}{5}$ E, $\frac{1}{20}$ B | A, $\frac{14}{21}$ E, [illegible] $\frac{28}{29}$ B
C, $\frac{1}{3}$ F $\frac{2}{10}$ C | C, $\frac{5}{21}$ F $\frac{10}{29}$ D

LEMMA.

Quod autem, si A B, ipsum C D, & A E, ipsũ C F, æqualiter contineat, eademque insuper partem illius vel partes; è contrario C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit ex-eædem partes: Et si C D, ipsius AB, & C F, ipsius A E, sit eædem partes; è contrario A B, ipsum C D, & A E ipsum C F, æqualiter contineat, eandemq; illius

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonstrabimus. Contineat primum A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, nimirum semel vel bis, vel ter, &c eandemque insuper partem G B, quidem ipsius C D, & H E, ipsius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, sint vel æquales ipsis C D. C F, vel eorum æque multiplices. Divisis igitur numeris C D, C F, in partes C I. I K. K D; & C L, L M, M F, ipsis G B, H E, æquales; erit multitudo partium numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipsius C D, sit eadem pars quæ H E, ipsius C F. Similiter divisis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G; & A P, E Q, Q H, eisdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis. Cum enim A G, A H, vel æquales sint ipsis C D, C F. vel eorum æque multiplices, erunt vel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F, vel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea que multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, est numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis sit multitudini partium numeri C F, erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipsius A E.

Contineat deinde A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemq; insuper partes illius: numerus quidē A B, partes G B, numeri C D, & nūerus A E, partes H E, numeri C F: ita ut reliqui numeri A G, A H, sint rursum vel æquales ipsis C D, C F, vel eorum æque multiplices, Divisis igitur numeris

G B,

,HE,in partes GI,IB,& HK,KE,numerorum CD, ,erit multitudo partium us GB,multitudini par- n ipsius HE,æqualis. Si- i modo, divisis numeris

A..P.Q..G..I..B
C..L..M..D
A...R...S...H...K...E
C...N...O...F

D,CF,in partes CL,LM,MD,& CN,NO,OF.par- us GI,IB,&HK,KE,æquales,erit quoque multitudo tium ipsius CD,multitudini partium ipsius CF, æ- lis propterea quod quælibet partium numeri GB,ea- n pars est numeri CD, quæ unaquæque partium nu- i HE,est numeri CF. Denique divisis numeris AG, H,in partes AP,PQ,QG,& AR,RS,SH, eisdem tibus GI,IB,& HK,KE, æquales, erit & multitudo tium numeri AG,æqualis multitudini partium nume- H. Cum enim AG,AH,vel æquales sint ipsis CD, ,vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in G,AH,quot in CD,CF,vel certe numerus partium i- s CD,toties continebitur in AG, quoties numerus tium ipsius CF,in AH,proptereaque multitudo par- n numeri AG,multitudini partium numeri AH, æ- lis erit: Quibus si addantur æquales multitudines par- n numerorum GB,HE,erit quoque multitudo par- n numeri AB,multitunini partium numeri AE,æqua- Atque adeo una pars numeri CD , eadem pars erit neri AB,quæ una pars numeri CF, est numeri AE. are cum multitudo partium numeri CD , æqualis sit titudini partium numeri CF,erit CD,eædem partes neri AB,quæ CF,ipsius AE. Quod est primo pro- itum.

m vero sit CD,ipsius AB,& CF,ipsius,AE,eædẽ par- Dico è contrario AB,ipsũ CD,& AE,ipsũ CF,æqua- r continere,eandẽq; insuper illius partẽ,vel partes. Di- s enim numeris CD,CF,in partes numerorũ AB,AE, nt eæ multitudine inter se æquales. Itẽ divisis numeris ,AE,in partes partib. numerorũ CD,CF,æquales,erũt æ multitudine inter se æquales. Quare toties contine- :ur omnes partes numeri CD,in AB, supereritq; eadẽ s,vel partes ipsius CD,quoties omnes partes nũeri CE, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.

xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; *hoc est, ut A, ad* B, *ita* C, *ad D, &* E, *ad* F: *Dico esse quoque omnes* A, C, E, *simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad* B.

A . . . . C . . E . . .
B . . . . D . . . . F . . . . . .

Sint enim primum A, C, E, *minores quam* B, D, F. *Quoniam igitur* (a 20. defin. b 5. vel 6. sept.) *propter eandem proportionem, a eadem pars est, aut partes, A, ipsius* B, *qua C, ipsius* D, *&* E, *ipsius* F, (c 5. sept.) b *erit quoque uterque* A, C, *simul utriusque* B, *D, simul, eadem pars, aut partes, qua* A, *ipsius* B, *vel* E, *ipsius* F. *Rursus quia uterque* A, *C, simul, tanquam unus, utriusque* B, D, *simul, tanquam unius, eadem pars est, aut partes, qua* E, *ipsius* F: c *erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E. simul amborum* B, *D, tanquam unius, &* F, *simul eadem pars, vel partes, qua* A, *ipsius* B. (d 20. defin.) d *Quare eadem proportio est omnium* A, C, E, *simul ad omnes* B, D, F, *simul, qua ipsius A, ad* B.

Sint deinde A, C, E, *majores, & æque multiplices numerorum* B, *D*, F. *Quo posito, erit è contrario* B, *ipsius* A, *eadem pars, qua* D, *ipsius* C, *&* F, *ipsius* E: *Atque adeo ut prius,* (e 5. sept.) e *erunt omnes* B, *D*, F, *simul, omnium* A, C, E, *simul eadem pars, qua* B, *ipsius* A: *ideoque & è contrario omnes* A, C, E, *simul omnium* B, D, F. *simul. &* A, *ipsius* B, *æque multiplices.* (f 20. defin.) f *Quare eadem est proportio omnium A*, C, E, *simul ad omnes* B, D, F, *simul, qua est* A, *ad* B. *Hoc idem verum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes sint numerorum ad u-*

A . . . . C . . . . E . . . . . .
B . . . . D . . F . . .

nitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hic apparet, uvante tamen scholio propos. 5. hujus lib.

..C......E........ | A...C...E...... | A...C...E...
D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

Sint tertio A,C,E, majores quam B,D,F, at non multiplices. a *uia igitur propter eandem proportionem A, ipsum B, & C: ipsum & E, ipsum F, aequaliter continet, eandemq; insuper partem, vel rtes: Erit per lemma praecedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C F, ipsius E, eadem partes. Igi- r ut prius,* b *erunt omnes B, F, simul omnium A,C,E, simul dem partes, quae ipsius A: atque* a 20. defin.

A.........C....E............ b 6. sept.
B...... D... F.......

leo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A,C,E, nul omnes numeros B,D,F, simul, & A, ipsum B, aequaliter, eanmque insuper partem, vel partes. c *Quare eadem proportio est nium A,C,E, simul, ad omnes B,D,F, simul, quae ipsius A, l B.* c 20. defin.

Sint quarto & ultimo A,C,E, ipsis B,D,F, aequales. Quoniam itur, si aequalibus A, & B, aequales addantur C, & D, fiunt A,C. siul aequales ipsis B,D, simul: quibus si rsum addantur aequales, E, & F, fiunt omnes A,C,E, simul, omnibus B,D,F, mul aequales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A,C,E, simul ad omnes B,D,F, simul, cum utrobique sit proporo aequalitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, rit &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C... E.....
B.... D...F.....

SCHOLIVM.

In numeris quoque fractis propositio haec vera esse eodem mo- o convincetur, ut patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim roportionales erunt.

Sit *enim A, ad B, ut C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, ut B, ad). Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque ninor, quam C. Quo posito, erit, propter andem proportionem, A, ipsius B, & C, psius D, eadem pars vel partes.* d *Vicissim rgo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem ars erit, vel partes:* e *ac proinde erit ut A, ad C, ita B, ad D.* d 9. vel 10. sept. e 20. defin.

A... C......
B.... D........

SINT *deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, major quam*

C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars vel partes. a Vicissim ergo & C, ipsius A & D, ipsius B; eadem pars erit, vel partes: Atque adeo è contrario, vel A, ipsius C & B; ipsius D, æque multiplex erit, vel certe per lemma propos. 11. hujus lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes. b Quare erit ut A, ad C, ita B ad D.

a 9. vel 10. sept.

A...... C...
B.......D....

b 20. desin.

Sint tertio A, & C, majores quam B & D; at A, minor quam C. quo posito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex, vel certe A, ipsum B & C, ipsum D, continebit æqualiter eandemque insuper partem vel partes: Atque adeo è contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe per lemma propos. 11. hujus lib. eadem partes. c Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit vel partes. d Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, qua A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A...C.........
B...D......

c 9. vel 10. sept.
d 20. desin.

Sint quarto A, & C, majores quam B, & D: & A, quoque major quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemq; insuper partem, vel partes: Atque adeo, è contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe per lemma propos. 11. hujus lib. eadem partes. e Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes: Ac propterea è contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. hujus lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem vel partes. f Quare eadem proportio erit B, ad D, qua A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A........C....
B......   D...

e 9. vel 10. sept.
f 20. desin.

Sint quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eadem partes sunt; g Erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A...C....
B...D....

g 20. desin

Sint sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, major quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; h erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A.... C...
B.... D...

h 20. desin.

Sint septimo ac ultimo A, & C, inter se æquales, sive ii majores

sint

t quam B, & D, sive minores, sive æquales. a *Quoniam igitur,* a 20. *defin.* *eandem proportionem A, ipsius B, & C, ipsi D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eademque insuper partem, vel partes, suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, a B, ad æqualem D. Quocirca si quatuor numeri proportionales nt, vicissim & proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.*

A..... C.....
B... D...

SCHOLIVM.

Quod si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

Manifestum quoque est, propositionem hanc non variari, etiam aliquis numerorum ponatur unitas.

Coacti vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentius tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis conrmare, una cum lemmate propos. 11. ut earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli ai interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionib. rationalius minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numepartes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum emonstrationibus apparet; nisi majorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, inter quos etiam st (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: uod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes ppellarit numerum numeri minorem majoris, cum minor non netitur majorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius contat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam si existimaret, majorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supervacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. XV.

Si sint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Sint

Sint quotcunque numeri A, B, C, *& alii totidem* D, E, F, *sitque ut* A, *ad* B; *ita* D, *ad* E; *& ut* B, *ad* C, *ita* E, *ad* F. *Dico ex æqualitate quoque esse ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F. *Quoniam enim est, ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E; a *erit vicissim, ut* A, *ad* D, *ita* B, *ad* E: *Similiterque, eandem ob causam, cum sit ut* B, *ad* C; *ita* E, *ad* F; *erit vicissim, ut* B, *ad* E, *ita* C, *ad* F.

a 13. sep.

A............ D........

B........ E......

C.... F..,

G............. H.........

b 13. sep.

Igitur erit ut A, *ad* D, *ita* C, *ad* F; (*Cum enim utraque proportio* A, *ad* D, *&* C, *ad* F, *eadem sit proportioni* B *ad* E, *ut demonstratum est; & ipsæ inter se eadem erunt, ut mox ostendetur.*) b *Ac proinde vicissim, ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F.

Quod si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam quemadmodum C, *ad* G, *ita* F, *ad* H: *Dico adhuc esse ut* A, *ad* G, *ita* D, *ad* H. *Cum enim jam sit ostensum in tribus numeris, esse ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F: *ponatur autem ut* C, *ad* G, *ita* F, *ad* H; *erunt tres numeri,* A, C, G, *& alii tres* D, F, H, *qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit ut* A, *ad* G, *ita* D, *ad* H: *Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor: sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus: Itaque si sint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.*

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A. D...

B.. F......

C... F........

G. G...

Idem verum est, si loco unius numeri unitas assumatur, vel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

Quod autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt inter se quoque eædem, quales sunt in demõstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E, sive numeri sint integri sive fracti, ita demonstrabitur.

A............B........C....

D.......... E...... F...

Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsi-ſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadē pars, l eaſdem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, tam C, ipſum F, continebit æqualiter; eandemque inſu- r partem, vel partes, *a* Quare numeri A, D, C, F, pro- portionales ſunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt ropoſitum, *a 20. defin*

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de roportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si unitas numerum quempiam metiatur, æque autem tèr numerus alterum quendam numerum metiatur: Et ciſſim æque unitas tertium numerum metietur, & ſe- ındus quartum. xvj.

Metiatur unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, ue. Dico viciſſim unitatem A, numerum D, & nume- m B C, numerum E F, æque metiri. Diviſo enim numero B C, in u- ates B G, G H, H C, & nume- E F. in partes E I, I K, K F, ipſi æquales; erit multitudo uni- um numeri B C, æqualis mul- udini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, nume- n D, & unitas B G, ipſum E I, atque unitas G H, ipſum I K, & uni- H C, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, nume- D, & unitas B G: numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & u- as H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. hujus lib. o- ndimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, H C, ſimul numero- n E I, I K, K F, ſimul, quæ unitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ uni- A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, unitatibus B G, G H, H C. compoſitus numerum E F, ex numeris , I K, K F, compoſitum æque metietur. Si unitas igitur numerum empiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.	D..
B G . H C	E . . *I* . . *I* . . F

SCHOLIVM.

Illud idem, quod Euclides demonſtravit de numeris propoſ. 13. :endit hoc loco ſeparatim de unitate, & tribus numeris propterea ıod unitas non eſt numerus: Quod quidem brevius ita nos de- onſtrabimus. Quia unitas A, numerum B C. æque metitur atque ımerus D, numerum E F, erit unitas A, eadem pars numeri B C, ıæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. de- onſtravimus, erit viciſſim unitas A eadem pars numeri D, quæ nu-

numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propositio fractis numeris convenire non potest. Nam si unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque unitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; a sed solum eandem habebit rationem unitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.

a 13. sep.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.
A... B....
D............C..........

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D; ita ut A multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D: Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim unitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; b erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. c Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D: d erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, unitates: atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idē A, numerum C, æque. Æque igitur numerus A, utrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

b 35. defin.
c 15. sept.
d 15. defin.

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, ut A, ad E unitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, ut C, ad A, ita B, ad E, unitatem. Sed ex eadem defin. ut B, ad E, unitatem, ita quoque est D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, ut C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$ B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo

Si duo numeri se mutuo multiplicaverint, procreabitur unus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet a etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipsum B. a 15. defin.

E.
A . . . B . . . .
C . . . .

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel unus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. ut C, ad B, ita A, ad E, unitatem: Et permutando, ut C, ad A, ita B, ad E, unitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B ad E, unitatem, ut factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, ut numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

Sit numer' duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F; b erit D, ex B, compositus toties, quoties unitas F. est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit, c Ac proinde, erit ut B, ad D, ita C, ad d, & permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. b 15. defin. c 20. defin. d 13. sep.

F.
A . . .
B . . C . . . .
D . . . . . . E . . . .

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel unus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, ut A, ad F, unitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. ut D, ad B, ita E ad C. Igitur permutando, ut D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

The-

THEOR. 16. PROPOS. 18.

xix. Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Generi ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D: a fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E: b erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 16. sep.

b 17. sep.

A.... B.....
C...
D........ E............

SCHOLIVM.

Liquido constat eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, *B*, *C*, sint fracti, vel unus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, sive numeri omnes sint integri sive non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B C, D, habent: hoc est, esse, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiat E, F, c erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G, Atque ita de cæteris.

c 17. sep. 18. sep.

A...
B.. C... D....
E......F.......G...........

THEOR. 17. PROPOS. 19.

xix. Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sit

SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, *ut quidem A,* *B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B,* *undo in C tertium, Dico numeros E,F, æquales inter se esse. Fiat* *im rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex* *in C,D, fiunt G,E;* a *erit, ut C, ad D, hoc* *, ut A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex* *, & B, in C, fiunt G, & F;* b *erit quoque ut* *em A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma* *opos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem* *oportionem; eam videlicet, quam habet* *ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales* *unt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.* a 17. sep. b 18. sep.

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

SED jam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, *oducto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A,B,C,* *proportionales esse, ut quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus* *ex A, in C. Quia ergo ex A, in C,D, fiunt G,E;* c *erit ut C, ad D, ita* *ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E,F, e-* *dem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A,* *B, in C, fiunt G, & F;* d *erit quoque, ut A, ad B, ita idem G, ad e-* *dem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eadem sint pro-* *tioni G, ad F, eadem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac pro-* *le erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportio-* *les fuerint, &c. Quod erat ostendendum,* c 17. sep. d 18. sep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem hujus propos. lo- n habere in numeris fractis, sive omnes fracti sint, sive non.

POTERAT hujus theorematis prima pars proponi etiam ad nc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, haben- rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum n sequentem horum, & consequens antecedentem; ge- i ex ipsis, æquales inter se erunt.

TA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in onsequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, con- uente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tàm in fractis numeris, quàm in inte- facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI major fuerit proportio primi ad secundum, quàm tii ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, jor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, i ex primo & quarto fit, numerus, major fuerit e[o], qui

d ex

ex ſecundo & tertio fit, numero; major erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertii ad quartum.

SIT primum major proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertii ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe majorem eo, qui fit ex B in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, ut C ad D; (ſive E, numerus integer ſit, ſive fractus: ſive integer cum fracto: qui quidem reperietur, ut ad propoſ. 19, lib. 9. oſtendemus, ſi numerus ex B, in C, procreatus dividatur per D.) erit quoque major proportio A, ad B, quam E, ad B: ac proinde A, major erit, quam E. Quare major numerus fiet ex A, in D, quam ex E, in eundem D: *a* At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, major erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A....... E......
B....
C......
D......

a 19. *ſep.*

FIAT deinde major numerus ex A in D, quàm ex B, in C. Dico majorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quam C, tertii ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C (ſive E, numerus ſit integer, ſive fractus, aut integer cum fracto) fiet quoq; major numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde major erit A, quàm E. Quare major erit proportio A, ad B, quam E, ad B: *b* At ita eſt E, ad B, ut C, ad D. Igitur major erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b 19. *ſep.*

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertii ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: minor erit proportio primi ad ſecundum, quam tertii ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, majoris, mutes in vocem minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A ad B quam C, ad D: hoc eſt, major eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertii ad B, quartum: major fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſive ex B, in C, quam ex D, ſecundo in A, tertium, ſive ex A, in D, ut demonſtratum jam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B in C: hoc eſt, major ex B, in C, ſive ex C, in B, quam ex A in D, ſive ex D, in A, erit major proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertii ad B, quartum, ut

A..... E......
B....
C...
D..

jam

est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam ad D. Quod est propositum.

THEOR. 18. PROPOS. 26. XX.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, *ut quidem A, ad* B, *ita* B, *ad* C. *Dico numerum qui fit ex* A, *primo in* C, *tertium, æqualem esse ei, qui ex* B, *medio procreatur. Sumpto enim* D, *qui ipsi* B, *sit æqualis, erit ut* B, *ad* C, *hoc est, ut* A, *ad* B, *ita D, ad C: numerusque genitus ex* B, *in D, æqualis erit ei, qui ex* B, *in se procreatur: Quia igitur quatuor numeri A,* B, *D,* C, *proportionales sunt.* a *erit numerus factus ex A, in* C, *æqualis ei, qui fit ex* B, *in D, hoc est, ei, qui ex* B, *in se producitur.* a 19. sept.

A.........	
B......	D.......
C....	

SED *jam sit numerus productus ex A, primo in* C, *tertium, æqualis ei, qui fit ex* B, *medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi* B; *erit, ut* B, *ad C, ita D, ad* C: *& numerus, qui fit ex* B, *in D, æqualis erit ei, qui fit ex* B, *in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex* A, *primo in* C, *quartum, æqualis est ei, qui fit ex* B, *secundo in* D, *tertio,* b *erunt quatuor numeri A, B,* D, *C, proportionales, ut quidem A, ad* B, *ita D, ad* C, *vel B, ad* C. *Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.* b 16. sept.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD si major fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; major fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Etsi major numerus fiat ex primo in tertium, quã ex secundo in se: major erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Itẽ si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertiũ, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se, minor proportio erit primi ad secundum,

A........		A....	
B......	D......	B.......	D......
C.....		C......	

dum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius æqualis, ut habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit major proportio primi ad secundum, quam tertii ad quartum, aut minor, &c. ut in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, major quidem majorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, *minimi in proportione eadem quam habent alii duo numeri majores* E, F, *ita ut sit, quemadmodum* A B, *ad* C D, *ita* E *ad* F. *Dico* A B, C D, *æquè metiri ipsos* E, F, *majorem quidem* A B, *ipsum majorem* E, *at minorem* C D, *ipsum minorem* F: *hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, ut* A B. *ad* C D, *ita* E, *ad* F; a *erit vicissim, ut* A B, *ad* E, *ita* C D, *ad* F. *Atque adeo cum* A B, C D, *minores sint, quam* E, F; b *erit* A B, *ipsius* E, *&* C D, *ipsius* F, *eadem pars vel partes. Partes quidem nequaquam: Divisis namque, si fieri potest,* A B, C D, *in partes* A G, G B; C H, H D, *numerorum* E, F; *erit multitudo partium* A G, G B, *æqualis multitudini partium* C H, H D; *Ac propterea* A G, *ipsius* E, *&* C H, *ipsius* F, *eadem pars.* c *Erit ergo, ut* A G, *ad* E, *ita* C H, *ad* F; d *& vicissim, ut* A G, *ad* C H. *ita* E, *ad* F, *vel* A B, *ad* C D; *Ac proinde numeri* A G, C H, *minores quam* A B, C D, *eandem habebunt proportionem, quam* A B, C D. *Quod est absurdum; cum* A B, C D, *in sua proportione ponantur minimi. Non ergo* A B, *ipsius* E, *&* C D, *ipsius* F, *eadem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea* A B, *ipsum* E, *&* C D, *ipsum* F, *æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.*

A...G..B
C..H.D
E.........
F......

a 13. sep.
b 20. de fin.
c 20. defin.
d 13. sep.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse continuè proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundū, tertium, ut in hoc apposito exemplo apparet, ubi tertius numerus secundo æqualis est. Quamvis autem dari non possint tres numeri continuè proportionales quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit unitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus

A..G..B
C...H..D
E......
F.........

ab adverſario non dicatur eſſe unitas, ut diximus. Quod id- dixerim, ut propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua ad- rius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportio- , primoſque duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde um metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negaverat. Sed planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

ARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QUOTLIBET numeri minimi in continuatione ſu- n proportionum, ſive eædem ſint, ſive diverſæ pro- tiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui lem cum eis proportiones habent, primus primum, ndus ſecundum, tertius tertium, &c.

INT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in tinuatione ſuarum proportionum, ſive eadem ſit proportio ad

A . . . K . . . B   C . . L . D   E . . . . M . . . . F
G . . . . H . . . . .   I . . . .

, quæ C D, ad E F, ſive non; ita ut non poſſint reperiri alii nu- i ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, B, ad C D, & ſecundus ad tertium, ut C D, ad E F, &c. (quamvis ales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad el 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis A B, C D, quemadmodum & portiones numerorum 16. 20 25. qui minimi ſunt in continua- ne duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minori- numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in mino- us numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem nu- ri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, ni- rum G, ad H, ut A B, ad C D, & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, um G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ut A B, ad C D, ita G, ad H, *a* erit viciſſim ut A B, ad G, ita C D, ad Eodem modo, cum ſit ut C D, ad E F, ita H, ad I, *b* erit quoque a 13. ſep. viſſim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. *c* Quare A B, ipſius G, & C D, ipſi- b 13. ſep. H, & E F, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eædem partes. Partes c 20. defin. idem nequaquam. Diviſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot par- s in A B, quot in C D, & in E F, atque adeo A K, ipſius G & C L, ſius H, eadem pars. *d* Erit ergo ut A K, ad G, ita C L ad H; *e* & vi- d 20. defin ſſim ut A K, ad C L: ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemque mo- e 13. ſep. erit, ut C L, ad E N, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri

AK,CL,EM, in proportionibus numerorum AB,CD,EF, & minores quã AB,CD,EF. quod est absurdum, cũ hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB,CD,EF, eædem partes sunt numerorum G,H,I. Quare singuli singulorum eadem pars: Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.

QVOD si tres numeri dati A,B,C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur,

A.. B..... C...
C.... E........F......

Sint alii tres D.E,F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A,B,C. Dico A,B,C, ipsos D,E,F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A,B, cum sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D,E; eademque ratione B,C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E, metientur æquè omnes A,B,C, ipsos D,E,F.

CÆTERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo convenire potest numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusvis datis, dari possunt alii minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere unam particulam, vel plures, ejusdem denominationis, mensuram communem. Aliæ autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conveniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est, semel hoc loco monuisse.

XIX. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri; & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate, in eadem ratione erunt.

SINT *tres numeri A,B,C, & totidem D,E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, ut quidem A ad B, ita E, ad F: & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim*

A............ H...
B... D....
C..... E.......
G........F..

enim sit ut A, ad B, ita E, ad F: a erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, b erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. c Quare erit ut A, ad C, ita D, ad F. a 19. sep. b 19. sep. c 19. sep.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D: Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim jam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F: ponatur autem ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alii tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, ut constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicavit, & demonstrationibus confirmavit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, quia permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. hujus lib non alienum à nostro instituto erit, breviter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conveniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inversa ratione, sive convertendo, proportionales erunt.

A.....	C...
B....	D..

SIT, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & convertendo, sive inversa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit A, ad B, ut C. ad D, *d* erit vicissim A, ad C, ut B, ad D. Rursus quia est B, ad D, ut A, ad C, *e* erit vicissim B, ad A, ut D, ad C. Quod est propositum. d 13. septim. e 13. sep.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque divisi proportionales erunt.

 SIT

SIT ut A B, ad C B, ita D E ad F E. Dico dividendo esse ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim sit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; *a* erit vicissim, ut totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad totum D E, *b* ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc est, A C, ad D F, ut C B, ad F E. *c* Vicissim ergo erit quoque A C, ad C B, ut D F, ad F E. Quod est propositum.

A . . . . . . C . . . B
D . . . . . F . . E

a 13. sep.
b 11. sep.
c 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus divisionem rationis conversam, & contrariam, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per divisionem rationis conversam esse quoque, ut C B, ad A C, ita F E ad D F. Cum enim sit, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit quoque dividendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Et convertendo, ut C B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.

SIT deinde, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico per divisionem rationis contrariam, esse quoque, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est ut A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit convertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Ergo dividendo, ut C B, ad A C, ita F E, ad D F; Et convertendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.

III.

SI divisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico & componendo esse, ut A C, ad B C, ita D F ad E F. Cum enim sit, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; *d* erit vicissim, ut A B, ad D E, ita B C, ad E F: *e* Ac proinde A B, B C, simul ad D E, E F, simul, ut B C, ad E F: *f* Et vicissim A B, B C, simul, hoc est, totus A C ad B C, ut D E, E F, simul, hoc est, totus D F, ad E F. Quod est propositum.

A . . . . . . B . . . C
D . . . . E . . F

d 13. sep.
e 12. sep.
f 13. sep.

SIMILITER Compositio rationis conversa, & contraria ostendetur hoc loco, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis conversam esse quoque, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quia enim est ut A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit convertendo ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ut A C, ad A B, ita D F, ad D E, Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim sit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit convertendo, ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ergo, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E: Et convertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.

IV.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conversionem rationis proportionales erunt.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conversionem rationis esse quoque, ut A B, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; *a* erit vicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; *b* Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus A C, ad reliquum DF. *c* Vicissim igitur ut A B, ad A C, ita D E ad DF. Quod est propositum.

a 13. *sep.*
b 11. *sep.*
c 13. *sept.*

A......C...B
D....F..E

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum: habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sexus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quarum.

SIT ut A B, primus ad C, secundum, ita D E, tertius ad F, quarum; Item ut B C, quintus ad C, secundum, ita E H, sextus ad F, uartum. Dico ita esse A G, compositum ex primo & quinto ad C, cundum, ut est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartũ. ùm enim sit, ut B G, ad ,ita E H, ad F; erit conrtẽdo ut C, ad B G, ita ad EH. Quoniam igir est, ut A B, ad C, ita DE, ad F: & ut C, ad B G; ita F, ad E H; erit ex qualitate, ut AB, ad B G, ita D E, ad E H. Componendo igitur, ut G, ad B G; ita DH, ad EH. Itaque cùm rursus sit, ut A G, ad B G, ita H, ad E H, & ut B G, ad C, ita E H, ad F: erit ex æqualitate, ut AG, C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

A ....B..G | D..........E...H
C.... | F......

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. lib. 5. in magnitudinibus demonstravimus.

VI.

S I duo numeri ad duos numeros eandem habeant ionem: & detracti quidem habeant ad eosdem eann: Et reliqui ad eosdẽ eandem rationem habebunt:

SIT ut totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item ut detractus AG, ad C; ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, ut est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, ut AG, ad C, ita DH, ad F; erit convertendo, ut C, ad AG; ita F, ad DH. Quia igitur est, ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad AG, ita F, ad DH: erit ex æqualitate ut AB, ad AG, ita DE, ad DH. Dividendo ergo ut GB, ad AG, ita HE, ad DH; Itaque cum rursus sit, ut GB ad AG; ita HE ad DH; & ut AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, ut GB, ad, G ita HE, ad F. Quod est propositum.

A...... G.. B D........ H.. E
C,... F......

ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT ut primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & ut primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, ut est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, ut A, ad BC, ita D, ad EF; erit convertendo ut BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est ut BC, ad A, ita EF, ad D: & ut A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate ut BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, ut BG, ad CG, ita EH, ad FH; & convertendo, ut CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, ut A, ad CG, ita D, ad FH: & ut CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, ut A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.

A ...... D ....
B ... C.. G E ..... F.... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alii illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alii omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius nu-

erus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quodem numerus ad omnes illos simul proportionem, n idem alius numerus ad hos omnes simul.

ABEANT quotcunque numeri A B, B C, C D, ad eundem E, portiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: est, sit ut A B, ad E, ita F G, ad K; & ut B C, ad E, ita G H, ad K; C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsam , ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul ent, hoc est, quam ipse F I, habet ad K. Cùm enim sit, ut A B, nus ad E, secundum, ita F G, tertius ad K, quartum: Item ut B C, ntus ad E, secundum, ita G H, sextus ad K, quartum; erit quoque

A . . . B . . . . . . C . . . . D | F . . G . . . H . . . I

E . . . . | K . . . . .

AC, primus cum quinto ad E, secundum, ita F H, tertius cũ sexto, K, quartum. Rursus quia est, ut A C, primus ad E, secundum, ita H, tertius ad K, quartum: Item ut C D, quintus ad E, secundum, H I, sextus ad K, quartum: erit etiam, ut A D, primus cum quin-, ad E, secundum, ita F I, tertius cum sexto, ad K quartum: Atque a de cæteris si plures fuerint.

SED habeat jam idem numerus E, ad numeros quotcunque B, B C, C D, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad otidem F G, G H, H I; Hoc est, sit ut E, ad A B, ita K, ad F G; & ut, ad B C, ita K, ad G H; & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico esse, ut E, ad omnes illos simul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes simul, utpote ad F I. Cùm enim sit, ut E, primus ad A B, secundum, ta K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, sextum: erit quoque, ut E, primus ad A C, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum sexto. Rursus quia est, ut E, primus ad A C, secundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, sextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM verò his demonstratis, ostendentur novem ultimæ propositiones lib. 5. à Campano adjectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuêre: si pro magnitudinibus, intelligantur numeri sive integri, sive fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur, iidem modi hoc lib. demonstrati: ut opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, ut dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eædemque prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxiij. PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alii minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque idcirco ipsis

A .... B ....
C ------ D --
E ....

A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; a metietur C, ipsum

a 21. sep. *A, & D, ipsum B, aquè; atque adeò secundum eundem numerum, qui sit E, ita ut C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties unitas est in E. Itaque cùm unitas numerum E, & numerus C, numerum A, aquè metiatur; b metietur & vicissim aquè unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, aquè metitur: c metietur quoque vicissim aquè unitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeò, cum idem numerus E, utrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alii numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.*

b 15. sep.

c 15. sep.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

xxij. MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter unitatem, communi mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habent numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C. numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D: At verò ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsū A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B: d fit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Atque adeò, cùm D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quàm

A .... B .....
C ----
D ---- E ----

d 9. pronun.

e 18. sep.

A, &

, B : non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis onem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt eri, A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum ationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum e-

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plu- numeros extendemus, hoc modo.

QUOTCUNQUE numeri inter se primi, minimi nt in continuatione suarum proportionum. Et quot- nque numeri in continuatione suarum proportionum inimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi, A, B, C. Dico eos mi- imos esse in continuatione suarũ proportionum, ita ut in minori- us numeris continuari non possint, quamvis proportio duorum n minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt liqui alii minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarũ proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione nume- rorum A, B, C: metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æquè, per ea, quæ ad propos. 21. hujus lib. demonstrauimus: atque adeò secundum unum eundem nu- merum, qui sit G: ita ut D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quoniam igitur unitas nume- rum G, & numerus D, ipsum A, æquè metitur: *a* metietur quoque vicissim æquè unitas numerum D, & numerus G, numerum A. E- ademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æquè, at- que unitas ipsos E, F: Atque idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alii nu- meri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A ad B, & B, ad C: sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

A...... B........ C.....
D---- E------ F---
G-----

a 15. sep.

IAM vero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita ut G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D: & ipsum B, toties, quoti- es unitas est in E: & ipsum C, toties quoties unitas est in F. Quoni- am igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties uni- tas est in D, E, F: fit ut D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C,

pe-

per ea, quæ ad propos. 18. hujus lib. ostendimus: Atque adeò, cùm D, E, F, minores sint quàm A, B, C, non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

xxiiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C: & C, ipsum A: a metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cùm habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A....... B.....
C . . . D - - -

a 11. pronun.

xxv.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis mensura numerus E metiens ipsum D, toties, quot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt unitates in F; b fit ut F, ipsũ E, multiplicans gignat ipsum D: c & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D: Genitus est autem idem D, ex A, in B: Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium: d erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter se sunt: & E, ipsum C, ponitur metiri: e erit E. ad A, primus: Atque adeò E, & A, cùm sint inter se primi, f in sua proportione minimi erunt. g Æquè igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsũ F. Quare cùm E, metiatur utrumq; B, & C; non erunt B. & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus ergo erit D. ad ipsum C: Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A........B...
C......
D................
E - - - F - - -

b 9. pronun.
c 16. sep.
d 19. sep.
e 25. sep.
f 23. sep.
g 21. sep.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

I duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex uno um genitus ad reliquum primus erit.

INT inter se primi A, & B, gignaturq́; C, ex A, in seipsum. Dico d reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & d B, primus: Quoniam igitur A, & ad B, primi sunt, a erit numerus ex in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimi n C, ad eundem B, primus. Eademq; e ostendemus, numerum ex B, in se ge um, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, c. Quod demonstrandum erat.

A.... B......
C............
D....

a 26. septimi

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumue, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se runt.

SIT uterque A, & B, ad utrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cùm enim uterque A, & B, primus sit ad C; b erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cùm uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E: c erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B...
E.............
C... D..
F......

b 26. septim.

c 26. septim.

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque seipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

SINT *primi inter se A, & B: & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C: & F, ex B, in D: Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cùm enim A, B, sint inter se pri-*

A... B..
C......... D....
E........................... F......
G 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

mi-a 27. septim. *mi, a erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter se erunt.*

b 27. sep. *RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, b erit & C, factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrumque B, D, primus erit; c Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B in F, fiat H, cùm A, & C, primi sint ad B, d erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E, ad utrumque B, F, primus est: e erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, f erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: nec nõ & H, ad A. g Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm uterque A, G, ad utrumq; B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.*

c 28. sep.

A...	B..
C.........	D....
E................	F.....
G, 81.	H, 16.
I, 243	K, 32.

d 26. septim.
e 28. septim.
f 26 septim.
g. 28. septim.

xxix.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & utrumque simul AC, primum esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB: h metietur quoque reliquum BC. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

h 12. pronun.

A.......... B.....C
D-----

SED jam uterque AB, BC, simul, primus sit ad unum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC: i metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compositum: Ac proinde AC, AB, non sunt inter se primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemque argu-

i 10. pronun.

mi. Eodemque argumento oftendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B. primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit : per primam partem ejusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos præter unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . B . . . .
C - - - -

THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem : genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, is etiam unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur verò ipsum C, toties, quot sunt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; a erit ut D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartum. b Quia vero primus D, ad A, primus est, cùm eum non metiatur; c erunt D, & A, in sua proportione minimi. d Quare æquè metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur

A . . . B . . . . . .
C . . . .
D . . . E . . . .

a 19. sep.
b 31. sep.
c 23. sep.
d 21. sep.

atur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus; vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad unum ipsorum A B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit uterque A, & B, ad D, primus. a Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipsum C, vel certè ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cùm non sit primus ad utrumque.

A... B....
C........
D.......

a 26. septimi.

PROBL. 31. PROPOS. 33.

XXX.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si verò compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cùm metiatur ipsum B; & B, ipsum A; b metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeò ad primum, qui cùm metiatur omnes praecedentes, c metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A..............
B.....C...

b 11. pronun.

c 11. pronun.

ALITER. *Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A. d metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cùm B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igi-*

A...............
B...   C---

d 11. pronun.

ompositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod monstrandum.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxj.

MNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis pri- netitur.

numerus quicunque A. *Dico eum vel esse primum, vel cer- quem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel u sit, vel compositus; si quidem A, primus betur propositum: Si verò compositus; a* A. . . . . *tur eum aliquis primus. Omnis igitur nu- s aut primus est, aut eum aliquis primus metitur, quod erat o- endum.* a 33. sep.

PROBL. 3. PROPOS. 35.

IVMERIS datis quotcunque, reperire minimos xxxiiij. nium eandem rationem habentium cum ipsis.

NT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque pro- ones, sive eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, sive non; eat que totidem reperire, in eisdem proportionibus minimi. Quoniam A, sunt inter se aut primi, compositi: Si primi inter nt, erunt ipsi in continua- e suarum proportionum imi, per ea quæ ad propos. hujus lib. demonstravimus. Si verò non sunt inter se primi, b enta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui me- ur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in ortionibus numerorum A, B, C. Quòd enim easdem habeant ortiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos , C, metitur per E, F, G; c fit, ut D, ipsos E, F, G, multiplicans fa- t A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. hujus lib. ostendimus, dem rationes habebunt E, F, G quas numeri A, B, C. b 3. sep. c 9. pro- nun.

A. . . . . . B. . . . C. . . . .
D. .
E. . . F. . G. . . .
H - - - I - - - - K - - - -
L - - - -

QVOD verò E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem ha- tium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sint minimi; e- t aliqui alii ipsis minores minimi in eisdem proportionibus: t ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, , metiuntur æquè, ut ad propos. 21. hujus lib. ostendimus; tiantur eos per numerum L. Quo posito, d fit, ut L, multi- cans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; e & vicissim ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus ltiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans tertium facit eundem A; f erit, ut E, primus ad H, secun- d 9. pronũ. e 8. pronun. f 19. sep.

dum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, major, quàm H. Igitur & L, major erit, quam D: Atque adeo cum L, ipsos A, B, C, metiatur: non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur erunt alii numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt si proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

CÆTERVM contingit interdum, unum numerorum E, F, G,

A . . . B . . . . . . C	A . . . . B . . C . . . . . .
D . . .	D . .
E . F . . G . . .	E . . F . G . . .

per hanc propos. inventorum esse unitatem; quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorũ A, B, C, æqualis est, ut ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inventos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cùm minor numerus dari non possit, quàm unitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36.

xxxvij. DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimũ metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, sesequè mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse mini-

um, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eũ metiantur, per-
n est. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A: a a 7. pronũ.
ur A, ipsum C, per B: & B, eundem C, per A. Vterque igitur
, ipsum C, metitur.

autem C, sit minimus
m, quos A, & B, me-
r, sic demonstrabi-
i C non est minimus:
itur, si fieri potest, A,

A....B.....
C.........................
D--------------
E-------F----

lium numerum D, ipso C, minorem: metiaturque A, ipsum D, b 9. pro-
t B, eundem D, per F. Quo posito, b tam ex A, in F, quàm ex B, nun.
è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem nu-
D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, terti- c 19. sept
erit, ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quar-
Igitur A, & B, (cùm ponantur primi inter se, d & ob id, in sua d 23. sep.
tione minimi) e æquè metientur ipsos F, & E: nimirum A, i- e 21. sep.
F, & B, ipsum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, fa- f 17. sep.
& D: f erit C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur
E, ut ostensum est: metietur & C, numerus numerum D, ma-
inorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur
numerum minorem ipso C, atque adeò C, minimus est omni-
uos metiuntur.

NT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. g Inveni- g 35. sept.
C, & D, minimi in eadem proportione, ut sint quatuor nume-
oportionales, nimirum A, ad B, ut C, ad D. Quo posito, h fiet h 19. sep.
numerus ex A, primo in D, quartum,
B, secundo in C, tertium. Factus ergo
Dico E, hac via procreatum esse mi-
m, quem A, & B, metiuntur. Quòd
eum metiantur, manifestum est. Nam
am A, multiplicatus à D, quàm B,
iplicatus à C, ipsum E, producat: i me-
r tàm A, quàm B, ipsum E. Quod verò i 7. pronum
minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si
n est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum
E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem
H. Quo posito, k fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia k 9. pronũ.
r idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, se- l 19. sep.
o, in H, tertium, l erit, ut A, primus ad B, secundum, ita H, ter-
ad G, quartum. Quare C, & D, cùm sint minimi in proportione
B, vel H, ad G, m metientur ipsos H, & G, æquè, nimirum C, i- m 21. se-
H, & D, ipsum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit ptim.
F, n erit E, ad F, ut D, ad G: Ac propterea cùm D, metiatur n 17. se-
m G, ut ostensũ est, metietur etiã E, numerus numerum F, major ptim.

A....B......
C.. D...
E..............
F-----------
G --- H----

minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem, atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, major minorem, & minor majorem; produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, majorem, & ex B, majore in C, minorem esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35, hujus libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35

xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D. sitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest

A . . B . . .
C . . . . F - - - - - - D
E . . . . . .

F D, minorem se, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F; a metietur quoque tam A, quàm B, ipsum C F. Itaque A, & B, cùm metiantur totum C D, & ablatum C F; b metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. pron. b 12. pron.

xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. sep.

SIT inveniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. c Invento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur.

Di-

numerum D, *minimum inventum, quem* A, & B, *metiuntur,* *num quoque esse, quem tres* *C, metiantur. Si enim* D, *non* *minimus, metiantur, si fieri po-* A, B, C, *alium numerum* E, D, *minorem. Quoniam igitur* & B, *metiuntur ipsum* E, *minorem quàm* D; *non erit* D, *mini-* *, quem* A, & B, *metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypo-* *in. Immò, cùm* A, & B, *metiantur ipsum* E; & D, *sit minimus,* *m iidem* A, & B, *metiuntur:* a *metietur quoque* D, *ipsum* E, *ma-* *minorem. Quod est absurdum.* a 32. sept.

A....B....C......

D...........

E--------

SED jam C, *non metiatur ipsum* D, *inventum.* b *Invento igitur* *minimo, quem* C, & D, *metiantur: Dico* E, *esse minimum, quem* A, b 36. sept. *C, metiantur. Quod enim eum me-* *ntur, ita ostendetur. Cùm* A, & B, *tiantur ipsum* D, & D, *ipsum* E; c *tientur quoque* A, & B, *ipsum* E. *etitur autem &* C, *eundem* E. *Igi-* *r omnes tres* A, B, C, *ipsum* E, *metiun-* *r. Quòd autem* E, *sit minimus, quem metiantur* A, B, C, *hoc mo-* *probabitur. Si* E, *non est minimus; metiantur, si fieri potest,* A, *C, alium numerum* F *ipso* E, *minorem. Quoniam igitur* A, & B, *sum* F, *metiuntur:* d *metietur quoque eundem* F, *numerus* D, *ni-* *mirum minimus inventus, quem numeri* A, & B, *metiuntur; Atque* *deò, cum* C, & D, *metiantur ipsum* F, *minorem, quàm* E; *non erit* *, minimus, quem* C, & D, *metiantur. Quod est absurdum, & con-* *tra hypothesin. Immò cùm* C, & D, *metiantur ipsum* F; e *metietur* *quoque eundem* F, *numerus* E, *minimus, quem metiuntur iidem* C, & *D, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo* A, B, C, *alium* *numerũ ipso* E, *minorem metientur: sed ipse* E, *erit minimus. Qua-* *propter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metian-* *tur, numerum. Quod erat faciendum.*

c 11. pronun. d 37. sept. e 37. septim.

A..B...C.....

D.....

E...........

F-- ----

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur: etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema hujus demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. hujus lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitq; F, minimus, quem iidẽ A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiantur ejus partem D G,

 relin-

A..B...C.... relinquatque numerum GE, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F. metiuntur; & F. ipsum D G, *a* metientur quoq; A, B, C, eundem D G;
D.............G----E
F...........

a 11. pronun. Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; *b* metientur & reliquum G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiumtur. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Metitur igitur F, ipsum D E.

b 12. pronun.

Pari ratione: Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inveniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

xxxvij.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur: ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

METIATVR numerum A, *numerus* B. *Dico* A, *habere partem aliquam à* B, *denominatam. Metiatur enim* B, *ipsum* A, *toties, quot unitates sunt in numero* C. *Quia igitur unitas ipsum* C, *&* B, *ipsum* A, *aquè metitur: a & vicissim unitas aquè ipsum* B, *&* C, *ipsum* A, *metietur; atque adeò eadem pars erit unitas ipsius* B, *qua* C, *ipsius* A: *Est autem unitas pars ipsius* B, *denominata ab ipso* B, *ut ad defin. 2. hujus lib. docuimus. Igitur &* C, *pars erit ipsius* A, *ab eodem* B. *denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.*

A...............
B.... C....

c 15. sep.

xxxviij.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT *numerus* A, *partem* B, *à qua numerus* C, *denominatur. Dico* C, *metiri ipsum* A. *Nam cùm* B, *pars denominetur à* C, *sit autem & unitas pars ipsius* C, *ab eodem* C, *denominata: metietur unitas ipsum* C, *&* B, *ipsum* A, *aquè.* d *Vicissim ergo & unitas ipsum* B, *&* C, *ipsum* A, *metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.*

A...............
B...., C.......

d 15. sep.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 41. XXXIX.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C, Inveniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A,B,C, *numeri denominati, sive qui ipsas denominent*, D,E, F: *a minimusque, quem* D,E,F, *metiuntur, numerus* G. *Dico* G, *esse minimum, qui habeat datas partes* A,B,C. *Quod enim ejusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum* D,E,F, *ipsum* G, *metiantur*, b *habebit* G, *partes à* D,E,F, *denominatas, hoc est, partes* A,B,C, *cum hæ denominentur à* D,E,F. *Quod verò* G, *sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest*, H, *ipso* G, *minor easdem partes* A,B,C. *Quia igitur* H, *habet partes* A,B,C, c *metientur ipsum numeri* D,E,F, *à partibus* A,B,C, *denominati: Atque adeo, cum* H, *minor sit quam* G, *non erit* G, *minimus, quem metiuntur* D,E,F. *Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur minor numerus, quam* G, *datas partes* A,B,C, *habebit, sed ipse* G, *minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes: Quod faciendum erat.*

a 38. sep.

D..	A, Secunda	
E...	B, Tertia	
F....	C, Quarta	
G.............		
H--------		

b 39. sep.

c 40. sep.

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D,E,F, ...psum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipsius ..., denominatæ scilicet à D,E, ... Cum enim D,E,F, ipsum ..., metiantur per I,K,L; me...tur æquè unitas ipsos I,K, ... & numeri D,E,F, ipsum ... d Vicissim ergo metietur ...oque unitas ipsos D,E,F, & numeri I,K,L, ipsum G, æquè, atque ...eo unitas ipsorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, i...us G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denomi...ta; erunt & I,K,L, ipsius G, partes denominatæ à D,E,F. d 15. sep.

A, Secunda	D..	I......
B, Tertia	E...	K....
C, Quarta	F....	L...
	G.........	

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet ...meri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris me...tibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem mi...num metiuntur D,E,F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, ...smodi sunt I,K, L, à metientibus numeris D, E,F, denomina...

...AM verò, ut Campanus ait, si inventus minimus numerus da-

 tas

tas partes habens, duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Invento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & ejus duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G;

G . . . . A, D . .
H . . . . B, E . . .
I . . . . C, F . . . .
K - - - - - - - - - - - M - - - - - L
N - - - - - - - - - - - - - - - - - - P - - - - - O

a 11. pronun. *a* metietur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. *b* Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices,
b 39. septim. partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit si fieri potest, alius KL, ipso prior, qui nimirum major sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K, L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes
c 40. sep. habet A, B, C; *c* metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. hujus lib. eundem K L: Metitur
d 12. pronun. autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. *d* Igitur & reliquum M L, metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde *H*, secundus est hujusmodi partes habens.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet major sit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet
e 40. sept. A, B, C, *e* metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. hujus lib. metietur: Metitur autem &
f 12. pronun. G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. *f* Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem major. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas:

datas: *Ac* propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit: & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C: inveniendusq; sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, ut pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F: Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur.

A, Secunda.	B, Tertia.	C, Quarta	
D . .	E . . .	F	
G			
H			
		Vnitas	
I - - - - - - - - - - - - - - -			
K - - - - - - - - - - - -			
L - - - - - - - - - -			
M - - - -			

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H: erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autem unitas pars ipsius D, denominata ab ipso D, Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata: Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum unitatem. Quare numerus inventus H, partem habet A; & pars A, partem B: & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdẽ partes eodem ordine, ita ut K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata: & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata: erit K, toties in I, quoties unitas in *D*: *a* Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K: & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I: *b* erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K: erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in unitatem, & M, fiant F, & L; erit, ut F, ad L, ita unitas ad M. Quoniam igitur est, ut H, ad I, ita G, ad K: & ut G, ad K, ita F, ad L: & ut F, ad L, ita unitas ad M: Erit per lemma

a 15. *defin.*

b 17. *sept.*

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

pro

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propos. 14. hujus lib. ut H, ad I, ita unitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, major. Vnitas igitur major quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositũ.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2, 3, 4, 5, 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, ut manifestum est.

QVOD si numerum H, inventum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVUM.

THEOR. I. PROPOS. I.

j.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alii ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alii illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadem ratione a erit, ex æqualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: b Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. c Igitur tam A, ipsum E, quam D, ipsum H, æquè metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt: Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A .... E---
B .... F-----
C .... G-------
D .... H---------

a 14. sep.
b 23. sep.
c 21. sep.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C D, A.... E--- C,D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, sive A,B,C,D, sint continuè proportionales, ut vult Euclides, sive non. Vt hoc exemplum

B........ F-----

C......... G------

D........... H ------

ostendit, in quo proportiones omnes diversæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque jusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri data rationis A, & B, oporteatque invenire primum tres numeros minimos in proportione data A, *ad* B. *Multiplicans* A, *se ipsum, & numerum* B, *faciat C, & D. Deinde* B, *multiplicans seipsum faciat* E. Dico C,D,E, *esse tres minimos in proportione A, ad* B. *Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad* B, *hoc est, sit ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D, *&* D, *ad* E, *sic ostendemus.* Cum ex A, *in* A, *&* B, *fiant* C, *&* D : a *erit ut A, ad* B, *ita C, ad D. Rursus cum ex* B, *in A, &* B, *fiant* D, *&* E : b *erit quoque, ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E. *Quare proportionales sunt* C,D,E, *continuè in proportione data A, ad* B. *Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi* C, *&* E, *procreati sunt ex A, &* B, *in se ipsos:* c *sunt autem* A, *&* B, *inter se primi, quod minimi sint in sua proportione:* d *Erunt &* C, E *extremi, inter se primi.* e *Quare* C,D,E, *minimi sunt in ratione* A, *ad* B.

	A..	B...		
C...	D......	E.........		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27	
K, 16.	L, 24.	M, 36.	N, 54.	O, 81.

a 17. septim

b 17. sep.

c 24. septim.

d 29. sept.

e 1. oct.

IAM verò ex A, *in tres inventos* C,D,E, *fiant* F,G,H, *& ex* B, *in ultimum* E, *fiat* I. *Dico quatuor numeros* F, G, H, I, *minimos esse in eadem ratione data* A, *ad* B. *Quod enim proportionales sint in ratione A, ad* B, *ita demonstrabimus. Quoniam* A, *multiplicans ipsos* C,D,E, *fecit* F,G,H, *habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri* F, G,H, *easdem proportiones, quas* C,D,*E, hoc est, quam habet A, ad* B. *Rursus quia A, &* B, *ipsum* E, *multiplicantes, fecerunt H, & I,* f *erit quoque ut* A, *ad* B, *ita H, ad I. Sunt igitur* F, G, *H, I, continuè proportionales in data proportione* A, *ad* B. *Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet.* g *Quoniam* A, *&* B, *minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt* C, *&* E, *ex* A, *&* B, *in se ipsos:* Item *procreati sunt F, & I ex* A, B, *in* C, E: *nimirum* F, *ex* A, *in* C, *& I, ex* B, *in* E.

f 18. sep.

g 24. sep.

in E, a erunt & F, I, extremi, inter se primi. b *Quare F, G, H, I, in sua proportione, quae est A, ad B, minimi sunt.* a 29. sep. b 1. oct.

NON aliter, si ex A, in quatuor inventos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O: erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inveniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inventos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt quam A, B: quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quae ad propos. 18. hujus lib. demonstravimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B: quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, ut prius. c 18. sep.

NON aliter si ex *B*, in quatuor inventos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K: erunt K, L, *M*, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inveniemus sex, septem, octo, &c. Itaque sive A, multiplicetur

	A..		B...		
C...	D......		E........		
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.		
K, 16.	L, 24.	M, 36.	N, 54	O, 81.	

in omnes inventos, & B, in ultimum: sive B, in omnes inventos, & A, in primum, producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstravit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, *D*, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIUM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque aequaliter sunt aequales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum aequalium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum aequalium B, B, B, sit procreatus, ac propterea uterque sit aequaliter aequalis aequaliter: ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alii sub aliis denominationibus,

quae

quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inventis arte in hac propos. tradita, non autem in quibusvis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus utcunque propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorsus sunt iis, qui per hanc propos. inveniuntur. Si enim illi dati minores essent inventis, non essent inventi, minimi, quod est cõtra hanc propos. Si vero dati majores essent inventis, nõ essent illi dati, minimi, quod est cõtra hypothesin. Quod clarissimè ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: sumptisque duobus minimis D, E, in proportione

A.--B--.- C-.--.--
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib 7. inveniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inventis F, G, H, non differre. Nam necessario A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cum sit, ut A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, ut A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademque ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si verò A, concedatur major, quam F: erunt eodem argumento & B C, majores, quam G, H, atque idcirco A, B, C, minimi non sunt, quod est contra hypothesin. Cum ergo A, minor non sit, aut major, quam F: æqualis omnino erit, ideoque ut ostensum est, & B C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inventorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros, ut in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, B, in F, G, H, ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

Quoniam vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt, ab unitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, ut clarius demonstrabitur propos. 9. hujus lib. fit ut extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint ultimi tot continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse ultimos trium numerorum continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse ultimos quatuor numerorum ab unitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet invenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab unitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inventis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab unitate tot numeri continue proportionales in proportione, cujus denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inveniendi proponuntur. Nam ultimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continuè proportionalium inveniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inventis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab unitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denomiatur à 2. hoc modo 1. 2 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum ultimus 128. erit primus octo numerorum inveniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. ut hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si majores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

Boetius autem, & alii regulam hanc ita explicant, ut & nos 5. lib. in tractatione proportionum declaravimus, ponantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cujus in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet invenire in data proportione. Nam ultimus numerus erit primus inveniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur 8. numeri minimi in proportione sesquialtera sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirũ denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cujꝰ mentió fit in proport. sesquialtera, hoc est, à 6. Quod si opletur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab unitate quintupli: ut hic 1. 5. 25. 125. 626. Nam 625. est primus quinq; numerorum in proportione sesquiquinta, ut hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inveniri (quod nimirum videri possit) plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. in ultimo exemplo alius numerus invenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 1287. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem hujus rei est, quod extremi hac arte inventi sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, ut ultimus non possit esse ad alium quempiam numerum, ut primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. demonstrabitur.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: illorum extremi sunt inter se primi.

Sint numeri A, B, C, D, *minimi deinceps proportionales. Dico extremos* A, *&* D, *inter se primos esse. Inveniantur enim duo* E, F, *minimi in ratione* A, *ad* B, *vel* B, *ad* C, *vel* C, *ad* D. Deinde *juxta viam præcedentis problematis tres minimi* G, H, I, *in eadem ratione, nec non quatuor* K, L, M, N, *& sic deinceps, donec multitudo* K, L, M, N, *æqualis sit multitudini* A, B, C, D. *Quoniam igitur* A, B, C, D, *minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt* K, L, M, N, *illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum* A, *ipsi* K, *&* D, *ipsi* N. *Id quod nos* Geometrice *demonstravimus ad finem corell* 1. *superioris propos. Sunt autem per coroll.* 2. *propos. præcedentis* K, *&* N, *inter se primi. Primi ergo quoque sunt* A, *&* D. *Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.*

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E, 2.	F, 3.		
G, 4.	H, 6.	I, 9.	
K, 8.	L, 12.	M, 18.	N, 27.

SCHOLIVM.

Hæc propositio intelligẽda est de numeris minimis continue proportionalibus, ut ex ejus demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inve-

inveniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totius minimi in eadem proportione. Imo si diversæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diversis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conversum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sũt in sua proportione, ut constat ex 1. theor. Et vicissim numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, veluti hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat, ad numeros non continue proportionales, converti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut ex scholio propos. hujus lib. liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque invenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. a *Invento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D.* Dico F, E, G, *minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiuntur per H. Quo posito,* b *A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E;* c *Quare erit, ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulus singuli, in eisdem rationibus; sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua pro-*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ---- K ---- L ----

a 36. septi.
b 9 pron.
c 18. sept.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ----- K ----- L ----

proportione : a ipsi æquè metientur I & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C,
b 37. sep. *ipsum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod est absurdum. Non erunt igitur alii numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi, F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.*

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B, C, ad D: & E, ad F; inveniendiq; sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. c Invento rursum numero G, minimo,
c 36. sep. *quem metiantur B, secundus, & C, tertius: quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H: & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; & quoties E, ipsum I metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimis esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cum enim*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L ---- M ----- N ---- O -----

A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus: Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus mi-
d 21. sep. *nores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; d ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metian-*
e 37. sep. *tur: e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod est absurdum. Non ergo erunt alii numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K: Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.*

f 36. sep. *Sed jam E, non metiatur ipsum I. f Invento ergo numero K, minimo, quem E, & I. metiantur: quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L: & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur:*

tur; erit ut supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L, *& ut* G, *ad I, ita* L, *ad* K: *Est autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad* B: *& ut* G, *ad I, ita C, ad D, quod &* A, B, *ipsos H,* G: *&* C, D, *ipsos* G, *I, metiantur æque. Igitur ut* A, *ad* B, *ita M, ad* L, *& ut* C, *ad D, ita* K, *ad* K. *Atque ut E ad F, ita quoque est* K, *ad N, cum E, F, æque ipsos* K, *N, metiantur. Sunt ergo M* L, K, *N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus.*

A,9. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24 G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30 N,105.
O - - - P - - - - Q - - - R - - - - -

Si namq; non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, *si fieri potest. Quoniam ergo* A, B, *in sua proportione minimi sunt,* a *ipsi sique metientur* O, P, *in eadem ratione existentes, nimirum* B, *consequens consequentem* P. *Eodem argumento* C, D, *ipsos* P, Q. *metientur æque, videlicet antecedens* C, *antecedentem* P: *Atque adeo cum* B, *&* C, *ipsum* P, *metiantur,* b *metietur quoque* G, *minimus, quem metiuntur* B *&* C, *eundem* P. *Quia vero ostensum est, esse ut* G, *ad* I, *ita L, ad* K, *hoc est, ita P, ad* Q, *erit permutando, ut* G, *ad P, ita I, ad* Q. *Atque idcirco, cum metiatur* G, *ipsum P, metietur & I, ipsum* Q. *Metitur autem &* E, *eundem* Q: c *quod* E, F, *in sua proportione minimi æque metiantur* Q R, *ejusdem rationis, nimirum antecedens* E, *antecedentem* Q. *Ergo cum metiantur I, E, ipsum* Q: d *metietur etiam* K, *quem minimum metiuntur I, E, eundem* Q, *major minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alii numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L,* K, *N; proptereaque ipsi M, L,* K, *N, minimi sunt.*

a 21. sep
b 37. septim.
c 12. sept.
d 37. septim.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint: inveniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus: deinde cum quarta posteriori agendum, ut nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T: inveniemus primum M, L, K, *N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad* B: C, *ad* D: *& E, ad F. Deinde si* S, *ipsum N, metiatur, accipiemus* O, *quem T, toties metiatur, quoties* S, *ipsum N, metitur. Nam M,* E, K, *N,* O, *erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi.*

A,6. B,5. C,4. D,3. *E,2. F,7. S,3. T,2.*
M.48. L,50. K,30. *N,105.* O,70.

Si vero S ipsum N, non metiatur, e sumemus O, quẽ

A,6. B,5. C,4. *D,3.* E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. *N,105.*
O,144. Q,120. *P,90.* O,315. *V,70.*

e 35. sep.

S, &

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

S, & N, minimum metiantur. E quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, *ipsum P, &* L, *ipsum Q; & M, ipsum* R; *quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum, V, metiatur.* His *enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus* A, *ad* B; C, *ad* D; E, *ad* F, *& S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.*

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nō minimis, absolvemus nihilominus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inventionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, ut ex demonstratione manifestum est.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita ut quilibet intermedius fit & antecedens & consequens, licet proportiones sint diversæ, quemadmodum ibi.

Porro inventis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus si ii multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alii in eisdem rationibus deinceps proportionales, ut constat ex iis quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstravimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

V.

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, *D; posterioris vero E,* F. *Dico proportionem A, ad* B, *compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus* C, *ad* E, *&* D, *ad* F, *vel ex proportionibus* C, *ad* F, *& D, ad* E; *ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus.* Faciant *D, & E, se mutuo multiplicantes numerum* G. *Quoniam igitur D, multiplicans* C, *&* E, *fecit* A, & G, *erit* A, *ad* G, *ut* C, *ad* E. *Eodemque modo, quia* E, *multiplicans* D *& F, fecit* G, *&* B, *erit* G, *ad* B, *ut* D, *ad* F. *Quare* A,

A, 24. B, 48.
G, 18
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

17. septim.

re A, G, B, *sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum* C, *ad* E, *&* D, *ad* F. a *Componitur autem proportio* A, *ad* B, *ex proportionibus* A, *ad* G, *&* G, *ad* B. *Eadem ergo proportio* A, *ad* B, *ex proportionibus laterum* C, *ad* E, *&* D, *ad* F, *componitur*. a 27. defin.

Eodem argumento ostendemus, proportionem A, *ad* B, *compositam esse ex proportionibus* C, *ad* F, *&* D, *ad* E, *si latera* E, *&* F, *loca inter se permutent, fiatque* G, *ex mutua* D *&* F, *multiplicatione. Cũ enim* D, *multiplicans* C, *&* F, *faciat* A, *&* G, b *erit* A *ad* G, *ut* C, *ad* F. *Similiter cum* F, *multiplicans* D, *&* E, *faciat* G, *&* B, *erit* G, *ad* B, *ut* D, *ad* E. *Ac proinde rursum* A, G, B, *deinceps proportionales sunt in rationibus laterum* C, *ad* F, *&* D, *ad* E. c *cum ergo proportio* A, *ad* B *componatur ex proportionibus* A, *ad* G, *&* G, *ad* B, *eadem ex proportionibus* C, *ad* F, *&* D, *ad* E, *componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.* b 17. sep. c 27. defin.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam ullum metietur.

Sint continue proportionales A, B, C, D, E, *&* A, *primus non metiatur* B, *secundum. Dico neque alium quenquam illorum ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit ut* A, *ad* B, *ita* B, *ad* C; C *ad* D; *&* D, *ad* E: A, *vero ipsum* B, *non metiatur, neque* B, *ipsum* C, *neque* C, *ipsum* D, *neque* D, *ipsum* E, *metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus.* d *Sumptis tribus numeris minimis* F, G, H, *in ratione* A, *ad* B, *erit ex aequo, ut* A, *ad* C, *ita* F, *ad* H. *Quia vero est ut* A, *ad* B, *ita* F, *ad* G, *non metitur autem* A, *ipsum* B: *neque* F, *ipsum* G, *metietur: Ac propterea* F, *non erit unitas, alias* F, *ipsum* G, *metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur.* e *Quare cum* F, *&* H, *sint inter se primi, &* F, *non sit unitas; non metietur* F, *ipsum* H; *Atque ob id, neque* A; *ipsum* C, *metietur. Est enim ostensum esse* A, *ad* C, *ut* F, *ad* H. *Eadem ratione ostendemus, quod nec* B, *tertium à se numerum* D, *nec* C, *tertium* E, *metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione* A, *ad* B, *simili modo demonstrabimus, neque* d 2. oct. e 3. octaui.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Si majores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A,B,C,D,E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullius proxime insequentis multiplex sit, constat. Nã cum sit, ut *A*, ad B, ita *B*, ad C; C, ad *D*, & D ad E. non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D, neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam *D*, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum *D*, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E,D,C,B, A: (Nam cum sit D, ad E, ut C, ad *D*: B, ad C, & A, ad B: erit convertendo E, ad D ut D ad C: *C*, ad B: & B, ad *A*) Et *E*. primus secundum D, non metitur: *a* neque alius quisquam illorum ullum metietur. Quare è contrario, si majores ad minores referantur, neque quisquam illorũ ullius erit multiplex per ea, quæ in defin, 5. lib. 7 scripsimus.

A, 81. B, 54. C. 36. *D*, 24. E, 16.

a 6. oct.

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cujuslibet sequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E: & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime in sequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, ut *A*, ad B, ita B ad C: C, ad D: & D, ad E: metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D ipsum *E*, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium meti-

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, *a* metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, *b* metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. a 11. *pronun.* b 11. *pronun.*

Sed jam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cujuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit ut A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A; ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C ipsius *D*, & *D*, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cujuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia *D*, ipsius E, est multiplex, metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inversam rationem E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorũ quemlibet sequentium metietur, ut demonstratum est. Ac propterea è contrario, si majores ad minores referantur, & quilibet cujusque sequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

Convertemus etiam hanc propositionem sextam, & theorema quod primo loco in scholio demonstravimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur: neque primus secundum metietur: Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, *B*, C, D, E, & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Si enim *A*, primus secundum *B*, dicatur metiri: metietur quoque per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neq; alius quisquam ullum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. *C*, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo *B*, sit multiplex. Dico neque *A*, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cujuslibet sequentium, ex iis, quæ secundo theoremate hujus scholii demonstravimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius *B*, multiplex erit.

A, 81. *B*, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

Sint deinceps proportionales A, B, C, D, E, *&* A, *primus extremum* B, *metiatur.* Dico *&* A, *primum metiri* B, *secundum. Si enim* A, *ipsum* B, *non dicatur metiri*: a *neque alius quisquam ullum metietur. Quare nec A, ipsum E, Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus* B, *secundum metietur: Atque idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 6. oct.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

Vt theorema quod secundo loco in scholio præcedentis propos. demonstravimus, convertamus, amplificabimus hanc propositionem hoc modo.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cujuslibet à secundo sit multiplex, primus quoque secundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex, neque alius quisquam ullum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholii præcedentis. Quod est contra hypothesin.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

viij. Si inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continuâ proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A, B, *medii proportionales continue* C, D: *sitque ut A, ad* B, *ita* E, *ad* F. *Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter* E, *&* F, *quot inter* A, *&* B. *Sumptis enim totidem numeris* G, *H*, I, K, *minimis in ratione* A, *ad* C, *quot sunt numeri* A, C, D, B: *erit ex æquo ut ut* A, *ad* B, *atque adeo ut* E, *ad* F, *ita* G, *ad* K. b *Quare cum* G, *&* K, *inter*

A, 24. C, 36. D, 54. *B*, 81.
G, 8. *H*, 12. *I*, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. *M*, 72. F, 108.

inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum, a *ac propterea in sua proportione minimi;* b *aeque metietur* G, *ipsum* E, & K, *ipsum* F. *Quoties ergo* G, & K, *ipsos* E, & F, *metiuntur, toties* H, & *I, alios numeros* L, & *M, metiantur, ita ut numeri* G, *H, I,* K, *numeros E, L, M,* F, *aeque metiantur, singuli singulos.* c *Quia igitur* G, *H, I,* K, *multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M,* F, *ipsos* E, *L, M, F, producunt: in eisdem rationibus erunt* E, *L,* M, F, *in quibus* G, H, I, K, *ut ad propos. 18. lib. 7. demonstravimus. A,* G, H, *I,* K, *sunt continue proportionales. Igitur &* E, *L,* M, F, *continue proportionales sunt; Atque idcirco cum multitudo* E, *L,* M, F, *aequalis sit multitudini* A, C, D, B, *tot cadent medii proportionales inter* E, & F, *quot inter* A, & B. *Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.*

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

a 23. *sept.*
b 21. *sept.*
c 9. *pronun.*

SCHOLIUM.

Non solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & *B*; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quae est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, *L*, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K. Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem haec propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, unitas. Item si vel *A*, vel B, fuerit unitas existentibus E, & F, numerus, ut in exemplis apparet.

Constat etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplae proportionis, vel superparticularis cujusvis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum mediũ proportionalem: cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem: superparticularis vero inter numeros, sola unitate differentes: superbipartientes deniq; inter numeros, quorum differentia est binarius si inter duos numeros duplae proportionis vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis: caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & unitatẽ: vel inter numeros sola unitate differentes vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos qui easdẽ cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione potest. Nam neq; inter binarium & unitatem, neq; inter duos numeros sola unitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abest, ut aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interjicitur solum numerus

qui

qui ab utroque unitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem,in hunc modum demonstrabimus, Differant numeri A B, C D,(sive C D,unitas sit,& A B,ternarius sive non,) binario,inter quos cadat numerus E F, minor unitate quã A B, major vero quam C D, unitate quoque. Dico E F,non esse medium proportionalẽ inter A B,C D Si enim dicatur esse A B,ad E F,ut E F,ad C D: ablato ex A B,numero A G, ipsi E F, æquali,ut reliqua sit unitas G B; & ex E F, numero E H,ipsi C D,æquali,ut relinquatur etiam unitas H F; erit quoque ut A B,totus ad E F,totum,ita A G,ablatus ad E H,ablatum; cum A G. E H, ipsis E F,C D,æquales sint ex constructione Igitur erit quoque reliquus G B,ad reliquum H F,hoc est unitas ad unitatem, Vt totus A B, ad totum E F,major ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B,& C D.

A . . G . B	A . . . . . . G . B
E . H . F	E . . . . . . H . F
C . D	C . . . . D

Itaque inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest Alioquin caderet etiam medius proportionalis,ex hoc theoremate,inter 3 & 1. minimos numeros proportionis triplæ,qui binario inter se differunt,quod fieri non posse, proxime demonstravimus.

Pari ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate,medius proportionalis inter 5. & 1.minimos numeros proportionis quintuplæ,quod fieri non posse, ita demonstrabimus Cadat primum,si fieri potest, inter quinarium A B,& unitatem C, medius proportionalis binarius,vel ternarius D: ita ut sit A B,ad D,ut D,ad C: Et convertendo C,ad D,ut D,ad A B Et quoniam unitas C, metitur D: metietur quoque D,ipsum A B. At binarius,vel ternarius D,metitur quoque senarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A E a ac proinde & D,numerus metietur reliquam unitatem B E. Quod est absurdum.

A . . . . . B . E
D . . D . . .
C .

a 11. pronũ

Cadat deinde,si fieri potest,inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo,ut prius, D,metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D,quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B,& ablatum A E: b ac proinde & D,numerus reliquam unitatem E B, metietur. Quod est absurdum.

A . . . , E , B
D . . . .
C .

b 11. pronũ

Ex quibus fit,neque illud intervallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, ut Diapason,vel,ut vulgo dicitur, octava neque illud,quod in sesquioctava proportione repetitur,cujusmodi est

est Tonus,seu vulgo,secunda,bifariam posse secari,hoc est, in duas proportiones æquales illa enim proportio bifariam(quod ad propositũ attinet) secari dicitur,inter cujus terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12 hoc modo 24.12.6. Idcirco proportio quadrupla bifariam divisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctava, non cadere medium numerum proportionalem, perspicuum est, Diapason, & Tonum,bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui divisione in Diapenten,& Diatessaron, quorum intervallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit,apud Musicos secatur,ut hic apparet,2.3.4. Est enim hic proportio dupla divisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam,tanquam in maximas sui partes inter se inæquales Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorum alterum majus, alterum minus dicitur secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

Rursum ex his demonstrari potest,proportionem diametri cujusvis quadrati ad latus ejusdem numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea,quæ ad propos.47. lib. 1. demonstravimus,quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti,quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit ut proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametris ad latus. Cum ergo illa proportio,cujus duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat,qui illam bifariam secet, ut ostendimus, manifestum est,nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse,sed esse irrationalem,seu,quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem,qua de re plura ad 9.& ultimam propos. lib. 10.scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum,ac unitatem medii continua proportione cadent.

Cadant inter numeros A B, inter se primos medii continue proportionales C,D. *Dico totidem cadere continue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, &* B,*quot inter A, & B, cadunt. Inventis enim duobus numeris* E,*&* F, *minimis in ratione* A, *ad C,* a *sumantur in eadem proportione tres minimi* G, H, I, a 2. oct. *& quatuor* K,L,M,N, *& sic deinceps, donec multitudo assumptorum*

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

rum æqualis sit multitudini A,C,D, B. *Quoniam ergo* A,B, *extremi inter se primi sunt*; a *erunt* A,C,D, B, *minimi in proportione* E, *ad* F. *Sunt autem & totidem* K,L,M,N, *ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur* K,L,M,N, *ipsis* A,C,D,B, *æquales sunt singuli singulis, ut* K, *ipsi* A, *&* N, *ipsi* B, *ne minores minimis dentur. Quia vero, ut constat ex demonstratione propos. 2. hujus lib.* E, *seipsum multiplicans produxit* G, *multiplicans vero ipsum* G, *fecit* K, b *metietur* E, *ipsum* G, *per* E, *&* G, *ipsum* K, *per eundem* E: c *Metitur autem & unitas ipsum* E, *per* E. *Æquè igitur metietur unitas ipsum* E, *&* E, *ipsum* G, *&* G, *ipsum* K; *Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius* E, *&* E, *ipsius* G, *&* G, *ipsius* K. d *Proportionales ergo sunt deinceps, unitas, & numeri*, E,G,K. *Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. hujus lib. quod* F, *seipsum, multiplicans producat* I, *multiplicans vero ipsum* I, *faciat* N: e *metietur* F, *ipsum* I, *per* F, *&* I, *ipsum* N, *per eundem* F: f *Metitur autem & unitas ipsum* F, *per* F. *Æque igitur metietur unitas ipsum* F, *&* F, *ipsum* I, *&* I, *ipsum* N: *Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius* F, *&* F, *ipsius* I, *&* I, *ipsius* N. g *Proportionales ergo sunt continue, unitas, & numeri* F,I,N; *Ac proinde cum tam multitudo* E, G,K, *quam* F,I,N, *una cum unitate, æqualis sit multitudini* K,L, M,N, *vel* A,C,D,B, (*ut perspicuum est ex propos. 2. hujus lib. Nam duo* E,F, *sunt secundi ab unitate: & tres* G,H,I, *tertii: & quatuor* K,L,M,N, *quarti, &c.*) *tot cadent medii continue proportionales numeri inter unitatem, &* K, *numerum, seu* A, *sibi æqualem: & inter unitatem, & numerum* N, *sive* B, *sibi æqualem, quot inter numeros* A,B. *Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medii, &c. Quod ostendendum erat.*

a 1. oct.
b 7. pronu.
c 5. pronun.
d 20. defin.
e 7. pronun.
f 5. pronun.
g 20. defin.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est, numeros qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque unitatem habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C, hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem, id quod in scholio propos. 2. hujus lib. quoque asseruimus.

Constat etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E,G,K, & F,I,N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. hujus lib. continue esse proportionales ab unitate.

THE-

THEOR. 8. PROPOS. 10. X.

Si inter duos numeros, & unitatem continue proportionales ceciderint numeri: quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A, B, *& unitatem, quotcunque numeri medii continue proportionales: inter A, quidem & unitatem, numeri* C, *D*, E: At *vero inter* B, *& unitatem, numeri F*, G, H, *illis multitudine aequales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrumque A*, B, *& unitatem. Multiplicantes enim se mutuo* C, *& F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, &* G, *faciat* K, *&* L. *Rursus idem C, multiplicans* K, *L, &* H, *faciat* M, *N, &* O, *totidem inter* A, *& B, quot sunt inter utrumque A, & B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad* C, *ita* C, *ad* D, *D, ad E; & E, ad* A: *aeque metietur unitas ipsum* C, *& C, ipsum* D, *& D, ipsum E, & E, ipsum* A: a *Metitur autem unitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum* D, *&* D, *ipsum E, & E, ipsum A, per* C, *metietur.* b *Quare C, seipsum multiplicans fecit* D: *multiplicans autem* D, *fecit* E, *& multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F. seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit* B. *Itaque cum* C, *multiplicans C, & F, fecerit* D, *& I:* c *erit ut C, ad F, ita* D, *ad* I. *Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G:* d *erit ut* C, *ad* F *ita I, ad G. Sunt igitur tres* D, *I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans* D, *I, G, fecit* E, K, *L: habebunt* E, K, L, *per ea, quae ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam* D, *I, G, hoc est, quam* C, *ad* F. *Eodem modo, quia* C, *& F, multiplicantes* G, *fecerunt L, & H:* e *erit ut* C, *ad* F, *ita L, ad* H. *Quatuor ergo numeri* E, K, *L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad* F. *Postremo, quia C, multiplicans* E, K, *L, H, fecit* A, M, *N, O, habebunt, ex iis, quae à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A,* M, *N,* O, *eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam* C, *ad* F. *Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint* O, *& B,* f *erit, ut C, ad F, ita O, ad* B. *Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F: Ac proinde tot medii proportionales cadant inter A, & B, quot inter* A, *vel*

A, 81.	M, 162.	*N*, 324.	*O*, 648.	B, 1296.
	E, 27.	K, 54.	L, 108.	H, 216.
	D, 9.	*I*, 18.	G, 36.	
	C, 3.		F, 6.	
		1.		
		Vnitas.		

Marginal notes: a 5. pronun. — b 9. pronun. — c 17. sep. — d 17. sept. — e 18. sep. — f 18. sep.

A, vel B, *& unitatem, cum multitudo* M, N, O, *facta sit aequalis multitudini* C; D, E, *vel* F, G, H. *Quocirca si inter duos numeros & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Ex his constat, numeros, qui medii proportionales cadunt inter *A*, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod *C*, *D*, E, A, continue proportionales sunt ab unitate: D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quae tũ ad ea quae sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

I.

Si sint ab unitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine aequalium; habebunt tertii ab unitate proportionem duplicatam ejus, quam habent secundi ab unitate; quarti vero ejusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps, uno amplius.

Sint numeri A, B, C, *D*, continuo ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alii E, F, G, H. Dico proportionẽ B, tertii ab unitate ad F, ab eadem tertium duplicatam esse ejus, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter utrumque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis, inter *B*, quidem & unitatem, numerus A: At inter F, & unitatem numerus E: *a* cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo per scholii hujus propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I.

a 10. oct.

D, 81.	M, 108.	N, 144.	O, 192.	H, 256.
	C, 27.	K, 36.	L, 48.	G, 64.
	B, 9.	I, 12.	F, 16.	
	A, 3.		E, 4.	
		1.		
		Vnitas.		

Eodem modo cadent inter C, & G, duo medii in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L: quot nimirum cadunt inter utrumque C, G, & unitatẽ. Nec non inter DH, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione

tione A,ad E proportionales. Quoniam igitur ex defin. B,ad F, proportionem habet duplicatam ejus, quam habet B,ad I, est autem ut B,ad I, ita, A,ad E; Habebit quoque B,ad F, rationem duplicatam ejus, quam habet A,ad E. Non aliter habebit C,ad G, rationem triplicatam rationis A,ad E; quia ratio C ad G, triplicata est proportionis C,ad K; & est ut C,ad K, ita A,ad E, Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A,ad E,& sic de cæteris.

Hoc idem demonstrabimus si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium; Habebunt tertii ab illo numero proportionem duplicatam ejus, quam habent secundi ab eodem; quarti vero ejusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodẽ totidem alii F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B,ad F, esse duplicatam proportionem C,ad G; & D,ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O, & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q, & ex F in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat C. Quibus peractis: erunt A, K; L, M continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. hujus lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionales; nec non & F Q R S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. hujus scholii: Est autem, ex defin. ejusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, ut N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, ut K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q duplicata rationis A, ad F, & ejusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, ut N, ad K; & A, ad G, ut K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, ut N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. hujus scholii, quod tam B, N, quam F Q, sint ab unitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. hujus lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eadem argu-

E,162. I,512.
D,54. Vnitas. H,128.
C,18. 1. G,32.
B,6. F,8.
A,2.
N,36. K,4. Q,64.
O,216. L,8. R,512.
P,1296. M,16. S,4096.

E,81. I,1.
D, 4. Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

gumentis erit ratio D,ad H triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O,ad L,ex 1. theoremate, triplicata est rationis B,ad A; quod tam B, N, O, quam A,K,L, sint ab unitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. hujus lib. & ejusdem triplicata est ratio D,ad A, ex defin. Igitur est D,ad A, ut O, ad L. Eodemque modo est A,ad H, ut L,ad R: quod utraque proportio triplicata proportionis A,ad F: proportio quidem A,ad H, ex defin. ea proportio L,ad R,ex 1. theor. hujus scholii, propterea quod tam A, K,L,quam F,Q,R, continue proportionales sunt ab unitate, ex scholio propos. 9. hujus lib. Est ergo ex æquo D,ad H, ut O, ad R. Sed ratio O,ad R, triplicata est rationis B,ad F; ex 1. theor. eo quod tam B,N,O,quam F,Q,R, sunt continue proportionales ab unitate ex scholio propos. 9. hujus lib. Igitur & ratio D,ad H, triplicata est ejusdem rationis B,ad F. non secus demonstrabimus rationem E,ad I, esse quadruplicatam rationis B,ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri unius ordinis desinant in unitatem, ut ex secunda figura est manifestum, in qua I, est unitas.

Cæterum theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis universalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quod inter utrumque ipsorum, & assumptum deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales, inter A, quidem & C, numeri D,E,F, inter B, vero & C, totidem numeri G. H,I. Dico tot quoq; medios continue proportionales cadere inter A & B, quot inter A,& C, & inter B, & C. Item tot inter F & I, quot inter F,& C,& inter I,& C. Et tot inter E,& H, quot inter E, & C & inter

inter H,& C, Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D,ad G: erit ex defin. ratio K,ad M,duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. hujus scholii, ratio quoque E, ad H, duplicata est ejusdē rationis D, ad G. Igitur est ut K,ad M, ita E,ad H; Atque adeo cum inter K,& M, cadat unus medius proportionalis L: a cadet quoque unus medius, nimirum N, inter E,& H; quemadmodum & inter E,& C,& inter H,& C, unus medius cadit: Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F,& I, duos medios cadere, sicut & inter F,& C,& inter I,& C, duo medii cadunt. Et eadem ratione inter A,& B, tres medii cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi. a 8. oct.

A,162. Q,216. R,288. S,384. B,512.
E,54. O,72. P,96. I,128.
E,18. N,24. H,32.
D,6. G,8.
C,2.
K,9. L,12. M,16.

Hoc etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, unitas assumatur, veluti perspicuum est hac secunda figura, in qua numerus B; unitas est, caduntque tam inter A,& C, quam inter B,& C, tres numeri continue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medii proportionales cadunt inter A, & B, nec non inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

A,1048576. Q,32768. R,1024. S,32. B,1.
F,65536. O,2048. P,64. I,2.
E,4096. N,128. H,4.
D,256. G,8.
C,16.
K,1024. L,32. M,1.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

11.

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A. *&* B, *quorum latera* C, *&* D. *Dico inter* A, *&* B, *unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem* A, *ad* B, *quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis* C, *ad* D, *lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo* C, *&* D, *faciat* E. *Quia igitur* C, *multiplicans seipsum fecit* A, *quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum* D, *multiplicans fecit* E,

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

a17. sep

b17. septim.

ex constructione: a *erit ut* C. *ad* D, *ita* A, *ad* E. *Rursus, quia* D, *multiplicans* C, *fecit* E, *ex constructione: & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit* B, *quadratum:* b *erit quoque, ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* B. *Quare* A, E, B, *continue proportionales sunt in ratione laterum* C, *&* D. *Ac proinde inter quadratos* A, *&* B, *medius continue proportionalis cadit* E. *Quia vero, ex eo quod* A, E, B, *continue proportionales sunt, numerus* A, *ad* B, *duplicatam rationem habet ejus, quam habet* A, *ad* E: *duplicatam quoque rationem habebit* A, *quadratus ad* B, *quadratum, ejus, quam habet* C, *latus ad latus* D: *cum hac proportio eadem sit, qua* A, *ad* E. *Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

Perspicuum est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris, C, ad latus D, ut demonstratum est.

Pari ratione liquet, numerum medium proportionalem *E*, & utrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionalem sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E ad B ut C ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum *B*, consequens consequentem si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem: quandoquidem est *E*, ad B, ut C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, ut C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum *A*, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

xi.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam, habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, *&* B, *quorum latera* C, *&* D. *Dico inter* A, *&* B, *duos medios numeros continue proportionales cadere*

dere? Et proportionem A, *ad* B, *cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis* C, *ad* D, *lateris ad latus. Multiplicans enim* C, *seipsum faciat* E: *&* D, *seipsum multiplicans faciat* F: *At* C, *&* D, *se mutuo multiplicantes faciant* G: *Multiplicantes vero* G, *faciant* H *&* I. *Quoniam igitur* C, *seipsum, &* D, *multiplicans fecit* E, *&* G, a *erit, ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* G. *Eadem ratione, cum* D, *multiplicans* C, *& seipsum, fecerit* G, *&* F: b *erit quoque ut* C, *ad* D, *ita* G, *ad* F. *proptereaque* E G F, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* D. *Rursus, quia ex defin. cubi,* C, *ipsum* E, *multiplicans fecit* A, *& ex constructione multiplicans ipsum* G, *fecit* H: c *erit ut* E, *ad* G, *hoc est, ut* C, *ad* D, *ita* A, *ad* H. *Similiter cum* D. *ipsum* G, *multiplicans fecerit, ex constructione, numerum* I? *multiplicans vero ipsum* F, *ex defin. cubi, fecerit cubum* B; d *erit quoque, ut* G, *ad* F, *hoc est, ut* C, *ad* D, *ita* I, *ad* B; e *Est autem &* H *ad* I, *ut* C, *ad* D: *quod* C, *&* D, *ipsum* G, *multiplicantes fecerint ex constructione,* H, *&* I. *Igitur* A, H I B, *continue sunt proportionales in ratione* C, *ad* D: *Atque adeo inter cubos* A, *&* B, *duo medii* H, *&* I, *cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod* A, H, I, B, *continue sunt proportionales, numerus* A, *ad* B, *triplicatam habet rationem ejus quam habet* A, *ad* H: *triplicatam quoque rationem habebit* A, *ad* B, *cubus ad cubum, ejus, quam habet* C, *ad* D, *latus ad latus, cum sit* C, *ad* D, *ut* A, *ad* H. *Quamobrem duorum cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.*

a 17. sep.
b 17. sep.
c 17. sep.
d 17. septim.
e 18. sep.

A, 27.	H, 36.	I, 48.	B, 64.
E, 9.	G, 12.	F, 16.	
C, 3.	D, 4.		

SCHOLIUM.

Hic quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H; & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

Eodem modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & utrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, ut C, ad D. Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, ut C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atq; adeo inter se

A, 27.	H, 36.	I, 48.	B, 64.
E, 9.	G, 12.	F, 16.	
C, 3.	D, 4.		

compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, ut C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum vero trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

xij. Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes jam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eveniet.

Sint continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F, *multiplicantes autem ipsos* D, E, F, *faciant* G, H, I; *& rursum multiplicantes ipsos* G, H, I, *faciant* K, L, M, *& ita deinceps.* Dico quoque D, E, F, *&* G, H, I, *&* K, L, M, *continue esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuo faciant* N; *&* B, C, *se mutuo multiplicantes faciant* O. *Deinde A, multiplicans* N, E, *faciat P, Q. Item* B, *multiplicans* O, F, *faciat* R, S. *Simili modo A,*

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

multiplicans P, Q, *H, faciat T, V, X; &* B; *multiplicans R, S,* I, *faciat Y, Z, a. Quoniam igitur* A, *multiplicans seipsum, &* B, *fecit* D, N, a *erit ut A, ad* B, *ita* D, *ad* N. Eodem *modo, quia* B, *multiplicans A, & seipsum fecit* N, *&* E; *erit etiam, ut A, ad* B, *ita* N, *ad* E. *Sunt igitur* D, N, E, *continue proportionales in ratione* A, *ad* B. *Rursus, quia B, seipsum, & numerum* G, *multiplicans fecit* E, *&* O; b *erit ut* B, *ad* C, *ita* E, *ad* O. *Eademque ratione, cum* C, *multiplicans* B, *& seipsum, fecerit* O, *&* F; *erit ut* B, *ad* C, *ita* O, *ad* F: *propterea, &* E, O, F, *continue proportionales sunt in ratione* B, *ad* C, *seu A, ad* B. *Quare cum* D, N, E, *in eadem ratione sint continue proportionales, in qua* E, O, F: *erit ex aequo* D, *ad* E, *ut* E, *ad* F, *atque adeo* D, E, F, *continue proportionales sunt.*

a 17. sep

b 17. septim.

Deinde

Deinde, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q: erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc est, in ratione A, ad B proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H: a *erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc est, B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I:* b *erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita S, ad I; propterea que & H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I, erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I: Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales.*

a 18. sep.

b 18. sep.

Non dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales: & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Sunt autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C, Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam ejus, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

Iam quoque numeri secundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et sic deinceps semper uno amplius.

Brevius propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F, & in hos ex eisdem numeris G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F, & G, H, I: & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam ex scholio propos. 9. hujus lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theorema. scholii propos. 10. hujus lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed ejusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I, esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Ex qua rursu demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione duorum numerorum; secundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholii propos. 10. hujus lib elicitur.

Quamvis autem in utraque demonstratione hujus propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui seipsos multiplicantes faciant E, F, G, H postea vero multiplicantes ipsos

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. E, 19. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

a 13. oct. E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a ex demonstratis proportionales sunt. Item F, G, H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in seipsos, hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in seipsos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alii deinceps eodem modo producti.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus A, *cujus latus* C, *quadratum* B, *cujus latus* D. *Dico & latus* C, *latus* D, *metiri. Multiplicantes enim se mutuo* C, *&* D, *faciant* E. *Quoniam igitur, ut liquet ex demonstratione propos.* 11. *hujus lib.* A, E, B, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* D; *Metitur autem* A, *primus extremum* B, b *metietur*

b 7. oct. *quoque* A, *primus secundum* E. *Quare cum sit ut* A, *ad* E, *ita* C, *ad* D, *&* C, *latus latus* D, *metietur.*

A. 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

Metiatur jam C, *latus latus* D. *Dico & quadratum* A, *quadratum* B, *metiri. Eodem enim modo erit, ut* C, *ad* D, *ita* A, *ad* E, *propterea quod* A, E, B, *continue proportionales sunt in ratione* C, *ad* D, *ut demonstratum est propos.* 11. *hujus lib. Quare cum* C, *metiatur* D, *metietur quoq;* A, *primus* E, *secundum, ac proinde & extremum* B, *metietur, ex theoremate* 2. *scholii propos.* 6. *hujus lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.*

xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

Metiatur cubus A, *cujus latus* C, *cubum* B, *cujus latus* D. *Dico &*

co & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, seipsum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione propos. 12. hujus lib.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D. a 7. oct.

Metiatur jam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. hujus libr. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. hujus lib. demonstravimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerum metiatur; &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, b metietur & quadratus A; quadratum B. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

b 14. oct.

Sed jam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; c metietur quoque C, latus illius latus hujus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum. c 14. oct.

THEOR. 15. PROPOS. 17. XV.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

a 15. oct.

A, 8.	B, 27.
C, 2.	D, 3.

Sed jam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur, Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. oct.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si majores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

c 14. & 15. oct.

Quod si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. d Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur. Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.

d 14. & 15. oct.

A, 36.	B, 9.
C, 6.	D, 3.

At vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 64.	B, 8.
C, 4.	D, 2.
A, 49.	B, 9.
C, 7.	D, 3.

e 16. & 17 oct.

Similiter si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus latus C. f Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

A, 125.	B, 8.
C, 5.	D, 2.

f 16. & 17. oct.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri similes A, B, *& latera illius sint* C, D, *hujus vero illius proportionalia* E F; *ita ut* C, D, *se mutuo multiplicantes faciant* A, *&* E, F, *mutuo se multiplicantes faciant* B, *sitque ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* F. *Dico inter* A, *&* B, *cadere unum numerum medium proportionalem, & proportionem* A, *ad* B, *esse duplicatam proportionis laterum homologorum* C, F, *vel* D, F. *Multiplicantes se mutuo* D, E, *faciant* G. *Quoniam igitur est* C, *ad* D, *ut* E, *ad* F; *erit permutando* C, *ad* E, *ut* D, *ad* F, *Et quia* D, *multiplicans* C, *&* E: *fecit* A, *&* G, a *erit* A, *ad* G, *ut* C, *ad* E, *hoc est, ut* D, *ad* F. *Similiter quia* E, *multiplicans* D, *&* F. *facit* G, *&* B, b *erit quoque* G, *ad* B, *ut* D, *ad* F. *Proportionales ergo sunt* A, G, B, *in ratione* C, *ad* E, *vel* D, *ad* F: *Atque adeo inter* A, *&* B, *medius proportionalis cadit* G. a 17. sep. b 17. sept.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

Quia vero, cum A, G, B, *sint continue proportionales* A, *ad* B, *duplicatam habet rationem ejus, quam habet* A, *ad* G, *hoc est*, C, *ad* E, *vel* D, *ad* F: *perspicuum est proportionem numeri plani* A, *ad planum* B, *esse duplicatam ejus, quam habet* C, *ad* E, *vel* D, *ad* F, *latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIUM.

Quia ostensum est *A*, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel *D*, ad F: manifestum est, inter duos similes planos A, & *B*, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum, G, E, vel *D*, F, assumptorum.

Constat etiam ex dictis, medium proportionalem *G*, & utrumlibet planorum A, *B*, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, ut *C*, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cujus sunt latera consequentes consequentem, si de proportionib. C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur: metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad *B*, ut C, ad E, vel D, ad F. *A*tqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cujus sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit

A, ad

A, ad G, ut C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem: metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F: ideoque erunt inter se compositi.

Ex qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, priorum duorum numerorũ A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A: posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

xviij.

Duorum similium solidorum numerorum duo medii proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, *hujus vero illis proportionalia* F. G. H. *ita ut sit* C. *ad* D. *quemadmodum* F. *ad* G. *&* D. *ad* E. *sicut* G. *ad* H. Dico *inter* A. *&* B. *cadere duos medios proportionales. & proportionem A. ad* B. *esse triplicatam ejus, quam habent latera homologa* C. F. *vel* D G. *vel E. H.* Multiplicantes *n. se mutuo* C. *D. faciant I: &* F G. *se mutuo multiplicantes faciant* K. *Item* D. F. *se mutuo multiplicantes faciant* L. *Postremo E. H ipsum* L. *multiplicantes faciant* M. *N. Quia igitur* C. D. E. *ipsis* F. G. H. *proportionales sunt: erunt & permutando proportionales, nimirum ut* C. *ad* F. *ita D. ad* G. *&*

A, 30. M, 60. N. 120. B, 240.
I, 6. L, 11. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10

a 17. septim. E. *ad H. Quoniam vero* D. *multiplicans* C. *&* F. *fecit I. &* L: a *erit ut* C. *ad* F. *ita I ad L. Simili modo quia* F, *multiplicans* D. *&* G. *fecit* L. *&* K: b *erit quoque ut* D. *ad* G *ita L ad* K. *Sunt ergo I. L.* K. *continue proportionales in ratione* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G. *vel* E. *ad* H.

b 17. sept.

Et quoniam A. *solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum* C. D. E: *factus est autem I, ex multiplicatione mutua* C. D: *fit ut* E, *multiplicans I. faciat A. Eodem modo cum* B, *solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum* F. G. H: *&* K, *factus ex mutua multiplicatione* F. G; *numerus H. ipsum* K, *multiplicans faciet* B. *Quare cum E. multiplicans I. &* L. *fecerit* A. *&* M. c *erit* A. *ad* M.

c 17. septim. *ut I. ad L. hoc est, ut* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G. *vel E. ad H. Eadem ratione,*
cum H. multiplicans L. K. *fecerit N. &* B: d *erit N. ad* B. *ut L. ad* K.
d 17. sept. *hoc est, ut* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G. *vel E. ad H.* e *Est autem & M. ad* N. *ut*
e 18. sep. E. *ad H: quod E. H. multiplicantes* L. *fecerint ipsos M, &* N. *Igitur* A. M. N. B. *continue sunt proportionales in ratione* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G.

vel

vel E,ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medii M, N, continue proportionales cadunt.

Quoniam vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue: proportio A, B, triplicata est ejus, quam habet A, ad M: Est autem A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam ejus quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, duorum similium solidorum numerorum duo medii, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum demonstratum sit A,M,N,B, proportionales esse in ratione C,ad F, vel *D*,ad G, vel *E*,ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M,& N, in ratione laterum homologorum C,F vel D,G, vel E H, assumptorum.

Ex iis quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M.N. & utrumlibet solidorum A.*B*. inter se esse compositos. Cum enim A,M,N,*B*, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D ad G vel E, ad H, hoc est, esse A, ad M, & *M*, ad N, & N, ad *B* ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F,*G*,H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N ad B, & C, ad F, vel D ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoque *C*,D,E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N ad B, ut C, ad F, vel *D*, ad G, vel E, ad H. Atque & C,*D*,E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. *D*einde quia M N B, proportionales sunt ipsis I L, K, metitur autem K, ipsum *B*, quod B, factus sit ex K, in H, metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C,D, latera planum suum I. *a* Igitur & C,D: metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. *a 11. pronun.* Ergo A,M,N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam *E*; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus qui est A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C D,E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F,G,H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur vero & F,*G*,H, ipsum N; Cum enim factus sit ex H, in L, per constructionem, metietur H, ipsum N. *D*einde quia A,*M*,N, ipsis I, L,K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit, ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F G, ipsum N, atque adeo, F,G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum late-

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,F. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

A,30. M,60. N,120. *B*,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. *D*,3. F,4. G,6. H,10.

latera suum solidū. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam F, quam G, & quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi *A*: At vero F, G, H, latera posterioris solidi *B*, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, *B*.

Quia vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco, eundem numerum solidum procreari, sive primum latus ducantur in secundum, & numerus procreatus in tertium: sive primum in tertium, & numerus genitus in secundum: sive deniq; secundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propositis quotvis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter se permutent. Quæ quidem res magnum usum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo ejusmodi theorema.

Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

A,3. B,5. C,8.
D,15. E,120. F,24. G,40.

Sint primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, *a* erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, *b* ita quoque est F, ad A: quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: ut autem D, ad B, *c* ita est A, ad unitatem: propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E ad B, ita F, ad unitatem: *d* atque idcirco numerus ex B, in unitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in E, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

a 15. *defin.*
b 15. *defin.*
c 15. *defin.*
d 19. *septim.*

E, F,
D, A.
B, unitas.

Rursus quia ex C, in D, fit E: *e* erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem. Sed ut C, ad unitatem, *f* ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C, Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, *g* ita est B, ad unitatem, propterea quod D, factus est ex A, in B. Igitur ex æquo erit ut E, ad A, ita G, ad unitatem: *h* ac

e 15. *defin.*
f 15. *defin.*
g 15. *defin.*
h 19. *sept.*

E, G,
D, B.
A, unitas.

pro-

proinde numerus factus ex E, in unitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodū igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C, ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A, quod est secundum.

Sint deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C, item ex A, in in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Item; ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita ut præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diversæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim ut in tribus ostensum est idem numerus fit, sive genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, sive prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, D, 5.
E, 120.

Deinde quia ut in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

Tertio quoniam, ut in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, sive genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, sive prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem, quod est tertium.

Quarto quia, ut in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

Quinto quoniam, ut demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C, producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D,& ex producto in B,qui ex A,in D,& ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui sit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.

Sexto,quia,ut in tribus demonstravimus,idem numerus fit ex A in B,& ex producto in C.qui fit ex B,in C,& ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D,quam ex B,in C,& ex producto in A, & ex producto in D,quod est sextum.

Septimo quia ut in tribus ostendimus,idem numerus gignitur, sive productus ex B,in C,ducatur prius in A, deinde hic productus in D,sive prius in D,deinde hic productus in A: constat eundem numerum fieri ex B,in C,& ex producto in D,& ex producto in A, qui fit ex B,in C,& ex producto in A,& ex producto in D. Sed hic proxime ostensus est æqualis ei,qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D,Igitur & ille,quod est septimum.

Octavo quia,ut in tribus ostensum est,idem numerus procreatur ex A. in B. & ex producto in D. qui ex B in D.& ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A. in B. & ex producto in D.& ex producto in C. qui ex B. in D.& ex producto in A. & ex producto in C Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A,in B. & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur & hic Quod est octavum.

Nono quia,ut demonstratum est in tribus,idem numerus fit ex B, in C.& ex producto in D qui ex B. in D. & ex producto in C: procreabitur idem quoque numerus ex B in C & ex producto in D. & ex producto in A. qui ex B. in D.&,ex producto in C. & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei,qui fit ex A in B & ex producto in C.& ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

Decimo quoniam,ut in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A in C. & ex producto in D, qui ex C. in D. & ex producto in A. producetur quoque idem numerus ex A. in C.& ex producto in D.& ex producto in B, qui ex C. in D. & ex producto in A,& ex producto in B. Sed ille, ut tertio loco est ostensum, æqualis est ei,qui fit ex A. in B. & ex producto in C:& ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.

A,2. B,3. C,4. D,5.
E,120.

Postremo quoniam, ut ostensum est in tribus,idem numerus gignitur ex B. in C. & ex producto in D,qui ex C in D. & ex producto in B,procreabitur quoque idem numerus ex B. in C. & ex producto in D,& ex producto in A. qui ex C. in D.& ex producto in B. & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A. in B & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est undecimum.

Eodem

Eodem argumentandi modo utendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod jam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinē ter immutavimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit ut quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C, a metientur D, & E, ipsos A, & C, aeque: metiantur per F. Similiter aeque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. b Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: c Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G fecit C, & B, d erit ut C, ad B, ita F, ad G. Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit ut D, ad E, ita F, ad G, & permutando ut D, ad F, ita E ad G, Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cujus latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus, cujus latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, ut E, ad G, erunt ex defin. A. B. plani similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. septim.
b 9. pronun.
c 9. pronun.
d 17. septim.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT *inter A, & B, duo medii proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumātur tres, E, F, G,*

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. L, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

minimi in ratione A,C,D,B. *Quoniam igitur inter* E, *&* G, *medius cadit proportionalis* F; a *erunt* E, *&* G, *plani similes : sint ipsius* E, *latera* H,I, *ipsius vero* G, *latera illis proportionalia* K,L. *Et quia* E,F, G, *cum minimi sint in ratione* A,C,D, b *aeque metiuntur ipsos* A,C,D, *ejusdem rationis cum illis*, *metiantur per* M, *eodemque modo*. c *quia* E, F, G, *minimi aeque metiuntur* C,D,B, *eandem habentes rationem cum illis : metiantur per* N : d *ita ut* M, *multiplicans* E,F, G, *faciat* A,C,D; *&* N, *multiplicans eosdem* E, F,G, *faciat* C,D,B, *factus est autem* E, *ex multiplicatione mutua suorum laterum* H, *&* I: *nec non* G, *ex mutua multiplicatione suorum laterum* K, *&* E. *Igitur* A., *producitur ex mutua multiplicatione* H,I,M; *&* B, *ex mutua multiplicatione* K, L ,N; *atque adeo* A, *solidus est numerus, ex defin. latera habens* H,I,M : *&* B, *solidus etiam, latera habens* K,L,N. *Quia vero* M, *&* N, *multiplicantes* F, *faciunt* C, *&* D, *ut ostendimus* : e *erit* C, *ad* D, *ut* M, *ad* N : f *Sunt autem* C, *&* D, *in eadem ratione, in qua* E, *&* F : *quod* N, *multiplicans* E, *&* F, *fecerit ipsos* C, *&* D : *Nec non &* E, F, *eandem habent rationem, quam* H, K, *vel* I,L. *Etenim inter planos similes* E,G, *cadit* F, *medius proportionalis, per coroll. propos* 19. *hujus lib. in ratione laterum homologorum* H,K, *vel* I,L. *Igitur erit quoque* H, *ad* K, *&* I, *ad* L, *ut* M, *ad* N, *& permutando* H, *ad* I, *ut* K, *ad* L : *&* I, *ad* M, *ut* L, *ad* N. *Proportionalia ergo sunt latera*, H, I, M, *lateribus* K, L, M; *ac propterea similes sunt numeri solidi* A, *&* B. *Quam ob rem si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri*, *&c. Quod erat demonstrandum.*

a 20. oct.
b 21. septim.
c 21. sep.
d 9. pronũ.
e 18. sep.
f 17. sept.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3 N, 78.

A, 8. C, 12. D, 3. L, N, 3.
E, 4. E, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

SCHOLIUM.

Duo exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, unitatem E, esse planum numerum, & unitates H, & I, ejus latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim unitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cujusmodi sunt etiam A,B, in eodem priori exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, eamque sine ulla exceptione demonstret.

THE-

THEOR. 20. PROPOS. 22. XX.

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri A, B, C, *continue proportionales, sitque primus eorum* A, *quadratus.* Dico *& tertium* C, *quadratum esse. Nam cum inter* A, *&* C, *cadat medius proportionalis*; a *erunt* A, *&* C, *plani similes. Quare existente A, quadrato, erit &* C, *ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deincepts sint proportionales, &c.* Quod *demonstrandum erat.* a 20. oct.

A, 9. B, 54. C, 324.

THEOR. 21. PROPOS. 23. XXj.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, *proportionales continue, &* A, *primus sit cubus.* Dico *&, quartum* D, *cubum esse. Cum enim inter* A, *&* D, *cadant duo medii proportionales* B, C: b *erunt* A, *&* D, *solidi similes. Quare existente* A, *cubo, erit &* D, *illi similis, cubus* Quamobrem, *si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.* b 21. oct.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

SCHOLIVM.

Hæc est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcidentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inveniet sane mancam esse & imperfectam. cum enim ad defin. 21 lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamvis, non quibuscunque lateribus unius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus unius proportionalia sint quædam alterius Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum unus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamē in demonstratione pro concesso, atq; omnib. perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 32. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3, & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiā si prior sit quadratus, habēs duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, imo omnino negare, posteriorē habere alia duo latera his proportionalia, hoc est inter se quoque æqualia, atq; adeo esse quadratū: quemadmodū etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione ulla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quapropter utramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

Sint tres numeri A.B.C: continue proportionales, & primus A. quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati *A*. cum *D*. ex defin. in se faciat A. erunt D. & A. ex scholio propos. 9. hujus lib. ab unitate continue proportionales, eritque convertendo A. ad D. ut D. ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medii proportionales multitudine æquales nimirum unus: cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholii propos. 10. hujus lib. inter unitatem, atque C. numerum, nimirum unus, qui sit E. Quoniam igitur unitas & E. *C*. numeri sunt continue proportionales: producetur C. ex E. in se ipsum, ex scholio propos. 10. hujus lib. Ac proinde C. quadratus erit ex defin. cujus latus E.

A,36. B,48. C,64.
D,6. E,8.
unitas.

Aliter. Sumptis tribus numeris D E.F. minimis in ratione A. ad B. & B. ad C; metietur D. ipsum A. & F. ipsum C. æque, ex iis, quæ ostendimus ad propos. 1. lib. 7. Et quoniam extremi D. F. minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. hujus lib. sunt quadrati: Est autem A, quadratus ex hypothesi: *a* cadet inter A. & D. quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero est ex æquo, ut A. ad C. ita D. ad F; & permutando, ut *A*. ad D. ita C. ad F, *b* cadet quoque inter C. & F. unus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F primus metiatur C. ultimum; *c* metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K quoties F. ipsum H. metitur; ita ut H. ad F & K. ad I. eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K *d*. Itaque quia ratio L. ad F. quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K. ad I. lateris ad latus, hoc est H. ad F. Est autem & ratio C. ad F. ejusdem rationis H. ad F. ex defin. duplicata, quod convertendo sint proportionales etiam *C*. H. F. erit L. ad F. ut C. ad F; Ac proinde L. & C. æquales sunt. Existente ergo L. quadrato, ex constructione, & C. quadratus erit.

A,36. B,48. C,64.
G,18. H,32.
D,9. E,12. F,16.
L,64. K,8. I,4.

a 11. *oct.*
b 8 *oct.*
c 7. *oct.*
d 11. *oct.*

ALITER. *e* Quoniam A & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, *D*, *E*, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita ut sit D,

[e] 20. *oct.*

sit D. ad E. sicut F. ad G: assumaturque H. latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D. in E, & ex H. in se, *a* erunt D. H. E. continue proportionales. Cum ergo sit F. ad G. ut D. ad E; cadatque inter D. & E. medius proportionalis H. *b* cadet quoque inter F. & G. unus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F. I. G. sint continue proportionales: *c* idem numerus fiet ex F. in G. qui ex I. in seipsum, Fit autem C. ex F. in G. Igitur & idem C. fiet ex I, in seipsum: Atque adeo C. quadratus erit, ex definitione, cujus latus I. *a 20. sep.* *b 8. oct.* *c 20. septim.*

A,36. B,48. C,64.
H,6. I,8.
D,3. E,12. F,4. G,16.

A,36. B,48. C,64.
H,6. I,8.
D,6. E,6. F,8. G,8.

Sint rursum quatuor numeri *A*.B.C.D. continue proportionales, & A. primus, sit cubus. *Dico* & D. quartum, cubum esse. Sumpto enim E. latere cubi A; fiat ex E. in seipsum numerus F. ac proinde, ex defin. ex E. in F. cubus A. Quia ergo E. in se facit F. & in F. facit *A*. erunt ex scholio propos. 9. hujus lib. E.F.A. continue proportionales ab unitate; atque idcirco convertendo proportionales quoq; erunt numeri *A*.F E & unitas. Itaque cum tam inter numerum D. quam unitatem, ac eundem numerum A. cadant medii proportionales multitudine æquales, videlicet duo: cadent ex theorem. 3. scholii propos. 10. hujus lib. totidem medii inter unitatem, & numerum D. qui sint G. H Itaque quia unitas & numeri G. H. D. continue sunt proportionales: fiet H. ex G. in se, & *D*. ex G. in productum H. ut ad propos. 10. hujus lib. à nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cujus latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000.
F,16. H,100.
E,4. G,10.
unitas.

Aliter. Inventis quatuor numeris minimis E.F.G. H. in ratione A. ad B. & B. ad C. & C. ad D. metietur E. ipsum A. & H. ipsum *D*. æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstravimus. Et quia E.H. extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. hujus lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi: *d* cadent inter E. *A*. cubos duo medii proportionales, qui sint I.K. Quoniam autem, ex æquo, est ut A. ad D. ita E. ad H: & permutando, ut A. ad E, ita *D*. ad H: *e* cadent quoque inter H. D. duo medii proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur *D*. extre- *d 12. oct.* *e 8. oct.*

A,64. B,160. C,400. D,1000.
K,32. M,500.
I,16. L,250.
E,8. F,20. G,50. H,125.
P,1000. O,10. N,5.

mum, *f* metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita ut L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit
a 12. oct. quoque P, cubus ipsius O. *a* Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicatæ sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, ejusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod convertendo proportionales etiam sint D, M, L, H: erit P, ad H, ut D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit ex constructione, cubus quoque erit D.

xxij.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

Sit enim A, *ad* B, *ut* C, *quadratus ad quadratum* D; *sitque* A, *quadratus. Dico &* B, *esse quadratum. Cum enim sit* A, *ad* B, *ut* C. *ad* D: b *cadat autem inter* C. *&* D, *quadratos unus medius proportionalis, videlicet*

b 11. oct.
c 8 oct.

A, 36.	F, 48	B, 64.
C, 9.	E, 12.	D, 16.

E: c *cadet quoque inter* A, *&* B, *medius unus, qui sit* F. *Quia igitur tres numeri sint continue proportionales* A, F, B: *&* A, *primus est quadratus: erit &* B, *tertius quadratus*.
d 22. oct. d *Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

Liquet ex his, proportionem cujusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, *e* essent ambo priores numeri haben-
e 24. oct. tes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim
f 24. oct. 4. existente quadrato, *f* esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & c. quod
g 11. oct. est absurdum. *g* Nã inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. hujus lib demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosvis non posse cadere medium proportionalem.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non ha-
h 11. oct. bebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, *h* caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1.
i 8. oct. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non posse, demõstratum à nobis est in scholio propos. 8. hujus lib.

xxiiij.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus

bus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum, sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D, a cadant autem inter C, & D, cubos duo medii proportionales, qui sint E F: b cadent quoque inter A, & B, duo medii, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat. a 12. oct. b 8. oct. c 23. oct.

A, 8.	G, 12.	H, 18.	B, 27.
C, 64.	E, 96.	F, 144.	D, 216.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cujusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, d essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repetitæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus. d 25. oct.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes: e cadet inter eos unus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B: erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1 propos. 2. hujus lib. e 18. oct.

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, ut ad F, Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conversum hujus; videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, d Dico A, B, esse planos similes. f Quoniã enim inter quadratos C, f 11. oct.

A, 8.	B, 18.
C, 16.	D, 36.

a 8. oct. b 20. oct. A,8. B,18. C,16. D,36. D, cadit unus medius proportionalis; Et est, ut C, ad D, ita A, ad B; *a* cadet quoque medius proportionalis inter A, & B, *b* Quare A, & B, plani similes sunt.

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent, ut modo demonstratum est, plani similes, quod est absurdum, ponuntur enim non similes.

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

c 19. oct. *Sint similes solidi A, B. Dico esse, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A B, sunt solidi similes; c cadent inter eos duo medii proportionales, qui sunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E H, ex coroll. 1. prop. 2. hujus lib. cubi. Quare, cum ex aquo sit A, ad B: ut E, ad H; constat ita esse A, ad B, ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.*

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

SCHOLIVM.

Conversum hujus etiam demonstrabimus: scilicet,

Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

d 12. oct. e 8. oct. f 21. oct. Numeri enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A. B. solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, ut C, ad D: *d* cadant autem inter C D, cubos duo medii proportionales, *e* cadent quoque inter A. B duo medii. *f* Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A,16. B,54.
C,64. D,216.

g 18. oct. h 8. oct. Ex his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, *g* caderet inter eos medius unus proportionalis, quod fieri non posse, jam dudum ostensum est in scholio propos. 8. hujus lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medii proportionales. Nam *h* alias caderent quoque duo medii inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola unitate, vel certe binario tantũ inter se distent, ut ut in scholio prædicto traditum est, inter quos certum est, non posse recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter nec duo quivis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possunt habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo unitatem, & seipsum, quamvis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1.19. & 1.23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quivis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit latera tantum habet duas unitates, & seipsum. Vt hi numeri solidi 25. & 47. latera habent 1.1.29. & 1.1.47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur, Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

Rursus neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamvis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo hujusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; *a* cadet inter illos unus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continue proportionales, ut in scholio propos. 24. lib. 7. demonstravimus, Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. hujus lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. a 18. & 19. *oct.*

Ex his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare majorem. Nam si eum non numeraret; *b* essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, ut proxime ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes: quod absurdum est, & contra hypothesin. Verum hoc ostensive quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitque A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, unitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, unitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita ut sit C, ad E, ut D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, ut E, ad F. *c* Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium: Fit autem ex C, unitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. *d* Quare D, ipsum F, metietur: *e* Metitur autẽ F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. *f* Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod est propositum. b 31. *septim.* c 19. *sep.* d 4. *pronũ.* e 4. *pron.* f 11. *pronũ.*

A, 3.		B, 48.	
C, 1.	D, 3.	E, 4.	F, 12

Hinc perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorū
minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimi-
les, metiretur minor majorem, ut proxime oſtendimus. Cum ergo
& ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod
eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A,B, ſitque A, minor primus. Dic
A, ipſum C, metiri. Nam cum A & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt la-
tera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B, C, u-
nitates, & numerus D, ipſi A, æqualis quod nullus alius numerus
præter unitatem & numerum D, ipſi A
æqualem, metiatur numerum primum
A: ſint E, F, G, latera numeri B, late-
bus B, C, D, proportionalia, ita ut ſit B

A,3. B,24.
B,1.C,1.D,3.E,2.F,2.G,6.

a 19. ſep. ad E ut C ad F, & D ad G. Quia igitur eſt C, ad F, ut D ad G er
permutando C, ad D ut F ad G. a Igitur numerus factus ex C, pri-
mo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, terti-
um. Fit autem ex C, unitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo
b 4. pronun. numerus G, fiet ex D in F b Quare D ipſum G, metietur. c Metitu
autem G, ipſum B, quod G latus ſit ipſius B. d Igitur & D, hoc eſt
c 4. pronun. A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

Atque ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quo-
d 11. pronũ. rum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent
ſimiles, metiretur minor majorem, ut proxime oſtendimus. Cum
ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe com-
poſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Itaque facilis admodum eſt inventio duorum planorum, vel ſoli-
dorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes
proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartien-
tem: vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum
neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita
ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

e 26. oct. Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter
f 24. oct. vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16 & 20. Si
enim eſſent plani ſimiles: e haberent proportionem, quam quadra-
tus ad quadratum Exiſtente igitur 16. quadrato, f eſſet & 20. qua-
dratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter
vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent
g 27. oct. ſolidi ſimiles, g haberent proportionem quam cubus ad cubum.
h 25. oct. Cum igitur 27. cubus ſit, h eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum:
ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI

EVCLIDIS ELEMENTVM NONUM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, a erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, b unus medius cadit proportionalis. c Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; d erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. sep. b 18. oct. c 8. oct.

A, 6.	B, 54.	
D, 36.	E, 108.	C, 324.

d 22. oct.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; e erit ut A, ad B, ita D, ad C. f At inter D, & C, quadratos unus medius cadit proportionalis. g Igitur & inter A, & B, unus medius proportionalis cadet; h Ac propterea

A, 6.	B, 54.
D, 36.	C, 324.

e 17. septim. f 11. oct. g 8. oct. h 20. oct.

Præterea A,& B,similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes,&c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit.

A,4. B,25.
C, 100.

Duo quadrati A B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A,& B, sint similes plani, nimirum quadrati: *a* erit C, ex eis productus, quadratus.

a 1. noni.

II.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus. *Dico* & B, quadratum esse. Cum enim A,& B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: *b* erunt *A*,& B, similes plani: *c* atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis: videlicet D. *d* Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A,9. D, 12. B, 16.
C,144.

b 2. noni.
c 18 oct.
d 22. oct.

III.

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A,B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum: sitque A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. hujus scholii: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non igitur quadratus est B, numerus.

A,4. B, 20.
C,80.

IV.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem: Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo

multinultiplicantes faciant C. Dico C, non esse qua- ratum. Nam si C, foret quadratus, cum produ- tur ex A, in B, sitque A, quadratus, esset & B, ex eor. 1. hujus scholii: quadratus: Quod est absurdum, & contra ypothesin. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
G, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet ali- em; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse um. Sit enim G, latus cubi A; & C, in se fiat D, & idcirco ex C, in se cubus A, gignatur. Quia i- r C, seipsum multiplicans fecit D. etietur C, ipsum D, per C: b*Me- r autem & unitas ipsum C, per Igitur eadem pars est unitas ipsius C, qua C, ipsius D, nimirum minata à C;* c *Ac proinde ut unitas ad C, ita C, ad D: Rursus C, multiplicans D, fecit A;* d *metietur D, ipsum A, per C, Meti r autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius a D. ipsius A.* e *ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: sed ut C, ad D, at unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A: adeo inter unitatem & numerum A, duo medii proportiona- lunt numeri C-D.* f *At quia A, ipsum B, metitur per A, quod sum multiplicans fecerit B;* g *metitur vero & unitas ipsum ; Eadē erit pars unitas ipsius A. qua A, ipsius B;* h *Ac propterea unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & nu- A, cadant duo medii proportionales C, & D,* i *cadent totidem , & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B: tinue proportionales, & A, primus sit cubus,* k *erit quoque tus cubus. Si cubus igitur numerus seipsū multiplicans, &c. at demonstrandum.*

A, 8.
E, 16. D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. *Vnitas.*

a 7. *pronun.*
b 5. *pronun.*
c 20. *defin.*
d 7. *pronun.*
e 20. *defin.*
f 7. *pronū.*
g 5. *pronun.*
h 10. *defin.*
i 8. *oct.*
k 23. *oct.*

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

ubus numerus cubum numerum multiplicans fa- uem; Factus cubus erit.

ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse ns enim A, seipsum faciat D; l *cubus. Quoniam vero A, mul- A, & B, fecit D, & C,* m *erit ut D, ad C,* n *At inter A, & B, cu- dii proportionales cadunt.* o *Igitur & inter D, & C, duo medii*

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

l 3. *noni.*
m 17. *sep.*
n 12. *oct.*
o 8. *oct.*

a13.oct. *medii proportionales cadent: a Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit Quocirca si cubus numerum cubum numerus multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

V. Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

b12.noni. *Fiat ex cubo A, in numerum B numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D: b qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A,*

c17.sep. A, 8. B, 27. *& B, fecit D, & C, c erit ut A, ad*

d12.oct. D, 64. C, 216. *B, ita D, ad C: d At inter D, & C,*

e8.oct. *cubos duo cadunt medii proportio-*

f2.oct. *nales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent: f Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c Quod ostendendum erat.*

SCHOLIVM.

Ex his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

Fiat ex A. cubo in B, non cubum numerus C.

A, 8. B, 20. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; g

g5.noni. C, 160. & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, non cubus C,

A, 8. B, 17. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus,

h4.noni. C, 136. *h* & factus cubus C, cubus erit, quod est contra hypothesin.

THEOR. 6. PSOPOS. 6.

VI. Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse, Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit. cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, ut perspicu-

A, 8. B, 64. C, 512. *um est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C: a erit & A, cubus.*

Qua-

Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. noni.

SCHOLIVM.

Aliam demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt &c quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: *b*Ergo inter B, & C, cubos duo medii proportionales cadunt. *c* Quoniam vero est ut B, ad C, ita A, ad D, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; *d* cadent quoque inter A, & B, duo medii proportionales. Atque adeo existente B, cubo, & A cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, ut perspicuum est.

b 12. oct. c 17. sep. d 8. oct. e 23. oct.

A, 8. B, 64. C, 512.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

Numerus compositus A, *multiplicans numerum quemlibet* B, *faciat* C. *Dico* C, *esse solidum. Cum enim* A, *sit compositus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis, metiatur* D, *ipsum* A, *per* E. *Quo posito* g, *multiplicante* D, *ipsum* E, *producetur* A. *Cum ergo* B, *ipsum* A, *multiplicans fecerit* C; *procreabitur* C, *ex mutua multiplicatione trium numerorum* D, E, B: *Ac propterea solidus erit ex defin. cujus latera* D, E, B. *Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

f 13. defin. g 9. pronun.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autẽ est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus, simul, & quadratus, & quinq; intermittentes omnes.

Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. *Dico tertium quidem* B, *ab unitate esse quadratum, & unum intermittentes omnes, quales sunt* D, F, H, K, M: *Quartum autem* C, *cubum, & duos intermittentes omnes, cujusmodi sunt* F, I, M, *septimum vero* F, *cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum*

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

rum M. Quoniam enim est unitas ad A, ut A, ad B : æque metitur unitas numerum A, & numerus A, numerum B : a Metitur autem unitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur : b Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus : c erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, d & F, quadratus erit : Nec non & omnes unum intermittentes.

a 5. pronun. b 9. pronun. c 11. oct. d 22. oct.

Rursus quia est unitas ad A, ut B, ad C, æque metietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C. e Metitur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, f atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreavit numerum C. Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, ut est ostensum, erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, g erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus, h & I, cubus erit, atque omnes semper duos intermittentes.

e 5. pronun. f 9. pronun. g 23. oct. h 23. oct.

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus est & quadratus, & cubus : ipse erit cubus simul & quadratus : Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus : Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

Si sint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono: undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime numero positos in locis tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctavo, & aliis, quæ ternarius metitur, cujusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octavo, vigesimo quarto, & aliis, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertius decimus, decimus nonus, vigesimus quintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

Nam primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post tertium ab unitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab unitate: Numeri denique tertii ordinis quinque semper interponunt post septimum ab unitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post unitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post unitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt. ix.

Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, *sitque primum* A, *proximus unitati quadratus.* Dico

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

& reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittentes, quales sunt B, D, F, *quadrati sint,* a *jam demonstratum est. Quod vero & reliqui intermedii* C, *& E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cum tres continue pro-* a 8. noni.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

portionales sint A, B, C; *sitque A, quadratus;* b *erit &* C, *quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus* C, D, E, *cum* C, *sit quadratus;* c *&* E, *quadratus erit. Omnes igitur A,* B, C, D, E, F, *quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.* b 22. oct. c 22. oct.

Sit jam A, *proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos intermittentes,*

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

cujusmodi sunt C, *&* F, *sint cubi,* d *jam est demonstratum. Quod autem & reliqui* B, D, E, *cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad* A, *ut* A, *ad* B; *aeque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum* B; e *Metitur autem unitas numerum* A, *per ipsum met* A. *Igitur & A, ipsum* B, *per seipsum metietur;* f *Atque adeo cubus A, seipsum multiplicans numerum* B, *procreabit* g *Quare* B, *cubus est. Quoniam vero quatuor continue proportionales sunt A,* B, C, D, *estque* A, *cubus,* h *& D, cubus erit. Eademque ratione; assumptis quatuor deinceps proportionalibus* B, C, D, E, *cum* B, *cubus sit:* i *& E, cubus erit: Omnes igitur A,* B, C, D, E, F, *cubi sunt: Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales* d 8. noni. e 5 pronun. f 9. pronun. g 3. noni. h 23. oct. i 23. oct.

i fue-

fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Non demonstravit Geometra, si numerus, qui post unitatem; sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nã si proximus unitati sit cubus simul, & quadratus, qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, ut demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

Verum tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus unitati quadratus. Dico & omnes quadratos esse; Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio A, multiplicans B, facit C; suntque A, B, quadrati; erit & C, qua-

Vnitas. *A*,4. B,16. C,64. *D*,256. E,1024. F,4096.

dratus, ex scholio propos. 2. hujus lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntque A C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. hujus lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. *A*, multiplicans D, producat E: & multiplicans E, faciat F, &c.

Sit deinde A proximus unitati cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multiplicans

Vnitas. A,8. B,64. C,512. *D*,4096. E,32768. F,262144.

a 3. *noni.* cans facit B: *a* erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio A,
b 4. *noni.* multiplicans *B*: facit C, suntque A, B, cubi, *b* erit & C, cubus. Rur-
c 4. *noni.* sus quia ex eodem scholio A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, cubi; *c* erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex scholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem, non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post unitatem, non sit cubus, neq; alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

Sint

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, *I, &c. & primum A, proximus unitati nō sit quadratus. Dico nec alium ullum esse quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, hoc est, præter* B, L, F, *H, &c. Si enim præter hos alius est quadratus, sit quadratus* E. a *Cum ergo* a 8. noni.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. *E*, 32. *F*, 64. *G*, 128. H, 256. *I*, 512. K, 1024. *L*, 1048. *M*, 4096.

& D, sit quadratus; sitque ut D, *ad* E, *vel* E, *ad* F, *ita* A, *ad* B, *& convertendo, ut* E, *ad* D, *vel* F, *ad* E, *ita* B, *ad A; habebit* B, *ad* A, *rationem, quam quadratus numerus* E, *ad quadratum numerum* D, *vel quadratus* F, *ad quadratum* E: b *sed* B, *tertius ab unitate est quadratus.* c *Igitur &* A, *primus ab unitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim* A, *non quadratus. Non ergo* E, *quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.* b 8. noni. c 24. oct.

Sed jam A, *proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter* C, F, I, *&c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit* D, *cubus.* d *Cum ergo &* F, *cubus sit, sitque ex æquo ut* D, *ad* F, *ita* A, *ad* C, *(quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & convertendo ut* F, *ad D, ita* C, *ad* A; *habebit C, ad A, rationem, quam cubus* F, *ad cubum* D: e *Sed* C, *est cubus, cum sit quartus ab unitate.* f *Igitur &* A, *primus ab unitate cubus erit, quod est contra hypothesin. Non igitur* D, *cubus est. Quod si* E, *credatur esse cubus;* g *cum &* C, *cubus sit, sitque ex æquo, ut* C, *cubus ad* E, *cubum, ita A, ad* C, *& convertendo ut cubus* E, *ad cubum* C, *ita* C, *ad A; existente C, cubo,* h *erit, &* A, *cubus, quod non ponitur. Non ergo* E, *cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, &* E, *inter duos cubos* C, *&* F, *cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque* G, *& H, inter cubos* F, *& I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.* d 8. noni. e 8. noni. f 25. oct. g 8. noni. h 25. oct.

SCHOLIVM.

Non est autem necesse, si numerus, qui post unitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinq; intermittentes omnes: cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul & quadrato.

Sit enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem non autem a 9. noni. b 8. noni. tem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul, & quadratum: cubum quidem, *a* quod primo existente cubo, omnes cubi sint; *b* quadratum vero, quod tertius sit ab unitate.

Vnitas. B, 8. B, 46.

Sit deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul, & quadratum; *c* Cubum quidem, quod quartus sit ab unitate: quadratum vero; *d* quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

c 8. noni. d 9. noni.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

Sit postremo A, post unitatem neque cubus neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. *E*, 7776. F, 46656.

e 10. noni. existente quadrato, *e* nullus alius quadratus sit, præter tertium ab unitate, ut unum intermittentes omnes, cujusmodi sunt, ut in scholio propos. 8. hujus lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimus septimus, decimus nonus, &c. Primo autem non existente cubo, *f* nullus alius

f 10. noni. sit cubus, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. Perspicuum est, tantummodo septimum, tertium decimum, decimum nonum, qui quidem omnes quinq; intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octavam hujus libri expenderit.

xj. THEOR. II. PROPOS. II.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

Sint ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, *D*, *E*, F, G. *Dico quemlibet minorem, ut* C, *quemlibet ma-*

Vnitas. *A*, 3. B, 9. *C*, 27. D, 81. *E*, 243. F, 729. *G*, 2187.

jorem, ut G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, *F*, *G*. *Cum enim sit ex æquo ut* C, *ad* G, *ita unitas ad* D: (*quod quinque numeri* C, *D*, *E*, F, *G*, *eandem habeant rationem continuam quam unitas & quatuor numeri* A, B, C, *D*, g *æque metietur unitas*

g 10. defin. a 5. prom *numerum* D, *atque numerus* C, *numerum* G; a *Sed unitas metitur*

nume-

numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit ut E, ad F, ita unitas ad A &c. Sic quoque metietur, A, ipsum G, per F, cum sit ex aequo ut A ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est ex his quantum abest major numerus à minore metiente, tantum distare ab unitate eum numerum, per quem minor majorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad majorem, quae unitatis ad eum, per quem metitur minor majorem, ut ex demonstratione apparet. Itaque B,

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter unitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quam inter unitatem & C, duo interjecti sunt numeri.

Hinc rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab unitate. Si vero minor aliquis majorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à majore distat, quantum minor ab unitate, propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet tum, per quem metitur, *b* producitur ille, quem metitur. Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cum F, tantùm absit à C, quantum C, ab unitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, ut diximus. Sic quoque B, multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis. b *9. pronun.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum metiuntur, iidem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

Sint ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, unitati proximum. Si namque non metitur ipsum A: c erit E, cum primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se c *13. septim.*

 pri-

a 9. pronū. primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, a atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. b Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; c ac proinde in sua proportione minimi; d metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, e atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, f Atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. g Erit igitur ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum.

b 19. septim. c 23. sep. d 21. sep. e 9. pronun. f 9. pronū. g 19. sep.

Vnitas A, 10. B 100. C, 1000. D, 100000.
E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

Quapropter cū A, & E, sint inter se primi; h ac propterea in sua proportione minimi: i Metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B per H: k ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A. atque idcirco A, seipsum multiplicans facit B, ut ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in seipsum l Quare erit ut E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter se primi sint: m ac proinde in sua proportione minimi; n æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesin. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri: Quod est absurdum. Metietur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscumque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, vel B, ultimus numerus statuatur.

h 23. sep. i 21. sep. k 9. pronun. l 20. defin. m 23. sep. n 22. septim.

ALITER Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; o erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, ut ex scholio præpos. præcedentis constat p erit B, ad E, primus. Quia ergo A & B, ad E, primi sunt: fit autem C, ex A in B, per idem scholium præcedentis propos. q erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt: & fit D, ex A in C, ex eodem scholio præcedentis propos. r erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesin. Metitur ergo E, ipsum A, Si igitur ab unitate quot-

o 31. sep.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

p 27. septim. b 26. sept. r 26. sept.

quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Itaque neque ullus numerus primus, qui major sit eo, qui proximus est, unitati, neque ullus minor proximum unitati non metiens, metiri potest ultimum. Si namque metiretur ultimum; metiretur quoque unitati proximum, ut demonstratum est, quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Est autem admirabilis prima hujus propositionis demonstratio, Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmativa E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album ex eo, quod non est albus, parodoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in aliis nonnullis propositionibus, quæ sequuntur Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturq; se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim hujus demonstrationis expendisset, vel certe si expendit, eam in memoriam revocasset, quandoquidem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrandi modo, ut ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi usus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. ut ibidem monuimus.

Cæterum ex demonstratis perspicuum est, quemcunque numerum primum, qui ultimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. *a* Cum enim metiatur proximum unitati: hic autem omnes subsequentes: *b* quod semper minor majorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris *c* manifestum est quod & ille omnes metiatur. a 12. *noni.* b 11. *noni.* c 11. *pronun.*

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiii.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post unitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, *quorum* A, *proximus unitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos* A, B, C, *metiri maximum* D. *Si enim fieri potest, metiatur numerus alius* E, *diversus ab* A, B, C, *ipsum* D. *Manifestum autem est,* E, *non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum* D: d *metietur quoque ipsum* A, *unitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur* E, *primus est sed compositus:* e *atque adeo eum aliquis numerus Primus metietur, quem* d 12 *noni.* e 33. *sep.*

Vnitat.	A, 5.	B, 25.	C, 125.	D, 624.
	E ---.	H ----	G ---	F ----

dico

dico alium esse non posse, prater primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; a metietur quoque ille alius primus eundem D: b atque adeo & ipsum A, primum, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur jam E, ipsum D, per F. Dico F, diversum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C: c & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. d Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diversus. Quoniam vero E, metitur D, per F, e metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, ultimum: f metietur & A, proximum unitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus: g atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quē rursus dico nullum alium esse posse prater primum A. Si namque alius

a 11. pronun.
b 12. noni.
c 8. pronū.
d 11. noni.
e 8. pronun.
f 12. noni.
g 33. sept.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E-- -H---- G-- F--

primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum: h metietur quoque ille alius primus eundem D: i atque adeo & ipsum A, proximum unitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F: k fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in scholio propos. 11. hujus lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium: l Ac proinde erit ut A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, ut ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diversus ab A, B, metitur C, ultimum (relinquimus enim jam numerum D,) per G: ostendemus similiter, G, diversum esse ab A B, & non primum, sed compositum quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diversus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

h 11. pronun.
i 12. noni.
k 9. pronun.
l 19. septim.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G: m etietur utique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; m & vicissim aliquis ipsorum A B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur,) metietur C, per F. n Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B: erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. Ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui ali-

m 8. pron.
n 11. noni.

aliquis ipsorum A, B, sed diversus. Quoniam autem F, metitur C, per G; a metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, pri- a 8. pro-
mus. Si enim primus sit, metiaturque ultimum C, b metietur nun.
quoque numerum primum A, unitati proximum, quod est absurdum. b 12. noni.
Non ergo G primus est, sed compositus, c ac proinde eum aliquis pri- c 33. sep.
mus metietur, quem dico nullum alium posse esse prater A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, ultimum, d d 11. pro-
metietur quoque illi alius primus eundem C, e atque adeo ipsum A, nun.
unitati proximum qui primus est, quod est absurdum. Ergo non ali- e 12. noni.
us primus quam A, ipsum G, metietur. f Iam vero quia C, fit ex F, f 9. pronũ.
in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut g 19. se-
docuimus in scholio propos. 11. hujus lib. Fiet idem numerus C, ex ptim.
A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. g Quare erit ut A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, ut demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diversus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim jam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diversum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

Nam si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B per H: metie- h 8. pro-
tur utique G, ipsum B, per A: h Et vicissim A, ipsum B, per G, metie- nun.
tur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio i 9. pronun.
propos. 11. hujus lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diversus. i Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio propos. 11. hujus lib. docuimus: Fiet idem numerus B, ex H primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum. k Quare erit ut H, primus ad k 20. se-
A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, ptim.
ut est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, prater ipsos A, B, C. Ac proinde si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 14. XIV.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum prater ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diversus à B, C, D, i-

A........................
B..C....D.....
E----F-------

psum A, per numerum F. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipsum F, faciet A, b Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diversum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 9. pronũ.
b 37. sept.

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in sua propoortione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G. Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus sed compositus: c sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, uno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.

c 2. oct.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
M,8. N,12. O,18. P,27.
I,4. K,6. L,9.
H---- F,2. G,3.

Quoniam igitur, ut constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F. vel ad M. Si ad F, habemus propositum, si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit ex scholio ejusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in seipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. Quod si H, primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

Deinde metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem

dem modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

Rursus metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se, compositus quoque erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probavimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsũ G.

Præterea A, metiatur H, non primus quartum D, qui cum fiat ex F in P, erit H compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum: si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad H, vel ad L. Si ad G, habetur propositum: si vero ad L cum L producatur ex G in se: erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

Eodem modo si H, non primus metiatur ultimum E, ostendemus H, compositum esse ad H, Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G: atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsũ F, vel ad eum compositus erit. Si vero H, metiatur ultimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & ultimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstravit prioribus 10. theorematibus.

QVoniam ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quot-

quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiviso, & qualibet parte numeri divisi continentur.

Sint duo numeri AB, & C, quorum AB, dividatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK, hoc est toti numero GK, ex GH, HI, IK, composito. Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; a metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH, & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK pars erit à C, denominata, eadem nimirum quæ AB, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstravimus, totus AB totius GK, eadem pars est, quæ AD, ipsius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt, F, & GK. Quod est propositum.

A . . . D . . E . B C . .
F . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

a 2. pronun.

b 4. pronũ.

II.

Si numerus in duas partes dividatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim AB, dividatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex AB, in AC, & in CB, quod est propositum.

D . . . . . .
A . . . , C . . B

Idem demonstrabitur, si AB, plures partes, quam in duas secetur, ut, ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc est, ex AB, in singulas partes AC, CD, DB.

E . . . . . .
A . . . C , . D . B

III.

Si numerus in duas partes dividatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi,

illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

Sit numerus AB, divisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis sit: erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .

A . . . . C . . . . . . B

IV.

Si numerus in duas partes dividatur. Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, divisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, una cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A . . . . . . C . . . . B

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medii, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus, enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, una cum quadrato numeri intermedii CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B, numero vero comprehenso semel sub CD, DB, una cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in DB; fit, ut si hic numerus factus ex CB, in D B, sumatur pro quadrato ipsius DB, una cum numero facto ex CD, in D B: numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, una cum reliquo numero facto ex C D, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex toto A D, in DB. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B: hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipsius C D, æqualis erit quadrto ipsius CB. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, & illi aliquis alius numerus adjiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adjecto in adjectum, una cum quadrato dimidii numeri, æqualis est quadrato ejus numeri, qui ex dimidio & adjecto componitur.

Numerus enim A B. secetur in partes æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adjecto B D, tanquam uno, nimirum ex A D, in adjectum B D, una cum quadrato dimidii numeri C B, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adjecto B D, tanquam uno hoc est, quadrato ipsius C D. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, una cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratis partium C B, B D, una cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B C, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit ut si hic numerus factus ex A D, in B D, sumatur pro quadrato partis B D, una cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipsius C D, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C B, una cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus ex A D, in B D, una cum quadrato ipsius C B, æqualis sit quadrato ipsius C D. Quod est propositum.

A . . . . C . . . . B . . D

Si nu-

VII.

Si numerus in duas partes dividatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

Dividatur numerus A B, in partes A C, C B. Dico quadratum totius A B, una cum quadrato partis C B æqualem esse numero bis, qui fit ex toto A B, in dictam partem C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius A B, æqualis sit quadratis partium A C, C B, una cum numero, qui fit bis ex A C, in C B, si quadratus ipsius C B, addatur communis; erunt quadrati numerorum A B, C B, simul, æquales quadratis numerum A C, C B, una cum numero qui fit bis ex A C, in C B. Atqui ei, qui fit ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius C B, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex A B, in C B: Ac proinde ei, qui fit bis ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius C B, bis, æqualis est, qui fit bis ex A B, in C B. Igitur si pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius, C B, bis, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, simul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . . B

VIII.

Si numerus in duas partes dividatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Secetur numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, una cum quadrato reliquæ partis A C; æqualem esse quadrato numeri qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis sit dictæ parti C B; cum quadratus totius A D; compositi ex A B, & B D, sive dicta parti C B, sit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui fit ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum AB, C B, una cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorrum, A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, una cum quadrato numeri A C, fit, ut si pro quadratis numerorum A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, una cũ quadrato ipsius A C, quadratus factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

A . . . . C . . . B . . . D

Si nu-

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diviſus ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D D B,) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D: Si communis apponatur quadratus partis D B: erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur, ſi pro quadrato ipſius D B, una cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis, AC propterea quadrati partium A D, D B; dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitum.

A. . . . . C. . . D. . B

X.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, adjiciatur autem illi alius quiſpiã numerus. Quadratus compoſiti numeri ex toto & adjecto, & quadratus numeri adjecti, ſimul dupli ſunt ejus quadrati, qui ex dimidio efficitur, & ejus, qui fit à numero compoſito ex dimidio, & adjecto.

Sit numerus A B, diviſus in partes duas æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adjecto B D, & quadratum adjecti numeri B D, utroſq; ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adjecto B D. Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theorem, quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D, ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una

A. . . C. . . . B. . D

una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius B D, una cum numero bis qui fit ex C B, in C D, æquales sunt quadrati numerorum C B, C D, & quadrato ipsius C B, æqualis est quadratus ipsius A C, Igitur si pro quadrato ipsius B D, una cum numero, qui fit bis ex C B, in C D: sumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc est numerorum A C, C D: erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod est propositum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, ut numerus aliquis in duas partes dividatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in unum partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, ut ibi monuimus, ita demonstrabimus.

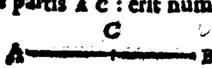
Dividatur, si fieri potest, numerus A B, in C, ita ut numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, C B, æqualis est quadrato numeri medii A C; *a* erit ut A B ad A C, ita A C, ad C B: Est autem A B, major quam A C, ita A C: Igitur & A C, major est quam C B. Ablato jam C D, qui ipsi C B; sit æqualis, erit quoque ut A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, est ut A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum: *b* erit quoque ut totus A B, ad totum A C, vel ut detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, residuus, hoc est, C D, ipsi C B, æqualis ad A D, ex A C, residuum. Quia igitur est ut A C, ad C D, ita C D, ad A D: & est A C, major quam C D, erit quoque C D, major quam A D. Ablato ergo D E, qui ipsi A D, sit æqualis; erit etiam ut A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia est, ut totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum erit, *c* quoque ut totus A C, ad totum C D, vel ut detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, residuus, hoc est D E, ipsi A D, æqualis ad E C, ex C D, residuum. Quare cum sit ut C D, ad D E, ita D E, ad E C: sit autem C D, major quam D E; erit etiam D E, major, quam E C: Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipsi E C, æqualis: & sic deinceps, nec unquam finis erit hujus detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit dividi in infinitum. Non ergo numerus A B, dividetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

a 20. septi.

b 11. septi.

c 11. septi.

Aliter. Quoniam numerus A B, in C, ita divisus est, ut is qui fit ex A B, in C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C: erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipsius A C: Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, una



cum quadrato ipsius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, una cum quadrato ipsius A C, quadratus, quippe cum æqualis sit quadrato, numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirũ is, qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, dividitur ita in C, ut is qui producitur ex A B, in C B, æqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

Verum hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. hujus lib.

xvj. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C; & B C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicantem facere C.

A, 9. B, 12.
C, 16.
D, 3. E, 4.

a24. sep. *a Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt:*
b30. sept. *b erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; c erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D,*
c26. sept. *ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in D, æqualis est per 3. theorema scholii præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E:*
d27. septim. *d Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.*

e30. sep. *Deinde quia, ut prius, e uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E: efficitur, cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,)*
f26. septim. *f numerum factum ex D, E, tanquam uno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanqam in E, æqualis est per 3. theorem. scholii antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B C, simul compositi, ad D, primi sunt,*
a27. sep. *a atque adeo & ad*

B, 12. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

Postremo quia, ut prius, b uterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo è contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E, c erit quoque qui fit ex D, ad compositum ex D, E, primus; d Ac proinde & idem fit qui ex D, in E, ad eum qui fit ex D E, tanquam uno, in se primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in se, aequalis est, per 4. theorem. antecedentis scholii, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, una cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, ut ostensum est. e Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, ut ostensum est, f erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in seipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, in E, in se ipsos fiant A, & C: Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C. simul compositi, primi ad B. Quamobrem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

b 30. sept.
c 26. sep.
d 27. sep.
e 20. septim.
f 30. sept.

A, 9.		C, 16.
	B, 12.	
D, 3.		E, 4.

SCHOLIUM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis hoc modo ipsum proponens.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

Sint continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos: Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C: & A, C, D, simul ad B: & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se: atq; adeo eos aliquis numerus com-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E. -- F, 2. G, 3. H. --

munis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest, sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi: metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. hujus lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H metiatur E; & E,

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E .--- F, 2. G, 3. H ----

ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D: *a* metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 3. lib. 8. *b* metietur quoq; H, medios B, C: *c* ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstravimus: *d* metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. *e* Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

a 11. pronun.
b 11. pronun.
c 10. pronun.
d 12. pronun.
e 3 coll.

Rursus, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, ut prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. hujus lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E: & E, compositũ ex A, B, D: *f* metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C, *g* metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, *h* metietur quoque H, compositum ex A D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. *i* metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. *l* Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C. compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

f 11. pronun.
g 11. pronun.
h 12. pronun.
i 11. pronun.
k 12. pronun.
l 3. coll.

Non aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

xvij.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint

Sint primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, a atque adeo in sua proportione minimi: b ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se. Quod est absurdũ. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....

B......

C --------

a 23. septim.
b 21. septim.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium quempiam.

Sint continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi c minimi in sua proportione. d Igitur æque metientur ipsos B, & E; nimirum A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum B: & B, ipsum C, metietur; e atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipsum C: metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, f metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ----

c 23. sept.
d 21. sept.
e 11 prop. nun.
f 11. prop. nun.

PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inveniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inveniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, ut A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, a 16. noni. *A*,4. B,7. *aut non. Si sunt inter se primi, a perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem.* *Si vero non sunt* A, *&* B, *inter se primi: multiplicans* B, *seipsum faciat* C, *Aut igitur* A, *metitur ipsum* C, *aut non. Metiatur primum* A, *ipsum* C, *per* D. *Dico ipsis* A B, *inveniri*

A,4. B,6. *D*,9. C,36. *posse tertium proportionalem, imo ipsum* D, *esse tertium proportionalem,*

b 9. pronũ. *Cum enim* A, *metiatur* C, *per* D, b *fiet* C, *ex* A, *in* D: *Fit autem ex constructione, idem* C, *ex* B, *in seipsum. Igitur, qui continetur sub*

c 20. sep. *extremis* A D, *aequalis est ei, qui ex medio* B, *describitur*; c *Ac proinde erit ut* A, *ad* B, *ita* B, *ad* D. *Quare* D, *inventus est tertius proportionalis ipsis* A, B.

Sed non metiatur A, *ipsum* C. *Dico ipsis* A B, *non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inveniri potest, inventus sit* D, *ita ut sit* A, *ad* B, *quemadmodum* B, *ad* D. *Quoniam igitur est, ut* A, *ad*

d 20. sept. B, *ita* B, *ad* D, d *erit numerus contentus sub extremis* A, D, *aequalis ei, qui fit ex* B, *me-*

A,6. B,4. D --- C,16.

e. 7. pronũ. *dio in seipsum, hoc est, ipsi* C. *Quare cum* C, *fiat ex* A, *in* D; e *metietur* A, *ipsum* C, *per* D: *sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inveniri potest ipsis* A, B, *tertius proportionalis, quando* A, *primus non metitur* C, *productum ex* B, *secundo in seipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis* B, *&* A, *inveniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit* A, *ut* B, *ad* A. *Duobus ergo numeris datis consideravimus, &c. Quod faciendum erat.*

XX.

PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri.

Sint dati tres numeri A, B, C, *sive deinceps proportionales sive non, oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit* C, *ad aliquem alium numerum, ut* A, *ad* B. *Multiplicans* B, *ipsum* C, *faciat* D. *Aut igitur* A, *ipsum* D, *metitur, aut non. Metiatur*

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. *D*,72.

primum A, *ipsum* D, *per* E. *Dico ipsis* A, B, C, *inveniri posse quartum proportionalem, imo ipsum* E, *esse quartum proportionalem. Cum*

f 9. pronun. *enim* A, *metiatur* D, *per* E, f *fiet* D, *ex* A, *in* E: *Fit autem idem* D, *ex* B, *in* C, *per constructionem. Igitur qui sub extremis* A, E, *continetur, aequalis est ei, qui sub* B, C, *secundo & tertio continetur*; g *Ac*

g 19. sept. *propterea erit ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E. *Quare inventus est* E, *ipsis* A, B, C, *quartus proportionalis.*

Sed

Sed jam non metiatur A, *ipsum* D. *Dico ipsis* A, B, C, *non posse inveniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inventus quartus proportionalis* E: *itaut sit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E. *Quia ergo quatuor numeri* A, B, C, E, *proportionales sunt*, a *erit numerus contentus sub extremis* A, E,

A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40.

a 19. *sept.*

aequalis ei, qui ex B, *secundo fit in* C, *tertium, hoc est, ipsi* D. *Quare cum* D *fiat ex* A, *in* E; b *metietur* A, *ipsum* D, *per* E: *sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inveniri potest ipsis* A, B, C, *quartus proportionalis, quando* A, *primus non metitur* D, *productum ex* B, *secundo in* C, *tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis* C, B, A, *inveniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat* A, *ut* C, *ad* B. *Quocirca tribus numeris datis consideravimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.* b 7. *pronu.*

SCHOLIVM.

Haec quae proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adjungi alius proportionalis, quamvis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi dividatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. dividatur per 3. invenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim divisis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus divisus 64. ex multiplicatione Quotientis 2 $\frac{1}{3}$ per divisorem 3. ut ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se, c erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.

Datis autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus dividatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertium, genitus dividatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. Cum enim divisis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$. producetur numerus divisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13. $\frac{1}{3}$ per divisorem 9. ex iis quae in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus divisus ex secundo in tertium. d Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales sunt. c 20. *sept.* d 19. *sept.*

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adjungi. Sumptis enim tribus ultimis si ipsis alius potest inveniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema absolvunt. Aut enim (ajunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro hujus problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes in errorem, eumq; non levem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inveniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas hujus rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. sunt inter se primo, & nihilominus eis adjungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt esse ut 4 ad 8. ita 9. ad 18. cum utrobique proportio sit subdupla: Idem videri potest in exemplis aliis infinitis, ut hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10 3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adjungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalẽ. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet si demonstrat omnem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inveniri nullo modo posse quartũ proportionalem. Si enim potest inveniri, sit ille D, ita ut

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E. ---

quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, *a* & ob id minimi. *b* Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E, At vero & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inveniri nequit.

a 23. sep- tim.
b 21. sep- tim.

Hæc est eorum demonstratio, in qua assumunt esse ut B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Imo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris

meris B, C, D, quartus proportionalis possit inveniri, quam tribus A, B, C, cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, ut hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (ut cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunq; quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, ut detur alius ad quem ita se habeat quartus sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione ulla exigunt, ut detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, ut B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi utuntur.

Sint enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, ut sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, ut B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo ut ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alii Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E---

Primum vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inveniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absolvimus. a 17. noni.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b *Sumpto enim numero D, E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei unitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.* b 38. sep.

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1
D-----------E..F

SED jam non sit primus D F. c *Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipsorum A, B, C,* c 33. sept.

A,3. B,5. C,7.

105. 1.

D---------E-F

53.

G------

eundem esse. Si namque G, sit idem qui unus ipsorum A,B,C; metiantur autem A,B,C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatem. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C: Ac proinde inventi sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures invenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. pronun.

SCHOLIVM.

Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inveniri alium primum numerum ab illis diversum.

Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inveniemus eodem modo alium primum ab illis diversum, videlicet D F, si primus est, vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum, inveniemus, & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet inveniemus.

xxij.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantur quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A, B, & F, ipsius B C: & G, ipsius C, D. Quoniam igitur est ut A, B, ad E, ita B C, ad F: & C D, ad G: (quod semper sit proportio dupla) b erit quoque ut A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem A, B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit: Ac propterea A, D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A......B...C.........D

E..F..G....

b 12. sep.

xxiij.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

Com-

COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares: differet quilibet unitate à pari, ex definitione. Quare

A . . . B . . . C . . . . D . . . . E

detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. a *Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unitatum detractarum par.* b *Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.* a 21. noni. b 12. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum, AD, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat unitate à pari ex definitione: ablata unitate ED, ab impari CD: erit reliquus CE, par. c *Est autem & AC, compositus ex imparibus AB, BC, multitudine paribus, par,* d *Igitur & AE, compositus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita unitate ED, totus AD, impar erit, cum impar à pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.* c 12. noni. d 21. noni.

A . . . . B . . . C . . . . E . D

SCHOLIVM.

Pari ratione Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta unitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat unitate. e Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa unitate, totus fiet impar; cum à pari sola unitate differat. Quod est propositum. e 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit. xxv.

Ex pari numero AB, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem esse, Aut enim CB, par detractus dimidia pars est ipsius AB, aut major quam dimidia pars, vel minor.

A . . . . . . C . . . . . . B

Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi CB, pari aequalis sit AC, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

Sed jam CB, par detractus major sit, vel minor dimidia parte ipsius. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias

dias partes habent, ex definitione, sit DB. dimidia pars ipsius AB, & EB, dimidia ipsius CB. Itaque cum sit ut AB, ad DB, dimidium, ita CB, ad EB, dimidium, erit permutando ut AB, ad CB, ita DB, ad EB: & dividendo ut AC, ad CB, ita DE, ad EB. Rursusque permutando, ut AC, ad DE, ita CB, ad EB, Atqui CB, ipsius EB, duplus est. Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit: Ac propterea AC, cum bifariam dividatur, (quod DE, sit ejus pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A……C…D…E…B

A……D…C…E…B

SCHOLIVM.

Facilius demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile hoc modo. Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta unitate AD, erit reliquus DC, par. a Igitur compositus DB, par quoque erit: ac proinde, addita unitate AD, totus AB, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.

A..D…C……B

a 23. noni.

xxvj.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim unitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB par. Quia igitur & totus AB, ponitur par: b erit & reliquus AD, par. Dempta ergo unitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 24. noni. A……..C. D….B

xxvij.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse. Detracta enim DB, unitate ex imparibus AB, CB: erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; c erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A….C……D.B

c 42. noni.

xxviij.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, unitate ex impare A B, erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; a reliquis D C, par quoque erit: Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . D . . . . . C . . . . . . B

a 24. noni.

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, aqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot partibus ipsi B, aqualibus, quot sunt unitates in A; b *Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.*

A . . . B . . . .
C . . . .

b 21. noni.

SCHOLIVM.

Eadem demonstratione ostendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Nam rursus C, componetur ex tot partibus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . . B . . . .
C . . . .

COROLLARIVM.

Constat quoque ex his, parem numerum in se multiplicatum procreare parem: ut patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, aqualibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar: componetur C, ex imparibus ipsi B, aqualib. quorum multitudo impar est, nimirum aequalis multitudini unitatum, qua in A, impari continentur. c *Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.*

A . . . B . . . . .
C . . . .

c 23. noni.

COROL-

COROLLARIVM.

A... B...
C.........

Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: ut constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX CAMPANO.

Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

a 29. noni.

A... C...
B..........

Metiatur impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; *a* erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

b 28. noni.

A... C.....
B.............

Metiatur impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; *b* erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

SCHOLIVM.

Ex his clarissime quoque demonstrabimus theorem 11. lib. 2. numeris non posse accommodari; Id quod etiam in scholio propos. 14. hujus lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita ut numerus ex AB, in CB, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur utraque pars AC, CB, impar est; aut major AC, impar, & minor CB, par; aut contra, major AC, par, & minor CB, impar: aut deniquè utraque pars AC, CB, par.

A ---C---B
D--- E--

c 22. noni.
d 28. noni.

Sit primum utraque pars AC, CB, impar. *c* ideoque totus numerus AB, par. *d* Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. hujus propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in se: erit par numerus impari æqualis, quod fieri non potest.

e 28. noni.

Deinde sit AC, impar, & CB, par, ideoque ex scholio propos. 23. hujus lib. totus AB, impar. *e* Quia ergo numerus ex A, B, impare in parem CB, factus par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. hujus propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis, quod est absurdum.

f 29. noni.

Tertio sit AC, par, & CB, impar, ideoque ex scholio propos. 23. hujus lib. totus AB, impar. *f* Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est: & numerus ex pare AC, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. hujus lib. erit rursus ille par huic impari æqualis: quod est absurdum.

Quar-

Quarto sit utraque pars A C, C B, par. Inventis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D E, proportione A C, ad C B: a erunt D E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel uterque impar, vel unus impar, & alter par. Et quia est, ut A C, ad C B, ita D, ad E: b erit convertendo, ut C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, ut A B, ad A C, ita totus D E, ad D: c Est autem ut A B, ad A C, ita A C, ad C E: quod numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medii A C. Igitur erit quoque ut totus D E, ad D, ita D, ad E, d ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, sectus est in partes D E, quarum vel utroq; impar est, vel una impar, & altera par, ita ut numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse tam demonstratum est in numero A B, quando utraque pars A C, C B, vel impar est, vel una impar, & altera pars. Constat ergo propositum. a 24. sep. b 26. sep. c 20. sep. d 20. sep.

THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxiij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

Metiatur impar A, *parem* B. *Dico* A, *dimidium quoque ipsius* B, *metiri. Metiatur* A, *ipsum* B, *per* C. *Erit ergo ex iis, quæ ex antecedente propos. ex Campano demonstravimus, numerus* C, *par. Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum* A, *metiatur* B, *per* C, e *metietur quoque* C, *ipsum* B, *per* A: *Ac proinde* C, *pars erit ipsius* B, *denominata ab* A, *ut ad* 3. *definitionem lib.* 7. *docuimus. Quoniam vero est ut* C, *ad dimidium sui, ita* B, *ad dimidium sui; & permutando ut* C, *ad* B, *ita dimidia pars ipsius* C, *ad dimidiam partem ipsius* B, *Est autem* C, *pars ipsius* B, *denominata ab* A, *ut ostensum est; erit & dimidium ipsius* C, *dimidii ipsius* B, *pars ab eodem* A, *denominata.* f *Ac propterea* A, *dimidium ipsius* B, *metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.* e 8. primum. f 40. sep.

A . . .   C . . . .

B . . . .

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiv.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A, *primus sit ad numerum* B, *cujus duplus sit* C. *Dico* A, *ad* C, *quoque primum esse. Si enim* A C, *non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit* D, *qui necessario impar erat. Nam si sit par, cum metia-*

A . . . . B . . . .

C . . . . D . . .

tur

a 28. noni. *tur imparem A: erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum, ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (est enim C, par, cum dimidium*

A..... B.........
C............. D----

b 30. noni. *habeat B.) b metietur quoque numerum B, ejus dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.*

COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad ejus duplum, ut Euclides demonstravit, sed etiam ad ejus quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad
c 31. noni. duplum, c primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

THEOR. 30. PSOPOS. 32.

XXXV. Numerorum à binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

Numeri à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, à

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

binario dupli: erunt A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipsorum
d 11. noni. *B, C, D, E, & quilibet minor majorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E: qui cum omnes sint pares, utpote dupli à binario: metietur quemlibet ipsorum B C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.*

Quod autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate continue proportionales, sitque A, proximus unitati numerus primus, nimirum
e 13. noni. *binarius: e nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E: qui cum sint omnes pares, metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inveniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint enim A, B, C, D, E, F, à bi-à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sũt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parẽ tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm inveniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cujus pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par. (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cujus rursùm dimidia pars sit I. Erit igitur rursùm I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad unitatem veniamus. Sit ergo jam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sũnt à binario I, dupli: Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I ---- H ---- G ----

THEOR. 31. PSOPOS. 33. xxxvj.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. a Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, ejus dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, b Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter

A ....

A ....
B ..... C..
D ---- E ---

a 9. pronun.
b 19. sep.

 riter

riter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, invenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quòd enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparē. Quòd autem illi soli

Impares	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantum	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium præter ipsos, esse pariter imparem tantùm; sed vel esse pariter parem tantùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

xxxvij. SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR *numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.*

A ....

QVOD *autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diviso A, bifariam, & ejus dimidio rursus bifariam. & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, a cùm impar imparem multiplicans faciat imparem:* a29. noni. *esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem: atque adeò vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.*

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE ex his inveniemus omnes numeros, qui & pariter pares sunt, & pariter impares. Relictis enim omnib' illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares: erunt ex hac propos. omnes alii pares, & pariter pares, & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. xxxviij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F: *& ex* B C, *secundo, &* E F, *ultimo detrahantur* C G, F H, *primo,* A, *æquales. Dico esse ut* B G, *ad* A, *ita* E H, *ad* A, B, C, *&* D, *simul. Detrahatur* F I, *ipsi* B C, *&* F K, *ipsi* D, *æqualis. Quoniam igitur* F I, *æqualis est ipsi* B C, *& ablatus* F H, *ablato* C G: *erit & reliquus* I H, *reliquo* B G, *æqualis. Quia verò est ut* A, *ad* B C, *ita* B C, *ad* D, *&* D, *ad* E F: *convertendoque ut* E F, *ad* D, *ita* D, *ad* B C, *&* B C, *ad* A: *Atque est* K F, *ipsi* D, *&* I F, *ipsi* B C, *&* H F, *ipsi* A, *æqualis: Erit quo-*

A . . . .
B . . . . G C
D . . . .
E . . . . K . . . . I . . . . H . . . . F

A .
B . . G . C
D . . . .
E . . . . K . . . . I . . H . F

A .
B . . G . C
D . . . .
E . . . . K . . . . . . I . . H . . F

que ut E F, *ad* K F, *ita* K F, *ad* I F, *&* I F, *ad* H F. *Dividendo igitur ut* E K, *ad* K F, *ita* K I, *ad* I F, *&* I H, *ad* H F; a *Ac proinde ita etiam erunt omnes* E K, K I, I H, *ad omnes* K F, I F, H F, *hoc est, totus* E H, *ad* D, B C, A, *simul. (quibus sumpti sunt æquales* K F, I F, H F;) *ut* I H, *ad* H F, *hoc est, ut* B G, *ad* A: *sunt enim* B G, *&* A, *ipsis* I H, *&* H F; *æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.* à 12. septim.

SCHO-

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continuè proportionalium, si modo primus, secundus, & ultimus fuerint noti. Cùm enim sit ut excessus secundi ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & ultimo dematur, fiatque ut reliquus secundi ad primum, ita reliquus ultimi ad alium. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui ultimum antecedunt. Si igitur adjiciatur ultimus, habebitur tota summa.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

Invenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum ultimi, & productus dividatur in excessum secundi: ut liquet ex scholio propos. 19. hujus lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inveniendus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus ultimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. ultimo; erunt reliqui excessus, 2. *2186*. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 1. ita *2186*. ad summam omnium, excepto ultimo, si secundus *numerus* 1. *multiplicetur per tertium 2186.* fiet numerus 2186. qui si dividatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso ultimo 2187. qui si addatur summæ inventæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

xxxix. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A,B,C,D, *dupli; quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat* F. *Dico* F, *esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri*

Vnitas, A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ----- 62. H, 124. *I*, 248. F----- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. *N*, 465.
O----- P-----

A, B, C, D, *tot sumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur* A, B, C, D, *eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo ut* A, *ad* D, *ita E, ad I*; a *Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex* D, *secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E; Igitur idem* F, *fiet ex* A, *in I*; b *ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit.*

a 19. *sep.*
b 7. *pronun.*

erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri K,L, primo E, aequales, sintq; reliqui excessus M,N. a Erit igitur ut M, ad E, ita N, ad E,G,H,I, simul: Est autem M, aequalis ipsi E. (Cùm enim G, duplus sit ipsius E, ablatusq; sit K, ipsi E, aequalis; erit & reliquus M, ipsi E, aequalis.) Ergo & N, aequalis est ipsis E,G.H,I, simul. Additis igitur aequalibus, nimirum numero L, (qui aequalis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex unitate, & A,B,C,D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est aequalis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, aequalis unitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, simul. Quare cùm unitas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, me- a35.noni.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G------62. H,124. I, 248. F-----496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O-------- P----

tiantur ipsum F; (Cùm enim F, factus sit ex E, in D; b metietur D, ipsum F; c atque adeò eundem F, metietur unitas, & numeri A,B,C, d qui ipsum D, metiuntur. Rursus cùm I, ipsum F, metiatur, ut ostensum est, e metientur quoq; eundem F, numeri E,G,H, f qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cùm aequalis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus. a 7. pron. c 11. pron. d 11. pron. e 11. pron. f 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, praeter A,B,C,D,E,G,H,I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, praeter illos, ipsum E, per P: g atque adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium: h ac propterea est ut E ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A,B,C,D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus unitati primus, i ultimum D, nullus alius, praeter A,B,C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A,B,C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P: neque igitur E, ipsum P, metietur. Cùm ergo F, primus sit, k erunt E, & P, inter se primi: l ideoque in sua proportione minimi: m Ac proinde aequè metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. n Nullus verò alius praeter A,B,C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A,B,C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B,C,D, tot ab E, sumantur dupli E,G,H. Erit igitur ex aequo, ut B, ad D, ita E, ad H: o Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, aequalis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex g 9. pron. h 19. sept. i 13. oct. k 31. sep. l 23. sep. m 21. sept. n 32. oct. o 19. sept.

P, in

219. *septim.* *P, in O, qui ex B, in H, atque adeò erit, ut P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diversus ab omnibus A, B. C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inveniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, juxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab unitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab unitate, exclusa unitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab unitate dupli, una cum ipsa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inventus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facilè ex subjectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. ultimum duplorum, perfectus, cujus partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 1. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cujus partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inveniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosvis numeros diviso, erunt duo hi numeri Quotientibus converso ordine proportionales.

NVMERVS enim *A*, divisus per B, *C*, faciat Quotientes *D*, E, Dico esse, ut B, ad C, ita *E*, ad D. Quoniam enim diviso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, ut ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum; & ex C, secundo in E, tertium: *a* erit ut B, primus ad C, se- a 19. sep.
cundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.

II.

QVOLIBET numero per quotvis numeros diviso, erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus respondentibus converso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse ut B, ad C, ita G, ad F. Et ut C, ad D, ita H, ad G: Et ut D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato.

	A,48.		
B,3.	C,4.	D,8.	E,6.
F,16.	G,12.	H,6.	I, 8.

Cùm enim duo B, C, dividentes A, faciant F, G, erit ut B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, dividentes A, faciant G, H: erit ut C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, dividentes A, faciant H, I: erit ut D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

QVOLIBET numero per quotvis numeros continuè proportionales diviso, erunt Quotientes converso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales sint Quotientes F, G, H, I Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse, Quoniam enim per 2. theorema est, ut D, ad E, ita I, ad H: Et ut C,

	A,15.		
B,1.	C,2.	D,4.	E,8.
F,15.	G,$7\frac{1}{2}$.	H,$3\frac{3}{4}$.	I,$1\frac{7}{8}$.

ad D, hoc est, ut D, ad E, ita H, ad G: Et ut B, ad C, hoc est, ut C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

IV.

SI sint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eisdem proportionibus; erit ut summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotvis numeri A,B,C, quorum summa D: Et totidem alii E, F,G, quorum summa H; sitque ut A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ab G. Dico esse, ut D, ad A, B,C, sigillatim, ita H, ad E, F, G, sigillatim. Cùm enim sit ut A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, ut A, B, simul ad B, ita E, F, simul ad F: Vt autem B, ad C, ita est F, ad G. Igitur ex æquo, ut A,B, simul ad C, ita erit EF, simul ad G: Et componendo, ut A, B, C, simul, hoc est, ut D, ad C, ita E, F,G, simul, hoc est, H, ad G.

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40.
H, 58.

QVIA igitur est, ut D, ad C, ita H, ad G: Et convertendo, ut C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, ut D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia est, ut D, ad B, ita H, ad F: Et convertendo, ut B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, ut D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos divisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos divisa facit.

NAM, ut in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summæ priorum ad primum, quæ summæ posteriorum ad primum: ac proinde utriusque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex divisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis: idem Quotiens omnino procreabitur, si utraque summa seorsum per primos numeros, quæque per suum, dividatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. divisio fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotvis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim dividatur; & Quotientum summa per ipsos Quotientes: Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis semper iidem primi Quotientes ordine converso.

SINT continuè proportionales quotvis numeri A,B,C, D, quorum summa E, per ipsos divisa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum summa K, per eos divisa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine converso, hoc est, F,& O, eosdem esse: Item G,& N: H,& M: I,& L, &c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G H,I, eandem continuam proportionem habent converso ordine, quam numeri A, B,C,D. Et quotientes L,M,N,O, converso ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema E, ad A, ut K, ad I. Quare cum ex divisione antecedentis

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8.
E, 15.
F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.
K, $28\frac{1}{8}$.
L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $7\frac{1}{2}$. O, 15.

termini per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex divisione E, per A, qui ex divisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod est propositum.

VII.

SI summa quotvis numerorum continuè proportionalium per eos sigillatim dividatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in ultimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in se.

SINT primum quotvis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B,C,D,E,F, quorum summa G, per ipsos sigillatim divisa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum summa O. Dico summæ O, æqualem esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32
G, 63.
H, 63. I, $31\frac{1}{2}$. K, $15\frac{3}{4}$. K, $7\frac{7}{8}$. M, $3\frac{15}{16}$. N, $1\frac{31}{32}$.
O, $124\frac{1}{2}$.

Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K,L,M,N, sunt continuè proportionales converso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, ut I, ad H. Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. summa O, divisa per H,I,K,L,M,N, producit eosdem Quotientes converso ordine, hoc est, summa O, divisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N. per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

a 19. se-
ptim.

SINT deinde quotvis numeri multitudine impares continuè proportionales A,B,C,D,E, quorum summa F, per ipsos sigillatim divisa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum summa M. Dico summam M, æqualem esse numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, ut prius. Deinde verò quia

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
O, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, $60\frac{11}{16}$.

tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur, quod est propositum.

a 20. septim.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cujus latus, sive radix, est medius terminus.

ITAQVE si inveniendi sint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in ultimum gignitur, vel ex quibusvis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim dividatur; erunt Quotientes quæsiti numeri, ut ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotvis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cujus latus, sive radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumque summa per eos sigillatim dividenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, ut ex eodem hoc 7. theor liquet. Atque mirabile sanè est, posse reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in ultimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis: & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in se ipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex uno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumque summam per utrumq; dividat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, ut ostensum est; quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in ultimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inveniendi duo numeri in proportione sesquiquinta quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione unius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque summa 11. per utrumque dividatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti.

fiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum unius numerator sit unitas, eandem proportionem habent. quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit unitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, ut est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim unitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia AB, dividitur in tot minutias minutiæ *C B*, æquales, quot unitates sunt in A, ita ut quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. a Igitur eadem pars est unitas C, numeri A, quæ minutiæ *C B*, minutiæ A B; ac proinde est, ut unitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et convertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, ut minutia A B, ad minutiam C B, quod est propositum.

$\frac{A, 6.}{B, 11.}$	$\frac{C, 1.}{B. 11.}$

a 29. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, sive particulæ vel unitatis, vel alterius cujuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius unitatis esse accipiendas; propterea quód falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in unitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusvis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, ut exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, hujus numeri integri 44. Et quia ejus $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. ut est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. ut 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in universum de quibuscunque duabus minutiis ejusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat unitatem.

II.

NVMERATOR cujusvis minutiæ ad denominatorem

torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cujus est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, ut est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cujus numerator C, unitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cujus numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita ut suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquivalet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum divisum est, ac proinde totum integrum contineat.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

a 1. hujus. *a* Quoniam igitur est, ut A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et ut C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo ut A ad D, hoc est, ut numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B, numerator A, unitas, ita ut minutia sit pars aliquota integri C, sive C, sit unitas, sive numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties unitas est in B, denominatore. Cum ergo & unitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, ut ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem

A, 1. C, 1.
B, 5. C, 30.

b 20. defin. pars erit unitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. *b* Quare erit, ut A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod est propositum.

DEINDE non sit unitas numerator A. Sumatur minutia D B, cujus numerator D, unitas & denominator idem B, qui minutiæ A B. *c* Et quia est ut A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et ut D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, ut proximè demonstravimus; erit ex æquo, ut A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod est propositum.

c 1. hujus. A, 3. D, 1. C, 1.
B, 5. B, 5. C, 30.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit hujus numeri integri 30. erit ejus $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. ubi vides ita esse 18. ad 30. ut est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA qualibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

d 2. hujus. SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. *d* Quoniam enim est, ut A, ad

B, nu-

B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad suum integrum C, erit permutando, ut A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et convertendo, ut minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties unitas est in denominatore B,) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata, quod est propositum.

$\frac{A,\ 3.}{B,\ 5.}$	C, 1. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse hujus integri 30. cujus $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu unitatis, numerator continet tres unitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. significat, quæ tres unitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque unitates conficiunt 150. pars, inquã, à denominatore 5. denominata.

IV.

DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat unitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet unitatem, demonstratur hic de quibusvis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C B, ut est A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim est, ut A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum: Et ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam b cum sit, ut C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit convertendo, ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B,) erit ex æquo, ut A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B, quod est propositum.

$\frac{A,\ 6.}{B,\ 7.}$	$\frac{C,\ 3.}{B,\ 7.}$

a 2. *hujus.*
b 2. *hujus.*

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint hujus integri 28. cujus $\frac{6}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$. sunt

& $\frac{3}{5}$. sunt 12. ubi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. ut est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris, in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, ut prior numerus productus ad posteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, ut est F, ad H. Fiat enim H, ex *B*, in D Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, *a* erit ut *A*, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, *b* ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, ut minutia A B, ad integrũ, ita F, ad H. Rursus quia C, *D*, multiplicantes B, faciunt G. H; *c* erit ut C, ad *D*, ita G, ad H: Et convertendo, ut D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrũ ad minutiam C D, (Nam *d* cum sit, ut C, ad *D*, ita minutia C D, ad integrum, erit convertendo, ut D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque ut H, ad G, ita integrum ad minutiã C D. Ex æquo igitur erit, ut F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D, quod est propositum.

a 18. *sep.*
b 2. *hujus.*
c 18. *sep.*
d 2. *hujus.*

F, 10.		G, 12.
A, 2.		C 4.
B, 3.	✕	D, 5.
	H, 15.	

F.	*A* B.
H.	Integrum.
G.	C D.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ ejus, 20 at quatuor quintæ ejusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. ut 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si major, major; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum utra duarum minutiarum major sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum unus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT

SINT duæ minutiæ AB, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum A B, C D, ut est H, ad summam numerorum F, G. *a* Quoniam enim est, ut minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, ut summa minutiarum A B, C D ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (nam *b* ut minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D. *c* Et ut C, ad D, ita est G, ad H; propterea quod G, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, ut summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et convertendo, ut integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G, quod est propositum.

a 5. hujus.
b 2. hujus.
c 18. sep.

F, 10.		G, 12.
A, 2.		C, 4.
B, 3.	✕	D, 4.
	H, 15.	

A B,	C D,	F, G,	
	C D.	G.	
Integrum.		H.	

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cujus $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$. ejusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. ut est 15. ex denominatoribus productus ad summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit ut prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, ut est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; *d* erit ut D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, *e* ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, ut C, ad B. quod est propositum.

d 17. sept.
e 5. hujus.

D, 105.		E, 35.
A, 5.		A, 5.
B, 7.	✕	C, 21.

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cujus $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. ejusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. ut posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores

ean-

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has

a 2.hujus. æquales esse. *a* Quoniam enim est, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et ut C ad D, ita minutia C D, ad idem integrum: ut autē A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia A B, ad integrum, ut minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D, quod est propositum.

A, 3.	C, 9.
B, 4.	D, 12.

SED sint jam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse ut A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit ut minutia A B, ad

b 2.hujus. integrum, ita minutiæ C D, ad idem integrum. *b* Est autem, ut minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, ut A, ad B, ita C, ad D, quod est propositum.

DEINDE sit major proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico ma-

c 2. hujus. jorem esse minutiam A B, quam C D. *c* Cum enim sit, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum, & ut C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum, ponatur autem major proportio A. ad B, quam C, ad D; erit quoque major proportio minutiæ A C, ad integrum, quam minutiæ C D, ad idem integrum. Major ergo est minutia A B, quam minutia C D, quod est propositum.

A, 3.	C, 2.
B, 4,	D, 3.

VERUM sit jam minutia A B, major, quam minutia C D. Dico majorem esse proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim major

d 2.hujus. proportio minutiæ A B, majoris ad integrum, quam minutiæ C D, minoris ad idem integrum. *d* Cum ergo sit, ut minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, quod est propositū.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cujus tam $\frac{3}{4}$. quam $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. ejusdem numeri 24. sunt 16. ubi manifestum est, numerum 18, majorē esse numero 16. ideoque minutiam $\frac{3}{4}$. majorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem nutem numerator, majorem proportionem habet, illa major est: Et majoris numerator majorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, ut A, ad B, ita C, ad D: a ac proinde minutiæ æquales erunt, quod est propositum. a 8. hujus.

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 9.} \qquad \frac{C,\ 2.}{D,\ 3.}$$

SED sint jam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse, A, ad C, ut B, ad D. b Erit enim ut A, ad B, ita C. ad D. Igitur permutando, ut A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum. b 8. hujus

DEINDE sit major proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, majorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, c. ac propterea major erit minutia A B, quam C D, quod est propositum. c 8. hujus.

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 9.} \qquad \frac{C,\ 3.}{D,\ 5.}$$

VERUM sit jam minutia A B, major quam C D. Dico majorem proportionem esse A, ad C, quam B, ad D. d Erit enim major proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando major proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum. d 8. hujus.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$ partes integri numeri 90. ubi vides minutiam $\frac{6}{9}$ hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$ id est, 60. majorem esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diversarum denominationum ad alias duas ejusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D: & F, ex C, in B: & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; e erit ut A, ad B, ita E, ad G. f Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, g erit ut C, ad D. ita F, ad G. h Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.

e 18. sep.
f 8. hujus.
g 18. septim
h 9. hujus.

$$\begin{array}{ccc} E,\ 10. & & F,\ 9. \\ A,\ 2. & & C,\ 3. \\ B,\ 3. & \times & D,\ 5. \\ & G,\ 15. & \end{array}$$

XI.

INTEGRVM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam cujus denominator C. Sumatur unmerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, unitati A, æqualē esse: *a* Quia enim est, ut B, ad C, ita minutia B C ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, unitati, erit æqualis, quod est propositum.

	B, $\frac{6}{}$	
A, 1.		
	C, 6.	

a 1. *hujus.*

DEINDE sit integer numerus A, revocandus ad minutiam, cujus denominator C, E, ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, unitas D, ut fiat minutia A D, tot unitatib. æqualis, quoties unitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, ut A, ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, *b* ipsæ inter se æquales erunt. Quare cum minutia A D, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est unitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, æqualis est propositum.

A, $\frac{7}{}$	B, $\frac{42}{}$
D, 1.	C, 6.

b 2. *hujus.*

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A *B*, duplanda. Dupletur numerator *A* ut fiat numerator C, manente eodē denominatore B: vel denominator *B*, quando par est, dimidietur, ut fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico utramque minutiam C *B*, A *D*, duplam esse minutiæ *A*B. Cum enim minutiæ AB, C *B*, eundem habeant denominatorem; *c* erit ut C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutiæ *A* B, dupla erit, quod est propositum.

A, $\frac{3}{}$	C, $\frac{6}{}$	A, $\frac{3}{}$
B, 8.	B, 8.	D, 4.

c 4. *hujus.*

RVRSVS quia minutiæ A *B*, A D, eundem habent numeratorem; *d* erit ut *B*, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ *A* B, dupla erit, quod est propositum.

d 7. *hujus.*

DEINDE dimidianda sit minutia A *B*. Dupletur denominator *B*, ut fiat denominator *C*, manente eodem numeratore A, Vel numerator A, quando par est, dimidietur, ut fiat numerator D, manente eodem denominatore B Dico utramque minutiam A C, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; *e* erit ut B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A *C*, ad A B, minutiæ

A, $\frac{6}{}$	A, $\frac{6}{}$	D, $\frac{3}{}$
B, 11.	*C*, 22.	B, 11.

e 7. *hujus.*

tiæ ad minutiam. Cum ergo ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutiæ A C minutia A B, dimidium quod est propositum.

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; a erit ut D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B. minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium, quod est propositum. a 4. hujus.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore: vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore, vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cujus numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, sive unitatis E, & valorem hujus minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F ex A, in C, & G, ex B in D. Dico datam minutiam minutia æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cujus videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C in B. b Et quoniam est ut A ad B, ita minutia A B, ad suum integrum nimirum ad minutiã C D, cujus integrum est F: c Item ut A, ad B, ita est F ad H, quod A B, B ipsum C multiplicantes faciant F H. Erit quoque ut minutia A B ad minutiam C D, ita F ad H. Rursus d quia est, ut C, ad D, ita minutia C D ad suum integrum E: e Item ut C, ad D, ita est H, ad G, quod B, ipsos C D, multiplicans fecerit H G, Erit quoq; ut C D, minutia ad suum integrũ E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H: Et ut minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, b 2. hujus. c 18. septim. d 2. hujus e 17. septim

F, 6.	H, 9.	
A, 2.	C, 3.	E, 1.
B, 3.	D, 4.	E, 24.
	G, 12.	K, $\frac{1}{2}$.

ut A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutia C D; cum ejus valorem respectu integri E,

A B.	E.
C D.	H.
E.	G.

exprimat. Igitur erit quoque ut F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E. a Cum ergo quoque sit, ut F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cujus integrum E, quod est propositum.

a 12. hujus.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiæ $\frac{3}{4}$ respectu integri 24. Hujus numeri $\frac{3}{4}$ sunt 18. & hujus numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$, quæ huic $\frac{1}{2}$ æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

b 13. hujus

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D fiat F. b Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D, reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F, quod est propositum.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita ut C D, sit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E, & K ex H, in F, atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri ultimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cujus numerator, I & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. c Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tanquam integri cujusdam. d Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D) minutiæ E F respectu integri, cujus E F, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris ultimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum, quod est propositum.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

c 13. hujus

d 13. hujus

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiarũ $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Hujus numeri $\frac{1}{2}$. est numerus 12. & hujus numeri $\frac{3}{4}$ sunt 9. Hujus deniq; $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

DATIS

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita ut alterius numeri numeros hujus inventæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius hujus minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B ad aliam æqualem reducenda sit, cujus numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum, & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H. *a* erit ut A, ad B, ita G, ad H; *b* Ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit, F *c* metietur C, ipsum F per D: *d* Metietur autem & unitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ unitas ipsius D. Cum ergo unitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea quod G, fit ex F, in A Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, suntq; numeratores, unitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; *e* constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu ejusdem integri G, cujus nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant unitatem, & denominatores numerum K, (quod numeratores sint unitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem ejusdem integri G, cujus numerator est unitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri C, pars erit ipsius integri C, à numero K, denominata. Quocirca numerus G, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties unitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L. numerū. Quod est

G, 24. K, 8.

A, 2. C, 3.
B, 3. F, 12. D, 4.

H, 36. L, 9.

C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

a 17. *septim.*
b 8. *hujus*
c 7. *pronū.*
d 5. *pronun.*
e 13. *hujus*

est propos. XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cujus vero numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum gignit illa major est. Et majoris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D, & ex A, in D fiat E, atque ex C in B, fiat F, sintque primum numeri E F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E factus ex A, primo in D, quartum æquales est numero F, facto ex

a 19. sept.

E, 24. F, 24.
A, 2. C, 8.
B, 3. D 12.

C, secundo in B, tertium, *a* erit ut A, primus ad C, secundum numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. *b* Quare minutiæ A B, C D, æquales

b 9. hujus.
c 5. hujus.

sunt. VEL sic. *c* Quoniam est ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis quod est propositum.

SED sint tam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum *d* erit ut ut A, ad C, numerator ad numeratorem ita B ad D, denominator ad denominatorem. *e* Quapropter idē numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic *f* Quoniam est, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E F, æquales, quod est propositum.

d 9. hujus.
e 19. septim
f 5. hujus.

DEINDE sit E numerus major numero F. Dico minutiam quoque A B, majorem esse minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, major quam F, gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum, & ex G, secundo in B, tertium *g* erit ut

E, 24. F, 21.
G, $1\frac{3}{4}$ A, 2. C, 7.
B, 3. D, 12.

g 19. septim:

G, primus ad C, secundum ita B, tertius ad D, quartum: Est autem major proportio A ad C, quam G, ad C, quod A, major sit quam G, *h* Igitur major quoque erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, major erit, quam minutia C D. VEL sic *i*. Quoniam est, ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D, Est autem E, major quam F; erit quoque minutia A B, major quam minutia C D, Quod est propositum.

h 9. hujus.
i 5. hujus.

VERVM

VERVM sit jam minutia A B, major quam minutia C D. Dico & numerum E numero F, esse majorem. Cum enim major sit minutia A B, quam minutia C D, *a* erit major proportio A, ad C, quam *B*, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quã B, ad D, qui sit G. *b* Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum qui ex C, secundo in B, tertium Cum ergo ex A, in D, major fiat, quam ex C, in D, propterea quod B. major est quam G, erit quoq; B, factus ex A, in *D*, major quam F, ex C, in B genitus. VEL sic. *c* Quoniam est, ut minutia A B, ad minutiam C *D*, ita E ad F. Est autem A B minutia major quam minutia C *D*, erit quoque E, maior quam F, quod est propositum. a 9. *hujus.* b 19. *septimi* c 5. *hujus.*

*A*TQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, utra duarum minutiarum propositarum major sit. Id quod etiam ad 5 propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A *B*, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos revocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C D, ita ut minutia C D, minutia A B, sit æqualis. d Quoniam igitur est, ut A, ad B, ita *C* ad C, suntque C D, numeri minores numeris A B, non erunt A B, minimi termini in sua proportione: *e* sunt autem & minimi, cum primi inter se sint, quod est absurdum. d 8. *hujus.* e 13. *sep.*

A, 1. C, —
B, 12. D, —

SI vero A, B, non sint inter se primi; *f* sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B per E Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A *B*, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, *B*, per *D*, E; *g* producentur A B ex *C*, in *D*, E. *h* Quare erit, ut A, ad *B*, ita *D* ad *E*, *i* ac propterea minutiæ A B, D E, æquales erunt. *D*einde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. *D*, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum. f 2. *sep.* g 8. *pronun.* h 17. *sep.* i 8. *hujus.*

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 12.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando fieri potest, revocare.

SIT data minutia A B, revocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum

A, 3. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cujus numerator E, & denominator C, datas, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Qui enim B, metitur D, per E, *a* fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. *b* Igitur erit, ut A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; *c* ideoque minutiæ A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.

a 9. pronun.
b 19. septim.
c 8. hujus.

QVOD si B, non metiatur D ex A, in C, procreatum, poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; *d* erit ut A, ad B, ita E, ad C. *e* Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. *f* Igitur B, metietur D per E, quod est absurdum. Ponitur enim ipsum D non metiri.

d 8. hujus.
e 19 septim

A, 3. E, —
B, 4. C, 10.
D, 30.

f 7. pronun.

XIX.

QVANDO minor numerus per majorem dividitur, numerus Quotiens est minutia, cujus numerator est numerus minor divisus, denominator vero major numerus dividens.

SIT minor numerus A, dividendus per majorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cujus numerator A, & denominator B. *g* Quoniam enim est, ut A, ad B, numerus divisus ad dividentem, hoc est, ut numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad unitatem; erit ex defin. Divisionis minutia A B, Quotiens divisionis numeri A, per numerum B, quod est propositum.

g 8. hujus.

A, 6. B, 11.

$\frac{A,6.}{B,11.}$

HINC fit, si diviso numero integro majore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro invento addendam adhuc esse minutiam, cujus numerator sit numerus ex divisione reliquus; denominator vero, numerus dividens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero dividente, dividendus adhuc est per eundem numerum dividentem, qui major est. Verbi gratia Diviso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc dividenda per 4. *h* Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

h 19. hu. fin.

XX.

MINVTIAS plures in unam summam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AE, CB, ejusdem denominati-

ationis. Ex A,& C,numeratoribus fiat summa D,cui idem deno-
ainator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex ad-
litione minutiarum AB,CB,collectam. Quoniam enim minutiæ
andem habent denominationem; *a* erit ut A, ad C, ita minutia a 4. *hujus*
B,ad minutiam CB. Et componendo,
t AC,simul ad C,ita minutiæ AB,CB,
mul ad minutiam CB. *b* Vt autem C, ad
),ita quoque est minutia CB, ad minuti- b 4. *hujus*
m DB. Igitur ex æquo erit,ut AC,simul ad D,ita minutiæ AB,
B, simul ad minutiam DB. Cùm ergo A,& C,simul æquales sint
si D,ex constructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, simul æ-
uales minutiæ DB. quod est propositum.

A,3	C,4	D,7
B,10.	B,10.	B,10.

DEINDE sint addendæ duæ minutiæ AB,CD, diversarum de-
ominationum. Ducatur A,numerator prioris in D, denomina-
rem posterioris; & C,numerator posterioris in B, denominato-
m prioris,collectaq; sit summa E, ex
uobus illis productis, cui suppona-
r denominator F,ex multiplicatione
utua denominatorum B,D,procre-
us. Dico minutiam EF,esse summam ex datis duabus minutiis
B,CD,collectam. *c* Quoniam enim est,ut integrum ad summam c 6. *hujus.*
arum minutiarum AB,CD,ita F, ex denominatoribus produ-
is ad E,summam productorum ex numeratoribus in denomina-
res vicissim ductis: erit convertendo,ut summa minutiarum AB, d 2. *hujus.*
D,ad integrum,ita E,ad F: *d* Vt autem E,ad F,ita quoque est mi-
tia EF,ad idem integrum. Igitur erit,ut summa minutiarum AB,
D,ad integrum,ita minutia, EF,ad idem integrum. Quapropter
nma minutiarum AB, CD,æqualis erit minutiæ EF, ac proinde
nutia EF,summa erit ex minutiis AB, CD, collecta quod est
)positum.

A,2	C,3	E,17.
B,2.	D,4.	F,12.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorũ in denomi-
es vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fi-
duæ minutiæ ejusdem denominationis,minutiis AB, CD, æ-
iles,ut ex demonstratione propos. 10. constat: si summæ E,pro-
torum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, cõ-
nis denominator ex denominatoribus procreatus,facta erit mi-
ia EF. summa minutiarum AB,CD,hoc est, duarum illarum
dem denominationis,ad quas AB,CD,reductæ sunt, ut initio
is propositionis demonstratum.

AM vero datis pluribus minutis; addendæ primum erunt duæ
iæ:deinde hæc summa cum tertia conjungenda,atque hæc sum-
um quarta,& sic deinceps,donec omnes absolvantur.

VOD si dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra
um,& minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. minutiæ hujus integri 60. cujus $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodũ ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel & 1. insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12 at $\frac{4}{9}$. ejusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex majore detrahere.

EX majore minutia *A* B detrahenda sit minor C B, sintque primùm hæ minutiæ ejusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex *A*, numeratore majoris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. *D*ico minutiam D B, reliquam esse post detractionem minutiæ C B, ex minutia *A* B.

A, 7.	C, 3.	D, 4.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, componetur *A*, ex C & D. Minutia ergo A B, cujus numerator A, ex numeratoribus C D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B, ut in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B, reliqua fiet minutia D B, quod est propositum.

DEINDE minutiæ A B, C D, habeant diversos denominatores detrahendaq; sit minor C D, ex majore A B. Ex *C*, numeratore minoris in B denominatorem majoris fiat E, & ex A, numerator majoris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus.

F, 13.		E, 8.	
A, 3	×	C, 2.	G, 7.
B, 4.		D, 5.	H, 20.

Dico minutiam *G* H, esse reliquam post detractionem minutiæ C *D*, ex minutia AB. Quoniam enim *D*, multiplicans A, B, facit F, H, *a* erit ut A ad B, ita F, ad H: *b* ut autem A, ad B, ita est minutia
a 17. septim A *B*, ad integrum. Igitur erit quoque ut F ad H, ita minutia A B, ad
b 2. hujus. integrum. Rursus quia B, multiplicã, C, *D*, facit E, H, *c* erit ut C, ad D,
c 17. sep. ita E, ad H. *d* Vt autem C, ad D, ita est minutia C D, ad integrum. Igi-
d 3. hu- tur erit quoque ut E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igi-
jus. tur est ut *E* primus ad H secundum, ita minutia C D, tertius nume-
e 2. hujus. rus ad integrum, quartum numerum: *e* Et ut G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholii propos. 22. lib. 7. ut E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutiæ C D, G H, terti-

tertius & sextus numerus, simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul: ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis. (Nam E, ex F, detractus reliquit G, (ad eundem H Igitur erit quoq;, ut F, ad H, ita minutiæ C D, G H simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, ut est F, ad H, ita esse minutia AB, ad integrum; erit quoque ut minutia A B, ad integrū, ita minutiæ C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H, quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ ejusdem denominationis minutiis datis æquales, ut ex demonstratione propos. 10. constat; si E factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio hujus propos. ostensum est.

IAM vero si dentur integra una cum minutiis, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahenda, major sit quam ea, à qua fieri debet, subtractio, reducenda prius erit unitas una numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$ ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{5}{7}$ ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex una unitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{5}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{29}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit 15. $\frac{29}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ hujus numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$ id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. ut superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia AB, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se, Fiat etiam G, ex E, in D; & H, ex C, in F, *b* Erit que ut minutia E F, ad minutiā C D, ita C, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E H; *c* erit ut A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, ut A, E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; erit

H, 60.		G, 40.
A, 2.	C, 4.	E, 8.
B, 3.	D, 5.	F, 15.

a 11. hujus

b 5. hujus.

c 17. sep.

a 17. sep.

A.	G.
E.	F.
B.	H.

a erit ut E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, ut hic apparet, erit ut A, ad B, ita G. ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: *b* Et ut A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoq; ut minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad I. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D, quod est propositum.

b 2. hujus.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero unitas, ut fiat quasi minutia, cujus numerator est numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur ejusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quod unitas integro numero supposita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5. fient $\frac{15}{4}$. ut hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

c 11. hujus.

SI vero integris minutiæ adhæreant, *c* revocanda erunt integra ad minutiam ejusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore hujus minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis unus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}\frac{9}{2}$.

IAM ut multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, ut in aditione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti; quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum ejus quadrato. Itaq; sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ hujus numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, ut $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. ejusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. ejusdem sunt 48. At ex *40*. in 48. fit numerus 19.20. qui efficit $\frac{8}{15}$ numeri 3600. hoc est quadrati ipsius *60*.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam dividere.

SIT *dividenda minutia* A B, *per minutiam* C D, & primum hujus numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ut diviso A, per C, Quotiens sit E, & diviso B, per D, Quotiens fit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem divisionis minutiæ

A, 12	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.

A B,

AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; *a* gignetur A, ex C, in E, & E, ex D, in F. *b* Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, ut minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quocirca cum sit, ut AB, minutia divisa ad CD, minutiam dividentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Divisionis minutia EF, Quotiens divisionis minutiæ AB, per minutiam CD, quod est propositum.

a 9. pronū.
b 22. hujus.

A, $\frac{6.}{8.}$ B. C, $\frac{3.}{8.}$ D. E, $\frac{2.}{1.}$ F.

A, $\frac{3.}{8.}$ B. C, $\frac{3.}{4.}$ D. E, $\frac{1.}{2.}$ F.

DEINDE numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB. *c* Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cujus numeros E, F, numeri CD, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in AB, ut gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per GH, erit minutia GH, Quotiens divisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, ut initio hujus propos. demonstratum est, quod est propositum.

c 15. hujus.

E, $\frac{24.}{36.}$ F. A, $\frac{2.}{3.}$ B. K, 12. C, $\frac{3.}{4.}$ D. G, $\frac{8.}{9.}$ H.

E, $\frac{90.}{135.}$ F. A, $\frac{6.}{9.}$ B. K, 15. C, $\frac{3.}{5.}$ D. G, $\frac{30.}{27.}$ H.

QVIA vero GH, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, ut dictum est, satis est ad divisionem cujusvis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator *A*, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ dividentis, & C, numerator minutiæ dividentis in B, denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum est in omnibus minutiis, sive numeri minutiæ dividentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, sive non. Nam semper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ dividentis, & ex numeratore minutiæ dividentis in denominatorem minutiæ dividendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ dividentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia dividenda secundum doctrinam propos. 15. revocatur, ut ex ejus propos. demonstratione liquet, atq; in hoc apposito exemplo apparet, ubi numeri C, D, numeri *A*, B, metiuntur per GH, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex G, in D, iidem numeri C, D, metiuntur per L, M: atque adeò tam minutia

E, $\frac{48.}{54.}$ P. *A*, $\frac{8.}{9.}$ B. K, 6. C, $\frac{2.}{3.}$ D. G, $\frac{4.}{3.}$ H. L, $\frac{24.}{18.}$ M.

tia G H, quam L M. Quotiens est minutiæ A B, per minutiam C D divisæ.

IAM vero si numerus integer dividendus sit per minutiam; vel per numerum integrum minutia dividenda supponenda est ei unitas, ut fiat quasi minutia, cujus numerator est datus numerus integer, & denominator 1: Vt si numerus 8. dividendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. ut in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$ dividenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. ut in posteriori exemplo apparet.

$\frac{8}{1.}\quad \frac{1}{2.}\quad \frac{16.}{1.}$

$\frac{1.}{2.}\quad \frac{8}{1.}\quad \frac{1}{16.}$

QVOD si minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam ejusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutæ diuidendæ in denominatorẽ minutæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ denominatorem autẽ ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam juvandam, loca numerorum minutiæ dividentis inter se permutare, ut in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis usurpare. Vt si dividenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ dividentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. ut hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ dividendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ dividentis, juxta regulam multiplicationis, quæ præcipit; numeratores esse multiplicandos inter se, ut fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4.}\quad \frac{7}{2.}\quad \frac{21}{8.}$

SIT integer numerus 700. cujus minutia $\frac{3}{4}$. dividenda sit per ejusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est divisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inventa est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus dividatur per ejus dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inventus supra fuit, ex divisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIV.

MINUTIAM in minutiam inserere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inserenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam A B, unius particulæ minutiæ C D, ad minutiam C D; hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. unius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito nume-

F, 24.

A, 3. C, 6. G, 27
B, 4. D, 7. H, 28.

me-

mero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ C D, *a* reducitur ad simplicem minutiam A H, cujus numerator idem est, qui A, productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D procreatus, ut in apposito exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est habens eundem denominatorē H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (cùm enim B, in C, D. faciat F H; *b* erit ut C, ad D, ita F, ad H; *c* ac propterea minutiæ B D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cujus numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum F H, A H, componitur, [nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A] denominator autem H idem qui earundem minutiarum F H A H: efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, ut initio propos. 29. ostensum est; hoc est, summā ex minutia A B, respectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H. collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insinuatione minutiæ A B, in minutiam C D: id est, æqualis est minutiæ A B, unius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D simul, quod est propositum.

a 14. hujus

b 17. septim.

c 8. hujus.

A, 3.	1	A, 3.		
B, 4.	D, 7.	H, 28.		

IAM vero si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est si minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorē penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator ejusdem penultimę minutiæ E F, ut fiat numerus K. Deinde producto ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator ejusdem minutiæ C D, ut fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adjiciatur A, numerator ejusdem minutiæ A B, ut fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper ultimus numerus conflatus in denominatorē

P, 119.	M, 59.		K, 14.
A, 1.	C, 3.	E, 2.	G, 4.
A, 1.	B, 2.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.		L, 15.

proxi-

proxime antecedentis minutiæ, productoq; numerator ejusdē proxime antecedentis minutiæ adjiciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui ultimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, ut fiat L, deinde L, in D, ut fiat N, post hæc N, in B, ut fiat Q, &c. Dico minutiam P, Q. ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nā ut in duabus minutiis ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiam GH, hoc est, æqualis est summæ ex minutia EF, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, a facit minutiam simplicem, cujus numerator C, (productus nimirum ex C, in unitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N. ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cujus numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, b æqualis est minutiæ K L; c quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionē habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrabimus, minutia M N, cujus numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cujus numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cujus numerator C ut denominator N, atque ex minutia, cujus numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, unius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, unius particula minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, d facit minutiam simplicem. cujus numerator A, & denominator Q. ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque cujus numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q ex B, in N, Productus, e æqualis est minutiæ M N, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cujus numerator P. ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cujus numerator A, &, denominator Q. atque ex minutia, cujus numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, ut initio propos. 20. monstratum est; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B. unius

a 14. hujus
b 8. hujus.
c 17. sep.
d 14. hujus
e 8. hujus.
f 17. sep.

vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorẽ prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD. *a* reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus AC, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: *b* Minutia quoque FH, æqualis est minutiæ CD; *c* quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum *B*, in *C*, *D*, faciat F, H: Erit minutia *G*H, (quæ ex ijs, quæ ad initium propos. 20. ostendimus æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD; (hoc est, ex minutia FH,) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia *G*H, procreatur ex insitione minutiæ A*B*, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu. Quod est propositum.

a 14. *huius.*
b 8. *huius.*
c 17. *septimi.*

E, 18	F, 24.	
A, $\frac{3}{}$	C, $\frac{6}{}$	G, $\frac{42}{}$
B, 4.	D, 7.	H, 28.

A. $\frac{3}{}$	C. $\frac{6}{}$	E, $\frac{18}{}$
B, 4.	D, 7.	H. 28.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur *K*, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, suppo-

P, 232.	M, 104.	*K*, 20.	
A, $\frac{1}{}$	C, $\frac{3}{}$	E, $\frac{2}{}$	G, $\frac{4}{}$
B, 2.	D 4.	F, 3.	H, 5.
Q, 120.	N, 60.	L. 15.	

natur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori sensu. Dico minutiam PQ, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam vt in duabus minutijs demonstratum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiarum EF, GH, id est, æqualis est summæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, & ex minutia GH. Deinde minutia CD, to-

a 14. *huius.* tius minutiæ EF, totius minutiæ GH, *a* facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem est N, *ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia* quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procrea-

b 8. *huius.* tus: *b* æqualis est minutiæ KL: *c*

c 17. *septimi.* quod numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia MN, cuius numerator M, conflatur ex *numero*, quem numeratores C. E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ GH. Rursus minutia AE, minutiæ CD,

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4

B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L. 15.

d 14. *huius.* minutiæ EF, minutiæ GH, *d* facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, *denominator* autem Q, ex B, in N, procreatus, siue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq; cuius numerator ex B, in M, producitur, denomina-

e 8. *huius.* tor autē est idē Q, ex B, in N, procreatus, *e* æqualis est minutiæ MN:

f 17. *septimi.* *f* quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem: cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quē facit B, in M, cum æqualis sit, ex ijs, quæ initio prop. 20. demōstrata sunt, summæ collectæ ex minutia cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, *producitur, denominator autem est* Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autē est idem Q; æqualis quoque erit summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF; minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquuum est, vt compositionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit, defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propositionibus, vbi duplicatatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonstrat, non esse vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio sit duplo, aut trplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cuius partes sint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. existimant, ex hoc perspicue confirmari potest: quod pars esset vel æqualis, vel maior toto. Nā cū hæc compositio intelligenda sit, siue maior quantitas cum minore, siue minor cum maiore conferatur, vt ad def. 10. l. 5 ostēdimus, si positis his tribus terminis cōtinue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. nō solū duplicata diceretur proportionis 1. ad 10 vt vult def. 10. lib. 5. sed vere esset duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10, ad 100 æqualibus, vt Eucl. interpretes putant: quis non videt partem esse maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars est, maiorem esse proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem esse toti? Sic etiam, si, positis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 4. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, esset quoque pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior sit proportione subdupla 4 ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad secundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propos. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24 ad 48. compositam esse ex

24.	48.
12. 2.	3. 16.

proportionibus laterum, hoc est, ex proportione 12, ad 3. & ex proportione 2 ad 16. erit pars componens, (si hæc compositio est vera additio) nimirū proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videl. subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. vere totum est, & eius partes cōponentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harū ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione sub octupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. superesset adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior est quam totum, hoc est, quam proportio 24, ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etiam si ei infinitæ partes adderentur. Positis enim his quatuor terminis 12, 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4 ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones simul sumptæ proportioni 12. ad 1. sint æquales: si cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augerent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3, illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem composita esse dicatur ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non statim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6?

24.	48.
12. 2.	12. 4.

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus composita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor aut pluribus terminis continue proportionalibus,

bus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis quam, primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex, ijs quæ iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata) quarum quælibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator; manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, supposita prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnam summã colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est.

$$\frac{3}{1} \times \frac{5}{5} \qquad \frac{12}{4} \times \frac{40}{8}$$

$$\frac{8}{1} \qquad \frac{256}{32}$$

Sic etiam ex proportione dupla superquadrupartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$ quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quam 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$ reuocavimus ad $\frac{18}{7}$ & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligẽdum est.

$$\frac{18}{7} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{54}{21} \times \frac{6}{4}$$

$$\frac{57}{14} \qquad \frac{342}{84}$$

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Itẽ ex proportione quadrupla sesquidecima quarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8	3	256	12	57	3	342	4
1	1	32	4	14	2	84	4
	5		40		72		864
	1.		128.		28		336

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur que ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3—2	6	12—10	120	3—8	24	9—16	144
1—1	1	4—5.	20	2—5.	10	6—10	60

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

6—1	6	120—4	480	24—2	48	144—6.	864
1—3.	3.	20—12.	240	10—3.	30.	60—9.	540

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est, interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionum à nobis præscriptã, quam auctores additionem falso nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit. conuenire, atque adeo compositionem illam Euclidis vere esse multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturque A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ dupli-

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72.	F, 8.	E, 18.	F, 10.
G,	24.	G,	12.

duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G, *a* erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus a 18. septimi.
quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, *b* erit vt C. ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad b 17. septimi.
F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multplicationem, quam tradidimus.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatam, esseque compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F, quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F,

A. 9.	C. 3.	A, 4.	C, 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3.
E. 9.	F, 3.	D, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione *C*, ad *D*, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad *B*, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, *B*, in C, fiunt G, F, *c* erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in *C*, *D*, fiunt G, E; c 1. septimi.
d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, composita d 17. sept.
sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F.) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F; quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad *E*, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Sploletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMUM.

DEFINITIONES.

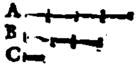
I.

Commensvrabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarũ causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neque perfecte intelligi possunt, neq; cum res tulerit, in opus atq; vsum conferri; propterea quod plerumq; latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius lib. demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demõstrata, ita plan⁹ reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentiũ tamẽ librorũ demõstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neq; enim in eorũ possũ sententiã ire, qui putãt ad eius intelligentiã esse necessariã eã partẽ Arithmetices, quæ de radicibus numerorũ, tã rationalibus quã irrationalibus, vt vocãt sermonẽ instituit: Imo contra persuasũ mihi prorsus habeo, cognitionẽ perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantũ abest,

abest, ut existimem, tractationem illam radicum requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, majore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad usum potest revocare, hic vero nullo modo. Hâc enim de causa & nos priora decē theoremata secundi lib. numeris accommodavimus, ut oblectationem animi majorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra utitur, usurpasti, ut ea res & majori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putavimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius effusuri, quam lucis aliquid majoris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adjumento, ac luce, quam his nostris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes hujus lib. ad numeros accommodare possunt per seipsos, quando volunt, præsertim cum jam hoc ipsum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQUE, ut ad institutum redeamus, inchoans rem psam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commēsurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura, C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B.) dicuntur commensurabiles.



Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas lineas tam unius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis unius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas una, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidave commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cujusuis, & latus ejusdem quoniam nullam habent mensuram communē, ut propositione ultima hujus lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inveniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTÆ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium mētitur.

LINEARUM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cujusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliceter diximus: quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura cōmunis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt ejusmodi, ut earum quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, ut & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est secundum earum quadrata (est enim, ut ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cujusq; lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

46
f. 154

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsū lineas potētia cōmensurabiles nō autē cōmēsurabiles longitudine, respōdendū est, lineas lōgitudine cōmensurabiles satis superq; esse explicatas in definitinone commensurabilium magnitudinū, cū hujusmodi lineas una communis mensura metiatur, ut dictum est: At vero quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spatium metitur, ideo necessarium omnino fuit, ut eæ propria definitione explicarentur.

IV.

INCOMMENSURABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi convenientiam inter se, & connexionē, ut li-ut lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita ut nullæ lineæ dari possint commensurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint, quoniam quadratum ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, ut in subjecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD. EF. ita quoq; quadratũ AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autẽ, ut omnes lineæ potentia cõmensurabiles, sint etiã cõmẽsurabiles longitudine; multæ enim lineæ sũt potẽtia cõmensurabiles, hoc est, quadrata habẽt cõmensurabilia, quæ tamẽ lõgitudine omnino incommensurabiles sunt, ut in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, hujusmodi colligatio reperitur, ut omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex coroll. propos. 9. hujus libri.

V.

His positis, ostenditur cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis erunt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potenti, aut hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam ejus verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, ut diximus.

LINEA autẽ illa proposita, ratione cuj⁹ alię cõmensurabiles sunt, vel incõmensurabiles, dicitur Græcis ῥητή; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ nõ semper notæ sunt, quãvis singulæ seorsũ sumptæ existãt certæ quoq;, ac notę; cũ quęlibet in quotcũq; partes ęquales possit dividi.

VI.

Et huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potentia tantum, Rationales.

Docet lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunq; appellari quoque Rationales, non quidem ex positione, ut illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei cōmensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

Itaque ex sententia Euclidis, radix quadrata hujus numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cujus quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali; (est enim tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, ut 16. 100. &c.) quamvis longitudine, sit eidem incommensurabilis. *Decipiuntur* ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

Huic vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

Quoniam antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantū sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellavit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt utroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam hujus numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cujus quadratum est 20. vel 1000. &c. nō posse appellari Irrationalem, cum nō sit longitudine & potentiâ, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea illa, quæ certa ponitur ac nota Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

Et huic commensurabilia quidem Rationalia.

Omnes planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, ut illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensumenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia, quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potentia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari juxta defin. 6. Rationales.

X.

Huic vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

Et rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſunt, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatiis incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita ut ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia: ſi vero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatiis incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: *longitudine & potentia, atque potentia tantum:* apponere fere ſemper vocibus iſtis: *commenſurabiles ac incommenſurabiles:* Vix autem, & rariſſime his: *Rationales, & Irrationales:* Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occasionem multis præbuit, ut varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusq;, sint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adjungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTULETUR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus ejusdem generis inæqualibus, cum major infinita non sit; minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet majorem. constat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri ejusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, ut alteram excedat Atque ex hujus conditionis defectu angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diversi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE PRONVNciata.

I.

MAGNITUDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITUDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITUDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

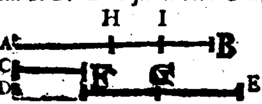
HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, ut ad propos. 15. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani neglexímus, ut docuimus ad initium primi libri: curavimus ut duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si unus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

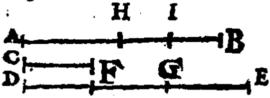
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

DUABUS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITÆ sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quam C. Multiplicetur enim C, toties donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita ut DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam AB. Divisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI, atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo jam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si DE, ipsius sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB; si ex DE, dimidium auferretur, nec non & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quam HB, auferturque ex FE; dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI: erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem, ipsius DE, qualis hic est GE, ma-

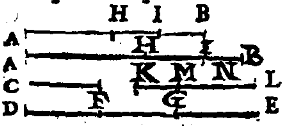


GE, majorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, major quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM *demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, majus reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum sit DB, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.*

ALITER. *Facta constructione, ut prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, ut est multiplex DE, ipsius C. Divisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH. major est quam HB, vel certe illi æqualis sit, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, major quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, major est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, major quam tota KL: Est autem DE, major adhuc, quam AB. Multo ergo major erit DE, quam KL. Quare cum sit ut DE, ad C, ita KL, ad IB; (sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,)* a *erit quoque C, major quam IB. Ac proinde relicta est, IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.*



a 14. quinti.

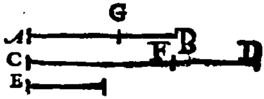
SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione hujus Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, ut minor multiplicata, tandem majorem possit superare. Id quod ad propos. 16. libr. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij. SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur; Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVA-



DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex majore CD, & reliqua hujus ex AB, & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de majore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura communis. Metiatur eas, si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta aut FAB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem ita ut AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta, FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita ut FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. a *Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata major, quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quàm dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, major quā dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cùm semper auferatur majus, quàm dimidium,* b *relinquetur tandē magnitudo quadā minor quàm E.) Sit ergo jam relicta GB, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, metitur CF;* c *metietur quoq; E, ipsam CF: Metitur autem E, & totam CD.* d *Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG;* e *quare & E, ipsam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB:* f *ergo E, reliquam etiam GB, metietur, major minorem. Quod est absurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.*

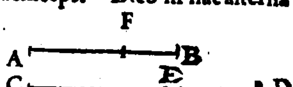
a 1. dec.
b 1. dec.
c 2. pronun.
d 3. pronun.
e 2. pronun.
f 3. pronun.

SCHOLIVM.

HOC Theorema convertemus ad hunc modum.

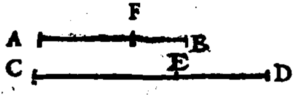
SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detraha-turque minor AB, ex CD, & reliqua sit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nūquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest metiatur FB, præcedentem ED, Quoniam igitur FB, metitur ED, & ED, metitur AF; g metietur quoque FB, ipsam AF; Metitur



g 2. pro-a 1. *pronun.* b 2. *pronun.* c 1. *pronun.*

autem & seipsam. *a* Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. *b* Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED; c Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, utramq; AB, ED, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.



SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

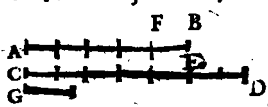
NAM si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, ut demonstravit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum, ponuntur enim commensurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de majore, alternà quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramq; magnitudinem propositam, ut constat ex demonstratione primi theorematis hujus scholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri utramq; magnitudinem AB, CD. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonstravit.

III. PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

DATÆ duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD, quarum oporteat maximam mensuram invenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit ut si minor AB, ex majore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholii. Metiatur jam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinem AB, CD. Quod enim utramque metiatur, ita ostendemus.

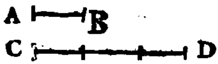


mun. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoq; FB, ipsam AF: At metitur FB, & seipsam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atq; adeò & ipsam CE, quam AB, metitur. Cùm ergo & ipsam ED, metiatur; d metietur quoq; FB, totam CD, Metitur ergo FB, utrãque AB, CD. Quare utriusq; AB, CD, communis mensura est FB.

a 2. pronun.
b 1. pronun.
c 2. pronun.
d 1. pronun.

QVOD autem FB, sit maxima eàrum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, major quàm FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, major quàm FB. Quia igitur G, metitur utramq; AB, CD; metitur autem & AB, ipsam CE, e metietur quoque G, ipsam CE: At metitur quoq; totam CD, f Igitur G, reliquam quoq; ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF. g Ergo & G, ipsam AF, metietur. Quare cùm G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. h Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm FB, communis mensura est ipsarum AB. CD. Quare FB. maxima earum communis mensura est.

e 2. pronun.
f 3. pronun.
g 2. pronun.
h 3. pronun.



QVOD si minor magnitudo AB. metiatur majorem CD, ita ut detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cùm & seipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.

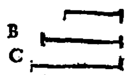
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

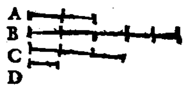
ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoq; maximam mensuram FB. Eademq; est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

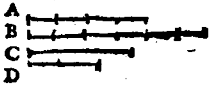
EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2 hujus lib. docuimus, an duæ A, & B. cõmensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A. B. C. esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A. & B.

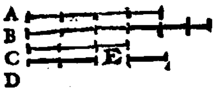


SI vero A. & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inventa D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensurã D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinum A, & B, per coroll. hujus propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; C, nō erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesin.





SI verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. *a* Inventa enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B; *b* metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

a 3. *dec.*

b 2. *pronun.*

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, necne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

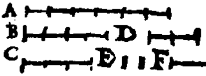
PROBL. 2. PROPOS. 4.

iiij.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem invenire.

c 3. *dec.*

SINT data tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram invenire oporteat. c *Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inventa. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si major magnitudo quàm D. metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. hujus lib. maximam mensuram ipsarum* A, B, *nempe ipsam D, major magnitudo minorem quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur qualibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C. commensurabiles.* d *Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inventa. Dico E. maximam mensuram esse datarum magnitudinum A. B. C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E. metitur D. & C; & D. metitur A & B;* e *metietur quoque E. ipsas A & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum* A. B, C. *quemadmodum asseruimus.*



d 3. *dec.*

e 2. *pro-*

QVOD

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, major quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A. & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. major magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo major magnitudo quàm E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communẽ.

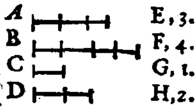
INFERTVR autem hoc ex ultima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

SIMILI modo pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inveniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, invenienda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

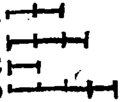
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdẽ rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita G. ad H. Dico ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D. componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perspicuum est cùm proportiones componentes proportionẽ A, ad D, æquales ponãtur proportionibus, quæ proportionẽ E, ad H. cõponunt,



nunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H, Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, ut in hoc exemplo apparet, in quo est, ut A, ad B, ita G, ad H; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A  E, 3.
B F, 12.
C G, 4.
D H, 6.

SCHOLIVM.

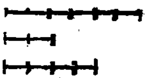
QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in aliis multis, utendum nobis erit; placuit illud hoc loco breviter demonstrare, cùm non facile videatur ex demonstratis sequi: Nam magnitudo & numerus diversa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantùm est in quantitatibus ejusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquàm demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lẽma transferri possit, cùm omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conveniant. Vel certè demonstratio facta in 7 lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem inducant numerorum.

v.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. a 3. dec. *a Sit enim earum maxima mensura inventa C: Et quoties ea repetita metitur A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties unitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, aquè metitur; continebit aequaliter magnitudo A, magnitudinem C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autem & ut C, ad B, ita unitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; unitas numerum E, aquè metiatur. Igitur per lemma pracedens, erit ex aquo, ut A. magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.*

A  D, 3.
C Vni. tas.
B E, 2.

SCHO-

SCHOLIVM.

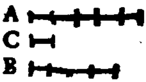
CVM Euclides ad demonstrationẽ hujus theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, ut rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atque adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque idcirco mensuram habent communem, ipsisq; demonstratio hujus theorematis convenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communis mensuræ sunt expertes, ac propterea huj⁹ theorematis demonstratio in ipsas convenire nullo modo potest.

EX demonstratione porrò ejusdem hujus theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B. libeat invenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos unitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines A, & B. proportionem habent, quam numeri D, & E.

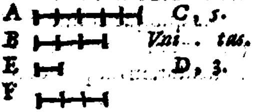
QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcunque communem earum mensuram, nihilominùs hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamvis enim numeri D, & E, majores inveniãtur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposita figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inventi, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensurem assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.



THEOR. 4. PROPOS. 6. VI.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

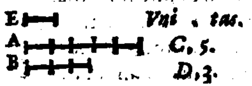
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero C, in tot æquales partes divisa intelligatur magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties unitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties unitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad unitatem: Est autem & ut E. ad F. ita unitas ad D, quod E, ipsam F. & unitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. hujus lib. erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut A, ad B. ita A. ad F, a *ac propterea B. & F. magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E. ipsam F, metiatur, metietur quoque eandem E. ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E. utramque A. & B. metitur:* b *Ac proinde A. & B. magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.*



a 9. quinti.

b 1. def.

ALITER. Quod sunt unitates in C. in tot partes æquales intelligatur divisa magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E. ad A. ita unitas ad C, quod E. ipsam A, & unitas ipsum D, æquè metiantur; ponitur que ut A. ad B. ita C. ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas numerum D. Igitur & magnitudo E. magnitudinem B. metitur: Metitur autem E. ipsam quoque A. Igitur A. & B. habentes eandem communem mensuram E. c *commensurabiles sunt. Quod est propositum.*



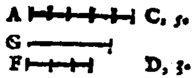
c 1. def.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via qua lineam rectam inveniamus, ad quam ita se habeat quævis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si invenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; dividenda erit linea A, in tot æquales partes, quot unitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium quot unitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inveniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si namque invenienda sit linea, ad cuius quadratum ita

ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D. *a* Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C, ad D, sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



a 19. sexti.

SCHOLIVM.

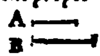
IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & *B*, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij. o.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, *&* B. *Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim* A, *& B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum*: b *erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur* A, *&* B, *proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.*



b 6. decimi.

SCHOLIVM.

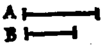
QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum; semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

viij. o.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, *&* B, *inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim* a 5, decimi. *A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, qua numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non*



habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

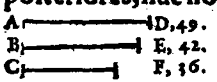
SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus: quod est cōtra hypothesim. Non autem colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; imò nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5 huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, *lineas proportionem non habentes*, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continuè proportionales tam quātitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non: sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E.



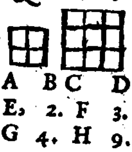
Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad *B*, & D, ad E, æquales; quādoquidē eorū proportiones duplicatæ æquales sunt.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si ta-ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. vij.

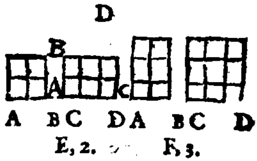
QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine ſunt commenſurabiles; a erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: b habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD. duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: c Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.



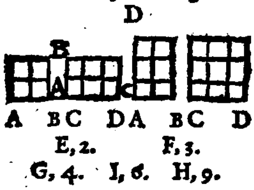
a 5. decimi. b 20. ſexti. c 11. oct.

ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione prop. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt



AB, ad

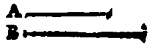
a 1.sexti. AB,ad CD,vt E.ad F: a Vt autem AB,ad CD,ita est quadratum ex AB,ad rectangulum BD,ob eandem altitudinem AB,si CD,ponatur basis rectanguli; Item vt E,ad F,ita est G,ad I: Erit quoq; quadratum,ex AB,ad rectangulum BD,vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB,ad CD, vt E,ad F. b Vt autem AB,
b 1. sexti. ad CD ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD,si AB,ponatur basis rectanguli; Item vt E,ad F,ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I,numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB,rectangulum BD,& quadratum ex CD,in eadem ratione continua sunt,in qua tres numeri G,I,H. Igitur ex aequo,per lemma propos.4.huius lib.erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G,ad numerum quadratum H. Quod est propositum.



SIT secundo quadratum ex AB,ad quadratum ex CD,vt numerus quadratus G,ad numerum quadratum H.Dico rectas AB,CD, esse longitudine commensurabiles.Sint enim numeri E,& F,latera quadratorum numerorum G,& H,vt in priori figura.Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex BD, vt quadratus
c 20.sexti. numerus G,ad quadratum numerum H: c Habet autem quadratum ex AB,ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB,ad latus CD. d Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H,proportionem habet duplicatam lateris E,ad latus F:erit proportio lateris AB,ad latus CD,qua lateris E,ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatae proportiones aequales sunt.Quare cum recta AB,CD,proportionem habeant,
d 11.oct. (note beside "teris AB,ad latus CD.")
e 6. decim. quam numeri E,F,,e ipsae commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

f 1.sexti. ALITER. Repetatur constructio figurae posterioris. f Quia igitur est vt AB,ad CD, ita quadratum ex AB,ad rectangulum BD; Item vt AB,rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD,vt supra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineae AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G,I,H, continuè proportionales in ratione numeri E,ad numerum F,vt supra ostendimus; ponitur que quadratum ex AB,ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit
g 6. decimi. per lemma praecedens AB,ad CD,vt G, ad I,hoc est,vt E,ad F: g ideoque AB, CD, rectae proportionem habentes, quam numeri E,F, commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.

SINT tertio rectæ AB, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt



iam est demonstratum. Quod est absurdum, ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.

QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quod est absurdum, ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incomensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabili-
um proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum nu-
merum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quā
numerus ad numerum: *a* ipsa commensurabilia erunt; *b* Ac propterea
& latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longi- a *6. dec.*
tudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. b *3. def.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent,
quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quam
numerus simpliciter ad numerum, *c* potentia quidem commensurabiles
sunt, *d* cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine ne- c 3. *def.*
quaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas, po- d 6. *deci-*
tentia commensurabiles, non omnino, & longitudine commensurabiles *mi.*
esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata
proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadra-
tum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda
parte huius theorematis.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamē, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse, solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarū

qua-a 4. defin. b 8. decimi. quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a potentia quoque incommensurabiles sunt, b cum earum quadrata incommensurabilia sint.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter consideranda sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ; (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde è contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H,) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quam sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commẽsurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

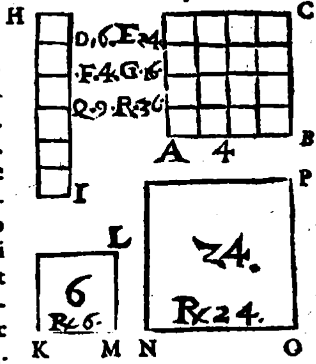
EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis est demõstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur

c 26. octaui.

rectam-rectangulum HI, constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; a atque ipsi HI, quadratum æquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratũ NP, ita se habeat KL. quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per constructionem; cõtinet autem quadratum KL, 6. mẽsuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale AC: (constructum enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris) continebit quadratum NP, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erunt Rad. 6. & Rad 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali AB, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterũ subdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicatá est, vt hic apparet 1. 2. 4. b Quare longitudine commensurabiles sunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eædem lineæ KM, NO, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, imò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.

a 14. secundi.

b 6. decimi.



RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus & G, ex 16) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea cõferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadem quadrata KL, NP. considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q. R, continentur. Nam si recta K, M, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item si eædem lineæ secentur in partes tres, & sex habebunt earum quadrata mensuras quadratas, 9. & 36. quot nimirũ vnitates comprehẽdũtur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus: Quadrata quæ describũtur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilib[9], licet interdũ longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, quãuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionẽ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Ratio-

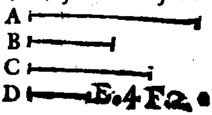
Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ rationali sint longitudine incommensurabilia. &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes medius cadat proportionalis; vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus; Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, *sitque A, prima secunda* B. *commensurabilis. Dico & tertiam* C, *quartæ* D, *commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt*, a *habebit* A, *ad* B, *proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quã* E, *ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad* D: *Igitur &* C, *ad* D, *proportionem habet, quam numerus* E, *ad numerum F.* b *Quare* C, *&* D, *cõmensurabiles inter se sunt.* a 5. dec. b 6. decimi.



SED sit iam A, ipsi B, *incommensurabilis. Dico &* C, *ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt*, c *non habebit* A, *ad* B, *proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt* A, *ad B, ita* C, *ad* D. *Igitur nec* C, *ad* D, *proportionem habet, quam numerus ad numerum.* d *Quare* C, *&* D, *incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.* c 7. dec. d 8. decimi.

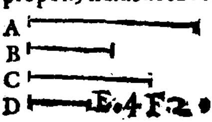
SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudin commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio prop. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commensurabilis est
a 3. def. potentia ipsi *B*, *a* erunt earum quadrata commensurabilia, *b* ac pro-
b 5. decimi. pterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. *c* Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex
c 22. sexti. C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterque descriptæ) Igitur & quadrata ex *C*, *D*, proportionem habebunt, quã
d 6. decimi. numerus ad numerum. *d* Quare commensurabilia erunt; *e* Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia
e 3. def. tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectę A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt: non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, *D*, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostẽdimus: Igitur potentia tantum sunt cõmensurabiles. Quod est propositum

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudinę tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum, incommensurabilis. Nam si A, & *B*, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommensurabilesę erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex ijs, quæ in scholio propos. 5 huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam



lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ
f 6. decimi. numeri ad numerum; *f* atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia

tentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. *a* Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. a 8. dec.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine cōmensurabiles esse vel incommensurabiles. Si enim plana solidaue commensurabilia sint, *b* habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. b 5. decimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus. A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quā numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, quæ dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR *quatuor numeri* A, B, C, D, *ita vt non sit sicut* A, *ad* C, *ita* B, *ad* D; *& fiat ex* A, B, *numerus* E; *& ex* C, D, *numerus* F. *Perspicuum igitur est* E, F, *numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.*

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

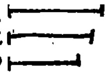
HÆC est est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis, 3 & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius, qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. PROBL. 3. PROPOS. 11.

xj.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, *cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri* B. *&* C, *proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea* D, *ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex* A, *vt numerus* B, *ad numerum* C. *Dico* C, *esse ipsi* A, *incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim* A, *&* D, *longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex* A, *ad quadratum ex* D, *vt numerus* B, *ad numerum* C; *non est autem proportio* B. *ad* C, *qua numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex* A, *ad quadratum ex* D, *proportionem habebit quam numerus quadratus*

A
E
D

B, 10.
C, 6.

tus ad numerum quadratum. Igitur a rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudini sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, b ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

a 9. decim.

b 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ proposita A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. c Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum: d erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E ipsi A, incommensurabilis longitudine & potentia. Quocirca proposita recta linea inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

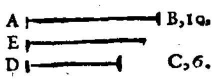
c 13. sexti.

d 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuræ cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonstratione huius theorematis liquidò constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, sint cõtinuè proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Est autem recta D, rectæ A, incommensurabilis longitudine, *e* Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incomensurabile erit. Quare rectæ, D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.



e 10. decimi.

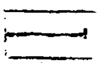
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedēti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

xij. viij.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVÆ eidem magnitudini sint commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint
a 5. dec. *commensurabiles, a habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, cōmensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionē, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad nume-*
b 4 oct. *rum G, b sumanturq; tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E,*

A  D, 10. E, 8.
C F, 2. G, 3.
B H, 5. I, 4. K, 6.

hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad B, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, c *inter se com-*
c 6. dec. *mensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.*

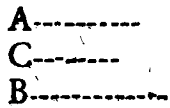
SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se lōgitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine comensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia cōmensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia
d 5. dec. commensurabiles, d erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. e Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus
e 4. oct. numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad nume-

numerum K. f Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt, f 6. de
atque adeo lineæ A,B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia verò tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



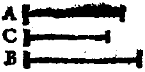
SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QVOD si magnitudines A,B, C, sint lineæ, & A,B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquã B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at verò B, potentia tantutum, vt ex hypothesi constat.

THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. o.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidẽ sit cõmensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommẽsurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, *&* B, *quarum* A, *sit ipsi* C, *commensurabilis, &* B, *eidem* C, *incommensurabilis.* Dico A, *&* B, *inter se incommensurabiles esse. Si enim* B, *dicatur esse commensu-*



a 12. decimi. *rabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter se commensurabiles, quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

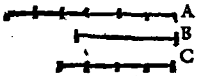
SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent,
b 12. decimi. *b* ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles (cum hoc posito, vtraque B, C. ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

xiiij. THEOR. 11. PROPOS. 14.
viij.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles; altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem, Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac



c 21. decimi. *propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; c erunt & A C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

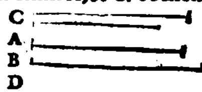
HIC quoque si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, cõmensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue

siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, *a* essent quoque A, & C, commensurabiles lon- a 12. *decimi.*
gitudine. (cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim A, ipsi C. longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, cōmensurabiles sint potentia tantùm, & A, ipsi C. potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; *b* & A, b 12. *decimi.*
C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B. potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus cōmensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, cōmensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B. incommensurabilis; *c* erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia c 14. *decimi.*
D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incōmensurabilis; *d* erit & reliqua eidem C, in- d 14. *decimi.*
commensurabilis. Quod est propositum.

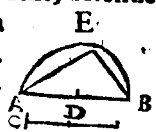


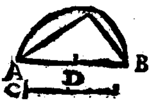
SI autem magnitudines A, B. C, D. sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia, sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incōmensurabiles. Si verò A, & B. incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; ut perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamē quia hic brevius ex iis, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile judicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo AB, plus possit





a 1. quarti.

quàm C. Diviſa AB, biſariam in D, deſcribatur ex centro D, & intervallo DA, vel DB, ſemicirculus A E B, *a* in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quàm C, quadrato rectæ EB. *b* Cùm enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; *c* erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex A E, EB; atque idcirco AB, plus poterit quàm A E, hoc eſt, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum.

b 31. tertii. c 47. primi.

Similiter.

DVABVS datis rectis lineis ſive æqualibus, ſive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, E B, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, *d* quippe cùm quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex A E, E B.

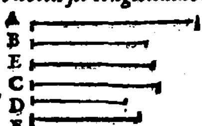
d 47. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 15.

xiv. xij.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſſit quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſſit quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, poſſitque A, prima plus quàm B, ſecunda quadrato rectæ E; & C, tertia plus poſſit quàm D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si verò E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim eſt ut A, ad B, ita C, ad D; e erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratũ ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E. per hypo-



e 22. ſexti.

hypothesin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et dividendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; a 22. sexti. *a Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; convertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex aequo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectae lineae proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.*

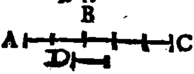
SCHOLIUM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, ut constat ex iis, quae in scholio propos. 10. hujus lib. scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. XV. IX.

SI duae magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit: & quae à principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONANTUR duae magnitudines commensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utriq; ipsarum AB, BC, commensurabilem esse. b *Sit enim ipsarum AB, BC, communis mensura D.* b 3. decimi. *Quoniam igitur D, ipsas AB, BC,*



metitur, c metietur quoq; D, totam AC, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur AC, & A; erunt AC, AB, commensurabiles: c 1. pronun. *Similiter cùm D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commensurabiles; Ac propterea AC, utrique ipsarum AB, BC, commensurabilis erit.*

SED jam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse. d *Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB.* d 3. decimi *Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; e metietur quoque D, reliquam BC. Quare cùm D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se.* e 9. pronun. *Eodem argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duae igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.*

COROL-

COROLLARIVM.

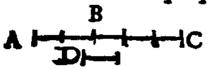
HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Ut si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam ut in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cùm metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles AC, BC. Quod est propositum.

xvj.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

ix. **SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.**

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est utrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi AB,



a 5. dec. *a sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur*
b 3. pronun. *D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cùm D, metiatur utramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum, ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eademque ratione neq; ipsi BC, commensurabilis est.*

SED jam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit uni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoq; AB, BC, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles,
c 16. decimi. *c erit quoque tota AC, utrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendũ.*

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse, nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoq; AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ AB, commen-

commensurabilis. Quod est absurdum, ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum,

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollariis, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem cōmunis mensura D, &c. quam quidem solùm lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, ut ex defin. apparet.

LEMMA I.

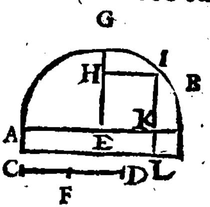
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstravimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

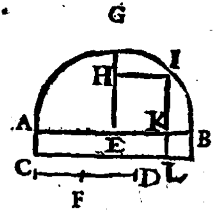
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolvi possit ex propos. 28. lib. 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiā maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, ut vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidē applicatū est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamvis, inquam, absolvi hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cū aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AC, CD, quarum AB, maior sit, oporteatq; ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta CD, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & intervallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quàm tota CD, erit quoque AE, dimidia ipſius AB, hoc eſt, EG. ipſi AE, æqualis, maior quàm CF, dimidia ipſius CD. Poſita igitur EH, æquali ipſi CF, agatur per H, ipſi AB, parallela HI, demittaturq; IKL, ad AB, perpendicularis, & ſit KL, ipſi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; *a* erit rectangulum ſub AK, KB, hoc eſt, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH; *b* (eſt enim KI, ipſi EH, æqualis, ob parallelogrammum) EI, hoc eſt, quadrato ex CF: Eſt autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quòd quadratum ex CD, per ſcholium propoſ. lib. 2. quadruplum ſit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensq; quadrato BL, æquale eſt quartæ parti quadrati ex CD, deſcripti. Quod eſt propoſitum.

a 17. ſexti.

b 34. primi.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita ſecare, ut rectangulũ ſub partibus contentũ, æquale ſit dato rectilineo, quod tamẽ maius non ſit, quàm quadratum à dimidia linea deſcriptũ.

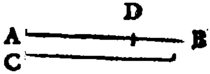
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunq; cui æquale ponatur quadratum ex CF, non majus quàm quadratum ex dimidia AE, ita ut latus CF, non majus ſit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, ſit EH, æqualis ipſi CF. Deinde acta HI, parallela ipſi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis oſtendemus, ut priùs, rectangulum ſub partibus AK, KB, æquale eſſe quadrato ex IK, hoc eſt, quadrato ex CF, atq; adeò & recti-

rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse majus, quàm quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si majus esset, esset quoque recta C F, major quàm recta E G. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis; quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad majorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita ut DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammũ applicatum deficit. Dico segmenta AD, DB, inæqualia esse. Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia;



cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB. deficiensq; figura quadrata ex *D* B, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, D B, sit autem quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipsius AB, descriptum; atque adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesin, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atque rectæ A*B*, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & A*B*, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta A*D*, D*B*. Quod est propositum.

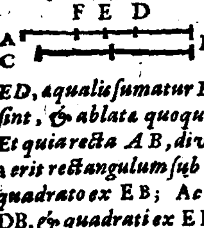
HOC facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque H I, parallela ipsi A*B*, & tandem demissa perpendicularis IK, ut partes factæ ex applicatione sint A K, K*B*; manifestum est AK, K*B*, segmenta esse inæqualia, cùm A*B*, in E, secta sit bi-sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

xvii. xiiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub AD, DB, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis.



Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propos. AD, maior est, quàm DB; dividatur AB, bifariam in E, & ipsi ED, æqualis sumatur EF. Quo facto, cùm tota EA, EB, æquales sint, & ablata quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF, BD. æquales. Et quia recta AB, divisa est bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadratum rectanguli sub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB. Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale est quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2 quadrati ex ED, cùm FD, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB, quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia sunt quadrato ex AB:

a 5. secundi.

A F: Ac proinde recta AB, *plus potest quàm recta C, quadrato recta FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam recta AD, DB, longitudine ponuntur cõmensurabiles:* a *erit quoque toto* AB, *parti* DB, *commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi* DB, *composita* a 16. decimi.

ex DB, AF, *longitudine commensurabilis; (quod composita ex* DB, *AF, dupla sit ipsius* DB,) *Igitur cùm utraque* AB, *& composita ex* DB, AF, *longitudine sit commensurabilis ipsi* DB, b *erunt quoque* AB, *& composita ex* DB, *AF, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm* AB, *composita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commensurabilis sit longitudine composita ex* AF, DB; *erit eadem* AB, *ex coroll. propos.* 16. *hujus lib. commensurabilis longitudine reliqua FD. Ergo AB, plus potest quàm C, quadrato recta* FD, *longitudine sibi commensurabilis.* b 12. decimi.

SED *jam* AB, *plus possit quàm* C, *quadrato linea sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex* C, *æquale parallelogrammum applicetur ad* AB, *deficiens figura quadrata, faciatque segmenta* AD, DB. *Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus* AB, *plus posse quàm C, quadrato recta* FD. *Quare cùm* AB, *ponatur plus posse, quàm C, quadrato recta longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi* FD, *longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota* AB, *composita ex FD, & ex* AF, DB, *tanquam una, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem* AB, *longitudine commensurabilis reliqua composita ex* AF, DB, *per coroll. propos.* 16. *huius lib. Est autem & composita ex* AF, DB, *ipsi DB, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm utraque* AB, DB, *longitudine sit commensurabilis composita ex* AF, DB; c *erunt quoque* AB, DB, *longitudine inter se* c 12. de-
commensurabiles; Atque adeò cùm tota AB, *composita ex* AD, DB, cimi.
commensurabilis sit longitudine ipsi DB; d *erunt ipsa* AD, BD, d 16. de-
longitudine quoque inter se cõmensurabiles. Quocirca si fuerint duæ cimi.
rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

xviij.
xiv.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, *& C, quarum major AB, quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad AB, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata*[1]*, quod faciat in recta A*B*, partes* AD, DB, *longitudine incommensurabiles. Dico A*B*, plus posse quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.*

Iisdem enim quæ suprà constructis, similiter ostendemus AB, plus posse quàm C*, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi* A*, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ* A*D. D*B*, ponuntur longitudine incommensurabiles;* a *erit quoque tota* AB*, parti* DB*, longitudine incommensurabilis. Sed* DB*,*
a 17. decimi. *longitudine cõmensurabilis est composita ex* DB, AF*, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium* DB*, & quæ componitur ex* DB, AF*, ipsa* DB*, longitudine sit incommensurabilis recta* AB: b *erit quoque reliqua composita ex* DB, AF*, eidem* AB*, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cùm*
b 14. decimi. AB*, composita ex* AF, DB*, tanquam una, & ex FD, incommensurabilis sit longitudine composita ex* AF, DB*, erit eadem* AB*, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliqua FD, longitudine incommensurabilis. Ergo* AB*, plus potest quàm* C*, quadrato rectæ* ED*, longitudine sibi incommensurabilis.*

IAM *verò* AB*, plus possit quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi incõmensurabilis; & quartæ parti quadrati ex* C*, æquale parallelogrammum applicetur ad* AB*, deficiens figura quadrata, faciatque in recta* AB *partes* AD, D*B. Dico & rectas* AD, DB*, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus, ut priùs, rectam* AB*, plus posse quàm C, quadrato rectæ FD. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm* C*, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit* AB*, ipsi FD, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota* AB*, composita ex FD, & ex* AF, DB*, tanquam una longitudine incommensurabilis sit ipsi* FD*; erit eadem* AB*, per coroll. propos. 17. hujus lib. & reliqua composita ex* AF, DB*, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex* AF, DB*, ipsi* DB*, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe*

quæ

quæ ex AF, DB, *componitur, &* DB, *ipsa composita ex* AF, DB, *longitudine incommensurabilis sit recta* AB, a *erit & reliqua* DB, *eidem* AB, *longitudine incommensurabilis: Ac proinde cùm tota* AB, *composita ex* AD, DB, *incommensurabilis sit ipsi* DB, *longitudine;* b *erunt & ipsa* AD, DB, *longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.* a 14. *decimi.* b 17. *decimi.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

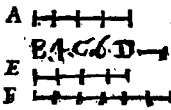
QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit lõgitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine; dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommẽsurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solùm sunt cõmensurabiles: dicũtur ipsa quoq; Rationales, potentia solùm inter se commensuabiles.

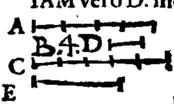
SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei utraq; est commensurabilis. Aut denique utraque expositæ Rationali cõmensurabilis est solùm potentia. Hæc autẽ tria genera inveniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A, divisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt



in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta una partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties unitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus quæ quidẽ magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cùm habeant D, communem mensuram Inventæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine cõmensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum una nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.

IAM verò D. metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita ut

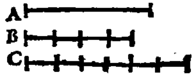


utraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur ut prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles Rationales sunt. Cùm ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inventæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine cõmensurabiles, & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ.

a 11. dec. POSTREMO expositæ Rationali A, a inveniatur recta B, longitudine tantùm incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque

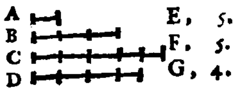
partes

partes æquales, & sumatur C, composita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solùm esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeò & potentia; *a* Igitur quadrata rectarum *A*, & C, commensurabilia quoque inter a 12. decimi.



se sunt. Quare C. ipsi A. potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; *b* erit quoque reliqua C, eidem b 14. decimi.
A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solùm potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inventæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia verò tantùm commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.

QVOD si quis optet invenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quavis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A., æqualibus, quot sunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.

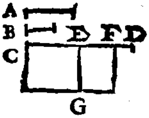


CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles facilè hoc modo demonstrabimus. *c* Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; *d* quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunq; inter se commensurabiles esse. c 6. defin. d 12. sexti.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & *B*. Dico esse ut A, ad *B*, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensũ.



Ex quãtacũq; enim linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturq, rectangnlum GF, con-
a 1. sexti. tentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & *B*, *a* Quoniam igitur est ut CE, ad EF, hoc est, ut A, ad *B*, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, ut quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.

EODEM modo erit, ut *B*, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IV.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio *B*. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia dicuntur, vel

Irrationalia, quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur *B*, Ra-
b 9. def. tionale est, *b* erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi *B*, commensurabile. Igitur A, & C,
c 12. decimi. cùm commensurabilia sint ipsi *B*, *c* inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali
d 6. def. quadrato C, ex Rationali linea exposita descripta commensurabile, *d* Rationale est. Quod erat demonstrandũ.

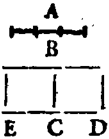
xix. xv.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, *& spatium rectangulum* BD, *contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus* B C, CD, *secundum aliquem prædictorum modorum, (hoc est, secundum aliquẽ trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita ut vel altera ipsarum* BC, C D, *Rationali exposita* A, *sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei utraque commensurabilis sit aut*

longi-



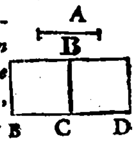
longitudine, aut potentia tantùm. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali exposita A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: a *erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, commensurabile:* b *Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia.* c *Igitur & BE, illi cõmensurabile, Rationale est. Quia verò BC, hoc est, EC, & CD, longitudine cõmensurabiles sunt, (ponuntur enim BC, CD. Rationales inter se longitudine commensurabiles,)* d *& est ut EC, ad CD, ita EB, ad BD;* e *erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. BD, Rationali BE. commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 3. *def.*
b 8. *def.*
c 9. *def.*
d 1. *sexti.*
e 10. *decimi.*

THEOR. 18. PROPOS. 21.

xx. xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, sive BC, æqualis sit Rationali expositæ A, sive non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, ut in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, f *ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto;* g *Ac propterea & commensurabilia inter se erunt:* h *Est autem ut BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine;* i *sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, ut in scholio propos. 12. huius lib. demonstravimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.*

f 9. *def.*
g 12. *decimi.*
h 1. *sexti.*
i 6. *def.*

LEMMA I.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A,

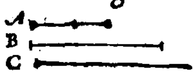
Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, ut in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt, quod eſt abſurdum. Ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib, Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles invenire.

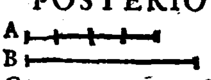
DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tãtùm inter ſe commenſurabilium. Aut



enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inveniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi *B*, *a* inveniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inventa ſit potentia tantùm incõmenſurabilis ipſi *B*, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt *B*, & C: Sunt autem & potentia ſolùm commenſurabiles. Inventæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

a 11. *decimi.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus.



Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis *b* inveniatur *B*; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico *B*, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

b 11. *decimi.*

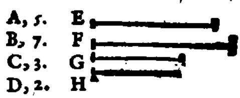
Quòd

Quòd enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commmẽſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraq; B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis; *a* erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles. a 6. *def.*

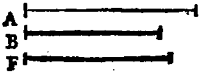
SCHOLIVM.

QVOD ſi inueniendæ ſint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratũ ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potentia tantum commenſurabiles inter ſe. Quod enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D,) *b* erunt ipſa inter ſe commenſurabilia; ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. *c* Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum. b 6. *dec.* c 9. *decimi.*



QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A,B, qua-



C, 10. rum quadrata proportionem habe-
D 6. ant, quam numerus C, ad numerum
E, 7. D: Sumpto autem alio numero E,

qui ad quemlibet ipſorum C,D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C,D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe & ipſis A,B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B,F, proportionem habentia, quam numeri D,E, *a* commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cũ E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) *b* erunt rectæ B,F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A,F, longitudine incommenſurabiles, &c.

a 6. *decimi.*

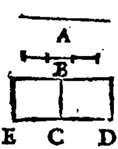
b 9. *decimi.*

XXI.
XIX.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, *contentum ſub Rationalibus* BC, CD, *potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non) Dico rectangulum* BD, *eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi* BD, *æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex* BC, *quadratum* BE, *quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus.* c *Et quoniam eſt vt* EC, *hoc eſt,* BC, *ad* CD, *vt* BE, *ad* BD: *Eſt autem* BC, *ipſi* CD, *longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ.*



c 1. *ſexti.*

propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. a 9. def.
Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; b erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis exposita incommensurabile existens, b 14. decimi.
c *Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.* c 10. def.

VOCETVR autem hac linea potens ipsum BD, Media d *propterea quod media proportionalis est inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum aquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.* d 17. sexti.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. e Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus: si dicamus eam esse lineã Irrationalẽ, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur. e 17. sexti.

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media; Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continuè proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio prop. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum medium proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatiũ Mediũ contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe

Media

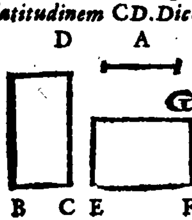
Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum, sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

xxij. xx. THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, siue ea sit exposita, siue exposita commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum a 45. pri. *a applicetur que ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi B,C, longitudine incommensurabilem Quoniam enim A, Media est, ipsa poterit rectangulum sub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter se cõmẽsurabilibus contentũ, alias nõ posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, sub rationalibus EF, FG, potentia tantum commensurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG,* b 24. sexti. *b lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales*



angu-

angulos, nempe erit vt BC, *ad* EF, *ita* FG, *ad* CD; a *Ac propterea quoque vt quadratum ex* BC, *ad quadratum ex* EF, *ita quadratum ex* FG, *ad quadratum ex* CD: *Sed quadratum ex* BC, *commensurabile est quadrato ex* EF, (*quod recta* BC, EF, *ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum*) *Igitur* b *& quadratum ex* FG, *commensurabile erit quadrato ex* CD: *proptereaque & recta* FG, CD, *commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cum* FG, *Rationalis exposita Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque* CD, *exposita Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos.* 12. *huius lib. atque adeo* CD, *ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi* BC. *Quoniam enim* EF, FG, *Rationales sunt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt* EF, *ad* FG, *ita quadratum ex* EF, *ad rectangulum* EG, *sub* EF, FG, *contentum, ex lemmate 3. propos.* 19. *huius lib.* c *erit quadratum ex* EF, *incommensurabile rectangulo* EG, *atque adeo rectangulo* BD, *quod huic æquale est. Atqui quadratum ex* EF, *commensurabile est quadrato ex* CD. (*quod* EF, CD, *Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles*) *Igitur cum quadratum ex* CD, *commensurabile sit quadrato ex* EF, *at rectangulum* BD, *eidem quadrato ex* EF, *incommensurabile;* d *incommensurabilia erunt quadratum ex* CD, *& rectangulum* BD. *Est autem ex lemmate 3. propos.* 19. *huius lib. quadratum ex* CD, *ad rectangulum* BD, *vt recta* CD, *ad rectam* BC. e *Incommensurabiles ergo sunt longitudine* CD, *&* BC. *Rationalis ergo est* CD, *& Rationali* BC, *longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 22. *sexti.*
b 10. *decimi.*
c 10. *decimi.*
d 13. *decimi.*
e 10. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad *BC*, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, *f* sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; *g* erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

f 11. *sexti.*
g 17. *sexti.*

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestũ est, omne mediũ, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangu-angulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

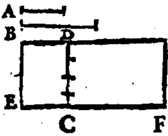
xxiiij.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

SIT Media A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis CD, a ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem

a 45. primi.



CD, applicatum, facit CE, latitudinem; b erit CE, Rationalis ipſi CD, longitudine incommenſurabilis. Rurſus ad CD Rationalem c applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia DE, DF, commenſurabilia. d Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. e Igitur EC, CF, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi CD, incommenſurabilis. f Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ CD, ſit commenſurabilis; (Nam cum EC, CF, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & EC, ipſi CD, commenſurabilis ſaltē potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem CD, commenſurabilis potentia ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, g Ac proinde recta B, potens rectangulum DE, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Media igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

b 23. decimi.
c 45. primi.
d 1. ſexti.
e 10. decimi.
f 14. decimi.
g 22. decimi.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit DF, eſſe quoque Medium, nimirum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium DF, ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Medium eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum DE, Medium. (Nam cum DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipſum DF. Quoniam igitur DE, DF, commenſurabilia ſunt, erunt quoq; quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia,

bilia. Quare A,B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

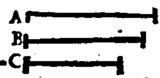
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine cõmensurabilem, dici Mediam, & ipsi cõmensurabilẽ, nõ solũ lõgitudine sed & potẽtia. Vniuersæ enim quæ lõgitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt cõmensurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommẽsurabilis, dicetur & sic media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniãtur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; a erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.



a 24. decimi.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles,

THEOR.

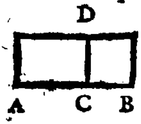
xxiv. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulnm, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Medijs AC, CD, longitudine commensurabilibus. Dico AD, medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. a Et quoniam est ut AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine commensurabiles; erunt AD, DB, commensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. praecedentis prop. Quod ergo sub Medijs longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.



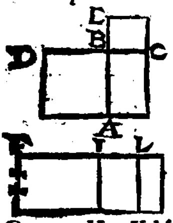
xxv. xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quae Media erunt, ut in scholio propos. 22. huius lib. docuimus, cum rectae AB, BC, Media ponantur. Exponatur Rationalis FG, b ad quam applicetur FH, quadrato AD, ex AB, descripto aequale; & ad HI, rectangulum IL, rectangulo AC, aequale; & denique ad KL, rectangulum LM, aequale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totum FM, unum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis aequalia, Media: quae cum applicentur ad Rationales FG, KL, (c est enim & KL, Rationali FG, aequalis, ob parallelogrammum FK, Rationalis) faciantque latitudines GH, KM, d erunt rectae GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectae AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadata AD, CE, atque adeo & ipsis aequalia rectangula FH, LM, commensurabila: e Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. f Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM, Rationales ostensae, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero FG, solum commensu-

b 45. primi.



c 34. primi.
d 23. decimi.
e 1. sexti.
f 10. decimi.

mensurabiles potentia, cum ei ostensa sint longitudine incommensurabiles; a *Ac propterea rectangulum sub ipsis* GH, KM, *Rationale est.* *Et quoniam est, vt* DB, *ad* BC, *ita* AB, *ad* BE, (*quod* DB, BC, *ipsis* AB, BE, *sint aquales, vtraque vtrique*) b *& vt* DB, *ad* BC, *ita* AD, *ad* AC; *& vt* AB, *ad* BE, *ita* AC, *ad* CE; *erit quoq; vt* AD, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CE, *atq; adeo* AD, AC, CE, *proportionalia sũt. Igitur & illis aqualia* FH, HL, LM, *proportionalia erunt:* c *Habent autem recta* GH, HK, KM, *easdem proportiones, quas rectangula* FH, HL, LM, *Igitur & recta* GH, HK, KM *proportionales sunt;* d *propterea q; rectangulum sub* GH, KM, *quadrato ex* HK, *aquale est. Est autem rectangulum sub* GH, KM, *ostensum Rationale Igitur & quadratum ex* HK, *Rationale est; ideoque & recta* HL, *Rationalis erit:* e *& ob hoc ipsi* FG, *Rationali exposita, hoc est, ipsi* HI, *commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel solum potentia. Et siquidem* HK, *ipsi* HI, *longitudine sit commensurabilis,* f *rectangulum* HL, *sub Rationalibus* HI, HK, *longitudine commensurabilibus contentum, hoc est,* AC, *illi aquale, erit Rationale. Si vero* HK, *ipsi* HI, *potentia solum commensurabilis sit,* g *erit rectangulum* HL, *sub Rationalibus* HI, HK, *potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est,* AC, *illi aquale, Medium. Est ergo* AC, *rectangulum sub Medijs* AB, BC, *potentia tantum commensurabilibus contentum vel Rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.*

a 20. *decimi.*
b 1. *sexti.*
c 1. *sexti.*
d 17. *sexti.*
e 6. *defin.*
f 20. *decimi.*
g 22. *decimi.*

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale. *h* si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK. *i* Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub medijs AB, BC.

h 12. *sexti.*
i 16. *sexti.*

HAC eadem arte vtemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propos. 28. quanam ratione inueniendæ sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Prop. verò 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, k rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale; l Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Medium & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis

k 20. *decimi.*
l 22. *decimi.*

a 25. decimi. b 26. decimi. constat *a* rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; *b* Rectangulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale vel Medium.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incõmensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incõmensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM, incommensurabilia *c* Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM. *d* Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles; *e* Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media *f* Potest autem rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK; (Nam vt prius ostendemus, tres GH, HK, KM, esse porportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationale non est: si enim Rationale esset, *g* faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, medium est; si enim esset Medium, *h* faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinẽ HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem quod est absurdum. ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque AC, illi æquale, Rationale erit, neque medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media continetur cum HI, Rationalis sit, & HK, ostẽsa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur AB, BC, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

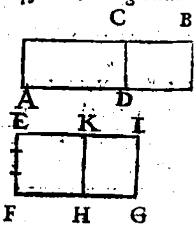
c 1. sexti. d 10. decimi. e 22. decimi. f 17. sexti. g 21. decimi. h 23. dec.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, a ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, ut sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, b erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK, (c est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) d erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, ut est ostensum; e erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem ut FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. f Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) g atque adeo & duo quadrata ex FH, HG simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis h Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG, i At quadratis ex FH, HG, una cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, k erit quadratum ex FG, Irrationale, l ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est, FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.



k 10. def.
l 11. def.

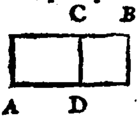
SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoq; esse Rationale. Quoniã enim AB. AC, Rationalia sunt; a

a 9. defin. erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; b atque adeo & inter se commen-



b 12. dec. surabilia. Quare cum totum AB, compositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC. erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

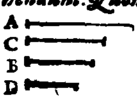
xxvij. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2 prop. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, c inter quas media propor-

e 13. sexti. *tionalis sumatur* C, d *fiatque vt A, ad B, ita C, ad D.* Dico C, D, *esse*

d 12. sexti. *Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum*



commensurabiles; e *erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur;*

e 22. dec. *atque adeo* f *cum ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D,*

f 17. sexti. *suntque A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus.* g *Est ergo & D, Media C, commensurabilis Media. Quare inuenta sunt Mediæ C, D, potentia*

g 24. dec. *tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoque B, media proportionalis inter C, & D,* h *pote-*

h 17. sexti. *rit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratũ ex B. linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.*

PROBL. 5. PROPOS. 29.

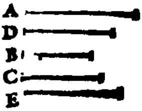
xxviij. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A,B,C, potentia tantum commensurabiles a *& inter A,B, media proportionalis inueniatur D.* b *Deinde fiat vt B. ad C, ita D, ad E. Dico D,E, Medias esse potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A,B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles: erit rectangulum sub A,B, atque adeo & quadratum ex D,* c *quod illi æquale est,* d *Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, sunt autem B,C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; Erunt quoque D,E, potentia solùm commensurabiles vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit,* e *erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E.* f *Rectangulum igitur sub DE æquale est ei, quod sub A,C: Est autem quod sub A,C, Rationalibus, potentia solum commensurabilibus* g *Irrationale, & Mediũ. Igitur & rectangulum sub D,E, Medium est. Medias ergo inuenimus D,E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.*

a 13. sexti.
b 12. sexti.
c 17. sexti.
d 22. dec.
e 24. dec.
f 16. sexti.
g 22. dec.



SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A,B, C,D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quando quidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. *h* ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, si impar multiplicet imparem, perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorũ vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par; Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

h 28. & 29. noni.

LEMMA. I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIATVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. *a* Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariam in E: Dico numerum factũ ex AB, in BD, *b* qui quidem quadratus est, cõpositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB: erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur, quod est propositum.

A . . . . . E . . . . . D . . . . B
C . . . .

1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifestũ est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, non est quadratus. Si enim quadratus esset, *c* numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum ponuntur enim non similes,

c 2. noni.

SCHOLIVM. II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nã quadrati numeri ex BE, ED, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratũ ex ED, numero qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est.

A . . . . . E . . . . . D . . . . B
C . . . .

SI

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nã similiter ostendemus quadratum ex BE, æqualem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus, (si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

A...E...D.......B
C.......

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes AB & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, æqualis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius ma-

A..H..I.E.F.G...D.......B
C.......

ius latere BF. Erit ergo latus ipsius vel æquale numero BE, vel maius, (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur: Esset autẽ dictum latus inter ipsos

A..H..I.E.F.G...D........B

C........

medium, si maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, æqualis reliquo quadrato ex DE; Ideoque & latus DF, lateri DE, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, æquale est numero BE. Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero BI, qui maior sit, quam BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore: maior est quadrato ex BE. latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum ex alter AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Est autem quadrato ex BE, ostensus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se, maius est latere BE. Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille cõpositus maior est quadrato ex BF.

SIT

SIT iam si fieri potest, A..H..I.E.F.G...D.......B
numerus qui fit ex AB, in C.......
BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus unitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus est, (divisus enim est AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ unitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam dividitur. Quare ex 6. theorem. eorũ, quæ ad prop. 14. lib. 9. demonstravimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidẽ quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, unà cũ quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundẽ BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. septimi.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita ut qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI, Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, dividetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, unà cũ quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, unà cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG,

& DF, quorum qui ex D G, minor est, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex A B, in B D, unà cum quadrato ex D F, minor quadrato ex BF. Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex A B, in B D, unà cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

A..H..I.E.F.G...D........B
C........

SCHOLIVM III.

EX hoc facilè inveniemus duos numeros, ita ut ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inveniātur duo quadrati, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadraum.

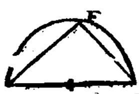
IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos, divisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix. xvij.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inveniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat ut CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum, ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF, accommodetur q; AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac deniq; connectatur recta FB. a *Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo;* b *erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & FB; hoc est, recta A B, plus poterit quàm AF, quadrato recta FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex A F, ut numerus CD, ad numerum D E,* c *erunt quadrata ex A B, A F; commensurabilia; atque adeò cùm quadratum ex A B, sit Rationale, nempe ex linea Rationali A B; descriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea q; & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt A B, AF, atq; adeò commensurabiles saltem potentia. Quia verò quadratum*



A B
C...E....D

a 32. tertii.
b 47. primi.
c 6. decimi.

dratū ex AB, *ad quadratū ex* AF, *proportionē nō habet, quā quadratus numerus ad quadratū numerū; (cùm neque quadratus numerus* CD, *ad non quadratū* DE, *proportionē habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & DE, quadratus esset, a ut in Arithmeticis est demonstratum, quod non ponitur)* b *erunt rectæ* AB, AF, *longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, ut ostensum est. Igitur* AB, AF, *Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.* a 74. oct. b 9. decimi

IAM *verò, quoniam est ut* CD, *ad* DE, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* AF; *erit per conversionem rationis, ut quadratus numerus* CD, *ad quadratum numerum* CE, *ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* FB, *(sicut enim* CD, *superat* DE, *quadrato* CE, *ita etiam quadratum ex* AB, *superat quadratum ex* AF, *quadrato ex* FB.) c *Quare rectæ* AB, FB, *longitudine commensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales* AB, AF, *potentia tantùm commensurabiles, ita ut major* AB, *plus possit, quàm minor* AF, *quadrato lineæ* FB, *sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.* c 9. decimi.

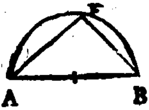
PROBL. 7. PROPOS. 31. xxx. xviii.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATUR *Rationalis linea* AB, *inveniantúrq; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati* CE, ED, *ita ut ex illis compositus* CD, *non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus* CD, *secetur in duos numeros non quadratos* CE, ED; *Utrumvis enim horum fiat, totus* CD, *ad neutrum ipsorum* CE, ED, *proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundum priorem modum, esset totus* CD, *etiam quadratus: juxta posteriorem verò, quilibet ipsorum* CE, ED, *quadratus quoque,* d *ut in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut* CD, *ad* DE, *ita quadratum ex* AB, *ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex* AF; *accommodeturque* AF, *in semicirculo* AFB, *circa* AB, *descripto. Denique connectatur recta* FB. *Poterit igitur, ut in præcedenti,* AB, *plus quàm* AF, *quadrato rectæ* FB; *Eruntque* AB, AF, *Rationales potentia solum commensurabiles. Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti* d 24. octavi.

C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C...... E... D.

propos.



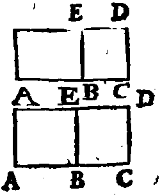
C, 144. E, 16. C, 160. D.
C...... E... D.

propos. Quoniam verò rursus, ut priùs, est per conversionem rationis, ut CD *ad* CE, *ita quadratum ex AB, ad quadratum ex* FB; *Non habet autem* CD, *ad* CE, *proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* a *Quare recta AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Invenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commensurabiles, ita ut maior* AB, *plus possit quàm minor* AF, *quadrato lineæ* FB, *sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.*

a 9. *decimi.*

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, ut AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD: eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contententum; quòd BE, ipsi BC, sit æqualis; *b* perspicuum autem est, esse ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

b 1. *sexti.*

EODEM modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quàm BC.

xxxj.
xxiv.
xxv.

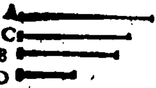
PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

c REPERTÆ *sint duæ Rationales A.* B. *potentia tantùm commensurabiles: ita ut A, major plus possit quàm* B, *minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque* C, *media proportionalis inter A, & B; & fiat ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D. *Quoniam igitur AB, sunt Rationales potentia solùm commensurabiles;* a *erit rectan-*

c 30. *decimi.*

a 22. *decimi.*



rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. b Quare D, Media C, commensurabilis, Media quoque sit. Inventa ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; ut C, ad B, ita B, ad D; c Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B. Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; d poterit quoque C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Invenimus igitur duas Medias, C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

b 24. decimi.
c 17. sexti
d 15. decimi.

QVOD si reperta sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut A, plus possit quàm B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autē fiant, ut priùs, ostendemus eodem modo, inventas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

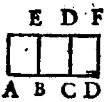
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac faciliùs idem sine ipso ostendimus, ut facilè judicabunt, qui cùm eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immò rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hîc ostendimus, ac in propos. 28, hujus libri.

LEMMA

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse ut AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad re-



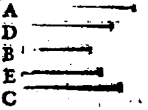
ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF, Eritq; AE, contentum sub AB,BC; & CF, sub BC, CD, quòd
a 1. sexti. BE,CD, ipsi BC, æquales sint. a Perspicuum autem est esse AB, ad CD, ut AE, ad CF. Quod est propositum.

xxxij.
xxvj.

PROBL 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inventa tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita ut A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum.
b 30. decimi. *b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita ut A, plus possit quàm C, quadrato linea sibi commensurabilis longitudine; inveniatur alia B, utrique A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstravimus)*



c 13. sexti. *c Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D;*
d 12. sexti. *d fiatque ut D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C,*
e 17. sexti. *ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; e Est autem*
f 16. sexti. *rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, f & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque ut A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3 propos. 19. huius lib. recta D, ad rectã E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles*
g 22. decimi. *sunt, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm*
h 24. decimi. *commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; h erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inventa ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectan-*
i 22. decimi. *gulo sub B, C, i quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione;*
k 15. decimi. *k poterit etiam D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi*

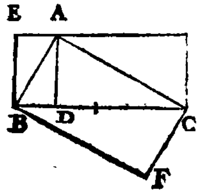
commen-

commensurabilis. Invenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

QVOD si reperta fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita ut A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut priùs, demonstrabimus similiter, inventas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC, & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum deniq; sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.



QVONIAM ex coroll. prop. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CD, BD; *a* erit rectangulũ sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale. *a 17. sexti.*

EADEM ratione erit rectangulũ sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idẽ coroll. AC. media proportionalis est inter BC. CD.

RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulũ sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

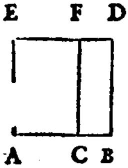
POSTREMO, *b* quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD. *c* Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum sub BC, AD; Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentũ. *d* Quoniam igitur rectangulũ CE, duplũ est trianguli ABC, nec nõ & rectãgulum *b 8. sexti.* *c 16. sexti.* *d 41. primi.*

gulum AF, eiusdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF, quod eſt propoſitum.

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales; erit ut maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitq; maior pars AC. Dico eſſe ut AC, ad CB, ita rectangulũ ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB. quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipſi AE, parallela; eritque AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint. *a* Quoniam igitur eſt ut



a 1. ſexti. AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum ſub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB. BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, ſub AB, BC: ducaturque DE, ipſi AB, parallela, eritque BE, contentum ſub AB, &

b 1. ſexti. BD, dimidia minoris. *b* Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quòd & baſis BC, dupla ſit baſis BD, conſtat propoſitum.

EODEM modo ſi BC, ſecta bifariam, ſit maior, erit

quod

quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore, & BD, dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. xxxiij. xxvij.

a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solùm commensurabiles, ita ut major AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturque CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. hujus lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, contineatur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; *b* erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem ut AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. ejusdem antecedentis propositionis; *c* quod angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit ut AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles; *d* erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. *e* Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, *f* æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, *g* æquale est quadrato ex FG, (propterea quòd angulus AGB, rectus est & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia: ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB,

a 31. decimi.

b 19. decimi.

c 31. tertii.

d 10. decimi.

e 4. def.

f 47. primi.

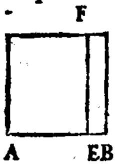
g 17. sexti.

a 22. decimi. FG, (cum FG, dimidia sit minoris CD.) a Sed rectangulum sub AB, CD. Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit ejus dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. hujus lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulũ sub AG, GB. Contentum igitur sub AG; GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inventæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo fieri posse, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, *& duo numeri C, D, quorum C, major sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; ut C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est ut C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam quadratus ad quadratum;* b 9. decimi b *erunt latera* AB, *AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib.* c 1. sexti. c *Vt autem* AB, *ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm AB, AE, incommensurabiles* d 10. decimi. *sint longitudine,* d *erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*



C,6. D,4.

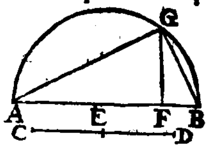
AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim utrumq; AF, FB, e 16. decimi. *Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia.* e *Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum utrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile utrique Rationali AF, FB,* f 9. def. f *Rationale quoque est. Quod est propositum.*

PROBL.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut major AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, ut in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratũ ex Media AB, b æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus ut in antecedenti propositione, ostendemus rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. hujus lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostensæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inventæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. decimi.

b 47. primi.

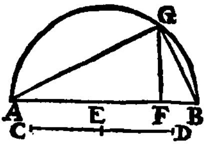
PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

c REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, ut in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse.

c 33. decimi.

a 47. primi les esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, a & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus, ut in 34. demonstrabimus, rectangulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG: atque adeò illud esse huic commensurabile. Quare cùm ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB, quod illi per 1. lemma propos. 33. hujus lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Quoniam verò AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quòd illa hujus sit dupla; b erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed ut AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. hujus lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG: hoc est, sub AG, GB, (sunt enim rectangulum sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. hujus lib. æqualia.) c Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inventæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis, Quod faciendum erat.



b 13. decimi.

c 10. decimi.

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ incommensurabiles tam longitudine, quàm potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia, quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inventæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles, Quod est propositum.

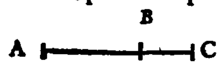
PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. xxxvj. xxx.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solùm commensurabiles, inventæ per 2. lemma propos. 21. hujus lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim *AB*, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & ut AB, ad BC, ita est rectangulum sub A*B*, BC, ad quadratum ex *B* C, per lemma propos. 31. hujus lib. *a* erit rectangulum sub A*B*, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectangulo sub A*B*, *B*C, commensurabile est ejus duplum, nempe quod bis sub A*B*, *B*C, continetur; & quadrato ex BC, commensurabile est quadratum rectæ *AB*; (omnia enim sunt Rationalia) *b* atq; adeò & compositum ex quadratis rectarum *AB*, BC, eidem quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. ostendimus, & quod bis sub *A*B, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum *AB*, BC. Quamobrem & compositum ex eo, quod bis sub *A*B, BC, & ex composito quadratorum rectarum *AB*, *B*C, hoc est, quadratum ex tota *A*C, (*c* Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, *B*C, unà cum rectangulo sub *AB*, BC, bis) composito ex quadratis rectarum A*B*, *B*C, *d* incommensurabile erit: Est autem compositum ex quadratis rectarum *AB*, BC, Rationale, quòd commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex *B*C, Rationali. Igitur quadratum ex *A*C, quadrato Rationali ex *B*C, incommensurabile, *e* Irrationale est; atque adeò & recta ipsa *A*C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu ut alii loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis A*B*, *B*C, potentia solùm commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. decimi.
b 16. decimi.
c 4. secundi.
d 17. decimi.
e 10. def.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, f Irrationalis est, quæ Media vocatur. At verò composita ex ipsis, g Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.

f 22. decimi.
g 37. decimi.

xxxvij. xxxj.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

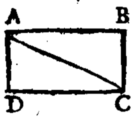
SI duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

a 28. decimi. COMPONANTVR duæ mediæ *a* superiùs inventæ *AB*, BC, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, ut rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, ut in lemmate

propos. 31. hujus lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; b 10. decimi. *b* erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub *A*B, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cùm AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia. c 16. decimi. *c* atq; adeò & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, unà cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, d 4. secundi. *d* quod huic composito æquale, est, e 17. decimi. *e* incommensurabile quoq; est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub *A*B, BC, commensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cùm hoc sit illius dimidium. f 13. decimi. *f* Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub *A*B, *B*C: Ponitur autem rectangulum sub *A*B, *B*C, Rationale, g 10. defin. *g* Irrationale ergo est quadratum ex *A*C, h 11. defin. *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel ut alii loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.



CONTINEATVR rectangulum *A*BCD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, 21. decimi. *i* faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdum, ponitur

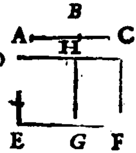
enim

enim BC, Irrationalis. Non argo AC, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* ſuperiùs inventæ AB, a 29. *decimi.*
BC, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, *b* ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; b 45. *primi*
& compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, *c* æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, unà cum c 4. *ſecundi.*
rectangulo bis ſub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniam verò ex hypotheſi, rectangulum ſub AB, BC, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſnrabile, hoc eſt, HF, Medium, ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; *d* erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum DG. utrivis ipſorum commenſurabile: Sed d 16. *decimi.*
utrumque quadratorum ex Mediis AB, BC. Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, adplicantur ad Rationalem DE; (*e* eſt enim GH, e 34. *primi.*
Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines EG, GF, Ratio- f 23. *decimi.*
nales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt: & eſt ut AB, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulũ ſub AB, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. hujus lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, ut in ſcholio propoſ. 10. hujus lib. oſtensũ eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC: & rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cùm hoc illius ſit duplum Igitur per ea, qua in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF. *g* Cùm g 1. *ſexti.*
ergo ſit ut DG, ad HF, ita EG, ad GF: *h* erit EG, ipſi GF, longitudine h 10. *decimi,*
incommenſurabilis: Oſtenſum autẽ jam fuit EG, GF, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantũ commenſurabiles,



a 37. decimi. a ac propterea & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, seu ut aliis placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

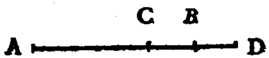
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem AC, *quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam. Hic verò lineam Irrationalem* AC, *quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.*

LEMMA

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitq; maior pars AB; in qua sumatur BC, minori BD, æqualis, ut



sit AC, excessus, quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, simul maiora esse rectangulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniam enim quadrata ex AB, BC, *b* æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, unà cum quadrato ex AC, estq; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, unà cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quàm rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC, quod est propositum.

b 7. secundi.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij. THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur,

tinetur Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR, duæ rectæ *a* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, Rectangulum vero sub ipsis contentum Medium. Dico totam AC, esse Irrationalem. Quoniam enim rectangulum sub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub AB, BC, illi commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale. *b* Incõmensurabile ergo est rectangulum bis sub AB, BC, composito ex quadratis rectarum AB, BC. *c* Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; *d* erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; *e* Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia *f* cum possit duo quadrata ex AB, BC; & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium; rectè vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

a 34. decimi.
b 10. defin.
c 17. decimi.
d 10. defin.
e 11. def.
f 4. secundi.

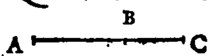
THEOR. 29. PROPOS. 41.

XL.
XXXIV.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommmensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ *g* superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur, *h* erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommen-

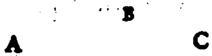
g 35. dec.
h 10. def.



a 17. decimi. mensurabile rectangulo bis sub AB,BC. *a* Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB,BC, vna cum rectangulo bis sub AB,BC, hoc est, quadratum ex AC, *incommensurabile* est rectangulo bis sub AB,BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB,BC, vt diximus sit Rationale; *b* erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; *c* Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex qudratis rectarum AB,BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

b 10. defin.

c 11. defin.



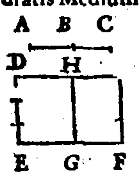
xlj. xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ *d* superius inuentæ AB,BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque compositoex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, *e* ad quam applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG, Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, *f* æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB,BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB,BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB,BC, atque adeo ex coroll. 24. huius lib. quod bis sub AB.BC, nempe ipsum HF. (cum illi sit commensurabile.) Medium ponitur, *g* facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB,BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB,BC: Eidem autem rectangulo sub AB,BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub AB, CB,



e 45. primi.

f 4. secundi.

g 23. decimi.

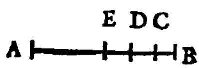
BC, hoc est, ipsum HF; *a* erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quare *b* cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; *c* erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles; Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; *d* Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; *e* ideoque & recta ipsa AC. Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. *decimi.*
b 1. *sexti.*
c 10. *decimi.*
d 37. *decimi.*
e 11. *def.*

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes in AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, *f* æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, *g* æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis AC, CB, quam rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex



f 5. *secundi.*
g 4. *secundi.*

AD,

AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque

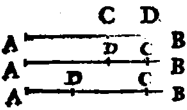
a 5. secundi quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

xxxxij.
xxxvj.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVÆ ex binis nominibus ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi nõ posse in alia nomina, quę scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum cõmensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commensurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales



sunt

ſunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora ſunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur AB, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis ſub AD, DB, *a* quod tam illa, quam hæc æqualia, ſint quadrato ex AB; fit, vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub AC, CB, & reliqui rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſſe Rationale) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt. *b* Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt, erit & quod bis ſub AC, CB, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub AD, DB, Medium erit. *c* Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum quã ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

a 4. *ſecundi.*

b 22. *decimi.*

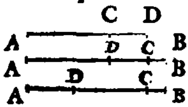
c 27. *decimi.*

THEOR. 32. PROPOS. 44. XLIII. XXXVII.

QVÆ ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ

quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse, in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentésque Rationale: Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque D, existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessū rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundē esse, qui est cōpositi ex quadratis rectarū AC, CB, cōpositi ex quadratis rectarū AD, DB: Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectāguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Ratio- erit, & quod nalebis sub AC, CB, ei quod continetur semel AC, CB, commensurabile Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus: perspicuum est, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium esse Rationale. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est.) Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, &



a 16. dec. potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. a Quare & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB. b Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

b 27. decimi.

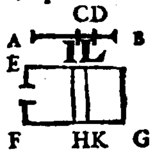
XLIV. xxxviij.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

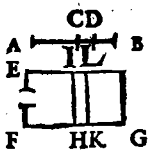
QVÆ ex binis Medijs secunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant vt vult propos. 39. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentésque Medium. Diuiditur enim si fieri potest, in alia nomina AD, DB.

DB. Igitur vbicunq; punctum D, existat, similiter ostendemus, vt in propositione 43. quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applice- a 45. primi.
tur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB, quandoquidem quadratum ex AB, *b* æqua- b 4. secundi.
le est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehēso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erunt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39. huius lib. rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidium ipsius FH. Eadem ratione ostendemus FK, maiorem esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniam vero AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. *c* Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensura- c 16. decimi.
bile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, *d* Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales d 23. decimi.
ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC, CB, ponatur Medium & erit, quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24 huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, *e* e- e 23. decimi.
rit HG, Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL; longitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine sunt incommensurabiles, & est, vt AC, ad CB, ita per lemma 3, propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *f* erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommen- f 10. dec.
surabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadris rectarum AC, CB. (Cum enim AC, CB, potentia sint commensurabiles, atq; adeo ipsarum quadrata commensurabilia; *g* erit g 16. decimi.
& compositum ex ipsis vtrilibet ipsorū, nimirum quadrato ex AC, cōmensurabile) Rectāngulo vero sub AC, CB, cōmēsurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & cōpositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est rectāgulum EH, incōmensurabile est per scholium prop. 14.



huius



a 1. *sexti.* b 10. *decimi.* c 37. *decimi.* d 34. *dec.*

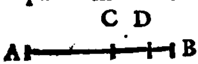
huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca *a* cum sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, *b* erunt FH, HG, lõgitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. *c* Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus, diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, *d* vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

XLV. XXXIX.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositũ ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulũ vero sub ipsis Medium, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium.



Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale: (quia cum vtrumque compositum ex hypothesi si sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostendimus) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque

e 27. *dec.*

eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. *e* Igitur cum Medium non superet Medium Rationali, non erit excessus, rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale; Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diui-

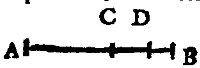
diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

XLVI.
XL.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest,



in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: *a* Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

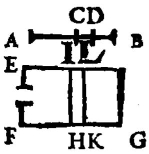
a 27. decimi.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

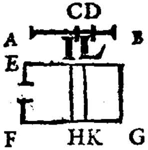
XLVII.
XLI.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potẽtia incõmẽsurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum, sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42.



huius libri, Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) *a* faciunt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi EF. Quia vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub AC, CB, nempe rectangulo IG; *b* estque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, *c* iam ante demonstratum est. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.



a 23. *decimi.*

b 1. *sexti.*

c 43 *decimi*

DEFINITIONES SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit

ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis

IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi cõmẽſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato recta linea sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato recta linea sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commmensurabile antecedit incommensurabile est; vt manifestum est.

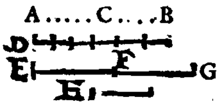
RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine exposita lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

xLviij. xLij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico FG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, *a* commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles; *c* Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum



a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 37. decimi.

dratum

dratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* ac proinde rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

a 9. *decimi.*

PROBL. 14. PROPOS. 50.

XLIX. XLiij.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6 huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG. eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, *b* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ FG, EF, commenſurabiles, ſaltẽ potentia: Oſtenſa eſt autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis eſt. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *c* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *d* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propoſ. 14 huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis;

b 6. *decimi*

c 9. *decimi.*

d 37. *dec.*

estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod faciendum erat.

l. xliv.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

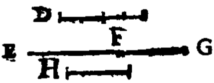
INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non sit quadratus, non habebit ad quadratum

1. xvij. AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum

A . . . . C . . . . . B

I . . . .



sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5, non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt quam numeri quadrati. Exposita

a 6. decimi. iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. *a* Erunt ergo quadrata ex D & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilia; atque adeo & lineæ D, E, F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus

b 9. decimi. ad numerum quadratum; *b* erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll fiat vt AB, ad

c 6. decimi. AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. *c* Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad

d 9. decimi. numerum quadratum; *d* erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles.

biles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; *a* Atque idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG. Non habet autem I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; *b* ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14 huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

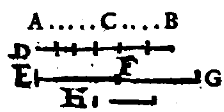
a 37. decimi.
b 9. dec.

PROBL. 16. PROPOS. 52.

LI.
XLV.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49 prop. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. prop. per conuersionẽ rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratum. *c* Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, & H. Itaque cum maius nomen EF, plus possit, quã minus FG, qua- c 9. dec.



drato rectæ H,sibi longitudine incommensurabilis,& maius rursus nomen EF,longitudine commensurabile expositæ Rationali D;erit EG,per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

LII. XLVI.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris AC,CB,vt in præcedenti propos. fiat constructio. vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D,&c. Ostendemus ergo vt in propos. 50 EG, esse ex binis nominibus, Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo,vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse,quam quadratum ex FG: Sit ergo maius,quadrato rectæ H. Quoniam vero,vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis est vt AB,ad CB,ita quadratum ex EF,ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti,rectas EF,& H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF plus possit, quam minus FG,quadrato rectæ H,sibi longitudine incōmensurabilis, & minus nomen FG,longitudine commensurabile expositæ Rationali D,erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

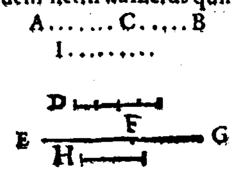
PROBL. 18. PROPOS. 54.

LIII. XLVII.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri

a 30. sept.



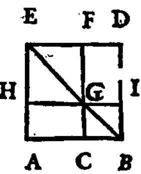
& reli-

& reliqua fiant, ut in propos. 51. ostendemusque ut ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommensurabiles; atque totam EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseque quadratum ex EF, majus, quàm quadratum ex FG. Sit ergo majus quadrato rectæ H. Ostendemus quoque ut in propos. 49. per conversionem rationis, esse ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm igitur AB, ad CB, atque adeò quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaq; cùm majus nomen EF, plus possit, quàm minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, FG, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Invenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat. a 9. dec.

LEMMA.

SI recta linea secta sit utcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta AB, utcunque in C. Describatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; utrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehensum eisdem partibus: At verò rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim b ut HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quàm AG, ad CI; erit ut FH, ad DG, ita AG, ad CI: c Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque ut FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atq; adeò DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.



b 1. sexti.
c 43. primi

a 1. sexti. RVRSVS quia est, *a* ut AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI: erit ut AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit ut AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

xliiij. xlviij. SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum sub AG, GE, contentum, per 2. lemma propos. 17. hujus lib. applicetur deficiens figura quadrata; *b* in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur jam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. *c* Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, conjunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum *M*, ut latera *M*O, *M*P, unam rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera *M*Q, *M*R, unam rectam QR, ut demonstratum est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem *M*, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo *L*N, cùm rectæ O*M*, *M*P, rectis Q*M*, *M*R, æquales sint; ideoq; & tota OP, toti QR, *d* sit autem OP, ipsis SN, LT, & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN: ideoq; quadratum.

b 18. decimi.

c 14. secundi.

d 34. primi.

QVO-

QVONIAM verò rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF, *a* erit ut AG, ad EF, ita EF, ad GE, *b* Ac propterea & ut AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia; Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est TM, ipsi EK. *c* Cùm ergo ipsi TM, æquale sit MS, *d* & ipsi EK, æquale sit FC, erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atq; adeò recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 17. *sexti.*
b 1. *sexti.*
c 43. *primi.*
d 36. *primi.*

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, *e* erit & tota AE, utrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cùm sit majus nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. hujus lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt.

e 16. *decimi.*
f 10. *decimi.*

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG, & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, ejus dimidia: erunt ex scholio propos. 14. hujus lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem habentia, quam AG, EF, *h* incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. *i* Igitur rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, k cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

g 1. *sexti.*
h 10. *decimi.*
i 10. *decimi.*
k 1 *sexti.*
l 37. *sexti.*

THEOR. 38. PROPOS. 56.

lix.
xlix.

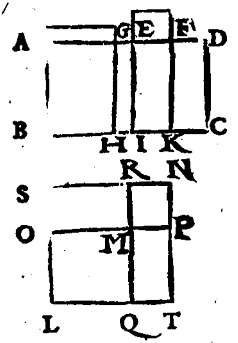
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium

tium

tium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositæ *AB*, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, ut in antecedenti propositione. Quo facto demonstrabimus similiter, ut ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda A*D*. Dico jam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB;
a 13. decimi. *a* erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine commensurabiles;
b 16. decimi. *b* erit quoque tota AE, utrique ipsarum commensurabilis. Quare cùm AE, majus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cùm ergo utraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at verò A*E*, Rationali AB, longitudine incommensurabilis;
c 14. decimi. *c* erit utraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam *A*B, AG, quàm AB, GE, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. Igitur
d 22. decimi. *d* rectangula AH, GI, Media sunt, proptereaque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



QVIA verò A*G*, GE, longitudine sunt commensurabiles;
e 10. decimi. *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, *M*N, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi verò AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, ejus dimidia; erunt per scholium propos. 14. hujus lib. *A*G, EF, longitudine incommensurabiles: *A*c proinde *A*H, EK, eandem
f 10. decimi. habentia proportionem cum ipsis, *f* incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis *A*H, & EK, æqualia, incommensurabilia
g 10. decimi. sunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommen-
a 1. sexti. surabiles, *a* cùm eandem habeant proportionem, quam LM,

MT.

MT. Cùm ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solùm commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensurabilis; *b* erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cùm EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. *c* Quare EK, rectangulum, Rationale est; Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, Rationaleq; continentes; *d* atque adeò OP, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

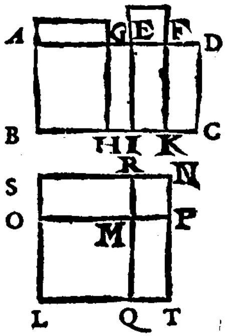
b 12. *decimi.*
c 20. *decimi.*
d 38. *decimi.*

THEOR. 39. PROPOS. 57.

I Vj. I.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Mediis secunda. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarũ AE, ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, ut in propos. 55. Similiter ergo, ut ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et ut in antecedenti propos. 56. rectas OM. MP, esse Medias potentia tantùm commensurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam verò ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estq; ED, ipsi AB, Rationali, hoc est ipsi EI, longitudine incommensurabilis; *e* erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia sit ipsius



e 14. *decimi.*

ED, Ra-

ED, Rationalis; & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; a Ac propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Mediis OM, MP, continetur. Itaq; cum OM, MP, Mediæ sint potentia solùm commensurabiles, contineantque spatium Medium; b erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. decimi.

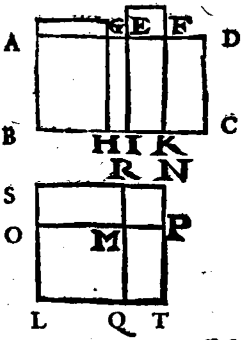
b 22. decimi.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

LVII. 2).

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Major vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, majus nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propos. 55. c Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus jam eodē modo, ut ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Major. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommensurabiles sunt; d erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeò & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia verò AE, majus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; e & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.



c 19. decimi.

d 10. decimi.

e 20. decimi.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidem AB, longitudine incommensurabilis

sura-

surabilis; Et est E F, Rationalis, cùm sit Rationali E D, commensurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. *a* Quare E K, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; sub O M, M P, Medium est. Quocirca cùm O M, M P, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis M T, Medium; *b* Irrationalis erit tota O P, quæ Major nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. decimi.

b 40. decimi.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

L viij. L ii.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipsius A D, majus nomen A E. Sunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus potest, quàm E D, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: & deniq; E D, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali A B Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propos. 55 *c* Erunt igitur rursus A G, G E, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, ut in propos. 55. constabit rectam O P, posse spatium A C. Dico O P, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propos. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles. Et quia A E, majus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali A B; erunt A E, A B, Rationales potentia tantùm commensurabiles. *d* Quare rectangulum A I, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem A I, æquale composito ex quadratis L M, M N. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia E D, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali A B, cùm sit minus nomen ipsius A D, ex binis nominibus quintæ, erit & E F, ipsius dimidia eidem A B, commensurabilis longitudine, & Rationalis. *e* Quare E K, sub Rationalibus E I, E F, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atq; idcirco & M T, sub O M, M P, contentum Rationale erit, cùm ipsi E K, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M, M P, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum verò M T, sub ipsis contentum, Rationale; *f* Irrationalis erit tota O P: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium cõtinea-

c 19. decimi.

d 22. decimi.

e 20. decimi.

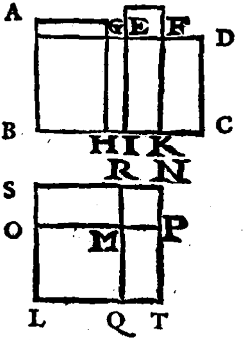
f 41. decimi.

tineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 42. PROPOS. 60.

lix. liij. SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quæ spatium AG, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipsius AD, majus nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commensurabiles, & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis; & denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit commensurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in superioribus, *a* eruntq; AG, GF, longitudine incommensurabiles. Iam verò ostendemus similiter, ut in propos. 55. rectam OP, posse spatium AC. Item ut in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, ut in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine ipsi ED, hæc verò eidem commensurabilis; *b* erunt AE, EF, longitudine incommẽsurabiles. *c* Igitur & AI, EK, incommẽsurabilia sunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis, *e* erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.



a 19. *decimi.*
b 13. *decimi.*
c 10. *decimi.*
d 1. *sexti.*
e 42. *decimi.*

THEOR. 43. PROPOS. 61.

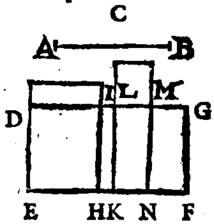
lx. liiij. QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus A*B*, cujus majus nomen AC; *a* & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex *A*C; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex C*B*. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, unà cum rectangulo bis sub AC, C*B*, *b* æqualia sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex *AB*, æquale est, per constructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, quod per quod ipsis LK, GF, parallela agatur, MN: eritque utrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, C*B*, continetur. *c* Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, quòd tota AB, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A*C*, C*B*, Rationalia, & ob id commensurabilia; *d* quorum utrique cùm etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.

a 45. prim

b 4. secundi.



c 37. decimi.

d 16. decimi.

RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solùm potentia commensurabiles, *e* erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeò, & quod bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. hujus lib. Quare LF. applicatum ad LK, Rationalem, *f* facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. *g* Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commensurabiles; *h* Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primã esse,

e 22. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

h 37. decimi.

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. hujus lib. rectangulum sub AC, C*B*, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB; erit quoq; LN, medium proportionale inter DH, IK, atq; adeò *i* cùm rectæ DI, L*M*, IL, eandem rationem habeant, quam D*H*, LN, IK; erit quoq; recta LM, media proportionalis inter DI, IL. k Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quòd AC; CB, ponantur potentia commensurabiles;

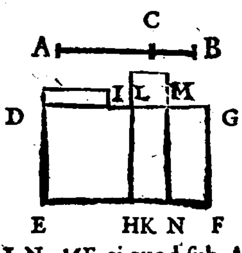
i 1. sexti.

k 17. sexti.

a 10. decimi. erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. *a* Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, majus est, quàm LF, quòd & quadrata ex AC, CB, majora sint, per lemma propos. 39. hujus libri, quàm rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, b 1. sexti. major quàm LG, *b* cùm DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, major est, quàm LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM) dividiturq; DL, ad I, in partes DI, IL, c 18. decimi. longitudine commensurabiles, ut est demonstratum; *c* poterit DL, major plus quàm LG, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, majus nomen plus posse, quàm LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem majus nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo ejus, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

LXj. THEOR. 44. PROPOS. 62.

LV. QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.



SIT ex binis Mediis prima AB, cujus majus nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & utrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Mediis primam AB, componentes *e* Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. *f* Cùm ergo propterea & totum DK, utrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. hujus lib. DK, Medium, quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, *g* erit ejus latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam

d 45. primi

e 38. decimi.

f 16. dec.

g 23. decimi.

niam rectangulum A C, C B, Rationale est, erit & ejus duplum, nempe LF, Rationale, quod cùm applicatum sit ad Rationalem L K, *a* erit ejus latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi DE, commensurabilis longitudine, at DL, longitudine incommensurabilis; *b* erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cùm D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solùm commensurabiles; *c* ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam verò, ut in antecedenti propos. demonstrabimus D L, majus nomen esse, & posse plus, quàm minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cùm ipsius DG, majus nomen DL, plus possit, quàm minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo ejus, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. *decimi.*
b 13. *decimi.*
c 37. *decimi.*

THEOR. 45. PROPOS. 63. lxij.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. lvj.

SIT ex binis Mediis secunda AB, cujus majus nomen A C, *d* & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis secundam AB, componentes, *e* Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipsis æqualia D H, IK, commensurabilia, & Media. *f* Cùm ergo propterea & totum DK, utrique ipsorum D H, IK, sit commensurabile, erit & ex coroll. propos. 24. hujus libri DK, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem DE, *g* erit ejus latitudo D L, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, CB, Medium est; erit & ejus duplum LF, Medium; quod cùm applicatum sit ad Rationalem LK; *h* erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommensurabilis; estque ut AC, ad CB, ita per lemma 3. propositionis 19. hujus libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, *i* erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. *k* Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis

d 45 *primi*
e 39. *decimi.*
f 16. *decimi.*
g 23. *decimi.*
h 13. *decimi.*
i 10. *decimi.*
k 16. *decimi.*

dratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cùm rectæ ipsæ potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est, ejus duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, C B, hoc est, rectangulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum D K, L F, habentes

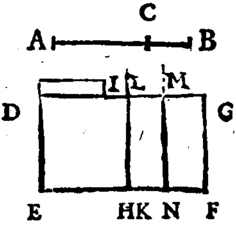
a 10. decimi. *a* longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles;

b 37. decimi. *b* ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam verò ut in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, posseque plus, quàm minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cùm DL, majus nomen plus possit, quàm L G, minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG. Rationali expositæ D E, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo ejus, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstradum.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

LXIIJ.
LVIJ.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT major AB, cujus majus nomen

c 45. primi

A C, *c* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia *A* C, CB, Majorem

d 45. decimi.

A B, componentes, *d* potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum verò sub ipsis, Medium; erit quoq; DK, composito, ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At verò *L* F, duplum ejus quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem DE, est applicatum;

e 21. decimi. *e* erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cùm L F, Medium sit applicatum ad Rationalem LK,

f 23. decimi. *f* erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, D*E*, longitudine incommensurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L*G*, illa quidem ipsi D E, commensurabilis sit longitndine: hæc verò eidem D E, longitudine incommensurabilis;

g 13. decimi. *g* incommensurabiles e-les erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantùm commensurabiles; *a* ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam verò ut in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, BC, incommensurabilia sunt, quòd rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia, *b* atque adeò & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam verò ut in propos. 61. ostendimus, DL, major est, quàm LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod dividit ipsam DL, ad I. in partes longitudinine incommensurabiles, *c* poterit DL, plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cùm & ipsa DL, (majus nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta, Quadratum ergo Majoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. *decimi.*

b 10. *decimi.*

c 19. *decimi.*

THEOR. 47. PROPOS. 65.

LXIV. LVIIJ.

QUADRATUM eius, quæ Rationale ac Medium potest ad Rationalem applicatum, latitudinem ~~facit~~ ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cujus maius nomen AC, *d* & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, *e* potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atquè adeò ipsius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, *f* facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, *g* facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa verò longitudine incommensurabilis, *h* erunt DL, MG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG. Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, *i* Ac propterea DG, est ex binis nominibus

d 45 *primi*

e 41. *decimi.*

f 23. *decimi.*

g 21. *decimi.*

h 13. *decimi.*

i 37. *decimi.*

 nibus

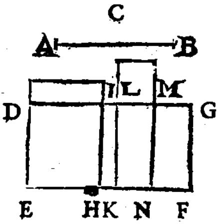
nibus. Iam verò, ut in propoſ. 61. oſtendemus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex L M, & ut in antecedenti propoſ. DL, majus nomen eſſe, atq; poſſe plus, quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cùm & minus nomen L G, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali D E, longitudine commenſurabile; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur ejus, quæ Rationale ac Medium poteſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

LXV. LIX.

THEOR. 48 PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

a 45. primi. SIT bina Media potens recta AB, cujus majus nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico D G, eſſe ex binis nominibus ſextam. Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniam rectæ A C, CB, componentes ipſam A B, potentem bina



b 42. decimi. Media, b potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum; erit tam DK, illi compoſito æquale, quàm LF, rectangulo bis ſub AC, CB, æquale Medium. Et quia Media

c 23. decimi. DK, LF, applicata ſunt ad Rationalem DE; c erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles.

d 42. decimi. d Quoniam verò compoſitum ex quadratis rectarum A C, CB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB; eidem verò rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub A C,

e 13. decimi. CB, cùm hoc illius ſit duplum; e Erit compoſitum ex dictis quadratis, hoc eſt, DK, incommenſurabile rectangulo bis ſub A C, BC; hoc eſt, ipſi LF; Ac propterea rectæ DL, L G, eandem ratio-

f 10. decimi. nem habentes cum D K, LF, f longitudine incommenſurabiles ſunt. Rationales ergo ſunt DL, L G, potentia ſolùm commenſu-

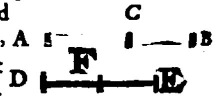
g 37. decimi. rabiles; g Ac proinde DG, eſt ex binis nominibus. Iam verò, ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus DL, eſſe maius nomen, poſſeq; plus quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cùm ergo oſtenſum ſit neutram ipſarum DL, LG, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſexta. Quadratum igitur ejus, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Quod erat oſtendendum.

THEOR.

THEOR. 49. PROPOS. 67. lxvj. lx.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, divisa in sua nomina, quorum majus A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B. *a* Fiat enim ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. *b* Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; *c* erit & D F, ipsi A C, & F B, ipsi C B, longitudine commensurabilis: *d* Sunt autem A C, C B, cùm sint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; *e* erunt & D F, F E, potentia solùm commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; *f* Ac propterea D E, ex binis est nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incōmensurabilis. Si quidem A C, plus potest quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; *g* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; *h* erit & D F, eidem Rationali longitudine cōmensurabilis, cùm utraq;, & Rationalis, & D F, eidē A C, sit cōmensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibus tertia; *i* erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.



a 12. sexti.
b 19. quinti.
c 10. decimi.
d 37. decimi.
e 10. decimi.
f 37. decimi.
g 15. decimi.
h 12. decimi.
i 12. decimi.

AT si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; *k* poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

k 15. decimi.

quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantùm;) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui comensurabilis est, nullo modo concludemus. Nec enim sequitur, si AC, majus nomen longitudine sit commensurabile exposita Rationali; & DF, majus nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non utraque, nempe exposita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At verò DF, potentia tantùm, ex hypothesi. Immò verò, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, ut DE, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SI Tenim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, divisa in sua nomina ad C, sitq; ei commensurabilis potentiæ tantùm DE, quam quidem, ut in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, divisamq; esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, ut DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit utraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumq; maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali exposita commensurabilis longitudine. a Quare & inter se logitudine commensubiles erunt. Et quoniam est ut AC, ad DF, ita AB, ad DE, b erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo utraq; AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; utraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim utrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali exposita, atq; adeò & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

a 12. decimi.

b 10. decimi.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quàm CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE, c poterit quoque DF, plus quàm FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita ut AC, plus possit

c 15 decimi.

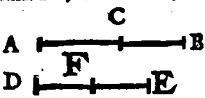
possit, quam CB, *quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis*; a *poterit quoque* DF, *plus quam* FE, *quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt* AC, *ad* CB, *ita* DF, *ad* FE. *Igitur ex defin. erit* DE, *ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi* AB. a 13. dec.

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, *eadem ordine ipsi* AB, *quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.*

THEOR. 50. PROPOS. 68. LXVIJ. LXJ.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis *Medijs* AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus sitq; ei recta DE, longitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; *d* erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, *Mediæ*. *e* Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, *Mediæ* sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; *g* erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint *Mediæ*, erunt DF, FE, *Mediæ* potentia tantum cõmensurabiles; *h* Atque idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub *A*C, C*B* ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratũ ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub *A*C, CB, ad rectangulũ sub DF, FE. Cõmensurabile est autem quadratum ex *A*C, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. *i* Igitur & rectangulum sub *A*G, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC. CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; *k* atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum sub AC, C*B*, fuerit Medium, ita vt *A*B, sit ex binis Medijs secunda: erit



b 12. sexti.
c 19. quinti.
d 10. decimi.
e 24. decimi.
f 38. decimi.
g 10. decimi.
h 38. vel 39. dec.
i 10. decimi.
k 18. decimi.

& rectangulum sub DF,FD,ei commensurabile,Medium, ex corollario propos.24. huius lib. *a* Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs secunda. Quare ei,quæ ex binis Medijs longitudine commensurabilis,&c. Quod demonstrandum erat.

a 39. decimi,

SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Medijs esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine : in demonstratione dicamus vbique : commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

LXVIIJ.
LXIJ.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB. diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC.CB, ad partes DF,FE, eandem habeant rationem, quam

tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potētia tantum; *b* erunt quoq; tam AC,DF, quā CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, *c* erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC,CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC,CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita cōpositū ex quadratis rectarū AC,CB, ad cōpositū ex quadratis rectarum DF,FE. Cōmēsurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *d* Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB. commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF,FE. *e* Est autem compositum illud Rationale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. *f* Igitur & hoc Rationale est.

b 10. decimi.
c 22. sexti.
d 10. decimi.
e 40. decimi.
f 9. def.

Rursus quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex *AC*, ad rectangulum sub *AC*, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub *AC*, *CB*; ad rectangulum sub DF, FE; Est autem quadratum ex *AC*, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ *AC*, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum sub *AC*, *CB*, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. *b* Est autem rectangulum sub *AC*, *CB*, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad C*B*, ita DF, ad FE, *c* suntque *AC*, CB, potentia incommensurabiles, cum componant *M*aiorem *A*B; *d* Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaque cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, *M*edium, vt ostensum est; *e* erit tota *D*E, *M*aior. *M*aiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

a 10. *decimi.*
b 40. *decimi.*
c 40. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 40. *dec.*

THEOR. 52. PROPOS. 70.

LXIX. LXIIJ.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT (repetita figura antecedentis propos.) recta *A*B, potens Rationale ac *M*edium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & *D*E, esse potentem Rationale ac *M*edium. Constructis enim iisdem quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum *AC*, CB, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum *D*F, FE: *f* Est autem illud compositum *M*ediũ, cum rectæ *AC*, *CB*, componant ipsam *AB*, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, *M*edium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub *AC*, CB, *g* quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE, atque adeo & rectangulum sub D*F*, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis *M*edium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratum est; *h* erit tota DE, Rationale ac *M*edium potens, Igitur Rationale ac *M*edium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

f 41. *decimi.*
g 41. *decimi.*
h 41. *decimi.*

THEOR.

LXX.
LXIV.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & DE, esse bina Media potententem. Constructis enim ijsdem, quæ supra, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum AB, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse commensurabile rectangulo sub DF, FE. a Cum ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremo b quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, DB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest; Est autem composito ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo sub AC, CB, probauimus commensurabile rectangulum sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.

a 42. decimi.
b 43. decimi
c 42. decimi.

LXXI.
LXV.

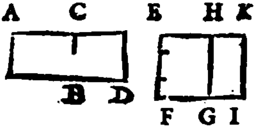
THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medinm componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Tationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus:

Æqua-

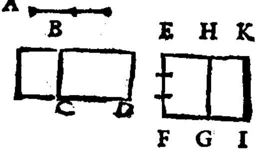
Æquale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi
æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo maius. *a* & ex- a 45. *primi.*
posita Rationali EF, applicetur ad eum rectangulum EG, æquale
ipsi *AB*, & ad HG, aliud HI, æquale ipsi *CD*, vt totum EI, toti AD,
sit æquale. Et quoniam AB, Rationale est, & CD, Medium, erit quo-
que EG, Rationale & HI, Medium; quæ cum applicentur ad Ratio-
nalem EF, *b* erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensu- b 21. *decimi.*
rabilis; At vero HK. Rationalis, & eidem EF, longitudine incom-
mensurabilis. Rursus quia EG, HI, incommensurabilia sunt, vt con- c 23. *decimi.*
stat ex definitionibus; quod EG, Rationale sit, at HI, Irrationale,
nempe Medium; *d* erunt EH, HK, eandem cum illis habentes ra- d 10. *decimi.*
tionem, incommensurabiles longitu-
dine. Rationales ergo sunt EH, HK,



potentia solum commensurabiles; *e*
Ac propterea EK, ex binis nominibus e 37. *decimi.*
est. Et quoniam maius ponitur AB,
quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam
HK, *f* cum EH, HK, eandem rationem habeant, quam EG, HI. Iam
vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato re- f 1. *sexti.*
ctæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si
plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis
longitudine; erit & EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum
EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Ra-
tionali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationa-
li EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD,
compositum ex Rationali AB, & Medio CD, *g* Irrationalis est, quæ
ex binis nominibus appellatur. g 55. *decimi.*

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitu-
dine incommensurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex de-
fin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensura-
bile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub
Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spa-
tium AD, *h* Irrationalis est, quæ vocatur *Maior*. h 58. *decimi.*

SIT deinde AB, minus quam CD, & eadem construantur, quæ
prius. Erit ergo, vt prius EK, ex binis nominibus & EH, ipsi EF,
longitudine commensurabilis. Et



quia AB, minus est quam CD, hoc est,
EG, quam HI; erit quoque recta EH,
minor quam HK. Poterit igitur rursus
HK, maius nomen ipsius EK, quæ est
ex binis nominibus, plus quam EH,
minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis,
vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quam EH, quadrato re-
ctæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nomini-
bus

bus secunda; cũ EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atque adeo & spatium AD, ex Rationali AB, & *Medio* CD, compositum, *a* Irrationalis est, quæ dicitur *ex binis Mediis prima*.

a 56. *decimi.* SI vero HK, plus possit quam EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & spatium

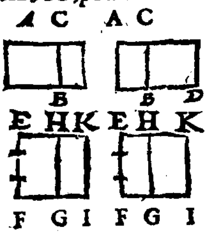
b 59 *decimi* AD, *b* Irrationalis est, quæ Rationale & *Medium* potens appellatur. Si igitur Rationale & *Medium* componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR 55. PROPOS. 73.

I. xxij.
I. xvj.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo *Media* incommensurabilia AB, CD. Dico rectam quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia quod non ponitur. Sit primo majus, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur *Media*, & incommẽsurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. *c* Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationẽ, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicenturque ad Rationalem EF,) *d* Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; *e* ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK, poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, con-



c 10. *decimi.*
d 23. *decimi.*
e 37. *decimi.*

temgentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, a Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. a 57. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, b Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD si AB, minus sit, quam CD, non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quopropter si duo Media inter se commensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, d, latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decimi.

ET quadratũ eius, quæ est ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus secundam. e 62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. dec.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, g latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decimi.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus sextam. i 66. dec.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus, & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis se-

diis se-

dijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continet propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52 53, & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quænam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex bis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia vel quarta, vel quinta, vel sexta.

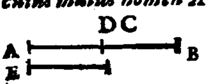
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit.

SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis sumatur E.



Dico E, mediam esse secundum Analogiam Arithmeticam inter AC, CB: & esse quoq; ex binis nominibus. Quoniam enim AD, superat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, superat ipsam CB. eadem recta DB; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commmensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

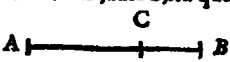
PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

Lxxiij.
Lxviij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniã enim per lẽma 3. prop. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; *a* erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (Cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur cõpositũ ex quadratis rectarũ AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC. Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. *decimi.*
b 16. *decimi.*
c 7. *secundi.*

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, *sint Rationales potentia tantum commensurabiles;*

a 37. decimi.

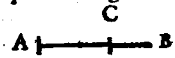
a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB. *& minus* AC. *Aufertur igitur* AC, *minus nomen ex maiori nomine* AB, *vt relinquatur Apotome* BC.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

LXXIV. LXIX.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commen-
b 16. decimi. surabilia, *b* atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub *AB*, *AC*, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub *AB*, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub



c 7. dec. AB, *AC*. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex *BC*; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex
d 17. decimi. *B*C, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *d* Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt: Existente ergo rectangulo bis sub AB, *AC*, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta *BC*, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationali est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; a *erit composita ex ipsis Irrationalis,* a 38. decimi. *quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.*

THEOR. 58. PROPOS. 76. LXXV. LXX.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media *A*B, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi A*B*, sitque rectangulum sub A*B*, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A*B*, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; *b* erit b 16. decimi. & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumq; ipsorum *M*edium, quod & rectæ A*B*, AC, Mediæ ponantur.

Igitur & compositum ex ipsis vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub A*B*, AC, *M*edium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub A*B*, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. *M*edium. *c* Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub A*B*, AC, vna cum c 7. secundi. quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam *M*edium est, quadrato ex BC. *d* *M*edium autem non superat *M*edium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo d 27. decimi. Irrationale, & ipsa recta *B*C, Irrationalis. Vocetur autem *M*ediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis *M*edijs secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à *M*edia *M*edia auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum commensurabiles, continentque Medium; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.

a 39. decimi.

LXXVj. LXXj. THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquã BC, Irrationalem esse. Quoniam enim cõpositum ex quadratis

rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum, bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; *b* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *c* Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 10. decimi.
c 7. secundi.
d 10. defin.

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: c erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ

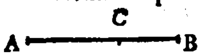
c 40. decimi.

lis, qua vocatur Maior, eiusque maius nomen AB, minus autem AC. *Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori* AB, *vt relinquatur Minor* BC.

THEOR. 60. PROPOS. 78. lxxvij.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabi- lxxij. lis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; *a* erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. *b* Est autem composi- a 10. *defin.* tum ex quadratis rectarum AB, AC, æ- b 7. *secundi.*



quale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis sub c 17. *decimi.* AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB. AC, Rationale sit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali d 10. *def.* Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB, AC, *sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; e erit composita ex ipsis Irrationalis,* c 41 *dec.*

quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

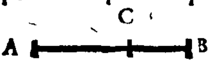
THEOR. 61. PROPOS. 79.

lxxviij.
lxxiij.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis Dico reliquam BC, esse Irrationalem.

a 7. secundi.



a Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub, AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. *b* Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

b 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

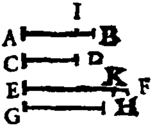
QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabilèque composito ex quadratis ipsarum, erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEM-

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



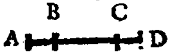
COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habent.

THEOR 62. PROPOS. 80.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti. LXXIX. LXXIV.

SIT Apotome AB, congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles Eodē modo



erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis

rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum
a 7. secundi. AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; a quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositum ex quadratis rectarum AD, BD, superat rectangulum bis
b 7. secundi. sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; b cum & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt
c 16. dec. earum quadrata Rationalia, & commensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commensurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatiũ
d 22. decimi. Rationale est d Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectan-
e 27. decimi. gulum bis sub AD, BD. e Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectãgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

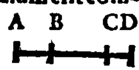
LXXX.
LXXV.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat AC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quiá BC, Media est potentia solùm ipsi AC, commensurabilis; *a* erit AC, Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, ut in propos. præcedenti ostensum est; Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. hujus lib. spatium Rationale; quod utrumque sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, & commensurabilia. *b* Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atque adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. *c* Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 24. decimi.



b 16. decimi.

c 27. decimi.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIÆ Apotomæ secundæ una tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. LXXXj. LXXVj.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantùm commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit medium. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia

BD. Media toti AD, potentia tantùm commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, unà cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemq; modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cùm enim BC, Media ponatur, c erit & AC, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia.

a 45. primi.

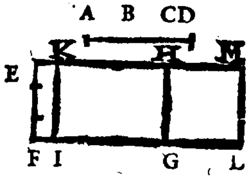
b 7. sec.

c 24. decimi.

Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est utrique eorum; atq; idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. hujus lib. d Igitur & EG, quod illi composito æquale est, Medium est; quod

d 16. decimi.

e 23. decimi.



cùm applicetur ad Rationalem EF, e erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. hujus lib. & ejus duplum, nempe KG, Medium: quod cùm applicetur ad Rationalem KI, f erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estq; ut AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ut ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. hujus lib. g erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG, (cùm enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia. h Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est ejus duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. docuimus. i Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt. Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi EH, k erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens toti:

f 23. decimi.

g 10. decimi.

h 74. decimi.

i 10. decimi.

k 74. decimi.

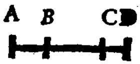
quod

quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere. *a* demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum. a 80. decimi.

THEOR. 65. PROPOS. 83. LXXXII. LXXVII.

MINORI una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens *BD*, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, *BD*, Rationale, at rectangulum sub AD, *BD*, Medium. Quoniam igitur, ut in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. hujus libri; quod utrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub *AC*, *BC*, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. hujus lib. ejus duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, *BD*. *b* Quare unum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergò una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum. b 27. decimi.



THEOR. 66. PROPOS. 84. LXXXIII. LXXVIII.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq;

ciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum verò sub AC, BC, Rationale. Dico ipsi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum

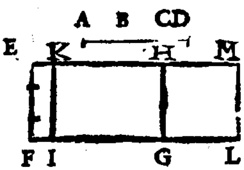
AD, BD, Medium, rectangulum verò sub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur ut in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, ut in propos. 81. demonstravimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cùm utrumque sit Medium. *a* Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi AB, alia recta, quàm BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 27. decimi.

LXXXIV. LXXIX.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia BD, toti AD, potentia incommensurabilis, ita ut & compositum ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium sit, & rectangulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam EG, illi æquale, Medium.

dium. *a* Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & ejus duplum KG, Medium. *b* Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cùm illud hujus sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC: *c* erit quoque KG, eidem composito, hoc est ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, *d* longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solùm commensurabilis ipsi EH; *e* erit EK, Apotome, & ei congruens, KH. Non aliter ostendemus EK, esse Aptomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ una tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. *f* Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. *decimi.* b 23. *decimi.* c 14. *decimi.* d 10. *decimi.* e 74. *decimi.* f 80. *decimi.*

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IV.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta,

SI

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

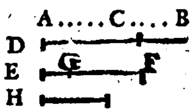
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex majoribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitionibus est perspicuum.

LXXXV. LXXX. PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, ut in scholio 2. propos. 29. hujus libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque EF; cùm commensurabilis sit Rationali, D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. hujus lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico E G, esse primam Apotomen.



a 6. dec. *a* Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis; erit & GF, Rationalis. Quia verò AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. b 9. dec. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles; c 74. decimi. *c* atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quàm recta G F, quadrato ex H. Et quia est, ut numerus AB, ad numerum A C, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex G F; erit per conversionem rationis, ut A B, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & qua-

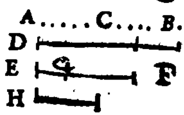
quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; *a* Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali *D*, commensurabilis longitudine: erit EG, ex defin. prima Apotome. Invenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

a 9 decimi.

PROBL. 20. PROPOS. 87. LXXXVI,

INVENIRE secundam Apotomen. LXXXI.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF, eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex *EF*, per coroll. propos. 6. hujus libri. Dico EG, esse secundam Apotomen. Quoniam *b* enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri *A* C, A B, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *c* erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solùm commensurabiles; *d* Ideoque *E* G, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quàm *G*F, quadrato ex H. Quoniam ergo est ut AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & convertendo, ut AB, ad A*C*, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex *G* F. Ostendemus jam ut in antecedenti propos. rectam H, ipsi *E* F, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota *E*F, plus possit, quàm congruens *G*F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens *GF*, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit *E G*, ex defin. secunda Apotome. Invenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.



b 6. decimi.

c 9. dec.

d 71. decimi.

PRO*B*L. 21. PROPOS. 88. LXXXVII,

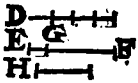
INVENIRE tertiam Apotomen. LXXXII.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, C*B*, ut in propositione 86. sumatur alius numerus I, ut in propositione 51. hujus libri docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat ut I, ad *A B*, ita quadratum ex D, ad quadratum a 6. decimi. tum ex EF, per coroll. propos. 6. hujus libri. *a* Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quàm

b 9. dec. numeri quadrati; *b* erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario propos. 6. hujus lib. Dico EG, esse tertiam

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .



c 6. dec. Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex EF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc sit commensurabilis, ut demonstravimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri

d 9. dec. quadrati; *d* Erunt rectæ EF, GF, longitudine incõmensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea cùm ex EF, auferatur GF, potentia illi solùm commen-

e 74. decimi. surabilis; *e* reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, ut I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo ut I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF; Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF,

f 9. dec. proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit jam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H; Ostendemusque, ut in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus possit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Invenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

LXXXVIII

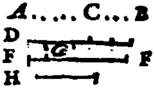
PROBL. 22. PROPOS. 89.

LXXXIII.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. hujus lib.

jus lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, ut ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, erit per conversionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H,



Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Invenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 9. decimi.

PROBL. 23. PROPOS. 90. LXXXIX. LXXXIV.

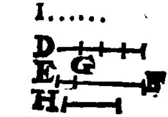
INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS (repetita figura proxime antecedentis propositionis) duobus numeris AC, CB, ut in propositione præcedenti fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos. 86. ostendemus, per conversionem rationis esse ut AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, ut in propos. antecedenti rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine: erit ex defin. EG, quinta Apotome. Invenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

PROBL. 24. PROPOS. 91. XC. LXXXV.

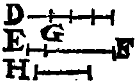
INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, ut in propos. 54. ita ut AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, ut ibi D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in



propos. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommmensurabiles: Atque adeo neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit jam EF, plus

A..... C....B
I......



quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali *D*; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Invenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inveniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

a 49. decimi. *SI T invenienda exempli gratia, prima Aptome*, a *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cujus majus nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantũ cõmensurabiles: erunt etiã AC, DC,*

b 74. decimi. *Rationales potentia tantũ cõmensurabiles.* b *Est ergo AD, Apotome.*

Et quia AB, plus potest, quam CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali exposita longitudine commensurabilis, ex definitione ejus, quæ ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotomæ primæ, AD; prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inveniemus, ut ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta, sextam, si minora nomina ex majoribus auferamus.

xcj.
PROBL. 68. PROPOS. 92.

lxxxvj. SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATUR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit Ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ; Rationales potentia solum commensurabiles: & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB: & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE. deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. hujus libr. Et quia AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ si-

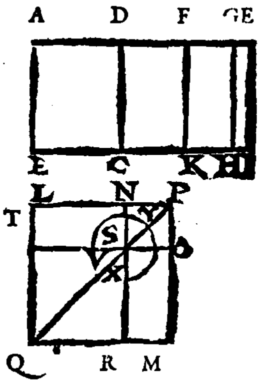
c 18. dec. bi longitudine commensurabilis: *c* erunt rectæ AG, GE, lon-

d 16. dec. gitudine commensurabiles; *d* Ac propterea & utraque toti AE, longi-

longitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine commensurabilis. *a* Igitur & utraque AG, GE, ipsi AB, longitudine est commensurabilis: atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in HI, *b* erit utrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia utraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis; *c* essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commensurabiles;) *d* erit etiam utraque ipsarum DE, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam utraq; DF, FE, Rationali DF, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, *e* erit utrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

a 12. decimi.

b 20. dec.



c 12. decimi.

d 14. decimi.

e 22. decimi.

Iam vero ipsi AH, *f* fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. *g* Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, ut vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE, *h* erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; *i* Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem: erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. hujus lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: *k* Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis ~~LM, NO~~. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale: Ac propterea recta TS, potest spatium AC Dico TS, Apotomen esse.

f 14. secundi.

g 26. sexti.

h 17. sexti.

i 1. sexti.

k 36. decimi.

Quoniam enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia: & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM,

 NO, Rati-

NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum unum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommensurabiles sunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

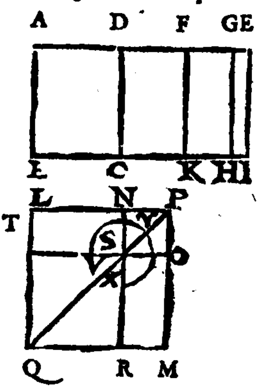
a 11. *sexti.* *b* 10. *decimi.* *c* 74. *decimi.*

THEOR. 69. PROPOS. 93.

XCII. LXXXVIJ.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali *AB*, & Apotoma secunda *AD*. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotome secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia construantur, ut in propositione præcedenti. *d* Eruntque rursus, ut in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine commensurabi es: *e* Ac propterea & utraque toti AE, longitudine commensurabilis. Est autem AE, Rationali *AB*, longitudine incomensurabilis; (Si enim commensurabilis esset ipsi *AB*, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; *f* essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles. *g* Igitur & utraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem utraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia solum commensurabiles; *h* Atque idcirco rectangulum utrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia utraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; & ponitur DE, Rationali



b 18. *decimi.* *e* 16. *decimi.* *f* 12. *decimi.* *g* 14. *decimi.* *h* 22. *decimi.*

nali A B, longitudine commensurabilis; erit quoq; ut in scholio proposit. 12. hujus lib. ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis utraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. *a* Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, ut in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam. a *20. decimi.*

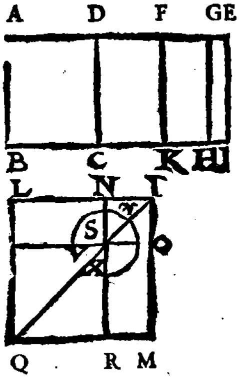
QVONIAM enim AG GE, longitudine sunt commensurabiles, *b* erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, cõmensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (ostensa enim sunt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea q; Medio NO, incommensurabile; *c* erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; *d* erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. b *10. decimi.* c *10. decimi.* d *75. decimi.*

THEOR. 70. PROPOS. 94.

LXXXXIII LXXXVIII.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali AB, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique AE, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ si longitudine commensurabiles. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, ut in propos. 92. eruntque rursus, ut ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; *e* Ac propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabilis erit. Est autẽ A E, posita commensurabilis longitudine Rationali AB, *f* Igitur & utraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cum ergo utraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales potentia solum commensurabiles: e *16. dec.* f *14. decimi.*



a 22. decimi.

a Ac propterea utrum; rectangulum AG, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoq; utraq; DF, FE, ipsi DF, longitudine commensurabilis existens, b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis sit Rationalis; erunt tam AB, DE, quã AB, GE. Rationales potentia tantum commensurabiles; c atque propterea utrumq; rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter jam demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

b 14. decimi.

c 22. decimi.

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles sunt, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, commensurabilis est lõgitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. hujus lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; e ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc est illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium: (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, ut constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus: erit LO, Medium.) f erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia. &c. Quod erat demonstrandum.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 76. decimi.

XCIV. LXXXIX. THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC. sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, ut prius. a Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; b erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis, c erit DI, atque adeo & ejus dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; d incommensurabilia erunt AG, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse minorem.

a 10. decimi.
b 20. decimi.
c 22. decimi.
d 10. decimi.

QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Idem quia F, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Deniq; quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; e erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. decimi.

THEOR. 72. PROPOS. 69.

XCV.
XC.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proxime antecedente) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantū commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit quam DE, quadrato rectæ si longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, ut prius. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propos. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incōmensurabilis est Rationali AB, ut in propos. 93. diximus; a erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; b erit DI, atq; idcirco & ejus dimidium FI, Rationale. Rursus erunt, ut in præcedenti propos. AH, GI, incommensurabilia; poteritque, ut ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

a 22. decimi.
b 20. decimi

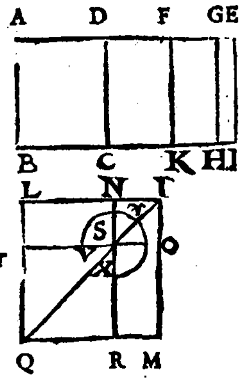
QVONIAM enim ostensum est AI. Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstravimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cum illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, ut in propos. antecedenti est demonstratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectangulum vero sub ipsis, Rationale; c erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

c 78. decimi.

THEOR. 73 PROPOS. 97.

xcvj.
xcj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, ut supra. Erunt ergo rursus, ut in propos. 95. AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia

tam

tam AE, quam DE. Rationalis est, & Rationali AE, longitudine incommensurabilis; *a* erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propos. 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles; *b* Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commensurabilia sint, *c* erit FI, ipsi AI, incommensurabile. Iam vero demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22. decimi.
b 10. decimi.
c 14. decimi.

QVONIAM enim AI, Medium ostendimus; erit & compositum ex quadratis LM, NO rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium ostensum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO, SO, propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Denique TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; *d* erit reliqua TS, ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

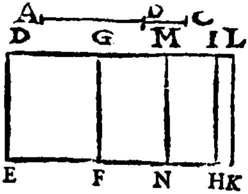
d 79. decimi.

THEOR. 74. PROPOS. 98. XCVII. xcvij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; *e* & ad Rationalem DE, applicetur rectāgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinē faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primā. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt votum DK, æquale sit composito ex quadratis rectarum AC, BC. *f* Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; sin auferantur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque ado diuisa GL, bifariam

e 45. primi
f 7. secundi



riam in M, ductaque MN. ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC,BC. Et quoniam AC,BC, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC,BC, Rationalia; ideoque commensurabilia.

a 16. decimi. *a* Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC,BC, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE,

b 21. decimi. *b* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF;

c 23. decimi. *c* erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale & GK, Medium, hoc est, Irrationale incommensurabilia sunt:

d 10. decimi. *d* erunt rectæ DL,GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles;

e 74. dec. *e* Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse.

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC,CB, hoc est, MK, Medium est proportionale inter quadrata rectarum AC,BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt.

f 17. sexti. *f* Quare rectangulum sub DI,IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH,IK, commensurabilia sunt,

g 10. decimi. *g* erunt rectæ DI,IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI,IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata, atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis;

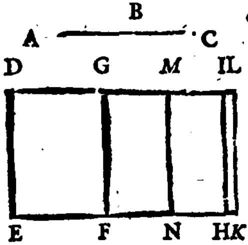
h 10. decimi. *h* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cũ sit ostensum DG, esse Apotomen, & totã DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotome ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

x cviij. xciij. THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT

SIT *Mediæ* Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC: & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, *Mediæ* sunt potentia commensurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media & commensurabilia; *b* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & *Medium* per coroll. prop. 14. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, *c* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale, ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Ratonalem DE, *d* erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, *Medium*, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; *f* Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum congruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE. erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo *Mediæ* Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.



a 45. primi.
b 16. decimi.
c 23. dec.
d 21. decimi.
e 10. decimi.
f 27. decimi.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

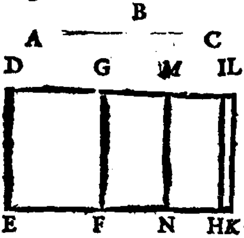
xcix.
xciv.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT *Mediæ* Apotome secunda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, contineatque *Medium*: *g* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apo-

g 45. decimi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iam, vt in
a 23. decimi. propos. præcedenti DK, Medium esse, a atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id & eius duplum GK,
b 23. dec. b erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propos. 29. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub
c 10. decimi. AC, BC, c erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC.
d 16. decimi. d Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi
e 10. decimi. GK. e Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationes. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum com-
f 74. decimi. mensurabiles; f Ac proinde reliqua DG, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.



e. xcv.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero sub AC,
g 45. primi. BC, Medium: g & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igi-
h 21. decimi. tur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; h erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine com-

ne cõmensurabilis. Item quia rectangulũ sub AC, BC, atque adeo & eius duplũ GL, *Medium* est; *a* eritq; GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe *Medium* incommensurabilia sunt: *b* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potẽtia tantum cõmensurabiles: *c* Ac propterea reliqua LG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum: *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis: erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur *Minoris* ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *decimi.* b 10. *decimi.* c 74. *decimi.* d 10. *dec.* e 19. *decimi.*

THEOR. 78. PROPOS. 102. CI. XCVj.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali *Medium* totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: rectangulum vero sub ijsdem AC, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ supra. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeo & illi æquale DK, Medium est; *g* erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; *h* erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, *Medium* seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales

f 45 *primi.* g 23. *decimi.* h 21. *decimi.* i 10. *decimi.*

nales ostensæ. Rationales ergo sunt DI, GL, potentia solum commensurabiles: a Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est: Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedēti propos. demonstrauimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

a 74. decimi.

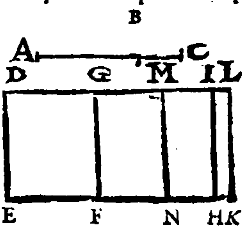
cij. xcvij.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. b Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato, ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quam rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est; c Erit tam DL, quam GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum GK, commensurabilia: d Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi DK, incommensurabile: e proptereaque rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles. f Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter vt propos. 101. totam DL, plus posse quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commensurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta: Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

b 45. primi.



c 23. decimi.

d 14. decimi.

e 10. decimi.

f 74. decimi.

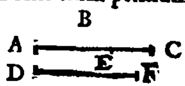
THEOR.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

ciij.
xcviij.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabili: & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commmensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AE; *a* Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles: *c* Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, EF, commensurabiles longitudine: Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles: erunt quoque ex ijs, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostẽsæ; *d* reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis: Rationali: erit eodem modo EF, Rationali longitudine cõmensurabilis: Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; *g* erit quoq; neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



a 12. *sexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 74. *decimi.*
e 15. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 14. *decimi.*

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, *h* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi logitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

h 15. *dec.*

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius libr. de

lineis

lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum si recta DE, *commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis) &* DE, *Apotomen esse; At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali exposita, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, &* DF, *eidem AC, longitudine commensurabilis est: sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero* DF, *potentia tantum ex hypothesi. Imo vero, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt* DE, *illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.*

SIT *enim AB, prima* Apotome, *secunda, quarta vel quinta, eique congruens BC. & sit* DE, *ipsi* AB, *potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem* EF, *& partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF.* Dico *nulla ratione* DE, *Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam* AC, *tota, quam tota* DF, *ex definitione Apotoma prima, Rationali exposita commensurabilis longitudine;* a *atque ideo & inter se longitudine commensurabiles erunt*

a 12. decimi.

AC, & DF. *Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE:* b *erunt quoque AB, &* DE, *longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim* DE, *ipsi* AB, *potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE,* Apotome *prima est.* Eodem *modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta.* Esset *enim vtraque congruens* BC, EF, *ex defin. longitudine commensurabilis Rationali exposita, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB,* DE, *inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.*

b 10. decimi.

SEMPER *tamen verum est, si* AB, *est* Apotome *prima, vel secunda, vel tertia, rectam* DE, *qua ipsi* AB, *potentia solum est commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit* AC, *plus quam* BC, *quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt* AC, *ad* BC, *ita DF, ad* EF,

c 15. deci.

c *poterit quoque* DF, *plus quam* EF, *quadrato recta longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit* DE, Apotome *prima vel secunda, vel tertia.* Eodem *modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt* AC, *plus possit, quam* BC, *quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis: erit quoque* DE, *Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quamuis ordine non eadem ipsi AB; quia rursus, cum sit vt* AC, *ad* BC, *ita* DE, *ad* EF, d *poterit quoque* DF, *plus quam* EF, *quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit* AB, Apotome *quarta vel quinta, vel sexta.*

d 15. decimi.

IN

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

CIV.
XCIX.

Recta linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia siue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen esse, & ipsi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita B, C, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque BD, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia AC, BC, mediæ sunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; Et permutando vt AC, F, ad BC, ita D, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniam enim est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; *f* erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. *h* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. sexti.
b 12. quinti.
c 10. decimi.
d 24. decimi.
e 75. vel 76. dec.
f 10. decimi.
g 75. decimi.
h 76. decimi.

cv. cxvj. c. THEOR. 82. PROPOS. 106.

Recta linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

Sint Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratatis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub ijsdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiant enim eadem quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC. ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, a erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. b Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectanguo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium: Erit quoque rectangulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, suntque AC, BC, potentia incommensurabiles; c erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quamobrem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, Medium; d erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

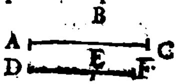
a 22. sexti.
b 10. dec.
c 10. sexti.
d 77. dec.

cvj. cxvij. cj. THEOR. 83. PROPOS. 107.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

Sit

Sit recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt BC, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, ostendemus, vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectæ DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; a erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



a 78. decimi.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. cij.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

Sit recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF; Sunt autem compositum ex quadratis re-

ctarum AC,BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius libr. compositum ex quadratis rectarum DF,EF,& rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF,EF, potentia sint incommensurabiles & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque
a 79. decimi. composito ex ipsarum quadratis; *a* erit D,E, quæ cum *Medio Medium* totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum *Medio*, &c. Quod erat ostendendum.

cviiij. ciij.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus, sit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectã, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF,
b 45. primi. *b* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi GD. ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD.
c 21. decimi. Rationale est; *c* erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est
d 32. decimi. *d* erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis,
e 13. decimi. *e* erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensu-
f 74. dec. rabiles *f* propterea que reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK plus potest quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine; cum tota EK, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH,
h 92. decimi. Apotome prima. Quare recta potens spatium EG, contentum sub Rationali & Apotoma prima EH, hoc est, spatium AB, sibi æquale, *g* Apotome est. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; cum tota EK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF, erit ex definitione EH; Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale,

a Mi-a Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat. a 95. dec.

THEOR 86. PROPOS. 110. CIX. CIX.

Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel *Mediæ* Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construantur quæ supra. Et quia EI. Medio AD, æquale. *Medium* est; *b* erit EK. Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale est; *c* erit HK, Rationalis ipsi EF, longitudine commensurabilis. Itaque cum HK, quidem ipsi EF, sit commensurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommensurabilis; *d* erunt HK; EK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum cõmensurabiles; Ac proinde reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, *f* Mediæ est *A*potome prima. Si vero EK; plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensarabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, *g* est ea, quæ cum Rationali *M*edium totum efficit. Quamobrem rationali à *Me*dio detracto. Quod ostendendum erat.

b 32. decimi. c 21. decimi. d 13. decimi. e 74. dec. f 93. dec. g 96. decimi.

THEOR. 87. PROPOS. 111. CX. CV.

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti. reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, *M*edium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Me-

Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem quæ supra; quoniam EI, HI, Medijs

a 13. dec. AD, CD, æqualia Media sunt, a erunt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine commensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur in-

b 10. dec. commensurabilia; b erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Ratio-

c 74. dec. nales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine cmõensurabilis, cum neutra ipsarũ EK, HK, Rationali EF, lõgitudine cõmensurabilis sit ostensa; erit ex def. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æ-

d 94. dec. quale; d Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus, erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quamobrem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e est ea, quæ cum Medio

e 97. dec. Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

cxi.
cvi.

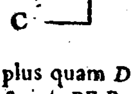
THEOR. 88. PROPOS. 112.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest A, aliqua ex binis nomini-

f 45. primi. bus. Exposita autem Rationali BC, f applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur

g 98. dec. A, Apotome est: g erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; h erit latitudo ea-



h 61. dec. dem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex def. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF,

FD,

FD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa BF, Rationali BC, longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; a erunt quoque BE, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, ſit longitudine commenſurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BF, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE, Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles) b erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt FE, DE, potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, c Apotome eſt; Atque ideo irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

a 12. dec.

b 14. dec.

c 74. dec.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum d latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. d 23. dec.

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatam, e latitudinem efficit Apotomen primam. e 98. dec.

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatam, f latitudinem efficit Apotomen ſecundam. f 99. dec.

Quadratum vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, g latitudinem efficit Apotomen tertiam. g 110. dec.

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, h latitudinem efficit Apotomen quartam. h 101. dec.

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, i latitudinem efficit Apotomen quintam. i 102. dec.

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, k latitudinem efficit Apotomen ſextam. k 103. dec.

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales: inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & à Media, & inter ſe differre.

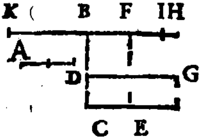
Quoniam vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipſam ſequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quamobrem cũ & tám illæ, quam hæ à media differant: efficitur, Rationali quapiam exposita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se differentes, de quibus hactenus disputauimus: Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens,

cxij. o.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



a 45 primi.

Sit Rationalis A, & ex binis nominibus CB, cuius maius nomen CB, a & ad EC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico BF, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione, & adhuc Apotomen BF, esse ordine eandem ipsi BC, ex binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rursus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex *A*, atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis IH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG, *b* erit ut BC, ad DC, ita LG, hoc est, sibi æqualis *BH*, ad BF. Et dividendo ut BD, ad DC, ita GF, ad FB: Est autem BD, major quam DC. Igitur & IF, major est quàm FB: Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; *c* & fiat ut HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo ut HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualem *BF*, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse ut HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque ut BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius *BC*, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. *d* Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.

a 45. *primi*
b 14. *vel* 16. *sexti.*
c 12. *sexti.*
d 10. *decimi.*

Rursus quia est ut HF, ad BF, ad FK, ad BK, *e* erunt quoque HF, FK, antecedentes simul nempe tota HK, ad *BF*, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, ut FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare ut HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. proposf. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum, *f* facit DG, latitudinem Rationalem ipsi DC, longitudine incommensurabilem; Erit quoque H*B*, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse ut BD, ad DL, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quōque ut *B*D, ad D, C, ita HK, ad FK. *g* Igitur ut quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex *D*C, (quod rectæ BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus.) *h* Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit ut quadratum ex HK, ad quadratum ex FK, ita recta HK, ad BK. *i* Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. hujus lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa *FK*, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles, *k* erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

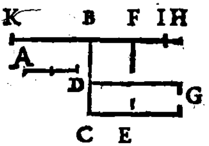
e 12. *quinti.*
f 12. *decimi*
g 22. *sexti.*
h 10. *decimi.*
i 10. *decimi.*
k 74. *decimi.*

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totam parti BK, longitudine commensurabilem, *l* erunt propterea &

l 16. *decimi.*

BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoq; BK, ex scholio propos. 12. hujus lib eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse ut BD, ad CD, ita FK, ad BK; & permutando ut BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles;

a 10. decimi. a Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



Item quia demõstravimus esse ut BD, ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK. in eadem ratione cum BD, DC, nominib. ipsius BC, quæ est ex binis nominib. Quod est tertium.

Postremo vel BD, plus potest, quàm DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit ut BD, ad DC, ita FK, ad BK;

b 15. decimi. b poterit quoq; FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. hujus lib. demonstravimus. Si vero DC, sit Rationali commensurabilis longitudine: erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum

c 14. decimi. BD, DC, sit Rationali longitudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, ut constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

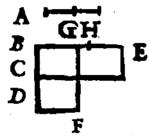
THEOR. 39. PROPOS. 114.

cxiij. o.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

Sit Ra-

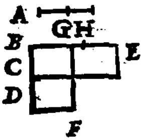
Sit Rationalis A, & Apotome B, C, cui congruat C D, a & ad a 45. primi
BG, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione: & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. b Applicetur enim rursus ad BD, totã, b 45. primi
rectangulum BF, æquale, eidem quadrato ex A, h. e. ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; c erit ut BE, ad BG, c 14. vel
ità BD, ad BC; & per conversionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, 16. sext.
ad CD. Secetur quoq; EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex iis, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus: ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad H G, ex GE, ablatam; erit quoq; BH, reliqua ipsius BE, ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BG, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia vero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantum commensurabiles. d Erunt quoq; BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac d 10. decimi.
propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habent rationem cum quadratis ex BH, HE, ut demõstravimus, e longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota e 10. decimi.
BH, longitudine commensurabilis existens parti GH, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. hujus lib. At vero cum BD, Rationalis sit, nempe majus nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale, f erit latitudo BG, Rationalis commen- f 21. decimi.
surabilis, longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. hujus lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commensurabilis, Rationalis Rationales ergo sunt BH, HE, potentia solum commensurabiles: g Ac propterea BE, ex bi- g 37. decimi.
nis nominibus est. Quod est primum.



Quoniam vero ostendimus esse BH, ad HE, ut BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, ut HE, ad CD: Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis: h erit quo- h 10. decimi.
que

que HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum.

Immo & in eadem proportione, cum demonstratum sit esse BH, in EH, ut BD, ad CD. Quod est tertium.



Postremo vel BD, plus potest quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, *a* poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoq; BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. hujus lib. Si vero CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si vero neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; *b* erit quoque neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt. Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. decimi.
b 14. decimi.

CXIV. THEOR. 91. PROPOS. 115.

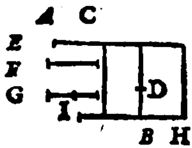
Si spatium contineatur sub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

Contineatur spatium AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cujus nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione nempe CD, ad DB, ut CE, ad AE. Possit autem recta F, spatium AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, *c* applicetur ad GB, quæ ex binis nominibus rectangulum CH, æquale quadrato

c 45. primi

ex G.

ex G, *a* Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, ut CD, ad DB; atq; adeo ut CE, AE, & permutando ut tota HI, ad totã CE, ita ablata BI, ad ablatã AE, a 113. decimi.



b Erit ergo & reliqua BH, ad reliquã AC, ut tota HI, ad totã CE, b 19. quinti.
c Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quod utraq;
HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD. *d* Igitur & BH, c 12. decimi.
ipsi AC. Longitudine est commensurabilis, *e* Atque idcirco & HC,
ipsi BA, commensurabile erit, *f* cum sit ut HB, ad AC, ita HC, ad BA: d 10. decimi.
Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale Rationale est. Igitur & BA,
illi commensurabile, Rationale erit, proptereaque & recta F, ipsum e 10. decimi.
BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub
Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensu- f 1. sexti.
rabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta
linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

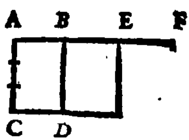
Ex hoc manifestum est, fieri, posse ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

In proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR 92. PROPOS. 116. cxv. cvij.

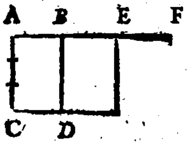
A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.



Sit Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarũ nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius libr. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum,

tentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. hujus lib. Possit ipsum recta *BE*, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. hujus lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum; *a* latitudinem faciat Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A G, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, ut constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. hujus lib. At verò quadratum hujus Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat A *B*, latitudinem Mediam; perspicuum est Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem ejus quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

a 23. decimi.



Quod si compleatur rectangulum D E; erit & hoc contentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi *B* E, Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à B E, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ invenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

cxviij. THEOR. 93. PROPOS. 117.

vij.

Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum *AB*CD, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommensurabilem esse lateri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; *b* ac propterea AC, A B, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad AB, proportionem, quam numerus *EF*, ad numerum G; sintque numeri *E F*, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est ut AC, ad AB, ita numerus *E F*, ad numerum G, Erit quoq; ut quadratum

b 5. dec.

dratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, *a* (Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex C: Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam possit dividi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum seipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; *b* eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum, ostensus est enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, *c* inter se primi sunt; & EF, ostensus est par: erit G, impar. (Si enim par esset, metiretur utrumque EF, & C, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Dividatur jam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, *d* & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G: & quadruplus quadrati ex EH: qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G: & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

a 20. sext. & 11. octavi.

b 29. noni.

c 24. septimi.

d 11. oct.

B A

D C

E . . . H . . . F

G - - - -

Aliter. Sit si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB: habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione: atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum quadrati ex AB: sit autem ut quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ut in priori demonstratione diximus: erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est unitas, atque adeo & quadratus ex ea, unitas: erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, ut jam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus

duplus est quadratus ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cum ergo & G, seipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum C: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

a 14. oct.

A B

D C

E. . H. . E

G----

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate nempe 2. quadratus non sit, erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati reliqui vero 2. 8. 32 non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum, (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diameto ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

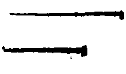
b 1. noni. c 24. oct. d 9. decimi.

Hoc etiam theorema aliter demonstrabimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. & in scholio propos. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam cuius intelligentia ex seqentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti posset. Verũ quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens: visum est eam paucis explicare assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenietur & aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sunt enim rectæ A C, longitudine inter se incõmensurabiles, inter quas media proportionalis sit B.

A B C



Quoniam igitur ex coroll. propos. 40. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem

milem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; *a* erunt rectilineæ illæ figuræ super *A*, & B, incommensurabiles. a 10. decimi.

Rursus *b* quoniam circuli, quorum diametri A B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; positæ proportionem habent, quam rectæ *A*, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. *c* Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quā rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommensurabiles sunt longitudine, *d* Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt. b 2. duodecimi. c 11. quinti d 10. decimi.

Iam vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, B, *e* habebunt pyramides atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; *f* incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata. e 5. 6. vel 7. duodecimi. f 10. decimi.

Quod si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, *g* habebunt hujusmodi coni, & cylindri eandem proportionalem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, *h* Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inventæ sunt igitur non solum lineæ & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, sive solida incommensurabilia. Quod est propositum. g 11. duodecimi. h 10. decimi.

Eadem autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, *i* ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, k atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, ut perspicuum est. i 10. decimi. k 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POstquam Euclides in prioribus sex libris aliunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, usurpavit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in lib. 10. deinde exposuit, ut constructio, atq; natura quinq; corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci. Nunc tandem aggreditur in hoc lib. 11. eam partem Geometriæ, quæ corpora, sive solida considerat, proprioq; vocabulo Stereometria est appellata.

Explicat autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum sive corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem ita tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, sive corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adijcit, superficies vocatur, ut in primo libro diximus.

Porro

Porro quemadmodum Mathematicis, ut recte intelligamus lineam, percipiunt, ut imaginemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hæc enim describit vestigium quoddam lōgum tantum, hoc est, lineam, præterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hæc enim describit vestigium longum & latum duntaxat; longum quidē propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum qui in transversum est factus: carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoq;, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquā æqualiter elevari, sive in transversum moveri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem quæ longa & lata existit: profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum sive corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentariis, qui in sphæram Ioannis de Sacro Bosco, conscripsimus, à nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

II.

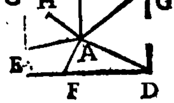
Solidi autem extremum, est superficies.

Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, sive corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

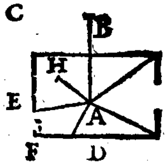
III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

Vt linea recta A B, plano D, insistens, ita ut B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cum rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A.

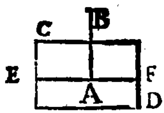


Hac enim ratione fiet, ut A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta *D* A, ad H, cum angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque



G deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Et propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD, itaq; quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, qui ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipsamq; tangentibus, satis est, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, ut perspicuum fiet ex propos. 4. hujus lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia si duæ lineæ componant unam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatque rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam unam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atq; idcirco non esse rectam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumverti queat ita ut punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihil minus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos & æquales conficiat.



Quod si eadnm AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. hujus lib.

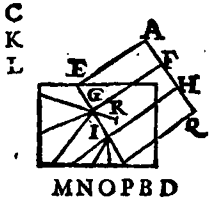
IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Insistat planum AB, plano CD, ita ut linea AQ, sit in subli-

mi

mi, hoc est, extra planum subjectum CD, ut EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio E B, quæ ut demonstrabitur propos. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I, ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ

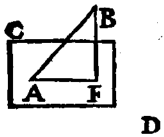


FGHI. ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad plannm CD, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient utrobiq; à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD; insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planũ aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem ductas rectas esse ad reliquum planum.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea & adiuncta comprehensus.

Insistat recta A B, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B, sit extra planum in sublimi, punctũ vero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad



A, adiungatur recta EA; eritq; necessario angulus BAE, acutus a cũ in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores; & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ

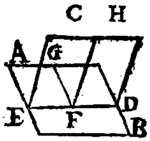
a 17. primi

AB, ad dictum planum CD; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ *AB*, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus *BAE*.

VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

Plano namque A*B*, insistat planum CD, ita ut pars ad C, sit in sublimi extra planum *A*B, & pars ad D, in ipso plano A*B*, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit *D*E. Si igitur ad D*E*, communem sectionem ex ejus puncto F, duæ perpendiculares ducantur; *F*G, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus G*F*H, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



Interdum Geometræ angulum CF*H*, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum *A*B, sive is acutus sit, sive rectus obtususve: quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem unius plani ad alterum ostendat, ut Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem elevationem unius plani supra aliud quam inclinationem unius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo unius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu elevationem unius plani supra alterum, generaliter dici consuevit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in utroque plano ad aliquod unum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cujusmodi est angulus GFH, sive is rectus sit, sive acutus, sive obtusus.

VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

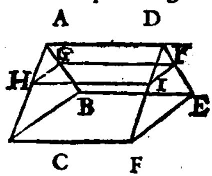
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

Intel-

Intellige, in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc est, sive ad dextram, sive ad sinistram: & sive sursum, sive deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cujus fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dextram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cujus Basis B C F E, auferaturque fastigium ACHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana G B E K, H C F I, non convenire inter se, si ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F; producantur nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH, KI, conveniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est ut in nullam partem producta inter se conveniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistrã, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum atq; deorsum. Itaq; duo plana quæcunq; vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conveniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neq; unquam conveniunt, si videlicet in diversis sint planis & in transversum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 3. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano; Hic autem simpliciter dicitur, quæ nunquam conveniunt.



IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuisset Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis; Satius tamen esse judicavit ut brevitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

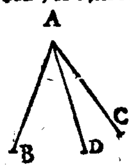
Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora similia, ex præcedenti definitione circumscribantur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur ejusmodi figuræ solidæ non solùm similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo hujusmodi solida neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus, ex eorundem vero æqualitate laterum proportionalium æqualitas, ut in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent: ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

Duæ lineæ in eodē existentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt efficiunt angulum planum, ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus *BAC*, contentus duabus lineis *AB*, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, sive corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adjungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes nō debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ A*B*, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est extra planum, in quo sunt A *B*, AC, jam non componetur angulus planis totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A. tres plani consistent anguli *BA*D, DAC, CA*B*, qui, ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idē dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.



ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

Hæc

Hæc definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. cum enim saltem tres lineæ in eodem nõ existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim *BAD*, in plano est, in quo rectæ *AB*, AD, & angulus *DAC*, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CA*B*, in plano, in quo rectæ AC, A*B*, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continẽtur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si sese penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

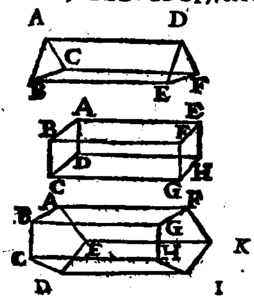
Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.

VIDELICET figuræ solidæ à planis A*B*C, A*B*CD, A*B*CDE, ad puncta D, E, F, constitutæ appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana quibus Pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum pũctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin triangula sunt ABD, ACD, BCD, Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: pētagonæ deniq; ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

Figuræ scilicet solidæ quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF, vel quadrangula ABCD, EFGH; vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. parallelogramma vero ACFD, ABED, CBGF, vel ABFE, ADHE, CDHG, CBGF, vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BC HG, dicūtur prismata. Itaque prisma nil aliud erit quam columna quædam laterata æqualis craßitudinis, cuius bases appositæ sunt æquales similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrāma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vnoquoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana adversa parallela æqualia similiaque triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi quod Euclides & in prop. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autē animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua

Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide; fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Imo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cum illa baſin habentis; altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli ſphæra inveniri poterit hoc etiam modo.

Sphæra eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

Cicero in libro de Vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὴς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

XV.

Axis autem ſphæræ; eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

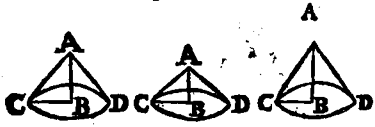
Hæ tres definitiones non egent expoſitione, dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrũ ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

XVIII.

Conus eſt: quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circum aſſumpta figura.

Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur. Orthogonius erit conus; Si vero minor, Amblygonius. Si vero maior, Oxygonius.

Vt ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ cõtinetur duabus ſuperficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit: & curua alia eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



Quod ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videl. angulus prope verticẽ A, rectus eſt. Cum enim latera

AB, BC, ponãtur æqualia, *a* erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescẽs latus AB, minus fuerit circumducto *BC*, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; *b* erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cũ hi duo æquipolleãt vni recto, propterea quod angulus A*B*C, ponitur rect⁹, erit BAC, semirecto maior: Similiter BAD, maior erit semirecto: atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC, *c* erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus *BAD*, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

a 5. *primi.*
b 18. *primi.*
c 18. *primi.*

XIX.

Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

Vt in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens *AB*.

XX.

Basis vero coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

Nimirum circulus, qui describitur ab altero latere rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

Quoniam vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin. Non autem inclinatum, cuius àxis ad basim rectus non est: placuit ex Appollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto; con-

cto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousq; ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter sese aptatis, quarum vtraq; in infinitũ augetur, nimirũ recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

Verticem ipsius manens punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

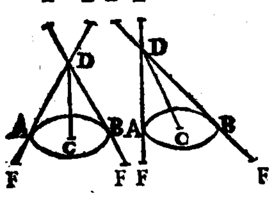
Basim, circulum ipsum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

Sit circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D, iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad pũcta EF. Si igitur recta linea DB, feratur eousque circuli AB, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à

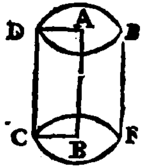


quo cœpit moueri: describit superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D, Axem rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam DB, sola describit. Coni verticem punctum

ctum D. Axem DC. Basim AB, circulum, quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum; Sin minus Scalenum.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumassumpta figura.



Veluti si rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quiescens AB, circumuoluatur, donec integrum expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, describunt; & altera curua, eaque connexa, quā latus CD, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in supetiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur descripti.

Quales sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositis descripti.

Euclides porro solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim, atque de hoc solum in lib. 12. disputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris simus propositurі in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visū est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuerse, vt complectitur tam rectum quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter se se æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorum terminos

ex ea-ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cæpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur: quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

Cylindrus est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

Cylindri bases sunt circuli ipsi.

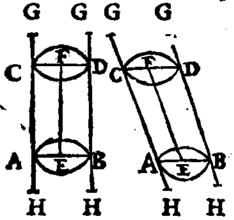
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam cylindri superficiem describere antea diximus.

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent,

Sint duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra EF, & diametri æquidistantes quoque AB, CD; Iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si



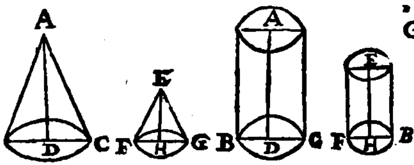
igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorum semper æquidistantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cæperunt, describetur à linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram AB, DC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD, Axem rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

Recte

Recte Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus,& basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundum profunditatem,seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC,EFG; Item duo cylindri; in conis autem Axes AD,EH,& basium diametri BC,FG,similiter & in cylindris. Itaque si fuerit,vt axis AD,ad axem EH,ita BC, diametri basis ad FG, diametrum basis,dicentur tam coni,quam cylindri similes inter se,quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt,quam secundum profunditatem,vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proporionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni,nec non rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD,ad EH,ita BA, ad FG; Sit autem vt BC, ad,FG, *a* ita dimidia BD ad dimidiam FH: erit quoque vt AD,ad EH,ita DB, ad HF: & permutando vt AD,

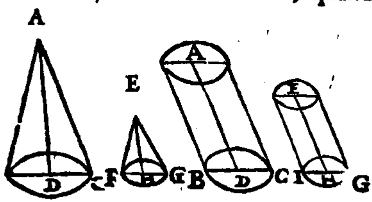


a 15. quinti.

ad DB,ita EH,ad HE. Quare tam in triangulis,quam in rectangulis latera,circum æquales angulos,nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula,& rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem, *b* propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem,& circum æquales angulos latera proportionalia,æquiangula sunt, *c* ideoque latera omnia circa angulos æquales habẽt proportionalia atq; adeo inter se similia existũt: Rectangula vero, *d* eo quod reliqua duo latera, duobus lateribus AD, DB,sunt æqualia,opposita oppositis,ac propterea eandem cum his proportionem habent.

b 6. sexti.
c 5. sexti.
d 34. primi.

Quod si coni vel cylindri fuerint inclinati,(de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes,& diametri basium erunt proportionales,angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim



coni inclinati,similiter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD,EH, & basium diametri BC,FG, similiter & in cylindris

Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationũ ADB, FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se & cylindri quoque inter sese similes quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum couersiones conos, & cylindros efficerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hæc sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymeo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidẽ prop. 15. Tetraedri vero prop. 13. Octaedri deinde prop. 14 Dodecaedri autẽ prop. 17 Iscosaedri deniq; prop. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporũ intelligẽtur. In plano enim difficillimũ est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles,

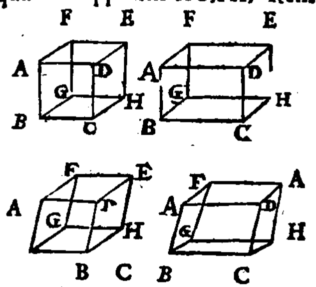
les, quibus ea quilibet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari poteſt vt demonſtrabimus ad finem lib. 13.

Quoniam vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporum regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit parallelepipedum, quidq; ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

Parallelepipedũ eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerſo, parallelæ ſunt contenta.

Veluti ſolida figura cõprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſitæ AC, FH, Item DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa, quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.



Sunt autem tot parallelepipedorum genera quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud, cubus reſpondebitque quadrato in planis figuris: ſi autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedũ altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedũ illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogrãma, quæ ex aduerſo æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera; vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ circum quam deſcribitur.

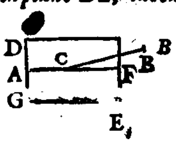
Non eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ cum interdum figura exterior plures interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

Verum duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibuſque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

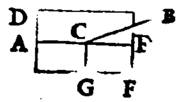
Sit enim ſi fieri poteſt, recta linea AB, *pars quidem* AC, *in ſubiecto plano* DE, *pars vero* CB. *in ſublimi, ita vt omnia puncta partis* AC, *in plano* DE, *iaceant puncta, vero omnia partis* CB, *ſupra planum* DE, *exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano* DE, *ipſi* AB, *recta linea continua quadam recta linea in directum poſita, nempe* CF. *Quare obrem duæ rectæ* AB, AF, *commune habent ſegmentum* AC. *Quod eſt abſurdum, vt in pronunciato* 10. *lib.* 1. *demonſtrauimus. Recta igitur linea pars quadam non eſt in ſubiecto plano, quadam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.*



SCHOLIVM.

Hæc eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, indirectum & continuum poſitam. Qui enim concedit rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari

dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respōdēdum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ rectè, & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F. erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam idipsum Geometrice, in plano videlicet DE, ipsi AC, dare posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat AB, esse quoque rectam, eiusque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG, & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione, b erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.



a 11. primi.

b 14. pri.

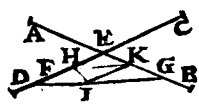
Nunc sit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam in vno existere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omnem in vno est plano.

Rectæ lineæ AB, CD, se muto secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quidem nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra: Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra: quod fieri non posse, iam supra c demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse; pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel



c 1. vndecimi.

contra. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FH, KG, *in uno concedatur esse plano pars vero* EHK, *in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum* FE, GE, *partes quidem* FH, GK, *in uno plano, partes autem* HE, KE, *in sublimi vel contra. Quæ omnia absurda sunt,*

a 1 undecimi.

a *ut est demonstratum. Quare triangulum* EFG, *in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.*

b 1. undecimi.

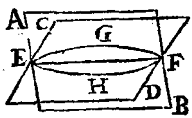
Quia vero, in quo plano est triangulum EFG, *in eodem existunt eius latera* EF, EG: *In quo autem sunt rectæ* EF, EG: b *in eodem sunt rectæ totæ* CD, AB, *ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ* AB, CD, *in uno plano in quo nimirum triangulum* EFG, *consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.*

iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

Secent se mutuo plana AB, CD, *sitque communis eorum sectio* EF. *Dico* EF *esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano* AB, *recta* EGF, *& in plano* CD, *recta* EHF. *Rectæ igitur* EGF, EHF, *cum eosdẽ habeant terminos* E, *&* F, *superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio* EF, *recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat demonstrandum.*



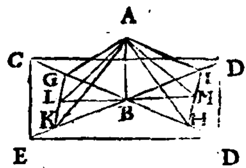
Aliter. Secent se rursus plana AB, CD, *sintque termini sectionis communis* E, *&* F, *puncta quæ connectantur recta* EF. *Si igitur recta* EF, *in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero* EF, *recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur* EGF, *concludent rursus duæ rectæ* EF, EGF, *superficiem, cum eosdem habeant terminos* E, *&* F. *Si denique recta* EF, *in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta* EGF; *includent iterum duæ rectæ* EF, EGF, *superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta* EF, *in vtroque plano* AB, CD; *atque adeo communis eorum sectio est.*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus,

bus in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

Recta linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; a erunt ipsa in uno plano, quod sit CEDF. a 2. vndecimi.
Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectos GK, IH, in punctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; b & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi æquales. c erunt Bases GK, HI, inter se, & anguli BGK, BIH, inter se quoque æquales. b 15. primi. c 4. primi.



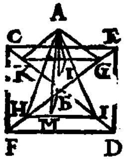
Rursus d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. e Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. d 15. primi. e 26 primi.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, f erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. f 4. primi.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi æquales. g 8. pri.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM: & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus: h erunt quoque bases AL, AM, æquales. h 4. primi.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis: i erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt ex defin. 10 lib. 1 Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademque i 8. primi.



ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta, GI, & KH, ducta sint, dummodo recta GI, KH, iungãtur: vel certæ literæ disponantur, vt prius, quẽadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CE, DF, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

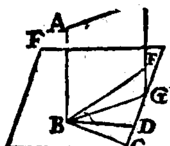
Insistat recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi eorum sectionè, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. a *Cum enim qualibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi.* b *Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario productæ se mutuo secabunt.* c *Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD;* d *erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta BG, quæ ipsam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BG, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.*

a 2. vndecimi.

b 2. vndecimi.

c 3. vndecimi.

d 4. vndecimi.

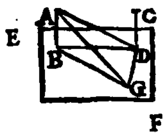


THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB; æquales, nempe recti; a erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

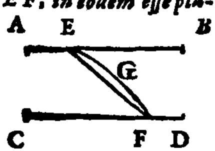


a 4. primi.
b 8. primi.
c 3. undecimi.
d 2. undecimi.
e 20. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

In parallelis AB, CD, sumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet jam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, f quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent, quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF, Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



f 3. undecimi.

SCHOLIVM.

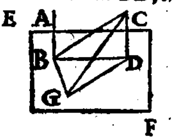
Hæc eadem propoſito vera eſt, etiamſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, ut manifeſtum eſt ex demonſtratione.

viii. **THEOR. 8. PROPOS. 8.**

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB, CD: ſitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim BD, in plano, EF, erit per defin. 3. huius lib. angulus

a 29 primi

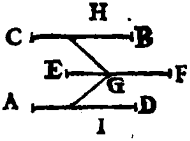


CDB, rectus: a Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD: ponanturq; æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex conſtructione; & anguli
b 4. primi. *quoque ipſis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti: b Erunt baſes CB, GD, æquales; Rurſus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia ſunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & ba-*
c 8. primi. *ſis eſt communis CH: c Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, ſe mutuo ſecantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, ſecarent ſeſe in B, ob angulum CBD,) ad rectos angulos*
d 4. undecimi. *exiſtent: d ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta AB: e propterea quod*
e 7. undecimi. *rectæ BD, BC, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ AB, CD: cum puncta B, C, D, exiſtant in parallelis AB, CD. Igitur & GB,*
f 4. undecimi. *recta rectæ BA. ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius. lib. Quare cum AB, recta ſit ad rectas BG, BD; f erit quoque AB, recta ad planum per BG. BD, ductum, hoc eſt, ad planum EF. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat oſtendendum.*

ix. **THEOR. 9. PROPOS. 9.**

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem



in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI. in plano parallelarum C, D, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuo in G; a erit a 4. undecimi.
recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, b 8. undecimi.
ductum; b erit quoque AB, ad idem planum recta Similiter cum sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per CH, GI, c 8. undecimi.
ductum c erit etiam CD, recta ad idem planum; d Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ sint ad idem planum per GH, GI, d 8. undecimi.
ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

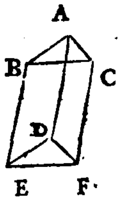
SCHOLIUM.

Data opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF, essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Supervacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas ex se mutuo tangentes sint parallelæ, nō autem in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent.

Sint rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DE, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; e erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. e 33. primi.
Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. f 9. undecimi.
Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidē AD, f erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales; g 33. primi
g Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, ut modo demonstravimus; h Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. h 8. primi.
Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



SCHO-

SCHOLIVM.

Conclusio hujus theorematis vera etiam est, quando priores duæ rectæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, sitque AB, ipsi D E, & A C, ipsi D F, parallela. Dico angulos B A C, E D F, esse æquales. Nam ponantur æquales A B, D E, & A C, D F, ducanturque rectæ B C, E F, quæ aut in una recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in una recta *BF*. Quoniam igitur parallelæ sunt

a 29. primi AB, *DE*, *a* æquales erunt anguli A*B* C, D *E* F, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C,

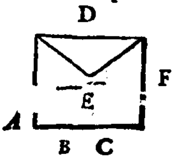
b 32. primi æquales sunt duobus angulis D E F, DF E, trianguli D E F. Igitur anguli quoque reliqui BA*C*, *E* D F, æquales erunt, Quod est propositum.

Non sint jam BC, *EF*, in una recta linea constitutæ. Ductis re-

c 33. primi ctis A D, BE, CF, cum A*B*, D*E*, sint parallelæ & æquales; *c* erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod A C, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem

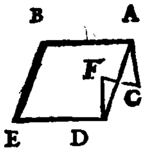
d 30. primi A D, parallelæ existentes & æquales, *d* inter se

e 33. primi parallelæ erunt & æquales; *e* Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt *B*C, EF. Itaq; cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli D EF,



f 8. primi, & basis BC, basi EF, *f* erunt anguli B A C, E D *F*, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.

Cæterum ut conclusio hujus theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas (sive omnes sint in eodem plano sive non) ut tres rectæ A D, B *E*, C F, nulla ratione se mutuo secent, ut ex prima & ultima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.



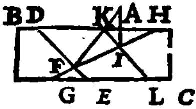
Sunt enim rectæ A B, AC, rectis D E, D F, parallelæ in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non sunt æquales cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo evenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamvis A C, D F, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eas conjungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non conjungunt ad easdem partes, ut vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio hujus theorematis locū non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris servatur.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit à puncto A, in sublimi ad subjectum planum B C, *ducenda perpendicularis. Ducatur in plano* B C, *recta utcunque* D E, a *ad quam ex* A, *deducatur perpendicularis AF: & in plano* B C, *per* F, *ad DE, perpendicularis ducatur* GH, b *ad quam ex A, perpendicularis dimittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum* B C. c *Ducta enim in plano* B C, *per I, ipsi* D E, *parallela KL, cum DF, ad* d *rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione,* e *ac proinde recta ad planum per* FA, FH, *ductum,* f *erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta.* g *Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3 huius lib. angulus* K I A, *rectus; atque adeo* A I, *ad rectos angulos erit duabus KI, IF.* h *Igitur AI, ad planum* BC, *recta erit. A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendũ erat.*



a 12. primi. b 11. primi. c 12. primi. d 31. primi. e 4. undecimi. f 8. undecimi. g 12. undecimi. h 4. undecimi.

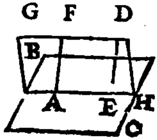
SCHOLIVM.

Quod si quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita ut eadem sit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis, *i* erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad subjectum planum B C, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad utramque DE, GH. i 4. undecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano B C, *ducenda perpendicularis ad datum planum* BC. k *Ex quovis puncto D, in sublimi dimittatur ad planum* B C, *perpendicularis* D E, *quæ si ceciderit in* A, *punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum* E; *extensa recta per* E, *& A,* l *ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallela sint; & DE, recta ad planum BG, ex constructione:* m *erit quoque AF, ad idem planum* BC, *recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.*

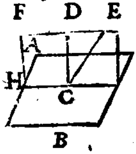


k 11. undecimi. l 31. primi. m 8. undecimi.

THEOR.

xiij. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



Sit datum planum AB. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, a *quæ in uno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.*

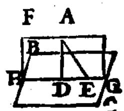
a 2. *undecimi.*

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b *erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod est absurdum.*

b 6. *undecimi.*

SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in sublimi ad subjectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subjectum planum *B* C, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per A D, A E, *c* quæ in uno plano sunt, planum FG, secans planum B C, per rectam G H. Cum igitur A D, A E, rectæ sint ad planum A C, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo AD, E. Quod est absurdum: *d* cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quovis assumpti.



c 2. *undecimi.*

d 17. *primi*

Aliter. Si AD, AE rectæ sunt ad planum *B* C, ipsæ *e* erunt inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto A. Quod est absurdum.

e 6. *undecimi.*

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 24.

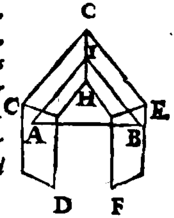
AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

Sit recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se convenient. Conveniant ad partes C, E, f *& faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto utcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia*

f 3. *undecimi.*

igitur

igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. a Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conveniunt. Parallela ergo sunt. Ad qua igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum. a 17. primi

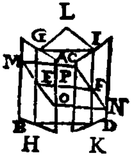


SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrari poterit conversum hujus, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

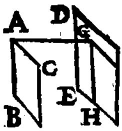
Sint duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea erit recta EF. Dico EF, rectã quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens faciatq; communes sectiones cũ dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. hujus lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quæ rectæ FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, convenient, nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes convenient ad punctum L; *b* cum tota recta HGL, sit in uno plano, nempe in AB, producto: Itẽ tota recta KIL, in uno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo si aliud planum, videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectás communes cũ ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, recta *c* quoque erit EF, ad CD, per ipsas ductum. Quod est propositum. b *1. undecimi.* c *4. undecimi.*



THEOR. 13. PROPOS. 15. XV.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, d enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. e Deinde in plano d 11. *undecimi.* e 31. *primi.*



plano EF, *per* G, *ducantur* GH, GI, *ipsis* DE, DF, *parallel. Quoniam igitur recta* AB, GH, *parallelæ sunt ipsi* DE; a *erunt & AB, GH, inter se parallelæ;* b *Ac proinde anguli* BAG, AGH, *duobus rectis æquales: Est autem* AGH, *rectus ex defin.* 3. *huius lib. Rectus ergo erit & angulus* BAG, *simili argumento concludes, angulum* CAG, *rectum esse. Itaque cum recta* GA, *sit recta duabus* AB, AC, c *recta quoque erit* GA, *ad planum* BC, *per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum* EF, *ex constructione* d *Igitur parallela sunt plana* BC, EF. *Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 9. *undecimi.*
b 29. *primi*
c 4. *undecimi.*
d 14. *undecimi,*

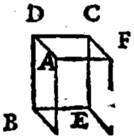
SCHOLIVM.

Quod si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano *E*F. non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si lineæ GH, GI, ponãtur parallelæ rectis AB, AC, ita ut A G, ad planum HI, per GH, GI, ductũ perpendicularis, cadat in G, ostendemus, ut prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas A*B*, AC, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumq; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utcunq; duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, e agatur CE, ipsi DB, parallela. Et in plano *A*C, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi *D*A, parallela. Diço planum EF, per rectas CE, CF, ductum, paralellum esse plano dato A*B*. Cum enim duæ rectæ DB, *D*A, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, f parallela erunt plana AB, *E*F, per ipsas ducta. Quod est propositum.

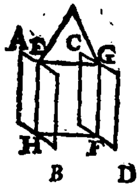


e 31. *primi.*
f 15. *undecimi.*

xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, *parallela plano* EF, *per rectas* EH, GF. *Dico communes sectiones eorum* EH, GE, *esse lineas*



ctas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se convenient, cum sint in plano EF, secante. Conveniant igitur in puncto I, a Quia ergo tota recta HEI, in uno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoque est plano, videlicet in CD, producto: convenient etiam plana AB,CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponatur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. *undecimi.*

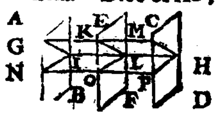
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest converti. Quamvis enim communes sectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano secante sint parallelæ, ut hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm, sunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conveniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theroemati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorũ sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque cõmunes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, *b* erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, *c* atque adeò parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano: *d* erunt plana AB, CD, per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.

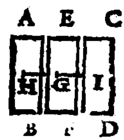


b 16. *undecimi.*

c 9. *undecimi.*

d 15. *undecimi.*

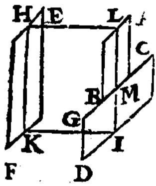
ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in utramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad



planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. demonstravimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; *a* parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.

a 14. undecimi.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamẽ inter se, sed conveniant, tunc idem efficiunt planũ; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conveniant, unã rectã constituunt lineam, veluti ad prop. 30. lib. 1. demõstravimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conveniantq; producta secundũ rectam CG. Dico plana AB, CD, unum planum constituere. Secet enim planũ quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF, *b* erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conveniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, unum planum efficient; *c* propterea quod recta LI, in uno jaceat plano. Quod est propositum.



b 16. undecimi.

c 1. undecimi.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè si producta conveniant, unũ planũ conficient.

PORRO conversum quoq; propos. 10. facile demonstrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea una unius anguli lineæ uni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.

IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectã DF: ita ut AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. *d* Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG, *e* quæ parallelæ erunt. *f* Igitur angulus FDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF, æqualis erit, quod est absurdum, cum unus sit totũ, & alter pars.

d 16. undecimi.

e 16. undecimi.

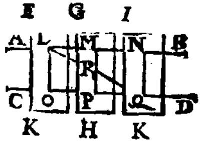
f 10. undecimi.

THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 17. XVII.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

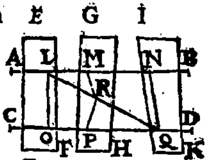
RECTÆ lineæ AB, CD, (sive eæ parallelæ sint, ut in figura, sive non, existentes tamen in eodem plano: sive in transversum positæ, in diversis existentes planis (secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & conjungatur recta LQ occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, a *Eritque triangulum LNQ, in uno plano: similiter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ,* b *erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO.* c *Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.*

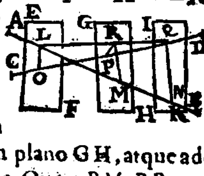


a 2. undecimi.
b 16. undecimi.
c 2. sexti.

SCHOLIUM.

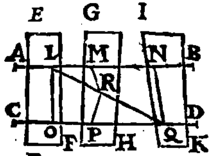
QVOD, si datæ rectæ AB, CD, sint in uno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, unam lineam rectam, ut in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, *d* quæ inter se parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, ut in scholio propos. 7. hujus lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, unam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.

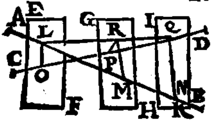




d 16. undecimi.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, unam rectam lineam, ut in hisce duabus figuris apparet: quia *e* cum triangulum LOQ, sit in uno plano, & triangulum LNQ, in uno etiam plano, quod ab illo diversum est, (Si namque duo illa *e 2. undecimi.*





triangula in uno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesin.) erunt rectæ R M, R P, in diversis illis planis triangulorum: ac proinde unam rectam non constituent; *a* alias in uno essent plano quod est absurdum.

a 1. *undecimi.*

EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, ut in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc R *M* P, semper erit una linea recta, ut ad initium hujus scholii demonstratum est, quando AB, CD, in uno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & cõmunes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ. LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in uno sint plano, non rectas autem, si non sint in uno plano: quemadmodum de rectis MR. RP, dictũ est.

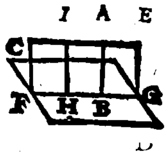
EX demonstratione porro perspicuum est, si quotlibet lineæ in uno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearum inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunq; in uno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta
b 2. *sexti.* OP, PQ. Iuncta enim recta LQ, *b* erit ut LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum L O Q, quam L M, ad M N, ob triangulum LNQ. Igitur erit, ut OP, ad P Q, ita L M, ad M N. Eademq; ratio est de pluribus. Vt autem rectè demonstratio procedat in quibusvis duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis unius rectæ ad ultimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus A*B*, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ A *B*, ad Q, ultimum punctum rectæ C D. Idemq; servatum est in figuris hujus propos. *17*.

XVIII.

THEOR 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta A B, ad planum C D, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum, C D. Ductum enim sit per A B, planum E F, secans planum C D, per rectam lineam
c 34. *primi* *F G. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta F G, c ducatur in pla-*

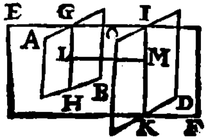


in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; a erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum. a 8. undecimi.

SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si unum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum & idem rectum.



SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: b eademque perpendicularis erit ad IK, ac propterea ex defin. 4. hujus lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad utrumq; planum AB, CD, recta est, c ipsa parallela erunt. b 19. primi c 14. undecimi.

SED jam parallela sint plana AB, CD: sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectam esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; d quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpẽdiculari LM: erit hæc ex defin. 4. hujus lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. hujus lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. e Quare planum EF, per rectam LM, ductũ ad planum CD, erit rectum: ideoq; vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum. d 17. undecimi. e 18. undecimi.

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quovis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

SIT data recta FG, in plano CD, ut in figura hujus propos. oporteatq; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quovis puncto B, rectæ FG, a erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF, b quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

a 12. undecimi.
b 18. undecimi.

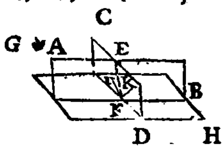
THEOR. 17. PROPOS. 19.

XIX.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illornm sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, c recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad EF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planũ GH, recta ex defin. 4 hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturq; in plano CD, ad planum GH, recto: Si deniq; EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; d ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad plannm GH, ex 4, defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra e demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

c 4. undecimi.



d 11. primi.
e 13. undecimi.

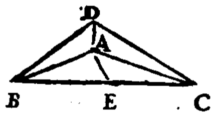
THEOR. 18. PROPOS. 20.

XX.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis

planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo esse majores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos majores esse reliquo: si vero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo majores esse. Quod si unus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem sive æquales, sive inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto a fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD Deinde in eodem plano per a 23. primi

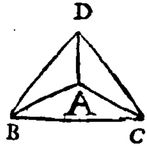


E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; conjunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; b erunt bases BC, BE, æquales. b 4. primi. *c Quia vero latera DB, DC, majora sunt* c 20. primi *latere BD; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE Cum igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC: & basis CD, major base CE: d erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis* d 25. primi *ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis continеatur, &c. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC, At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. e Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo e 20. undecimi.



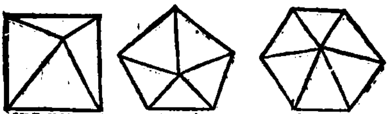
CBD: similiterq; duo anguli BCA, ACD, majores angulo BCD: & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. f Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus f 22 primi

rectis erunt majores. Cùm igitur sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria B A C, CAD, DAB;
a 32.prim. a (*sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales*) *si auferātur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

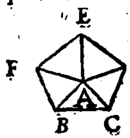
SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtēdātur ordine in eodē plano existētes; cōstituetur pyramis, cujus vertex, datus angulus solidus, tot laterum, angulorúmve, sub quot angulis planis solidus angulus cōprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horū triangulorum, (*b* cùm anguli cujuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis:



b 32.primi

Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis, quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstravimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorū superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè basim majores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, *c* & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint majores) superabunt omnes anguli horū triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quā quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

c 20. undecimi.



VERVM ut res melius percipiatur, sit exempli gratia ángulus solidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in uno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas A B, A C, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F, ita ut constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonā, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulū solidum A. d Quia vero omnes anguli
d 32. primi

quinq;

quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur, a erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis: quãdoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictũ est. Eadem demonstratio adhibenda est in alijs omnibus angulis solidis. a 22. undecimi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales, fieri potest vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

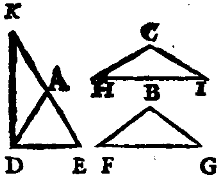
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales cõnectũt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, b *ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint quam HI, ita ostendetur.* c b 22. pri.

Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus: quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque recta KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; d *erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI, & angulus EAK, maior angulo C; propterea quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C;* e *erit & basis EK, maior base HI:* f *Sunt autem recta ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoq;* c 23. primi. d 32. primi. e 24. pri. f 30. primi.

DE, FG. maiores quam HI. Quod est propositum.

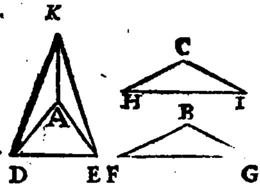
CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt aequales. Ponaturque AK, ipsi AD, aequalis rursum, & connectatur recta KD. a Erit igitur, vt prius, DK, ipsi FG, aequalis. b Quoniam vero rectae ED, DK, maiores sunt recta KE, & KE, aequalis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, HI: c Hae autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit aequalis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum,

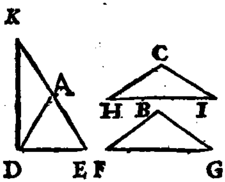
a 4. pri.
b 20. pri.
c 20. primi.



CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK: quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturque rursum AK, ipsi AD, aequalis, & ducantur rectae KD, KE. d Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, aequalis. e Quoniam vero duae DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, aequales duab. CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erũt quoq; DE. DK, maiores quam CH, CI: f Hae autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit aequalis ipsi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat aequalis; item FG, HI, maiores quam DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus aequalis, &c. g Quare ex tribus rectis DE. FG, HI. triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum,

d 4. primi.
e 21. pri.
f 20. primi.
g 22. pri.



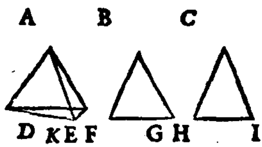


h 4. primi.
i 4. primi.
k 24. pri.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt aequales: h erunt quoque bases DE, FG, HI, aequales; Ac proinde quaelibet duae reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt aequales, & tertius minor: i erunt quoque duae illorum bases aequales, k & basis tertij vtraque minor. Quare rursus qualibet duae maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus siue reliqui B, & C, sint inter se aequales, siue

siue inæquales; l *erit quoque basis* DE, *omnium maxima. Quare* DE, FG, *maiores erunt quam* HI: *Item* DE, HI, *maiores quam* FG. *Dico iam & rectas* FG, HI, *maiores esse recta* DE. a *Fiat enim angulus* DAK, *æqualis angulo* B, *ponaturque* AK, *ipsi* AD, *æqualis. Cadet ergo punctum* K, *infra* DE; *propterea quod per puncta* D, K, E, *transit circumferentia circuli ex* A, *ad interuallum* AD, *descripta, ob æqualitatem rectarum* AD, AK, AE. *Connectantur deinde rectæ* DK, KE. *Quoniam igitur duo anguli* B, *&* C, *maiores ponuntur angulo* DAE; *&* B, *æqualis est angulo* DAK, *per constructionem: erit angulus* C, *maior reliquo angulo* KAE. *Et quia latera* AD, AK, *trianguli* ADK, *æqualia sunt lateribus* BF, BG, *trianguli* BFG; *& anguli ipsis contenti* DAK, *&* B, *æquales;* b *erit basis* DK, *basi* FG, *æqualis. Rursus quia latera* CH, CI, *trianguli* CHI. *æqualia sunt lateribus* AK, AE, *trianguli* AKE, *& angulus* C, *ostensus maior angulo* KAE; c *erit & basis* HI, *maior base* KE. *Quare cum* DK, *ostensa sit æqualis ipsi* FG: *erunt* FG, HI, *maiores quam* DK, KE; d *Sed* DK, KE, *maiores sunt, quam* DE. *Igitur multo maiores erunt* FG, HI, *quam* DE. *Quod est propositum.*

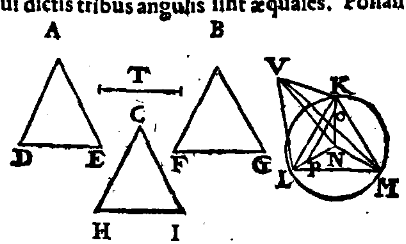
l 24. *pri.*
a 23. *pri.*
b 4. *primi.*
c 24. *primi.*
d 20. *primi.*



THEOR. 3. PROPOS. 23. xxiij.

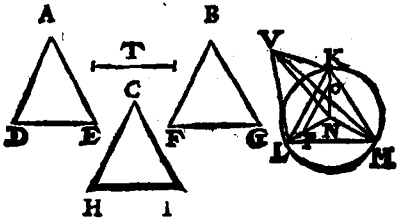
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE, FG, HI. e Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulũ KLM, sitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. f Describatur circa triangulum KLM, circulus cuius centrum



e 21. *vndecimi.*
f 5. *quarti.*

trum N, à quo ducantur rectæ NK, LN, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL, & basis DE, basi KL, æqualis: a erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia: erunt latera NK, NL, trianguli NKL, secta proportionaliter: b ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. c Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. d Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. e Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior base OP, f erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores.



a 8. pri.

b 2. sexti.

c 29. pri.

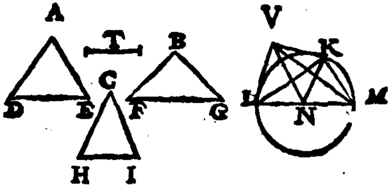
d 4. sexti.

e 14. quinti.

f 25. primi.

CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, vt ex eodem coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL: erunt quoque BF, BG, æquales eis-

eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM, æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoq; sunt

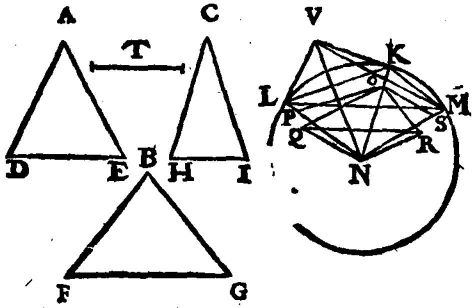


rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF.BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL: erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales sit ipsi NM: minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *b* cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL: sed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. primi.

b 20. primi.

CADAT postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto prop. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD.AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis: *c* erit angu-

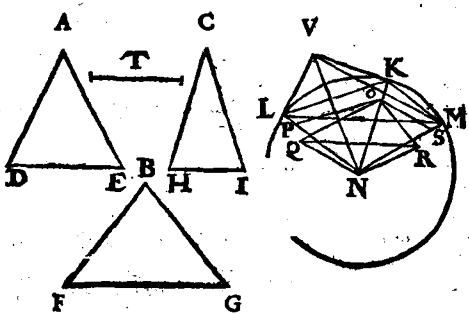


lus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL: si abscindantur NO, NP, ipsi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonstrabitur, vt in primo casu angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM, *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & con-

c 8. primi.

d 8. primi.

e 23. pri.



connectantur OQ, OR, cadetq; OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferētia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. *a* Quare cum angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno: erit angulus QON minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem: *b* erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR: & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: *c* erit basis LM, hoc est, FG, maior base QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR: & basis FG, maior base QR: *d* erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo *B*. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD. AE, quam NK, NL. sed neque æquales: Igitur maiores.

a 29. primi.

b 4. primi.

c 24. prim.

d 25. pri.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicūq; cētrū N, existat: possit recta AD, plus quā recta NK, quadrato lineæ T. per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. *e* Ex centro N excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniā igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM, *f* ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV, æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac

e 12. vndecimi.

f 46. pri.

propterea

propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti: *a* erit basis VK, æqualis basi VL: Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BC, CH, CI. Quamobrem cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD. AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE: *b* erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt dictis tribus angulis planis A, B, C, Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

a 24. pri.

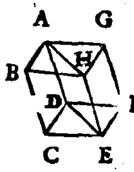
b 8. pri.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

xxiv.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersa quælibet sint parallela. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, *secentur plano AC:* c *Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF,* BE, *secentur plano AC: erunt communes sectiones* AD, BC, *parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera* ABCD. *Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma.* Dico *iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia* Cum *enim rectæ* AB, BH, *parallelæ sint rectis* DC, CE, *& non in eodem plano, sed in oppositis:* d *erunt anguli ABH,* DCE, *æquales: eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi* BG, *æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi* CF. e *Quoniam vero* AB, *ipsi* DC, *in parallelogrammo AD: &* BH, *ipsi* CE, *in parallelogrãmo* BE, *æqualis est: erit vt* AB, *ad BH, ita DC, ad CE: Ac propterea vt BH, ad* HG *: ita* CE, *ad* EF, *&c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris* AH, DE, f *cum latera* AB, BH, *trianguli* ABH, *æqualia sint lateribus* D C, CE, *tri-*



c 16. vndecimi.

d 10. vndecimi.

e 34. pri.

f 34. pri.

a 10. vndecimi. b 4. primi. c 34. primi.

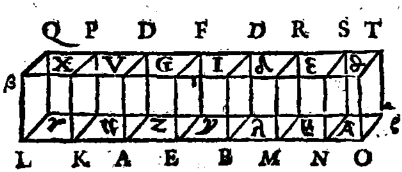
CE, trianguli DCE; a & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; b erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. c Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis continetur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia & æqualia. Quod erat demonstrandum.

xxv. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE: & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium prop. 15 huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi, ipsum parallelepipedum erit ex definitione, d habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BNRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF, habebuntque plana opposita parallelogramma similia, & æqualia e Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX cum sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt: & similia quoque, f cum anguli vnius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia, sunt parallelogramma AY, KZ, La. Cum igitur æqualia quoque sint & similia parallelogramma AD, KP, LQ. Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AE, FD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, solidi KLQP: g Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c.

d 24. vndecimi.



e 36. pri.

f 29. pri.

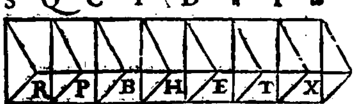
g 24. vndecimi.

Igitur

igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. *Eodem argumento æqualia ostendentur solida* EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. *Quare quam multiplex est basis* LG, *basis* AG, *tam multiplex erit solidum* LEFQ, *solidi* AEFD; *Et quam multiplex est basis* OG, *basis* BH, *tam multiplex erit solidum* OEFT, *solidi* BEFC. *Quoniam vero si basis* LG, (*multiplex basis* AG, *primæ magnitudinis,*) *æqualis est basi* OG; (*multiplici basis* BC, *secundæ magnitudinis,*) *æquale quoque est solidum* LEFQ, (*multiplex solidi* AEFD, *tertiæ magnitudinis*) *solido* OEFT; (*multiplici solidi* BEFC, *quartæ magnitudinis;*) *propterea quod basibus* LG, OG, *æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi* LEFQ, *sex parallelogrammis solidi* OEFT: *Si autem basis major est base, solidum quoque solido majus est; & si minor, minus in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis* AG, *prima magnitudo, ad basin* BG, *secundam magnitudinem, ita solidum* AEFD, *tertia magnitudo, ad solidum* BEFC, *quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis* DY, *ad basin* CY, *& ut basis* AY, *ad basin* BY, *& ut basis* DG, *ad basin* CG. *Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIUM.

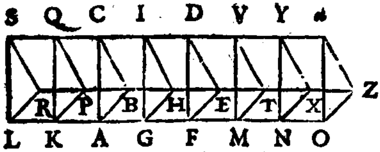
HÆC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur adversis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cujus plana adversa sint triangula ABC, DEF, seceturque plano GHI, adversis planis parallelo. Dico ut est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF, in utramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta utrinq; capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunque rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ,



LRS, MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AL, *a* erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH: *b* erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ; Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob paral-

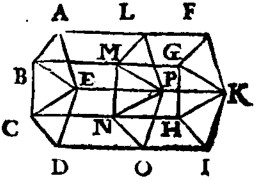
a 16. und-
aec.
b 6. undec.

parallelogrammum A B. Igitur parallelogrammum est A H. Eodem modo parallelogrammum ostendetur C H. Quoniam vero latera A C, A B, trianguli A B C, æqualia sunt lateribus G I, C H, trianguli
a 34. primi G H I; *a* cum A C, ipsi G I, & A B, ipsi G H, sit æquale: *b* & anguli C A B,
b 10. undec. I G H, sunt quoque æquales, eo quod rectæ C A, A B, parallelæ sunt, rectis I G, G H, & non in eodem plano; *c* Erunt triangula A B C,
c 4. primi. G H I, æqualia inter se, & æquiangula. *d* Quare latera circa æquales
d 4. sex. angulos proportionalia habebunt: Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum A B C I H G, contentum duobus planis oppositis A B C, G H I, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis A I, I B, B G, prisma est. Eadem arte prismata erunt A B C Q P K, K P Q S R L, F E D I H C, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O, L R S I H G, O Z α I H G. Quoniam vero parallelogramma A I, K C, L Q, æqualia sunt, & similia; nec non A H, K B, L P, & C H, Q B, S P, erunt omnia plana prismatis A B C I H G, æqualia & similia omnibus planis prismatum A B C Q P K, K P Q S R L.



Quare per defin. 10. hujus lib. æqualia erunt prismata A B C I H G, A B C Q P K, K P Q S R L. Eadem ratione æqualia erunt prismata F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O. Quare quam multiplex est basis L I, basis A I, tam multiplex erit prisma L R S I H G, prismatis A B C I H G, & quam multiplex est basis O I, basis F I, tam multiplex erit prisma P Z α I H G, prismatis F E D I H G. Quia vero si basis L I, (multiplex basis A I, primæ magnitudinis) æqualis est basis O I, (multiplici est basis F I, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est prisma L R S I H G, (multiplex prismatis A B C I H G, tertiæ magnitudinis,) prismati O Z α I H G, (multiplici prismatis F E D I H G, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus L I, O I, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis L R S I H G, omnibus planis prismatis O Z α I H G: Si autem basis L I, major est base O I, prisma quoque prismate majus est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut basis A I, prima magnitudo ad basin F I, secundam magnitudinem, ita prisma A B C I H G, tertia magnitudo ad prisma F E D I H G, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis A H, ad basin F H, & ut basis C H, ad basin D H. Quod est propositum.

SIT deinde prisma A B C D E F G H I K, cujus opposita plana sit polygona, nempe pentagona, seceturque plano L M N O P. Dico rursus ut est basis C M, ad basin N G, ita esse solidum A B C D E L M N O P, ad solidum L M N O P F G H I K. Si enim plana opposita parallela resolvantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quo-ta, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF. per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI, a Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta BP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH: & ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter se. b Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate. a 1. sexti. b 12. quinti.



POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia, c propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde ut prius ostendetur prismata ex una parte inter se æqualia, nec non & prismata ex altera parte, &c. c 16. undecimi. d 10. undecimi.

COROLLARIVM.

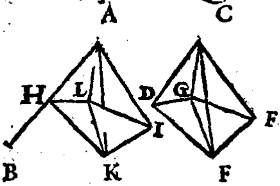
(Ex his infertur, si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similē planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.)

PROBL. 4. PROPOS. 26. XXVI.

AD datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, *in data recta* AB, *constituendus angulus solidus æqualis angulo solido* C, *contento tribus angulis planis* DCE, DCF, FCE, *non in eodem plano existentibus.* e *Ducatur ex* F, *ad planum per* CD, CE, *ductum perpendicularis* FG, *connectanturque rectæ* DF, DG, EF, EG, CG. *Deinde abscindatur* AH, *æqualis ipsi* CD, f *fiatque angulus* HAI, *angulo* DCE, *æqualis*; *& recta* AI, *rectæ* CE, *æqualis*; e 11. undecimi. f 23. pri.

Rursus in plano per AH, AI, *ductum constituatur angulus* HAL, *aequalis angulo* DCG, *qui in plano per* CD, CE, *ducto existit, & recta*
a 12. undec. AL, *recta* CG, *aequalis a* Ex L, *vero ad planum, in quo sunt tres* AH, AL, AI, *erigatur perpendicularis* LK *qua ipsi* FG, *aequalis ponatur, & conjungatur recta* KA. *Dico angulum solidum* A, *contentum tribus planis angulis* HAI, HAK, KAI, *aequalem esse dato angulo solido* C. *Connexis enim rectis* HK, HL, IK, IL: *cum latera* AH, AL, *trianguli* AHL, *aequalia sint lateribus* CD, CG, *trianguli* CDG, *&*
b 4. pri. *anguli* HAL, DCG, *aequales per constructionem*; b *Erunt bases* HL, DG, *aequales. Rursus quia ablatis angulis aequalibus* HAL, DCG, *ab aequalibus* HAI, DCE, *reliqui aequales sunt* LAI, GCE: *Cum igitur & latera* AL, AI, *trianguli* ALI, *aequalia sint lateribus* CG, CE, *trianguli* CGE, *per constructionem*: c *aequales quoque erunt* LI,
c 4. pri. GE. *Quia igitur latera* LH, LK, *aequalia sunt lateribus* GD, GF: *& anguli* HLK, DGF, *recti ex defin. 3. hujus lib.* d *erunt & bases* HK, DF, *aequales. Quare cum & latera* AH, AK, *trianguli*
d 4. pri.



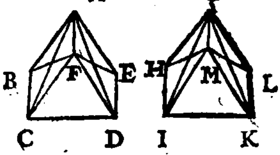
AHK, *sint aequalia lateribus* CD, CF, *trianguli* CDF, *ex constructione* (*cum enim* AL, LK, *latera lateribus* CG, GF, *aequalia sint ex constructione, comprehendantque angulos aequales; nimirum rectos, ex defin. 3. hujus lib.* e *erunt bases* AK,
e 4. pri. CF, *aequales*) f *Erunt quoque anguli* HAK, DCF, *aequales. Denique*
f 8. pri. *quia latera* LI, LK, *sunt aequalia lateribus* GE, GF, *& anguli* ILK, EGF, *recti ex defin. 3. hujus lib.* g *Erunt bases* IK, EF, *aequa-*
g 4. pri. *les. Cum igitur & latera* AI, AK, *trianguli* AIK, *lateribus* CE, CF, *trianguli* CEF, *sint aequalia ex constructione*: h *Erunt quoque angu-*
h 4. pri. *li* IAK, ECF, *aequales. Sunt ergo tres anguli plani* HAI, HAK, KAI, *solidum angulum* A, *componentes, aequales tribus angulis planis* DCE, DCF, FCE, *angulum solidum* C, *componentibus. Atque proinde solidus angulus* A, *solido angulo* C, *aequalis. Ad datam itaque rectam lineam, ejusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato aequalem: Quod erat faciendum.*

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendendae erunt omnibus angulis planis rectae in uno eodemq; existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita ut figuram planam polygonam constituant, pyramisque quaedam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resolvatur, habebuntur tot pyramides trilaterae, quot triangula in figura polygona continentur. Si igi-

igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ B C, C D, D E, E F, F B, ut fiat pentagonum B C D E F, quod in triangula resolvatur BCF, B C D, D EF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis, BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.



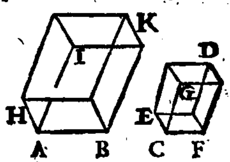
THEOR. 5. PROPOS. 27. XXVII.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT à data recta A B, *describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo* C D. a *Fiat ad rectam* A B, *ejusque punctum* A, *angulus solidus æqualis angulo solido* C, *ita ut tres anguli plani* HAI, IAB, BAH, *æquales sint tribus angulis planis* ECG, GCF, FCE *Deinde ut est*, CF, *ad* CG, b *sic fiat* AB, *ad* AI, *& ut* C G, *ad* C E, *ita* A I, *ad* A H, *eritque ex æquo, ut* C F, *ad* C E, *ita* AB, *ad* A H. *Post hac, perficiatur parallelepipedum* A K, *completis nimirum parallelogrammis* B H, H I, I B, *& per* I, B, H, *ductis planis* IK, BK, HK, *quæ parallela sint parallelogrammis* B H, H I, I B. *Dico parallelepipedum* AK, *parallelepipedo* C D, *simile esse similiterque positum. Cum enim anguli* BAH, FCE, *sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut* BA, *ad* A H, *ita* FC, *ad* CE, *ex constructione, erunt parallelogramma* H B, E F, *similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma* H I, E G, *&* I B, C F. *Tria igitur plana* B H, H I,

a 26. undec.

b 12. sexti.



I B, solidi A K, *similia sunt, similiterque posita tribus planis* F E E G, G F, *solidi* C D. a *Sunt autem tria cujuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis,* Quare *sex plana solidi* A K, *similia sunt, similiterque posita sex planis solidi* C D : *Ac proinde ex defin.* 9. *hujus lib. similia sunt, similiterque posita solida* A K, C D. *A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.*

a24 *undecimi.*

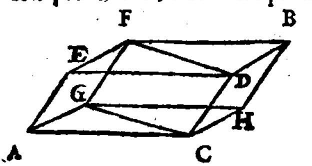
xxviij.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios adversorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallepipedum A B, in quo plana opposita sint A H, E B, quorum diagonii, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, b & æqualis ipsi A E. cum sint parallelogramma C E, G E; c erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. d Ac proinde, quæ ipsas conjungunt C G, D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. e Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G, F E D. D B F, proportionalia. f Igitur similia quoq; erunt dicta triangula. g Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B, & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, G F, prismatis A C G F E D, æqualia similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrammis C B, B G, C F, prismatis H G C, D B F : proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 34. *prim.*
c 9. *undecimi,*
d 33. *pri.*



e 24. *undecimi.*
f 6. *sexti.*
g 24. *undecimi.*

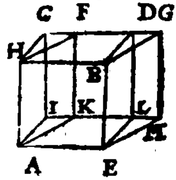
xxix.

THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin A B, *in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana*

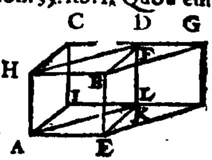
na parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, *quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda* ADCE, AFGE, *esse inter se æqualia.* a *Cum enim æqualia sint parallelogramma* a 35. pri.
AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta: erunt, ablato communi trapezio AELK, æ- b 34. pri.
qualia quoque triangula AIK, ELM. b *Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8 propos. lib. 1. ostendimus:* c *Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportio-* c 4. sexti.

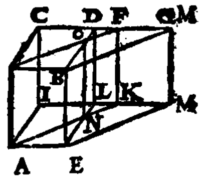


nalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. d *Rursus parallelo-* d 24. undecimi.
grammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: e *Sed* e 26. pri.
& IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales. (f *Nam cum re-* f 4. pri.
ctæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM,) *Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.*

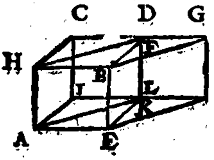
SCHOLIVM.

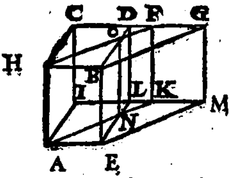
HÆC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, ut ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit: vel ultra L, eodem modo demonstrabuntur, ut in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. unde ut prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia: quib. si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, ut prius, æqualia erunt prismata AIK, FCH, ELM, GDB, à quibus si auferatur prisma commune KL, NODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO,) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur utrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.



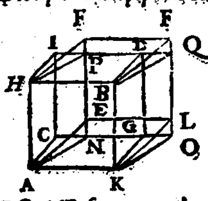


THEOR. 25. PROPOS. 30.

XXX.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis; inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, *in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda* AIDK, *AMFK*, *quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes* AC, *AE*, KG, KL, *HI*, *HM*, BD, BF, *non sint in eisdem rectis, hoc est, neque* CI, GD, *protracta transeant per puncta* M, E, F, *neque* CG, ID, *producta; &c.* *Dico parallelepipeda* AIDK, ALMFK, *esse æqualia.* *Cum enim plana* CD, *EF, opposita basi A* B, *sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in eo plano recta* CG, ID, *quarum* CG, *secet* EM, LF, *protractas in punctis* N, O; *Et* ID, *easdem in punctis* P, Q. *adjunganturq; recta* AN, KO, *HP*, BQ. a *Quia igitur recta* PQ, *MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo* FP; *&* MF, *ipsi* HB, *est æqualis; erunt &* PQ, HB, *æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum* HIDB. b *Igitur & HP*, B Q, *parallela sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est* HPQB. *Eadem ratione parallelogramma erunt* HPNA, ANOK, KOQB: *Est autem & parallelogrammum* NOQP. *Igitur parallelepipedum est* APQR. c *Quamobrem parallelepipedum* AIDK, *æqua-*



a 34. primi

b 33. primi

c 29. pri.

qua-

quale est parallelepipedo APQK. cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK. cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, sive insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, sive non; in eadem sunt altitudine.

NAM si unum dicatur altius; si eo abscindatur parallelepipedũ in eadem cum reliquo altitudine: erunt æqualia abscissum & reliquum. *a* Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale: æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

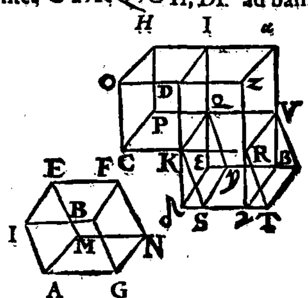
a 29. vel 30. undec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

xxxi. xxxii.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

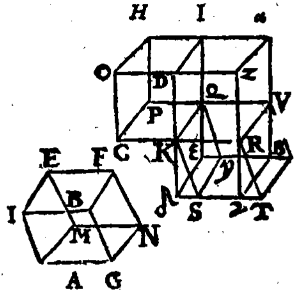
SVPER æquales bases AB, C D, in eadem altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes C P, K Q, O H, DI. ad basin CD, perpendiculares. quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur C K, in rectum, sitque K R, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano O K, extenso æqualis angulo B L A, ponaturque K S, æqualis ipsi L A: & perficiatur parallelogrammum K T, super quod ad altitudinem perpendicularis K Q, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera K R, K S, æqualia sunt lateribus L*B*, L A, & anguli R KS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, L G, æqualia & similia: Rursus quia latera K Q, K S, æqualia sunt la-



lateribus L E, L A, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod K Q, L E, rectæ ponantur ad plana KT, L G, erunt & parallelogramma Q S, E A, æqualia & similia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia sint lateribus L B, L E, & anguli Q K R, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma K V, L F, æqualia & similia. Quare cum tria plana K T, Q S, K V, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia: *a* tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia.

a 24. *undec.*
b 24. *undec.*

CONVENIANT rectæ D K, T S, productæ in δ: & I Q, K Y, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, β V, protractæ conveniant in α: & O D, γ R, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, RδγV, eandem habent basin K V, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ K S, Kδ, RT, Rγ, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX, *c* ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QδγV.



c 19. *undec.*

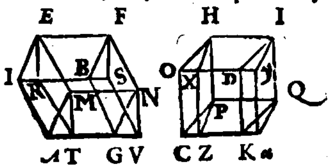
d QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se: & KT, æquale est ipsi L G, erit & K γ, ipsi L G, hoc est, ipsi C D, æquale: cum bases L G, C D, ponantur æquales. *e* Quare erit, ut CD, ad D R, ita Kγ ad D R: *f* Vt autem C D, basis ad basin D R, ita est solidum CHIK, ad solidum KLαR: cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis, C H, α R, parallelo: Et eadem ratione, ut K γ. ad D R, ita est solidum QδγV, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum I δ γ α, secetur plano K V, oppositis planis Dαδβ, parallelo. *g* Igitur æqualia erunt parallepipeda CHIK, QδγV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, K γ, ad eandem basin D R. Quare cum parallelepipedum QδγV, sit ostensum æquale parallelepipedo A E F G: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

d 35. *primi*
e 7. *quinti*
f 25. *undecimi.*
g 9. *quinti.*

SINT jam neque insistentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad basin A B, neque C P, K Q, O H, D I, ad basin, C D, perpendiculares. Et, à 4 punctis E, F, M, N. demittantur ER, E S, M T, NV, ad planum,

num, in quo basis AB. perpendiculares, Item à punctis H. I. P, Q. ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint ejusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, cum inter se æqualia, ut ostensum est. b Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

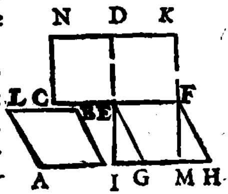
a 11. undecimi.

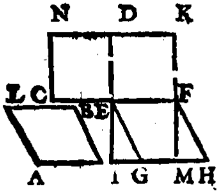


b 29. vel 30. undec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse çqualia: Nimirũ ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint n. duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB, Conveniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda ejusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, contructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuũ est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defin. 10. hujus





hujus lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis hujus, per constructionem. a Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, cujus infimum latus E F, erectam super planum I K; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cujus infimum latus IH, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB. b Quoniam vero parallelogramma E H, I F, æqualia sunt; & EH, æquale est ipsi CD, æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, ut IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Est autem ut IF, ad E K, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super E F, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, ut C D, ad EK; ita solidum super C D, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super C N, FK, erectis. Quare erit ut solidum super I F, ad solidum super EK, ita solidum super C D, ad solidum super E K. e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallelepipedum super IF, æquale parallelepipedo super AB, Æqualia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.

a 29. undecimi.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. undecimi.
e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

SI enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

f 31. undecimi.

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur major base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum ejusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

xxxiii.

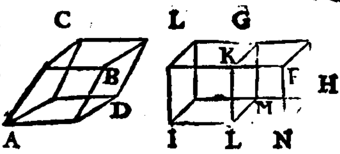
THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, ejusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ad solidum, ut est basis ad basin. g *Super rectam enim EK, constituatur parallelogrammum IK,*

g 45. primi.

cum-



æquale parallelogrammo AB, *in angulo* IEK, *qui sit æqualis angulo* ENF, *Constituent autem parallelogramma* EF, IK, *totum parallelogrammum unum* FI, *ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi* EFGH, *producantur ad partes* EG, *perficiaturq; totum unum parallelepipedũ* IFLH: a *erunt parallelepipeda* ABCD, IKLM, *æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem* AB, IK, *& eandem altitudinem, ex hypothesi.* b *Quare erit ut solidum* IKLM, *ad solidum* EFGH, *ita solidum* ABCD, *ad idem solidum* EFGH; c *Est autem solidum* IKLM, *ad solidum* EFGH, *ut basis* IK, *hoc est, illi æqualis basis* AB, *ad basin* EF. *Igitur & solidum* ABCD, *erit ad solidum* EFGH, *ut basis* AB, *ad basin* EF. *Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.*

a 31. *undecimi.*
b 7. *quinti*
c 25. *undecimi.*

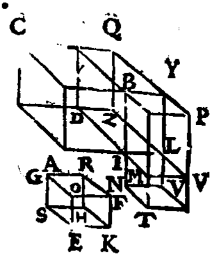
SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex majori abscindantur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum, *d* eritq; ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo æquali est toti. Quod est absurdum.

d 32. *undecimi.*
e 9. *quinti.*

THEOR. 28. PROPOS. 33. XXXVI.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.



SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR: Item DI, ad M; & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO, Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sint lateribus GR, GO: *f* & anguli contenti æquales, cum angulus ILM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedo-

f 15. *primi.*

pedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *a* Sunt autem tria cujusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. hujus lib. Rursus completis parallelogrammis MB, *B* L, L M, perficiatur parallelepipedum MBPL: Item completis parallelogrammis IY, *D* L, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum *A*BC*D*, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM: & BI, ad FK, hoc est, ad IN. *b* Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL: Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM: & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut *A* D ad CL, ita DL, ad LM: & *B* L, ad LN. *c* Sed ut A *D*, basis ad *D* L, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis *D* L, ad basin LM, ita parallelelepipedum DLYQ, ad parallelepipedū LM*B*P; & ut basis B L, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LM*B*P, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedū LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales *A* D C B, D L Y Q, L M B P, L N T *X*, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ *A*DC*B*; ad secundam *D*LYQ, ex defin 10. lib. 5. *d* Vt autem A*D* cB, ad DLYQ, ita est basis *A*D, ad basin DL; *e* Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad E *K*. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonstrandum.

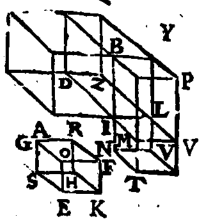
a 24. undec.

b 1. sex.

c 32. undec.

d 32. undec.

e 1. sex.



COROLLARIVM.

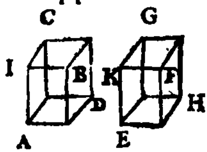
(Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedū super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THE-

THEOR. 29. PROPOS. 34.

ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia. xxxiv. xxxv.

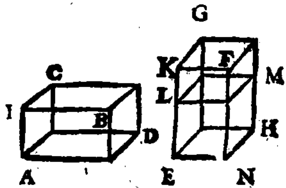
SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, *super bases* AD, EH. *Dico bases* AD, EH, *& altitudines parallelepipedorum* ADCB, EHGF. *esse reciprocas, hoc est, esse ut* AD, *ad* EH, *ita altitudinem solidi* EHGF, *ad altitudinem* ADCB. *Sint enim primum insistentes lineæ* AI, EK, *perpendiculares ad bases* AD, EH, *ita ut* AI, EK, *sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si*



igitur altitudines AI, EK, *sunt æquales: cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases* AD, EH, *æquales, per ea quæ ad finem propos. 31. hujus lib. ostendimus. Quare erit, ut basis* AD, *ad basin* EH *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI: *Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.*

QVOD si altitudines AI, EK, *inæquales fuerint: sit* EK, *major, ex qua abscindatur* EL, *ipsi* AI, *æqualis: & per* L, *ducatur planum* LM, *parallelum basi* EH, *per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida* ADCB, EHGF. a *erit ut* ADCB, *ad solidum* EHML, *ita* EHGF, *ac idem solidum* EHML: b *Vt autem solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *ita est basis* AD, *ad basin* EH, *cum æquales ponantur altitudines* AI, EL. *Et ut solidum* EHGF, *ad solidum* EHML, *ita est eadem ratione basis* KM, *ad basin* LN, *cum hac ratione solida* EHGF, FHML, *eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur* KN, LN: *erunt enim inter eadem plana parallela* KN, GH. *Igitur erit ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita basis* KN, *ad basin* LN: c *Sed ut* KN, *ad* LN, *ita est recta* EK, *ad rectam* EL, *hoc est, ad* AI, *ipsi* EL, *æqualem. Quare erit ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI: *Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.*

a 7. quinti.
b 32. undec.

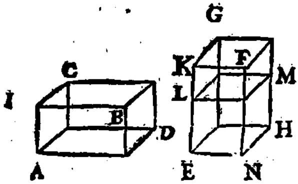


c 1. sex.

SINT jam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, *sunt æquales: cum sit basis* AD, *ad basin* EH, *ut altitudo* EK, *ad altitudinem* AI, *ex hypothesi; erunt & bases* AD, BH, *æquales.* d *Quare parallelepipeda* ADCB, EHGF, *cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.*

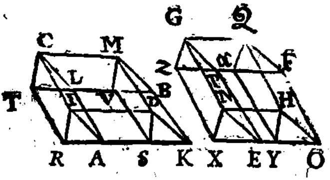
d 31. und.

QVOD



Quod si altitudo EK, *major fuerit, abscindatur* EL, *ipsi* AI, *aequalis & per* L, *ducatur planum* LM, *parallelum basi* EH. *Quia igitur ex hypothesi est, ut basis* AD, *ad basin* EH, *ita altitudo* EK, *ad altitudinem* AI, *hoc est, ad* EL, *ipsi* AI, *aequalem:* a *Vt autem basis* AD, *ad basin* EH, *ita est solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *cum altitudines* AI, EL, *aequales ponantur* b *Et ut* EK, *ad* EL, *ita est* KN, *ad* LN: c *Vt autem basis* KN, *ad basin* LN, *ita est solidum* EHGF, *ad solidum* EHML, *cum solida* EHGF, EHML, *eandem habeant altitudinem, si bases ponantur* KN, LN: *erunt enim hac ratione inter plana parallela* KN, GH: *Erit ut solidum* ADCB, *ad solidum* EHML, *ita solidum* EHGF, *ad idem solidum* EHML: d *ideoque aequalia erunt solida* ADCB, EHGF.

a 23. undecimi.
b 1. sext.
c 32 undecimi.
d 9. quint.



Sed proponantur jam parallelepipeda BACD, EFGH, *aequalia; quorum insistentes lineae* AI, KD, EM, LC; EN, OH, FQ, PG, *non sint perpendiculares ad bases* AB, EF. *Demittantur autem a punctis* I, D, M, C, *ad planum basis* AB, *perpendiculares* IR, DS, MV, CT; *Item a punctis* N, H, Q, G, *ad planum basis* EF, *perpendiculares* NX, HY, Qa, GZ. *connectanturque rectae* RS, TV, RT, SV, XY, Za, XZ, Ya: *Eruntque perpendiculares* RI, XN, *parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, ut basis* AB, *ad basin* EF, *ita esse altitudinem* XN, *ad altitudinem* RI. e *Cum enim aequalia sint solida* ABCD, EFGH, *ex hypothesi, sit autem* ABCD, *aequale solido* RVCD, *quod habeant eandem basin* CD; *eandemque altitudinem* RI; *&* EFGH, *eadem ratione, aequale solido* XaGH: *Erunt & parallelepipeda* RVCD, XaGH, *aequalia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases* CD, GH *erit, ut jam demonstratum est, ut basis* CD, *ad basin* GH, *hoc est, ut basis* AB, *ad basin* EF, *ita altitudo* XN, *ad altitudinem* RI. *Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocae.*

e 29. vel 30. undecimi.

SINT *jam bases atque altitudines reciprocae. Dico parallelepipeda esse aequalia. Constructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis* AB, *ad basin* EF, *ita altitudo* XN; *ad altitudinem* RI. f *Sit autem* AB, *ipsi* CD, *&* EF, *ipsi* GH, *aequalis: erit quoque ut basis* CD, *solidi* RVCD, *ad basin* GH, *solidi* XaGH, *ita altitudo* XN, *ad altitudinem* RI. *Quare cum* XN, RI, *sint insistentes lineae perpen-*

f 24. undecimi.

nea perpendiculares ad bases C D. G H; *erunt ut jam ostensum est, aequalia parallelepipeda* RVCD, XaGH. *a Sunt autem haec parallelepipeda parallelepipedis* ABCD, EFGH, *aequalia. Igitur aequalia quoq; erunt parallelepipeda* ABCD, EFGH. *Idemque ostendetur, si insistentes lineae unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.* a 29. vel 30. undec.

SCHOLIVM.

OMNIA haec, quae demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29 30.31.32.33.& 34. conveniunt quoq; prismatis, quae habent duo plana opposita triangularia, si praedictae hypotheses serventur. Nam si duobus prismatis ejusmodi ejusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super aequales bases constitutis apponantur duo alia prismata illis aequalia & similia, conficientur duo parallelepipeda ejusdem altitudinis, & super eandem, vel aequales bases existentia. *b* Quare aequalia erunt ejusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia. b 29.30. vel 31. undecimi.

RVRSVS, si duobus prismatis praedictis ejusdē altitudinis, & super diversas bases constitutis adjiciantur duo alia prismata illis aequalia & similia, conficienturū iter duo parallelepipeda ejusdē altitudinis. *c* Quare erit parallelepipedū ad parallelepipedum, ut basis ad basin: *d* Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogrammae, vel certae ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangulae. c 32. undecimi, d 15. quinti.

PRAETEREA, si duobus prismatis praefatis similibus addantur alia duo prismata illis aeqvalia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, *e* quae inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, *f* cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quae quoque sunt latera homologa prismatum. e 33. undecimi. f 15. quinti

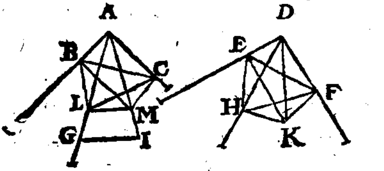
DENIQVE si dictis duobus prismatis aequalibus adjungantur alia duo prismata illis aequalia & similia, componentur duo parallelepipeda aeqvalia earundem altitudinum cum prismatis. *g* Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocae: & bases prismatum eaedem sint, vel certe triangula earum dimidia *h* eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocae. g 34. undecimi. h 15. quinti.

xxxvii. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, *quorum verticibus* A, *&* D, *insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ* AG, DH, *ita ut angulus* BAG, *angulo* EDH, *& angulus* CAG, *angulo* FDH, *sit æqualis: à sumptis autem punctis* G H, *in rectis* AG, DH, *demittantur ad plana, in quibus anguli* BAC, EDF, *existunt perpendiculares* G I, HK, *incidentes in puncta* I, K, *& adjungantur rectæ* IA, KD. *Dico angulos* GAI, HDK, *esse æquales inter se. Nam si* AG, DG, *sunt inæquales, auferatur à majori* AG, *ipsi* DH, *æqualis linea* AL, *& ex* L, *in plano trianguli* AGI, *ducatur ipsi* GI, *parallela* LM. *Quoniam igitur parallelæ sunt* GI, LM, *& est* GI, *ad planum anguli* BAC, *recta*; a *erit quoque* LM *ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis* MK, *ad rectas* AB, AC,

a 8. undec.



DE, DF, *perpendiculares* MB, MC, KE, KF, *& connectantur rectæ* BC, BT, LC, EF, EH, HF. *Et quia* LM, *recta est ad planum anguli* BAC, *ipsa rectum angulum efficiet cum recta* AM, *in eodem plano ducta per defin. 3. hujus lib.* b *Quare quadratum rectæ* AL, *æquale erit quadratis rectarum* AM, ML; c *Est autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis rectarum* AC. CM, *cum & angulus* ACM, *rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AC, CM, ML: d *At quadratis rectarum* CM, ML, *æquale est quadratum rectæ* CL, *cum angulus* CML, *rectus sit per defin. 3. hujus lib.* e *Igitur quadratum rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AC, CL; e *Ac proinde angulus* ACL, *rectus erit.* f *Rursus quia quadratum rectæ* AL, *æquale est quadratis rectarum* AM, ML: g *Est autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis rectarum* AB, BM,

b 48. pri.
c 47. pri.
d 47. pri.
e 48. primi
f 47. pri.
g 47. pri.

cum

cum angulus ABM, *per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ* A L, *æquale est quadratis rectarum* A B, B M, M L: a *At quadratis rectarum* B M, M L: a *At quadratis rectarum* B M, M L, *æquale est quadratum rectæ* B L, *quod & angulus* BML, *sit rectus ex defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo rectæ* A L, *æquale est quadratis rectarum* A B, B L; b *propterea angulus* A B L, *erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli* DFH, DEH. *Quoniam igitur anguli* ABL, L A B, *trianguli* A B L, *æquales sunt angulis* DEH, HDE, *trianguli* D E H; *suntque latera* A L, D H, *æqualia*; c *Erunt & reliqua latera* A B, B L, *reliquis lateribus* D E, E H, *æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ* A C, C L, *rectis* D F, F H. *Quare cum latera* A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualia sint lateribus* D E, D F, *trianguli* D E F: *& anguli contenti* B A C, E D F, *æquales, ex hypothesi*; d *erunt & bases* B C, E F, *inter se, & anguli* A B C, A C B, *angulis* DEF, DFE, *æquales. Sunt autem & toti anguli* A B M, A C M, *totis angulis* DEK, DEF, *æquales: cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli* MBC, MCB, *reliquis angulis* KEF, KFE, *æquales erunt: Ac propterea cum & latera* B C, E F, *sint ostensa æqualia*: e *erunt latera* B M, C M, *lateribus* E K, FK, *æqualia. Quia igitur latera* A C, C M, *trianguli* ACM, *æqualia sunt ostensa lateribus* D F, FK, *trianguli* DFK, *& anguli* ACM, DFK, *sunt recti*; f *erunt & bases* AM, DK, *inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ* BL, E H, *erunt etiam earum quadrata æqualia*: g *Quia vero quadratum rectæ* BL, *æquale est quadratis rectarum* B M, M L: *& quadratum rectæ* E H, *quadratis rectarum* EK, KH, *quod anguli* BML, EKH, *recti sint ex defin. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum* B M, M L, *æqualia quadratis rectarum* E K, K H. *Ablatis ergo quadratis rectarum* B M, E K, *quæ æqualia sunt, quod rectæ* B M, E K, *ostensæ sint æquales*; *reliqua quadrata rectarum* L M, H K, *æqualia erunt: ac proinde rectæ* L M, H K, *æquales. Quam ob rem cum latera* A L, A M *trianguli* A L M, *æqualia sint lateribus* D H, D K, *trianguli* D H K, *& basis* L M, *basi* HK, *æqualis*; h *erunt & anguli* L A M, H D K, *æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistent, &c. Quod ostendendum erat.*

a 47. primi.
b 48. pri.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 26. primi.
f 4. primi.
g 47. pri.
h 8. primi.

COROLLARIVM.

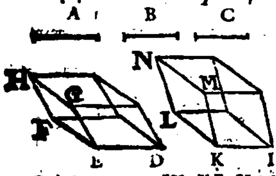
ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumq; utriq; Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nã propterea quod anguli plani BAC, DFE ponuntur æquales & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales LAB, HDE Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.)

xxxviii. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Constituaturq; angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEE, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A: & EF, ipsi B, & EG, ipsi C, sit aequalis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH: quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. a *Deinde ad rectam IK, ejusque punctum K, fiat solidus angulus K, aequalis solido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui aequales sint tribus DEF, DEG,*

a 26. undecimi.



FEG, ita ut rectæ IK, KL, KM, aequales sint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, aequale esse solido IM. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B, & EG, ipsi C, sumpta sit aequalis,) & anguli DEG, IKM, aequales: b *Erunt parallelogrãma DG, IM, aequalia, propterea quod latera habent circa aequales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEC, IKM, sunt aequales quorum verticibus insistunt sublimes lineæ aequales EF, KL, quæ aequales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN si bases sint DG, IM, inter se aequales per coroll. propos. præcedentis.* c *Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeant bases DG, IM; aequales & aequales quoque altitudines, inter se aequalia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod erat demonstrandum.*

b 14. sexti.

c 31. undec.

SCHOLIVM.

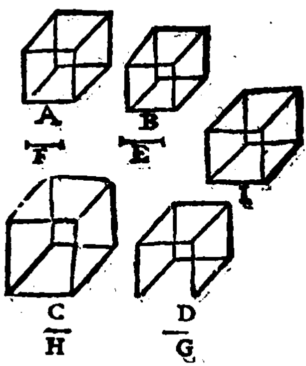
VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptũ, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media

linea

linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, ut dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorũ altitudines ex FL, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia: erunt eorum bases D G, IM, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. hujus lib. demonstravimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex constructione: a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, ut DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum. a 14. sexti.

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxix.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



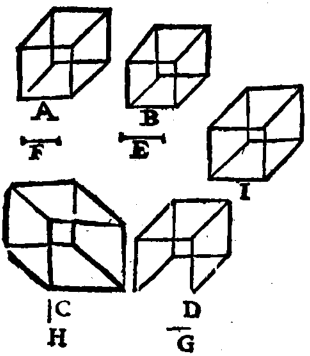
SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D: constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta: Item supr C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, sive hæc sint illis similia sive non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem solidum A: ad solidum B, ita solidum C, ad solidũ D. Inveniãtur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur: erit ex æquo ut A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, Et ut C, ad H, ita, solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. hujus lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

SINT jam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. b Tribus enim rectis A, B, C, b 12. sexti.

a 27. undec. A,B,C, inveniatur quarta proportionalis I, a super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I: erit quoque, ut jam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. b Atque idcirco

b 9. quint. æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 2. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. c Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D, erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse ut solidum A, ad solidum B ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque ut rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D.



c 33. undecimi.

d 33. undecimi. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D. triplicata proportionis rectæ C ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B: & solidi C ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

SCHOLIVM.

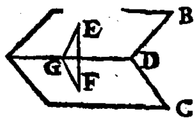
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, ejusq; solidum sumatur bis, habebuntur quatuor

tuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, ut demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ: perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio convenit etiam prismatis, quorum duo plana adversa æqualia sunt triangula, ut Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic est demonstratum, proportionalia erunt. *a* Cum igitur, prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur. a 15. quinti

THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



Planum enim AB, *rectum sit ad planum* AC, *sitq; eorũ communis sectio recta* AD. *Et ab* E, *puncto plani* AB, *ad planum* AC, *perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem* AD. *Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum* F, *b & ab* F, *in plano* AC, *ducatur ad rectam* AD, *perpendicularis* FG: *connectaturq; recta* EG, *in plano* AB. *Quoniam igitur* FG, *perpendicularis est ad communem sectionem* AD, *erit quoq; perpendicularis ad planum* AB, *ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam* GE, *per 3. defin. hujus lib. Est autem & EF, recta ad* FG, *per eandem 3. defin. Igitur in triangulo* EFG, *duo anguli* EFG, EGF, *recti sunt, quod est absurdum, c cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex* E, *demissa ad planum* AC, *non extra communem sectionem* AD, *cadat, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.* b 12. primi. c 17. primi.

SCHOLIUM.

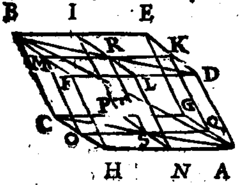
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionem, *d* ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. hujus lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, ut in scholio propos. 13. hujus lib. demonstravimus. d 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedi eorum; quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & soli- XXXX.

di parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS. Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC: considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) b & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: c Erunt & bases AS, CS, æquales: & anguli ASQ, CSO, æquales, d Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, æquales sunt duobus rectis: e Ac propterea AS, CS, unam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & unam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia utraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipsæ quoque inter se parallelæ erunt & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extrema conjungentes, parallelæ sunt & æquales: Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt: h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. i Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT, & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia: Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex adverso, &c. Quod erat ostendendum.



a 34. primi.
b 29. primi.
c 4. primi.
d 13. primi.
e 14. primi.
f 9. undecimi.
g 31. primi.
h 7 undecimi.
i 29. & 15. primi.
k 26. primi.

COROLLARIVM.

(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam dividunt, ut hic demonstratum est rectam RS.)

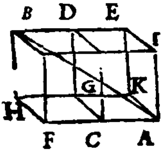
SCHOLIVM.

HVIC throremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstravimus, videlicet.

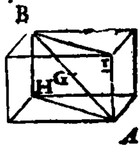
SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum

trum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrum transibit ipsum planum.

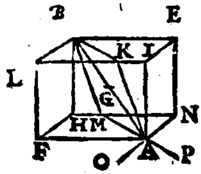
SECETVR parallelepipedum A B, plano C D, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri A B, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sic enim primo planũ C D, oppositis planis A E, B F, parallelum. a Et quia plana parallela B F, D C, E A secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem B A, bifariam in G; secabuntur quoque latera adversorum planorum A H, B I, atque quo & bases A H, B I, bifariam. b Cum igitur sit ut basis K C, ad basim C H, ita solidum A D, ad solidum C B, erit parallelepipedum A B, sectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto. a 17. undec. b 25. undecimi.



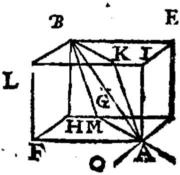
TRANSEAT secundo planum secans A I, B H, per diametros B I, A H, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum A B, c cum A B, in plano sit parallelarum A H, B I. d Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam. c 7. undecimi. d 25. undecimi.



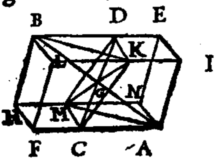
TERTIO planum secans A K B M, neque sit adversis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, secantur plano A K B M: e erunt communes sectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cum sint communes sectiones planorum parallelorum A L, B N, factæ à plano A K B M. Quare parallelogrammum est A K, B M: f ideoq; tam rectæ tam A K, B M, quam rectæ A M, B K, inter se erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N: & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ: g ac proinde æquales anguli erunt O A P, L B K. h Cum igitur O A P, æqualis sit angulo M A N æquales quoque erunt anguli K B L, M A N). i Erunt bases K L, M N, inter se, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales, & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula B K L, A M N, k cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta K L, rectæ M N: & angulus B K L, angulo A M N: & angulus K B L, angulo M A N, est æqualis, ut ostendimus: erit & reliqua I K, reliquæ H M: & reliquus angulus B K I e 16. undecimi. f 34. pri. g 10. undecimi. h 15. primi i 4. primi. k 4. sex.



reliquo AMH: & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales: & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia: & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & [illegible] triangula BHM, AIK: & quadrilatera AKLF, BMNE: cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, KIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10 defin. hujus libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.



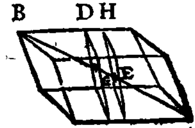
POSTREMO planum secans CD, neque adversis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neq; per ullos angulos eorum ductum: sed utrumq; secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, ut prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM: connectanturque rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE. a inter se sunt parallelæ: b Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano: ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. c Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est: d Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis: & latus BG, lateri AG, æquale, quod AB, bifariam secetur in G, centro: e Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GD, trianguli AGC; f & angulus BGD, æqualis angulo AGC: g Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quę ad propos. 8. lib. 1. docuimus.



a 29. undec.
b 7. undecimi.
c 29. primi
d 15. primi.
e 26. primi
f 15. primi.
g 4. primi.

mus, anguli illius angulis hujus æquales? Est autem totus DBI, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & basis KL, basi MN: & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, ęquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conveniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est ęqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, ęqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquę CF, æqualis erit: Ac propterea quadrilaterum DEIK, ęquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & ęquiangulum; cum anguli DEI, EIK, ęquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH: & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, ęquales, quod ęquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, ęqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, ęqualia esse & similia & quadrilatera ACKI, BDMH: Item DENM, GFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conveniant, ut perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. hujus lib. ęquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN: cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia: Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam. a 4. primi.

SED secetur jam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum CB, dividere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non dividitur bifariam, dividatur bifariam in E, ut sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonstratum est.



Ponitur autem & bifariam secari plano CD: Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se ęqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, pręter G, dividet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

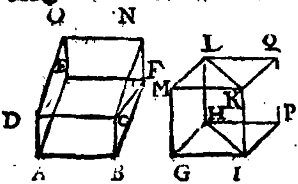
THEOR.

XLII.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM quorum illud basim habeat parallelogrammum BCD, hoc vero triangulum GHI: sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ. Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo



parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos 15. hujus lib. a 34. primi *a Quoniam igitur parallelogrammum GP. duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, ejusdem trianguli GHI, duplum:* b 31. undecimi. *æqualia erunt parallelogramma AC, GP. Quare parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis, super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM,* c 32. undecimi. *(c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adversorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaq; si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum *ABCD*, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim jam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMUM.

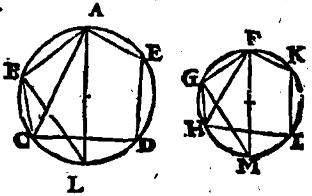
Et solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona similia, inter se sunt, ut à diametris quadrata. 1.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis aequalibus ABC, FGH, rectae AC, FH, & connectantur rectae BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, ut AB, ad BC, ita FG, ad GH: a erunt triangula ABC, FGH, aequiangula, cum circa angulos aequales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: b Est autem angulus ALB, angulo ACB: & angulus FMG, angulo FHG, aequalis. Igitur & anguli ALB, FMG, aequales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, aequales sint, c nempe recti in semicirculis existentes; d erunt & reliqui BAL, GFM, aequales. e Quare erit ut AL, ad AB; ita FN, ad FG: & permutando, ut AL, ad FM, ita AB, ad FG. f Igitur est ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad poly-

a 6. sexti.
b 21. tertii.
c 31. tertii.
d 32. primi.
e 4. sex.
f 22. sexti.



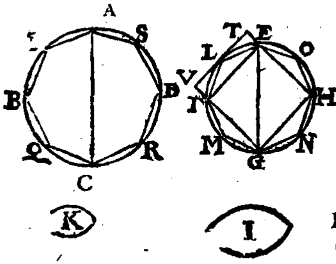
polygonum FGHIK, super FG: cum tam quadrata, quam polygona sint figure similes, similiterq; descriptæ. Quæ itaq; in circulis polygona similia inter se sunt, ut diametris quadrata, quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ii. CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit vel major circulo EFGK. Si enim esset ęqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul, Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod

a 7. quinti.



quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, ut ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, majus erit, quã dimidium circuli EFGH Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturq; rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH OH, OE Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, ut ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV: majus erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul majora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt simul quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero. si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plusquam dimidium, nempe triangula ELF, FMG &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magni-

b 14. pri.

c 1. dec.

gnitudo, quam K, excessus inter circulum EF, GH, & magnitudinem I. Sint jam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ major est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D, & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales divisa sit circumferentia ABCD, in quod distributa est circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, ut patet. *a* Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, ut circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & majus. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

a 1. *duodecimi.*

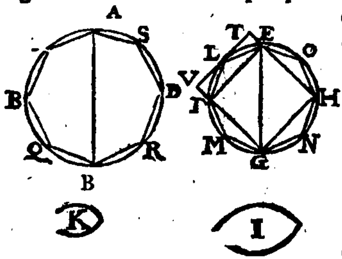
b 14. *quinti.*

QVAMQVAM autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC, Ita ut generaliter & universe demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionẽ, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor.

SIT deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, *c* major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratrum diametri AG, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam in priori parte generaliter, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive

c 14. *quinti.*

sive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, majorem; quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri A C, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falsum esse jam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita ut generaliter & universæ quoque demonstratum sit, nunquam



quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo majorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Non ergo major est magnitudo I, circulo EF GH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I: *a* sit autem ut circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulũ EFGH, qui æqualis est magnitudini I: Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, sive circulus ABCD, circulo EFGH, major sit, sive minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

a 7. quinti.

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.)

THEOR. 3. PROPOS. 3.

III.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cujus basis triangulum ABC, *vertex* D. *Secentur omnia ejus latera bifariam in* E, F, G, H, I, K. *connectanturq; recta* rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Divisa itaque est pyramis in duas pyramides *A*EGH, *H*IKD, quarum bases triangula *A*EG, HIK, & vertices *H*, *D*: nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita *E*HG, BIF: hujus vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totum pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti: Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & majora dimidio, totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam; ac proinde proportionaliter: *a* erunt *H*I, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC: & HK, AC: & *E*G, B*C*: & *E*F, *AC*: & FG, AB: & *E H*, *B*D: & *EI*, *AD*: & IF, DC: & HG, DC. *b* Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ: Atque eadem ratione parallelæ sunt G*H*, FI, cum sint parallelæ ipsi D*C*. Quare parallelogramma sunt *AE*IH, H*E*BI, ID*HE*, *E*BFG, G*H*KC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ: *c* erunt anguli *E*HG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli *H*EG, DBC: & HG*E*, *D*CB, *d* proportionalia igitur sunt latera trianguli H*E*G, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos: ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo *D*BC. Sunt autem & triangula HA*E*, H*A*G, *A*EG, triangulis *D*AB, DA*C*, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo *A*EGH, pyramidi *A*BCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ: *e* erunt anguli IHK, BA*C*, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli *H*IK, ABC: & HKI, ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia: ac propterea triangulum HIK, triangulo *A*BC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo *AD*B, ut ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales *A*H, *H D*, constituta: ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22, lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo

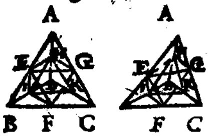
a 2. *sexti*.
b 9. *undecimi*.
c 10. *undecimi*.
d 4. *sex*.
e 10. *undecimi*.
f 4. *sex*.
g 21. *sexti*.

ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, *a* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & simili triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, *b* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur ABGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

a 34. pri.

b 34. pri.

RVRSVS, *c* quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, CFGE; Erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æquiangula, per coroll. propos. 8 lib. 1. *Ac* propterea & similia; *d* Sunt autem & parallela, cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex adverso æqualibus & similibus, & paralleli, & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. *e* Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula GFG, HIK, æquiangula, & æquiangula inter se, ac propterea similia: *f* Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt ejusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK: & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis hujus, per scholium propos. 41. lib. 1. *g* Ipsa inter se æqualia erunt.



c 34. pri.

d 15. undecimi.

e 34. pri.

f 1.

g 14. undecimi.

DENIQVE quia prisma EBFGHI, majus est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorũ: Majora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio ejusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, major dimidium ejus superat, minor vero à dimidio

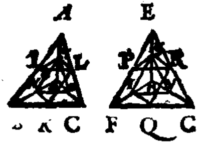
dio

dio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraq; divisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC, EFG, *duæ pyramides* ABCD, EFGH, *ejusdem altitudinis, quarum latera bifariam dividantur in punctis* I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, *connectanturque rectæ* IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, *ita ut pyramis utraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in* AILM, MNOD, EPRS, STVH, *& in bina prismata æqualia* IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; *ut vult propositio præcedens: Eodemque modo intelligatur esse divisæ pyramides factæ* AILM, MNOD; EPRS, STVH: *& sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide* ABCD, *ad omnia prismata generata in pyramide* EFGH, *illis multitudine æqualia, ut est basis* ABC, *ad basin* EFG. *Cum enim sit ut* BC, *ad* CK, *ita* FG, *ad* GQ, *eo quod utraque linea divisa*



est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, *similia similiterq; posita; Item triangula* EFG, RQG, *ex coroll. propos. 4. lib. 6* a *erit quoque ut triangulum* ABC, *ad triangulum* LKC, *ita triangulum* EFG, *ad triangulum* RQG. *Et permutando, ut* ABC, *ad* EFG, *ita* LKC, *ad* RQG *Vt autem* LKC, *ad* RQG, *ita est prisma* CKLMNO, *ad prisma* GQRSTV, *ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma* IBKLMN, *ad prisma* PFQRST, *cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, videlicet* IBKLMN, *ad unum prisma* PFQRST b *ita sunt duo prismata* IBKLMN, CKLMNO, *ad duo prismata* PFQRST, GQRSTV. *Igitur erunt quoq; ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita duo prismata in pyramide* ABCD, *ad duo prismata in pyramide* EFGH. *Simili argumento ostendemus; ita esse bina prismata in pyramidibus* AILM, MNOD, a 12 sexti. b 12. quinti.

ff 2 facta

factis in pyramide ABCD, *ad bina prismata in pyramidibus* EPRS STVH, *factis in pyramide* EFGH, *ut sunt bases* AIL, MNO, *illarum pyramidum ad bases* EPR, STV, *harum pyramidum, & sic deinceps eadem semper facta divisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est* L K, *basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin* RQG, *quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis* ABC, *ad basin* EFG. *Igitur erunt quoq; , ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita prismata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* ABCD, *ad prismata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* EFGH. *Ac propterea erunt quoq; ut prismata pyramidis* ABCD, *ad prismata pyramidis* EFGH, *ita prismata tam pyramidis* AILM, *ad prismata pyramidis* EPRS, *quam prismata pyramidis* MNOD, *ad prismata pyramidis* STVH: *& ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis* ABCD, *ad duo prismata pyramidis* EFGH, a *ita omnia prismata in pyramidibus* ABCD, AILM,

a 12. quinti. MNOD, *&c. simul ad omnia prismata in pyramidibus* EFGH, EPRS, STVH, *&c, simul, si hæc illis multitudine sint æqualia: Erunt quoq;, ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita omnia prismata in pyramide* ABCD, *ad omnia prismata in pyramide* EFGH. *Quocirca si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.*

LEMMA.

QVOD autem sit LKC, & RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad basis ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur planæ parallelæ ABC, MNO, *b* secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV. cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

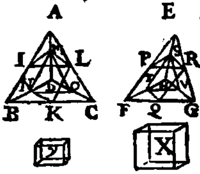
b 17. undecimi.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ejusdem altitudinis ABCD, EFGH, *quarum bases triangula* ABC, EFG. *Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita pyramis* ABCD, *ad solidum* X: *quod vel minus erit, vel majus pyramide* EFGH. *Sit primo minus, magnitudine* Y. *Dividatur pyramis* EFGH, *in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, juxta propos.* 3. *hujus lib. Rursus eodem modo facta pyramides in pyramide* EFGH, *in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide* EFGH, *auferatur plusquam dimidium, nempe duo prismata* PFQRST, GQRSTV; a *quæ majora sunt dimidio* a 3. duodecimi.



pyramidis EFGH: *Item à reliquis pyramidibus* EPRS, STVH, *plusquam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps*: b *relinquetur tandem minor magnitudo quam* Y, *excessus pyramidis* EFGH, *supra solidum* X. *Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum* b 1. dec. *autem pyramis* EFGH, *æqualis ponatur solidis* X, Y; *erunt reliqua prismata in pyramide* EFGH, *majora solido* X. *Dividatur pyramis* ABCD, *in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo facta pyramides* AILM, MNOD, *in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide* EFGH. c *Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide* ABCD, *ad omnia prismata numero æqualia in* c 4. duodecimi. *pyramide* EFGH, *ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *hoc est, ut pyramis* ABCD, *ad solidum* X. *Sunt autem omnia prismata in pyramide* ABCD, *minora, quam tota pyramis* ABCD: d *erunt quoque omnia prismata in pyramide* EFGH, *minora quam solidum* X. *Ostensa* d 14. quinti. *vero sunt & majora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum* X, *pyramide* EFGH.

SIT *deinde solidum* X, *pyramide* EFGH, *majus. Quoniam igitur ponitur pyramis* ABCD, *ad solidum* X, *ut basis* ABC, *ad basin* EFG: *Erit convertendo solidum* X, *ad pyramidem* ABCD, *ut basis* EFG, *ad basin* ABC. *Ponatur, ut solidum* X, *ad pyramidem* ABCD, *ita pyramis* EFGH, *ad solidum* Y. *Et quia solidum* Y, *majus ponitur pyramide* EFGH: e *erit & pyramis* ABCD, *maior solido* Y. *Quare erit ut basis* EFG, *ad basin* ABC, *ita pyramis* EFGH, *ad* e 14. quinti. *solidum* Y, *quod minus est pyramide* ABCD. *Quod est absurdum.*

 Osten-

Ostensum enim est jam, non posse esse, ut est basis ad basin, ita pyramidē ad solidum pyramide minus. Non ergo majus est solidum X pyramide EFGH, *sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita pyramis* ABCD, *ad solidum* X: a *sit autem pyramis* ABCD, *ad solidum* X, *ut ad pyramidem* EFGH, *solido* X, *æqualem : Erit quoque ut basis* ABC, *ad basin* EFH, *ita pyramis* ABCD, *ad pyramidem* EFGH. *Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.*

a 9. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo si pyramides triangulares inter se sint, ut bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim unius altitudo major credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritque ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. *b Pyramis ergo constituta* æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.

b 9. quinti

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

ITEM sequitur è converso, pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento ostendemus, quo in converso propos. 3(.& 31. lib. 11. demonstrando usi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

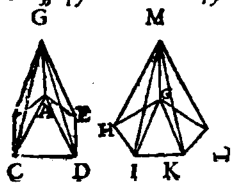
vi.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides ABCDEF. GHIKLM, *quarum bases polygona* ABCDE, GHIKL, *latera multitudine æqualia habentes. Dico ita esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia: erit qualibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa* c *Quia vero est, ut basis* ABC, *ad basin* ACD, *ita pyramis* ABCF, *ad pyramidem* ACDF: *erit componendo ut basis* ABCD, *ad basin* ACD

c 5. duodecimi.



ACD, ita pyramis ABCDF, *ad pyramidem ACDF*: a *Sed rursus est ut basis ACD, ad basin* ADE, *ita pyramis* ACDF, *ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut basis* ABCD, *ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem* ADEF. *Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin* ADE, *ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem A-DEF. Simili argumento erit ut basis* GHIKL, *ad basim* GKL, *ita pyramis* GHIKL, *ad pyramidem* GKLM: *& convertendo ut basis* GKL, *ad basin* GHIKL, *ita pyramis* GKLM, *ad pyramidem* GHI-KLM. b *Rursus quoniam est, ut basis* ADE, *ad basin* GKL, *ita pyramis ADEF, ad pyramidem* GK-LM: *Erunt quatuor bases* ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, *in eisdem proportionib. cum quatuor pyramidibus* ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIK-LM, *ut in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis ABCDE, ad basin* GHIKL, *ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem* GHIKLM: *Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.*

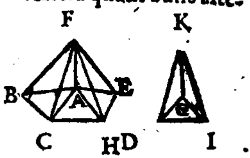
a 5. duodecimi.

b 5. duodecimi.

ABCDE	ABGDEF
DE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

SCHOLIVM.

QVAMVIS hujus propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus ejusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus ejusdem altitudinis, quarum unius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ pyramides ejusdem altitudinis ABCDEF, GH-IK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, hujus vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales divisa. c Quoniam vero est, ut basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis, *ABCF*, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: & eodem modo, ut basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI secundam quantitatem, ita pyramis AC*D*F, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: d Erit ut basis ABC*D*, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem *G*HIK, quantam quantitatem. Rursus quia est, ut basis *AB*CD, prima quantitas, ad ba-

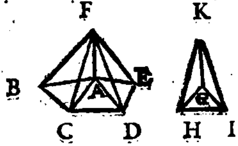


c 5. duodec.

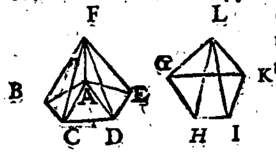
d 24. quinti.

ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo est ostensum: *a* & ut basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; *b* Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, ut demonstratum est, sit ut basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque convertendo, ut basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, *quarum unius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, undecunque incipias.* Quamvis enim demonstratio incipiat à polygono, ejusque pyramide, ut ex demonstratione constat, tamen convertendo licebit initium quoque sumere à triangulo, ejusque pyramide, ut dictum est.

a 5. *duodecimi.*
b 24. *quinti.*



SED jam sint duæ pyramides ejusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygonæ, sintque plura latera in una base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis ejus in totidem divisa pyramides. quia vero, ut jam est demonstratum, est ut basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & ut bases ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: *c* Erit etiam ut basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque, ut basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut ante est



c 24. *quin.*

est ostensum; a Erit etiam ut basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCD EF, tertia quantitas cum sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi ABCDE. a 24. quinti.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, convertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, ut bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea quæ in scholio propos. 5. hujus lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

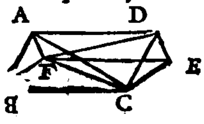
(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides ejusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, ut in coroll. 5. hujus lib. diximus.)

THEOR. 7. PROPOS. 7. vi.

OMNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, *cujus duo triangula opposita æqualia ac similia* ABF, DCE. *Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe* AC, *in* ABCD: CF, *in* BCEF: FD, *in* ADEF. b *Quoniam igitur triangula* ABC, ADC, *æqualia sunt*: c *estque ut basis* ABC, *ad basin* ADC, *ita pyramis* ABCF, *ad pyramidem* ADCF, *cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex* F, *vertice ad planum* ABCD, *demissam*: *Erunt & pyramides* ABCF, ADCF, *inter se æquales.* b 34. pri. c 5. duodec.



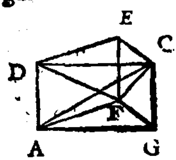
Eadem ratione, æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, *super æquales bases* ADF, EFD, *constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice* C, *ad planum* ADEF, *demissa. Est autem pyramis* ADCF, *eadem pyramidi* ADFC, *cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi* ADC, *& triangulis* ADF, ACF, DCF: *hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi* ADF, *& triangulis* ADC, ACF, DCF.

Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDD, quam CDEF, continetur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, ut perspicuum est, æquales sunt inter se: Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est divisum Q. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT enim primũ pyramis BFC, triangularẽ habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABE. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam

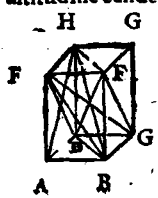


si ducatur recta DF, erit prisma divisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, *a* ut demonstratum est: Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, imo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF.

a 7. duodecimi.

Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. hujus lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cujus basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum: & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse



prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB.

Quare erit ut pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB: *b* Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma

b 12. quinti.

sma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE: propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5 hujus lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basin ABCD, constitutæ, per coroll. propos. 5. hujus lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam divisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

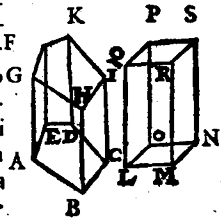
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam ejusmodi pyramis, æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. hujus lib. Quam quidem tam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM.

EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

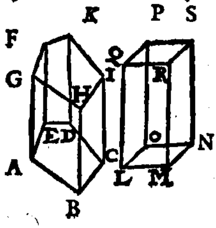
SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunq; habeant bases, inter se sunt, ut bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec non de parallelepipedis, quę nomine prismatum contineri diximus; Nunc tamen idipsum demonstrabimus universe de omnibus prismatis, quorum duo plana adversa, sive bases, sunt polygona, quamvis plura latera, seu anguli in unius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur prismata ejusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases



sunt

ſint figuræ multilateræ. Dico ut eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis utriuſque baſis ad unum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum hujus propoſ. quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. a Quã ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, ut baſis ad baſin, ut oſtenſum eſt, propoſ. 6. ejuſque ſcholio. Igitur erit quoq; ut baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.



a 15. quinti.

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunq; baſium inter ſe ſint, ut baſes ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM II.

(VNDE priſmata ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine: Et priſmata æqualia ejuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac converſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.)

SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelligantur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, ut in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in hujuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis unum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis ejuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, ut in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, ut in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia ejus pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur

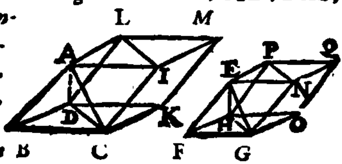
aliud

aliud æquale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma ejusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis ejusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, ut vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, ejusdemque altitudinis, duæ tertiæ partes prismatum, ut modo demonstravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

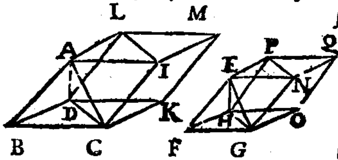
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, *ita ut bases* ABC, EFG, *sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius.* Dico *proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa nempe* BC, FG. *Extendantur enim plana triangulorum* ABC, CBD, DAB, *perficianturque parallelogramma* BI, BK, BL. *Deinde ducantur* LM, IM, *rectis* AI, AL, *parallela convenientes in* M, *connectaturque recta* KM. *Erit igitur completum parallelepipedum* BM, *ejusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi* BM, *sint parallela, ut facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum* FQ. *Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani* ABC, EFG, *sunt æquales, atque ut* AB, *ad* BC, *ita* EF, *ad* FG; *erunt parallelogramma* BI, FN, *similia. Eodem modo cum anguli* ABD, EFH, *sint æquales, sitque ut* AB, *ad* BD, *ita* EF, *ad* FH: *Item anguli* DBC, HFG, *æquales, & ut* DB, *ad* BC, *ita* HF, *ad* FG: *erunt & parallelogramma* AL, BK *parallelogrammis* FP, FO,



simi-

a 24. undec. *similia*. a *Sed tam tria* BI, BK, BL, *parallelepipedi* B M, *reliquis*
tribus oppositis DM, AM, CM, *quam tria* FN, FO, FP, *parallelepipe-*
b 24. undec. *di* FQ, *reliquis oppositis tribus* HQ, EQ, GQ, b *sunt æqualia*, *& si-*
milia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, *similia sunt*



sex planis solidum F Q, *ambientibus: Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda* B M, F Q. *Quoniam vero ductis rectis* L I, P N, c *prismata* DBCILA, HFGNPE,
c 15. quinti. *habent eandem proportionem, quam parallelepipeda* B M, E Q, *eorum dupla; & pyramides* AB-CD, EFGH, *eandem, quam prismata dicta, earum tripla:* d *habe-*
d 11. quin. *bunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipe-*
e 32. undec *peda.* e *Cum igitur proportio parallelepipedi* BM, *ad parallelepipedum* F Q, *sit triplicata proportionis homologorum laterum* BC, FG; *erit quoque proportio pyramidis* ABCD, *ad pyramidem* EFGH, *proportionis* BC, *ad* FG, *triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIVM.

(Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. *D*ico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ
f 20. sexti. E*B*, EC, LH, LI, *f* divisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia: nimirum triangula ABE, *E*BC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula A*E*F, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo ML*G*, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita *M*L, ad *L*G: Vt autem E A, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinē triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita *M*L, ad L H. Rursus quia est ut E B, ad *B*A, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut *B*A, ad *B* F, ita H G, ad *H*M, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula AB*F*, GHM; Erit quoque ex æquo, ut *E*B, ad BE, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH, & ut EB, ad *B*F, ita LH,
g 5. sexti. ad H*M*, erit etiam ex æquo, ut *F*E, ad FB, ita ML, ad *M*H. *g* Quare æquan-

quiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. *a* Quapropter, ut demonstratum est, ut pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL, habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; *b* Atque idcirco erit ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, *c* cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

a 8. *duodec.*

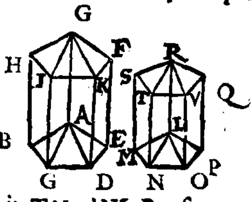
b 12. *quinti,*

c 12. *duod.*

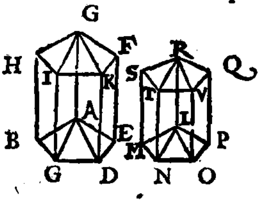
SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD: LN, LO, *d* erunt, ut de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt, erit ut IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem CB, ad CA: ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit ut IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se convenient, nimirũ angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Convenit a. & recta NL, rectæ CA, eo ꝙ anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, equales sũt, Ac ꝓpterea cũ latera circa ipsos ostẽsa sint esse proportionalia,

d 12. *sexti.*



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV, nec-non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstravimus ad propos. 34 lib. 11. triplicatam habent proportionem singula ad singula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



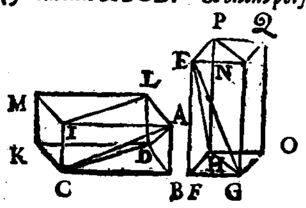
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes dividi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia dividi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex hujus scholii demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQUALIUM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT *æquales pyramides triangulares* ABCD, EFGH. *Dico earum bases* ABC, EFG, *&* *altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut* ABC, *ad* EFG, *ita altitudinem pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD. *Si enim perficiantur, ut in præcedenti propos. dictum est, parallelepipeda* BM, FQ, *earundem altitudinum cũ pyramidibus, connectanturque rectæ* LI, *PN: erunt prismata* DBCILA, HFGNPE, *cũ sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde Parallelepipeda* BM, FQ, *cum sint*



sint prismatum dupla, æqualia quoq; erunt. a *Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis* BI, *ad basin* FN, *ita altitudo solidi* FQ, *ad altitudinem solidi* BM: b *Ut autem basis* BI, *ad basim* FN, *ita est triangulum* ABC, *ad triangulum* EFG. *Igitur erit quoque ut basis* ABC, *ad basin* EFG, *ita altitudo pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD, *cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum: Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.*

a 34. undecimi.

b 15. quinti.

Sint jam bases & altitudines reciproca. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, ut prius; c cum sit ut ABC, *ad* EFG, *ita parallelogrammum* BI, *ad parallelogrammum* FN: *sint q; eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum: erunt quoq; bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciproca: d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda* BM, FQ. *Quare & prismata* DBCILA, HFGNPE, *eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.*

c 14. quinti.

d 34. undecimi.

SCHOLIVM.

Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides

æquales, quarum quidem ABCD, basin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat basi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera revocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstravimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, ejusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. hujus lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; e erit ut basis ABC, ad basin KLM; hoc est, ad huic æqualem basin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyrami-

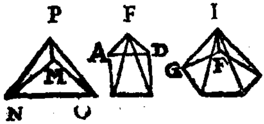
e 9. duodecimi.

dum ABCD,EFGHI, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur jam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo cum basis KLM, æqualis sit basi EFGH; & altitudo pyramidis KKMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem esse ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem: erit quoque ut basis ABC, ad basin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. a Quamobrem æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. hujus lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod est propositum.

a 9. duodecimi.

Sint deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangulæ. Fiat rursus triangulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, ejusdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Eritque ex scholio propos. 6. hujus lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, ut nunc demonstravimus, erit ut basis MNO, hoc est basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.



Sed reciprocentur jam harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cum basis MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem ut ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque ut MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare ut ante ostendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL. Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis in propos. 6. hujus lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositum.

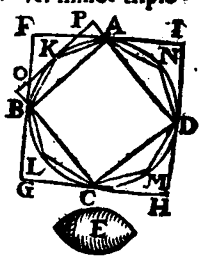
Omnia hæc facile quoque demonstrabuntur convenire prismatis quibuscunq;. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramiramides earundem altitudinum cum ipsis,& super easdem bases,æquales; cum sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7.hujus lib. Vel certe duæ tertiæ.si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma,& eorum vertices,lineæ rectæ,ut in scholio ejusdem propos. ostensum est. Quare ut modo demonstravimus, bases harum pyramidum atque altitudines reciprocantur.Cum ergo hæ bases&altitudines eædem sint,quæ prismatum,reciprocabuntur quoque bases prismatum atq; altitudines.

Rursus, si prismatum bases,& altitudines reciprocentur,reciprocabuntur quoque bases & altitudines pyramidum easdem bases & altitudines cum prismatis habentium.Quare,ut demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint tripla,vel certe sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

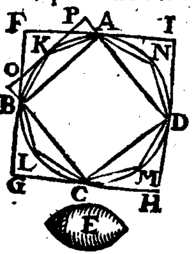
THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis,& altitudinem æqualem. ix.

Habeant conus & cylindrus basin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. *Dico* conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E,ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD,& circa eundem,quadratum FGHI;intelligaturq; super hæc quadrata sub altitudine coni & cylindri,erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD,dimidium est quadrati FG,HI,ut ad propos. 9.lib 4. ostendimus: *a* estq; ut basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum ejusdem altitudinis: Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FG HI; Ac proinde parallelepipedum basis A B C D, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus basis circulus ABCD, Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, D A, in punctis K, L, M, N, adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC; MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad prop. 27. lib. 3 ostendimus occurratque rectis DA, CB, productis in P,& O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum AKB, dimidium est paralleli logrammi ABOP: erit quoque prisma basis AKB,



dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basim, quemadmodum ad propo. 7. hujus lib. demonstravimus; Ac propterea prisma basis AKB; majus erit, quam dimidium segmenti cylindri, cujus basis figura contenta linea recta A B, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul majora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata ejusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ majora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si à cylindro, cujus basis circulus



ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; *a* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint jam segmenta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni, una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ major est dictis cylindri segmentis; erit reliquum prisma basis multangulæ AKBL, CMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro; majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum; Non igitur major est cylindrus triplo coni.

a 1. deci

Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudini E, ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI, intelliganturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, ut ad propos. 9. lib. 4. demonstravimus; *b* estque ut

b 6. duodecimi.

basis

basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis; erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, major erit dimidio coni, cujus basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adjunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propos. 27. lib. 3. demonstravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, major erit dimidio segmenti coni, cujus basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul majores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DNA, secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum semper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponantur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demon-

a 41. pri.
b 6. duodec.
c 1. dec.

 mon-

monstratum, erit hujuscemodi prisma majus cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus, minor est triplo coni; Sed neque major triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coconi, proptereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Quamvis propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis convenit, ut perspicuum est ejus demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio universe ita proponi poterit.

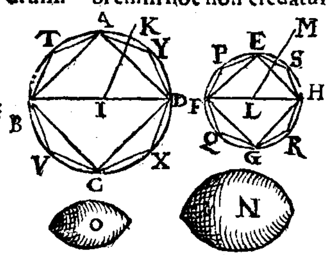
Omnis conus sive rectus, sive scalenus, tertia pars est cujuslibet cylindri sive recti, sive scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis licet non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

xi.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases.

Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim



EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel major erit, vel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum ut basis ad basin: quod non conceditur.

a 7. quinti

Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, dividanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in PQRS, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, ejusdem altitudinis,

nis,

nis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est: *a* relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sunt ergo jam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O; quæ prædicti coni segmentis major est: erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum EPFQGRHS, ejusdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVGXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propos. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. hujus lib. est ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, *b* & ut polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cum conis: Erit quoque ut pyramis ATBVCXYDK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, *c* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem fuit & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *dec.*
b 6. *duodecimi.*
c 14. *quinti.*

Sit secundo N, major cono EFGHM. Cum igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM, major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin hujus coni. Non ergo major est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque major est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N: *d* Sit autem ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

d 7. *quinti.*
e 15. *quinti.*

e Quoniam autem ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, qui triplus est coni ABCDG,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni FEGHM.) Erit quoque ut basis ALCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri in se sunt, ut bases. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Perspicuum quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste iudicat, ita ut propositio universe proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, sive ambo recti sint, sive scaleni, sive unus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Convertetur hæc propositio hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, ut bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conversum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis semper eandem, vel æquales bases constitutos, sive ambo sint recti vel scaleni, sive unus, rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel una & eadem.

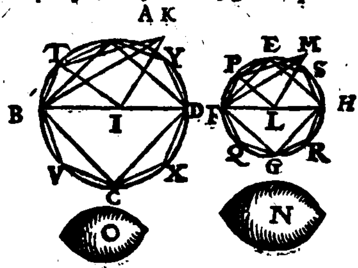
Item sequitur, conos & cylindros æquales, super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conversum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Sint coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EF, GH, *axes vero* IK, LM, *& diametri basium* BD, FH. *Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus* ABCDK, *ad aliquam magnitudinem* N, *proportionem tri-*

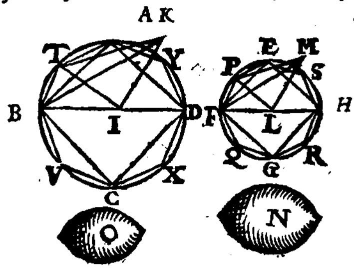
triplicatam diametri BD, *ad diametrum* FH. *Eritque* N, *vel minor, vel major cono* EFGHM. *Si enim esset aequalis*, a *haberet conus* ABCDK, *ad conum* EFGHM, *&* *ad* N, *proportionem eandem*; a 7.
Ac proinde proportio coni ABCDK, *ad conum* EFGHM, *esset quoque triplicata proportionis diametri* BD, *ad diametrum* FH: *quod non conceditur*. *Sit ergo primum* N, *minor quam conus* EFGHM, *magnitudine* O; *Fiatque eadem prorsus constructio figurae, quae in praecedenti propositione, ita ut rursus pyramis* EPFQGRHSM, *major ostendatur, quam* N. *Ducantur deinde rectae* KB, KT, MF, MP, *ut habeantur duo trianguli* BKT, EMP, *pyramidum* ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; *&* *connectantur rectae* TI, PL. *Quoniam igitur coni* ABCDK, EFGHM, *similes ponuntur*; *erit ex* 24. *defin. lib.* 11. *ut diameter* BD, *ad diametrum* FH, b *ac propterea ut semidiameter* BI, *ad semidiametrum* FL, *ita axis* IK, *ad axem* LM; *Ac permutando, ut* BI, *ad* IK, *ita* FL, *ad* LM. *Cum igitur anguli* BIK, FLM, *recti sint ex defin.* 3. *lib.* 11. *quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum bases*; c *Erunt triangula* BIK, FLM, *aequiangula*; d *Ac propterea ut* KB, *ad* BI, *ita erit* MF, *ad* FL. *Vt autem* BI, *ad* BT, *ita* FL, *ad* EP, *ob similitudinem triangulorum* BIT, FLP, (*Cum enim anguli* BIT, FLP, *insistentes similibus arcubus* BT, FP, *sint aequales, ut in scholio propos.* 22. *lib.* 3. *ostensum est*: *sitque ut* BI, *ad* IT, *ita* FL, *ad* LP, *ob aequalitatem tam linearum* BI, IT, *quam* FL, LP, *&* *erunt triangula* BIT, FLP, *similia.*) *Igitur ex aequo, ut* KB, *ad* BT, *ita* MF, *ad* FP. *Rursus quia latera* KI, IB, *trianguli* KIB, *aequalia sunt lateribus* KI, IT, *trianguli* KIT; *&* *anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin.* 3. *lib.* 11. *cum axis* IK, *rectus ponatur ad circulum* ABCD, f *erunt bases* KB, KT, *aequales. Eodem modo aequales erunt rectae* MF, MP: *Ac propterea rectae* KB, KT, *rectis* MF, MP, *proportionales erunt, cum utrobique sit proportio aequalitatis.* g *Quoniam vero ut* KB, *ad* BT, *ita* KT, *ad eandem* BT: *Item ut* MF, *ad* FP, *ita* MP, *ad eandem* FP: *Erat autem ut* KB, *ad* BT, *ita* MF, *ad* FP: *Erit quoque ut* KT, *ad* BT: *ita* MP, *ad* FP: *Et convertendo ut* BT, *ad* TK, *ita* FP, *ad* PM. *Quare cum sit ut* TK, *ad* KB, *ita* PN, *ad* MF, *&* *ut* KB, *ad* BT, *ita* MF, *ad* FB: *Et ut* BT, *ad* TK, *ita* FP, *ad* PM, *veluti ostensum est*: *habebunt triangula* BKT, EMP, *latera proportionalia*, h *ideoque aequiangula erunt*:



b 15. quinti
c 6. sexti.
d 4. sext.
e 6. sex.
f 4. pri.
g 7. quinti.
h 6. sexti.

runt: Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, *inter se similia esse: Quæ cũ sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes ex defin.* 9. *lib.* 11. *Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum* BT, FP, *ex coroll. propos.* 8. *hujus lib. Vt autem* BT, *ad* FP, *ita est* BI, *ad* FL, *similitudinem triangulorum* BIT, FLP: a *E ut* BI, *ad* FL, *ita* BD, *ad* FH. *Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum* BD, FH: *Ponebatur autem & proportio coni* ABCDK, *ad* N, *earundem diametrorum triplicata. Igitur erit ut pyramis* ATBVCXDYK, *ad pyramidem* EPFQGRHSM, *ita conus* ABCDK, *ad* N. *Quare cum pyramis* ATBVCXDYK, *minor sit cono* ABCDK, *pars toto,* b *erit & pyramis* EPFQGRHSM, *minor quam* N. *Ostensa autem est & major. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo* N, *cono* EFGHM.

a 11. *quinti.*



b 14. *quin.*

Sit deinde N, *major cono* EFGHM. *Cum ergo ponatur conus* ABCDK, *ad* N, *habere proportionem triplicatam diametri* BD, *ad diametrum* FH, *Habeat autem & pyramis* ATBVCXDYK, *ad pyramidem* EPFQGRHSM, *triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus* ABCDK, *ad* N, *ita pyramis* ATBVCXDYK; *ad pyramidem* EPFQGRHSM: *& convertendo ut* N, *ad conum* ABCDK, *ita pyramis* EPFQGRHSM, *ad pyramidem* ATBVCXDYK. *Quare cum ex coroll. propos.* 8. *hujus lib. pyramis* EPFQGRHSM, *ad pyramidem* ATBVCXDYK, *habeat proportionem triplicatam homologorum laterum* PE, *ad* TB, *hoc est, diametri* FH, *ad diametrum* BD: *habebit quoq;* N, *ad conum* ABCDK, *proportionem triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD. *Ponatur ut* N, *ad conum* ACBDK, *ita conus* EFGHM, *ad magnitudinem* O. *Habebit igitur & conus* EFGHM, *ad* O, *proportionem triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD. *Et quia* N, *major ponitur quam conus* EFGHK: c *erit quoque conus* ABCDK, *major quam* O. *Quapropter conus* EFGHM, *ad magnitudinem* O, *minorem cono* ABCDK, *proportionem habet triplicatam diametri* FH, *ad diametrum* BD. *Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio-*

c 14. *quinti.*

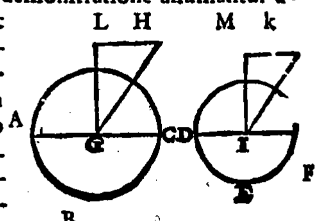
alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent basium diametri. Non ergo major est magnitudo N, cono EFGH. *Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est;* a *ac proinde conus* ABCDK, *eandem habet proportionem ad conum* EFGHM, *& ad N. Cum ergo ponatur conus* ABCDK, *ad N, in triplicata proportione diametrorum* BD, *&* FH; *erit quoq; conus* ABCDK, *ad conum* EFGHM, *in earundem diametrorum proportione triplicata.* a 7. quinti.

b *Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atq; prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.* b 15. quinti.

SCHOLIUM.

QVOD si major conus, & cylindrus cum minore conferatur perspicuum est, in secunda parte hujus propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. hujus lib. minorem pyramidem ad majorem habere proportionem laterum homologorum triplicatã. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere majorem quantitatẽ ad minorem, ut habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

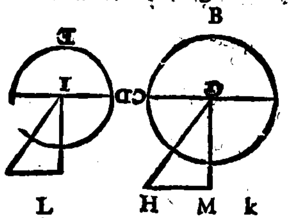
Hæc porro propositio, quamvis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similib⁹ conis & cylindris scalenis. Sunt similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABCDEF, axes vero GH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatã. Intelligantur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM, Ducanturque per rectas GH, GL: Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quæ diametri basium erunt. Quoniã igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, c erunt & plana per GH, GL: & per IK, IM, ad easdem recta. d Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in AC, DE, cõmunes sectiones: & inde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se



c 18. undecimi.
d 38. undecimi.

ſe erunt, cum coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. *a* Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe ejuſdem altitudinis; erit recta H L, per axium vertices ducta ipſi AC, parallela; *b* ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli *C*GH, FIK, Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula ſunt; *c* atque idcirco erit ut G H, ad G L, ita IK, ad I *M*; & permutando, ut G H, ad I K, ita G L, ad IM. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita eſt *A* C, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſimiles erunt ex definitione. *d* Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro *A*BCH, (cùm eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, ut conſtat ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum *D*EFM, ita conus & cylindrus *A*BCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.

a 32. *primi.*
b 29. *primi.*
c 4. *ſexti.*
d 12. *duodec.*



xi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

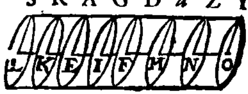
Si cylindrus plano ſecetur adverſis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Secetur cylindrus ABCD, *plano* G H, *parallelo adverſis planis* AB, C D, *quod quidem ſecet axem* E F, *in* I. *Dico ut eſt cylindrus* ABHG, *ad cylindrum* GHCD, *ita eſſe axem* E I, *ad axem* IF. *Intelligatur enim cylindrus* ABCD, *in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo* E C, *ad cujus revolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantum libet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ* EK, KL, *æquales ipſi* E I. *Item quotcunque rectæ* FM, MN, NO, *æquales ipſi* F I. *Deinde per puncta* I, K, L, M, N, O, *ducantur rectæ* I H, K P, L Q, M T, N V, OX, *parallelæ, & æquales rectis* EB, F C; *quæ quidem ad revolutionem rectanguli* E C, *deſcribent circulos* G H, P Q Q S, T*a*, Z V, VZXY, *parallelos æquales cir-*

circulis AB, CD, *ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt* SP, PA, *AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum* SQXY. *Quoniam verò tam cylindri* SP, *PA*, AH, *super bases æquales* QS, PRBA, *& sub altitudinibus æqualibus* KL, EK, IE, *æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD,* DH, *super æquales bases XY, VZ, Ta,* CD, *& sub altitudinibus æqualibus* NO, MN, FM, *IF, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri* AH, *quàm multiplex est axis* IL, *ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus* XG, *cylindri* CG, *quam multiplex est axis* IO, *ipsius axis* IF, *Quoniam autem si axis* IL, *(multiplex* IE, *primæ magnitudinis) æqualis est axi* IO, *(multiplici axis* IF, *secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus* SH, *(multiplex cylindri* AH, *tertiæ magnitudinis,) cylindro* XG, *(multiplici cylindri* CG, *quartæ magnitudinis,) ut ex propos. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major est axe, cylindrus quoque cylindro major est. Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5 ita axis* IE, *prima magnitudo ad axem* IF, *secundam magnitudinem, ut cylindrus* AH, *tertia magnitudo ad cylindrum* CG, *quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur adversis planis parallelo erit ut cylindrus ad cylindrum; ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Etsi hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat, tamen ejus demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta SY, semidiametros conjungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, ut constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.



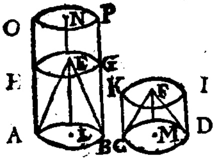
THEOR. 14. PROPOS. 14.

xj.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

Sint

Sint super bases æquales AB, CD, *duo coni* ABE, CDF, *& duo cylindri* ABGH, CDIK, *quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines)* LE, MF. *Dico esse conum* ABE, *ad conum* CDF, *& cylindrum* ABGH, *ad cylindrum* CDIK, *ut est altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Extendatur enim cylindrus* ABGH, *ad partes* GH, *una cum ejus axe* LE, *& rectangulo* AG; *abscindaturque axis* EN, *æqualis axi* MF, *& circa centrum* N, *intelligatur circulus* OP, *æqualis & parallelus circulo* GH, *ut fiat cylindrus* GHOP, *ejusdem altitudinis cum cylindro* CDIK.



a 7. quinti

b 13 duodec.

Quoniam igitur cylindri HP, CI, *cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos.* 11. *hujus lib.* a *cylindrus* AG, *ad ipsos eandem habebit proportionem.* b *Est autem cylindrus* AG, *ad cylindrum* HP, *ut axis seu altitudo* LE, *ad axem seu altitudinem* EN, *hoc est, ad altitudinem* MF, *sibi æqualem. Igitur & cylindrus* AG, *ad cylindrum* CI, *erit quoque, ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF.

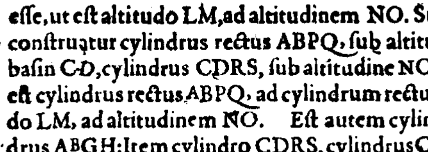
c 10. duodec.

d 15. quinti.

c *Quia vero coni* ABE, CDF, *sunt tertiæ partes cylindrorum* AG, CI; d *ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Atque proinde erit quoque conus* ABE, *ad conum* CDF, *ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.*

SCHOLIVM.

Hoc idem convenire conis scalenis hoc modo demonstrabimus: Sint super æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni,



quorum altitudines LMNO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, ut est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM, Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO. e Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Est autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

e 14. duodecimi.

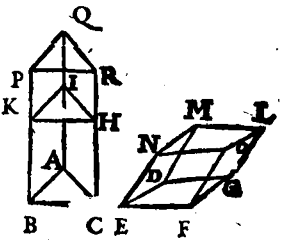
f 10. duodec.

Quoniam autem coni, f cum sint tertiæ partes cylindrorum, eam-a eandem habeant proportionem, quam cylindri; Erit quoq; conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo usi sumus in cylindris, confirmari potest, ut perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinem cum cylindris ABPQ CDRS. *a 15. quinti.*

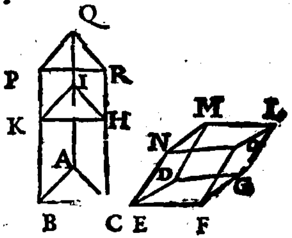
Idem concluditur quamvis unus conorum, & cylindrorum, nẽpe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus; alter vero, nimirum conus GDO, & cylindrus, CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ, sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO, ut Euclides demonstravit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, c cum illi horum sint tertiæ partes, Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua usi sumus in cylindris, ut manifestum est. *b 15. quinti* *c 10. duodec.*

Eadem quoque hæc propositio convenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG; prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinib. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendiculares, ita ut BK, sit altitudo prismatis ABCHIK: Productis autem rectis AI. CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini prismatis EL: & ductis rectis PQ. QR. RP, complentur prisma HIKPQR, ejusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntq; prismata HIK, PQR EL, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia ex coroll. 2. propos. 7. hujus lib. d Ac propterea prisma ABCHIK, ad utrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est ut planum BI, ad planum KQ. e Et ut planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma, EL, ut BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod propositum. *d 7. quinti* *e 1. sexti.*



Quod si insistentes lineæ AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma cujus insistentes sint perpendiculares ad basin, & æquales altitudini prismatis ABCHIK; Nam cum ex 2. coroll. propos. 7. hujus lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitque prisma constitutum ad prisma E L, ut illius altitudo ad hujus altitudinem, erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, ut altitudo illius, ad altitudinem hujus.



a Quoniam vero pyramides eandem proportionem cum prismatis, b quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem.

a 15. *quinti.*
b 10. *quinti.*

Eadem prorsus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, ut dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

Hæc omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris; nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

Omnia quoque hæc facile converti possunt hoc modo:

Coni & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines bases habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, ut in converso propos. 31. lib. 11. ostensum est.

xij.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

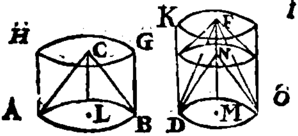
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

Sint æquales coni ABCD, DEF, *& æquales cylindri* ABGH, DEIK, *quorum bases* AB, DE; *axes, altitudines ve* LC, MF. *Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut* AB. *ad* DE, *ita* MF. *ad* LC. *In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines* LC, MF, *sint æquales; cum cylindri ponantur quoq; æquales, erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Quare erit ut basis* AB, *ad basin æqualem* DE, *ita altitudo* MF, *ad altitudinem æqualem* LC. *Ac proinde bases atque altitudines sunt reciproca.*

Quod

QUOD si altitudines LC, MF, inaequales fuerint, sit MF, major; ex qua abscindatur MN, ipsi LC, aequalis: & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, ut in scholio propos. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur aequales ponuntur cylindri ABGH, DEIK: a erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO; ita basis AB, ad basin DE, cum aequales sint altitudines: c Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint aequales, imo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN; hoc est, ad huic aequalem LC: Ac propterea reciproca sunt bases & altitudines.

a 7. quinti.



b 11. duodec.

c 14. duodec.

IN conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint aequales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, aequales. d cum coni sint cylindrorum tertiae partes. Quare ut ostensum est; ex aequalitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea, ex aequalitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, ut in figura.

d 10. duodec.

SED jam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse aequales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint aequales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem aequalem LC: erunt & bases AB, DE, aequales: Ac propterea cylindri super aequales bases AB, DE, & sub altitudinibus aequalibus LC, MF, aequales erunt, ex coroll. propos. 11. hujus lib.

QUOD si altitudines fuerint inaequales, sit constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic aequalem MN; e Est autem ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH; ad cylindrum DO; cum altitudines sint aequales: f Item ut altitudo MF; ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint aequales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO: g Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, aequalis erit.

e 11. duodec.
f 14. duodec.

g 9. quinti.

AT vero in conis haec erit demonstratio: Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur: reciprocabuntur quoque bases & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK; cum eaedem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quamobrem, ut osten-

ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorũ tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

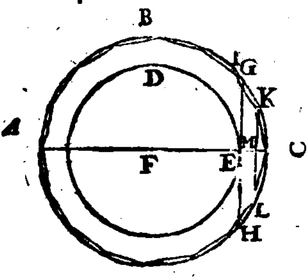
NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Quare ut ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, ut demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. hujus lib. inter se quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, ut perspicuum est ex iis, quæ in scholio propos. 14. hujus lib. docuimus.

xiii. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, DE, *circa idem centrum* F, *oporteatque in majori* A B C, *inscribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem* D E. *Extendatur per centrum* F, *recta* A C, *secans circulum* D E, *in* E *puncto & per* E, *ducatur* G H, *ad* A C, *perpendicularis, quæ tanget circulum* D E, *in* E, *ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus* AGC, *major est arcu* G C, *si ex* AGC, *auferatur dimidium* AB, *& ex residuo* B C, *dimidium* B I, *& ex residuo* IC, *dimidium* IK, *& sic deinceps; a relinquetur tandem*



1. decimi. *minor arcus quam* CG. *Sit igitur jam arcus* CK, *arcu* C G, *minor. & subtendatur recta* CK. *Dico rectam* CK, *esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus* BI, *dividatur in partes numero & magni-*

magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot divisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC; in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus recta linea subtendantur, a qua æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod a 29. tertii.
arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam b 29. tertii
igitur anguli GEM, KME, recti sunt: b erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, c ideoque æqualiter cum CK, à centro c 14. tertii.
F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

(HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Hujusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE. g)

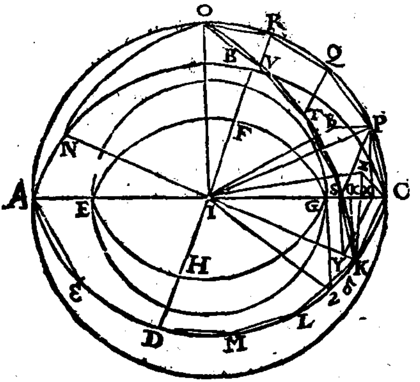
PROBL. PROPOS. 17. XIV.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in majori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem;

erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BC, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. *a* Deinde in majori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex C, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam usque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tangit in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ Gγ, *b* applicetur in circulo ABCD, recta æqualis A ε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, ut fiat triangulum GCγ, *c* latus Cγ, oppositum majori angulo, nempe recto, majus est latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto: erit quoque recta Cγ, major recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, major erit, ut constat ex scholio propos. 28 lib 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK; & sic deinceps; *d* relinquetur tandem arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos 29. lib. 3 *Dico igitur*, rectam CK, esse unum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, *non tangat circulum* EFGH; ut ex demonstratione præcedentis propos. patet: multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro KN, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut jam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt OC, OK: atque adeo cum circuli ABCD, DOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ majoris diametri, quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur

arcus



a 16. duod.

b 1. quarti.

c 19. primi.

d 1. decimi.

e 12. undec.

f 18. undec.

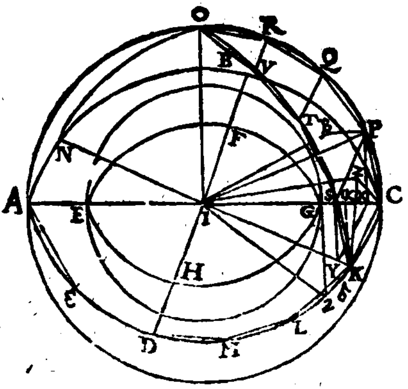
g schol. 21. ter.

arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot divisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD: *a* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD: CP, PQ, QR, RO, KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY *b* quæ in communes sectiones AC, NK, cadent; *c* Eruntque inter se parallelæ. a 29. tert. b 38. undecimi. c 6. undecimi.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKI, anguli PXC, SIK, recti sunt, ex defin, 3. lib. 11. *d* & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt: (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales sint & parallelæ: si connectatur recta XY; *f* æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. *g* At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera I C, I K, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ C X, K Y, relinquentur & IX, IY, æquales: A C proinde erit, ut IX, ad XC, ita IY, ad I K) *h* Erunt parallelæ quoque P S, CK, inter se, cum utraque parallela sit ipsi XY, *i* ideoque eas conjungentes rectæ C P, K S; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum C K, S P, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, T K, ostendemus similiter C K QT, esse parallelas: atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem C K, sint parallelæ: totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterum QTVR. *k* Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera K L, L M, M D, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphæra major repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes O C, O K, super latus C K, constructis, inscriptum erit in sphæra majori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. *Hoc* ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH. d 27. tertii e 62. pri. f 33. primi. g 2. sex. h 15. duodec. i 7. undec. k 2. undec.

DVCATVR enim ex I, ad planum C K S P, perpendicularis I Z, connectanturque rectæ ZC, Z K. Cadere autem perpendicularem I K, intra quadrilaterum C K S P, in scholio sequenti ostendemus.

Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; *a*
a 47. pri. erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum I Z, Z K, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, quadratis rectarum I Z, Z K, æqualia: Ac



proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectę ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quę ex Z, ad P S, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVD, circulos describi posse: demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est: *b* erit quadratum rectæ CK,
b 12. sec. majus quadratis rectarum Z C, Z K: ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, majus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ Z C.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis K, α, Cum igitur AC, dupla ipsius AI, & A α, major sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius A α. Quam ob rem, cum sit, *c* ut A C, ad Aα, ita
c 1 sexti. rectangulum sub AC, α C, ad rectangulum sub A α, α C, quod bases horum rectangulorum sint AC, A α, & eadem altitudo α C: erit quoque rectangulum sub AC, α C, minus duplo rectanguli sub A α, α C. *d* Est autem rectangulum sub AC, α C, æquale quadrato rectæ C K, & rectangulum sub A α, α C, æquale quadrato rectæ
d 17. sex. K α: quod recta CK, inter A C, α C, sit media proportionalis, & recta K α, inter A α, α C, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta A K, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ K α. Ac propterea cum quadratum C K, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ Z C, erit quadratum rectæ K α, majus quadrato rectæ Z C.
e 47. pri. *e* Quoniam vero quadratum rectæ I C, æquale est quadratis rectarum IZ, Z C, & quadratum rectæ I K, quadratis rectarum I α, α K;

Sunt-

Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium I C, I K. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum I α, α K. Si ergo ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ α K; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, majus quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z major quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta K α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figurę ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta C γ. a Est autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo major erit G γ, quam Z C: Ac propterea quadratum rectæ G γ, majus quadrato rectæ Z C. b Quia vero quadratum rectæ I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum rectæ I C quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, ęqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectę G γ, & hinc quadrato rectę Z C; relinquetur quadratum rectę I G, minus quadrato rectę I Z; Ac propterea recta I G, minor quam I Z. Quamobrem, cum IG, sit Sphærę minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphęram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, sphęram EFGH, nequaquam continget.

a 19. primi.

b 47. pri.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, ut demonstratum est; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. c erit quadratum rectæ I P, ęquale quadratis rectarum I β, β P. Quia vero & quadratum rectæ I C, (quod ęquale est quadrato rectę I P, ob ęqualitatem rectarum I C, I P,) ęquale est quadratis rectarum I Z, Z C; erunt quadrata rectarum I β, β P quadratis rectarum, I Z, Z C, ęqualia; Est autem quadratum rectę Z C, majus quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, major sit, quam linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectę I β, reliquo quadrato rectę I Z, majus erit; ideoque & linea, I β, major quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctū β, extra sphęram EFGH, existet, q̃ punctum Z: propterea; multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphęram majorē EFGH, Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana

c 47. pri.

sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus majori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

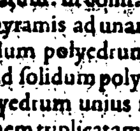
(EX iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est; si in quavis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro proportionem polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam ejus, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum: ut constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra majorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphera ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorũ sphærarum: ut constat ex coroll. propos. 8, hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, *a* cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.)

a 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera: quæ tamen nondum sunt demonstrata: idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, major quam IY: *b* erit & KC, major quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensa ipsis P, erit quoque KC, major quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK, major erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. *c* Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ: (subtenduntur enim arcubus circulo-



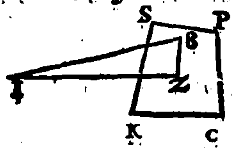
b 14. quin.

c 24. tertii.

rum

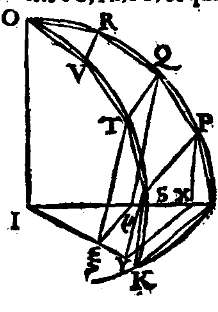
rum æqualibus, ut ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS. majores: Atque idcirco quilibet arcum CK, CP, KS, quadrantem circuli CK, SP, excedet: atque à semicirculo superabitur: ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad planam aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera: nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante major est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto major, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est in scholio prop. 27 lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim



quodcunq; aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adjungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. *a* Erit latus illi oppositum Iθ, majus latere IZ, quod minori angulo IθZ: nimirum acuto, opponitur: Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Similia argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare. a 19. pri.

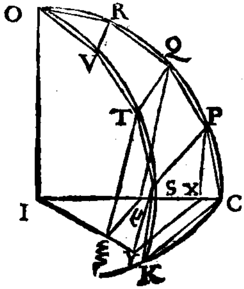
TERTIO, ac ultimo probandum est, rectam ZC, majorem esse recta θP. Quod ut aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, majorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, &c. Demittantur deinde ex



Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, *b* quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, *c* eruntq; inter sese parallelæ, ut de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adjungatur recta $\mu\xi$: erunt QT, $\mu\xi$, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse æquales SP, XY. *d* Quia vero $\mu\xi$, ipsi CK, parallela est quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; *e* erunt quoque $\mu\xi$, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. ut IY, ad YX, ita Iξ, ad $\xi\mu$: Est autem IY, major quam Iξ. *f* Igitur & YX, major erit quam $\xi\mu$: Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, major erit, quam QT, quæ æqualis est ipsi $\xi\mu$.

b 38. und.
c 6. undec.
d 2. sex.
e 30. pri.
f 14. quin.

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli egredianturque è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP: βP, βS, βT, βQ. Si igitur Z C, non credatur major, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia



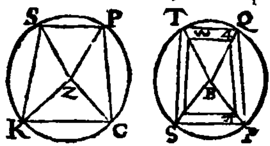
ergo latera Z K, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, major est base P S; *a* erit angulus KZC, major angulo SβP: Eadem ratione major erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ. sunt æquales; *b* erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, majores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum.

a 25. primi.

b 8. pri.

Non igitur equalis est recta ZC, rectæ β P.

SIT deinde ZC, minor quam βP, & abscindantur βπ, βϱ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ, πϱ, ϱω, ωφ, φπ, *c* quæ parallelæ erunt rectis P S, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris secta sunt proportionaliter, ac proinde ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut βS, ad S P, ita β ϱ, ad ϱ π.



c 6. sexti.

Cum ergo βS, major sit quam βϱ, *d* erit & SP, major quam ϱ π. Eademque ratione majores erunt ST, TQ, QP rectis ϱω, βφ, φπ: Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & T Q, minor quam PS, erunt rectæ πϱ, ϱω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βϱ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; *e* erunt anguli ad Z, majores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis equales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam β P: Sed neque æqualis est ostensa: Major igitur est. Quod erat ostendendum.

d 14. quin.

e 25. pri.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

XV.

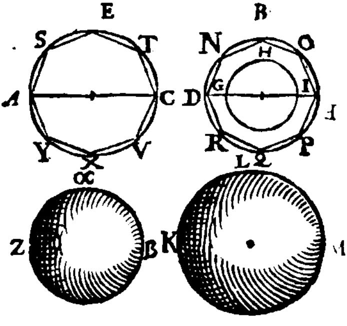
SPHÆRÆ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæra ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad dia-

me-

metrum AC, *ad diametrum* DF. *Habeat primum sphæra* A B C, *ad sphæram* GHI, *minorem sphæra* DEF, *proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF; *intelligaturque sphæra* GHI, *concentrica sphæra* DEF, f *Inscribatur in sphæra majori* DEF. *polyedrum* DNEOFPQR, *non tangens minorem sphæram* GHI: *Atque huic simile polyedrum* ASBTCVXY, *inscribatur in sphæra* ABC. *Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ* ABC, *ad sphæram* GHI, *triplicata proportionis diametri* AC, *ad diametrum* DF: *Est autem per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri* ASBTCVXY, *ad polyedrum* DNEOFPQR, *triplicata proportionis diametri* A C, *ad diametrum* DF: *Erit ut sphæra* ABC, *ad sphæram* GHI, *ita polyedrum* ASBTCVXY, *ad polyedrum* DNEOFPQR. *Quare cum sphæra* ABC, *major sit polyedro* ASBTCVXY, a *erit & sphæra* GHI, *major polyedro* DNEOFPQR, *pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra* ABC, *ad sphæram* GHI, *minorem sphæra* DEF, *proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF.

f 17. duodec.



a 14. quin.

HABEAT secundo sphæra ABC, *ad sphæram* KLM, *majorem sphæra* DEF, *proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF. *Cum igitur ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum* ASBTCVXY, *ad polyedrum* DNEOFPQR, *habeat proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF: *Erit ut sphæra* ABC, *ad sphæram* KLM, *ita polyedrum* ASBTCVXY, *ad polyedrum* DNEOFPQR: *Et convertendo, ut sphæra* KLM, *ad sphæram* ABC, *ita polyedrum* DNEOFPQR, *ad polyedrum* ASBTCVXY: *Est autem ex dicto coroll. præcedentis propos. polyedrum* DNEOFPQR, *ad polyedrum* ASBTCVXY, *in triplicata proportione diametri* DF, *ad diametrum* AC. *Igitur & sphæra* KLM, *ad sphæram* ABC, *erit in triplicata proportione diametri* DF, *ad diametrum* AC. *Ponatur ut sphæra* KLM, *ad sphæram* ABC, *ita sphæra* DEF, *ad aliam sphæram* Zαβ. *Habebit igitur & sphæra* DEF, *ad sphæram* Zαβ, *proportionem triplicatam diametri* DF, *ad diametrum* AC. *Et quia sphæra* KLM, *major ponitur, quam sphæra* DEF, *erit quoque sphæra* ABC, *major, quam sphæra* Zαβ. *Quapropter sphæra* DEF, *ad sphæram* Z α β,

mino-

minorem sphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphæram KLM, majorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæra itaque inter se sunt triplicata ratione suorum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

(HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum simile habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

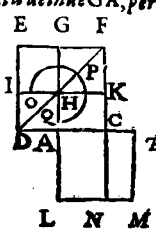
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMUM.

Et solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; majus segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius describitur, quadrati.

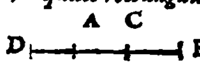
SEcetur recta AB, *in* C, *extrema ac media ratione, sitq; majus segmentum* AC. *Producta autem* BA, *ad* D, *sit* AD, *dimidia totius* AB. *Dico quadratum rectæ* CD, *quintuplum esse quadrati rectæ* AD. *Describatur enim super* CD, *quadratum* CE, *in quo ducto diametro* DF, *ducatur* AG, *ipsi* DE, *parallela, secans diametrum in* H, *puncto, per quod ducatur* IK, *parallela, ipsi* CD. *Producta deinde* GA, *perficiatur quadratum* AM, *protrahaturque* FC, *ad* N, *eruntq; ex coroll propos 4. lib. 2.* AI, KG, *quadrata rectarum* AD, AC. a *Quia ergo est ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB: b *erit rectangulum* CM, *sub* AB, GB, *æquale ipsi* KG, *quadrato rectæ* AC. *Deinde cum ponatur* AB, *dupla ipsius* AD, *sitque* AL, *ipsi* AB: *&* AH, *ipsi* AD, *æqualis; erit quoque* AL, *ipsius* AH, *dupla*: c *Est autem ut* AL, *ad* AH, *ita rectangulum* AN, *ad* AK, *rectangulum. Duplum igitur est* AN, *ipsius* AK. *Quoniam autem* AK, *ipsi* IG, *est æquale*; d *erit* AN, *æquale duobus* AK, IG. *Additis igitur æqualibus* CM, KG; *erit quadratum* AM, *gnomoni* OPQ, *æqua-*



a 3. def. sexti.
b 17. sexti.
c 1. sexti.
d 34. primi.

quale. Quare cum quadratum AM, *quadruplum sit quadrati* AI, *ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quod linea* AB, *dupla ponatur linea* AD, *erit & gnomon* OPQ, *ejusdem quadrati* AI, *quadruplus; Ac propterea, si gnomoni* OPQ, *addatur ipsum quadratum* AI, *quintuplum efficietur quadratum* CE, *quadrati* AI.

ALITER. *Ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum rectæ* AB, *quadruplum est quadrati rectæ* AD, *quod linea* AB, *dupla lineæ* AD, *ponatur.* a *Est autem quadratum rectæ* AB, *æquale rectangulis*
a 2. secund. *sub* AB, AC, *& sub* AB, BC, *comprehensis;*



Et rursus, quod sub AB, AC, *æquale est ei, quod sub* AD, AC, *bis; (sicut enim* AB, AD,
b 1. sexti. *est dupla,* b *ita quoq; erit rectangulum sub* AB, AC, *rectanguli sub* AD, AC, *duplum ipsius cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo* AC, *Ac propterea rectangulum sub* AD, AC, *bis sumptum æquale erit rectangulo sub* AB, AC.) c *Quod vero sub* AB. BC, *æquale est*
c 17 sex. *quadrato rectæ* AC, *cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Igitur quadratum rectæ* AC, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis quadruplum quoq; erit quadrati rectæ* AD; *Ac proinde quadrata rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis, quintupla erunt qua-*
d 4. sec. *drati ejusdem rectæ* AD. d *Quocirca cum quadratum rectæ* CD, *æquale sit quadratis rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo sub* AD, AC, *bis; Erit & quadratum rectæ* CD, *quadrati rectæ* AD, *quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

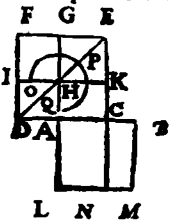
II.

SI recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, majus segmentum reliqua pars est ejus, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, ut post ostendemus, major erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, majus segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturque EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum poni-

tur

tur quadrati C I: Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon OPQ, ejusdem quadrati C I, quadruplus: Est autem & quadratum C M, quadruplum quadrati C I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla sit rectæ A C, Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rursus quoniam C D, ponitur ipsius A C, dupla; estque L C, ipsi C D: & C H, ipsi A C, æqualis: erit & L C, ipsius C H, dupla. a Cum igitur sit ut L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum C K: erit quoque illud hujus duplum: b Est autem C K, ipsi H F, æquale. Æquale igitur est L B, ipsis C K, H F; ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo sunt tres rectæ C D, C B, B D: estque rectangulum B M, sub C D, B D, comprehensum æquale ipsi K G, quadrato rectæ C B. c Erit ut C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estque majus segmentum C B.



a 1. sexti.

b 43. pri.

c 17. sexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C: d estque quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectangulo sub A C, C B, bis: Erit & quadrata rectarum C B, A C, una cũ rectangulo sub A C: C B, bis quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadruplum ejusdem quadrati rectæ A C: Est autem & quadratum rectæ C D, ejusdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ C B, & rectangulum sub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo rectangulum sub A C, C B, bis, æquale sit rectangulo sub C D, C B: (sicut enim recta C D, dupla est rectæ A C, e ita quoque duplum erit rectangulum sub C D, C B, rectanguli sub A C, C B: cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo C B: Ac propterea rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulo sub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectangulum sub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: f At quadratum rectæ C D, æquale est rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub C D, C B, æquale erit rectangulis sub C D, C B, & sub C D, B D. Ac proinde dempto communi rectangulo sub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectangulo sub C D, B D: g ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B, ad D B. Quare ex defin. recta C D, secta est in B, extrema ac media ratione, estque segmentum majus C B. Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

d 4. secun.

e 1. sexti.

f 2. secun.

g 17. sexti.

LEM-

LEMMA.

QVOD autem recta CD, major sit necessario quam CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla ejusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, majus quadratis rectarum AC, CD, *a* cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis.

a 14. *secun.*

Igitur quadratum rectæ AD, majus quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea majus quadrato rectæ AB; quod quintuplum ponitur ejusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, major erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC, major erit reliqua CD, quam reliqua C *B*. Quod est propositum.

iii.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati.

*S*ECETVR *recta* AB, *in* C, *extrema ac media ratione, cujus majus segmentum* AC, *bifariam dividatur in* D. *Dico quadratum recta* BD, *quadruplum esse quadrati recta* C D. *Describatur enim super* A B, *quadratum* A E, *in quo diameter* B F: *Deinde ex*

C, D, *ducantur ipsis* AF, BE, *parallela* CG, D H, *secantes diametrum in* I, K, *punctis, per qua agantur ipsis* AB, EF, *parallela* LM, *NO*, *qua secent rectas* C G, DH, *in* P, Q. *Eruntque ex coroll. propos.* 4. *lib.* 2. L G, P Q, D O, *quadrata rectarum* AC, CD, BD: *Quoniam igitur recta* A G, *dupla est recta* CD, *erit ex scholio ejusdem propos. quadratum* LG, *quadruplum quadrati* PQ. *Est autem rectangulum* CE, *æquale quadrato* LG. (*Nam cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, b *erit rectangulum sub* AB, CB *nempe* CE, *æquale quadrato recta* AC, *nimirum ipsi* LG.) *Igitur &* CE, *quadruplum erit quadrati* PQ. *Quia vero æqualia sunt quadrata* NH, PQ, *ob æqualitatem rectarum* AD, CD: *erunt earum latera* HK, IQ, *æqualia*: c *ac proinde recta* EO, O M, *ipsis opposita æquales erunt.* d *Quare rectangula* IO, QE, *æqualia erunt.* e *Est autem* IO, *ipsi* I D, *æquale.* Ergo *&* QE, *eidem* I D. *æquale erit.*

b 17. *sexti.*
c 34. *primi*
d 36. *pri.*
e 43. *primi*

erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO, totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD

ALITER. *Cum AC, divisa sit bifariam in D, & ei addita CB,*
a *erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æqua-* a 6. *secun.*
le quadrato rectæ BD. At rectangulum sub AC

CB, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; b *erit re-* b 17. *sex.*
ctangulum sub AB, AG, æquale quadrato rectæ AC: quod cum ex scholio propos. 4. l. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD: erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum ejusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM hujus theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidium majoris segmenti quintuplum possit ejus, quod à dimidia majoris segmenti describitur quadrati. Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, divisa inæqualiter in C, cujus majus segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum recta BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, divisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore hujus propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ,) ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, ejusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, ut supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB BC, comprehensum; *c* Ac proinde erit, ut AB, ad AC, ita AC, c 17. *sext.*

ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

ALITER. Cum AC, divisa sit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD: Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum ejusdem quadrati rectæ CD, Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem ejusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulum sub AB, BC. b Quamobrem erit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

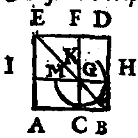
a 6. secundi.

b 17. sexti.

V. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt ejus, quod à majore segmento describitur, quadrati.

SECETUR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum majus AC, & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: c erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD: erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF: Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, ejusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.



c 17. sexti.

d 17. sex.

ALITER. Quoniam est, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: d erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrati rectæ AC, una cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta secundum extremam & me-

e 7. secun.

mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul utraq; quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

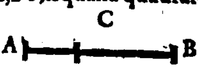
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam hujus verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex majore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita ut quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, utraque simul tripla sint quadrati majoris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, ut prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF, dempto quadrato IF, erit gnomon KL, una cum quadrato CH, duplus ejusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, una cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD; Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF: Ac proinde cum æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC: *a* erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: *a 17. sexti.*
Ac propterea AB, divisa erit in C extrema ac media ratione.

ALITER Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; *b* Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato *b 7. secundi.*
rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis: erit & quadratum rectæ AC, una cũ rectangulo sub AB, BC, bis. triplum quadrati rectæ AC.



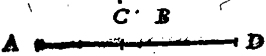
Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC semel, æquale quadrato rectæ AC. *c* Quare ut prius erit ut AB, *c 17. sexti.*
ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest ejus, quod à majori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, majore segmento. *a* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, una cum quadrato ex AC: *b* Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum sub AB, AC, quater una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC quater, una cum quadrato ex AC,) ejusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

a 8. secundi.
b 17. sexti



SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratum ex AD, quadrati ex AC, majori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac media ratione. *c* Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. *d* Igitur erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.

c 8. secundi
d 17. sexti.

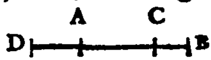
THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis majori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque majus segmentum AC, & adjiciatur ei in rectum AD, æqualis majori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseque majus segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi

ipsi AF, parallela DL, *occurrens ipsi* IK, *producta in* L. *Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2.* CK, *IG, quadrata rectarum AC*, BC. *Quoniam igitur est ut* AB, *ad* AC, *ita AC, ad* CB; a *Erit rectangulum* IF, *contentum sub A*B, BC, *aquale quadrato* CK, *recta A*C. b *Est autem* CK, *ipsi* AL, *aquale.* Igitur IF, *aquale erit ipsi* AL: *additoq; communi* BK, *erit rectangulum* BL, *contentum sub* BD, *DA, aquale quadrato*BF, *recta* AB: c *Ac proinde erit ut* BD, *ad* AB, *ita* AB, *ad* DA. *Quare* BD, *secatur in A, extrema ac media ratione, estq; majus segmentum* AB. a 17. *sexti.* b 36. *primi* c 17. *sexti.*

ALITER. *Quoniam est ut A*B, *ad* AC, *hoc est, ad AD, ita AC, ad* CB: *Erit convertendo ut* D*A, ad* AB, *ita* BC, *ad* DA: *& componendo ut* DB, *ad* AB, *ita* AB, *ad* CA, *hoc est, ad* AD. *Secta igitur est* BD, *in A, extrema ac media ratione.* Itaque *si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, opponaturque ei aqualis majori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.*



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex majori segmento segmentum minus; erit majus segmentum sectum extrema ac media ratione, & majus segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cujus majus segmentum AB, minus autem segmentum AD, & ex majori segmento AB, detrahatur recta AC. æqualis minori segmento AD. Dico majus segmentum AB, divisum esse in C, extrema ac media ratione, & majus segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figuræ constructione, cum sit ut BD, ad AB, ita AB, ad AD, *d* erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF: *e* Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: *f* Ac proinde erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cujus segmentum majus est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum. d 17. *sexti.* e 36. *primi.* f 17. *sexti.*

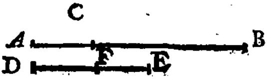
ALITER. Quoniam est ut tota BD, ad totam AB, ita AB. detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; *g* erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, ut tota DB, ad totam AB, hoc est, ut AB, ad AC; Ac propterea g 19. *quinti.*

divisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia majoris segmenti: Erit quoque dimidia totius divisa extrema ac media ratione, majusque segmentum erit dimidium majoris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF dimidium majoris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, majusque segmentum esse DF.



Cum enim sit ut AB, tota ad DE, totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum utrobique sit proportio dupla: *a* erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, ut tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. *b* Quoniam vero est, ut AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam hujus; Est autem ex defin. lineæ sectæ extrema ac media ratione, AB, ad AC, ut AC; ad CB: erit quoque DE, ad DF, ut DF, ad FE: Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

a 19. *quinti.*

b 15. *quinti.*

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico utrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim majori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. c Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD: habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. d Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD: proptereaque ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoq; existent, saltem potentia; Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) e erunt rectæ CD, AD, longitudine incom-

c 1. *tertii dec.*

d 6. *dec.*

e 9. *dec.*

com-

commensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, *Rationali detrahatur* AD, *Rationalis potentia tantum commensurabilis; a erit reliqua* AC, *Irrationalis, qua appellatur* Apotome. a 74. decl.

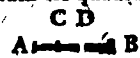
RVRSVS applicata ad AB, *rectangulo* AE, *contento sub* AB, CB: *cum sit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, b *erit rectangulum* AE, *aquale quadrato recta* AC. *Quam ob rem quadratum Apotoma* AC, *nimirum rectangulum* AE, *applicatum secundum lineam Rationalem* AB, c *facit alterum latus* BE, *hoc est rectam* CB, *illi aqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.* b 17. sexti c 98. decl.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque majus segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

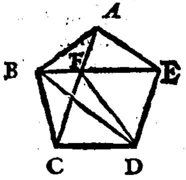
SIT recta AB, extrema ac media ratione divisa in C, sitq; majus segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Divisa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. *d* Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum: *e* ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; *f* erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome. d 3. tertii dec. e 6. decimi. f 74. dec.



THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT *in pentagono aquilatero* ABCDE, *tres anguli, qui primum deinceps sint, aquales* A, B, C. *Dico ipsum pentagonum esse* æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD: & ex puncto F, ubi se intersecant rectæ BF, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, a 4.pri. æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD, & anguli quoque b 5.primi. ipsis contenti æquales, ex hypothesi; a erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; b Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD: Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: c Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & c 4.primi. anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales d 6.primi. sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; d erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera AF, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD; e 8.pri. & basis communis FD; e erunt & anguli dictis lateribus contenti GED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE: erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.



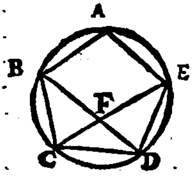
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD: & anguli quoque ipsis contenti, æquales, f 4.primi. ex hypothesi: f Erunt & bases BE, BD. & anguli AEB, CDB, æqua- g 5.primi. les: g Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE: erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D: Ac proinde, ut jam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

xi.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæc extrema & media ratione se mutuo secant, & majora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, se mutuo



mutuo secantes in F. *Dico ipsas secari extrema ac media ratione, majoraq; earum segmenta* FB, FE, *æqualia esse lateri cuilibet pentagoni.* a *Descripto enim circulo circa pentagonum;* b *erunt quinque arcus* AB, BC, CD, DE, EA, *æquales. Quia vero latera* CD, DB, *trianguli* CDB, *æqualia sunt lateribus* DC, CB, *trianguli* DCB: *& anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi:* c *Erunt & bases* DB, CE, *& anguli* CDB, DCE, *æquales: ac proinde cum in triangulo* CDE, *duo anguli* FCD, FDC, *sint æquales.* d *& ipsis æqualis sit externus angulus* BFC: *erit angulus* BFC, *duplus anguli* DCE: e *Est autem & angulus* BCE, *ejusdem anguli* DCE, *duplus, quod & arcus* BAE, *arcus* DE, *sit duplus. Igitur anguli* BFC, BCF, *æquales sunt:* f *Ideoq; recta* BF, *lateri pentagoni* BC, *æqualis.* g *Quoniam autem anguli* DBC, ECD, *arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli* DBC, CDB, *trianguli* BCD, *æquales duobus angulis* DCF, FDC, *trianguli* CFD. h *Ac proinde æquiangula erunt triangula* BCD, CFD. i *Quare erit ut* BD, *ad* DC, *hoc est, ad* BF, *æqualem ipsi* DC, *ita* CD, *hoc est, sibi æqualis* BF, *ad* FD: *Ac propterea* BD, *secta est in* F, *extrema ac media ratione, estque majus segmentum* DF, *lateri pentagoni æquale, ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam* CE, *secari in* F, *extrema ac media ratione, majusq; illius segmentum* EF, *æquale esse lateri pentagoni* DE. *Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.*

a 14. quarti.
b 28. tertii.
c 4. primi.
d 32. pri.
e 33. sexti.
f 6. primi.
g 27. tert.
h 32. primi
i 4. sext.

SCHOLIVM.

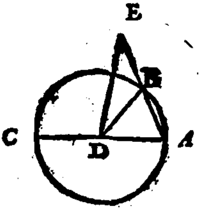
FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD. parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum. k Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: l ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.

k 22. tertii
l 28. primi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur; Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus.

In circulo ABC, *sit latus decagoni* AB, *cui in rectum addatur*



BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, majusq; segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diametra AC, conjunganturq; rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. a *Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.)* b *erunt & anguli BDE, BED, æquales:* c *quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED:* d *Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED; ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED.* e *Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC erit angulus BDC, quadruplus ejusdem anguli BED. Atqui idem angulus BDC, ostensum fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD,* f *erunt triangula ADE, ABD, æquiangula.* g *Igitur erit ut EA, ad AD, hoc est, ad EB ipsi AD, æqualem, ita AD hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atque idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque majus segmentum EB, latus hexagoni. Itaq; si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.*

a 33. sex.
b 5. pri.
c 32. pri.
d 5. primi.
e 32. Primi
f 32. primi.
g 4 sex.

SCHOLIVM.

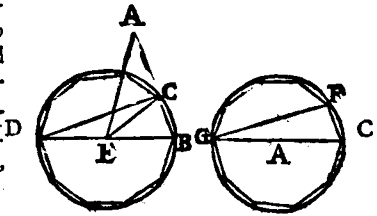
QVIA verò demonstravimus ad propos. 5. hujus lib. si minus segmentum lineæ divisæ extrema ac media ratione ex majori segmento detrahatur, majus segmentum secari quoque extrema & media ratione, ejusq; segmentum majus esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, majus illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est majus segmentum, divisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propos. 5. hujus lib. ostendimus. *Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.*

CONVERSVM quoq; hujus theorematis facilè cum Campano demonstrabimus Videlicet.

SI

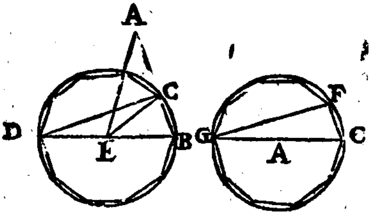
SI linea divisa extrema ac media ratione majus segmentum fuerit latus hexagoni alicujus circuli; Erit minus segmentum latus decagoni ejusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicujus circuli; Erit majus segmentum latus hexagoni ejusdem circuli.

SIT enim AB, divisa in C, extrema & media ratione, sitque primum A C, latus hexagoni circuli B C D. Dico minus segmentum C B, esse ejusdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim B C, in circulo, ita ut C A, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro B E D, connectantur rectæ E A, E C. Quia ergo est, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: & est A C, latus hexagoni æquale semidiametro E B, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoq; ut A B, ad B E, ita E B, ad B C, *a* ideoque triangula A B E, E B C, æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo B E C, æqualis. Rursus quia latera C A, C E, æqualia sunt, nempe latera hexagoni; *b* erunt anguli C A E, C E A, æquales; quibus cùm æqualis sit externus B C E, erit B C E, duplus anguli A. *d* Est autem angulo B C E, angulus C B E, ob æqualitatem laterum E B, E C, æqualis. Igitur & C B E, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli B C E, C B E, simul quadrupli erunt ejusdem anguli A. *e* Cùm ergo angulis B C E, C B E, æqualis sit externus C E D; erit quoque angulus C E D, ejusdem anguli A, & propterea anguli B E C, qui æqualis ostensus est angulo A, quadruplus. *f* Quare & arcus C D, quadruplus erit arcus B C; Ac proinde arcus semicirculi B C D, ejusdem arcus B C, quintuplus existet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arc[us] B C. Quapropter recta B C, latus est decagoni.



a 6. *sex.*
b 5. *primi.*
c 32. *primi.*
d 5 *primi.*
e 32. *pri.*
f 33. *sexti.*

SIT deinde C B, minus segmentum, latus decagoni circuli B C D, Dico majus segmentum A C, esse ejusdē circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus B C, in circulo B C D; ducaturq; diameter B E D. Deinde intervallo A C, describatur circulus C F H, cujus diameter C A G, eritq, ex coroll. propos. 15. lib. 4. A C, latus hexagoni circuli C F. Quoniam igitur A B, secta est in C, extrema ac media ratione, estque majus segmentum A C, latus hexagoni circuli C F G: erit ut jam ostensum est, minus segmentum C B, latus decagoni ejusdem circuli C F G. Describatur ergo in circulo C F G, decagonum æquilaterum, & æquiangulum C F G: Item in circulo B C D: decagonum æquilaterum, & æquiangulum B C D: eruntque latera B C, C F, inter se æqualia. Quoniam verò, si con-



si connectantur rectæ E D, F G, anguli C D B, F G C, sunt æquales, ut in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similib⁹ B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & sunt quoq; anguli B C D, C F G, in semicirculis æquales, *a* nimirum recti; *b* Erunt quoque latera B D, C G inter se æqualia. Quamobrẽ cum diametri B D, C G, sint ęquales, æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cum recta A C, sit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod est propositum.

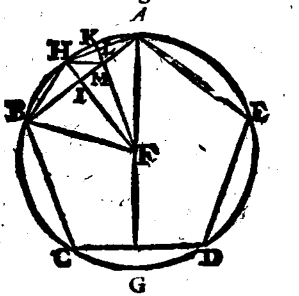
a 31. tertii.
b 36. pri.

X.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

In circulo A B C D E, cujus centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni ejusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diviso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diviso arcu AH, bifariam in K, adjungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M.



Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; *c* erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipsi contenti æquales quoque; *d* erunt & bases A I, B I, æquales & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B, D G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G inter sese æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D. Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint; erunt quoque eorum dimidii arcus C G, A H, æqua-

c 27. tertii

d 4. primi.

quales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus ejusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, ejusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit ut AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. *quinti.* b 33. *sexti.* c 20. *tert.* d 32. *pri.* e 4. *sex.* f 17. *sex.*

RVRSVS quia latera AL, HM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit ut AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est a. & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH. *m* At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

g 4. *primi* h 5. *primi.* i 32. *primi.* k 4 *sex.* l 17. *sex.* m 2. *secundi.*

COROLLARIVM I.

(HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoq; rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, dividit bifariam, dividere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

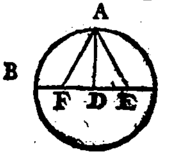
COROLLARIVM II.

(PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductum dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est, diametrum AG, ex puncto A, ductam divipere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum,

trum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuit impar, ut constat.

SCHOLIUM

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolomeo tradidimus, qua una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, ejusq; demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc à nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cujus centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde divisa se-



midiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adjungaturq; recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, eique addita D F, *a* erit rectangulũ sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsi E F, est æqualis. *b* Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, una cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E: Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D. *c* Quamobrem erit ut C F, ad C D, ita C D, ad D F, proptereaque recta C F, divisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur majus segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni ejusdem circuli, ut demonstravimus ad propo. 9. hujus lib. *d* Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni ejusdem circuli; *e* Est autem ejusdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F: erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F: ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

a 6. secundi.

b 47. primi

c 17. sexti.

d 10. tertiidec.

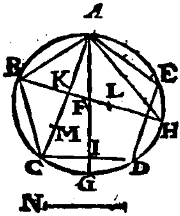
e 47. pri.

xi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem: describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico ejus latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AG, secet diametrum BH, in K. Abscinscindatur quoque ex semediametro FH, quarta ejus pars FL: Item ex recta AC, quarta ejus pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles: cum sint ejus partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, composita, *a* cum sit commensurabilis utrique FL, BF, Rationalis erit. a 16. dec.



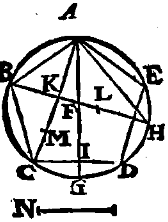
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B: secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. ejusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, *b* æquiangula inter se erunt. *c* Quamobrem erit, ut CI, ad CA, ita FK, ad FA: & permutando ut CI, ad FK, ita CA, ad FA, sive ad FH, ipsi FA, æqualem. *d* Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur ut CI, ad FK, ita CM, ad FL: & permutando, ut CI, ad CM, hoc est, ut CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL: Atque componendo, ut CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL: *e* Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) *f* majus ejus segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD: *g* Erit quadratum rectæ compositæ ex CD, majori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, *h* ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL: Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. primi
c 3. sexti.
d 15. quinti.
e 22. sexti.
f 8. tertii dec.
g 1. tertii dec.
h 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL: ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1 est quadratum rectæ FL, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratum rectæ FL, talium 5. ostensum est quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. est quadratum rectæ BL, talium 5. est quadratum rectæ KL: ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum qua-

i 20. sexti.

dra-



a 9. dec.

b 74. dec.

dratum, (ut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) a *Erunt rectæ* BL, KL, *longitudine incommensurabiles: ideoque cum ostensæ sint Rationales; erunt Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rationali* BL, *dematur Rationalis* KL, *potentia tantum commensurabilis.* b *erit reliqua* BK, *Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit* KL.

IAM vero recta BL, *possit plus, quam recta* KL, *quadrato rectæ* N. *Quoniam igitur quadratum rectæ* BL, *æquale est quadratis rectarum* KL, *&* N: *Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ* BL, *talium 1, fuit quadratum rectæ* KL. *Erit reliquum quadratum rectæ* N, *talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ* BL; *Ac propterea quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem habebunt, quam numerus ad numerum.* c *Quare commensurabilia erunt: proptereaq; rectæ ipsæ* BL, *&* N, *commensurabiles, saltem potentia: Est autem* BL, *ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit &* N. *Quia vero quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (ut perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.)* d *Erunt rectæ* BL, *&* N, *longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta* BL, *Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali* BH: *(Qualium enim partium 8. est* BH, *talium 5. est* BL,*) possitque plus, quam congruens* KL, *quadrato rectæ* N, *sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est: Erit* BK, *Apotome quarta, ex definitione.*

c 6. dec.

d 9. dec.

POSTREMO *quia recta* AB, *est media proportionalis inter* BH, BK, *ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum* ABH, e *habeat angulum* BAH, *rectum, à quo ducta est* AK, *ad basin perpendicularis.)* f *erit quadratum rectæ* AB, *æquale rectangulo sub* BH, BK. *Quocirca cum superficiem contentam sub rationali* BH, *& Apotoma quarta* BK, *possit recta linea* AB: g *Erit* AB, *linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.*

e 31. tert.
f 17. sexti.
g 95. dec.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est ejus lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

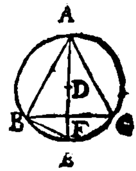
IN cir-

IN circulo ABC, cujus centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. hujus lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariam quoq;, & ad angulos rectos in puncto F, cum arcus BC, sit tertia pars totius peripheriæ: erit arcus BE, ejusdem peripheriæ sexta pars, ideoq; conjuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit ejusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est ejusdem, at proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4. a Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, b quod angulus ABE, in semicirculo rectus sit: Est autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE: erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati ejusdem rectæ BE: Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1 erit quadratum rectæ BE: & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 47. pri.
b 31. tertii.

COROLLARIVM I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex *AD*, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. li. 2. quadruplum est quadrati ex A *D*, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex A*B*, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.



ET quia ex coroll. propos. 8. lib 6. ut est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri *AB*, perpendicularis AF, ex uno angulo ad basin demissæ potentia sesquitertium. quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide 14. propos. 12.)

COROLLARIVM II.

(HINC facilè etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, à latere trianguli BC Cum enim quadratum rectæ A *B*, triplum sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. c Est autem

c 47. pri.

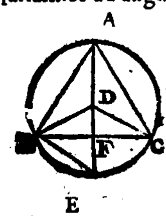
quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF (quod quadratum rectę AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4 lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE: Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc est, quadratum rectæ DE, sibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex scholio propos. 4. lib. 2. recta DE dupla erit ipsius FE. Quocirca DE, bifariam secatur in F.)

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta dividet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.

IN circulo ABC, cujus centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC, & latus BC, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, secari à latere B C, bifariam. & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum



latera AB, AD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales
a 8. pri. quoque: *a* Erunt anguli BAD, C A D, æquales Quod est primum.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi:
b 4. pri. *b* Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.

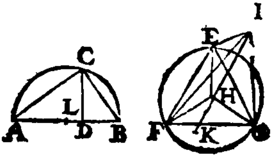
POSTREMO, cum anguli B AE, C AE, demonstrati sint esse æquales; *c* erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum B E C, arcus
c 26. tert. sit tertia pars circumferentię, erit BE, sexta pars ejusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde B D, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. *d* Igitur anguli BDE, BED, æ-
d 5. pri. quales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æ-
e 26. pri. quales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; *e* Erunt & latera DF, EF, æqualia, Quod est tertium.

XIII. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT

SIT data sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, ejusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad intervallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cujus centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG, adjunganturque rectæ HF, HG, quæ singula æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cujus intervallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEG, IEF, IFG, IEG, esse Pyramidem, sive Tetraedrum.



Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti, recti ex hypothesi, & 3. defin. 11. a erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt ex coroll propos. 8. lib. 6. erit ex coroll propos. 20. lib. 6. ut AD, ad DC, ita quadratum rectæ AD, ad quadratum rectæ DC; & componendo, ut AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, simul ad quadratum rectæ DC: b Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoq; ut AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC: Ac proinde cum AB, sit ipsius DB, tripla, erit quoq; quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC: c Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque est ejusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit: & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, ostensa quoque sit æqualis rectis IE, IF, IG: erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur jam est pyramis, seu, Tetraedrum, cujus basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cujus diameter AB: & diametrum sphæræ AB, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.

a 4. pri.
b 47. pri.
c 12. tertii.

EXTENDATUR perpendicularis IH, usque ad K; ut sit HK, ipsi DB: & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK: erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, sit ad IK, perpendicularis & media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK, descriptus in plano rectarum IK, HE, transibit per E, ut mox ostendetur: Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK, descri-

ptus in plano rectarum IK, HF, *transibit per* F, *quam semicirculus circa eandem* IK, *descriptus in plano rectarum* IK, HG, *per* G. *Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphaeram describet, quae constitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos* E, F, G, I, *incedat. Cum ergo haec sphaera descripta aequalis sit sphaerae datae, quod diameter* IK, *aequalis ponatur diametro* AB, *comprehendetur idem Tetraedrum sphaera data.*

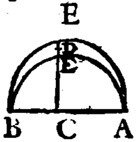
QVONIAM verò tres rectae AB, AC, AD, *proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ut* AB, *ad* AD, *ita quadratum rectae* AB, *ad quadratum rectae* AC, *ex coroll. propos 20. lib 6. Est autem recta* AB, *sesquialtera rectae* AD, *quod qualium partium 3. est* AB, *talium 2. sit* AD. *Igitur & quadratum rectae* AB, *sesquialterum erit quadrati rectae* AC: *Ac propterea cum* AB, *sit diameter sphaerae & AC, recta lateri Pyramidis* EF, *aequalis, perspicuum est, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris* Tetraedri, *seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphaera complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.*

LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quae sit media proportionalis inter segmenta lineae; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineae perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si



transeat circa D, vel ultra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectae CD, quam quadratum rectae CE, *a* aequale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter se aequalia, & ipsae rectae CD, CE, aequales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.

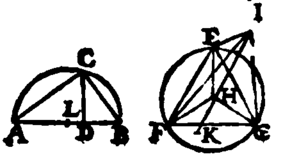
a 17. sexti.

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura

gura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

(HINC facilè colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. est quadratum rectæ EF, talium partium 2. est quadratū rectæ HE, a quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE: Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit quę 9. ad 2.



a 12. tertii dec.

COROLLARIVM II.

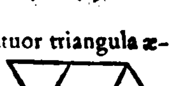
RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem est quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem semidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla est ipsius DB: Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quę fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudine pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. ut hic apparet 9. 6. 4.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facilè ex ipsis ritè inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totam so-



 lidita

liditatem. Hanc verò praxin,& sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quavis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris istius octaedri.

SIT sphæra, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, *circa quam semicirculus describatur* ACB, *& ex centro* D, *ad* AB, *perpendicularis ducatur* DC, *connectanturque rectæ* AC,
a 4. pri. BC, a *quæ æquales inter se erunt. Sumpta jam recta* EF, *quæ æqualis sit ipsi* AC, *vel* BC, *describatur super eam quadratum* EFGH, *in quo ducantur diametri* EG, FH, *se mutuo secantes in* I: *eruntque rectæ* IE, IF, IG, IH, *æquales; cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, ut in 4. lib demonstratum est. Deinde ex* I, *in utramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis* KL, *ponanturque* IK, IL, *æquales ipsi* IE: *Et deniq; ex* K, *&* L, *deducantur ad angulos quadrati rectæ* KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. *Dico solidum contentum octo triangulis* KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, LHG, LFG, *esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera* EI, IK, *trianguli* EIK, *æqualia sunt lateribus* FI, IH, *trianguli* EIH; *& anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem* EIK, *ex defin. 3. lib. 11. At vero* EIG, b *eo quod sit æqualis angulo* GIH, *sibi deinceps, ob æqualitatem laterum* EI, IH, GI,
b 8. primi. IH, *& basium* EH, GH,) c *Erit & basis* EK, *basi* EH, *æqualis: Eodemque modo eidem* EH, *æqualis erit* KH; *ideoque triangulum æ-*
c 4. pri. *quilaterum erit* KEH. *Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo* KEH, *cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati* EFGH, *singula singulis. Constitutum igitur jam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri* AB, *qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur, & diametrum sphæræ* AB, *potentia duplam esse lateris* EF, *vel* AC.

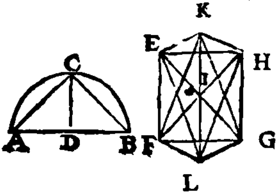
QVONIAM enim IE, *perpendicularis est ad* KL, *ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta* KI, IL: *(quod tres rectæ* KI, IE, IL, *æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa* KL, *in plano rectarum* KL, IE, *descriptus transibit per punctum* E, *ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem* KL, *in plano rectarum* KL, IF, *incedet per punctum* F. *Idemque dicendum est de punctis* G, H. *Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus,*

ctus, manente fixa diametro K L, *describet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cujus diameter* AB; (*Nam cum rectæ* AC, EF, *æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia: Sit autem tam quadratum rectæ* AC, *duplum quadrati rectæ* A D, *quam quadratum rectæ* EF, *quadrati rectæ* EI; *Erunt & rectæ* AD, EI, *hoc est*, KI, *semidiametri æquales. Quare & totæ diametri* AB, KL, *æquales erunt: ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent*) *comprehendetur idem octaedrum data sphæra.*

QVIA vero quadratum rectæ AB, a *æquale est quadratis rectarum* AC, BC, *quæ æqualia sunt: erit quadratum rectæ* A B, *duplum quadrati rectæ* AC. *Quamobrem cum* A B, *sit diameter sphæræ, &* AC, *recta æqualis lateri octaedri* EF: *manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaq; octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, quæ & pyramidem. Quod erat faciendum.* a 47. primi

COROLLARIVM I.

(EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cum IK, recta sit ad lineas EG, HF: b recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: c Ideoque ad plana KELH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Imò eadem ratione, ut paucis rem complectar, erit tria plana EFGH, KELH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos, eo quod cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri FK, KH. d Ita enim efficitur, ut angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis. b 4. undec. c 8. undecimi. d 48. pri.



COROLLARIVM. II.

OCTAEDRVM dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cujusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

COROLLARIVM III.

(SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ divisum in sex partes. a Quoniam igitur diameter sphæræ est potentia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. b Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. quadratum diametri sphæræ Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3 est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.)

a 13. tertii dec.

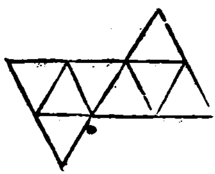
b 14. tertii dec.

COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato *EFGH*, recta *EH*, parallela est rectæ F G; & in quadrato ELGK, recta *EK*, rectæ GL: *c* Erit planum EHK, per *EH*, *EK*, ductum plano FG*L*, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.)

c 15 undec

SCHOLIVM.



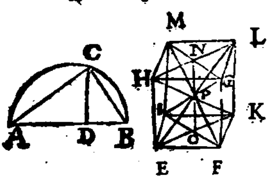
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturq; ut hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, ut ait Albertus *Durerus*.

PROBL. 3. PROPOS. 15.

XIV.

CVBVM constituere: & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, *circa quam semicirculus describatur* ACB: *&* ex AB, *auferatur tertia pars* BD, *ut sit* AB, *ipsius* BD, *tripla. Deinde ducta* DC, *perpendiculari ad* AB, *connectantur rectæ* AC, *BC. Super rectam* EF, *quæ rectæ* BC, *sit æqualis, quadratum constituatur* EFGH, *super quod erigantur perpendiculares EI*, FK, GL, H*M*, *æquales quoque ipsi* BC, *quarum extrema conjungantur rectis I*K, KL, LM, M*I. Quoniam ergo rectæ EI*, FK, *ad planum* EF, GH, *rectæ sunt*; d *erunt rectæ* EI, EK, *parallelæ. Sunt autem &*



d 6 undec.

æqua-

æquales, quod utraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. a 33. primi
Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt: b Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis angulis rectis KFE, IEF. b 34. pri.
Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, c cum simile sit & æquale quadrato opposito EFGH. c 24. undec.
Est enim EL, solidum parallelepipedum, d quod ejus plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. d 15. undecimi.
Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML; diametri EK, FI, GM, HI, per quas ducantur plana EKLH, FIMG.
e Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bifariam secat; utrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. ejusdem propos. se mutuo quoque bifariam divident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. e 28. undecimi.
Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; f perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. f 4. undec.
Rectus ergo angulus est HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, ut constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri AB, ita demonstrabitur.

CVM quadratum rectæ EK, g æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. g 47. pri.
h Est autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. h 47. pri.
Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero ejusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius

BD, sit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsæ rectæ EL, AB. diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt.

QVIA *vero ostensum est quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.*

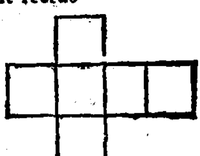
COROLLARIVM I.

(EX demonstratione hujus problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum conjungunt, bifariam dividi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, conjungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML: EFKI, in eodem centro P, bifariam dividatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (*a* Nam angulus OFP,
a 29. primi æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, *b* quæ parallelæ sunt,
b 16. unde. cum sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML,
c 15. pri. *c* & angulus OPF, æqualis est opposito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adjacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis conjungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est poten-
d 13. tertii dec. tiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. *d* Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris te-
e 15. tertii dec. traedri: *e* Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC, *f* Perspicuum autem est, diametrum
f 47. pri. sphæræ AB, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus

SCHOLIVM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturq; ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter

inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cujuspiam, ut constat.

PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

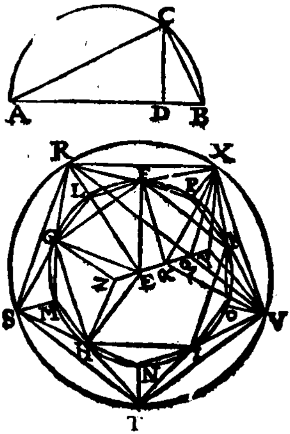
SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter *A*B, circa quam semicirculus describatur ACB; Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, ut AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius A*D*, sesquiquarta: At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta C*D*, perpendiculari ad *A*B, connectantur rectæ *A*C, BC, *a* intervallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E: *a* in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc divisis arcubus F*G*, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, *M*, N, O, P, connectantur rectæ *F*L, FG, GM, *M*H &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur *E*Q, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro, *E*F, seu rectæ B *C*. Eruntque omnes inter se æquales; *b* sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas conjungunt, nempe *E*L, QR, *E*M, QS: EN, QT: EO, QV: E*F*, QX. (quas tamen omnes, ut vitaremus confusionem, non duximus) *c* binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint *E* L, EM, &c. semidiametro *E*F: æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV. QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC, *d* Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem EGHIK, per rectas E M, EN, ducto, convenit autem planum pee rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana unum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum: nec non planum per QV, QX, & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad intervallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V; X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Conjungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. *e* Quia igitur *L*R, P*X*, æquales, & parallelæ: *f* si concipiatur duci recta LP: *f* erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; *g* Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent; Aufer autem LP, quintam partem circuli *F*G HIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli R ST VX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas

RS, ST,

a 11. quar.
b 6. undecimi.
c 33. pri.
d 15. undec.
e 6. undec.
f 33. pri.
g 28. tertii

RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni; *a* erit quadratum lateris pentagoni ejusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: *b* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus utriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIX, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorum omnia latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri.

a 10. tertii dec.
b 47. pri.



Posthæc, perpendicularis EQ, in utramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX; hoc est, latus hexagoni, & QY latus est decagoni ejusdem circuli: *c* erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; *d* Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad hujus planum recta ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY, Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, ut vitaremus confusionem linearum, non diximus) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo

c 10. tertii dec.
d 47. pri.

VYX,

VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pateremus confusionem, non duximus,) quæ omnia priorib. quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α, F, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX. cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. a 4. pri.
Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, divisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases αX, αF, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK: & EZ, latus decagoni ejusdem circuli: c erit QZ, divisa in E, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium majoris segmenti, hoc est. recta αZ, d quintuplum potest ejus, quod ex Eα, describitur quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum ejusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt,) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales, Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α per omnes angulos Icosaedri

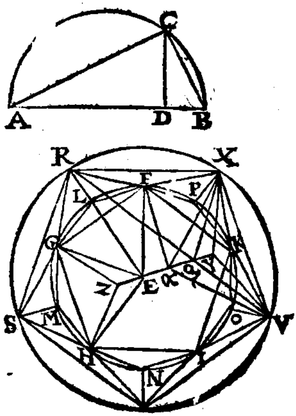
b 4. pri.
c 9. tertii dec.
d 3. tertii dec.
e 47. pri.

dri

driconstituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæ-ræ diametri A B.

a 15. quinti
b 22. sexti.

a Cum enim sit ut α Z, ad α E, ita YZ, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius α E; *b* Ac propterea ut quadratum rectæ α Z, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ Q E; sit autem quadratum rectæ α Z, ostensum quintuplum



quadrati rectæ α E; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro E F, hoc est, rectæ BC; Est autem & ejusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectę AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit ut AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit ut AB, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt;

QVONIAM denique diameter sphærę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) potestque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi ęqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. *c* erunt commensurabilia; Ac

c 6. decimi

propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, *d* Irrationalis erit linea, quę vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus

d 11. tertiidec.

complexi, quã & antedictas figuras; demonstravimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quę vocatur *Minor*. Quod erat faciendum.

COROL

COROLLARIVM I.

(EX dictis infertur, sphęrę diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri *AB*, quintuplum esse quadrati rectę BC, hoc est, semidiametri *EF*.)

COROLLARIVM II.

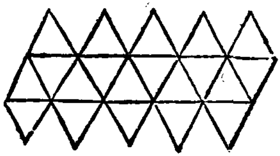
(ITEM manifestum est, sphęrę diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni ejusdem circuli; Nam YZ diameter sphęrę componitur ex *EQ*, latere hexagoni, & ex QY, *EZ*, lateribus decagoni circuli FGHIK.)

COROLLARIVM III.

(CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectę, quę ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectę *LP*, sit quoque parallela recta HI, ut in scholio propos. 27. lib. 3. demonstravimus; (eo quod ęquales sunt arcus *HL*, IP: continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentię,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas; Eademque est ratio de cęteris lateribus oppositis.)

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula ęquilatera inter se ęqualia, disponanturque, ut hęc figura indicat, componetur Icosaedrum, secundum totam soliditatem si rite inter sese aptentur.



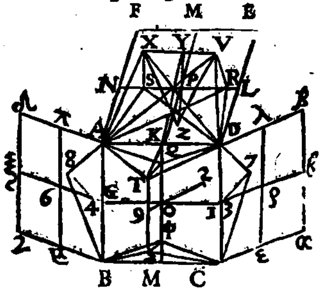
PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. XVI.

*SIT una basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A-*BCD, *cui insistat aliud æquale ad rectos angulos* ADEF, *ut sit communis horum sectio recta* AD, (*Insistunt enim omnes, bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erecta sunt ex angulis basis* EFGH, *quatuor lineæ* EI, FK, GL, HM, *ipsi basi*, EFGH, *perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. hujus lib.* a *Quare & bases cubi per ipsas ducta, recta erunt ad eandem basin* EFGH.) *Divisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis* G, H, *I*, K, *L*, M, N, *qua rectis connectantur secantibus sese in* O, P, *centris quadratorum, ut constat ex demonstratione octavi* a 18. undec

proble

Problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, *extrema ac media ratione in punctis* Q, R, S, *ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares* QT, VR, SX, *æquales segmentis majoribus* OQ, PR, PS. *Conjunctis deinde rectis* AT, AX, DT, DV, VX: *Dico* ATDVX, *esse unum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi.* Quod *enim pentagonum* ATDVX, *sit in uno plano, ita ostendetur,* Cum RV, SX, *sint ad quadratum* ADEF, *rectæ* a *ipsæ erunt parallelæ: Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta majora* PR, PS, *quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ* PL, PN, *æquales sint.* b) *erunt quoque contingentes rectæ* RS, VX, *æquales & parallelæ:* c *Est autem & AD, eidem* RS, *sive* LN, *parallela, eo quod* AM, DL, *parallelæ sunt & æquales.* d *Igitur & AD, VX, parallelæ sunt:* e *Ac propterea rectæ conjungentes* AX, DV, *in eodem cum ipsis erunt plano; ideoq; trapezium* ADVX, *in uno existet plano: Est autem triangulum* ATD, *in uno plano.* Dico *quod & in eodem plano cum trapezio* ADVX. *Ex* P, *namque ducatur* PY, *parallela ipsi* RV, f *quæ erit recta ad quadratum* ADEF, *quod ad idem recta sit* RV: *Et connectantur rectæ* KT, KY. *Quoniam igitur est ut* OK, *ad* OQ, *ita* OQ, *ad* QK, *ob sectionem rectæ* OK: *Est autem* KP, *ipsi* OK, *æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi,) &* PY, *ipsi* OQ, *(cum æqualis sit ipsi* RV, *quæ posita fuit æqualis ipsi* OQ, *majori segmento;) Erit quoque ut* KP, *ad* PY, *ita* OQ, *hoc est,* QT, *illi æqualis, ad* QK. *Quare cum triangula* PKY, QTK, *duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum* K, *composita,* g *ita ut homologa latera sint parallela, nempe* PK, *&* QT, *inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratũ* ABCD; *&* PY, QK, *inter se, quod utrumque rectum sit ad quadratum* ADEF: h *Erunt reliqua latera* KY, KT, *in rectam lineam collocata,* i *Ac propterea rectæ* TY, *in uno erit plano, ideoque planum* ATD, *& planum* ADVX, *unum planum constituent per rectas* TY, AD, *ductum.* Quocirca *pentagonum* ATDVX, *in uno existit plano.*



a 6. *undecimi.*
b 33. *pri.*
c 33. *pri.*
d 9. *undec.*
e 7. *undec.*
f 8. *undec.*
g 6. *undec.*
h 32. *sexti.*
i 1. *undec.*

QVOD *vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera* AN, NS, *trianguli* ANS, *æqualia sint lateribus* AK, KQ, *trianguli* AKQ. *(Sunt enim* AN, AK. *dimidia latera cubi, &* NS, KQ. *segmenta minora rectarum æqualium sectarum) & anguli* ANS, AKQ

AKQ, recti; si ducatur recta AQ, a erunt bases AS, AQ, aequales: a 4. pri.
Rursus cum latera AS, SX, trianguli ASX, sint aequalia lateribus AQ, QT, trianguli AQT (Nam rectae AS, AQ, ostensae sunt aequales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum aequalium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque bases AX, AT, aequales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectae AT; si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectae DT, esse aequalem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV, aequalia: quibus etiam aequale ostendemus reliquum VX, hac ratione. c Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectae PS, hoc est, quadrati rectae SX: Est autem quadrato rectae PN, aequale quadratum rectae AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectae SX. d Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, aequale sit quadratum rectae AS; erit quoque quadratum rectae AS, triplum quadrati rectae SX. Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectae SX. e Est autem quadratis rectarum AS, SX, aequale quadratum rectae AX. Quadratum ergo rectae AX, quadruplum quoque erit quadrati rectae SX, hoc est, quadrati rectae PS; hoc est, quadrati rectae XY; f Sunt enim rectae PS, XY, aequales. Cum igitur & quadratum rectae VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectae XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, aequalia; Ac proinde rectae ipsae aequales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensa sint esse aequales; aequilaterum est pentagonum ATDVX.

b 4. pri. c 4. tertij dec. d 47. pri. e 47. pri. f 34. pri.

QVOD autem & aequiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, aequalis maiori segmento PS; g erit quoque NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. h Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati NP, hoc est, quadrati rectae AN: Est autem quadratum rectae RV, aequale quadrato rectae RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectae AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectae AN. i Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, aequalia quadrato rectae AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectae AN. k Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, aequale sit quadratum rectae AV; Erit quoque quadratum rectae AV, eiusdem quadrati rectae AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectae AN, quadruplum est quadratum rectae AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque & rectae AV, AD, aequales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, aequales esse: ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse aequales. Quoniam igitur latera

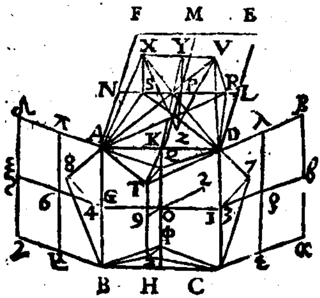
g 5. tertij dec. h 4. tertij dec. i 47. pri. k 47. pri.

TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV: & bases AD, DX, æquales quoque: a Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, b ipsum erit æquiangulum.

a 8. pri.

b 7. tertij dec.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ϱ, σ. Secentur deinde OH, OK, ϱ I, σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, QT, 37, 48, æquales segmẽtis maioribus φO, QO, 3ϱ, 4σ, coniunganturq́ rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tãgentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera: constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis. &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD; c Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. a Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam

c 19. undecimi.

a 39. undecimi.

fariam secant: secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam, in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z. centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. b Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD: Item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraque recta sit ad planum ADEF: erit PKOZ, (debent enim duo pũcta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P. secta sit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est enim XY, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PZ:) d Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris: f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratũ semidiametri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratũ diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur est quadratũ rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi: Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) h Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, cẽtro sphæræ perpẽdicularis demittatur Zω, cõnectãturque rectæ ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. a Quoniã igitur quadratum rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autẽ quadrata rectarũ ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostẽsæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Zω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia;

b 6. undecimi.

c 4. tertij dec.

d 47. pri.

e 15. quinti.

f 22. sexti.

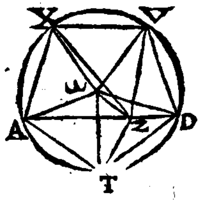
g 15. tertij dec.

h 4. pri.

a 47. pri.

Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ωA, ωX, æquales, quod & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, zX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, b punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis: ideoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT c Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ ZA: his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; propereaque & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, quæ cubus.

b 9. ter.



c 47. pri.

d 15. quinti.

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN; d erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR; Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius) e Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.

e 6. tertij dec.

COROLLARIVM. I.

Cum ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadam sphæra descripti.

COROLLARIVM. II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVO-

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, *a* facit maius ſegmentum latus pentagoni: *b* ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri ſimiliter diuiditur, facitq; minus ſegmentum latus dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

a 8. tertij dec.
b 5. tertij dec.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, TZ, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB: aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra baſium cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9 Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi, & YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales: Eadẽq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogramma KOZP, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

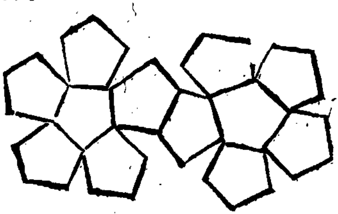
COROLLARIVM IV.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadratata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint, quadrati rectæ PZ: erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: *c* ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ

c 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona

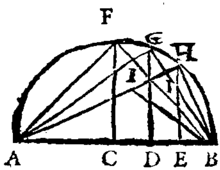


æquilatera & æquiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

xviij. PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæra diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita vt BD, sit ipsius pars tertia: In E, denique ita vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsa AB, perpendiculares CF, DG, EH: connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti cuius semidiameter, seu latus Haxagoni est BH, connectaturq; recta BI. Postremo BC, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum. Dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri: AF, latus Octaedri: BG, latus cubi: BI, latus Icosaedri: BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG. Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG: *a* Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri: erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertij dec.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll prop. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. libr 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AF. *b* Quare cum diameter sphæræ po-

b 14. tertij dec.

ræporæ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione; Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. *a* Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. a 15. ter-dec.

PRÆTEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH. Est autem ex constructione AB, ipsius BE quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. prop. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. *b* Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde *c* cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. *d* Quamobrem BI, latus est Icosaedri. b 10. terdec. c 47. pri. d 16. tertdec.

DENIQVE cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema ac media ratione, erit BK, maius segmentum latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex corollario 1. propos. 17. huius libri. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

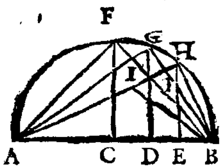
QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri: & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri potentia vero duplum lateris cubi Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi.

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum. *e* Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles: atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt e 6. decimi.

a dec. constat ex coroll. propos. 24 lib. 8. *a* Erunt huiusmodi lineæ nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum comensurabiles.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cũ lateta priorum sunt diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.



SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, *b* erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea, Minor, *c* erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam *Minorem*, ex eo, *d* quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum gularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex scholio propos. 38. lib. 3.

EODEM modo non ostendemus, latus Octaedri majus esse lateri cubi. Nam BF, latus Octaedri majorem arcum subtendit, quam BG, cubi latus.

LATUS autem cubi BG; majus esse latere Icosaedri *B*I, hác arte demonstrabimus. Quoniam A *B*, tripla ponitur ipsius BD, *a* & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ A *B*, talium 3. est quadratum rectæ *B G*; *b* quod illud hujus triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; *c* erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectæ G D, majus est quadrato rectæ *B*H, ideoque recta GD, major quam recta *B*H. Rursus quia diameter sphæræ, AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, ejusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. hujus lib. constat latus decagoni HI, majus esse tertia parte rectæ A B, hoc est, minus recta B D. Nam si HI. recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi A D; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ A *B*, noncuplum quadradrati rectæ *B* H. Quod est absurdum quintuplum enim est demonstratum. Non ergo H I, tertia pars est ipsius A B: Sed neque major tertia parte. Si enim recta H I, dicatur major tertia parte rectæ A B, & proinde dupla ipsius H I, major quam duæ tertiæ, hoc est, quam A D, erit B H, minor quam tertia pars B D. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ B H. Quod magis absurdum. Non igitur major est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, ut ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam B D. Itaque cum rectæ GD, DB, majores sint rectis *B* H, HI, ut demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum majora: *d* Est autem quadratum rectæ B G, æquale quadratis rectarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis recta-

a 20. *sexti.*

b 15. *tertii. dec.*

c 10. *quinti*

d 47. *quinti.*

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, majus quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, majorerit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, divisæ extrema ac media ratione, majus segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, majus rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul majora duplo rectanguli sub BG, GK:

a 2. sec. a Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cum sit, ut

b 17. sexti. BG, ad BK, ita BK, ad GK; b erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo, sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Majus igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco majora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK. Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB; ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, majora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde unum quadratum rectæ BH, majus erit uno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex majora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, major erit quam recta BK: Ac propterea cum BI, major sit quam BH, multo major erit BI, latus videlicet Icosaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparavimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus

EX

EX quinque, angulus Icosaedri:

EX sex autem hujusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri nõ potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. prop 32. lib. 1. Erunt ejusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus cõstituetur. a Nã solidus omnis angulus minoribus quã quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex cum planis ejusmodi angulis, solidus angulus constabit. a 20. undecimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor ejusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, ut ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea quintam partem unius recti continebunt tres ejusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor hujusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim unus, ut dictum est, major sit recto, eo quod continet unum rectis, & insuper recti quintam partem: erunt quatuor majores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis cõstituetur: Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus cõstabit. Nec sane ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis cõstitui poterit angulus solidus. Nã cũ sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, ut ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum: ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea duas partes sextas unius recti: continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus ejusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur: neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres majores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

SI vero quatuor ejusmodi triangula conveniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

SI denique assumantur quinque talia triangula ad efformandũ angu-

angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis ejusmodi contentam.

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in unum punctum, ut constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conveniant ad costitutionem anguli solidi, componetur Duodecaedrum duodecim ejusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cujuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogaverit, quotnā latera quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in unius basis latera, ut habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in unum conveniunt, ad constitutionem unius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, sive Tetraedri multiplicentur in numerum laterum unius trianguli, ut in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in unius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum unius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogaverit, quotnam angulos solidos quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in unius basis angulos, ut habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in unum conveniunt, ad constitutionem unius anguli solidi, dividendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, ut numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si dividantur in 3. (Tot enim anguli constituunt unum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerū angulorum unius quadrati, fiunt

fiunt 24. anguli, qui divisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt unum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 24. anguli, qui divisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 60. anguli qui divisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui divisi in 3. (Tot enim anguli conveniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quod bases in uno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solidos Tetraedrum (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemque solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM DECIMVM.

Et solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: ut alii vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMUS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque disererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conjicere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximns; ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in

Geome-

Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut procemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi adscribuntur: Duo vero subsequentes à plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo judicio, tribui solent: in quorū quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundū superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam: ut hi duo libri sint instar appendicis cujusdā elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non injucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporū regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alio: quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in universū disserere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adjumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulā in hoc negotio collocavit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam plurimis theorematibus problematibusque locupletavit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimus sextus est, adjunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Cæterū præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex ejus procemio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVONIAM verò in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & à Francisco Flussate, ideoque & à nobis descrepant: annotavimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur: Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

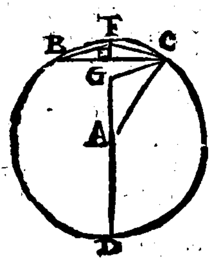
THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriusque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni ejusdem circuli. Extenſa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur

a 3. tertii. rectæ AC, CG, CF, BF. *a* Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales,



b 4. primi. nempe recti; *b* erunt baſes CF, BF, æquales;

c 28. tertii *c* ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, ejusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntq; anguli contenti recti;

d 4. primi *d* erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit

e 33. ſexti. arcus CF. *e* Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli

f 20. tertii. CAF: *f* Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & hujus ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF,

g 32. primi duplus erit anguli CAF: *g* Atqui angulus CGF, externus æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, ut oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium ejusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt

h 6. primi. anguli GAC, GCA; *h* ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in penin pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM. I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad B C, dividere arcum B C, bifariam in F.

COROLLARIVM. II.

HINC quoquo fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem esse utrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

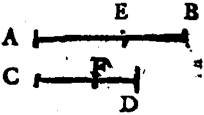
THEOR 2. PROPOS. 2.

IV.

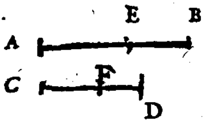
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones. ij.

SECENTUR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse ut AB, ad CD, ita A E, ad CF, & E B, ad FD; Item ut A E, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, ut A B, ad A E, ita A E, ad EB, & ut CD, ad CF, ita C F, ad FD; *a* erit rectangulum sub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum sub C D, FD, æquale quadrato rectæ C F. Quam obrem erit ut rectangulum sub A B, EB, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ CF, (est enim utrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 12. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, EB, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ CF: & componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, EB, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ CF. *b* Sed quod quater continetur sub A B, E B, una cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, una cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, FD. Igitur erit quoque ut quadratum lineæ compositæ ex A B, E B, ad quadra-

a 17. sexti.



b 8. sec.



tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD; ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, ut recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD; ad rectam CF: Et componendo ut composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AF, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita est AB, ad CD. Erit ergo ut AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum sit ut tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit ut AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique juxta omnes modos arguendi & proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

a 2. *sec.* b 15. *quinti.* c 19. *quinti.*

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATUS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

d 9. *tertii decimi.* e 8. *tertii decimi.* f 2. *quarti decimi.*

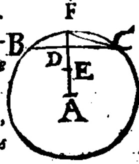
QVONIAM enim d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam;* e *& recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit majus segmentum, latus ipsum pentagoni:* f *fit ut eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni; majoris segmenti ad majus, quæ majoris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, ut majus segmentum ad minus, ita tota ad majus segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, ut recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni, quod est propositum.*

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, *ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico majus segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri ejusdem circuli ducta: minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni ejusdem circuli. Extensa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll 1. propos. 1. hujus lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F. a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cujus majus segmentum AF, latus hexagoni minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare ut in hac propos. ostensum est, erit ut tota AD, divisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter divisam, ita AE, majus segmentum ad AF, majus segmentum: & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri: perspicuum est, majus segmentum AE, æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*



a 9. tertii. dec.

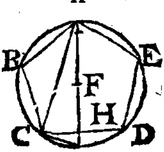
b quarti. decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata, quintupla sunt ejus, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo ABCDE, cujus centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per Coroll 2. propos. 10. lib. 13. dividat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa CG;



a 47. primi

latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG: erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: *a* Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati ejusdem rectæ FG: *b* Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque quadrata, quintupla sunt ejus, quod ex semidiametro describitur quadrati. Quod erat demonstrandum.

b 10. tertii dec.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum unum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti: eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. *c* Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG, &c.

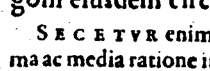
c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

o.
iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicujus circuli extrema ac media ratione in C, sitque majus segmentum AC. Dico



AC, esse latus decagoni ejusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni ejusdem circuli, adjungaturque in rectum ipsi AB, *d* eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, divisa in A, extrema ac media ratione, cujus majus segmentum BA; Ponitur

d 9. tertii decimi.

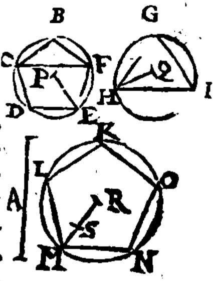
tur autem & AB, secta in C, similiter; a Igitur erit ut BD, tota ad majus sui segmentum AB, ita AB, tota ad majus sui segmentum AC: Sed est quoque ut BD, tota ad majus sui segmentum AB, ita AB, majus segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut AB, ac AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cujus latus hexagoni est AB; erit & AC, ejusdem circuli latus decagoni. a 2. quarti decimi.

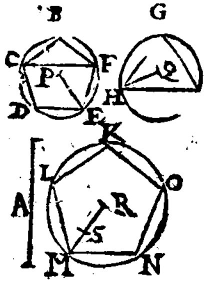
ALITER. Adjungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis majori segmento AC; b eritque tota recta BD, divisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, majus segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicujus circuli, erit per ea, quæ demonstravimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum ejusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cujus AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicujus circuli, &c. Quod erat ostendendum. b 5. tertii decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cujus diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cujus unum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cujus unum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, c ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita ut quinque latera hujus pentagoni sint latera Icosaedri, ideoq; quodlibet ipsorum æquale cuivis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; d eritque majus segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. ejusdem propos. BF, latus Dodecaedri est majus segmentum lateris c 13. tertii decimi. d 4. quarti decimi.





a 2. quartidecimi.
b 22. sexti.

cubi CF, secti extrema ac media ratione, *a* erit ut tota CF, ad totam RM, ita BF, majus segmentum ad RS, majus segmentum; Ac propterea ut quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. ut triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: *c* Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, *d* (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; *e* sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH,) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea unum quadratum rectæ PE, uni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter BE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

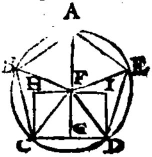
c 10. tertiidec.
d 3. quartidecimi.
e 12. tertiidecimi.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

iii. vi.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comri comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

Ex centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque unius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est sub FG; & CD. *a* Quoniam vero rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeo cujuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem hujusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint uni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum. a *41. primi.*

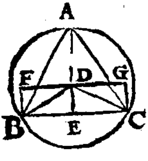


ALITER. Facta eadem figuræ constructione, *b* cum rectangulum C, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; & proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri constet quinque hujusmodi triangulis constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexginta hujusmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD sumptum sexagies æquale erit superficiei Dodecaedri. b *41. primi*

THEOR. 7. PROPOS. 7. iij. vij.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli: Erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC;



eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum est trianguli BDC, atque adeo cujuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC æqualium; Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex hujusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint uni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

a 41. primi

b 41. primi

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta hujusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulũ contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. c Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; d Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoq; sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quã hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. e Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulũ hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

c 6. quarti decimi.

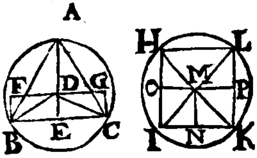
d 7. quartidecimi.

e 15. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnũ aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. a Quoniã enim rectangulum BG, duplum est trianguli a 41. pri.



DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triãgula æquilatera ipsi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. b *Cũ enim rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum æquale viginti quatuor huiusmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies sumptum æquale est superficiei Octaedri.* b 41. pri.

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OI, hoc est, sub MN, & IK, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. c *Quoniam enim rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale viginti quatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum con-* c 41. pri.

ficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.

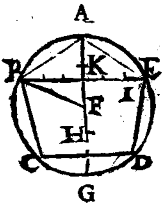
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL, (sunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, sit dimidiũ lateris HI, nẽpe æqualis ipsi MN.) constituẽt duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

IV. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibns diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sint quintupla ipsius IE. Dico rectangulum comprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres sextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita



a 16. *sexti.* KB, ad KI; *a* atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub medijs AF. KB. *b* Est autem rectangulum
b 41. *pri.* sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub AH,
c 1. *sexti.* KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF. *c* Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est
d 1. *sexti.* rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis E, eademque

demque semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

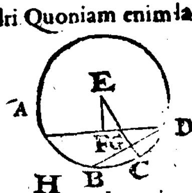
COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti (a comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12 lib. 13. secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti. a 5. quarti dec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

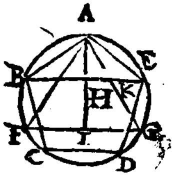
SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri. IV. viij.

IN circulo ABCD, b circumscribente & pentagonum Dodecaedri & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli AD: & ex centro E; ducantur AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri: ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius lib. c Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; d Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF; æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. e Quia vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoque vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque b 5. quarti dec. c 2. quarti dec. d 16 sexti. e 1. sexti.



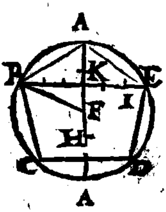
Itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri.&c. Quod ostendendum erat.

a 5. quarti dec. ALITER. a Circumscribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint BK. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim rectangulum sub AI, BK, æquale est pentagono ABCDE, ex coroll. propos. 8. huius lib.



Item rectangulum sub AI, IF, æquale est triangulo AFG, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: b Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cum bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, si primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item secundum & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. c erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquiualet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cum BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas ejusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE,) Recta vero IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, d cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

b 1. sexti.



c schol. 22. quinti.

d 15. quinti.

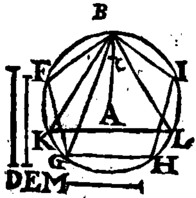
THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

IV.
IX.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

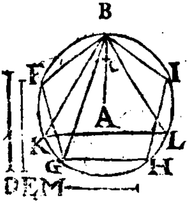
SECETVR recta *AB*, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum *A*C. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex *A*, centro ad interuallum *AB*, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum B*K*, *L*: Si igitur *B*F, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta *B*G, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll 2 propos. 17. lib. 13. Quoniam vero *A*C, maius segmentum semidiametri *AB*, sectæ extrema ac media ratione, *a* est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum *AB*, latus est Hexagoni; *b* poterit BF, latus pentagoni & totam *A*B, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam *A*B, & minus segmentum *B*C, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est B*F*, potens totam AB, & maius segmentum *A*C, ad *M*, potentem totam A*B*, & minus segmentum *B*C. *c* Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri *BK*, triplum est quadrati semidiametri *AB*: *d* Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ B*K*, ad quadratum rectæ *AB*, ita quadrata rectarum AB, *B*C, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ B*K*, ad quadratum rectæ M. ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit *BF*, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quod BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; *e* Erit vt tota A*B*, ad maius segmentum AC, ita tota *B*G, ad maius segmentum BF; *f* Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ *BF*,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad qua-



a 4. quarti dec.
b 10. tertij dec.
c 12. tertij dec.
d 4. tertij dec.
e 2. quarti dec.
f 22. sexti

quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ *M*: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ *M*; *a* Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam *BK*, ita recta *BF*, potens totam *AB*, & maius segmentum *A*C, ad rectam *M*, potentem totam *A*B; & minus segmentum BC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, *BK*, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta *BF*, potens totam AB, & maius segmentum *A*G, ad rectam *M*, potentem totam AB, & minus segmentum *B*C, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 22. sexti.



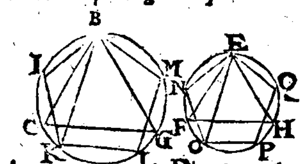
SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ; connectanturque rectæ BK, CK, EO, FO. b Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti: Ac propterea, ex coroll. 2 propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.)

b 5. quarti dec.



bendit) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde ex coroll. 1 propos. 32. lib 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. a Quare erit vt BK, hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est recta D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum. a 4 sexti.

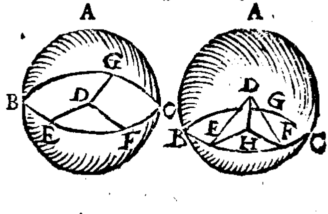
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphara, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphara.

Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphara cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphara.

LEMMA I.

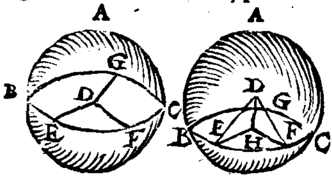
SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ, quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis

nis sectionis; & cōnectantur rectæ DE, DF. Quoniam igi-
a 47. pri. tur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; a erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.



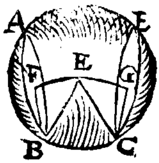
COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sunt circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollar. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circūferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex de-ex pefioit.3.lib.11. *b* Erit tam quadratum cum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

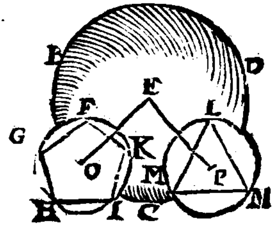


SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Cõstructa enim figura, vt prius, ostendemus eodẽ modo, quadrata rectarũ EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, dẽptis quadratis æqualibus rectarum æqualiũ EF, EG, cũ circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.

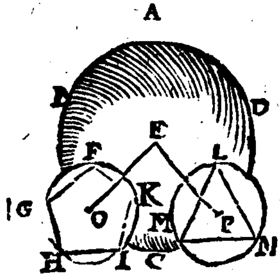
THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cui latus ad latus Icosaedri: in vna eademque sphæra. iv. xi

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum EGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ



nn *tan-*



tangunt: si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a *Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum: æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendicularis ex E, in plana circulorum deducta, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icosaedri deducta æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri. æquales erunt inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri.* b *Quoniam autem est, ut basis FGHIK ad basin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est (sicut modo diximus) vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE, erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri,* c *Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæra:* d *atque adeo ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri ciuscuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 5. quartidec.
b 6. duodecimi.
c 9. quartidec.
d 9. quartidec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, d ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra. e Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemque sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quamcunque

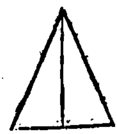
e 10. quartidecimi.

que extrema ac media ratione,& maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem,& minus illius segmentum: a Item ita esse Dodecaedrum ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra: Perspicuum est,has quatuor proportiones,nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri: & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunq; sectam extrema ac media ratione,& eius segmentum maius, ad potentem totam eandem,& minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ,esse inter se æquales: a 11. quartadecimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12. 6. xj.

LATVS trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppositum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC,ducatur ex angulo A, ad latus oppositi in BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB,AC, b anguli B, & C; æquales sunt: & anguli ad D,recti: Erunt duo anguli B,& D,trianguli ADB,æquales duobus angulis C,& D,trianguli ADC: habent autem & latus AD,commune,vel AB,AC,æqualia. c Igitur & reliqua latera BD,CD,æqualia sunt: ac propterea latus BC, hoc est, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD,ex scholio propos. 4. lib.2. d Cum igitur quadrato rectæ AB,æqualia sint quadrata rectarum AD, ED; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD,quadrupla quadrati rectæ BD: Ac proinde,qualium partium 4 est quadratum rectæ AB,vel quadrata rectarum AD,BD,talium 1 erit quadratum rectæ BD,ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD.Quare quadratum rectæ AB,partium 4.sesquitertium est quadrati rectæ AD,partium 3.Latus igitur trianguli æquilateri potentia sesquitertium est,&c. Quod ostendendum erat. b 5. primi. c 26. pri. d 47. primi.



COROLLARIVM.

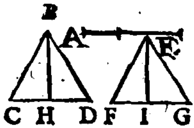
HINC manifestum est,lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam.Demonstratum enim est BD,& CD,rectas æquales esse, hoc est, latus BC,secari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB,AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & basis BD, basi CD,æqualis, e Erunt & anguli BAD,CAD,æquales,id est,angulus BAC.bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD. e 8. primi.

o. xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim BCD. *vnum triangulum Tetraedri, &* EFG, *Octaedri illius sphæra, ducaturq; ex angulis* B, *&* E, *ad latera opposita* CD, FG, *perpendiculares* BH, EI. a *Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri* BC, b *& duplum quadrati lateris Octaedri* EF; *habebunt quadrata rectarum A,*BC, EF, *proportionem, quam numeri* 6.4.3. c *ideoque commensurbilia erunt: Quare lineæ ipsæ* A, BC, EF, *commensurabiles existent saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales* BC, EF, *& idcirco & earum dimidia Rationales erunt* CH, FI.



a 13. tertij dec.
b 14. tertij dec.
c 6. decimi.

d 12. quartidec. *RVRSVS,* d *quia tam quadratum rectæ* BC, *quadrati rectæ* BH, *quam quadrati rectæ* EF, *quadrati rectæ* EI, *sesquitertium est: habebunt tam quadrata rectarum* BC, BH *quam quadrata rectarum*

e 6. dec. EF, EI, *proportionem inter se, quam numeri* 4. 3. e *Ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ* BC, BH, *quam lineæ* EF, EI, *commensurabiles existent. Est autem & tam* CH, *ipsi* BC, *quam* FI, *ipsi* EF, *dimidia videlilet toti, commen-*

f 12. dec. *surabilis.* f *Igitur & tam* BH, CH, *quam* EI, FI, *commensurabiles inter se erunt.: Ac proinde cum* CH, *&* FI, *ostensa sint Rationales, erunt quoq;* BH, EI, *Rationales.* g *Quoniam vero tam* CH, BH, *quam*

g 9. decimi. FI, EI, *longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt constat ex coroll prop. 24 lib. 8. Habent enim pro-*

h 12. quar-dec. *portionem, quam* 1. *ad* 3. h *cum ostensum sit talium partium* 1. *esse tam quadratum* CH, *quam quadratum* FI, *qualium* 3. *est tam quadratum* BH, *quam quadratum* EI,) *Erunt tam* CH, BH, *quam* FI,

i 22. decimi. EI, *Rationales potentia tantum commensurabiles:* i *Ac proinde tam rectangulum sub* CH, BH, *Rationalibus potentia tantum comensurabilibus, quam rectangulum sub* FI, EI, *Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula* BCD, EFG, *æqualia, rectangulis sub* CH, BH, *& sub* FI, EI, *ex scholio propos 41. lib. 1. cum bases triangulorum* CD, FG, *dupla sint basium rectangulorum* CH, FI. *Igitur & triangula* BCD, EFG, *Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo*

BCD,

BCD, sit commensurabilis: (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis: (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque ex coroll. propos. 24 lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Media. Si igitur sphaerae diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphaera, Media. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulũ aequilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis aequalia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo aequilatero, cuius vnum latus sit Rationale; perspicuum est, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

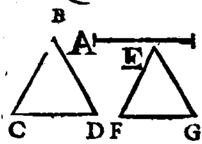
o: XIV.

SIT etraedrum, atque Octaedrum eidem sphaerae inscribãtur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphaerae diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. *a* Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri CD; *b* duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG.

a 13 tertij dec.

b 14. tertij dec.



Quare quadratum rectae CD, sesquitertium est quadrati rectae FG: Vt autem quadratum rectae CD, ad quadratum rectae FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG, (*c* quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.

c 20. & 19. sexti.

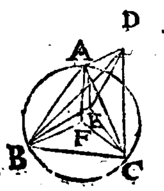
RVRSVS, quoniam ostẽsum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG: Efficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24. At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quamobrem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

a. XV.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositę, estquę perpendicularis ad dictam basin.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basin ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC, FA, FB, FC: quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt: erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED: Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. a *Igitur anguli AED, CED, æquales erunt: Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt,* b *eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales:* c *Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales:* d *erit F, centrũ basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.*



a 8. primi.

b 13. pri.

c 4. pri.

d 9. ter.

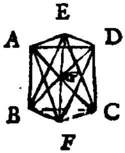
QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. O. xvj.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Ductus enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis *GA*, GB, *GC*, GD, GE, GF, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet à centro ad superficiem sphæræ: *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplũ est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri AG, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ *AB*, duplum erit quadrati rectæ *A*G. Cum ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG: erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum *A*G, BG: *b* *A*c propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. *c* Quam ob rem *A*G, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ *A*C, BD, sese secantes in G, in vno existent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ACD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides *A*BCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F: quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia & basi communi A*B*CD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin *A*BCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A*B*, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG: erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG: *f* Ac propterea angulus, AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis *A*G, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, *g* ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nempe

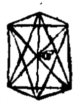


a 14. tertij dec.
b 48 pri.
c 14. pri.
d 2. vndecimi.
e 7. vndecimi.
f 48. pri.
g 4. vndecimi.

ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo FG, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphæræ: *a* erit eius quadratum duplũ quadrati lateris AD: Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC. *b* Quare angulus ADC, rectus est; Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere Octaedri AB: *c* constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. tertij dec.

b 48. pri.



c 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

o. xvij.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrũ eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

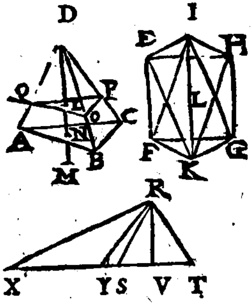
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrũ in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrum E F G H I K. in vna eademque sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ DM, incidens in basin A B C, ad punctum N. *d* Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis

d 15. quartidec.

laris ad eandem basin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum sphæræ, & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex scholio propos. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, a 16. undecimi. parallelum plano ABC: a Eruntque rectæ QO, OP, PQ. Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, b cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 5. Igitur & QOP, æquiangulum erit: Ac popterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoq; simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. c Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est D, L) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, d cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib 8. Rursus e quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP. vt 64. ad 36. vt in ijsdem numeris constat.



b 10. undecimi.

c 17. undecimi.

d 8. duodecimi.

e 20. sexti.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. f Eritque latus RT, hoc est DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27, erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

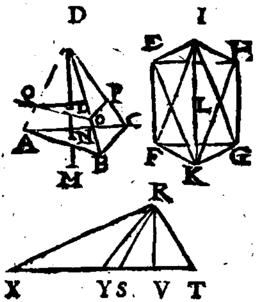
f 12. quartidecimi.

Rursus extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP; erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est ſeſquitertia) ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, (quæ poteſt vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC,) & ſub recta TY, (quę continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

a 1. ſexti. b 41. pri. CVM enim ductis rectis RX, RY, *a* triangulum RTX, duplum ſit trianguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: *b* Eſt autem & rectangulũ ſub RV, TY, duplũ eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX æquale rectangulo ſub RV, TY. *c* Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum, RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum RST: *d* Eſt autem triangulum RTX ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis *ABCD*, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis *A*BCD, ad pyramidem QOPD: *A*t vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoque erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphærę ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOP*D*: *e* Octaedrum autem EFG*H*IK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea per ea quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOP*D*, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrum EFGHIK) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potentę vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis ſeu tetraedrum

c 7. quinti.

d 1. ſexti.



e 16. quartidecimi.

ABCD.

ABCD, ad octaedrum EFGHIK, Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonstrandum.

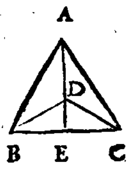
SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4 fuit, qualium 3. DP: continebit DP, seu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a cũ recta RT sit potentia sesquitertia rectæ RV: erit RV, potentia subsesquitertia ipsius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rursus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, seu DP: (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque Tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum sub RV, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus. a 12. quarti dec.

PROBL. 18. PROPOS. 18. o. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bifariã diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) sit autem & basis AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC.



Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC. CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BDC, dupla sit basis BE, vtriusque rectanguli; Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: b Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE: Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum. b 1. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

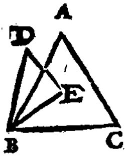
ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliqua rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2, continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE. duplam esse.

THEOR 19. PROPOS. 19.

o. xvij. SI octaedrum sphæræ inscribatur: erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum *D*, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis dimittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10 huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumsribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta *BE*; *a* quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris Octaedri *AB*; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ D*B*, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. *b* Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet *B*E; Erit quadratum rectæ *BE*, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A*B*. Quare *c* cum quadratum rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum *BE*, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. *Ac* proinde quadratum rectæ D*B*, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum sphæræ inscribatur, &c. Quod erat ostendendum.



a 14. *tertij dec.*

b 12. *tertij dec.*

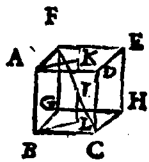
c 47. *pri.*

THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. xviij. DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquā basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus *AB*CDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex

I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. a Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi. a tertij dec.



PRODVCTA autem KL, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, b quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, c quæ parallelæ quoq; erunt inter se; Ac propterea parallelogrammũ erit ABLK, atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perpẽdicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. prop. 15. l. 13. ostendimus; Ac propterea cum KK, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat. b 6. vndecimi. c 16. vndecimi.

COROLLARIVM I.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. d Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ: e Perspicuum autem est solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum. d 15. tertij dec. e 31. vndecimi.

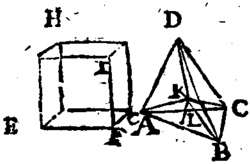
ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex

centro

centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basin ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD. solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia pars superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Na ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter à centro distabunt, per lemma 2. propositionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K. centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 6. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum: Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

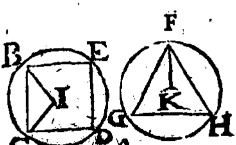


THEOR. 21. PROPOS. 21.

o. xj.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc est, circulos *BGDE*, FGH, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint enim rectæ ex centris I*B*, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A. triplum est quadrati lateris cubi *BC*, & quadratum lateris *B*C, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare



a 15. tertii dec.

b 47. pri.

Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BI,) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rursus *a* quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG: *b* & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ: qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI: æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK: Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

a 24. *tertii dec.*
b 12. *tertii dec.*

COROLLARIUM.

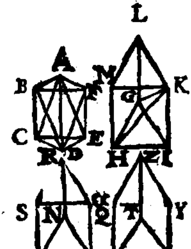
HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. *c* qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

c 21. *quarti dec.*

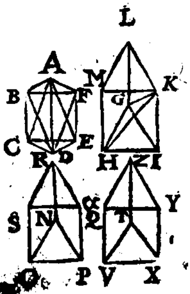
THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI Octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarũ latus communis est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD: in BDFA: cuius basis BDF: in CDEA, cuius basis CDE: & in DEFA: cuius basis DEF: quæ quidem omnes bases infra quadratum B C E F, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum



dum constat duobus triangulis æquilateris octaedri,& duobus aliis triangulis,quæ quoniam latus ipsorum commune est AD, diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existunt,*a* inter se æqualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine,& magnitudine æqualibus. Cōstituatur super GHI,basin tetraedri prisma GHIKLM, eiusdem cum tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit,per coroll.1.propos.7.lib.12. Rursus super basin octaedri NOP,& TVX, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata NOPQRS, TVXYZα, eiusdem cum octaedro,seu pyramide ACDE,altitudinis. *b* Quoniam igitur GHI,hoc est TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoque prisma TVXYZα, prismatis NOPQRS, sesquitertium, cum prismata eiusdem altitudinis sint, vt bases,ex iis,quæ ad propos.7.lib.12. demonstrauimus. Est autem & octaedrum ABCDEF, eiusmodi prismatis NOPQRS, sesquitertium; (Nam prisma æquale est tribus pyramidibus ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale est octaedrum prismati TVXYZα. Quia vero prisma TVXYZα ad prisma GHIKLM, proportionem habet,quam altitudo illius ad altitudinem huius,ex scholio prop,14.lib.12. Est autem altitudo prismatis TVXYZα,quod octaedro æquale est,eadem quæ octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prisma GHIKLM, hoc est, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri,nempe perqendicularis centra basium oppositarum coniungens,æqualis lateri cubi,nimirum perperpendiculari centra basium oppositarum connectenti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri,ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est,vt 3.ad 4 Posito enim quadrato diametri sphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 5. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4.ex coroll.2.propos.13.lib.13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est vt 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphæræ 6.erit quadratum lateris octaedri 3.& quadratum lateris tetraedri 4.&c.) Est igitur octaedrū ad triplum tetraedri,vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum,atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. quod demonstrandum erat.



a 8. pri.

b 14. quartidec.

COROL.

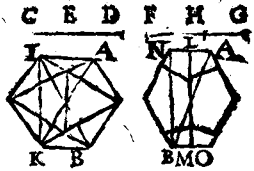
COROLLARIUM.

EX dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri, ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram. a 18. tertii dec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & majus ejus segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum: Erit majus segmentum prioris latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri ejus sphæræ, cujus recta linea proposita diameter existit.

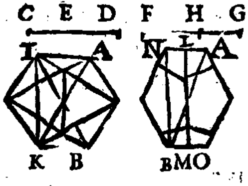
POSSIT *recta* AB, *rectam* CD, *& ejus segmentum majus* CE; *Item rectam* FG; *& ejus segmentum minus* HG. *Dico* CE, *esse latus* Icosaedri, *&* H G, *latus* Dodecaedri, *ejus sphæra, cujus* A B, *diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cujus diameter* AB, *descriptum* Icosaedrum AIBK, *&* Dodecaedrum ANBO, *Latera deinde Icosaedri opposita* AI, BK, *connectantur recta* IB, *quæ subtendet unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, ut constat ex propos.* 16. *lib.* 13. *(Nam in ea figura, ducta recta* ZF, *erit* RSHZF, *pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia* GR, GS, GH, GZ, GF, *cadentia in superficiem sphæra, in quo recta* R H, *latera opposita* RX, H I, *conjungens angulum* RSH, *subtendit (clariusq́; patebit ex constructione* Icosaedri, *quam ad finem lib.* 16. *ex* Pappo *afferemus. quod etiam videre licet in aliquo* Icosaedro *materiali. Quia vero* AI, BK, *latera opposita parallela sunt, per coroll.* 3. *propos.* 16. *lib.* 13. b *erunt anguli* AIB, IBK, *æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales. (Ducta enim alia diametro* I K; *cum latera* AI, IB, *trianguli* AIB, *æqualia sint lateribus* KB, BI; *& bases quoque* AB, IK, *æquales;* c *Erunt anguli* AIB, IBK, *æquales) recti erunt;* d *ideoque quadratum recta proposita* AB, *æquale erit quadratis rectarum* AI, IB; *Erat autem idem quadratum recta* AB, *æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum* CD, CE: *Igitur quadrata rectarum* IB, IA, *æqualia sunt quadratis rectarum* CD, CE; *At pro-* b 29. primi c 8. pri. d 47. pri.



pte-

pterea cum CE, sit majus segmentum ipsius CD, divisa extrema ac media ratione: Item IA, majus segmentum ipsius IB, similiter divisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cujus latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, recta subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, a majus segmentum esse æquale lateri ejusdem pentagoni) æquale erit CE, majus segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. b Cum enim sit ut CD, ad CE, ita IB, ad IA; c erit quoque ut quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA: Ac componendo, ut quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; d Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoq; rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

a 8. tertiidecimi.
b 2. quartidecimi.
c 22. sexti



d 14. quinti.

RVRSVS latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, conjungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. e erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, f Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA: Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum FG, HG. æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter divisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstravimus, CE, majus segmentum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & majus ejus segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum: Erit majus segmentum prioris lineæ latus Icosaedri: minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri ejus sphæræ, cujus recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum.

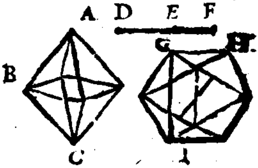
e 33. pri.
f 47. pri.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit majus & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & majus segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cujus latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cujus unum angulum subtendit recta GI; a erit GH, majus segmentum ipsius GI, divisæ extrema ac media ratione: b Ac proinde composita recta ex GI, GH; secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. c Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est, & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: d Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam e cum sit ut GI, ad GH, ita DE, ad EF. f Erit quoque ut quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit majus, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



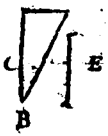
a 8. tertii dec.
b 5. tertii dec.
c 47. pri.
d 14. tertii dec.
e 2. quartidecimi.
f 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea divisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectũ constituat; cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri ejus sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A. cui recta subtendatur BD, sitque recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in

A D



qua AD, vel AC. latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. majus segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cujus minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla majoris segmenti BC, nempe lateris cubi: a *Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla ejusdem quadrati majoris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ:* b *Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD: Erit E, latus Octaedri ejusdem sphæræ, cujus AD, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea divisa, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 4. tertii dec.

b 14. tertii dec.

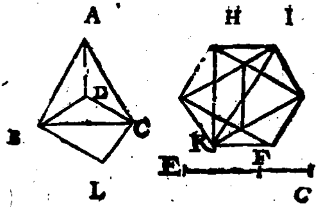
COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cujus majus segmentum est AD, latus Dodecaedri, ut constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit majus segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione divisæ: Perspicuum est, si linea quævis recta (nimirum BC) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E, potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD) esse latus Dodecaedri ejusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

c 18. tertii dec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit majus & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ, latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, majus segmentum EF, & minus FG, recta EG, divisa extrema ac media ratione: Sit quoq; HI, latus Icosaedri HIK, ejusdem sphæræ. Dico HI, rectam otentia esse

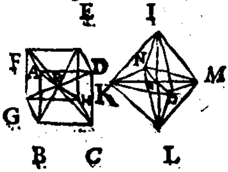
esse sesquialteram minoris segmenti FG. *Subtendat enim recta* HK, *unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta* IK, *diameter.* a *Quia igitur HI, est majus segmentum recta* HK, *divisa extrema ac media ratione;* b Erit *quoq; composita* KHI, *divisa eodem modo in* H, *majusque segmentum* HK, *&* *minus HI.* c *Fiat ex rectis* BC, EF, FG, *triangulum* BCK, *ita ut* BL, *recta ipsi* EF, *&* CL, *ipsi* FG, *sit aequalis,* d *Eritq; angulus* L, *rectus, quod recta* BC. *ponatur posse rectas* BL, CL, *hoc est, rectas* EF, FG: *Est autem & angulus IHK, rectus, ut propos. 23. hujus lib. ostendimus: Estque ut* BL, *ad* LC, *ita* KH, *ad* HI. f *Igitur triangula* BLC, KHI, *aequiangula sunt.* g *Ac propterea, ut* KI, *ad IH, ita* BC, *ad* CL: *& permutando, ut* KI, *ad* BC, *ita HI, ad* CL. h *Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri* BC. *Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius* CL, *hoc est, minoris segmenti* FH. *Si latus itaq; Tetraedri possit majus, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.*

a 8. *tertii dec.*
b 5. *tertii dec.*
c 22. *pri.*
d 48. *pri.*
e 2. *quartidecimi.*
f 6. *sexti.*
g 4. *sexti.*
h 13. *tertii dec.*

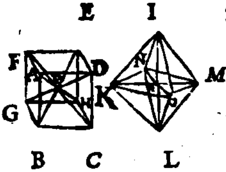
THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum est, ut superficies cubi ad Octaedri superficiem, Item ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resolvetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines. (Cum enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. *i* Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basin



i 21. *quartidecimi.*

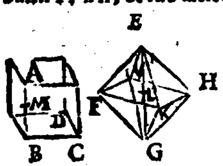


sin pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstravimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basin pyramidis Octaedri; Ideoque rursus ex eodem scholio, ut cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & octaedrum E F G H I K, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam vero quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. hujus lib. a sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: b Ac propterea parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basin B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L rectæ E N tripla est; erit & parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basin, & sub altitudine E N, ut in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine E L, triplum est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basin I F K H, & sub altitudine E N: Atqui hujus parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N. c Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterum, quia parallelepipedum super basin I F K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cum enim sit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super

a 18. *tertii dec.*

b 34. *undecimi.*

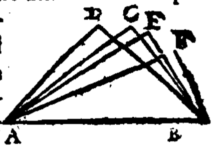


c 16. *quartidecimi.*

super basin IEKH, & sub altitudine ZM, æquale est ostensũ cubo ABCD: Et parallelepipedum super eandem basin, & sub altitudine ZN, æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque ut cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipsa sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD demonstratum est, a diametrum sphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus hujusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; majoris quadrati latus esse latus Tetraedri Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cujus quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB: Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita ut quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri. a 13. tertii dec.



RVRSVS b cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri: Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AC: Vel si constituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis secundum doctrinam scholii propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri. b 14. tertii dec.

DEINDE, c quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi: Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB: Vel si quadrato diametri AB, construantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita ut quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, juxta doctrinam ejusdem scholii prop 33. lib. 6 Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratũ lateris cubi BC: Quemadmo- c 14. tertii dec.

dum è contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & majus ipsius segmentum: *a* Majus segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cujus diameter est recta prior linea: Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, juxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quævis extrema ac media ratione divisæ ad majus segmentum: Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.

a 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam divisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum: *b* Minus segmentum latus est Dodecaedri ejus sphæræ, cujus diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri A B, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione divisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.

b 23. quartidecimi.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt. Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adjiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

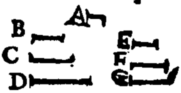
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, itaut sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT *quatuor recta* A, B, C, D, *continue proportionales, nec non quatuor* A, E, F, G, *ita ut* A, *recta antecedens sit omnium. Dico proportionem* C, *ad* F, *tertia ad tertiam, esse duplicatam proportionis* B, *ad* E, *secunda ad secundam, & proportionem* D, *ad* G, *quarta ad quartam esse triplicatam ejusdem proportionis* B, *ad* E, *secunda ad secundam. Cum enim recta* C, *ad rectam* A, *ex defin.* 10. *lib.* 5. *proportionem habeat duplicatam proportionis recta* B, *ad rectam* A: *c habeat autem & quadratum recta* B, *ad quadratum recta* A, *du-*

c 20. sexti.

duplicatam proportionem ejusdem proportionis recta B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum recta B, ad quadratum recta A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum recta E, ad quadratum recta A; Et convertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum recta A, ad quadratum recta E. Quoniam igitur est quadratum recta B, ad quadratum recta A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum recta A, ad quadratum recta E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex aquo quadratum recta B, ad quadratum recta E: ut recta C, ad rectam F: a Est autem proportio quadrati recta B, ad quadratum recta E, duplicata proportionis recta B, ad rectam E. Igitur & proportio recta C, ad rectam F, duplicata est proportionis recta B, ad rectam E. Quod est primum.



quadr.	B.	Recta	C.
quadr.	A.	Recta	A.
quadr.	E.	Recta	F.

a 20. sexti

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis recta B, ad rectam A: b habeat autem & cubus recta B, ad cubum recta A, triplicatam proportionem ejusdem proportionis recta B, ad rectam A: Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus recta B, ad cubum recta A. Eadem ratione erit, ut recta G, ad rectam A, ita cubus recta E, ad cubum recta A: Et convertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus recta A, ad cubum recta E. Quia ergo est cubus recta B, ad cubum recta A, ut recta D, ad rectam A: & cubus recta A, ad cubum recta E, ut recta A, ad rectam G: Erit ex aquo, cubus recta B, ad cubum recta E, ut recta D, ad rectam G: c Est autem proportio cubi recta B, ad cubum recta E, triplicata proportionis recta B, ad rectam E. Igitur & proportio recta D, ad rectam G, triplicata est proportionis recta B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor linea recta, &c. Quod demonstrandum erat.

b 33. undec

Cubus	B.	Recta	D.
Cubus	A.	Recta	A.
Cubus	E.	Recta	G.

c 33. undec

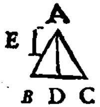
SCHOLIVM.

HOC idem demonstravimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris,

IN triangulo æquilatero ABC, *ducatur ex angulo* A, *ad latus oppositum* BC, *recta perpendicularis* AD, *quæ bifariam secabit latus* BC, *ut in corollar. propos.* 12. *hujus lib. demonstratum est; Ac propterea* BD, *dimidium est est lateris* AB.
a 13. *sexti.* a *Inveniatur ergo recta* E, *media proportionalis inter* AD, & BD. *Dico quadratum lateris* AB, *ad triangulum* ABC, *habere proportionem duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E. *Cum enim rectangulo sub* AD, BD, *æquale sit triangulum* ABC, *ut perspicuum est ex scholio propos.* 41. *lib.* 1.
b 17. *sexti.* b *Sit autem eidem rectangulo sub* AB, BD, *æquale quadratum rectæ* E: *Æqualia erunt triangulum* ABC, & *quadratum rectæ* E.
c 20. *sexti* c *Quoniam vero quadratum lateris* AB, *ad quadratum rectæ* E, *proportionem habet duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E: *Constat, quadratum lateris* AB, *ad triangulum* ABC, *proportionem habere quoque duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E. *Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum.*

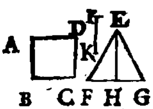


COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cujusvis ABCD, & *Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum* EFG, *in quo perpendicularis* EH, *ex angulo* E, *ad latus oppositum* FG, *deducta dividens* FG, *latus bifariam, ex coroll. propos.* 12. *hujus lib. Dico, esse quadratum* AC, *ad triangulum* EFG, *ut latus trianguli* EF, *ad perpendicularem* EH. *Posita enim inter* EH, FH, *media proportionali* IK: d *cum quadratum lateris Tetraedri* EF,
d 28. *tertii dec.* *duplum sit quadrati lateris cubi* AB: e *sit autem & duplum rectanguli sub latere* EF, & *dimidio ejus* FG, *eo quod dictum quadratum*
e 1. *sexti.* & *rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe* EF: *Erit rectan-*

angulum sub EF, *FH, æquale quadrato lateris* AB; a *Ac propterea* AB, *media proportionalis erit inter* EF, FH, *hoc est, tres rectæ* FH, AB, EF, *continuè erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ* FH, IK, EH, *continuè proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit* FH, b *erit proportio rectæ* EF, *ad rectam* EH, *tertia ad tertiam, proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK, *secunda ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum* AC, *rectæ* AB, *ad quadratum rectæ* IK, *hoc est, ad triangulum* EFG (*est enim ex coroll. propos.* 29. *hujus lib. quadratum rectæ* IK, *æquale triangulo* EFG) c *proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK; *Erit quadratum cubi* AC, *ad triangulum Tetraedri* EFG, *ut latus* EF, *ad perpendicularem* EH. *Quocirca si cubus Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.*

FH.	
AB.	IK.
EF.	EH.

a 17. *sexti.*
b 28. *quartidecimi.*
c 20. *sexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATUS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, sive altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusq; cubi ejusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: Axem vero DE, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum d descripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, ut constat ex propos. 15. hujus lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc est, lateris AB, e æquale est quadratis rectarum AD, DE, f & triplum quadrati semidiametri AD; Fit, ut posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

d 5. *quarti.*
e 47. *primi.*
f 12. *tertiidec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, g potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

g 18. *tertiidec.*

CO-

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6, quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. a quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, b cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.

a 13. tertii decimi.
b 20. sexti

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eædem sphæræ inscripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet, c tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex uno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.

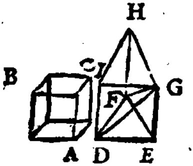
c 12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CUBUS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. d Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductum ex angulo quovis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. hujus libr. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi seu prismatis ABC: Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, ut hujus altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. libr. 12. demonstravimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propos. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit ejusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

d 30. quartidecimi.



COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTUM QVINTVM DECIMUM.

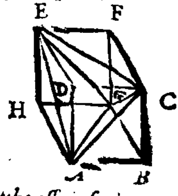
ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, *oporteat describere pyramidem, seu* Tetraedrum. *Ab uno ejus angulo, nempe ab* E, *ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri* EA, EG, EC, *ex quarum extremitatibus* A, G, C, *similiter diametri ducantur* AG, GC, CA, *in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quod potentia dupla sint laterum æqualium quadratorum, ut in scholio propos.* 47. *lib.* 1. *demonstravimus, perspicuum est, quatuor triangula* ACE, GAC, GAE, GCE, *ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia: Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin.* 31. *lib.* 11. *Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.*

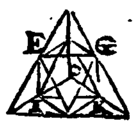


PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

ij. IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Divisis omnibus lateribus bifariam in B, F, G, H, I, K, *& ductis duodecim rectis* EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, *constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor* EHI, IHK, KHG, GHE, *supra planum* EIKG; *quatuor autem* IFE, EFG, HFK, KFI, *infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera* AE, AH, *trianguli* AEH, *aequalia sunt lateribus* AG, AH, *trianguli* AGH, *quod sint dimidia rectarum aequalium* AB, AD, AC; Item *& anguli contenti* EAH, GAH, *aequales, quod sint anguli triangulorum aequilaterorum* ABD, ACD: a *aequales erunt bases* EH, GH. *Eademque ratione aequales erunt rectae* EH, HI, *& reliquae eodem modo. Quare dicta octo triangula aequilatera sunt & aequalia inter se; ideoq; octaedrum componunt* EIKGHF; *quod quidem ex defin.* 31. *lib.* 11. *intra tetraedrum descriptum est, cum omnes ejus anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.*



a 8. duodec.

CORROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt aequalia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstravimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam dividit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse aequalem, & prisma prismati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, dividunt bifariam eandem pyramidem ABCD) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari tribus quadratis aequalibus quae octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

b 8. duodec.

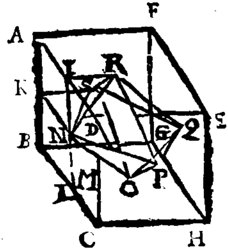
PROBL. 3. PROPOS. 3.

iij. IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Dividantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quae connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, ut constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inveniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectae ex dictis centris ductae ad media puncta basium, cujusmodi sunt NI, RI, NI, SK &c. aequales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, ut persp

cuum

tuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra conjungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; a angulus NIR, æqualis est recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse c si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duę rectæ, NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se: ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11, intra cubum est descriptum, cum omnes ejus sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.



a 10. *undec.*
b 29. *primi.*

ALITER. c In cubo dato inscribatur pyramis: d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 2. hujus lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera verò pyramidis ex demonstratione propos. 1. hujus lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri; perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi, atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

c 1. *quintidec.*
d 2. *quintidec.*

COROLLARIUM.

QUIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO (si ducantur) se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ

quæ quidem conjungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, ut docuimus coroll. 1. propos. 15. libr. 13. sed etiam ad angulos rectos, ut hic ostendimus, dividere.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

DATVM Octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit una earum pyramis ABCDE, cujus basis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra GHIK, per quæ ducantur rectę LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC: CED, DEA, ex coroll. propos. 4. libr. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent communia.

Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conveniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, ut mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. a Quia vero ducta recta EKP, a 18. quartidecimi. tripla est rectæ KP. b Est autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; b 2. sex. Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, convenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB non in eodem cum c 10. undec. ipsis existentibus plano; c ęqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est. cum ABCD, quadratum sit, ut ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam d 15. undec. planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, d parallelum e 15. undec. est plano ABCD, e ipsa, cum conveniant in punctis, M & O, unum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus

EO,

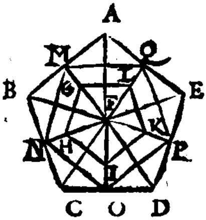
EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib. 13. *a* Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, *b* æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN; angulosque comprehendunt rectos: (*c* cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis conjungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex hujusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum descriptus erit, cum octo ejus anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. pri.
b 4. pri.
c 13. primi

V.
VI.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



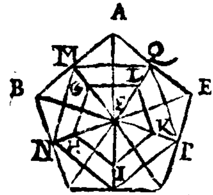
SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continentur, quarum videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, una pyramis ABCDEF, cujus basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, EP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. libr. 13. bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q: ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, *d* æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP, d 4. pri.

a 8. pri. PQ,QM, puncta M,N,O,P,Q, connectentes: a Ac proinde & anguli MFN,NFO,OFP,PFQ,QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; b erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI,

b 4. primi.

FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribentium, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonstratum est; c Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. d Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis. e Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Denique cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG FH, FI, FK, FL, duplæ sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propos. 18. lib. 14.

c 4. primi.
d 13. pri.



e 4. primi.

f 2. sext. f parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipsis MN, NO, OP, PQ, QM;
g 10. undec. g Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter se æquales
h 15. undec. erunt. h Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela sunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conveniuntque in recta HI, ipsa unum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Eodemque modo ostendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum constituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod si eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula; quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim hujusmodi pentagona Dodecaedrum constituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icosaedro erit descriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti

basi-

basium Icosaedri, consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

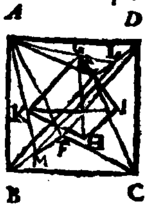
ITAQUE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales: (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentiũ, atq; adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri: æquales erunt inter se, ex lem. 2. ejusdem propos. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

O. V.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in Octaedro ABCDEF. *In pyramide octaedri superiori* ABCDE, *sumantur* G, & H, *centra triangulorum ex adverso sibi respondentium* AED, BEC; *Item in pyramide inferiori* ABCDF, *capiantur* I, & K, *centra triangulorum ex adverso quoque sibi correspondentium* CFD, AFB, *quæ quidem centra conjungantur sex rectis* GH, GI, GK, HI, HK, IK, *ut fiat pyramis* HIKG. *Deinde ex* A, *demittantur per centra* G, K, *rectæ* AL, AM, *secantes latera opposita octaedri* DE, BF, *bifariam in* L, & M, *per scholium propos. 12. lib. 3. conjungaturque recta* LM, a *qua ipsi* BE, *vel* FD, *æqualis & parallela erit: cum* EL, BM; *Item* DL, FM, *rectæ æquales sint & parallelæ, nimirum dimidia laterum* DE, BF, *oppositorum in quadrato* EF. a 33. primi. *Quoniam vero rectæ* AL, AM, *secta sunt proportionaliter in* G, & K, *punctis, quod* AG, AK, *dupla sint ipsarum* GL, KM, *ex coroll. propos. 18. lib. 14.* b *Erunt* GK, LM, *parallelæ*; b 2. sexti. *Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula* ALM, AGK, *similia.* c 4. sexti. c *Quare erit ut* AL, *ad* LM, *ita* AG, *ad* GK; & *permutando, ut* AL, *ad* AG, *ita* LM, *ad* GK. *Est autem* AL, *ipsius* AG, *sesquialtera*; d *quod* GL, *sit tertia pars ipsius* AL, *ideoq;* AG, *ejusdem* AL, *duæ tertiæ.* d 18. quartidecimi. *Igitur &* LM, *hoc est, ipsi æqualis* DF, *sesquialtera erit ipsius* GK. *Hac eadem arte ostendemus & reliquarum linearum centra* G, H, I, K, *conjungentiũ sesquialtera esse latera octaedri*; *Ac proinde rectas pyramidem* HIKG, *componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq;* Tetraedrum *constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.*



ALITER. e *In octaedro dato inscribatur cubus*, f & *in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri*, & *in angulis cubi* e 4. quartidecimi. f 1. quintidec.

 collo-

collocentur, quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

COROLLARIVM I.

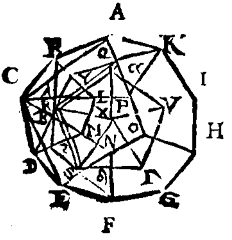
QVIA vero ostensum est, utramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM, *a* ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: *b* Atque
a 9.*undec.* eadem ratione KH, ipsius FC; EA, parallelum esse: Atque idcirco, planum
b 15.*undec* GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, nec non & plano BEA, per BE, EA. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas videlicet binis oppositis.

COROLLARIVM. II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumscribat & cubum & tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & hujus anguli in centris basium octaedri constituantur: Atque adeo recta conjungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, ut constat ex 4. propos. hujus libr. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum conjungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

O.
vij. IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

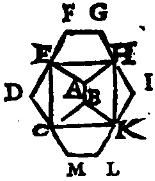


SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, *LMN*OP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis jungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: *E*t ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, *C*M, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll 2. propos. 10. lib. 13. bifariam divident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, convenient: *D*ividunt autem & rectæ eædem YK, Y*D*, rectas AP, *CM*, bifariam, & ad angulos rectos in α β, ex 1. coroll. ejusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam
c 28.*tertii.* am dividant (*c* constat enim rectas AK, PK; Item *CD*, MD, arcus
d 28. *pri.* subtendere æquales.) *d* Igitur A α, C β, parallelæ sunt rectæ B Y,
e 9.*undec.* *e* atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimi-

dimidia rectarum *A*P, CM, *a* quæ æquales sunt, cum latera K A, a 4. *pri.*
KP, lateribus DC, D*M*, æqualia sint, angulosque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipsas connectentes AC, $\alpha\ \beta$, æquales erunt & pa- b 33. *primi.*
rallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, E N, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æquales esse ipsas C E, $\gamma\ \delta$: *c* Sunt au- c 4. *primi.*
tem AC, CE, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri A B, BC, quam C*D*, D*E*, angulum pentagoni æquianguli continent, ut constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, ut figura monstrare videtur, sed extrorsum, ut ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & $\alpha\ \beta$, $\gamma\ \delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales sint (Nam YQ, YR, ZR, Y S, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, *DM*, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, *d* atque adeo æquales. Item d 14. *tertii*
Q α, R β, R γ, S δ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales: e 14. *tertii.*
*A*c proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Y δ, æquales erunt.) *f* Erunt quo- f 8. *primi.*
que anguli α Y β, γ Z δ, æquales: Ac propterea, cum & rectæ Y Q, g 4. *primi.*
YR, Z R, ZS, æquales sint; *g* æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri, L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quę quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

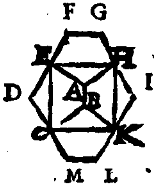
PROBL. 8. PROPOS. 8. O. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus AB-CDE, *E*FGHA, AH*I*KB, BKLMC, *convenientia ad latus* AB: *duo quidem* ABCDE, *A*B-KIH, *secundum latus idem commune* AB: *alia autem duo* AEFGH, BCMLK, *secundum angulos* EAH, CBK. *In his vero pentagonis subtendantur angulis* A, B, *D*, *I*, *rectæ* EH, CK, CE, *H*K, *quadrilaterum*

rum efficientes EHKC. *quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera* AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, *æqualia sint, angulosq́; contineant æquales, ex hypothesi:* a4.pri. a *æquales erunt bases* EH, HK, KC, CE b28. tert. b *Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum* ABCDE, *circumscribente arcus æquales; Erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. rectæ* AB, CE, *parallelæ. Eademq́; ratione parallelæ erunt* AB, HK c9. undecimi. c *Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt:* d33. primi d *Ac propterea rectæ* EH, CK, *quæ ipsas connectunt:*



parallelæ erunt, e7. undec. e *in eodemq́; cum ipsis plano: ideoque parallelogrammum erit* EHKC; *quod ostendimus esse æquilaterum. Quia vero planum* ECKH, *productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propositionis 10. lib. 14. circa quadrilaterum* EK, *descriptum:* f22. tertii. f *Erunt tam anguli oppositi* E, K, *quam* C, H, *duobus rectis æquales;* g34. pri. g *Ac propterea cum oppositi* E, & K, *sint æquales, nec non & oppositi* C, & H: *erunt omnes quatuor anguli* E, C, K, H, *recti. Quare* EK, *quadratum erit: collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine: constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia,* h4. pri. h *eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt, cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim ejus latera jacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, ejusq́; octo anguli in octo Dodecaedri angulis resident. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.*

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

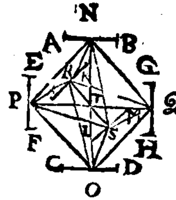
o. jx.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

S V M A N T V R *in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum* AB, CD, EF, GH, IK, LM, *quæ bifariam secentur in* N, O, P, Q, S. *Rectæ igitur* NO, PQ, RS, *sectiones oppositorum laterum conjungentes æquales erunt, seque mutuo in* T, *centro sphæræ bifariam, & angulos rectos divident, per coroll. 3. propos.*

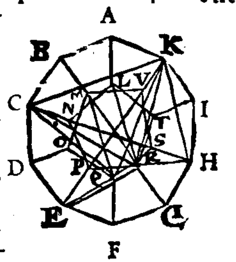
pos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. a *Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos* NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, *quales sunt* NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, *æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula* NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, OSQ, QSO, *æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra* Dodecaedrum *descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur* Dodecaedro *octaedrum descripsimus.* Quod faciendum erat. a 4. pri.



PROBL. 10. PROPOS. 10. O. X.

IN dato dodecaedro pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT: MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, sive tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LV, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, Lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM,



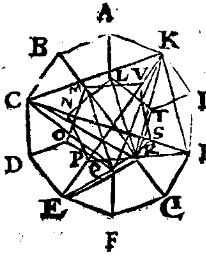
& connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; *b* quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis ejus sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib 14. *c* Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus, rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. *d* Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH,

b 17. tertii dec.

c 31. tertii.

d 47. pri.

 & qua-



& quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH, (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehensos, *a* æquales sunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ: Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. pri.

ALITER. *b* In proposito Dodecaedro cubus describatur: *c* & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant: perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

b 8. quintidecimi.
c 1. quintidecimi.

O. xj.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

d DESCRIBATVR *in dato Icosaedro Dodecaedrum*: e *& in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis* Dodecaedri: *anguli vero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri; Ac propterea cubus in* Icosaedro *descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.*

d 5. quintidecimi.
e 8. quintidecimi.

O. xij.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

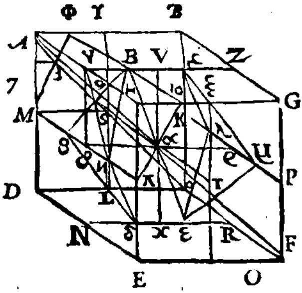
IN dato Icosaedro f *cubus describatur*, g *& in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur.* h *Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri: Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam.* i *In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.*

f 11. quintidecimi.
g 1. quintidecimi.
h 11 quintidecimi.
i 1. quintidecimi.

PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

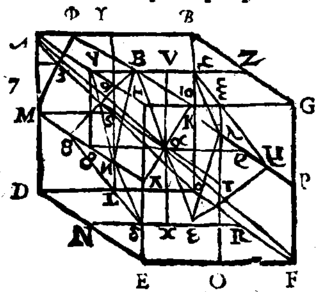


SIT in cubo proposito AF. describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, conjunctis rectis IL, YZ, ξ O, Mπ, KP, NR, nusquam inter se coeuntibus, ita ut ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed una duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, cõnexis rectis ST, VX, ρ Q, quæ se mutuo in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propos. 3. hujus lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, $M\pi$, secentur extrema ac media ratione in $\beta, \gamma, \theta, \varkappa$, ut sint majora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, $\pi\varkappa$, ductis rectis Yρ Y$\varkappa$, $\beta\theta$ $\beta\varkappa$. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & $\rho\varkappa$, β V, segmenta minora rectarum æqualinm YV, $\rho\pi$, æqualia quoque: *a* Sunt autem quadrata rectarum Y V, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, $\rho\varkappa$, tripla ejusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, *b* cum quadratis rectarum Yρ, $\rho\varkappa$, æquale sit quadratum rectæ Y$\varkappa$, *c* quod angulus Y$\rho\varkappa$, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y$\varkappa$, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad A Y, Yρ, *d* recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βY$\varkappa$, ex defin. 3. lib. 11. *e* Ac propterea quadratum rectæ $\beta\varkappa$, æquale quadratis rectarum Y$\varkappa$, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Xβ (quia nimirum quadrata rectarum Y$\varkappa$, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cũ quadratum rectæ Y$\varkappa$, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ,) Ideoque *f* cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta $\beta\varkappa$, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & $\theta\varkappa$, dupla ipsius $\rho\varkappa$, quod minora segmenta $\theta\rho$, $\varkappa\rho$, rectarum æqualium Mρ, $\pi\rho$, æqualia sint. *g* Erit igitur ut Yβ, ad $\rho\varkappa$, ita $\beta\varkappa$, dupla ipsius Yβ, ad $\theta\varkappa$, duplam ipsius $\rho\varkappa$: Est autem Yβ, majus segmentum ad $\rho\varkappa$, rectam minori segmento βV, æqualem, ut tota ad majus segmentum. Ergo & $\beta\varkappa$, ad $\theta\varkappa$, erit ut tota ad majus segmentum; Ac proinde $\theta\varkappa$, erit majus segmentum rectæ $\beta\varkappa$, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus $\theta\varkappa$, majus esse segmentum rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimi-

Ducatur in figura recta HαC

a 4. *tertiidec.*
b 47. *pri.*
c 29. *pri.*
d 4. *undec.*
e 47. *pri.*
f 20. *sex.*
g 15. *quinti.*

nimirum ducatur recta Y θ. Quare æquales erunt β θ, β ϰ, constituentes triangulum Isosceles β θ ϰ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus: Ac proinde θ ϰ, erit latus pentagoni in circulo triangulum β θ ϰ, circumscribente descripti, ut perspicuum est ex 11. propos. lib 4.



INTELLIGATVR jam planum trianguli β θ ϰ, extendi, (ducta per β, recta β φ, ipsi M ϖ, parallela,) per parallelas M, φ 10. ut sit planum extensum φ ϖ, occurrens diametro AB, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi A φ, parallela, connectaturque MS, a quæ parallela est utrique A φ, 73.

a 33. primi.

Quoniam igitur per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; b ac proinde ut AM, ad MS, ita est A7. ad 73.

b 4 sex.

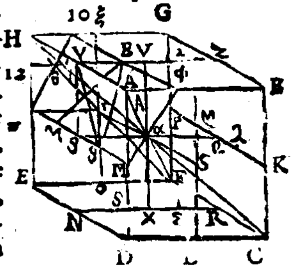
Sunt autẽ AM, MS, æquales, nẽpe dimidia cubi latera; Erunt quoq; A, 7. 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA, ad Aφ, ita M7, ad 73. Est autem A φ, majus segmentum rectæ MA, divisæ extrema ac media ratione (c quod æquales sint Aφ, Yβ, nec non & MA, YV, dimidia cubi latera) Igitur & 73, hoc est 7 A, majus segmentum erit rectæ M 7, extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota M A, divisa erit extrema ac media ratione in 7. majusq; segmentum erit M7. e Atqui ut M7 ad 7. A, ita est S. 3. ad 3. A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. majusque segmentum est S. 3. f Quia vero S α T, parallela est ipsi M ϖ: quod & recta ducta ϖ T, æqualis & parallela sit ipsi M S: si per S α T, planum ducatur parallelum plano φ ϖ, ducto per M ϖ, g secabuntur rectæ AS, A α, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cum planum φ ϖ, rectas A S, A α, secet in 3. & 4. at planum per S α T, ductum plano φ ϖ, parallelum easdem secet in S, & α. Atque idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A α, semidiameter cubi, in 4. majusque segmentum erit α 4.

c 34. pri.
d 5. tertii decimi.
e 2. sexti.
f 33. primi.
g 17. undec

IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φ ϖ, ut perspicuum est, si cubus invertatur, ut in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ licet bases cubi sedes mutaverint, ita ut quadratum AC, locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati A C, obtineat in hac secunda figura,

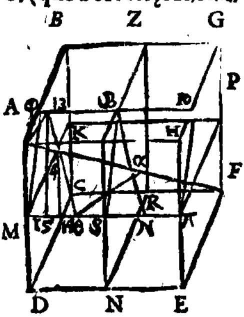
Quo-

Quod tamen in prima figura, sine hac inversione probabitur etiam hoc modo Ducta diametro cubi H-C, in ea figura; (Hæc deest in figura quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum $\phi\varpi$ secet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano $\phi\varpi$, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conveniunt, secanturq; planis parallelis in punctis *A*, H, & 4, 9: (Nam planum $\phi\varpi$, eas secat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano $\phi\varpi$, parallelum easdem secat in *A*, & H) *a* erit ut α 4, ad 4 A, ita α 9. ad 9 H. Cum ergo α *A*, secta sit in 4. extrema & media ratione, erit quoque α H. similiter secta quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cub. inversione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectę jungantur θ 4, β 4, β 9, $\varkappa$ 9, rectilineum β 4, $\theta\varkappa$ 9, in plano $\phi\varpi$, existens, pentagonum esse ęquilaterum, & ęquiangulum. a 15. undec

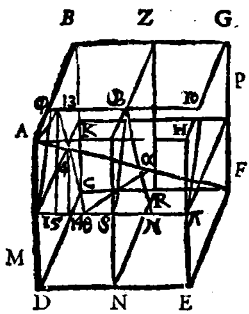


INVERTATVR rursum cubus, ut quadrata *A*DEH, ABGH, quę nimirum continennt triangulum β, θ $\varkappa$, sive planum $\phi\varpi$, hunc situm habeant, quem mõstrat tertia hæc figura. Deinde in plano $\phi\varpi$, recta conjuncta θ 4. extendatur usque ad rectam ϕ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & junctis rectis MK, ϖ P, *b* planum *M* P, parallelum est plano A G, (quod & rectęPK, KM, parallelę sint rectis GB, B*A*) *c* secatque cubum bifariam: ideoque per centrum α, transit, per ea quę in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt: si per rectas α 4 A, θ 4. 13. planum extendatur, *d* fient $\alpha\theta$, A 13. communes sectiones planorum MP, AG, parallelę: Ac proinde triangula $\alpha\theta$ 4. 1. α 34. ęquiangula erunt: *e* Eritque ut α 4. ad 4. A, ita θ 4. ad 4 13. Quare cum α A, in 4, secta sit extrema ac media ratione, ut ostendimus: eodem modo erit secta θ 13, in 4. Rursus plano NZ, per centrum α, transeunti parallelum ducatur planum per punctum 4 ex schol propos. 15. lib. 11. secans $\phi\varpi$, recta 4. 14. *f* Est autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. *g* Rectę igitur α A, ρ *M*, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusque erit segmentum 14 *M*, ideoque ęquale minori ρ θ, ipsius Mρ.

b 15. undec
c 32. unde.
d 16. und.
e 4. sext.
f 15. undec.
g 17. undec



Qua-



Quare cum ex ρ14. majori segmento ipsius ρM, auferatur ρ θ, minus segmentum; Erit, ut demonstravimus ad propos. 5. lib. 13. ς 14. divisa in θ, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit ρ θ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, a secabuntur rectæ θ 13. θ 15. proportionaliter; Ac proinde & θ 15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, majusque segmentum erit θ14. b Quapropter erit ut ρ θ, majus segmentum ad θ14 minus ita θ 14. majus ad 14. 15. minus: Vt autem θ14. ad 14. 15. ita est tota θ 15. ad θ 14. majus segmentum. Igitur erit, ut ρ θ, ad θ 14. ita θ 15. ad eandem θ 14. Ac propterea rectæ ρ θ, vel ρ κ, & θ 15. æquales erunt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secantur plano φ π, c erunt communes sectiones β ρ, 4, 14. parallelæ, ideoque & 13 15. β ρ, parallelæ erunt, d angulusque externus β ρ κ, interno 13. 15. θ. æqualis. Cum igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13. 15. 15. θ, sint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ β κ, 13 θ. Ac proinde & earum segmenta majora θ κ, θ 4. (Ostensum enim est θ κ, esse majus segmentum ipsius β κ) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipsi β γ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basin β γ, cujus vertex consistat in puncto, quod rectam I S. dividit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem θ κ, β γ æquales erunt κ 9. β 9. Æquilaterum ergo est pentagonum β 4. θ κ 9. quandoquidem β γ, θ κ, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, π ρ, M ρ. Sed & æquiangulum, ut mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξ O, K P; bina ipsi β θ κ, similia, & æqualia construantur; (ita enim ad Mπ, duo hujusmodi triangula vides β θ κ, δ θ κ) & ipsorum beneficio duodecim pentagona ipsi β 4. θ κ 9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cujus duodecim quidem anguli in sex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O. K P, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione dividunt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris A α, & H α, secundę figurę; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo hujusmodi Dodecaedrum, quamvis non proprie, cum non omnes ejus anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero

a 2. sexti.

b 2. quartidecimi.

c 16. undecimi.

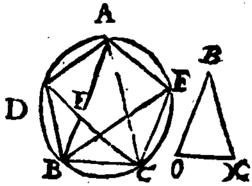
d 29. primi

e 4. primi.

vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

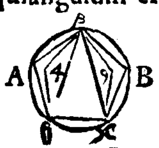
LEMMA.

QVOD autem triangulum $\beta\theta\kappa$, cujus basis $\theta\kappa$, majus segmentum existat utriusque lateris $\beta\theta$, $\beta\kappa$, extrema ac media ratione divisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, divisisque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, ut propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F. a Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, majusque ejus segmentum est A F, æquale lateri B C: b Erit ut AB, tota ad majus suum segmentum BC, ita $\beta\theta$, tota ad majus suum segmentum $\theta\kappa$; Eodemque modo, ut tota AC, ad majus segmentum CB, ita $\beta\kappa$, tota ad majus segmentum $\kappa\theta$: Est autem quoque ut AB, ad AC, ita $\beta\theta$, ad $\beta\kappa$, utrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur $\beta\theta\kappa$, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; proptereaque uterque angulorum $\theta\kappa$, duplus erit angulus β; & triangula $\beta\theta\kappa$, ABC, similia.



a 8. tertii. dec.
b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM vero β 4 θ κ 9. æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum $\beta\theta\kappa$, circulus $\beta A\theta\kappa B$, qui si transeat per puncta 4. & 9. perspicuum est ex iis, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4. & 9. Describatur in circulo dicto, juxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum $\beta A\theta\kappa B$.



Quo-

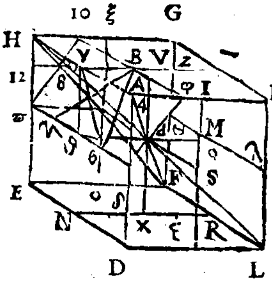
Quoniam igitur tam rectæ $A \theta$, $A \zeta$. quam rectæ 4θ, 4ζ æquales sunt rectæ θx, cum & $\zeta 4 \theta x 9$, & $\zeta A \theta x B$, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θA, $\theta 4$, quam duæ ζA, 4ζ, æquales quod fieri non posse demonstratum est propos.7.lib.1. Transit ergo circulus triangulo $\zeta \theta x$, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum $\zeta 4 \theta x 9$, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri $\beta \epsilon$, intelligaturque conjuncta recta $\gamma \epsilon$, a æqualis existens & parallela lateri cubi VX, quod & $V \gamma$, $X \epsilon$, æquales sint & parallelæ. Quoniam igitur angulus ζVX, rectus est: b rectus quoque erit angulus $\beta \gamma \epsilon$, ad γ, constitutus: c Ac proinde quadratum diametri $\beta \epsilon$, æquale erit quadratis laterum $\beta \gamma$, $\gamma \epsilon$, nempe Dodecaedri, & cubi.

a 33.pri.

b 29.pri.

c 47.pri.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Majus vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

d 15.quinti

IN eadem enim prima figura, d cum sit ut YX, ad βV, ita YZ, dupla ipsius YV, ad $\beta \gamma$, duplam ipsius βV: Sit autem βV, minus segmentum ipsius YV, sectæ extrema ac media ratione Erit & $\beta \gamma$, minus segmentum lateris cubi YZ, secti extrema ac media ratione: composita vero ex Yβ, γ Z, hoc est, recta βx (quæ dupla fuit ostensa ipsius Yβ, ideoque compositæ ex Yβ, γZ, æqualis) majus segmentum. Constat autem ex constructione $\beta \gamma$, esse latus Dodecaedri e & βx, seu $\beta \theta$, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti. cum subtendat angulum pentagoni $\beta 9 x$, vel $\beta 4 \theta$.

e 8.quintidec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus laateribus; Dodecaecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri $\beta\gamma$, in ipso descripti, & ex recta composita ex Y β, γ Z, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim Y Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, ut perspicuum est ex 8. propos. hujus lib. *a* Sit autem latus illius pentagoni majus segmentum lateris Y Z, secti extrema ac media ratione: Erit $\beta\,\theta$, existens quoque majus segmentum ejusdem lateris Y Z, & aequalis duabus Y β, γ Z, simul, ut jam demonstravimus, latus Dodecaedri cubo lateris Y Z, circumscripti. a 8. tertiidec.

IV.

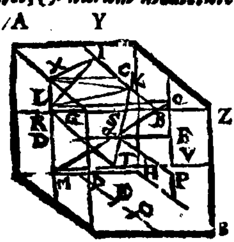
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est aequalis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri $\theta\,\kappa$, oppositi, *b* aequalis est rectae VX (quod & βV, δX, aequales sint, & parallelae) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur. b 33. pri.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

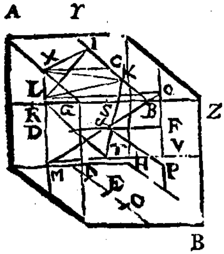
CUBUS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit A B, *per cujus basium centra* C, D, E, F, G, H, *lateribus cubi recta linea parallela agantur nusquam inter se convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur,*



ita ut majora segmenta prope centra sint in punctis I, K : L, M : *N*, O : *P*, *Q* : *R*, *S* : T, Y : *quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, ut* L, *cum I, K, T, &* R : R *cum* L, M, *I, & N, &c. ut constituantur viginti triangula* IKL, IKQ; LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR : *quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo ejusdem cubi octo angulis substernuntur.* Connectantur *jam recta* XC, XI, XK. *Quoniam igitur latera* X C, C I, *trianguli* X C I, *aequalia sunt lateribus* XC, CK, *trianguli* X C K ; *c & anguli contenti, recti, quod* X C, c 29. pri.

pa-

a 4. pri. *parallela sit ipsi* A Υ: a *Erunt & bases* XI, XK, *aquales.* *Deinde quia linea* LX, *recta est ad planum* A Z, *per defin.* 4. *lib.* 11. *recta quoque erit ad lineas* XI, XK, *Ac propterea, cum latera* LX, XI, *trianguli* LXI, *aqualia sint lateribus* LX, XK, *trianguli* LXK, *&*
b 4. primi. *anguli contenti, recti*; b *aquales erunt bases* LI, LK. *Rursus* c *quo-*
c 7. pri. *niam quadratum recta* LI, *aquale est quadratis rectarum* LX, XI; *Et quadratum recta* LX, *quadrato recta* IΥ; *quadratum vero recta* XI, *quadratis rectarum* XC, CI, *est aquale*: *Æquale erit quadratum recta* LI, *tribus quadratis rectarum* XC, CI, IΥ: *Sunt autem & quadrata rectarum* XC, CΥ, *aqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera.* *Igitur quadratum recta*



LI, aquale est tribus quadratis rectarum CΥ, CI, IΥ: *Sed hac tria*
d 4. tertii decimi. *quadrata quadrupla sunt quadrati recta* CI, (d *Cum enim quadrata rectarum* CΥ, IΥ, *totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati recta* CI, *majoris segmenti*; *Addito quadrato recta* CI, *illis duobus, erunt tria quadrata rectarum* CΥ, CI, IΥ, *quadrupla ejusdem quadrati recta* CI.) *Quadratum ergo recta* LI, *quadruplum est quoque quadrati recta* CI; *Ac propterea, cum ejusdem quadrati recta* CI, *quadruplum sit quadratum recta* KI, *ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *Æqualia erunt quadrata rectarum* LI, IK, *ideoque & recta ipsa aquales.* *Æquilaterum igitur est triangulum* IKL, *lateri cubi* AG, *substratum.*

NON *aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi supposita, esse aquilatera*; *Atque adeo inter se aqualia, cum eorum latera* IK, LM, NO, PQ, RS, TV, *aqualia sint.* *Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis*; *ut in triangulo* KTL, *latus* KL, *commune est triangulo* IKL, *& latus* KT, *triangulo* TVK, *& latus* TL, *triangulo* LMT; *perspicuum est, ea quoque esse aqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis.* *Quare omnia viginti hujusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum ejus anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis.* *Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus.* *Quod erat faciendum.*

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositiones sequentes.

DIA-

I.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela eſt, & aqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales: b manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt, c cum angulus MLQ, ſit rectus, quod & LDF, ſit rectus. a 33. primi. b 47. primi c 29. primi

II.

BIFARIÆ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

NAM hujusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum conjungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. hujus lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, dividunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F. FQ. trianguli α FQ, æqualia ſunt lateribus α F, FP, trianguli α FP, anguloſque comprehendunt rectos, d æquales erunt recta α Q, α P. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri. d 4. primi.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, majus ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

CVM enim CI, ſit majus ſegmentum rectæ CY: e ſitque ut CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad β Y, duplam ipſius CY: f erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum majus lateris cubi β Y. Si enim alia recta, quam KI, eſſet majus ſegmentum rectæ β Y, eſſet β Y, ad illam rectam, ut CY, ad CI, hoc eſt, ut β Y, ad KI, diverſum ab illa recta. quod eſt abſurdum. e 15. quinti. f 2. quarti.

IV.

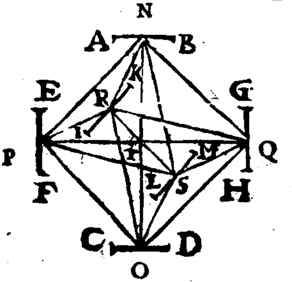
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, anguloſque alternos habentia æquales ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conveniunt. Quare quælibet latera oppoſita parallela erunt: g Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela. g 15. undecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

Exponantur dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, jungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſeſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ præcedentis oſtenſa ſunt: ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ PR; PS: QR, QS, conſtituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN.



Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualinm dimidia) anguloſque contineant, rectos, ut dictum eſt: a Æquales erunt baſes NS, NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt & inter ſe æqualia: Ideoque Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum ejus anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaque Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.

COROLLARIVM.

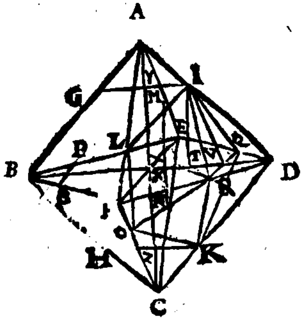
Sequitur hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, ubi ſe interſecant centrum quoque eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

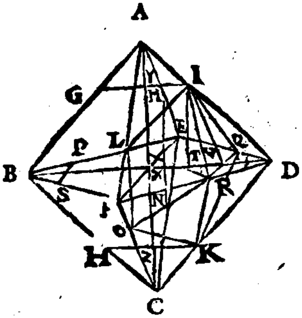
Datum octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi è regione reſpondentia, hoc eſt quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina juxta angulos oppoſitos ejuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC: DA, DC, juxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, juxta angulos oppoſitos A, G, quadrati AECF: Nam à quolibet angulo ſumenda ſunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD, juxta eoſdem angulos A, C, jam ſumpta fuere; EB, ED: FD, FB, juxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EB, FD, (Nam latera

latera EA, EC; FC, FA; quadrati AECF, juxta eosdem angulos E, F, jam accepta sunt) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, ut majora segmenta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinq; proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamvis non omnes ductæ sint in figura, ad evitandam linearum confusionem Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D, est commune triangulis Octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinq; laterum ductæ sint lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14 lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; *a* erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cum sit, *b* ut BG, ad GA, ita D*I*, ad I*A*; *c* erit G*I*, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR. ipsi EF, parallela; *d* Ac proinde ut D*I*, ad *IA*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione Rursus quia est ut AX, ad XD, ita AY, ad Y*I*, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos 4. lib. 6) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi Y*I*, æqualis. Quare Y*I*, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY. ipsi YG, esse æqualem; ideoq; G*I*, rectam bifariam in Y, similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, A*I*, trianguli AG*I*, æqualia sint lateribus DQ DR, trianguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendat rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; *e* æquales erunt bases



a 4. primi.
b 2. quartidecimi.
c 2. sexti.
d 4. sexti.
e 4. primi

bases G I, Q R. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ H K, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius X A, ostensum, majus est segmentum majoris segmenti X Y, divisi extrema ac media ratione, ut demonstravimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem



X Y, rectæ X V, æqualis (cum ambæ sint majora segmenta æqualium rectarum X A, X D) *a* & YI, rectæ XT: erit X T, majus segmentum ipsius X V, & idcirco T V, segmentum minus, ejusdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc est, ipsius, I T (*b* cum & recta I T, æqualis sit ipsi X Y) & T V, minoris segmenti, *c* tripla sunt quadrati rectæ X T, majoris segmenti: Atque adeo quadratum rectæ I V, *d* æquale existens quadratis rectarum I T, T V, triplum est ejusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ R V, quæ æqualis est ipsi X T, seu ipsi Y I, ex demonstratis, cum R V, Y I, dimidia sint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato rectæ R V, ipsi quadrato rectæ I V: erunt quadrata rectarum I V, VR, quadrupla quadrati rectæ R V: *e* At quadratis rectarum I V, VR; æquale est quadratum rectæ IR, *f* quod anguli I V R, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, V R : I V, V Q, & subtensi basibus æqualibus IR, I Q, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cum ejusdem quadrati rectæ V R, quadruplum quoque sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æqualia erunt quadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem I Q, ipsi I R, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est I Q R. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum IQR, habentia, nempe XQR, GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN, QMN, atque adeo triangulo I QR, æqualia, cum latera omnium sint æqualia inter se, quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum unam latus subtendat angulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus laterum octaedri: duo vero reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterum Octaedri, majore & minore: Erunt latera

a 34. primi

b 34. primi

c 4. tertiidec.

d 47. primi.

e 47. primi

f 8. primi.

latera unius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, majore & minore; hic vero segmentis A L, A I, majore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidẽ duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur, reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet G M P, in A E B, H N P, in B E C; K N Q, in C E D; I M Q in A E D; G L S, in A F B; H O S, in B F C; K O R, in C F D; I L R, in A F D, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conveniunt ad cõstitutionem anguli solidi (ut vides in quinq; R Q I, R I L, R L O, R O K, R K Q, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita ut unius malus segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cum enim in triangulo æquilatero A D E, majus segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A L, a cum quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuum est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmenti minoris A I. a 47. primi

COROLLARIVM. II.

RVRSVS fit, cum octo Icosaedri bases collatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis octaedri, & Icosaedri. suscipiatur namq; Octaedri superioris triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D. ex quo rectæ educantur C A, C E, C D: C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q. trianguli C E Q. (quod hæc latera sint ex centro, & maiora se-

gmenta

gmenta æqualium rectarum) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, ut in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus: Erunt bases CM, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile est deniq; ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunq; duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O, cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO. (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri sectorum extrema ac media ratione) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet (cum AC, EF, diametri sint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) *a* Aequales erunt & bases XG, XO. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

a 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN Octaedro Dodecaedrum describere.

b 16. quintidecimi.
c 5. quintidecimi.

b INSCRIBATVR dato octaedro Icosaedrum; *c* & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod jubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. hujus lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, ut ex defin. 31. lib. 11 apparere potest: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

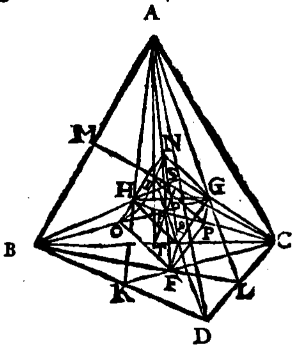
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

d 15. quartidecimi

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus jubetur describi; sitq; ejus centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, *d* quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex solidis angulis per centrum E demissæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis. quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris,

tris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circum stantium, ita ut relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis conjunguntur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualium BD, CD, à centro F,) angulosq; contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. *a* Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, ut demonstravimus; *b* Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG; QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namq; FT, FK; distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cùm latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD,) angulosq; contineant æquales: *c* Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus jam, ipsa plana esse atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

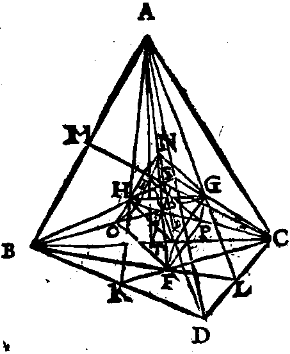


a 4. primi.

b 4. primi

c 4. primi.

ASSUMATUR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, conjungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constat ex figura propositionis 2. hujus lib. Nam punctum S, hujus figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint latera opposita, sive non-coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, ut mox demonstrabimus, tra... bit



ST, per E, centrum pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium *B*S, CS. Quare latera BS, CS, trianguli *B*S C, proportionaliter secantur, *b* atque idcirco, HG, parallela est lateri *B*C, secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus *c* quia DI, perpendicularis est ad triangulum A*B*C; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoq; ejus dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitq; latera ES, ED, triangnli D*E*S (quod quidem pars est trianguli A*E*D) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes ejusdem SE. Quoniam igitur utraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, à rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto intersecabunt. *e* Quare in eodem sunt plano, proptereaq; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ: Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

a 18. *quarti decimi.*

b 2. *sexti.*

c 15. *quartidecimi.*

d 2. *sexti.*

e 2. *undecimi.*

CVM ostensa sit HG, ipsi *B*C, parallela, atq; adeo triangulum SHG, simile triangulo S*B*C, ex coroll. propos. 4. lib. 6. *f* Erit ut SH, ad HG, ita S*B*, ad BC; & permutando, ut SH, ad SB, ita HG, ad *B*C: Est autem SH tertia pars ipsius S*B*: Igitur & HG, tertia pars erit lateris *B* C, Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera *B*C, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ. HQ; NG, QG, NH, QH; *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, ut osten-

f 2. *sexti.*

g 8. *primi.*

vt ostendimus ad propos.32.lib.1. recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q. in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus, factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. (*a* cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; *b* erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perdendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur: vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in medijs punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 2. *sexti.*
b *15. undecimi.*
c *17. undecimi.*

COROLLARIVM. I.

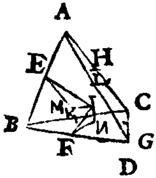
CONSTAT ex his, idem esse, centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM. II.

INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis. transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

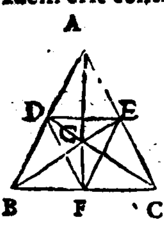
LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum



pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares dimittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. prop. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes, sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoq; æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. *a* Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H. I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.

a 4. primi.



SIT deinde in base pyramidis ABC, basis Octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriusq; basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosque continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri; *b* erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF, quod est propositum.

b 4. sexti.

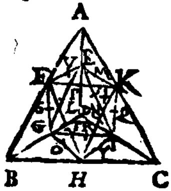
PROBL.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inſcribatur Octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum Octaedri cadentia, vt in prop. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in pũctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T. V, X, Y. Nam ſi quilibet horum punctorum cũ quinque proximis coniunxermus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto Octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis coſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna lateta octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, deniq; latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 2. quarti dec.



PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

PYRAMIDI datæ *b* inſcribatur Icoſaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll propoſ. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus pyra-

b 19. quintidec.
c 5. qui[illegible] dec.
d 8. quinti dec.

a18. quinti dec. pyramidi inscriptus, a quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenietes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarũ: supersunt autẽ duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

xiiij.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphærę datum solidum complectentis an singulas bases perpendiculares demittantur, quę ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quolibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19. huius lib. est manifestum. Nam, vt proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

b16. quintidec. c 5. quinti dec. *CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta: b In Octaedro enim describitur Icosaedrum, constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde c Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex pro-*

pos. 17.

pos.17.huius lib. Post hac in Dodecaedro d *describitur cubus, cubus octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident: ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est.* a *Deniq; in cubo pyramis includitur, qua ideo in Octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.*

d 8. quinti dec.

a 1. quinti dec.

NEQVE *vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphara comprehendi.* b *Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant,* c *conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido constat spharam Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atq; pyramidem, cum sphara illius superficies per horum solidorum angulos incedat.*

b 1. quinti dec.

c 8. quinti dec.

PARI *ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basiũ centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basium Icosaedri propos. 5.11. & 12. In centris vero basium Octaedri propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.*

VIGINTI *porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesue quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2.18.19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6.4.16.17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1.3.14. 13. In Icosaedro autem pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12.15.11.5. In Dodecaedro deniq;, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10.9.8.7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione qua arte in quouis solido regulari sphara depingatur docuimus.*

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELE-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

Liber Tertius.

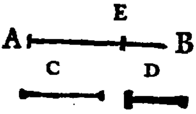
QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimus ſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D: diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus.

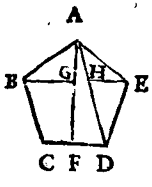
nus. Cum enim, vt in scholio vltimæ prop. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra: Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt AE, maius segmentũ ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris G, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum GD. perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, subtendente angulum A, secari in G: extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ secet BE, in H: quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, *a* secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: *b* Atqui AD, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.



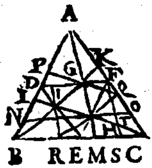
a 2. *sexti.*
b 18. *tertij dec.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppo-

opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC, *cuius latera secentur bifariam in* D, E, F, *iunctis rectis* DE, EF, FD, *quibus rursum sectis extrema ac media ratione in* G, H, I, *iungantur rectæ* GH, HI, IG, *constituentes* GHI, *triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 13. Secentur deinde latera trianguli* ABC, *extrema ac media ratione in* K, L, M, *iunctis rectis* BK, CL, AM. *Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri* GHI, *hoc est rectam* BK, *transire per puncta* G, I; *& rectam* CL, *per puncta* H, I; *& rectam* AM, *per puncta* G, H. *Ducta enim per* H, *recta* NO, *ipsi* BC, *parallela; erit triangulum* FHO, *triangulo* FEC, *simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo* ABC, *per idem coroll. Quare* HO, *recta æqualis est rectæ* FH, *maiori segmento rectæ* FE. *seu* DF, *ipsi æqualis: (Est enim &* DEF, *triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli comprehensos;*



a 4. pri. *a ideoque æqualia*
b 34. pri. *sint.) b Est autem &* NH; *æqualis toti* DF, *in parallelogrammo*
c 2. sexti. DH, *c propterea quod* FH, DF, *parallelæ sunt rectis* AB, BC, *seu* NO.
d 5. tertii-decimi. *Igitur recta* NO, *composita ex* NH, *tota, &* HO, *maiori segmento. d secta erit in* H, *extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ* BC, NO, DF, *similiter sint sectæ in* M, H, G, *nimirum extrema ac media ratione; Recta autem* AM, *ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam* AM, *transire per puncta* GH. *Haud secus ostendemus* BK, *per puncta* G, I; *&* CL, *per puncta* H, I, *transire, si per* G, *&* I, *rectæ ducantur parallelæ lateribus* AC, AB: *Atque idcirco rectæ* BK, CL, AM, *suis sectionibus producent triangulum Icosaedri* GHI.

AGATVR iam per G, *recta* PQ, *rectæ* CL, *parallela. Quoniam igitur* AF, *æqualis est rectæ* DF, *seu rectæ* FE, *cuius maius*
e 5. tertij-decimi. *segmentum fuit* FH, *hoc est,* FO, *illi æqualis; Erit quoque* FO, *maius segmentum rectæ* AF: *e ac proinde tota* AO, *secta in* F,
f 2. sexti. *extrema ac media ratione: f Est autem vt* AF, *ad* FO, *ita* AG, *ad* GH, *ob*

GH, *ob triangulum* AHO; *& ut* AH, *ad* GH, *ita* AQ, *ad* QC, *&* AP, *ad* PL, *ob triangula* AHC, AHL. *Igitur & rectæ* AH, AC, AL, *secantur in* G, Q, P, *extrema ac media ratione, suntque majora segmenta* AG, AQ, AP. *Recta ergo* AQ, AL, *segmenta majora rectarum æqualium* AC, AB, *æquales erunt. Quia vero est* a *ut* AQ, *majus segmentum, ad* QC, *minus, ita* AL, *tota ad* AP; *majus segmentum*: Et *est* AQ, *recta rectæ* AL, *æqualis*; *Erit &* QC, *recta æqualis rectæ* AP. *Quare & recta* AP, *minus segmentum erit lateris* AB, *majusque reliqua* BP; *ac propterea recta* PQ, *secabit latera* BA, AC, *extrema ac media ratione. Eadem ratione recta* PR, *quæ per* I, *ducitur parallela rectæ* AM, *secabit latera* CB, BA, *extrema ac media ratione, ideoque in punctum* P, *cadet. Non aliter recta* RQ, *per* H, *ducta parallela rectæ* BK, *latera* AC, CB, *secabit extrema ac media ratione: atque adeo in puncta* R, Q, *cadet. Quoniam vero singula latera trianguli* PQR, *cum subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum majore & minore segmento singulos,* b *æqualia inter se sunt: erit triangulum* PQR, *ex ipsis compositum, æquilaterum, cujus quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri* GHI (*Cum enim in triangulo* ACL, *recta* PQ, *parallela sit lateri* CL: *secabuntur* PQ, LC, *in easdem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstravimus*: Dividitur *autem* CL, *bifariam in* H, *ob triangulum* ACL, *in quo* FH, *parallela est lateri* AL, c *secans proportionaliter latera* CA, CL. *Igitur &* PQ, *bifariam secatur in* G. *Eademq; est ratio de reliquis* QR, RP) *Ac propterea triangulum Icosaedri* GHI, *inscriptum est triangulo æquilatero* PQR, *cujus anguli dividunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in* G, H, I, *ab angulis basis Icosaedri* GHI. *Quapropter si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.*

a 2. quartidecimi.

b 4. primi.

c 2. sexti.

COROLLARIUM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, majus esse segmentum rectæ divisæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cujus basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. *d* Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; *e* sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF; minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoq; reliqua ES, reliquæ DG, majori segmento æqualis: Ideoque EC, in S, secta erit extrema ac

d 2. sex.

e 34. pri.

 media

a 27 sexti. media ratione. Deinde a quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, majusque segmentum erit FT, recta b æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti majus est segmentum rectæ FS, quæ dividit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.

b 34. pri

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cujus latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basin Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cujus anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam dividantur in G, H, I, ut in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI.

Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1 propos. 16, lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI; ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. c Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, d cum diametro potentia sit commensurabile. e Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque adeo f cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri) Erit & latus Icosaedri ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

c 13. tertiidec.
d 6. tertiidecimi.
e 6. tertiidec.
f 6. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descripta diameter sit basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib 15. Sit autem quadratum hujus diametri, duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descripta.

RVRSVS, quia recta conjungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, ut liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli aquilateri duplum recta conjungentis bifariam ejus sectiones, cum ea recta aqualis sit di- a 2. sexti.
midio lateris trianguli, ut constat ex coroll propos. 4. lib. 6. a Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum aquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

DENIQVE b *quia diameter sphara, seu octaedri potentia est* b 14. tertii
dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi aquale diametro Octa- decimi.
edri sibi inscripti, cum diameter octaedri conjungat centra basium oppositarum, ut in coroll. propos. 3 lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

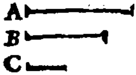
LATVS Dodecaedri majus segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus propos. 10. libr. 15. Sit autem latus dodecaedri majus segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; c existat denique latus cu- c 5. sexti
bi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscripta: Aperte colli- dec.
gitur, latus Dodecaedri majus, segmentum recta esse, qua potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscripta. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descri- A
pti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo de- B
scripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse C
proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propos. 14. libr. 15. demon-



strata sunt, B, latus Icosaedri majus segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. ejusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit ejusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, majus segmentum, ut B, majus segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ in propos. 18. lib. 5. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti (ostensum enim est ibi, G H, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramidis B C) a *Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proportio sit triplæ duplicata; ut in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib 1. fit, ut si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum ejusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.*

a 20. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM *enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus, quoque sit Pyramidi, cui illud* Dodecaedrum *inscribitur, ut docuimus in scholio propos. ult. lib. 15.* b *Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, &* Dodecaedro *inscripti: Hujus autem lateris cubi extrema ac media ratione secti majus segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus* Dodecaedri *in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum est recta extrema ac media ratione secta, cujus majus segmentum latus est* Dodecaedri *in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat.*

b 8. sextidec.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Ico-

Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione divisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta conjungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare a cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta aequalia, duplum poterit unius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. a 47. pri.

THEOR. II. PROPOS. II.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT una sex pyramidum octaedri ABCDE, cujus basis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quae rectae ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelae. Quod si conjungantur rectae FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, ut demonstravimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectae EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 1. erit EH: *b* Atqui ut EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi aequalis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectae LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quae in scholio propos. 47. lib. demonstravimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; *c* cum GI, diameter (si ducatur) aequalis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum. b 2. sexti. c 33. pri.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione divisum efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribunturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, ut docuimus in scholio propos. ultimae lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum ejus rectae extrema ac media ratione divisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti: eius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri majus segmentum est ejus rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones conjungunt tres rectæ lateri cubi æquales, ut constat ex propos. 14. lib. 15. ejusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. ejusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. libr. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit majus segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione divisi; Erit quoque idem latus Icosaedri majus segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. a *Atqui diameter sphæræ seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri majus segmentum ejus rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.*

a 14. tertii dec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam ejus, quam habet majus segmentum ad minus rectæ lineæ divisæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quem minus segmentum ad majus ejusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. libr. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione divisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad majus segmentum, vel majoris segmenti ad minus (quod tota linea, majus segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis majoris segmenti ad minus duplicatam.

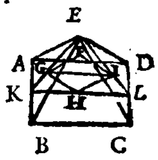
PRÆ-

PRÆTEREA, cum constet ex coroll. 1 propos. 17. lib. 13. majus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione divisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, majus segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad majus. Cum enim sit, ut tota linea ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus; Erit *quoque convertendo, ut majus segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad majus. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c.* Quod *erat demonstrandum.*

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATUS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT una sex pyramidum Octaedri ABCDE, cujus basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis jungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus. Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, dividentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 14, ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18. libr 14. *a* Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit ut EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, ut EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. *b* Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti.

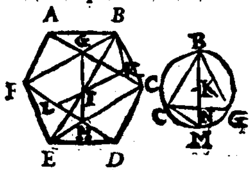
b 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cujus diameter BE, &

centrum I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. libr. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, ut



constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum I, centrum Icosaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I transeant, erit I, quoque centrum cubi inscripti, ideoque IK, IL, semidiametri æquales: Conjuncta autem KB, semidiametro circuli triangulum BCG, circumscribentis; erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, ut in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum est quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icosaedri BE, remanet, quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaque BK, usque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in scholio propos. 12. lib. 13. *c* erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN; vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quod BC, sit media proportionalis inter BM & BN, ex coroll. propos. 8. lib 6. *d* cum angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens, Recta igitur BM, potentia quoque sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 74. pri.

b 15. tertii dec.

c 12. quartidecimi.

d 31. tertii

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambienbientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione divisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, a duplum potens lateris Octaedri, conjungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, ut manifestum est ex propos. 9. lib. 5. Est autem recta dictas sectiones conjungentis divisa extrema ac media ratione minus segmentum latus Dodecaedri, *ex coroll. 4. propos. 17. libr. 13.* Liquet, *latus dodecaedri minus segmentum esse ejus recta extrema ac media ratione divisa, qua duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum hujusmodi recta conjungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cujus quidem minus segmentum est latus* Dodecaedri, *ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est recta linea extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.* a 14. tertii dec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

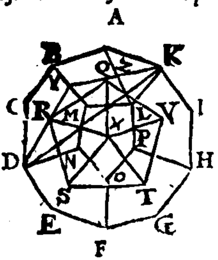
DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro *describantur, ut docuimus in scholio propos. ultima libr. 15. eademque sphara comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphara pyramidem circumdantis;* b *Potest autem diameter sphara sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, &* Icosaedro *descripta: Atqui diameter circuli basin Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, ut in demonstratione propos. 15. hujus lib. demonstravimus. Igitur diameter* Icosaedri *potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. hujus lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basin* Icosaedri *descripti, & lateris* Pyramidis *in eo descripta sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.* b 13. tertiidecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione divisæ, ad partem ejusdem lineæ inter centrum pentagoni & latus ejusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ALM-LK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X (qualibet videlicet duo proxima) jungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut ostensum est in demonstratione propos. 7. libr. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basium BM, per centra R, Q, recta demittantur DY, KY, qua quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propositionis 10 lib. 13 convenient in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K, secabitur a perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. a 2. sexti-dec. *Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad Latus Icosaedri sibi inscripti QR, ut KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam.*



Subtensa enim recta DK, qua per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositum describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorum æqualium æquales; nec non & YR, YQ, distantia nimirum recta BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) b parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. libr. 6. c Quamobrem erit, ut DK ad KY, ita QR, ad QY. d Vt autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, ut LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus &c. Quod erat demonstrandum.

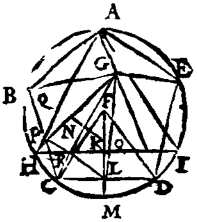
b 2. sexti. c 4. sex. d 2. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

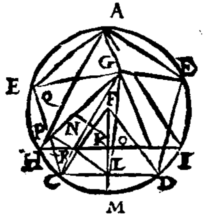
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque ejus segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum AB CDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cujus centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quæ in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED; æquales sunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, nec non & duo arcus ABH, AEI, cum sint tertiæ partes ejusdem circumferentiæ, erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; proptereaque rectæ HI, CD, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, a secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; conjungaturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, dividentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo divisa est CD, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N, O, quæ, ut constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icosaedro scripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q. extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione (quod FL, hac ratione secta faciat majus segmentum æquale perpendiculari FK, per coroll. propos. 2. lib. 14.) sit autem majori segmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonstravimus ad propos. 5. libr. 13. majus segmentum KM, sectum quoque in L, à minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ sui ipsius segmento LM. Quoniam vero juncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descri-



a 3. tertii.

descripti, idemque centrum *F*, habentis, ex scholio ultimo lib. 4. ideoque similis illi: erunt triangula FCD, FPL (si recta duceretur FP) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. Quare ut FG, ad *CD*, ita erit *FL*, ad *LP*; & permutando, ut FC, ad FL, ita CD ad *LP*; Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidii ipsius *FM*, nempe minore segmento rectæ KM, ut ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidii ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit PQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO (quod G *N*, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14) a parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GP*L*, simile; ex coroll. propos. 4. lib. 6. b Igitur erit ut GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, ut GP, ad GN, ita PL ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib 14. Quare & PL, hoc est sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum *C*Q, sesquialtera quoque sit rectæ QR· (Nam qualium partium 3. est *C*Q, talium 1. est QR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR, æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

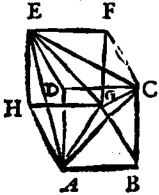


a 2. *sexti.*
b 4. *sexti.*

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, *descripta sit pyramis* ACEG. *Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin* ACE, *fundatur pyramis* ACED, *super basin* AEG, *pyramis* AEGH; *super basin* CEG, *pyramis* AEGF; *& super basin* ACG, *pyramis* ACGB: *quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex* 10. *definitione libri undecimi, cum contineantur planis similibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Qualibet enim constat tribus æqualibus & similibus*



bus triangulis, dimidius scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ) Sit autem cubus cujuslibet harum pyramidum sextuplus (Nam exempli causa, pyramis ABCG, basin habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 17. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. a *Cum igitur cubus duplus sit ejusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam ejusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.* a 32. *undec*

ALITER. *Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphærà comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15.* b *Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descripta, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.* b 32. *quartidecimi.*

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cum enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, ut propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium ejusdem pyramidis ABCD, ex constructione prop. 2. lib. 15.) *c* Habeant autē pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatā; Erit pyramis ABCD, octupla cujuslibet illarum quatuor pyramidū octaedro circumpositarum (cum octupla proportio sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum

dum pars erit octava pyramidis ABCD: Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octavas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars ejusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscriptio octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

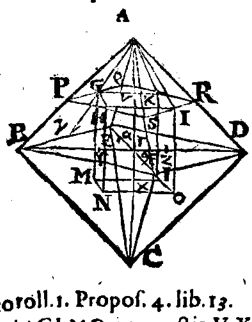
CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum: octaedrum in cubo quoque inscriptum est, ut constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. a 20. sextidec. a *Est autem cubus pyramidis in eo descripta triplus,* b 21. sextidec. b *& pyramis octaedri sibi inscripti dupla:* Fit, *ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN Octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyram de octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H. centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituentes PQRS, ut in propos. 4. lib. 15. est demonstratum: c 15. undec. c quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. Propos. 4. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS; d 17. und. d (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter: erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. e 47. pri. e Quoniam igitur æqualia quadrata recta-



tum

rum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP, AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo descripti, per schol ultimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, ut constat ex demonstratis in propos. 4. libr. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire Ducta jam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib 14. *a* Cum ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, conjungens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, $\alpha\beta$, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 1. propos. 15. lib. 1. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes sese bifariam secent in centro. Iam vero quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit & AV, ejusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. propos. 7. libr. 12. cum utriusque eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: *b* Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & basis PQRS, dupla sit basis GHIK: illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula hujus similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius) *c* proportionem habent laterum homologorum triplicatam: Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quod & recta Aγ, *d* proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG: Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, jam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur Octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem

a 17. undec.

b 6. undec.

c 8. duod.

d 2. sexti.

habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, utriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habet. a Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstravimus habere octaedrum ad sibi inscriptum.

a 11. sextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

b 23. sextidec.

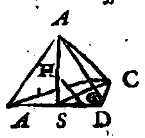
c 20. sextidec.

QVONIAM ut ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; b Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis c triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

PROBL. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, *cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim* G H, *centra duarum basium* A C D, ABD, *commune latus* A D, *habentium, per quæ ex angulis* C, B, *ad latus commune oppositum* A D, *recta ducantur* CGS, BHS; *dividentes latus* A D, *bifariam, & ad angulos rectos per scholium prop. 12. lib. 13. ac propterea convenientes in medio puncto* S.



Connexa vero recta G H, *cum* B H, C G, *dupla sint rectarum* H S, G S, *ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur* BS, C S, d *parallela erunt* BC, H G, *& per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum* H G S, *triangulo* B C S, *simile.* e *Erit ergo ut* B C, *ad* C S, *ita* H G, *ad* G S; *& permutando, ut* B C, *ad* H G, *ita* CS, *ad*

d 2. sex.

e 4. sex.

CS, ad GS: aEst autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descripta in cubo diameter est basis cubi, ut in propos. 1. lib. 15. demonstratum est: Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, ut perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, jungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis: GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Est enim ut diameter unius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio utraque sit potentia dupla; Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri unius quadrati ad ipsum quadratum est, ut quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum utrobique sit proportio dupla. bIgitur erit quoque diameter ad latus, ut diameter ad latus. Ergo permutando, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, ut ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, c proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hac enim proportio triplicata est tripla proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quamob rem, d cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis AB-DC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

a 18. quartidecimi.
b 22. sexti.
c 33. undec
d 20. sexti. dec.

COROLLARIUM.

IGITUR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione hujus propositionis.

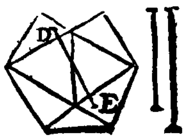
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRUM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN Octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico Octaedrum esse ad Icosaedrum, ut sunt duæ bases o-

ctaedri ad quinque bases Icosaedri. *Cum enim, ut ex demonstratis in propos.* 16. *libr.* 15. *liquet. octo bases* Icosaedri *in octo basibus octaedri reponantur: sint duæ bases* Icosaedri GHI, KLM, *in duabus basibus oppositis octaedri* ADE, BCF; *atque ex* N, *centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll.* 3. *propos.* 16. *libr.* 15.) *ad basin* ADE, *perpendicularis ducatur* NO, *cadens in centrum* O, *trianguli* ADE, *seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm.* 1. *propos.* 10. *lib.* 14. *quod quidem* O, *centrum quoque est trianguli* GHI, *per coroll,* 2. *propos.* 16. *lib.* 15. *Cum ergo plana opposita* ADE, BCF, *parallela sint, ex coroll.* 4. *propos.* 14. *lib.* 13. *Recta* ON, *producta perpendicularis quoque erit, per scholium propos.* 14. *lib.* 11. *ad planum* BCF, *in ejusque propterea centrum* P, *commune etiam triangulo* K L M, *cadet. Quare* O P, *recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti.*

Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, *ad omnes angulos octaedri, æquales dividitur, quarum altitudo est* N O *dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icosaedrũ in* 20. *pyramides æquales ejusdẽ altitudinis* NO: *Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basin, & altitudinem habentis, per coroll.* 1. *propos.* 7. *lib.* 12. *Erit prisma, cujus basis* ADE, *& altitudo* ON, *æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero prisma, cujus eadem basis* ADE, *altitudo autem* OP, *dupla altitudinis* ON, *duplum est prismatis, cujus basis eadem* ADE, *altitudo vero* ON, *per ea, quæ in scholio propos.* 14. *lib.* 12. *ostendimus. Prisma igitur, cujus basis* A D E, *& altitudo* OP, *æquale est sex pyramidibus octaedri. Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit & tertia pars prismatis super basin* ADE, *& sub altitudine* O P, *constituti: prisma videlicet cujus basis tertia pars est trianguli* ADE, *altitudo vero eadem* O P. *Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem* ADE, *& sub altitudine* O P, *cum per ea, quæ docuimus ad propos.* 7 *lib.* 12. *prismata ejusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quorum unius basis* ADE, *& altitudo* OP, *alterius autem basis tertia pars basis* ADE, *& altitudo eadem* O P, *æqualia sunt octaedro* A B C DEF. *Non secus demonstrabimus prisma cujus basis* GHI, *altitudo vero* OP, *æquales esse sex pyramidibus* Icosaedri: *proptereaque triplum hujus prismatis, nempe prisma, cujus basis tripla sit basis* GHI, *altitudo autem eadem* O P, *æquales esse* 18 *pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus* Icosaedri *pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum ejusdem* Icosaedri *constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem* GHI, *& sub altitudine* OP, *constituti; prisma scilicet,* *libet, cujus basis tertia pars est trianguli* GHI, *altitudo vero eadem* OP; *Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli* GHI, *altitudo autem* OP, *alterius vero basis tertia pars basis* GHI, *& altitudo eadem* OP, *æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto.* Iam *vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. libr. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli* ADE, *continentes (cum unius basis sit* ADE, *nempe tres tertiæ partes ipsius* ADE, *complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius* ADE) *ad bases prismatum* Icosaedro *æqualium decem tertias partes trianguli* GHI, *comprehendentes (cum unius basis tripla sit trianguli* GHI *nimirum novem tertias partes ipsius* GHI, *continens, alterius vero basis tertia pars ipsius* GHI.) *Sint autem ut quatuor tertiæ partes trianguli* ADE, *ad decem partes tertias trianguli* GHI, a*ita duæ tertiæ partes ipsius* ADE, *nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius* GHI, *hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipsius* ADE, *ad quinque tertias partes ipsius* GHI, *ita quoque sint, per ea, quæ demonstravimus in scholio propos. 22. libr. 5. sex tertiæ partes ipsius* ADE *(hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipsius* GHI *(id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum unius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.)* E*runt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata* Icosaedro *æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, ut duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.*



a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum in Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata ejus, quam

habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum conjungentem.

EXHIBEATVR *Icoſaedrum* ABC, *in quo recta* DE, *conjungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem ejus ſit* AC; & F, *ſit latus Icoſaedri*, & G, *latus cubi in eadem ſphara cum Icoſaedro deſcripti.* Dico *proportionem Icoſaedri* ABC, *ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione* F, *lateris Icoſaedri ad* G, *latus cubi*, & *ex proportione triplicata diametri* AC, *ad rectam* DE.

Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. *lib.* 15. *Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit* DE, *diameter Dodecaedri in Icoſaedro* ABC, *deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in* D, & E, *centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes.* Propoſitis *jam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet* ABC: *Dodecaedro diametri* AC, *hoc eſt, in eadem ſphara, in qua Icoſaedrum* ABC, *deſcripto, cum utriusque eadem ſit diameter;* & *Dodecaedro diametri* DE, *intra Icoſaedrum videlicet* ABC, *conſtructo: Proportio prima magnitudinis nempe Icoſaedri* ABC, *ad tertiam videlicet ad* Dodecaedrum *diametri* DE, *ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus prima ad ſecundam*, & *ſecunda ad tertiam, per ea, qua ad defin.* 5. *lib* 6. *à nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *in eadem ſphara cum ipſo deſcriptum*, & Dodecaedri *ejuſdem diametri* AC, *ad* Dodecaedrum *diametri* DE, *in* Icoſaedro ABC, *deſcriptum. Cum ergo* Icoſaedrum ABC, *ad* Dodecaedrum *diametri* AC, *eadem ſphara comprehenſum, ſit ut* F, *latus Icoſaedri ad* G, *latus cubi* (a *Nam* Dodecaedrum *diametri* AC, *ad* Icoſaedrum ABC, *ejuſdem diametri eſt, ut* G, *latus cubi ad* F, *latus Icoſaedri. Convertendo igitur erit* Icoſaedrum ABC, *ad* Dodecaedrum *diametri* AC, *ut* F, *latus* Icoſaedri *ad* G, *latus cubi*,) *At vero* Dodecaedrum *ejuſdem diametri* AC, *ad* Dodecaedrum *diametri* DE, *in Icoſaedro videlicet* ABC, *deſcriptum, proportionem habeat triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DE, *id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum conjungentem, ex coroll. Propoſ.* 7. *lib.* 12. *Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri* ABC, *ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri* DE, *componi quoque ex proportione* F, *lateris Icoſaedri, ad* G, *latus cubi*, & *ex proportione triplicata proportionis diametri* AC, *ad rectam* DE. *Quare* Icoſaedrum *ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam*, &c. *Quod erat demonſtrandum.*

a 11. *quartidecimi.*

THE-

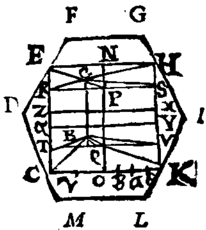
THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, sive latere cubi, minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

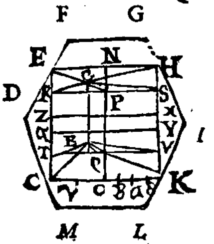
QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus convenientium; sint hujusmodi pentagona ABCDE, BFGHA, AHIKB, BKLMC, convenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK: His vero pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet CBKHAE, constans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, *a* triangula sunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABK, LI, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata CDE, HIK, *b* æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique est basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia, & æqualia, per 10. defin. libr. 11. super reliquas quinque cubi bases; ita ut Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex hujusmodi solidis. *Dico* igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cujus quidem basis deficit à CEHK, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N O, junctaque recta N O, quæ parallela est lateri pentagoni AB, &

a 4. pri.

b 4. primi.



in quam cadunt perpendiculares AP,BQ, demissæ in planum EK, ut constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO,AB, AP, BQ, hujus figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit utraque recta AB, PQ, majus segmentum lateris cubi NO, vel HK, & utraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu majoris segmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propos. 17. libr. 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque RT, SV, majora segmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta.



Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela, cum conjungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, b parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. libr. 1. cum latera unius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus adversis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

a 33. pri.

b 15. undecimi.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS, KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum utriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars sit XY, ducanturque XZY a, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; c utriusque vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, d quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH: Æqualis erit pyramis TVXZB, utrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cujus basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, ut demonstravimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item ejusdem prismatis, cujus basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cujus basis TY; & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB. æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. a quod & basis TY, duas partes tertias complectatur basis

c 6 duod.

d 1 sexti.

sis TX. Igitur & prisma, cujus basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma oppositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, majore segmento, ideoque à base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione investigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur hujusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum ejusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu majoris segmenti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi: Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurgens parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cujus basis à base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio majoris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Dividatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, majus segmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abscindatur $\beta\varepsilon$, æqualis ipsi $\beta\gamma$, seu Cγ, ita ut Cγ, vel $\gamma\beta$, vel $\beta\varepsilon$, dimidia pars minoris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB; & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio majoris segmenti; quia βK, major est, quam dimidium majoris segmenti Cβ. Cum enim sit, ut CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius majus segmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, major, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, ut tota CK, ad majus segmentum Cβ, ita majus segmentum Cβ, ad minus βK; *b* erit quoque ut CO, dimidia ipsius CE, ad Cγ, vel $\beta\varepsilon$, dimidiam ipsius Cβ, ita Cγ, vel $\beta\varepsilon$, ad $\beta\delta$, dimidiam ipsius βK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media b 15. quinti media ratione, erit majus illius segmentum C γ, vel $\beta \epsilon$, & minus $\beta \delta$. Quare & $\beta \delta$, minus segmentum secabit $\beta \epsilon$, majus segmentum extrema ac media ratione, ut demonstravimus ad propos. 5. lib. 13. eritque majus segmentum $\beta \delta$, minus autem $\delta \epsilon$; Ac propterea rursus $\delta \epsilon$, minus segmentum secabit rectam δK, majori segmento $\beta \delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ϵK. Deficit igitur C ϵ, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento ϵK, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ $\beta \delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti ejusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sive lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cujus & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens quam cubus. altitudo vero à latere cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto jam parallelepipedo adjungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, imo vero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam cen-

centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta conjungens centra basium oppositarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphara cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cujus diameter DE, in eadem sphara cũ Icosaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis jam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE: & Icosaedro ejusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, prima magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, qua ad defin. 5. libr. 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, prima magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secunda magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icosaedrum ejusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cujus scilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F. lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphara cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. quartidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris ejusdem cubi, altitudo denique à latere ejusdem cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quę dimidiati lateris cubi ejusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejusdem segmentũ minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sive lateri ejusdem cubi sint æquales.

QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, *a* cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. hujus lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis hujus; non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

a 25. sextidec.

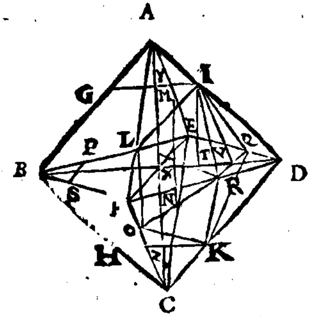
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosadri, altitudo vero majus segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, *repetita figura propos. 16. libr. 15. ubi demonstratum est, viginti triangula* Icosaedrum *inscriptum componentia esse* IQR, KQR, *GIL,*

GIL, GIM, GPS, HPS, OHK, NHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, *quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia ejus latera extrema ac media ratione; Item rectam* IT, *perpendicularem ad* BD, *aequalem esse majori segmento* XY, *semidiametri* AX. *Dico octaedrum* ABC, DEF, *superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosaedri* QR, *altitudo vero* IT, *majus segmentum semidiametri* AX. *Cum enim in quatuor basibus Octaedri* DEA, DFA, DEC, DFC, *angulum solidum Octaedri* D, *constituentibus posita sint quatuor bases Icosaedri* IMQ, ILR, KNQ, KOR; *remanebunt juxta angulum solidum* D, *in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula* IQD, IRD, KQD, KRD, *quibus si accedant duo triangula Icosaedri* QIR, KQR, *& commune triangulum* DQR, *constituentur duae pyramides super communem basem* DQR, *nempe* IDQR, KDQR, *inter se aequales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem* IT, *majus videlicet segmentum semidiametri Octaedri.* (*Nam quemadmodum* AX, *secta est à recta* GI, *in* Y, *extrema ac media ratione, ita quoque secta est* CX, *à recta* HK, *in* Z. *Quare si ex* K, *ad* BD, *perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis* KDQR, a *erit ea aequalis recta* ZX, *majori segmento semidiametri* CX, *hoc est, ipsi* IT) *Quae quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binae pyramides & inter se, & dictis duabus aequales extra Icosaedrum praedictum: ita ut Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus aequalibus. Quia vero triangulum* DQR, *dimidium est quadrati lateris* DQ (*Cum* DQ, DR, *rectae aequales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumque contineant rectum*) *erit recta* QR, *diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius* QR, *duplum erit quadrati lateris* DQ: *ideoque quadruplum trianguli* DQR. *Prisma igitur, sive parallelepipedum, cujus basis quadratum rectae* QR, *& altitudo* IT, *quadruplum quoque erit prismatis, cujus basis triangulum* DQR, *& altitudo eadem* IT. *per ea, quae demonstravimus ad propos. 7. libr. 12. Prisma autem, cujus basis* DQR, *& altitudo* IT, *triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 1. pyramidis* IDQR,

a 34. pri.



IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cujus basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadrupla sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cujus basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, majus segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri conjungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. libr. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: *a* Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero majus segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet IT, seu YX: Fit, ut Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis; cui inscribitur (*b* quod Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet duplum Icosaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cujus basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta YZ, conjungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramidis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. *sexti.*

b 21. *sexti-dec.*

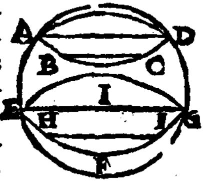
DE QVINQVE CORPORVM REGVlarium descriptione in data sphæra ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, nova demonstratione confirmavit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cum ejus ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lĕmata nonnulla præmittenda sunt, quorū aliqua etsi per elementa sphærica Theodosis demonstrantur, nō tamen mẽ propterea ordinem Euclidis pervertere censeri possumus: quippe cũ propositiones sphæricorũ elementorum, q̃b. hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant: ut commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. Incitandis autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in uno eorum linea recta; ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG: sitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur ut in scholio propos. 18. libr. 11. docuimus per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, *a* faciens in sphæræ superficie circulum AEGD. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, transibitque per polos circuli ABCD, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG. *b* cum paralleli eosdem polos habeant: *c* ideoque cum bifariam secabit. Communis ergo sectio EG, eius diameter erit: *d* quæ cum sit ipsi AD, parallela, patet propositum.



a 1.1.Theo.
b 1.2.Theo.
c 15.1.The.
d 16.unde.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo EFG. *e* Ducatur ipsi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD: cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, ut proxime ostendimus. Quoniam igitur utraque BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, *f* ipsæ quoque BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

e 31.pri.
f 9.undec.

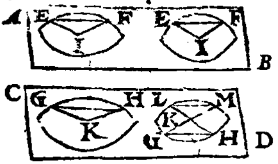
EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallelæ HI, à diametro EG, diversa quæ ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, major non sit diametro EG. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BG, parallela HI, & æqualis, ut propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod jubetur.

LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes: erunt

erunt duæ rectæ conjungentes extrema unius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro conjungunt.

IN planis parallelis AB, CD, *descripti sint duo circuli, in quibus* rectæ EF, GH, primum parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I,K, auferanturque arcus similes *EF,GH*, ac tandem jungantur ad



centra rectæ EI, FI, G*K*, *H*K. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas esse. Quoniam enim arcus EF, GH, similes sunt, erunt anguli IK, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3. *a* Igitur reliqui
a 32. *primi* anguli *E*,F, reliquis angulis G, H,
b 5. *primi.* æquales erunt. *b* Cum ergo tam illi, quam hi, sint inter se æquales: erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ *E*F, GH, parallelæ sunt, & rectæ EI, GK, ad easdem partes plani per EF, *GH*, ducti efficiunt cum ipsis æquales angulos *E*,G; erunt ex iis, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstravimus, *E*I, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.

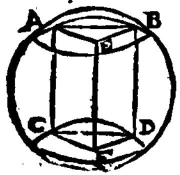
DEINDE sint E *F*, GH, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K: *Dico* tam EI, H*K*, quam FI, *C*K, esse parallelas. Productis enim GK, HK, jungatur recta *LM*. *E*t quia latera GK, HK, lateribus
e 14. *pri.* LK, MK, sunt æqualia *c* angulosque ad verticem K, æquales con-
d 4. *primi.* tinent: *d* erunt & bases GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli
e 28. *tertii* G, *M*. *e* Igitur arcus GH, LM, æquales sunt, *f* & rectæ GH, LM, inter
f 27. *pri.* se parallelæ: Ac proinde cum utraque EF, LM, ipsi GH, sit paralle-
g 9. *unde-* la, *g* erunt & EF, LM, parallelæ inter se. Quia igitur EF, LM, paral-
cimi. lelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes *E*F, *LM*. (Nam cum arcus GH, sit arcui *EF*, similis, erit quoque arcus LM. (Nam cum arcus GH, sit arcui *EF*, similis, erit quoque arcus L*M*, qui arcui G*H*, æqualis est, eidem arcui EF, similis) erunt tam EI, LK, hoc est, EI, HK, quam FI, MK, hoc est, FI, GK, parallelæ. Quod est propositum.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes conjungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, in quibus



sint duæ rectæ æquales & parallelæ AB,CD, ad easdem partes centrorum, quarum extrema jungantur ad easdem partes rectis AC,BD. Dico rectas AC,BD, æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB,CD, parallelæ sunt: *a* erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Quare cum AB,CD, sint etiam æquales: *b* æquales quoque erunt ac parallelæ AC,BD, quod est primum. a 7. *undec* b 33. *pri.*

EX centris deinde E,F, ductis rectis EA,EB,FC,FD, junctaque recta EF: erunt tam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. *c* Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. *d* Quoniam vero circuli AB,CD, paralleli circa eosdem polos sunt, *e* recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra conjungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune EF. *f* Igitur EF, ad plana circulorum AB,CD, recta est: *g* Ac propterea & utraque AC,BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum. c 33. *primi.* d 1. 2. *Theo* e 10. 1. *The* f 10. 1. *The.* g 8. *undec.*

HÆC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA,EB,FC,FD, erunt partes diametrorum, ut patet.

LEMMA IV.

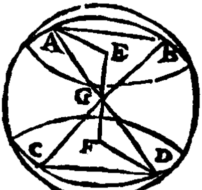
SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes conjungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, & in iis ductæ rectæ parallelæ & æquales AB,CD, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad easdem partes jungantur rectis AD,BC. Dico rectas AD,BC, in centro sphæræ se intersecare, ideoque diametros esse sphæræ inter se æquales.

Quo-

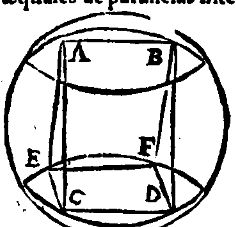
a 7. undec. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt: a erunt AD, BC, in eodem cum ipsis plano: ac proinde se mutuo intersecabunt, ut in puncto H: quod dico esse centrum sphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG: FD, FG. b Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem æquales sunt: c Item tam alterni anguli BAD, CDA: quam alterni ABC, DCB: æquiangula erunt triangula ABG, CDG. d Igitur erit ut AB, ad BG, ita DC, ad CG. Item ut AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æquales, e erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter se æquales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum æqualium æquales: sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, f ideoque anguli alterni EAD, FDA, æquales: erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia angulosque comprehendent æquales. g Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales sunt. h Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF: i & EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF: erunt EF, FE, in rectum & continuum constitutæ propter æquales angulos AGE, DGF, ut ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta conjungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, ut in præcedenti lemmate demonstravimus. k perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit F, centrum sphæræ, l propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro sphæræ absunt: inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sũt, & inter se propterea æquales. quod est primũ.

b 15. primi
c 29. pri.
d 4. primi.
e 14. quinti.
f 29. pri.
g 4. primi.
h 7. undecimi.
i 2. undecimi.
k 10. 1. Theod.
l 16. 1. Theo.



SED jam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes jungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BCD, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, m manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium conjungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur in circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, junganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus, EFD, CEF, semicirculi erunt, n & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, æqua-

m 33. pri.
n 31. tertii.



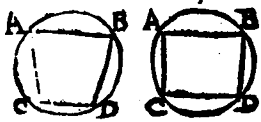
quales sunt, a ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad utramque EG, EA, & ad utramque FD, FB; ut ostendimus, b perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: c ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt: ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

a 9. undec.
b 4. undec.
c 8. undec.

LEMMA. V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes conjungentes, æquales inter se erunt: Et si parallelæ fuerint æquales, conjungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, *quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis* AC, BD, *Dico* AC, BD, *æquales esse. Quia enim parallelæ sunt* AB, CD, d *erunt* AC, BD, *in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, e fiat in sphæra circulus* ABDC *in quo cum parallelæ sint* AB, CD: *erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus* AC, BD, *æquales:* f *ideoque & rectæ* AC, BD, *æquales erunt. Quod si parallelæ* AB, CD, *fuerint æquales, ita ut quadrilaterum* ABDC, *in circulo habeat duo opposita latera* AB, CD, *parallela, & æqualia: erit ex scholio propos. 31. lib 3.* ABDC: *parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli* A, B, D, C, *recti erunt. Quod est propositum.*



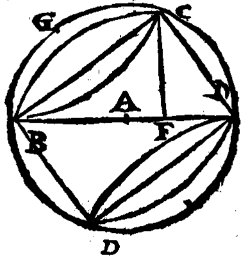
d 7. undec.
e 1.1. Theo.
f 29. tertii.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita ut diameter sphæræ sit utriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæræ centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cujus diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. libr. 1. Theod. Secta autem BD, in F, ut BF, ipsius FD, dupla sit: erit BD, talium partium 3. qualium 2. est BF: ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, jungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipsi BC, parallela, connectatur

recta E B. *a* Et quoniam tam duo anguli B C D, E D C, quam duo
a 29. pri. B E D, C B E, duobus rectis æquales sunt: *b* estque tam B C D, quam
b 31. tertii. B E D, rectus: erit quoque & E D G, & C B E, rectus. Igitur ex scho-
lio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum B C D E, parallelo-
c 34. primi grammum est: *c* ideoque rectæ B C, D E, æquales sunt. Diviso jam

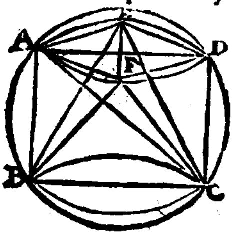


arcu B C, bifariam in G, erit quoq; arcus E G D, divisus bifariam in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque B E, C D, æquales sint. Polo igitur G, & intervallis G B, G E, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam ar-
d 2. 2 Theo. cuum G B. G C, quam G E, G D: *d* qui
e 15. 1. Theo paralleli erunt, cum eosdem habeant polos. *e* Et quia circulus maximus B C D E, per polos secat circulos B C, E D, bifariam: erunt B C, E D, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensæ , erunt & circuli B C, E D, æquales. Dico diametrum sphæræ B D, ad utramque diametrum B E, E D, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ D B, B C, B F, continue proportionales sunt: erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut B D, ad B F, ita quadratum ex B D, ad quadratum ex B C: Est autē B D, ipsius B F, sesquialtera, ut ostensum est. Igitur & quadratum ex B D, quadrati ex B C; atque adeo & quadrati ex D E, sesquialterum est; atque idcirco diameter sphæræ B D, utriusque diametri B C, D E, potentia sesquialtera est, quod est propositum.

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. I. PROPOS. I.

IN data sphæra Pyramidem describere.



DESCRIBANTVR *in data sphæra, ex lemmate 6 duo circuli* AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ; & per eorum polos ma-*
f 15. 1. The. *ximus circulus ducatur* ABCD, *f qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *secans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula*

gula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA, erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, ut constat ex propos. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli: si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, a æquale sit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF: b quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea que quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis. ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum.

a 47. pri.

b 47. primi

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum: est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit: duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, proptereaq; recta CE, rectæ AD, hoc est, rectæ BC, EF, æqualis est, atque adeo & rectæ CF, quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 20. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant quod est propositum.

c 44. pri.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, ut ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

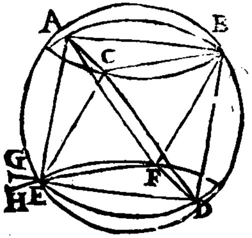
PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra octaedrum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita ut sphæræ diameter diametri cujuslibet eorum potentia sit sesquialtera. a Descripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diversas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula ejus latera singulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Cum enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdem partes plani per AB, GE, ducti: erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, ut in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diversas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ junctæ AD, BE (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3. (Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, est 3. quod ex corollar. 1. propos. 12. libr. 13 diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsæ DE, BD, æquales. Est autē DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentque quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

a 2. quarti

b 47. pri.



RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diversas partes centrorum: erunt quoque junctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BE, CE, æqua-

les

les inter se, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rursus, ut prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus ACDF, quadratum esse: cum junctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphęrę diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cum AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, BCD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. libr. 11. & in data sphæra descriptum, cum ejus anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphęrę superficiem attingant. quod est propositum.

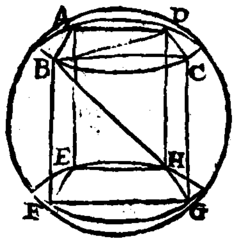
COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplum esse lateris Octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere Octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

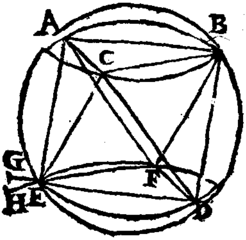
IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæra.* a *Descripto autem quadrato* ABCD, *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt singula ejus latera singulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum* AD. EH, *æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ sunt* AD. EH, *suntq; anguli* a 6. quarti



æquales ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & sic de cæteris. Iungantur deniq; ad easdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico* AG, *esse cubum, hoc est, sex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE. CDHG, *esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate 4.* BH, *diameter sphæra; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex* BH, *sesquialterum est quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC. *duplum, ex scholio propos. 47. libr. 1. si statuatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& quadratum*

dratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC,
a 47. pri. *triplum erit. Rursus quia quadratum ex BH, est 3. & quadratum ex BD, 2. a estque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3 lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplum est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EC, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus cum ejus anguli solidi, A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.*



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, hujus figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 21.

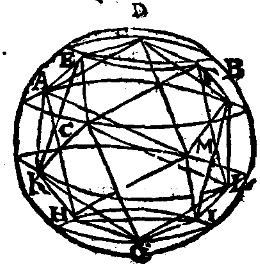
PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

b 12. sex. REPERIATVR b *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ data, ut pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiatq; ex coroll. propos. 6. lib. 10. ut numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius cujusdam lineæ, ad cujus intervallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet.*
c 1. quinti *Descripto maximo circulo in sphæra data, c accommodetur in eo recta, quæ inventæ semidiametri sit dupla, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ sive illius circuli maximi, ut infra probabitur. Nam si per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,*
d 1.1. Theo. *d faciet id circulum ABC, in sphæra, cujus semidiameter, ex*

con-

constructione, potentia subtripla est recta initio inventa. Deinde inveniatur a rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, ut pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatque ut 3. ad 1. ita per coroll. propos. 6. lib. 10. quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius lineæ, ad cujus intervallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, parallelus: quo fiet si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ semidiametri inventæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propos. 1. lib. 4. demonstravimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectum, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium planum hoc erit circulo ABC, parallelum, b facietque in sphæra circulum DEF, cujus semidiameter semidiametro inventæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alii duo æquales ac paralleli describantur GHI, KLM, quod facile fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. c Descripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit uni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DE; at BC, MK, GI, ipsi DE, quod probabitur ex scholio propos. 16. libr. 11. ut in problemate secundo ostendimus parallelas esse BC, EF, ad diversas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notavimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF; ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod ut demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16.



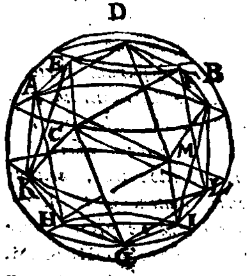
a 12. sexti.

b 1. 1. Theo.

c 2. quart.

lib.13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulis in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notavimus.

SIT *igitur in sphæra descriptum Icosaedrum* DG, 12. *angulos statuens in punctis* D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. *Et quia* 5 *recta* DE, DA, DM, DB, DF, *æquales sunt, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo* D, *per* E, *in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta* A, M, B, F : *ac propterea pentagonum* EAMBF, *in uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo ejus latera sint æqualia, utpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis.*



Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AK, CFD, *ob quinque rectas æquales* EA, EK, EC, EF, ED : *Et* KHMDE, *ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia* AK, AH, AM, AD, AE : *Et* HGCEA, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* KH, KG, KC, KE, KA : *Et* GIMAK, *ob latera quinque Icosaedri æqualia* HG, HI, HM, HA, HK : *Et* ILCKH, *ob quinque rectas æquales* GI, GL, GC, GK, GH : *Et* LBMHG, *ob rectas quinque æquales* IL, IB, IM, IH, IG : *Et* BFCGI, *ob quinque rectas æquales* LB, LF, LC, LG, LI ; *Et* FDMIL, *ob quinque rectas æquales* BF, BD, BM, BI, BL : *Et* DECLB, *ob rectas quinque æquales* FD, FE, FC, FL, FB; *Et* DAHIB, *ob quinque latera Icosaedri æqualia* MD, MA, MH, MI, MB, *Ac tandem* GLFEK, *ob quinque Icosaedri latera æqualia* CG, CL, CF, CE, CK, *ita ut* 12. *pentagona æquilatera, æquiangulaque, inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli opposito lateri æquidistat, ut in scholio propos.* 8. *libr.* 13. *demonstravimus; erit juncta recta* AB, *ipsi* EF, *parallela in pentagono* EAMBF: & AC, *juncta ipsi* DF, *parallela in pentagono* AKCFD: *Et* BC, *juncta parallela ipsi* DE, *in pentagono* DECLB. a *Plana ergo per rectas* DE, EF, & CB, BA, *ducta parallela sunt,* b *faciuntque circulos parallelos in sphæra* DEF, ABC. *Eodem modo erit juncta* KE, *ipsi* HI, *parallela in pentagono* ILCKH ; *Et juncta* KM, *ipsi* GI, *in pentagono* GIMAK : *Et* LM, *juncta ipsi* GH, *in pentagono* LBMGH : *Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt* GHI, KLM. *Non aliter erit* AB *juncta ipsi* HI, *parallela in pentagono* DAHIB: *Et juncta* KL, *ipsi* EF, *in pentagono* GLFEK. c *Igitur* EF, HI, *cum sint eidem junctæ* AB, *vel* KL, *parallelæ, inter se parallelæ sunt, Eademque ratione* DE, GI, *cum sint eidem junctæ* ABC, *vel* KM, *parallelæ, inter se parallelæ erunt; proptereaque plana cir-*

a 15. undec.
b 1. 1. Theo.
c 9. und.

cu-

culorum DEF, GHI, *per rectas* DE, EF, *&* HI, GI, *ducta parallela e-runt. Omnes ergo quatuor circuli in sphara* DEF, ABC, KLM, GHI, *paralleli inter se sunt: & tam circuli* DEF, GHI, *inter se aquales, ob triangula aquilatera in illis descripta aqualia, quam circuli* ABC, KLM, *inter se etiam aquales, ob triangula aquilatera aqualia in ipsis, qua ex junctis* AB, BC, CA; *&* KL, LM, MK, *constituuntur: quippe cum latera hac sint recta subtendentes angulos pentagonorum aqualium.*

QVIA *vero juncta recta* KB, *qua connectit non ad easdem partes extrema* K, B, *parallelarum* KL, AB, *in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphara diameter est, & angulus* BAK *rectus ex 4. lemmate, quod* KA, *connectat ad easdem partes extrema* K, A, *earundem parallelarum;* a *erit quadratum diametri* KB, *aquale duobus quadratis ex* AB, AK. *Rursus quia in pentagono* EAMBF, *recta juncta* AB, *angulum* AMB, *subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit* AB, *juncta ad* EF, *vel* AK, *ipsi* EE, *aqualem, ut hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco* b *cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphara* KB (*qua ambas* AB, AK, *potest, ut ostendimus*) *latus pentagoni in eo circulo, in quo* AB, *latus est hexagoni, &* AK, *vel* EF, *latus decagoni. Quare sphara diameter* KB, *ad junctam* AB, *proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad* EF, *eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni.* c *Ac proinde cum tam* AB, *latus trianguli aquilateri in circulo* DEF, *potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli* DEF, ABC, *ac proinde &* GHI, KLM, *qui illis aquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, qua dupla est semidiametri initio inventa, minorem esse diametro sphara, ut supra diximus.*

a 47. pri.

b 10. tertii dec.

c 12. tertii dec.

HIS *demonstratis facili negotio includemus, solidam figuram à nobis descriptam* DG, *esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphara descripto, cujus basis triangulum* DEF, *omnes ejus anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.*

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo ut si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, ut latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri majus esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni majus est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum uno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant:
a 22. primi *a* ac propterea duo latera decagoni majora sint latere pentagoni, ideoque unum latus decagoni majus dimidio lateris pentagoni.

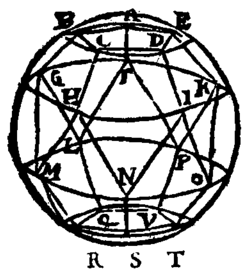
COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, ut latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad junctam AB, ex constructione: erit permutando, ut
b. 12. tertii dec. latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad junctum AB. *b* Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ junctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, ut in antecedenti propositione ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita ut semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, ut pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorũ FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, ut pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur ejus lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni ejusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem HI, ad diversas partes centrorum agatur eodẽ modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorũ partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autẽ pentagonis in hisce tribus circulis (quorum tamen latera, ut confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notavimus) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni



ABC·

ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallelæ ductæ sunt; quod demonstrabitur, ut in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera juncta, parallela erunt ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod ut ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propositione 17. lib. 13.) suos viginti angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, quinos videlicet in singulis circulis, atq; in eo situ, quo eadem viginti puncta notavimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, ut in scholio propos. 8. libr. 13. demonstravimus, erit juncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & juncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF: & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propositionis 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conveniant in recta FG, unum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, FI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto unum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF: LM, MN, NO, OP, PL. c quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

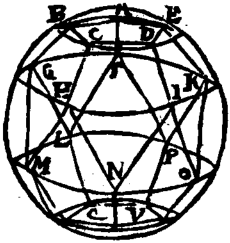
a 15. undec

b 1. 1. Theo.

c 4. primi.

DE-

DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ junctæ N D, M B,
a 9. undec. lateri C H, parallelæ sunt in pentagonis, C H N I D, B G M H C; a erunt quoque ipsæ junctæ N D, M B, parallelæ: Sunt autem & æquales,



b 33. primi. quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. b Igitur & junctæ N M, B D, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, junctæ N O, C E, cum cõnectant duas N O, E O, æquales ac parallelas, quod utraq; lateri D I, sit parallela. c Circulus igitur L M N O P, circulo A B C D E, parallelus est, cum ille
c 15. undec. ducatur per rectas N M, N O, hic vero per rectas B D, C E, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ Non secus ostendentur paralleli circuli Q R S T V, F G H I K. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sint.

RVRSVS quoniam junctæ rectæ B F, O V, cum ex scholio propos. 8. libr. 13. lateri P K, in pentagonis A E K P F, T V K P O, æquidi-
d 9. undec. stent, d parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quod angulos
e 33. primi. æquales in pentagonis æqualibus subtendant, e erunt & rectæ jun-
f 7. undec ctę E O, F V, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo E F V O, in u-
g 1. 1. Theo. no plano est, f cum E F, O V, in eodem sint plano cum parallelis E O, F V. Est autem & in circulo, g propterea quod planum in quo existit, in sphęra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstravimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est E F V O; ac proinde cum omnia latera ęqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo ejus diameter F O, duplum potest lateris F E, ex scholio propos. 47. libr. 1 hoc est, rectæ junctæ F G, quod æquales sint F G, F E, subtendentes angulos pentagonorum ęqualium: ideoque qualium partium 1 statuetur quadratum rectæ F G, talium 2. erit quadratum rectæ F O, & ambo qua-
h 47. prim drata simul earundem partium 3. Quibus h cum ęquale sit quadratum junctę rectæ O G, quę diameter sphærę est. (Nam cum æquales sint junctæ F G, O N, subtendentes ęquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis A B, S T, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. juncta recta O F, ad F G,
i 12. tertii perpendicularis, & O G, diameter sphęrę) erit quoque quadratum
dec. diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectę F G, hoc est, quadratum diametri sphęrę quadrati rectę F G, triplum erit. i Est autem & quadratum lateris trianguli ęquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, ut quadratum
k 22 sex. diametri sphęrę ad quadratum rectæ F G, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; k atque adeo ut diameter sphę-

ſphęrę ad rectam B G, ita latus trianguli ęquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta F G, ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita eſt latus pentagoni ejuſdem circuli ad latus trianguli, quod F G, ſit latus pentagoni. Igitur ex ęqualitate perturbata erit, ut diameter ſphęrę ad latus trianguli æquilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, ut in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque ut diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad junctam rectam A B in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit uterque circulus A B C, K L M, illius figuræ utrique circulo F G H I K, L M N O P, hujus figurę æqualis.

Diam. ſphara	*Latus pentag.*
Recta FG.	*Lat. triang.*
Lat. triang.	*Lat. hexag.*

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, ut juncta recta F G, ſubtendens angulum pentagoni A B G L F, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et ut FG, latus pentagoni in circulo F G H I K, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E: erit quoque ut latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphęræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut proxime demonſtratum eſt. Igitur ex ęquo erit, ut diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, ut diameter ſphęrę ad EF, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit uterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propoſ. utrique circulo A B C D E, Q R S T V, hujus figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

Diam. ſphara.	*Lat. pentagoni.*
Lat. triang. in circulo FGHIK.	*Lat. hexagoni.*
Lat. triang. in circulo *AB*CDE.	*Lat. decagoni.*

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, à nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphęra deſcripto, cujus baſis pentagonum A B C D E, omnes ejus anguli ſolidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere

&tri-

& triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra de-scriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ hujus propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

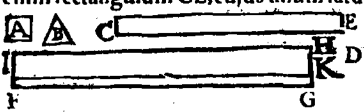
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonstravimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in una eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum majus reliquis tribus? Tertio cubum majorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse majus. Ex quo constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper à minoribus ad majora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul majora, quam octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum *B*, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse majora. Sit enim rectangulum CE, cujus unum latus CD, octuplum sit lateris



quadrati A, & latus DE, lateri ejusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum C*E*, octuplum quadrati A, *a* cum sit, ut CD, ad latus quadrati *A*, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cujus unum latus FG, decuplum sit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex uno angulo trianguli ad ejus basem demissæ, hoc est, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cujus unum latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli, B, *b* vigecuplum est trianguli B: Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41 libr. 1. rectangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum F*H*, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est rectangulum FH, majus esse rectangulo CE. *c* Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertium est ejus perpendicula-

a 1. sexti.

b 1. sext.

c 12. quartidecimi.

cula-

cularis, hoc est lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8. hoc est FG, 5. & CD, 4. Erit major proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim major proportio 25. ad 16. super noncupartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quod major sit fractio $\frac{9}{16}$ quam $\frac{1}{3}$. a Fiat ut FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque major quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH: b ac proinde major erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit ut IK, ipsi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. c Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque EH, majus, quam CE. Quod est propositum.

a 22. sexti.
b 10. quin.
c 14. vel 16 sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

d QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descripta superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt : Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæræ descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos 4 libr. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæræ æqualia quoque esse superficiei cubi ejusdem sphæræ. Quod est propositum.

d 10. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis è centro sphæræ ad unam basin Icosaedri ducta, major perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad unam basin octaedri, & cubi ducta.

NAM e quia latus octaedri majus est latere Icosaedri in eadem sphæra: erit unum triangulum octaedri majus quoque uno triangulo Icosaedri. Quare si utrumque solidum ita intra sphæram constituatur, ut triangulum unius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum utrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat : Ac proinde perpendicularis è centro sphæræ ad basin Icosaedri deducta major erit perpendiculari ex eodem centro ad basin Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi: f quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, idcoque æqualiter à centro distent: erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi major. Quod est propositum.

e 18. tertiidec.
f 21. quartidecimi.

SI

IV.

SI cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi major est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ majora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, ut theoremate 1. demonstravimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri majora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ majus sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo majora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies major superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATUM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus jam, Dodecaedrum majus esse Icosaedro: Icosaedrum majus cubo: Cubum majorem Octaedro: Octaedrum deniq; majus Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro majus est.

a 11. *quartidecimi.* QVONIAM est, *a* ut cubi latus ad latus Dodecaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: *b* est autem latus cubi latere Icosaedri majus: majus quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

b 18. *tertiidec.*

II.

ICOSAEDRVM cubo majus est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in unam basin Icosaedri cadens, major est perpendiculari ex eodem centro in unam basin cubi demissa, ut in 3. theoremate præmisso ostensum est: Itē ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi major quoq; est: Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in unā basin Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentū, majus solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in unā basin cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, ut in scholio prop. 20. lib. 14, demonstravimus, illud solidum

dum Icosaedro sit aequale, & hoc cubo; majus quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

III.

Cubus Octaedro maior est.

Quoniam est, a ut latus cubi ad semidiametrum sphaerae, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphaerae majus (Nam b cum latus cubi majus sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, majus semidiametro sphaerae; erit latus cubi multo majus semidiametro sphaerae) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum. a 27. quartidecimi. b 18. tertiidec.

IV.

Octaedrum Tetraedro maius est.

Quoniam basis octaedri minor est base Tetraedri, c quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphaerae ad unam basin Octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphaerae centro ad unam basin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendemus, perpendicularem in Icosaedro majorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri major, d cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphaerae in unam basin Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphaerae in unam basin Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum ex scholio propos. 20. libr. 14. illud solidum octaedro sit aequale, hoc vero Tetraedro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. c 14. quartidecimi. d 14. quartidecimi.

Aliter. Quoniam est, e ut latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Ut autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aequalitate erit quoque, ut latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri. (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum. e 22. quartidecimi. f 18. tertiidecimi. g 10. quinti.

Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet ut rectangulum sub linea potente ℨ. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente ℨ. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autē rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod ejus latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

a 32. quartidecim. b 27. quartidecimi. Aliter. a Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum est, ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

Eodem prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

c 27. quartidecimi. d 18. tertiidecimi. Quoniam enim c est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, d ut supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

Superficiem vero Icosaedri minorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate 4. ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

e 27 quartidecimi. Deinde e quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, ut in theoremate tertio, quo ostendimus cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri major.

f 14. quartidecimi. Deniq; f quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem majorem esse Tetraedri superficie.

g 18. tertiidecimi. Vides igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita ut quo majus fuerit corpus, eo majorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam g ut supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, ut hic demonstravimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, ejus vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra descripta

cripta sint latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, a ut supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies connexa, atq; soliditates se mutuo superant, ut hoc loco demonstravimus. a 18. tertii decimi.

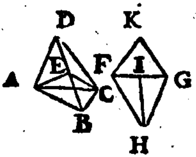
Caterum pratereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum: soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphara constructa, longe aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita ut Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGULI INCLINATIONIS duarum basium cujuscunque solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis praceptore.

I.

Angulum inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, invenire.

Sit pyramis A B C D, cujus latere B D, bifariam secto in E, ex augulis A, & C, lateri B D, oppositis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares sint ad B D, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt (*b* Sunt enim in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium A B D, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur F G H: triangulum æquilaterum super rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propositæ, ipsi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super F G, triangulum F G K, habens utrumque latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc est, utrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, A E, CE, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis AEC, basium A B D, C B D. Cum enim latera K F, K G, æqualia sint laterlbus E A, E C: & basis F G, basi AC; c Aequales erunt anguli FKG, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A C E, acutum esse. *d* Cum enim latus A D, vel illi æquale b 8. primi. c 8. primi. d r 2. quarti.



æquale A C, sesquitertium sit potentia utriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum utriusque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, ut in scholio propos. 13. lib. 2. demonstravimus.

COROLLARIVM.

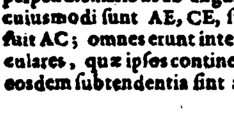
Facile hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & latera pyramidis eosdem subtendentia sint æqualia.

II.

Angulum inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cujus diameter BD. Ex angulis, B, & D, ad latus AE. triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; sectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares sint ad AE, communem sectionem planorum ABE, ADE, in quibus existunt *a* (quod in triangulis BGA, BGE. anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum *BGD*, inclinationis basium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI.

a 6. primi.



lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE, æquale in quo ducta KL, perpendiculari ad HI. constituatur super recta MN, quæ æqualis sit diametro octaedri BD, hoc est, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri descripti, triangulum OMN. habens utrumque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc est, utriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON. æqualia sint lateribus GB, GD, & basis *M*N. basi BD: *b* Æquales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum

b 8. primi.

Cum

Cum enim diameter octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B: latus vero AB, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ BG; ideoq; ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris B D, in triangulo G B D, majus est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus G B D, obtusus erit, ut in scholio propos. 12. lib. 2 ostendimus. a 14. tertii. dec. b 12. quarti decimi.

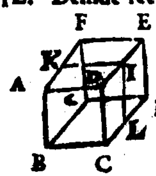
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium Octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineãtur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cujusmodi est B D; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales. c 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, invenire.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus DE, bifariam in I, nec non & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; d quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H, (quod & K F, IE, inter se, necnon & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt K I L, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, f angulum KIL, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstravimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi. d 3. primi. e 29. primi. f 10. undecimi.



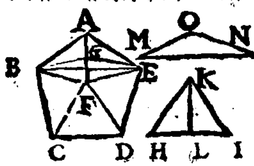
COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IV.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis A B CD EF, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cujus basis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icosaedri lateribus compositum, vertex autem F. Diviso itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonstratis in probl. 2. hujus scholij, perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducũtur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quovis exhibebimus æqualem, hac arte, Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum,



hoc est, cujus triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens utrumq; latus MO, NO, perpendiculari KL; æquale, hoc est, utriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM; ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; *a* Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB, *b* erit recta AB, major quam recta BG; ad eundemq; modum AE, major erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, majores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita ut rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. *c* Angulus ergo O, major erit angulo BAE: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales; per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper unius recti partem quintam. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.

COROLLARIVM.

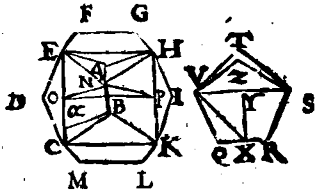
Non obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, FG, subtendanturq; à rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales erunt.

Angu-

V.

Angulum inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

Cum per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; sint hujusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, convenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, cujus quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diviso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorũ ABCDE, BKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quovis plano hac arte construemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc est, cuivis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cujus angulo T, recta subtendatur VS, æqualis existens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia sint, anguloq; contineant æquales. Divisa deinde recta QR, bifariã in X, ducatur à pũcto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpẽdicularis ad VS, cũ VS, sit parallela ipsi QR, ex scholio propos. 8. lib. 13. Ac postremo super recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens utrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem esse angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis, NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia sint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales; Aequales erunt & bases NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideo, que & residui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales sunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: necnon & angulis VXY, VYX, trianguli VXY, (sunt enim EON, HPN, VYX, ostensi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonstratum; Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus PH: Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales existentes



stentes ipsi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia OZ, PH, æquales sunt, ac parallelæ; erit quoque recta conjuncta OP, æqualis & parallela ipsi EH, ideoque æqualis ipsi EC, hoc est, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi OP; æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, *inclinationis*, esse obtusum. Nam ducta recta B α. ipsi NO, parallela: cum sit quoque NB, ipsi O α. parallela, ex scholio propos. 8. lib. 11. Parallelogrammũ erit NO, α B, ideoque recta B α. ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angulo C α B, qui rectus est (æqualis nimirum interno CON) majus est latere B α. hoc est, recta NO, vel utraq; ZV, ZS. quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV. TS. majores duabus rectis ZV. ZS. Cadit igitur punctũ Z. intra triangulũ TVS. ita ut rectæ TV. TS. rectas ZV, ZS. includant omnino: Atq; proinde angulus VZS. ideoq; illi æqualis ONP. maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est major recto. Multo igitur major recto erit angulus inclinationis ONP. ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

Patet igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum, contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt NO, NP, subtendanturque à rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni εAH, subtendit, æqualis: Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.

Elementi decimisexti Finis.