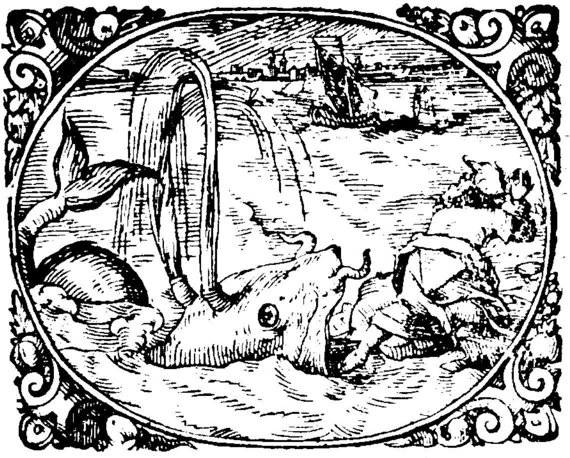
# EUCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Acceſſit liber XVI. De Solidorum Regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione.

*OMNES PERSPICUIS DEMONSTRATIONIBUS, accuratisq; ſcholiis illuſtrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.*

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergenſi è Societate IESU.



Libri
Dil
[illegible]
Mon
Fo; l

*FRANCOFURTI,*
Sumtibus hæredum IONÆ ROSÆ,
Anno M. DC. LIV.

# EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

## DEFINITIONES.

### I.

**Unitas eſt, ſecundum quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.**

HActenus egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidotum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, ut abſq; eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque uſum, neque exprimi queant, neq; intelligi Nam non raro pleraq; laterum ſunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι à Latinis Irrationales appellantur. Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certe inter ſe ſunt incommenſurabiles atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & conjuncta, ut abſq; his nullo modo cognoſcantur, oportuit etiam numerorum explanationem, ut doctrinæ ſuus ordo, ratioq; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum eæ rei Geometricæ inſerviunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo à principiis, definit initio unitatem, docetque eam eſſe, ſecundũ quã unamquodq; eorum, quę ſunt, unum eſſe dicitur. Nam ſecundum unitatem unum lapidem, unum animal,unum corpus,&c. dicere ſolemus. Cæterum unitas in numeris nullam ſuſcipit diviſionem,quemadmodum nec punctum in magnitudinibus,ut libro primo docuimus.

## II.

NUMERVS autem,ex unitatibus compoſita multitudo.

Cum numerus ſit multitudo quædam ex unitatibus compoſita, manifeſtum eſt,numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt unitates eum conſtituentes : Ita ut unitas ſit pars cujusvis numeri denominata ab ipſo numero,cujus eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo unitatibus, dividitur in totidem partes ,nimirum in 8. unitates quarum quælibet, octava pars dicitur octonarii. Sic quoque numerus 100. ex centum unitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur,quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

Ex his ſequitur,omnes numeros, quotcunque ſint,inter ſe commenſurabiles eſſe,cum eos una eademq; menſura, nimirum unitas ut ductum eſt,metiatur : Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione convenire,cum plurimæ earum menſuram communem non habeant,ſed prorſus ſint incommenſurabiles ut clariſſime lib. 10. oſtendetur.

## III.

Pars eſt numerus numeri,minor majoris, cum minor metitur majorem.

Non eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi,ita & hic partem dũtaxat aliquotam definit. cum hæc ſolum propriè dicatur metiri totum, ut ibidem latiùs explicavimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60. 630. &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter hujus numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum ſinguli hi metiantur, ut perſpicuum eſt.

Omnis autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum,cujus pars eſt,metitur : ut 6. pars hujus numeri 42. nomen trahit à 7 cum 6. metiatur 4 2. per 7. Itaque 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

## IV.

Partes autem,cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem majoris numeri, quem non metitur,non partem ſed partes appellari : cujuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamvis enim,cum non metiatur, niſi per ſuas unitates pars ipſius dici non debeat;apte tamẽ congruenterq; partes poterit appellari , quod quinq; contineat unitates,

tes,quarum quælibet decima octava pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinq; partes decimas octavas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum,non autem & aliquantam,ut volunt nonulli: alioquin ſupervacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

Cæterum partes quæcunque nomen accipiunt à duobus illis numeris,per quos communis duorum numerorum menſura utrumque eorum metitur, & eum ſcilicet,qui partes dicitur,& eum, cujus ille partes appellatur: Ita ut ſi communis deorum numerorum *menſura metiatur* minorem per 3 & majorem per 5. dicatur minor *majoris tres quintæ*, Tales partes ſunt 6. hujus numeri 10. Nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. pars. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas ejuſdem numeri 10. cum unitas,eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem judicium habeto & de reliquis.

Quod ſi roges,cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat,qui majoris pars eſt,verum etiam illum,qui partes non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit. Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ majorem non metitur partes appellavit,ſed tantum eam, quæ majorem metitur, partem. Reſpondemus: hujus rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cujuslibet majoris aut pars eſt,aut partes, ut propoſ. 4. hujus lib. oſtendetur; pars quidem,cum ipſum metitur,partes verò,cum non metitur. At in magnitudinibus longè aliter ſe res habet. Non enim propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus neceſſario minor aut pars aut partes eſt majoris, cum eæ perſæpe ſint incommenſurabiles,ut aperte liber decimus demonſtrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes majoris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus,minor majoris partes plures comprehendit,ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus,hic autem in numeris & partem,& partes explicavit.

## V.

### Multiplex vero maior minoris,cum maiorem metitur minor.

Quemadmodum ille ſolum numerus minor,majoris pars dicitur qui majorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus major,minoris appellatur multiplex,quem minor metitur, adeo ut numerus major,cujus minor eſt pars,ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt &c. Si vero majorem minor non metiatur, nullo modo erit major minoris multiplex. Si enim major minoris multiplex eſſet, metiretur minor majorē,per hanc definitionem. Et viciſſim,ſi major minoris non fuerit multiplex, minor majorem non metietur? Nam ſi metiretur minor majorem, eſſet per hanc defin. major minoris multiplex.

## VI.

### Par numerus eſt, qui bifariam dividitur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. pares vocantur, quoniam dividuntur bifariam, ſive in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint 2.5.20.50.500.

## VII.

### Impar vero, qui bifariam non dividitur, vel qui unitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5.11.15.37.101.1001. impares nominantur, quia bifariam dividi nequeunt. Vel certe quia unitate differunt ab his paribus 4.10.14.36.100.1000. vel etiam ab his 6.12.16.38.102.1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, unitatem in numeris prorſus eſſe individuam. Si enim divideretur, omnis numerus impar haberet dimidium: atque adeo bifariam dividi poſſet. Nam hujus imparis 11. dimidia pars eſſent quinque unitates & ſemis: cujus contrarium Euclides hac definitione docuit.

## VIII.

### Pariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.

Quia numerus par eſt, qui bifariam dividitur, fit ut quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cujuſmodi eſt numerus hic par 32. metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

## IX.

### Pariter autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Quod ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

Cæterum ſi rectæ duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit fieri poſſe, ut unus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes

hoc

hoc eſſe abſurdum ut excluderent numeros ejuſmodi pares, qui & pariter pares & pariter impares videntur eſſe, addiderunt utrique definitioni particulam, tantum, ita ut numerus pariter par, ſecundũ eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum. Pariter autẽ impar, quã par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit ut propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum ut dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. *Participat* enim quodammodo naturam utriuſq; ut conſtat. Itaque tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diverſa: Pariter par; pariter impar: pariter par & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellabitur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum Nicomachi, Boetii, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, ut perſpicuum eſt & ex definitionib. traditis, in quibus nõ reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunnt & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeſte omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat, illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem, demonſtratq; omnes nũmeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum. Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cujuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18 22. &c. Numeros denique qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe & pariter impares, ut ſunt 12. 20. 24. 28 98. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros, alioſque ſimiles, vere eſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

### X.

Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt hic numerus Impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alii infiniti, impariter impares nominantur.

### XI.

Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

Quod ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola unitas metiatur, ita neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus primus, quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c. Nam eos ſola unitas metitur.

## XII.

**Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas, communis menſura metitur.**

Sicut numerus ille, quem ſola unitas metitur; Primus metitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri quos præter unitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur. quamvis ſinguli eorum habeant numeros, qui eos præter unitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola unitas, menſura communis illos metitur. quamvis enim priorem metiantur hi numeri 1.& 5. poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum utrumq; metitur, ſed ſola unitas utriusq; eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter unitatem, nullum habeant numerū, menſurā communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Deniq; unitas, & quivis numerus, dici poſſunt, licet impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola unitas unitatē, & numerum quemvis metitur, tanquam menſura communis.

## XIII.

**Compoſitus numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.**

Numerum, quem præter unitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum. cujuſmodi eſt hic 15. Nam eum horum numerorum 3.5. metitur. Perſpicuū autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prȩter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

## XIV.

**Compoſiti autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.**

Duo numeri, vel plures, quos præter unitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe cōpoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter unitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſūt, quia eos hic numerus 3, tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & ſeipſum, & reliquos duos metitur; licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

## XV.

**Numerus numerũm multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante unitates. & procreatus fuerit aliquis.**

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. ſexies fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. unitates procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcil. quot unitates in multiplicante 8. cõtinentur, procreaverimus eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 1001000. 20. &c. dicentur multiplicare numerũ 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600, 456000. 9120. &c. Itaq; numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreari ve ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris, quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et ſic de reliquis.

Sequitur ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad unitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, ut faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt unitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties aliter multiplicantium unitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad unitatem habet. Itaque Multiplicatio ſive ductus unius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

**Multiplicatio numeri in numerum, eſt inventio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad unitatem.**

Sic vides ex multiplicatione, ſive ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. ut 8. ad 1. Vel ita ad 8. ut 6. ad 1.

Huic definitioni addenda eſt hæc alia docens quid ſit numerum dividere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in iis, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

**Numerus numerum dividere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui ſuis unitatibus indicat, quoties dividens numerus in diviſo continetur.**

Vt numerus 6, dividere dicetur numerum 48. cum ſumptus fueſit numerus 8. qui octo ſuis unitatibus indicat,dividentem numerum 6. in diviſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. dividere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis unitatibus indicat dividentem numerum 8. in diviſo 48. contineri ſexies.

Hinc fit numerum ex diviſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem,quam numerus diviſus habet ad dividentem. Cum enim,ut in definitione diximus,procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat,quotiens dividens numerus in diviſo contineatur,continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diviſus dividentem continere : ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diviſione genitus ad unitatem, quam diviſus numerus ad dividentem. Itaque diviſio unius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

Diviſio numeri per numerum , eſt inventio numeri qui ad unitatem habet eandem proportionem , quam numerus diviſus ad dividentem.

Ita vides ex diviſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1 ut 48. ad 6. Item ex diviſione ejuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. ut 48. ad 8.

Ex his quoque efficitur,diviſo numero per numerum , diviſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diviſionem inventi in numerum dividentem. Diviſo enim numero A.per B,procreetur numerus C. Dico numerum A , gigni , ex ductu numeri C,in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis , numerus ex C,in B,procreatus ita ſe habet ad B,ut C,ad unitatem D : Ex definitione autem diviſionis,ita quoque ſe habet A,ad B ut C, ad unitatem D perſpicuum eſt,numerum ex C,in B,genitum eſſe numerũ A,cum tam ille genitus,quam A eandem proportionem habeat ad B,quam C,ad D,unitatem.

A,48. B,8. C;6. D,1.

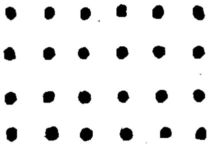
Hæc omnia conveniunt quoque numeris fractis,& integris cum fractis : Id eſt.Numerus fractus numerum fractum,vel integer fractum,vel fractus integrum (ſive fracti adhæreant integris,ſive non) multiplicare dicitur,cum toties compoſitus fuerit is , qui multiplicatur,quot ſunt in ipſo multiplicante unitates,& procreatus fuerit aliquis. Dividere autem,cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties dividens in diviſo continetur : Ita ut in multiplicatione inveniatur quoque numerus,qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet,quam alter multiplicantium ad unitatẽ; In diviſione autem procreetur numerus, qui ad unitatem eandem proportionem habet,quam numerus diviſus ad dividentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$ multiplicare dicitur numerum 20 quando numer. 20. toties

ties fuerit compoſitus, quod ſunt in $\frac{1}{2}$ unitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim unitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$ ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoque ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$ ſi $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties unitas eſt in 20. productusque fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$, quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. ut $\frac{1}{2}$ ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſe mutuo multiplicare dicentur quando $\frac{1}{2}$ ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$ tertiam partem unitatis tantum continet: *Vel quando* $\frac{1}{3}$ ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$ ſemiſſem tantum continet unitatis Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$ qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$ ſive $\frac{3}{6}$ & ſemiſſis numeri $\frac{1}{3}$ ſive $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusque ad finem lib. 9.

Rurſus numerus $\frac{1}{2}$ dividere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, dividentem numerum $\frac{1}{2}$ vicies contineri in diviſo numero 10. ita ut eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diviſi 10, ad dividentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$ dividere dicetur $\frac{1}{6}$ quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$ indicans dividentem numerum $\frac{1}{2}$ non totum contineri in diviſo $\frac{1}{6}$ ſed tertiam ejus partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$ idem ſit qui $\frac{3}{6}$ liquido conſtat tertiam hujus partem, nimirum $\frac{1}{6}$ contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterum quo pacto fiat diviſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, ubi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diviſioneque fractorum diximus, planiora fient.

## XVI.

**Cum autem duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.**



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorũ planus appellatur, quia ſecundum ſuas unitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cujus latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipſum contineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, ut latius lib. 2. explicavimus. Vt

nume-

numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque ejus ſunt 4. & 6. quia ejus unitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cujus unum latus ſex unitates, alterũ vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, ejusque latera 8. & 8.

Cæterum cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras, Euclides ſolum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorũ diſputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint & æquales, ſive ambitum, ſive aream, capacitatemvé ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conveniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono &c. quod ad ambitũ ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, Arithmeticam Iordani perlegerit.

Poteſt autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, ut numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 9. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

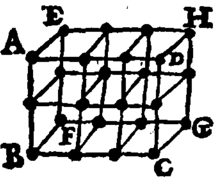
Quia vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quod quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt altero unitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum. Quod etiam de numero ſolido, qui jamjam definietur, dici poteſt. Verum eſt, unitatem, aliquando dici poſſe numerum planum, quamvis improprie; quia ejus latera ſunt duæ unitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam unitatem producunt.

## XVII.

**Cum vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur. Qui autem numeri mutuo ſeſe multiplicarint, latera illius dicentur.**

Vt quia tres hi numeri 1. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel deniq; ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. ap-

appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2.3.4. dicentur latera illius, quia ejus unitates in longum latum atq; profundum diſpoſitæ referunt figuram quandam ſolidam, quæ parellelepipedum nuncupatur. ut lib. 11. explicabimus, cujus omnes tres dimẽſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; unus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nã ſi primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. baſis ſolidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas; Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 34. altitudinem habens trium *unitatum.* At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur habebitur baſis 6. unitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habẽs 1. unitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 2. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cujus altitudo continet duas unitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo unitatum, cujus longitudo B C, quatuor unitates & B F, latitudo duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales. ut totus numerus ſolidus contineat 24. unitates, ejuſque altitudo B A. unitates tres. Similiter ſi baſis ſit A B F E, ſex unitatum, cujus longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet unitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietq; totus ſolidus numerus rurſũ 24. altitudinem B C. habens quatuor unitatum. Si denique baſis ſit A B C D, 12. unitatum, cujus longitudo B C. quatuor continet, & latitudo A B, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis & æqualis E F G H conſtabitque totus numerus ſolidus unitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt A E, vel B F. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6.3.2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemque modo de aliis numeris ſolidis judicandum erit.



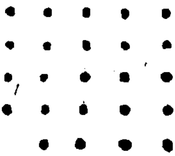
Denique & unitas interdum ſolidus appellabitur numerus, & ſi non proprie quia ejus latera ſunt tres unitates, ipſam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

Definit autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cujus baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione, quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

## XVIII.

**Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.**

Pla-

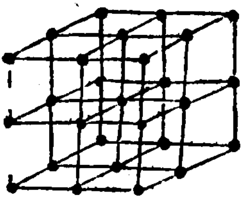


Planum illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt; hoc eſt, qui ſecundum unitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum cujus longitudo latitudini eſt æqualis, ita ut omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum, æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Hujuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi ejus unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum in quolibet latere habens quinque unitates, ideoque æqualiter æqualis erit.

Alteruter autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis pleriſque appellatur.

## XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter, Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



Solidum quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cujus unitates in longum, latũ, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita ut omnes ejus dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo & altitudo, ſive profunditas, æquales ſint, Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 33 3. ſive ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9 & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

Quilibet vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

## XX.

NUMERI proportionales ſunt, cum primus ſecun-

**cundi,& tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus ſecundum & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes.**

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (hujuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; *vel certe cum primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem vel eaſdem partes.* Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionib. reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt: in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, ut vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neque æque multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemve partes; ut perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. ubi omnes proportiones, rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videl. tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4 14 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem videl. ſextam: In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas: In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem videl. quintam continet: In ultimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

Quotieſcunq: igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem majores cum minoribus conferantur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur; Vel certe primus ſecundum & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad majores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

Definit autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, ut proportionales numeri dicantur,

Ex hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint ejuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe eundem æqualiter contineant eandemque inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque inſuper eorum partem, vel partes, perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerũ ad æquales, eandem habere proportionem, juxta hanc definitionẽ.

Rurſus quia numeri ad eandem habentes eandem proportionẽ, ſunt illius vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe illum æqualiter continent, eandemque inſuper ejus partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes, Vel certe illos æqualiter continet, eandemque inſuper illorum partem vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem, manifeſtum eſt numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

Pari ratione infertur, majoris numeri ad eundem, majorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, ejuſdem ad minorem, majorem eſſe proportionem, quam ad majorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet majorem proportionẽ, majorẽ eſſe: Ad

quem

quem autem idem habet majorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.

Hæc definitio convenit etiam numeris fractis, ſive integri numeri ſimul adſint, ſive non. Nam quatuor hi numeri ſunt proportionales, $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt, nimirum duplus, ut patet, ſi priores duo ad eandem denominationem revocentur, ut ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$ & poſteriores quoque ad eandem denominationem, ut ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$ Quo pacto autem fracti numeri ad eandẽ denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales ſunt $2\frac{3}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$ cum primus ſecundi, & tertius quarti ſit eadem pars, nimirum ſemiſſis, ut conſtat, ſi priores duo ad hos ejuſdem denominationis revocentur $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$ & poſteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$ atque ita de cæteris.

## XXI.

## Similes plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt quælibet duo illius latera quibuſvis duobus lateribus hujus eſſe proportionalia, ſed ſatis eſt, illum habere aliqua latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus laterib. hujus. Nã hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas unitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & ſex ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6.4. proportionalia ſunt lateribus hujus 3.2. quamvis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2.

Eodẽ modo ut duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, ut quævis tria unius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet laterib. alterius: ſed ſufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum unitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8.6.4. lateribus hujus 4.3.2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 2.8.2. vel 6.4.3.

Itaque poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sũt enim hi numeri plani 24.6. ſimiles, ut dictum eſt, & tamen ſi latera prioris ſumantur & 3.8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis, 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

Hæc porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoque in fractis numeris, ſive in integris cū fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tam duo priores, quam duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri ſimiles, &c. Dixi, plerunque quia fieri poteſt, ut interdum integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$ 6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. poſteriora vero numerum 16.

## XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

Numerus ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, juxta defin. hujus lib.) æquales ſunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cujuſmodi ſunt hi numeri 6. 28, 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ ſimul ſumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum ſumma conſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in unam ſummam collectas componere numerum 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alii) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. ultima lib 9.

Quod ſi partes omnes aliquotæ alicujus numeri ſimul acceptæ majores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

Luce autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partib. ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri majoris pars dici poteſt, ſive eum metiatur, ſive non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propoſitis adjungendæ mihi videntur ex Campano, aliiſque ſcriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim eæ, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & ejus interpretes uti videntur.

## XXIII.

Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem nume-

numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numer. 12. producatur. Hoc autem ita eſſe, hac ratione fiet perſpicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipſum 12. toties compoſitus, quoties eſt unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, ut propoſ. 16. hujus lib. oſtendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifeſtum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, ſi numerus 4. multiplicet numerum 3.

Hæc quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$ *metiri* dicitur numerum $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus *per $5\frac{3}{4}$ gignit $13\frac{5}{14}$.*

## XXIV.

Proportio numerorum eſt habitudo quædam unius numeri ad alterum, ſecundum quod illius eſt multiplex, vel partes, parteſve; vel certe illum continet ſemel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex eſt, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudove, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, ſecundum quod illius tertia pars eſt; & ſic de reliquis.

Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes : Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartũ, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdẽ partes, ut ſupra defin. 20. docuimus.

## XXV.

Termini, ſive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores ſumi, nequeunt.

## XXVI.

Cum tres numeri proportionales fuerint. Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundum: Et ſemper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hæc definitio, ut ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. *lib. 5.* Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

### XXVII.

Quotlibet numeris ordine poſitis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum & ſecundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita ſe habere, pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin. lib. 6.

Poſſunt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione inverſaque ; de compoſitione, diviſione & converſione rationis ; de ratione ex æqualitate ; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum convenire.

## POSTULATA, SIVE PETITIONES.

### I.

Poſtuletur, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

### II.

Quolibet numero ſumi poſſe majorem.

Quamvis enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad unitatem individuam diminutio eveniat ; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam unitatis. Quare quolibet numero propoſito major exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex unius unitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

## AXIOMATA, SIVE PRONUNCIATA.

### I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

### II.

Quorum idem numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales inter ſe æquales ſunt.

### III.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IV. Quo-

## IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

## V.

Vnitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt per ipſummet numerum metitur.

Nam unitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito unitates, ipſum conſtitui. Quamobrem ipſum metitur per unitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis unitatibus conſtitutum.

## VI.

Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

Cum quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per unitatem.

## VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Numerus enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B, & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A unitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, ut demonſtrabitur propoſ. 16. hujus lib.

A.... B.....
C.........,

## VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt unitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

Vt quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per unitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18, ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

## IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per

**quem metitur,vel ab eo multiplicetur: illum quem metitur producet.**

Metiatur enim numerus A,numerum C,per B. Dico A, multiplicantem ipſum B , vel multiplicatum à B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum quem multiplicans, vel â quo multiplicatus,ipſum C,producit,per defin. 23. Cum ergo A,metiri ponatur ipſum C , per B; perſpicuum eſt,numerum A,multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum,producere ipſumC.

A....B..
C.........

## X.

Numerus quotcunque numeros metiens compoſitum quoque ex ipſis metitur.

Metiatur numerus A numeros B C,C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos, B C,C D; erit tam B C,quam C D ipſius A,multiplex. Diviſo ergo B C,in partes B E, E C, ipſi A, æquales & ipſo C D,in partes C F,F G; GD,eidem A,æquales, erit numerus B D,compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G,G D,ipſi A,æqualibus,multiplex ipſius A,Quare A,ipſum BD, metitur. Quod eſt propoſitum.

A....
B....E.... C....F.... G....D

## XI.

Numerus quemcunq; numerum metiens metitur quoque omnem numerum,quem ille metitur.

Metiatur numerum A,numerum B,& B, numerum C D. Dico eundem A,metiri quoque numerum C D,quem B metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D,erit C D,ipſius B, multiplex. Diviſo ergo C D,in partes C E,E D, ipſi B,æquales; metietur A,ipſos numeros C E,E D , quandoquidem numerum B,tam numero C E,quam numero E D,æqualem metiri ponitur. Igitur idem A,per pron 10.metietur quoque numerum C D,ex C,E,E D,compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A...
B.........
C.........E..........D

## XII.

Numerus metiens totum & ablatum , metitur & reliquum.

METIATVR numerus A totum B C,& ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquū D C.Cum enim A, metiatur &

BC, & BD; erit tam BC, quam BD, ipſius A, multiplex, aut certe BD, ipſi A, æqualis erit. Diviſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A. æquales: erit reliquus numerus DC, vel una pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel ejus multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B . . . . . . . . . D . . . C
B . . . . . . . . D . . . . . . C
B . . . . D . . . . . C

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

I.

*Si duobus* numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

A . . . . . . . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H - - - - -

*Sint duo numeri propoſiti inæquales* AB, CD, *quorum* CD, *minor ex majore* AB, *quoties poteſt, detrahatur: & reliquus* EB, *ex* CD, *quoties etiam poteſt; & reliquus* FD, *ex* EB: *Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatem* GB, *quæ quidem præcedentem numerum* FD. *metitur, detractio perveniat. Dico numeros* AB, CD *eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit* H, *communi menſura præter unitatem. Quia ergo* H, *metitur numerum* CD; *&* CD, *numerum* AE, (*quod* CD, *vel pars ſit ipſius* AE, *vel certe ei æqualis, cum detractus ex* AB, *reliquerit numerum* EB,) a *metietur quoque* H, *ipſum* AE: *At* H, *metitur quoque totum* AB, b *Igitur & reliquum* EB, *metietur. Metitur autem* EB, *ipſum* CF. c *Igitur &* H, *ipſum* CF, *metietur; Ac propterea, cum & totum* CD, *metiatur,* d *metietur quoque reliquum* ED. *Cum ergo* FD, *metiatur ipſum* EG; e *metietur etiam* H, *ipſum* EG: *Metiebatur autem &* H, *totum* EB. f *Reliquã igitur unitatem quoque* GB. *numerus* H, *metietur, partem totam. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros* AB, CD, *metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt, Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 11. *pronun.*
b 12. *pronun.*
c 11. *pronun.*
d 12. *pronun.*
e 11. *pronun.*
f 12. *pronun.*

### SCHOLIUM.

Convertemus cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

**Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem quoad aſſumpta ſit unitas.**

Sint duo numeri inter ſe primi A.B C D, quorum minor C D, ex majore A B. quoties poteſt detrahatur, & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt, & reliquus F D, ex E B, relinquens G, B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad unitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad unitatem detractio perveniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B præcedentem F D, ex B F, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipſum E G, *a* metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſeipſum metiatur *b* metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F. *c* Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atque adeo cum & ipſũ F D, poſitus ſit metiri: metietur *d* quoque ipſum C D, ex C F, F D, compoſitum. At vero C D, metitur ipſum A E. *e* Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde cum & ipſum E B, metiatur, ut oſtenſum eſt; *f* metietur & ipſum A B, ex utroque A E, E B. compoſitum. Quare cum numerus G *B*, metiatur numeros A *B*, C D, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentẽ metietur, donec aſſumpta ſit unitas. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . . . . . . . . . . . . E . . G - - B
C . . . . . . F . . D

*a* 11. pronun.
*b* 10. pronun.
*c* 11. pronun.
*d* 10. pronun.
*e* 11. pronun.
*f* 10. pronun.

Eodem modo & hoc verum eſt.

**Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem uſque non perveniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.**

Nam ſi detractio hujuſmodi ad unitatem uſque perveniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, *g* ut Euclides demonſtravit, Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.

*g* 1. sep.

Ex his facile dignoſcemus an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi nec ne, Nam detracto ſemper minore de majore. alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentẽ metiatur, quoad aſſumpta ſit unitas; ipſi erunt inter ſe primi, *h* ut Euclides demonſtravit, ſi vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti cum ille idem reliquus numerus utrumque numerum propoſitum metiatur, ut perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori hujus ſcholii. Ex eo enim, quod reli-

*h* 1. sep.

quus

quus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit eundem reliquum G B, utrumque A B, & C D, metiri.

## PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

Dentur duo numeri A B, C D, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex majore A B, quoties poteſt, relinquatque E B, numerum; qui ex C D, ſubtractus relinquat F D, & ſic deinceps ſemper minor de majore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem pervenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad unitatem deveniretur, a numeri A B, C D, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſin. Perventum ergo jam ſit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico F D, eſſe maximam menſuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunque metiatur, ita oſtendemus. Quia F D, metitur ipſum E B, & E B, ipſum C F: b metietur quoque F D, ipſum C F, atq; adeo cum & ſeipſum metiatur, c metietur & totum C D, ex C F, F D, compoſitum. At C D, ipſum A E, metitur, d Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipſum E B: e metietur etiam totum A B, ex utroque A E, E B, compoſitum. Metitur igitur F D, utrumque numerum A B, C D.

A..............E......B
C......F..D
G------

a 1. ſept.
b 11. pronun.
c 10 pronun.
d 11. pronun.
e 10. pronun.

Quod autem F D, ſit maxima menſura communis illorum ita probabimus: Si enim fieri poteſt, detur major menſura communis, G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrumque A B, C D; Et C D, metitur ipſum A E, f metietur quoque G, ipſum A E, g Igitur & reſiduum E B: At vero E B, metitur C F. h Metietur ergo & G, eundem C F, i Igitur & reſiduum F D; major minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo major numerus, quam F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F, D maxima eſt menſura numerorum A B, C D.

f 11. pronun.
g 12. pronun.
h 11. pronun.
i 12. pronun.

Quod ſi minor numerus C D, metiatur majorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſeipſum metiatur, ut in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A.........B
C.....D

## COROLLARIVM.

*Ex hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.*

Hoc elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD. eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem Eademque ratio eſt de cæteris.

## SCHOLIVM.

Ex iis, quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A,B,C, Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A & B, ſint inter ſe primi : Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A,B,C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter unitatem propter numeros A,&B, inter ſe primos.

A..........
B.......
C....

Si vero A,& B, fuerint inter ſe compoſiti *a* ſit eorum maxima menſura communis invẽta D, quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A,B,C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numer. *D*, communem menſurã.

a 2. ſep.

A................
B............
C.........
*D*...

Quod ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C,& *D*. vel inter ſe primi vel non : Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A,B,C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita ut habeant numerum communem menſuram : metietur ejuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. hujus propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſin.

A..........
B......
C.....
*D*...

Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A,B,C, inter ſe compoſiti. *b* Inventa enim numerorum C,& D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A,& B; *c* metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cũ idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E tres numeros A,B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

b 2. ſep.
c 11. pronũ.

A.............
B..........
C......
D.... E..

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in qua-

quatuor,&c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

## PROBL. 2. PROPOS. 3. iij.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

*Dentur tres numeri* A, B, C, *non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. Sit* D, *maxima menſura numerorum A, &* B; *Si ergo* D, *metiatur quoque ipſum* C, *perſpicuum eſt* D, *eſſe maximam menſuram numerorum datorum* A, B, C. *Nam ſi major numerus dicatur metiri numeros* A, B, C, *metietur idem, per coroll. propoſ. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam menſuram numerorum A, &* B, *major numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si vero* D, *non metiatur ipſum* C; *erunt ſaltem* D, *&* C, *inter ſe compoſiti. Cum enim ſint* A, B, C, *inter ſe compoſiti, metietur quacunq; illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam menſuram numerorum A, &* B. *Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt* D, *&* C, *inter ſe compoſiti* a *Sit eorum maxima menſura E.* Di*co* E. *eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum* A, B, C. *Quod enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros* C, *&* D, *at* D, *ipſos* A, *&* B, b *metietur quoque* E, *ipſos* A, *&* B; *Ac proinde tres numeros* A, B, C, *metietur.*

A . . . . . . . . . . . . .
B . . . . . . . . . . . . . D . . . .
C . . . . . . E . . F - - - -

a 2. *ſep.*

b 1. *pronun.*

*Quod autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, major quam E, eorum menſura cõmunis. Quia igitur F, metitur numeros* A, *&* B : *metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. hujus lib. numerum* D, *maximam eorum menſuram communem: Metitur autem &* C. *Igitur* F, *metiens* D, *&* C, *metietur quoque* E, *eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus major minorem, quod eſt abſurdum. Non ergo major numerus, quam* E, *numeros* A, B, C, *metitur; atque adeo* E, *maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.*

## COROLLARIUM.

*Hinc perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.*

Hoc etiam colligitur ex ultima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

Pari ratione,pluribus numeris datis,quam tribus,non primis inter ſe maxima eorum communis menſura invenietur : locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor,invenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum,ſi quinque,quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura &c. Reliqua vero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum eſt.

iij.

## THEOR. 2. PROPOS. 4.

Omnis numerus,omnis numeri,minor majoris , aut pars eſt,aut partes.

*Sint duo numeri A,minor,& B,major. Dico A,eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primum A, & B,inter ſe primi. Quia igitur qualibet unitas numeri A,pars eſt numeri B: perſpicuum eſt, numerum A,eſſe partes numeri B , tot nimirum,quot ſunt in A,unitates.*

A......
B........

*Sint deinde A, & B,non primi inter ſe,ſed inter ſe compoſiti,& metiatur A , ipſum B. Quo poſito,manifeſtum eſt A,partem eſſe numeri B, ex defin.3. hujus lib.*

A....
b 3 *defin.* B.........

*SED jam A,non metiatur ipſum B,a inventa autem maxima eorum menſura communis ſit C; dividaturque numerus A,in partes AD,DE,EF , quarum ſingula ipſi C,ſint æquales. b Quia igitur C, pars eſt ipſius B,cum ipſum metiatur ; erit quoque AD,pars ejuſdem B: ſimiliter & DE, & EF: ac propterea totus numerus A,eſt partes numeri B,tot videlicet, quoties C,in A,F,continetur. Omnis igitur numerus,omnis numeri, minor majoris , aut pars eſt,aut partes. Quod demonſtrandum erat.*

A. .D . . E . . F
a 2. ſepti. B........
C..

## THEOR. 3. PROPOS. 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars : Et ſimul uterque utriuſque ſimul eadem pars erit, quæ unus unius.

*Sit numerus A,eadem pars numeri BC, quæ eſt numerus D, numeri EF , Dico utrumque numerum A,& D,ſimul utriuſq; numeri BC,& EF,ſimul eandem eſſe partem , quæ eſt vel A , ipſius BC,vel D,ipſius EF. Diviſis enim numeris BC, EB, in partes BG, GC; EH,HF,ipſis A,& D,æquales; erit multitudo partium numeri*

A......  |  D....
B......G......C | E....H....F

*ri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius B C, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt, ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales; Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æqualis erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, ſimul utriusque B C, & E F, ſimul, quæ eſt A, ipſius B C, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

Idem hoc verum eſt in numeris fractis, eademque prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exemplo apparet, ubi numerus A, numeri B C, & numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde uterq; ſimul A, D, utriusque B C, E F, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, dividantur in partes B G, G C; E H, H E, ipſis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{5}{9}$ D, $\frac{3}{7}$

B, $\frac{5}{9}$ G, $\frac{5}{9}$ C, E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

Quod ſi quando contingat, numerum fractum dividi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quod numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per numerũ partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cujus numerator in propoſitas partes dividi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$ ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit uterq; ejus numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. ut gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

Rurſus quando adſunt integra, revocanda prius erunt una cum fractione ad unam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partiũ, &c. Vt ſi numerus 4$\frac{3}{7}$ ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc unicam fractionem. $\frac{31}{7}$ deinde utrumque ejus numerum per 6. multiplicabimus, ut fiat fractio $\frac{93}{21}$ cujus tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoque propoſitionibus obſervanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alii integri.

Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Si unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul utraque unitas,

nitas,vel unitas & numerus ſimul, utriuſque numeri ſimul eadem pars erit,quæ unitas numeri.

Hoc autem perſpicuè in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A. | D. || A. | D...

B. G. C. | E. H. F || B. G. C | E...H...F

Poſſumus etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero,ſinguli ſingulorum eadem pars : Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A,B,C,numerorum D E,F G,H I, ſinguli ſingulorum,eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C,ſimul omnium numerorum D E, FG,H I, ſimul eandem eſſe partem , quæ eſt A,ipſius D E. Diviſis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipſis A,B,C, æquales; erit multitudo partium numeri D E,æqualis multitudini partium tam numeri F G,quam numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B,& F L,erunt A,B, ſimul æquales ipſis D K, F L ,ſimul : quibus ſi rurſum addantur æquales C.& H M; erunt quoque A, B,C, ſimul æquales ipſis D K, F L, H M, ſimul. Simili ratione erunt A,B,C , ſimul æquales ipſis K E, L G,M I,ſimul; & ſic deinceps,ſi plures partes fuerint in D E, F G,H I, aggregatum numerorum A,B,C , tot aggregatis partium numerorum D E,F G , H I,æquale erit,quoties A,in D E , continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, ſimul ipſorum D E,FG, H I,ſimul quæ A,ipſius D E.

A... | B... | C..

D....K....E | F....L....G | H..M..I

Idem ſequitur,ſi loco unius numerorum A,B,C,ſumatur unitas, vel loco plurium,vel etiam omnium,plures unitates,ut de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant,

A. | B.. | C... || A. | B. | C.

D.K.E. | F..L.. G | H...M...I || D.KE | F.L..G. | H.M.I

Hæc etiam fractis numeris conveniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri , quotcunq; fractorum numerorum æqualium numero,ſinguli ſingulorum,eadem pars fuerint ; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt,quæ unus unius. Quod eodem modo demonſtrabitur; etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel unitates, ut hic videre licet.

A, 1. | B $\frac{1}{2}$ | C,$\frac{6}{4}$
D 1 K 1 E | F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G | H $\frac{3}{4}$ M $\frac{3}{4}$ I

Theoremati quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt unius unus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

Demonſtratio eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quam eſt B, ipſius E, & C, ipſius F, erit è contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A B C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

A........ B...... C....,
D.... E... F..

Si numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æque multiplices; quam multiplex eſt unius unus, tam multiplices erunt & omnes omnium, Vt ex demonſtratione liquet.

Quod ſi loco unius numerorum D, E, F, aſſumatur unitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, ut ex ſequentibus figuris apparet.

A.. B.... C...... | A.. B.. C..
D. E.. F... | D. E. F.

## THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul uterque utriusque ſimul eædem partes erit, quæ unus unius.

*Sit numerus* A B, *eadem partes numeri* C, *qua numerus* D E, *numeri* F. *Dico utrumque* numerum A B, & D E, ſimul utriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt A B, ipſius C, *vel* D E, *ipſius* F. *Diviſis enim numeris* A B, D E, *in partes*

A... G... B | D.... H.... E
C......... | F..........

*tes* AG,GB; DH,HE, *numerorum* C, *&* F; *erit multitudo partium in numero* AB, *aqualis multitudini partium in numero* DE: *propterea quod eadem partes eſt numerus* AB, *numeri* C, *qua numerus* DE, *numeri* F. *Quia igitur, qua pars eſt* AG, *numeri* C, *eadem eſt* DH, *numeri* F; a *erit uterque* AG, DH, *ſimul eadem pars utriusq;* C,F, *ſimul, qua* AG, *ipſius* C, *vel* DH, *ipſius* F. *Eadem ratione erit uterque* GB,HE, *ſimul eadem pars utriuſque* C,F, *ſimul, qua* GB, *ipſius* C, *vel* HE, *ipſius* F: *Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in* AB,DE, *erunt tot aggregata partium in numeris* AB, DE, *contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum* C,F, *ſimul, qua pars eſt* AG, *ipſius* C; *quot partes eadem eſt numerus* AB, *ipſius* C, *vel* DE, *ipſius* F: *Ac proinde eadem partes erit uterque numerus* AB,DE, *ſimul utriusque numeri* C,F, *ſimul, qua* AB, *ipſius* C, *vel* DE, *ipſius* F. *Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 5. ſep.

## *SCHOLIVM.*

Eadem hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, una cum demonſtratione: ut hoc exemplum demonſtrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E
C, $\frac{1}{3}$ F, $\frac{6}{7}$

Sed & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſive integros, ſive fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ unus unius.

Eadem enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtravimus, in ſcholio præcedenti, ut hic perſpicuum eſt.

| | | |
|---|---|---|
| A..K..B | C...L...D | E....M....F |
| G...... | H......... | I............ |

## THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

*Sit numerus* AB, *eadem pars num.* CD, *qua ablatus* AE, *ablati* CF. *Dico reliquum* EB, *eandem eſſe partem reliqui* FD, *qua eſt totus* AB, *totius* CD. *Ponatur enim* EB, *numeri* GC, *eadem*

*eadem pars, qua eſt A E,* *A . . . E . . B*
*ipſius C F, vel totus A B,* G . . . . *C* . . . . . . . . . *F* . . . . *D*
*totius C D.*

*Quia igitur A E, eadem eſt pars ipſius C F, qua E B, ipſius G C;* a *erit uterque A, E, E B, ſimul eadem pars utriusque ſimul C F, G C, qua A E, ipſius C F, hoc eſt, qua totus A B, totius C D; Ac propterea cum A B, eadem ſit pars utriuſque numeri F G C D, erunt ipſi numeri F G, C D, inter ſe æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D, Eadem igitur pars erit E B, ipſius F D, qua ipſius G C, hoc eſt, qua totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.* a 5. ſepti.

### *SCHOLIVM.*

A, $\frac{3}{2}$ E, $\frac{2}{5}$ *B*,
G, $\frac{4}{5}$ C, $\frac{9}{8}$ E, $\frac{4}{5}$ D

Locum etiam habet hæc propoſitio, una cum ejus demonſtratione in numeris fractis, ut hic apparet.

Idem hoc theorema verum eſt tam in numeris integris, quam in fractis etiamſi ablata ſit unitas A E, vel reliqua fuerit unitas E B, vel denique in integris & ablata, & reliqua ſit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A . E . . . B | A . . . E . B | A . E . B .
G . . . . . . C . . F . . . . D | G . . C . . . . . F . . D | G . . C . . F . . D

Cæterum & ex his theoremati quinto lib 5. ſimile hoc demonſtrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius.

Quod quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita eſſe multiplicem, ut eſt totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipſius C D, ſit æque multiplex, atque A E, ipſius C F, erit è contrario totus C D, totius A B, eadem pars, qua ablatus C F, ablati A E. *b* Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B, Ac proinde è contrario E B, ita multiplex erit ipſius F D, ut A B, ipſius C D, eſt multiplex. b 7. ſeptimi.

A . . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

Quod ſi ex C D, ablata fuerit unitas C F, vel reliqua ſit unitas. F D. vel denique in integris & ablata ſit unitas C F, & alia reliqua F D, idem demonſtrabitur, ut hæc exempla commonſtrant.

A . . . E . . . . . | A . . . . E . . B | A . . . . E . . . . B
C . F . . D | C . . F . D . | C . F . D

## THEOR. 6. PROPOS. 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati. Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

*Sit numerus* A B, *partes eadem numeri* C D, *quæ ablatus* A E *ablati* C F. *Dico reliquum* E B, *eaſdem eſſe partes reliqui* F D, *quæ totus* A B, *eſt totius* C D. *Sumpto enim numero* G H, *æquali ipſi* A B, *erit* G H, *eadem partes ipſius* C D, *quæ* A B, *ejuſdem* C D, *hoc eſt, quæ* A E, *ipſius* C F.

A......K......E....B
C..................F......
G......L..I.......M..H

*Diviſo ergo* G H, *in partes* G I, I H, *numeri* C D; *&* A E, *in partes* A K, K E, *numeri* C F, *erit multitudo partium* G I, I H, *multitudini partium* A K, K E, *æqualis, eademque pars tam* G I, *quam* I H, *ipſius* C D, *quæ tam* A K, *quam* K E, *ipſius* C F. *Cum ergo* C D, *numerus major ſit numero* C F, *erit & tam* G I, *quam* I H, *pars ipſius* C D, *major tam numero* A K, *quam* K E, *parte ipſius* C F. *Sumptis igitur numeris* G L, I M, *æqualibus ipſis* A K, K E, *erit* G L, *eadem pars ipſius* C F, *quæ* A K, *ejuſdem* C F, *hoc eſt, quæ* G I, *ipſius* C D; *Ac proinde cum totus* G L, *totius* C D, *ſit eadem pars, quæ ablatus* G L, *ablati* C F, [a] *erit & reliquus* L I, *reliqui* F D, *eadem pars, quæ totus* G I, *totius* C D. *Eodemq; argumento oſtendemus* M H, *eandem eſſe partem ipſius* F D, *quæ eſt totus* G I, *vel* I H, *totius* C D. *Quoniam ergo tam* G I, *quam* I H, *eadem eſt pars ipſius* C D, *quæ eſt tam* L I *quam* M H, *ipſius* F D; *erit uterque* G I, I H, *ſimul eadem partes ipſius* C D, *quæ uterque* L I, M H *ipſius* F D. *Eſt autem* G H, *eadem partes ipſius* C D, *quæ* A B, *ejuſdem* C D, *propter æqualitatem numerorum* A B, G H; *Igitur & uterque* L I, M H, *ſimul eadem partes erit ipſius* F D, *quæ* A B, *ipſius* C D. *Quia vero ſi ab æqualibus* A B, G H, *æquales auferantur* A K, K E, *&* G L, I M, *reliqui* E B, *&* L I, M H, *ſimul æquales ſunt*; Erit *quoque* E B, *reliquus eadem partes reliqui* F D, *quæ* A B, *totus totius* C D, *nimirum eadem quæ uterque* L I, M H, *ſimul erat ejuſdem* F D. *Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.*

a 7. ſep.

## SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{10}$ K, $\frac{2}{10}$ E, $\frac{6}{10}$ B
C, $\frac{6}{10}$ F, $\frac{6}{10}$ D
F, $\frac{2}{10}$ L, $\frac{3}{10}$ I, $\frac{2}{10}$ M, $\frac{3}{10}$ H

In numeris fractis eadem hæc propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, ut hic manifeſtum eſt.

Non demonſtravit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabit hic reliquum numerum E B, alicujus numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus A E, numeri C F, ibi vero perſpicuum erat reliquum E B, alicujus numeri eandem eſſe partem, quæ eſt A E, ipſius C F. Licet enim ipſius E B, duplum aſſumere, triplum, quadruplum &c. donec E B, ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti G C, ut A E, eſt ſubmultiplex ipſius C F.

ix.

## THEOR. 7. PROPOS. 9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertii, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

*Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, qua numerus D, numeri E F, ſintque A, B, C, minores ipſis D, E F, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales B C, ipſius E F. Diviſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia vero B G, G C, inter ſe ſunt æquales, & minores quam E H, H F, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponatur: Erit B G, ipſius E H eadem pars, aut partes, quæ G C, ipſius H F, a ac propterea & uterque B G, G C, ſimul, nimirum B C, ſecundus utriuſque E H, H E, ſimul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipſius E H, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A. . . .

B . . . G . . . C

D . . . .

E . . . . . . H . . . . . . F

*a* 5. *vel* 6. *ſept.*

### SCHOLIVM.

In numeris fractis propoſitio hæc una cum ejus demonſtratione locum etiam habet, ut hic perſpicuum eſt.

$A\frac{3}{11}$

$B\frac{3}{11}G\frac{3}{11}C$

$D\frac{14}{22}$

$E\frac{14}{22}H\frac{14}{22}F$

Quod ſi loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicujus pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit viciſſim unitas tertii numeri eadē pars, quæ ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A.

B.G.C.

D: . . . .

E . . . . . H . . . . F

## THEOR. 8. PROPOS. 10.

xi. Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertii, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

*Sit numerus A B, eadem partes numeri C, quæ numerus D F, numeri F, ſintque A, B, C, ipſis D, E, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiam intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim numerum A B, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri D E, quæ numerus C, eſt numeri F. Diviſis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B, & D, H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in A B, æqualis multitudini partium, in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipſius C, quæ tam D H, quam H E, ipſius F.* a *Viciſſim ergo eadem pars erit aut partes A G, ipſius D H, & G B, ipſius H E, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes A G, ipſius D H, quæ G B, ipſius H E.* b *Igitur & uterque A G, G B, ſimul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriusque D H, H E, ſimul, nimirum D E, tertii, quæ A G, ipſius D H, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . H . . . . . E
F . . . . . . . . . . . . . .

a 9. ſep.
b 5. vel 6. ſep.

### SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$, B,
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{9}{10}$

Numeris fractis convenit etiam hujus propoſ. demonſtratio, ut in hoc exemplo apparet.

## THEOR. 9. PROPOS. 11.

xij. Si fuerit ut totus ad totum, ta ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

*Sit ut totus numerus A, B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, eſſe, ut eſt totus A B, ad totum C D. Cum enim ſit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F;* c *erit A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: vel certe A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, æque mul-*

A . . . . . . . . . . . . . E . . . . . . B
C . . . . . . F . . . D

c 20. defin.

*multiplex. Quo poſito, erit è contrario C D, totus totius A B, eadem pars, qua ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipſorum C D, C F.* a *Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, qua totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipſius C D, & E B, ipſius F D, æque multiplex erit,* b *Quare erit, ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.*

a 27. *ſept.*
b 20. *defin.*

A . . . E . . B
C . . . . . . F . . . . D
A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

*Sit deinde A B, ipſius C D, & A E, ipſius C F, eadem pars, vel eadem partes. Quo poſito* c *erit & reliquus E B, reliqui F D, eadem pars, vel partes, qua totus A B, totius C D;* d *Ac proinde erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.*

c 7. *vel* 8. *ſept.*
d 20. *defin.*

*Contineat tertio A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, eandemque inſuper illius partem vel partes. Quo poſito, erit è contrario C D totus totius A B, eadem partes, qua ablatus C F, ablati A E, ut mox demonſtrabimus.* e *Reliquus igitur F D, reliqui E B, eadem quoque partes erit, qua totus C D, totius A B; Ac propterea è contrario A B, ipſum C D, & E B, ipſum F D, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes, ut mox oſtendemus.* f *Quare erit, ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.*

e 8. *ſept.*
f 8. *ſept.*

A . . . . . . E . . . B | A . . . . . . E . . . . . . . . . . . . . . . B
C . . .       F . . D | C . . . . .  F . . . . . . . . . . D

*Quod ſi A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perſpicuum eſt reliquum E B, quoque eſſe æqualem reliquo F D. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur: quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A . . . . . E . . . B
C . . . . . . F . . . D

## SCHOLIVM.

Eodem modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertii caſus demonſtrationis reſpondent.

A, $\frac{3}{8}$ E, $\frac{1}{90}$ B | A, $\frac{14}{21}$ E, $\frac{28}{29}$ B
C, $\frac{1}{9}$ F $\frac{2}{8}$ C | C, $\frac{5}{21}$ F $\frac{10}{29}$ D

## LEMMA.

Quod autem, ſi A B, ipſum C D, & A E, ipſũ C F, æqualiter contineat, eademque inſuper partem illius vel partes; è contrario C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

eædem partes: Et ſi C D, ipſius A B, & C F, ipſius A E, ſit eædem partes; è contrario A B, ipſum C D, & A E ipſum C F, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quam in integris: hoc modo demonſtrabimus. Contineat primum A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, nimirum ſemel vel bis, vel ter, &c eandemque inſuper partem G B, quidem ipſius C D, & H E, ipſius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, ſint vel æquales ipſis C D. C F, vel eorum æque multiplices. Diviſis igitur numeris C D, C F, in partes C I. I K. K D; & C L, L M, M F, ipſis G B, H E, æquales; erit multitudo partium numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipſius C D, ſit eadem pars quæ H E, ipſius C F. Similiter diviſis numeris A G. A H, in partes A N, N O, O G; & A P, E Q, Q H, eiſdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis. Cum enim A G, A H, vel æquales ſint ipſis C D, C F. vel eorum æque multiplices, erunt vel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F, vel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; proptereaque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, eſt numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis ſit multitudini partium numeri C F, erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.

Contineat deinde A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter, quaterve, &c. eaſdemq; inſuper partes illius: numerus quidē A B, partes G B, numeri C D, & nūerus A E, partes H E, numeri C F; ita ut reliqui numeri A G, A H, ſint rurſum vel æquales ipſis C D, C F, vel eorum æque multiplices. Diviſis igitur numeris G B, GB,HE,in partes GI,IB,& HK,KE,numerorum CD, CF,erit multitudo partium ipſius GB,multitudini partium ipſius HE,æqualis.Similimodo, diviſis numeris CD,CF,in partes CL,LM,MD,& CN,NO,OF.partibus GI,IB,&HK,KE,æquales,erit quoque multitudo partium ipſius CD,multitudini partium ipſius CF, æqualis propterea quod quælibet partium numeri GB,eadem pars eſt numeri CD, quæ unaquæque partium numeri HE,eſt numeri CF. Denique diviſis numeris AG, AH,in partes AP,PQ,QG,& AR,RS,SH, eiſdem partibus GI,IB,& HK,KE,æquales, erit & multitudo partium numeri AG,æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG,AH,vel æquales ſint ipſis CD, CF,vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG,AH,quot in CD,CF,vel certe numerus partium ipſius CD,toties continebitur in AG,quoties numerus partium ipſius CF,in AH,proptereaque multitudo partium numeri AG,multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partium numerorum GB,HE,erit quoque multitudo partium numeri AB,multitunini partium numeri AE,æqualis; Atque adeo una pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB,quæ una pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF,erit CD,eædem partes numeri AB,quæ CF,ipſius AE. Quod eſt primo propoſitum.

A..P.Q..G..I..B
C..L..M..D
A...R...S...H...K...E
C...N...O...F

Iam vero ſit CD,ipſius AB,& CF,ipſius,AE,eædẽ partes.Dico è contrario AB,ipſũ CD,& AE,ipſũCF,æqualiter continere,eandẽq; inſuper illius partẽ,vel partes.Diviſis enim numeris CD,CF,in partes numerorũ AB,AE, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Itẽ diviſis numeris AB,AE,in partes partib. numerorũ CD,CF,æquales,erũt & hæ multitudine inter ſe æquales.Quare toties continebitur omnes partes numeri CD,in AB, ſupereritq; eadẽ pars,vel partes ipſius CD.quoties omnes partes nũeri CE, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipſius CF, ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum CD, CF, multitudines æquales. Quamobrem AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.

## xiij. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Si ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

*Sint quotcunque numeri proportionales A,B; C,D; E,F; hoc eſt, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F: Dico eſſe quoque omnes A,C,E, ſimul ad omnes B,D,F, ſimul, ut eſt A, ad B. Sint enim primum A,C,E, minores quam B,D,F. Quoniam igitur propter eandem proportionem, a eadem pars eſt, aut partes, A, ipſius B, qua C, ipſius D, & E, ipſius F, b erit quoque uterque A,C. ſimul utriuſque B, D, ſimul, eadem pars, aut partes, qua A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia uterque A, C, ſimul, tanquam unus, utriusque B, D, ſimul, tanquam unius, eadem pars eſt, aut partes, qua E, ipſius F: c erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E. ſimul amborum B, D, tanquam unius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, qua A, ipſius B. d Quare eadem proportio eſt omnium A,C,E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, qua ipſius A, ad B.*

A . . . . C . .   E . . .
B . . . . . . . . . D . . . . F . . . . . .

a 20. defin.
b 5. vel 6. ſept.
c 5. ſept.
d 20. defin.

*Sint deinde A,C,E, majores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit è contrario B, ipſius A, eadem pars, qua D, ipſius C, & F, ipſius E: Atque adeo ut prius, e erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul eadem pars, qua B, ipſius A: ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F. ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. f Quare eadem eſt proportio omnium A,C,E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, qua eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliqua proportiones multiplices, vel etiam omnes ſint numerorum*

A . . . . . . . . . C . . . . E . . . . . .
B . . . . D . . F . . .

e 5. ſept.
f 20. defin.

ad unitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, ut hic apparet, adjuvante tamen ſcholio propoſ. 5. hujus lib.

A...C.......E.......... | A...C...E...... | A...C...E...
B. D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

Sint tertio A,C,E, majores quam B,D,F, at non multiplices. a Quia igitur propter eandem proportionem A, ipſum B, & C: ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemq́; inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C & F, ipſius E, eadem partes. Igitur ut prius, b erunt omnes B, D F, ſimul omnium A,C,E, ſimul eadem partes, quæ ipſius A: atque adeo per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A,C,E, ſimul omnes numeros B,D,F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem. vel partes. c Quare eadem proportio eſt omnium A,C,E, ſimul, ad omnes B,D,F, ſimul, quæ ipſius A, ad B. a 20. defin. b 6. ſept. c 20. defin.

A.........C....E............
B...... D... F.......

Sint quarto & ultimo A,C,E, ipſis B,D,F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A,C. ſimul æquales ipſis B,D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales, E, & F, fiunt & omnes A,C,E, ſimul, omnibus B,D,F, ſimul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A,C,E, ſimul ad omnes B,D,F, ſimul, cum utrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D...F.....

## SCHOLIVM.

In numeris quoque fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo convincetur, ut patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

## THEOR. 11. PROPOS. 13. xiv.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico viciſſim eſſe A, ad C, ut B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D, & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars vel partes. d Viciſſim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: e ac proinde erit ut A, ad C, ita B, ad D. d 9. vel 10. ſept. e 20. defin.

A... C......
B.... D.......

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, major quam

C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars vel partes. a Viciſſim ergo & C, ipſius A & D, ipſius B; eadem pars erit, vel partes: Atque adeo è contrario, vel A, ipſius C & B; ipſius D, aque multiplex erit, vel certe per lemma propoſ. 11. hujus lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, aqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. b Quare erit ut A, ad C, ita B ad D.

A...... C...
A.......D....

a 9. vel 10. ſept.
b 20. defin.

Sint tertio A, & C, majores quam B & D; at A, minor quam C. quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, aque multiplex, vel certe A, ipſum B & C, ipſum D, continebit aqualiter eandemque inſuper partem vel partes: Atque adeo è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe per lemma propoſ. 11. hujus lib. eadem partes. c Viciſſim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit vel partes. d Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, qua A, ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A...C.........
B...D......

c 9. vel 10. ſept.
d 20. defin.

Sint quarto A, & C, majores quam B, & D: & A, quoque major quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel aque multiplex, vel certe C ipſum D, & A, ipſum B, aqualiter continebit, eandemq; inſuper partem, vel partes: Atque adeo, è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe per lemma propoſ 11. huius lib. eadem partes. e Viciſſim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes: Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, aque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. hujus lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit aqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes f Quare eadem proportio erit B, ad D, qua A, ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A........C....
B......   D...

e 9. vel 10. ſept.
f 20. defin.

Sint quinto A, & C, ipſis B, & D, aquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur aquales numeri A, & B, aqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eadem partes ſunt; g Erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A...C....
B...D....

g 20. defin

Sint ſexto A, & C, ipſis B, & D, aquales, at A, major quam G. Quia igitur aquales numeri A, & B, aqualium numerorum C, & D, vel aque multiplices ſunt, vel certe illi hos aqualiter continent, eandemque inſuper partem, vel partes; h erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A....C...
B....D...

h 20. defin.

Sint ſeptimo ac ultimo A, & C, inter ſe aquales, ſive ii majores

ſint

*ſint quam B, & D, ſive minores, ſive æquales.* a *Quoniam igitur, ob eandem proportionem A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes, ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca ſi quatuor numeri proportionales ſint, viciſſim & proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.*

a 20. *defin.*

A..... C.....
B... D...

## SCHOLIVM.

Quod ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

Manifeſtum quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur unitas.

Coacti vero ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eosque demonſtrationibus certiſſimis confirmare, una cum lemmate propoſ. *11.* ut earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alii interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionib. rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, ut perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi majorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, ut nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri minorem majoris, cum minor non metitur majorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, ubi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, majorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, ut manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſupervacanea eſſent.

## THEOR. 12. PROPOS. 14.

XV.

Si ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

*Sint quotcunque numeri A, B, C, & alii totidem D, E, F, ſintque ut A, ad B; ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe ut A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim eſt, ut A, ad B, ita D, ad E; a erit viciſſim, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob cauſam, cum ſit. ut B, ad C; ita E, ad F; erit viciſſim, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B ad E, ut demonſtratum eſt; & ipſa inter ſe eadem erunt, ut mox oſtendetur.) b Ac proinde viciſſim, ut A, ad C, ita D, ad F.*

a13. ſep.

b13. ſep.

A............ D.........
B......... E......
C.... F..,
G.............. H...........

*Quod ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H: Dico adhuc eſſe ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim jam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F: ponatur autem ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri, A, C, G, & alii tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit ut A, ad G, ita D, ad H: Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor: ſicus id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus: Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri. Idem verum eſt, ſi loco unius numeri unitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. F......
C... F........
G. G...

## LEMMA.

Quod autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt inter ſe quoque eædem, quales ſunt in demõſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſive numeri ſint integri ſive fracti, ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſi-

A............ B........ C....
D.......... E...... F...

ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadẽ pars, vel eædem partes; vel certe B; ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter; eandemque inſuper partem, vel partes, *a* Quare numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum. a 20. *deſin*

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propoſ. 11.

## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque unitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum. xvj.

*Metiatur unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æque. Dico viciſſim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æque metiri. Diviſo enim numero B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo unitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipſum E I, atque unitas G H, ipſum I K, & unitas H C, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G: numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. hujus lib. oſtendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, H C, ſimul numerorum E I, I K, K F, ſimul, quæ unitas B G, numeri E I, hoc eſt, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitatibus B G, G H, H C. compoſitus numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compoſitum æque metietur. Si unitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

*A*. D..

B G. H C E..*I*..*I*..F

### SCHOLIVM.

Illud idem, quod Euclides demonſtravit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de unitate, & tribus numeris propterea quod unitas non eſt numerus: Quod quidem brevius ita nos demonſtrabimus. Quia unitas A, numerum B C. æque metitur atque numerus D, numerum E F, erit unitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtravimus, erit viciſſim unitas A eadem pars numeri D, quæ nu-

numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

Hæc propoſitio fractis numeris convenire non poteſt. Nam ſi unitas numerum quempiam metiatur, æque autem altet numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur; non metietur viciſſim æque unitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & a 13. ſep. ſecundus integer quartum fractum; a ſed ſolum eandem habebit rationem unitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.

## THEOR. 14. PROPOS. 16.

**Si duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.**

E.

A...　　　B....

D............C............

*Duo numeri A, & B, ſi mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim unitate E;* b 35. defin. *cum A, ipſum B, multiplicans faciat C;* b *erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerum A, &* c 15. ſept. *numerus B, numerum C, æque metietur.* c *Viciſſim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D:* d *erit D, ex* d 15. defin. *A, toties compoſitus, quot ſunt in B, unitates: atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idẽ A, numerum C, æque, Æque igitur numerus A, utrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſeſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.*

### SCHOLIVM.

E.

A, $\frac{2}{3}$　　　*B*, $4\frac{5}{7}$.

*D*, $3\frac{1}{7}$.　　　C, $3\frac{1}{7}$.

In numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, ut A, ad E unitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, ut C, ad A, ita B, ad E; unitatem. Sed ex eadem defin. ut B, ad E, unitatem, ita quoque eſt D, ad A, quod E multiplicans A facit D. Igitur erit, ut C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D Quod erat oſtendendum.

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo

**Si duo numeri ſe mutuo multiplicaverint, procreabitur unus idemque numerus.**

Multiplicet enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam ut prius, cum A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet a etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur. *Idem* ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipſum B. a 15. *deſin.*

E.
A . . . B . . . .
C . . . . . . . . . . .

*Quod* ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel unus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. ut C, ad B, ita A, ad E, unitatem: Et permutando, ut C, ad A, ita B, ad E, unitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B ad E, unitatem, ut factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, ut numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

**Si numer⁹ duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.**

*Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat* D, E. *Dico eſſe, ut* B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Aſſumpta enim unitate* F; b *erit* D, *ex* B, *compoſitus toties, quoties unitas* F. *eſt in* A: *ſimiliterque toties* E, *compoſitus erit ex* C, *quoties eadem unitas* F, *eſt in eodem* A: *Atque adeo* B, *ipſum* D, *&* C, *ipſum* E, *æque metietur. Quare* B, *ipſius* D, *&* C, *ipſius* E, *eadem pars erit,* c *Ac proinde, erit ut* B, *ad* D, *ita* C, *ad* d, *& permutando, ut* B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod oſtendendum erat.* b 15. *deſin.* c 20. *deſin.* d 13. *ſep.*

F.
A . . .
B . . C . . . .
D . . . . . . E . . . . . . .

### SCHOLIVM.

Si numeri A, B; C, ſint fracti, vel unus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quam E, ad C, ut A, ad F, unitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. ut D, ad B, ita E ad C. Igitur permutando, ut D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 16. PROPOS. 18.

xix. Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Generi ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

a 16. ſep. *Numeri enim* A, & *B, multiplicantes numerum* C, *faciant D*, & E. *Dico eſſe ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad E. Cum enim ex* A, *in* C, *fiat* D: a *fiet quoque idem* D, *ex* C, *in* A. *Eademque ratione, cum ex* B, *in* C, *fiat* E, *fiet idem* E, *ex* C, *in B. Quia igitur idem* C, *multiplicans ipſos* A, & B, *facit D*, & *E*: b *erit, ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E. *Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos*, &c. *Quod erat demonſtrandum.*

b 17. ſep.

*A*.... B.....

C...

D......... *E*.............

### SCHOLIVM.

Liquido conſtat eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, *B*, *C*, ſint fracti, vel unus eorum, vel duo.

Hanc autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, ſive numeri omnes ſint integri ſive non hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati, B C, D, habent: hoc eſt, eſſe, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiāt E, F, c erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G, Atque ita de cæteris.

c 17. ſep.
18. ſep.

A...

*B*.. C... D....

E.......F........G...........

## THEOR. 17. PROPOS. 19.

XIX. Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & quarto fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

*SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D, fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo in C tertium, Dico numeros E, F, aquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E;* a *erit, ut C, ad D, hoc eſt, ut A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F;* b *erit quoque ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri aquales erunt, ex iis, qua ad defin. 20. ſcripſimus.* a 17. ſep. b 18 ſep.

A...
B..
C......
D....
E............
F............
G..................

*SED jam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, aqualis ipſi F; producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, ut quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E;* c *erit ut C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, aqualem. Habet enim G, ad aquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F;* d *erit quoque, ut A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eadem ſint proportioni G, ad F, eadem inter ſe erunt, per lemma propoſ 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.* c 17. ſep. d 18. ſep.

## *SCHOLIVM.*

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem hujus propoſ. locum habere in numeris fractis, ſive omnes fracti ſint, ſive non.

POTERAT hujus theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tàm in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 16. demonſtrabitur.

SI major fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertii ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, major erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, major fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; major erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertii ad quartum.

SIT primum major proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C. tertii ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe majorem eo, qui fit ex B in C, Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, ut C ad D; (ſive E, numerus integer ſit, ſive fractus: ſive integer cum fracto: qui quidem reperietur, ut ad propoſ. *19*, lib. 9. oſtendemus, ſi numerus ex B, in C, procreatus dividatur per D.) erit quoque major proportio A, ad B, quam E, ad B; ac proinde A, major erit, quam E. a 19. ſep. Quare major numerus fiet ex A, in D, quam ex E, in eundem D: *a* At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, major erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A.......E......
B....
C......
D......

FIAT deinde major numerus ex A in D, quàm ex B, in C. Dico majorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quam C, tertii ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus B, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C (ſive E, numerus ſit integer, ſive fractus, aut integer cum fracto) fiet quoq; major numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde major erit A, quàm E. Quare major erit proportio A, ad B, quam E, ad B: *b* At ita eſt E, ad B, ut C, ad D. b 19. ſep. Igitur major erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertii ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: minor erit proportio primi ad ſecundum, quam tertii ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, majoris, mutes in vocem minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A ad B quam C, ad D: hoc eſt, major eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertii ad B, quartum: major fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſive ex B, in C, quam ex D, ſecundo in A, tertium, ſive ex A, in D, ut demonſtratum jam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B in C: hoc eſt, major ex B, in C, ſive ex C, in B, quam ex A in D, ſive ex D, in A, erit major proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertii ad B, quartum, ut jam

A.....E......
B....
C...
D..

iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erunt.

*SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit ut B, ad C, hoc eſt, ut A, ad B, ita D, ad C: numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur: Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, propprtionales ſunt. a erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.* a 19. ſep

A.........

B...... D......

C....

*SED jam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C: & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, b erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c Quod demonſtrandum erat.* b 16. ſep

### SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi major fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; major fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi major numerus fiat ex primo in tertium, quã ex ſecundo in ſe: major erit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium. Itẽ ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertiũ, quam ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecun-

A........ | A....

B......D...... | B.......D......

C..... | C......

dum,

dum,quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet,ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, ut habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit major proportio primi ad ſecundum,quam tertii ad quartum,aut minor, &c. ut in appoſitis exemplis apparet,etiamſi numeri ſint fracti,vel partim fracti, partim integri.

## xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, major quidem majorem, minor verò minorem.

*SINT numeri* A B,C D, *minimi in proportione eadem quam habent alii duo numeri majores E,F, ita ut ſit, quemadmodum* A B, *ad* CD, *ita E ad F.* Dico *A B,C D, æquè metiri ipſos E,F, majorem quidem* A B, *ipſum majorem E, at minorem* C D, *ipſum minorem* F: *hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cum enim ſit, ut AB. ad* C D, *ita E, ad F;* a13, ſep. a *erit viciſſim, ut* A B, *ad E, ita* C D, *ad F. Atque adeo cum* A B, C D, *minores ſint, quam E,*F; b20. de fin. b *erit AB, ipſius E, &* C D, *ipſius F, eadem pars vel partes. Partes quidem nequaquam: Diviſis namque, ſi fieri poteſt,* A B,C D, *in partes* A G, G B; C H, H D, *numerorum E,* F; *erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium* C H, H D; Ac *propterea A G, ipſius E, &* C H, *ipſius* F, *eadem pars.* c *Erit ergo, ut A G, ad* c20 defin. *E, ita* C H, *ad* F; d13. ſep. d *& viciſſim, ut A G, ad* C *H, ita E, ad F, vel* A B, *ad* C D; *Ac proinde numeri A G,* C *H, minores quam A B,* C D, *eandem habebunt proportionem, quam* A B, C D. *Quod eſt abſurdum; cum* A B, C D, *in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipſius E, &* C D, *ipſius F, eadem partes ſunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipſum E, &* CD, *ipſum E, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A...G..B
C..H.D
E.........
F......

### SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſque duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum, & ſecundũ, tertium, ut in hoc appoſito exemplo apparet, ubi tertius numerus ſecundo æqualis eſt. Quamvis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit unitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus

A..G..B
C...H..D
E......
F.........

nus ab adverſario non dicatur eſſe unitas, ut diximus. Quod idcirco dixerim, ut propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua adverſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſque duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negaverat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

**QUOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſive eædem ſint, ſive diverſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.**

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſive eadem ſit proportio AB, ad

A . . . K . . . B C . . L . D E . . . . M . . . . F
G . . . . . . . . . . . . H . . . . . . I . . . . . . . . . . . . . . . .

CD, quæ CD, ad EF, ſive non; ita ut non poſſint reperiri alii numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, ut AB, ad CD, & ſecundus ad tertium, ut CD, ad EF, &c. (quamvis vis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut AB, ad CD, & H, ad I, ut CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ſit ut AB, ad CD, ita G, ad H, *a* erit viciſſim ut AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit ut CD, ad EF, ita H, ad I, *b* erit quoque viciſſim, ut CD, ad H, ita EF, ad I. *c* Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Diviſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipſius G & CL, ipſius H, eadem pars. *d* Erit ergo ut AK, ad G, ita CL ad H; *e* & viciſſim ut AK, ad CL: ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, ut CL, ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri

a *13. ſep.*
b *13. ſep.*
c *20. defin.*
d *20. defin.*
e *13. ſep.*

AK,CL,EM,in proportionibus numerorum AB,CD,EF,&minores quã AB,CD,EF. quod eſt abſurdum,cũ hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB,CD,EF, eædem partes ſunt numerorum G,H,I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars: Ac propterea AB,ipſum G,& CD,ipſum H,& EF,ipſum I, æquè metietur. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi tres numeri dati A,B,C,minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum,ita ut etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alii tres D,E,F,non minimi, qui eaſdem habeant proportiones,quas A,B,C. Dico A,B,C,ipſos D,E,F, æquè metiri.

A.. B..... C...
C.... E........F......

Nam per hanc propoſ.21. A,B,cum ſint minimi in proportione A, ad B,æquè metientur ipſos D,E; eademque ratione B,C, ipſos E, F. Quare cum A,ipſum D,& C,ipſum F,æquè metiatur,ac B, ipſum E,metientur æquè omnes A,B,C,ipſos D,E,F.

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo convenire poteſt numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione,ſed quibuſvis datis,dari poſſunt alii minores,in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus aliis propoſitionibus,in quibus minimorum numerorum mentio fit. Eæ enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur,excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi,ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem,perſpicuum eſt,eos habere unam particulam,vel plures,ejuſdem denominationis,menſuram communem. Aliæ autem omnes propoſitiones numerorum,in quibus minimi numeri in ſua proportione,vel primi non adhibentur,æquè conveniunt& integris numeris,& fractis. quod ſatis eſt, ſemel hoc loco monuiſſe.

## XIX. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri: & alii ipſis multitudine æquales,qui bini ſumantur,& in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate, in eadem ratione erunt.

A.............. H...
B... D....
C..... E.........
G.........F..

SINT *tres numeri A,B,C,& totidem D,E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, ut quidem* A *ad* B, *ita* E, *ad* F: *& ut* B, *ad* C, *ita* D, *ad* E. *Dico, ex æqualitate quoque eſſe ut A, ad* C, *ita* D, *ad* F. *Cum enim*

*enim ſit ut A, ad B, ita E, ad F: a erit numerus ex A, in F, genitus æ-* a 19. ſep.
*qualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam ut B, ad*
*C, ita D, ad E, b erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis nume-* b 19. ſep.
*rus, qui fit ex C, in D. Atque adeo numerus genitus ex A, primo in*
*F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, produ-*
*cto. c Quare erit ut A, ad C, ita D, ad F.* c 19. ſep.

*QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam C, ad G, ut H, ad D: Dico adhuc eſſe, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim jam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F: ponatur autem ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alii tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, ut conſtat.

QVONIAM verò Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicavit, & demonſtrationibus confirmavit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propoſ. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propoſ. 14. & 22. hujus lib non alienum à noſtro inſtituto erit, breviter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentibus theorematibus, quæ omnia conveniunt tam fractis numeris quam integris.

## I.

### SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inverſa ratione, ſive convertendo, proportionales erunt.

A..... C...
B.... D..

SIT, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & convertendo, ſive inverſa ratione, eſſe ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim ſit A, ad B, ut C. ad D, d erit viciſſim A, ad C, ut B, ad D. Rurſus quia eſt B, ad D, ut A, ad C, e erit viciſſim B, ad A, ut D, ad C. Quod eſt propoſitum.

d 13. ſeptim.
e 13. ſep.

## II.

### SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diviſi proportionales erunt.

a 13. ſep.
b 11. ſep.
c 13. ſep.

A......C...B
D.... F.. E

SIT ut A B, ad C B, ita D E ad F E. Dico dividendo eſſe ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim ſit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; a erit viciſſim, ut totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad totum D E, b ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc eſt, A C, ad D F, ut C B, ad F E. c Viciſſim ergo erit quoque A C, ad C B, ut D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

EADEM ratione demonſtrabimus diviſionem rationis converſam, & contrariam, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per diviſionem rationis converſam eſſe quoque, ut C B, ad A C, ita F E ad D E. Cum enim ſit, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit quoque dividendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Et convertendo, ut C B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico per diviſionem rationis contrariam, eſſe quoque, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit convertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Ergo dividendo, ut C B, ad A C, ita F E, ad D F; Et convertendo, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

## III.

SI diviſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

d 13. ſep.
e 12. ſep.
f 13. ſep.

A......B...C
D.... E.. F

SIT ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico & componendo eſſe, ut A C, ad B C, ita D F ad E F. Cum enim ſit, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; d erit viciſſim, ut A B, ad D E, ita B C, ad E F: e Ac proinde A B, B C, ſimul ad D E, E F, ſimul, ut B C, ad E F: f Et viciſſim A B, B C, ſimul, hoc eſt, totus A C ad B C, ut D E, E F, ſimul, hoc eſt, totus D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.

SIMILITER Compoſitio rationis converſa, & contraria oſtendetur hoc loco, ut in lib. 5. Sit enim primum, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis converſam eſſe quoque, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quia enim eſt ut A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit convertendo ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim ſit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit convertendo, ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. Et componendo ergo, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E: Et convertendo, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

## IV.

**SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per converſionem rationis proportionales erunt.**

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per converſionem rationis eſſe quoque, ut A B, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim ſit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; *a* erit viciſſim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; *b* Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus A C, ad reliquum DF. c Viciſſim igitur ut A B, ad A C, ita D E ad DF. Quod eſt propoſitum.

a 13. *ſep.*
b 11. *ſep.*
c 13. *ſept.*

A . . . . . . C . . . B
D . . . . F . . E

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet,

## V.

**SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum: habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſexus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum,**

SIT ut A B, primus ad C, ſecundum, ita D E, tertius ad F, quartum; Item ut B C, quintus ad C, ſecundum, ita E H, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe A G, compoſitum ex primo & quinto ad C, ſecundum, ut eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartũ. Cùm enim ſit, ut B G, ad C, ita E H, ad F; erit convertẽdo ut C, ad B G, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt, ut A B, ad C, ita DE, ad F. & ut C, ad B G; ita F, ad E H; erit ex æqualitate, ut A B, ad B G, ita D E, ad E H. Componendo igitur, ut A G, ad B G; ita DH, ad EH. Itaque cùm rurſus ſit, ut A G, ad B G, ita D H, ad E H, & ut B G, ad C, ita EH, ad F: erit ex æqualitate, ut AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

A . . . . B . . G | D . . . . . . . . E . . . H |
C . . . . | F . . . . . .

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtravimus.

## VI.

**SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem: & detracti quidem habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdẽ eandem rationem habebunt:**

SIT ut totus AB, ad C, ita totus DE, ad F ; Item ut detractus AG, ad C; ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, eſſe ad C, ut eſt reliquus HE, ad F. Cum enim ſit, ut AG, ad C, ita DH, ad F; erit convertendo, ut C, ad AG; ita F, ad DH. Quia igitur eſt, ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate ut AB, ad AG, ita DE, ad DH. Dividendo ergo ut GB, ad AG, ita HE, ad DH; Itaque cum rurſus ſit, ut GB ad AG; ita HE ad DH; & ut AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex æqualitate, ut GB, ad, G ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A...... G. . B D........H...E

C,...  F......

ITEM & hoc demonſtrabimus.

## VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT ut primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & ut primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitum ex ſecundo & quinto, ut eſt D, tertius ad EH, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim ſit, ut A, ad BC, ita D, ad EF; erit convertendo ut BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur eſt ut BC, ad A, ita EF, ad D : & ut A, ad CG, ita D, ad FH: erit ex æqualitate ut BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, ut BG, ad CG, ita EH, ad FH; & convertendo, ut CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, ut A, ad CG, ita D, ad FH: & ut CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex æqualitate, ut A, ad BG, ita D, ad EH. Quod eſt propoſitum.

A ......  D ........

B.... C. . G E ..... F ....H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

## VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alii illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoq; illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alii omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius nu-

numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunque numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc eſt, ſit ut A B, ad E, ita F G, ad K; & ut B C, ad E, ita G H, ad K; & ut C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſam A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe F I, habet ad K. Cùm enim ſit, ut A B, primus ad E, ſecundum, ita F G, tertius ad K, quartum: Item ut B C, quintus ad E, ſecundum, ita G H, ſextus ad K, quartum; erit quoque

A...B......C.........D | F..G...H....I

E......... | K.....

ut A C, primus cum quinto ad E, ſecundum, ita F H, tertius cũ ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, ut A C, primus ad E, ſecundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item ut C D, quintus ad E, ſecundum, ita H I, ſextus ad K, quartum; erit etiam, ut A D, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F I, tertius cum ſexto, ad K quartum: Atque ita de cæteris ſi plures fuerint.

SED habeat jam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit ut E, ad A B, ita K, ad F G: & ut E, ad B C, ita K, ad G H: & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, ut E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, utpote ad F I. Cùm enim ſit, ut E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum: erit quoque, ut E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, ut E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM verò his demonſtratis, oſtendentur novem ultimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adjectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere: ſi pro magnitudinibus, intelligantur numeri ſive integri, ſive fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur, iidem modi hoc lib. demonſtrati: ut opus non ſit eas hîc repetere. Satis enim eſt, ut dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eædemque prorſus demonſtrationes adhibeantur.

THEOR.

## THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxiij. PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium,
qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non
ſunt minimi, erunt aliqui alii minores ipſis, minimi habentes pro-
portionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in
proportione A, & B, minoreſque idcirco ipſis
A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt
in proportione A, & B; a metietur C, ipſum
a 21. ſep. A, & D, ipſum B, æquè; atque adeò ſecundum
eundem numerum, qui ſit E, ita ut C, toties metiatur ipſum A, &
D, ipſum B, quoties unitas eſt in E. Itaque cùm unitas numerum E,
b 15. ſep. & numerus C, numerum A, æquè metiatur; b metietur & viciſ-
ſim æquè unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus
quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur:
c 15. ſep. c metietur quoque viciſſim æquè unitas numerum D, & numerus
E, numerum B: Atque adeò, cum idem numerus E, utrumque A, &
B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A,
& B. non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, &
contra hypotheſin. Non ſunt igitur alii numeri ipſis A, & B, mino-
res, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt.
Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demon-
ſtrandum.

A....... B ....
C------ D--
E....

## THEOR. 22. PROPOS. 24.

xxij. MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A & B, minimi omnium eandem cum ipſis propor-
tionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum nu-
merum, præter unitatem, communi menſura
eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed
habent numerum communem menſuram; ſit
numerus C, eorum menſura communis, meti-
aturque C. numerus numerum quidem A, to-
ties, quoties unitas eſt in numero D: At verò ipſum B, toties, quoties
unitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt uni-
tates, procreat ipſũ A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt unitates
d 9. pronun. in E, producit ipſum B: d ſit, ut D. & E, ipſum C, multiplicantes, pro-
ducant A, & B. e Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E:
e 8. ſep. Atque adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm
A, &

A........B.....
C----
D ---- E----

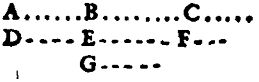
*A, & B: non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri, A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QUOTCUNQUE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi, A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarū proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non poſſint, quamvis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alii minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarū proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C: metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè, per eá, quæ ad propoſ. 21. hujus lib. demonſtrauimus: atque adeò ſecundum unum eundem numerum, qui ſit G: ita ut *D*, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties unitas eſt in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æquè metitur: *a* metietur quoque viciſſim æquè unitas numerum D, & numerus G, numerum A. Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æquè, atque unitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alii numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A ád B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt. a 15. *ſep.*



IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita ut G, toties metiatur ipſum A, quoties unitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties unitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties unitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties unitas eſt in D, E, F: fit ut D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. hujus lib. oſtendimus: Atque adeò, cùm D,E,F, minores ſint quàm A,B,C, non erunt A,B,C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A,B,C. Quod eſt propoſitum.

xxiiij.

## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

*SINT inter ſe primi A, & B: & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum* B, *eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi* B, & C: *metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur* C: & C, *ipſum A*: a *metietur etiam D, ipſum* A: *Metitur autem & ipſum* B. *Igitur* A, & B, *non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo* C, *ad* B, *primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum* B, *erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A....... B.....

C . . . *D* - - -

a 11. *pronun.*

xxv.

## THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

*SIT uterque numerus* A,B, *ad C, primus, producaturque ex A, in* B, *vel ex* B, *in A, numerus D. Dico & D, ad eundem* C, *primum eſſe. Si enim* C, & *D, non ſunt inter ſe primi: ſit eorum communis menſura numerus E metiens ipſum D, toties, quot unitates ſunt in numero F. Quoniam igitur* E, *toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt unitates in F*; b *ſit ut* F, *ipſũ E, multiplicans gignat ipſum D*: c *& contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D*: G*enitus eſt autem idem* D, *ex A, in* B: *Igitur cùm ex E, primo in F, quartum, fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in* B, *tertium*: d *erit ut E, primus ad* A, *ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt: &* E, *ipſum C, ponitur metiri*: e *erit* E. *ad A, primus*: A*tque adeò E, &* A, *cùm ſint inter ſe primi*, f *in ſua proportione minimi erunt.* g *Æquè igitur metientur ipſos* B, *& F, eandem proportionem habentes, nimirum* E, *ipſum* B, *& A, ipſũ F. Quare cùm E, metiatur utrumq;* B, & C; *non erunt* B. & C, *inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus ergo erit* D. *ad ipſum* C: *Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A....... B. . .

C......

D...............

*E* - - - - *F* - - - -

b 9. *pronun.*

c 16. *ſep.*

d 19. *ſep.*

e 25. *ſep.*

f 23. *ſep.*

g 21. *ſep.*

THEOR.

### THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

*SINT inter ſe primi A, & B, gignaturq́; C, ex A, in ſeipſum.* Dico *C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æqualis ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt,* a *erit numerus ex A, in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq́; arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A.... B......
C................
D....

a 26. ſeptim.

### THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

*SIT uterque A, & B, ad utrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cùm enim uterque A, & B, primus ſit ad C;* b *erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cùm uterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ex ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus eſt ad E:* c *erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat oſtendendum.*

A..... B...
E...............
C... D..
F......

b 26. ſeptim.

c 26. ſeptim.

### THEOR. 27. PROPOS. 29. xxviij.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans uterque ſeipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eveniet.

SINT *primi inter ſe A, & B: & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C: & F, ex B, in D: Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cùm enim A, B, ſint inter ſe pri-*

A... B..
C......... D....
E........................... F........
G 81. H,16.
I,243, K,32.

mi-

a 27. ſe- mi, a erit C factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem
ptim. modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe,
ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

b 27. ſep. RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, b erit & C, factus
ex A, in ſe, ad B: & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem &
C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrumque B, D, primus
c 28. ſep. erit; c Ac proinde E, factus ex A, in C,
primus erit ad F, factum ex B, in D.
Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G, & ex
B in F fiat H, cùm A, & C, primi ſint
d 26. ſe- ad B, d erit quoque E, ex ipſis genitus,
ptim. ad B primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur
e 28. ſe- uterque A. E, ad utrumque B, F, primus eſt: e erit & G, factus ex A,
ptim. in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint.
Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, f erit & G, ex ipſis factus,
f 26 ſeptim ad B, primus: nec nõ & H, ad A. g Quare & I, genitus ex A, in G,
g. 28. ſe- ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm uterque A G, ad utrumq;
ptim. B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c.
Quod oſtendendum erat.

A... B..
C.........  D....
E.................F.....
G, 81. H, 16.
I, 243 K, 32.

## THEOR. 28. PROPOS. 30.

XXIX.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam uterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi uterque ſimul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi A B, B C. Dico & utrumque ſimul A C, pri-
mum eſſe & ad A B, & ad BC. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe
primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D.
Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B: h metietur quo-
h 12. pro- que reliquum B C. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cum eos
nun. metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum,
& contra hypotheſin. Quare A C, ad A B,
primus erit. Eodemque modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

A.......... B .....C
D-----

SED jam uterque A B, BC, ſimul, primus ſit ad unum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, BC, inter ſe primos eſſe. Si
enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D.
Quia igitur D, metitur A B, & BC: h metietur quoque D, numerum
i 10. pro- A C, ex A B, BC, compoſitum: Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe
nun. primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Sunt igitur A B, BC, inter ſe primi. Eodemque ar-

gu

*ni. Eodemque argumento oſtendemus A B, B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

### COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad unum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim A C, ad A B. primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit : per primam partem ejuſdem. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus , ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

*PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos præter unitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A ; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus igitur eſt A, ad B; Ac Propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A . . . . . B . . . . . . . .
C - - - -

## THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem : genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus , is etiam unum eorum , qui in principio, metietur.

*DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C , quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem unum ipſorum A, & B, ſi non utrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A ; metiatur verò ipſum C, toties, quot ſunt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; a erit ut D, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad E, quartum. b Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cùm eum non metiatur; c erunt D, & A, in ſua proportione minimi. d Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E ; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B : Eodemque modo ſi D , non metiatur*

A . . . B . . . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . . . . .
D . . . E . . . . . . . .

a 19. ſep.
b 31. ſep.
c 23. ſep.
d 21. ſep.

a 27. ſeptim. mi, a erit C factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeò geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

b 27. ſep. RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, b erit & C, factus ex A, in ſe, ad B: & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrumque B, D, primus erit; c 28. ſep. c Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B in F fiat H, cùm A, & C, primi ſint ad B, d 26. ſeptim. d erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur e 28. ſeptim. uterque A. E, ad utrumque B, F, primus eſt: e erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, f erit & G, ex ipſis f 26 ſeptim factus, ad B, primus: nec nõ & H, ad A. g 28. ſeptim. g Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cùm uterque A G, ad utrumq; B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

A ...          B ..
C .........    D ....
E ................F .....
G, 81.         H, 16.
I, 243         K, 32.

## XXIX. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam uterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi uterque ſimul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi AB, BC. Dico & utrumque ſimul AC, primum eſſe & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB: h 12. pronun. h metietur quoque reliquum BC. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

A......... B .....C
D -----

SED jam uterque AB, BC, ſimul, primus ſit ad unum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC: i 10. pronun. h metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compoſitum: Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe primi, cùm eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Sunt igitur AB, BC, inter ſe primi. Eodemque argu-

*ni. Eodemque argumento oſtendemus A B, B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

### COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad unum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim A C, ad A B. primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit : per primam partem ejuſdem. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxij.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

*PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos præter unitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A . . . . . B . . . . . . . . .
C - - - -

## THEOR. 30. PROPOS. 32. xxxiij.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus, is etiam unum eorum, qui in principio, metietur.

*DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem unum ipſorum A, & B, ſi non utrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur verò ipſum C, toties, quot ſunt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium;* a *erit ut D, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad E, quartum.* b *Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cùm eum non metiatur;* c *erunt D, & A, in ſua proportione minimi.* d *Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non meti-*

A . . . B . . . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . . . . .
D . . . E . . . . . . . .

a 19. ſep.
b 31. ſep.
c 23. ſep.
d 21. ſep.

*atur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus; vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad unum ipſorum A B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit uterque A, & B, ad D, primus. a Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cùm D, ponatur vel metiri ipſum G, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cùm non ſit primus ad utrumque.

a 26. ſeptimi.

A . . . B . . . .
C . . . . . . . .
D . . . . . . .

## PROBL. 31. PROPOS. 33.

XXX.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

*SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compoſitus: Si primus, cùm metiatur ipſum B; & B, ipſum A; b metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeò ad primum, qui cùm metiatur omnes præcedentes, c metietur quoque compoſitum A. Quod eſt propoſitum.*

b 11. pronun.

A . . . . . . . . . . . . .
B . . . . . C . . .

c 11. pronun.

ALITER. *Quia numerus A, compoſitus eſt, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A. d metietur quoque C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cùm B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus B. Omnem igi-*

A . . . . . . . . . . . . . . . .
B . . .         C - - -

d 11. pronun.

*Igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur.* Quod *erat demonſtrandum.*

## THEOR. 32. PROPOS. 34.

xxxj.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

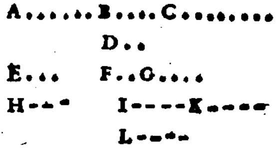
*SIT numerus quicunque* A. *Dico eum vel eſſe primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cùm enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus;* a *metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur, quod erat oſtendendum.*

a 33. ſep.

## PROBL. 3. PROPOS. 35.

xxxiiij.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.



*SINT quotcunque numeri A,*B,C, *habentes quaſcunque proportiones, ſive eadem ſit proportio A, ad B, qua B, ad* C, *ſive non; oporteatque totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam* A, B,C, *ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt, erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea quæ ad propoſ. 24. hujus lib. demonſtravimus. Si verò non ſunt inter ſe primi,* b *inventa ſit maxima eorum communis menſura numerus* D, *qui metiatur ipſos* A, B, C, *per numeros* E,F,G. Dico E,F,G, *minimos eſſe in proportionibus numerorum* A,B, C. *Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri* A, B, C, *ſic oſtendetur. Quoniam* D, *ipſos* A,B,C, *metitur per* E,F,G; c *fit, ut* D, *ipſos* E,F,G, *multiplicans faciat* A,B,C. *Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. hujus lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E,*F,G *quas numeri A,*B,C.

b 3. ſep.
c 9. pronun.

*QVOD verò* E,F,G, *ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſint minimi; erunt aliqui alii ipſis minores minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi* H, I,K; *qui quoniam ipſos* A, B, C, *metiuntur æquè, ut ad propoſ. 21. hujus lib. oſtendimus; metiantur eos per numerum* L. *Quo poſito,* d *fit, ut* L, *multiplicans numeros H,* I,K, *producat numeros* A,B, C; e *& viciſſim* L, *ipſos A,*B,C, *metiatur per* H,I,K. *Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit* A; *& H, ſecundus multiplicans* L, *tertium facit eundem* A; f *erit, ut E, primus ad H, ſecundum,*

d 9. pronū.
e 8. pronun
f 19. ſep.

*dum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, major, quàm H. Igitur & L, major erit, quam D: Atque adeo cum L, ipſos A, B, C, metiatur: non erit D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur erunt alii numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.*

## COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

## SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, ſive illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſive non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
I,8.
F,2. G,3.

CÆTERVM contingit interdum, unum numerorum E, F, G,

| | |
|---|---|
| A...B......C......... | A....B..C..... |
| D... | D.. |
| E. F.. G... | E.. F. G.... |

per hanc propoſ. inventorum eſſe unitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura uni ipſorũ A, B, C, æqualis eſt, ut ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inventos E, F, G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cùm minor numerus dari non poſſit, quàm unitas.

## PROBL. 4. PROPOS. 36.

xxxvij. DVOBVS numeris datis, reperire quem illi minimũ metiantur, numerum.

*SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primùm dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe mini-*

*minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eũ metiantur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A: a metietur A, ipſum C, per B: & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur.*

a 7. pronũ.

A....B.....
C.....................
D----------------
E-------F----

*Quòd autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C non eſt minimus: metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem: metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito. b tam ex A, in F, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, ſit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium, c erit, ut A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cùm ponantur primi inter ſe, d & ob id, in ſua proportione minimi) e æquè metientur ipſos F, & E: nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D: f erit C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipſum E, ut oſtenſum eſt: metietur & C, numerus numerum D, major minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C, atque adeò C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.*

b 9. pronun.
c 19. ſept
d 23. ſep.
e 21. ſep
f 17. ſep.

A.... B.......
C.. D...
E.............
F------------
G --- H----

SINT *deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. g Inveniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut ſint quatuor numeri proportionales; nimirum A, ad B, ut C, ad D. Quo poſito, h fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quòd enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cùm tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipſum E, producat: i metietur tàm A, quàm B, ipſum E. Quod verò E, ſit minimus omnium quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, K fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium, l erit, ut A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cùm ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, m metientur ipſos H, & G, æquè, nimirum C, ipſum H, & D, ipſum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F, n erit E, ad F, ut D, ad G: Ac propterea cùm D, metiatur ipſum G, ut oſtenſũ eſt, metietur etiã E, numerus numerum F, major mino-*

g 35. ſept.
h 19. ſep.
i 7. pronun
k 9. pronũ.
l 19. ſep.
m 21. ſeptim.
n 17. ſeptim.

*minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem, atque adeò E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.*

### COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, major minorem, & minor majorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, majorem, & ex B, majore in C, minorem eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

### SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35, hujus libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35

## xxxv. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

A..B...
C............F------D
E......

*METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D. ſitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur, ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, F D, minorem ſe, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum C F;* a *metietur quoque tam A, quàm B, ipſum C F. Itaque A, & B, cùm metiantur totum C D, & ablatum C F;* b *metientur & reliquum F D. Eſt autem F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 11. *pronun.*
b 12. *pronun.*

## xxxvj. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

c 36. *ſep.*

*SIT inveniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur.* c *Invento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipſum D, metiantur.*

Di-

*Dico numerum D, minimum inventum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt: A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immò, cùm A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur:* a *metietur quoque D, ipſum E, major minorem. Quod eſt abſurdum.* a 32. ſept.

A....B...C......
D...............
E---------

*SED jam C, non metiatur ipſum D, inventum.* b *Invento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur: Dico E, eſſe mimum, quem A, B, C, metiantur.* b 36. ſept. *Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cùm A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E;* c *metientur quoque A, & B, ipſum E.* c 11. pronun. *Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quòd autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur:* d *metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inventus, quem numeri A, & B, metiuntur: Atq; adeò, cum C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Immò cùm C, & D, metiantur ipſum F;* e *metiatur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D, major minorem, Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerũ ipſo E, minorem metientur: ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.* d 37. ſept. e 37. ſeptim.

A..B...C.....
D.....
E..............
F-- ----

## COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur: etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema hujus demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

## SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. hujus lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, ſitq; F, minimus, quem iidē A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiantur ejus partem D G, relin-

A..B...C....
D..............G----E
F...........

relinquatque numerum GE, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F. metiuntur; & F. ipſum D G, [a] metientur quoq; A, B, C, eundem D G; a 11. pronun. Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; *b* metientur & reliquum b 12. pronun. G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Metitur igitur F, ipſum D B.

Pari ratione: Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inveniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum eſt.

xxxvij.

## THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur: ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

*METIATVR numerum A. numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot unitates ſunt in numero C.*

A...............
B.... C...

*Quia igitur unitas ipſum C, & B. ipſum A, æquè metitur: a & viciſſim unitas* a 15. ſep. *æquè ipſum B, & C, ipſum A, metietur: atque adeò eadem pars erit unitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem unitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, ut ad defin. 2. hujus lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B. denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.*

## THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxxviij. SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT *numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cùm B, pars denominetur à C, ſit autem & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata: metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè.*

A................
B....C........

*d Viciſſim ergo & unitas* d 15 ſep. *ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.*

PROBL.

## PROBL. 6. PROPOS. 41. XXXIX.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

*SINT data partes A,B,C, Inveniendúſque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati, ſive qui ipſas denominent, D,E, F: a minimuſque, quem D,E,F, metiuntur, numerus G. Dico G, oſſe minimum, qui habeat datas partes A,B,C. Quod enim ejuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D,E,F, ipſum G, metiantur,* b *habebit G, partes à D,E,F, denominatas, hoc eſt, partes A,B,C, cum hæ denominentur à D,E,F. Quod verò G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A,B,C. Quia igitur H, habet partes A,B,C,* c *metientur ipſum numeri D,E,F, à partibus A,B,C, denominati: Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D,E,F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A,B,C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes: Quod faciendum erat.*

D.. A, Secunda a 38. ſep.
E... B, Tertia
F.... C, Quarta
G... .........
H-------- b 39. ſep.
c 40. ſep.

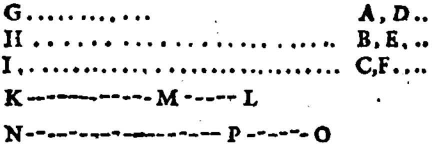
### SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D,E,F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à D,E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I,K,L; metietur æquè unitas ipſos I, K, L, & numeri D,E,F, ipſum G. d Viciſſim ergo metietur quoque unitas ipſos D,E,F, & numeri I,K,L, ipſum G, æquè, atque adeo unitas ipſorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipſius G. Cum ergo unitas ſit pars ipſorum D,E,F, ab ipſis denominata; erunt & I,K,L, ipſius G, partes denominatæ à D,E,F. d 15. ſep.

A, Secunda D.·. I......
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.........

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D,E,F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cujuſmodi ſunt I, K, L, à metientibus numeris D, E,F, denominatas.

IAM verò, ut Campanus ait, ſi inventus minimus numerus datas partes habens, duplicetur, triplicetur, &c. habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Invento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F, ſit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & ejus duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet à D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius



*a 11. pronun.* G; *a* metietur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. *b 39. ſeptim.* *b* Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit ſi fieri poteſt, alius KL, ipſo prior, qui nimirum major ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex KL, relinquatur ML, ipſo G, minor. Quoniam igitur KL, partes *c 40. ſept.* habet A, B, C; *c* metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. hujus lib. eundem KL: Metitur *d 12. pronun.* autem & G, ablatum KM, ſibi æqualem. *d* Igitur & reliquum ML, metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde *H*, ſecundus eſt hujuſmodi partes habens.

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui videlicet major ſit, quam H, duplus, minor verò quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex NO, relinquatur PO, minor ipſo G. Quia igitur NO, partes habet *e 40. ſept.* A, B, C, *e* metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propoſ. 38. hujus lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum NP, ablatum ipſi H, duplo æqualem. *f 12. pronun.* *f* Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem major. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas:

datas: Ac propterea I tertius eſt illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipſius G, quartus erit: & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C: inveniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, ut pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F: Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . .    E . . .    F . . . .
G . . . . . . . . . . . .
H . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. Vnitas
I - - - - - - - - - - - - - - -
K - - - - - - - - - - -
L - - - - - - - - -
M - - - -

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H: erit G, toties in H, quoties unitas in D: Eſt autem unitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata: Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum unitatem. Quare numerus inventus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdẽ partes eodem ordine, ita ut K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata, Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata: erit K, toties in I, quoties unitas in *D*;[a] Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K: & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I:[b] erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K: erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in unitatem, & M, fiant F, & L: erit, ut F, ad L, ita unitas ad M. Quoniam igitur eſt, ut H, ad I, ita G, ad K: & ut G, ad K, ita F, ad L: & ut F, ad L, ita unitas ad M: Erit per lemma

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

[a] 15. defin.

[b] 17. ſepti.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

propoſ. 14. hujus lib. ut H, ad I, ita unitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, major. Vnitas igitur major quoque erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H. habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitũ.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2.3,4.5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam: & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, ut manifeſtum eſt.

QVOD ſi numerum H, inventum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c, qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

## FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

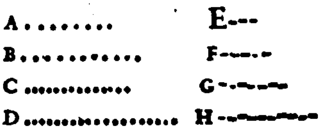
* * *

# EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

### THEOR. 1. PROPOS. 1.

j. SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

*NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico* A, B, C, D, *minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alii ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt* A, B, C, D, *& alii illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione* a *erit, ex æqualitate, ut A, ad D, ita E, ad H:* b*Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur.* a 14. ſep.
c *Igitur tam A, ipſum E, quam D, ipſum H, æquè metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis* A, B, C, *D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt: Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.* b 23. ſep. c 21. ſep.



### SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B,

C D,

A.... E---

B........ F-----

C......... G------

D........... H ------

C.D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſive A,B,C,D, ſint continuè proportionales, ut vult Euclides, ſive non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diverſæ ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

## ij. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque juſſerit quiſpiam, in data ratione.

*SINT minimi numeri data rationis A, & B, oporteatque invenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſe ipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C,D,E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, hoc eſt, ſit ut A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D: a erit ut A, ad B, ita C, ad D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E: b erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales ſunt C,D,E, continuè in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati ſunt ex A, & B, in ſe ipſos: c ſunt autem A, & B, inter ſe primi, quod minimi ſint in ſua proportione: d Erunt & C, E, extremi, inter ſe primi. e Quare C, D, E, minimi ſunt in ratione A, ad B.*

A.. B...

C... D...... E.........

F, 8 G, 12. H, 18. I, 27

K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

a 17. ſeptim

b 17. ſep.

c 24. ſeptim.

d 29. ſept.

e 4. oct.

*IAM verò ex A, in tres inventos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos eſſe in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A, ad B, ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, numeri F, G, H, eaſdem proportiones, quas C, D, E, hoc eſt, quam habet A, ad B. Rurſus quia A, & B, ipſum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, f erit quoque ut A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi ſint, ita perſpicuum fiet. g Quoniam A, & B, minimi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factique ſunt C, & E, ex A, & B, in ſe ipſos: Item procreati ſunt F, & I ex A, B, in C, E: nimirum F, ex A, in C, & I ex B, in E,*

f 18. ſep.

g 24. ſep.

*in E, a erunt & F, I, extremi, inter ſe primi. b Quare F, G, H, I, in ſua proportione, quæ eſt A, ad B, minimi ſunt.* a 29. ſep. b 1. oct.

*NON aliter, ſi ex A, in quatuor inventos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O: erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inveniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.*

## SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inventos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, c numeri F, G, eandem rationem habebunt quam A, B: quòd A, B, multiplicantes C, ipſos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propoſ. 18. hujus lib. demonſtravimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B: quòd B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi ſint, oſtendetur, ut prius. c 18. ſep.

NON aliter ſi ex *B*, in quatuor inventos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K: erunt K, L, *M*, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inveniemus ſex, ſeptem, octo, &c.

A.. B...
C.... D...... E........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54 O, 81.

Itaque ſive A, multiplicetur in omnes inventos, & B, in ultimum: ſive B, in omnes inventos, & A, in primum: producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtravit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, *D*, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

## COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continuè proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea uterque ſit æqualiter æqualis æqualiter: ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alii ſub aliis denominationibus,

quæ

quæ in Algebra ſolent explicari : Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inventis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſvis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus utcunque propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inveniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inventis, non eſſent inventi, minimi, quod eſt cõtra hanc propoſ. Si vero dati majores eſſent inventis, nõ eſſent illi dati, minimi, quod eſt cõtra hypotheſin.

D,2. E,3.

F,4. G,6 H,9.

Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales : ſumptiſque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ 35. lib 7 inveniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inventis F, G, H. non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cum ſit, ut A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, ut A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis : Eademque ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H : ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademque ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quod ſi A, dicatur minor quam F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quam G, H Quare F, G, H, minimi non ſunt, quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur major, quam F: erunt eodem argumento & B C, majores, quam G. H, atque idcirco A, B, C, minimi non ſunt, quod eſt contra hypotheſin. Cum ergo A, minor non ſit, aut major, quam F: æqualis omnino erit, ideoque ut oſtenſum eſt, & B C, ipſis G, H, æquales erunt Quod eſt propoſitum.

## COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inventorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ 29. lib. 7. qvemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

## COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione: quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros, ut in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medii ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D : item L, M, N, medii ex A, in G, H, I, vel ex

B, in F,

I,in F,G,H, ut ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

## SCHOLIVM II.

Quoniam vero tam numeri A,C,F,K, quam B,E,I,O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt, ab unitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, ut clarius demonſtrabitur propoſ. 9. hujus lib. fit ut extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint ultimi tot continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe ultimos trium numerorum continue proportionalium ab unitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe ultimos quatuor numerorum ab unitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet invenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab unitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inventis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab unitate tot numeri continue proportionales in proportione, cujus denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inveniendi proponuntur. Nam ultimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continuè proportionalium inveniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inventis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab unitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denomiatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum ultimus 128. erit primus octo numerorum inveniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. ut hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi majores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis eſt ratio.

Boetius autem, & alii regulam hanc ita explicant, ut & nos 5. lib. in tractatione proportionum declaravimus, ponantur tot numeri continue ab unitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cujus in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet invenire in data proportione. Nam ultimus numerus erit primus inveniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur 8. numeri minimi in proportione ſeſquialtera ſumendi ſunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirũ denominantur à denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuj⁹ mentio fit in proport. ſeſquialtera, hoc eſt, à 6. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erunt quinq; numeri ab unitate quintupli: ut hic 1. 5. 25. 125. 626. Nam 625. eſt primus quinq; numerorum in proportione ſeſquiquinta, ut hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. *Atque* ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inveniri (quod nimirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. *in ultimo exemplo* alius numerus invenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neque in priori exemplo poſt 1287. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem hujus rei eſt, quod extremi hac arte inventi ſint inter ſe primi, ut ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, ut ultimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, ut primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. demonſtrabitur.

## iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: illorum extremi ſunt inter ſe primi.

*Sint numeri* A, B, C, D, *minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe.* In*venian*tur *enim duo* E, F, *minimi in ratione* A, *ad* B, *vel* B, *ad* C, *vel* C, *ad* D. Deinde *juxta viam præcedentis problematis tres minimi* G, *H, I, in eadem ratione, nec non quatuor* K, *L, M*, N, *& ſic deinceps, donec multitudo* K, L, *M*, N, *æqualis ſit multitudini* A, B, *C*, D. *Quoniam igitur* A, B, C, D, *minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt* K, *L, M*, N, *illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi* K, *&* D, *ipſi N. Id quod nos* Geometrice *demonſtravimus ad finem coroll* 1. *ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll.* 2. *propoſ. præcedentis* K, *& N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt* A, *& D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.*

*A*, 8, B, 12. *C*, 18. D, 27.
*E*, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. *I*, 9.
K, 8. *L*, 12. *M*, 18. *N*, 27.

### SCHOLIVM.

Hæc propoſitio intelligẽda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, ut ex ejus demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inve-

inveniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totius minimi in eadem proportione. Imo ſi diverſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diverſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri *6*. *10*. 13. *18*. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi *6*. & *18*. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc theorema primi eſt converſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſũt in ſua proportione, ut conſtat ex *1*. theor. Et viciſſim numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, veluti hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat, ad numeros non continue proportionales, converti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, ut ex ſcholio propoſ. hujus lib. liquet; Tamen non ſemper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, ut manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. *13*. *18*.

## PROBL. 2. PROPOS. 4. iv.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

*Sint primùm data duæ rationes in minimis numeris* A, *ad* B, & C, *ad* D; *oporteatque invenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus.* a *Invento numero* E, *minimo, quem metiantur* B, & C, *ſecundus & tertius; quoties* B, *ipſum* E, *metitur, toties* A, *metiatur ipſum* F; & *quoties* C, *eundem* E, *toties ipſum* G, *metiatur* D. Dico F, E, G, *minimos eſſe in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita oſtendemus. Quoniam* *A*, & B, *æque metiuntur ipſos* F, & E, *hoc eſt, per eundem numerum, metiantur per H. Quo poſito,* b A, & B, *multiplicantes ipſum H, producent* F, & E, c *Quare erit, ut* A, *ad* B, *ita* F, *ad* E. *Eadem ratione, cum* C, & D, *æque metiantur ipſos* E, & G; *erit ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* G. *Igitur* F, E, G, *deinceps proportionales ſunt in rationibus* A, *ad* B, & C, *ad* D. *Quod autem minimi ſint, ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi, erunt aliqui illis minores, ſinguli ſingulis, in iiſdem rationibus: ſint, ſi fieri poteſt,* I, K, L. *Quia igitur* A, & B, *minimi ſunt in ſua pro-*

A, *6*. B, *5*. C, 4. D, 3.
*H*, 4. F, 24. E, 20. *G*, 15.
I ------ K ------ L ------

a 36. ſept.

b 9. pronun.

c 18. ſept.

A,6. ,B,5. C,4. D,3.
H,4. F,24. E. 20. G,15.
I------K------L-----

*proportione : a ipſi æquè metientur I & K, in eadem proportione exiſtentes, nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C,* b 37. ſep.
*ipſum K, metiantur, b metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod eſt abſurdum. Non erunt igitur alii numeri minores ipſis F,E,G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi, F,E,G, minimi ſunt in datis rationibus.*

*Sint deinde data tres rationes in numeris minimis A, ad B, C, ad D: & E, ad F; inveniendiq; ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. c Invento rurſum numero G, minimo,* c 36. ſep.
*quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius: quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H: & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primum; & quoties E, ipſum I metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H,G,I,K, minimis eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus mi-*
d 21. ſep. *nores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt, L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; d ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metian-*
e 37. ſep. *tur; e metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem major. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alii numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H,G,I,K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.*

A,6.B,5. C,4. D,3. E, 5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L ----- M------ N-----O------

*Sed jam E, non metiatur ipſum I. f Invento ergo numero K, mi-*
f 36. ſep. *nimo, quem E, & I. metiantur: quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L: & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M,L,K,N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H,G,I, ipſos M,L,K, æque metiantur:*

*tur; erit ut ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad* L, *&* *ut* G, *ad I, ita* L, *ad* K: *Eſt autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad* B: *& ut* G, *ad I, ita* C, *ad* D, *quod &* A, B, *ipſos H,* G: *&* C, *D, ipſos* G, *I, metiantur aque. Igitur ut* A, *ad* B, *ita M, ad* L, *& ut* C, *ad D, ita* K, *ad* K. *Atque ut* E *ad* F, *ita quoque eſt* K, *ad* N, *cum* E, F, *aque ipſos* K, *N, metiantur. Sunt ergo M.* L, K, N, *deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namq; non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem* O, P, *Q*, R, *ſi fieri poteſt. Quoniam ergo* A, *B, in ſua proportione minimi ſunt,* a *ipſi ſique metientur* O, P, *in eadem ratione exiſtentes, nimirum* B, *conſequens conſequentem* P. *Eodem argumento* C, D, *ipſos* P, *Q. metientur aque, videlicet antecedens* C, *antecedentem* P: *Atque adeo cum* B, *&* C, *ipſum* P, *metiantur,* b *metietur quoque* G, *minimus, quem metiuntur* B *&* C, *eundem P. Quia vero oſtenſum eſt, eſſe ut* G, *ad* I, *ita* L, *ad* K, *hoc eſt, ita P, ad* Q, *erit permutando, ut* G, *ad* P, *ita I, ad* Q. *Atque idcirco, cum metiatur* G, *ipſum P, metietur & I, ipſum* Q. *Metitur autem &* E, *eundem* Q; c *quod* E F, *in ſua proportione minimi aquo metiantur* Q R, *ejuſdem rationis, nimirum antecedens* E, *antecedentem* Q. *Ergo cum metiantur I, E, ipſum* Q: d *metietur etiam* K, *quem minimum metiuntur I, E, eundem* Q, *major minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alii numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam* M, L, K, N; *proptereaque ipſi* M, L, K, N, *minimi ſunt.*

A, 9. B, 5. C, 4. *D*, 3. E, 2. F, 7.
*H*, 24. G, 20. *I*, 15.
*M*, 48. L, 40. K, 30. *N*, 105.
O ----- P---- Q---- R-----

a 21. ſep
b 37. ſeptim.
c 12. ſept.
d 37. ſeptim.

*Quod ſi quatuor rationes data fuerint: inveniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, ut nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis* S, *ad* T: *inveniemus primum M, L,* K, *N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad* B: C, *ad* D: *& E, ad F.* Deinde *ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus* O, *quem T, toties metiatur, quoties* S, *ipſum N, metitur.* Nam *M, E, K, N,* O, *erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi.*

*A*, 6. *B*, 5. C, 4. D, 3. *E*, 2. *F*, 7. *S*, 3. *T*, 2.
*M*. 48. *L*, 50. K, 30. *N*, 105. O, 70.

*Si vero S ipſum N, non metiatur,* e *ſumemus O, quē*

A, 6. B, 5. C, 4. *D*, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
*M*, 48. *L*, 40. K, 30. N, 105.
O, 144. Q. 120. *P*, 90. O, 315. *V*, 70.

e 36. ſep.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

S, & N, minimum metiantur. E quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P, & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipſum, V, metiatur. His enim peractis, erunt R Q P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

## SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquę datę fuerint in numeris nō minimis, abſolvemus nihilominus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inventionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, ut ex demonſtratione manifeſtum eſt.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita ut quilibet intermedius ſit & antecedens & conſequens, licet proportiones ſint diverſæ, quemadmodum ibi.

Porro inventis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus ſi ii multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alii in eiſdem rationibus deinceps proportionales, ut conſtat ex iis quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtravimus.

## V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

A, 24. B, 48.
G, 18
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; poſterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita ut latera unius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G: a erit A, ad G, ut C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D & F, fecit G, & B, erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A,

a 17. ſeptim.

*nA, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, a Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.*

a 27.defin.

*Eodem argumento oſtendemus proportionem A, ad B, compoſitum eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D & F, multiplicatione. Cũ enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, b erit A ad G, ut C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, c erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. c cum ergo proportio A, ad B componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.*

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

b 17.ſep.
c 27.defin.

## THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſpiam ullum metietur.

*Sint continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, ſelundum. Dico neque alium quenquam illorum ullum metiri. Quod enim nullus proxime inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit ut A, ad B, ita B, ad C; C ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur, neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero noc alius quiſpiam illorum ullum metiatur, ſic demonſtrabimus. d Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex aquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt ut A, ad B, ita F, ad G, non metitur autem A, ipſum B: neque F, ipſum G, metietur: Ac propterea F, non erit unitas, alias F, ipſum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. e Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit unitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id, neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium à ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

d 2. oct.
e 3.octavi.

*A quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales; &c. Quod erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

Si majores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

*S*i ſint quotcunque numeri deinceps proportionales primus autem ſecundi non ſit multiplex , neque alius quiſquam ullius multiplex erit.

A,81. B,54. C.36. *D*,24. E, 16.

Sint enim continue proportionales A,B,C,D,E ;& A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius eſſe multiplicem. Quod enim nullius proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nã cum ſit, ut *A*, ad B, ita *B*, ad C; C, ad *D*, & D ad E. non ſit autem A, ipſius B, multiplex ; neque B , ipſius C ; neque C, ipſius D, neque D , ipſius E , multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum ullius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam *D*, ipſius E, non eſt multiplex : non metietur è contrario E , ipſum *D*, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E,D,C,B, A : (Nam cum ſit D, ad E, ut C, ad *D* : B, ad C, & A, ad B: erit convertendo E , ad D ut D ad C : C, ad B : & B, ad *A*) Et *E*. primus ſecundum D. non metitur : a neque alius quiſquam illorum ullum metietur. Quare è
a 6. oct. contrario, ſi majores ad minores referantur, neque quiſquam illorũ ullius erit multiplex per ea, quæ in defin, 5. lib. 7. ſcripſimus.

Sed & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur ; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cujuslibet ſequentium multiplex erit.

A,3. B,6. C,12. D,24. E,48.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C,D,E : & primus A , ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cum ſit, ut *A*, ad B , ita B ad C : C, ad D : & D, ad E : metiatur autem A, ipſum B ; & B, ipſum C : & C, ipſum D : & D ipſum *E*, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium meti-

metiatur, nempe B, ipſos *D*, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D, *a* metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur, *b* metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis. a 11. *pronun.* b 11. *pronun.*

Sed jam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cujuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit ut A, ad B. ita B, ad C; & C, ad D. & D, ad E: ſit autem A; ipſius B, multiplex: erit & B, ipſius C, & C ipſius *D*, & *D*, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cujuslibet proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia *D*, ipſius E, eſt multiplex,

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

metietur è contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inverſam rationem E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorũ quemlibet ſequentium metietur, ut demonſtratum eſt. Ac propterea è contrario, ſi majores ad minores referantur, & quilibet cujuſque ſequentium multiplex erit.

Convertemus etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema quod primo loco in ſcholio demonſtravimus, hac ratione.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur: neque primus ſecundum metietur: Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neque primus ſecundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A, B, C, D, E, & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, ſecundum. Si enim *A*, primus ſecundum *B*, dicatur metiri: metietur quoque per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neq; alius quiſquam ullum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A, 16. B, 24. *C*, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo B, ſit multiplex. Dico neque *A*, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi, multiplex quoque erit quicunque alius cujuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate hujus ſcholii demonſtravimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam ullius à ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius *B*, multiplex erit.

*A*, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

## THEOR. 5. PROPOS. 7.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

*Sint deinceps proportionales* A, B, C, D, *E*, *&* A, *primus extremum* B, *metiatur*. Dico *&* A, *primum metiri* B, *ſecundum. Si enim* A, *ipſum* B, *non dicatur metiri*: a *neque alius quiſquam ullum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri* E. *Igitur A, primus* B, *ſecundum metietur*. *Atque idcirco ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 6. oct. A, 3. B, 6, C, 12. D, 24. E, 48.

### SCHOLIVM.

Vt theorema quod ſecundo loco in ſcholio præcedentis propoſ. demonſtravimus, convertamus, amplificabimus hanc propoſitionem hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſpiam cujuslibet à ſecundo ſit multiplex, primus quoque ſecundi multiplex erit.

Quod eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex, neque alius quiſquam ullum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 9. & 2. theoremate ſcholii præcedentis. Quod eſt contra hypotheſin.

## THEOR. 6. PROPOS. 8.

viij. Si inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

*Cadant inter duos numeros* A, B, *medii proportionales continue* C, D: *ſitque ut A, ad* B, *ita E, ad* F. *Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, &* F, *quot inter* A, *&* B. *Sumptis enim totidem numeris* G, H, I, K, *minimis in ratione* A, *ad* C, *quot ſunt numeri* A, C, D, B: *erit ex æquo ut ut* A, *ad* B, *atque adeo ut* E, *ad* F, *ita* G, *ad* K. b *Quare cum* G, *&* K, *inter*

A, 24. C, 36. D, 54. *B*, 81.
*G*, 8. *H*, 12. *I*, 18. K, 27.
*E*, 31. L, 48. *M*, 72. F, 108.

*inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorum, a ac propterea in ſua proportione minimi: b æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. c Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F. producunt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtravimus. A, G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B, tot cadent medii proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A. 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C. 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

a 23. *ſept.*
b 21. *ſept.*
c 9. *pronun.*

## SCHOLIVM.

Non ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K. Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

Eadem hæc propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, unitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit unitas exiſtentibus E, & F, numerus, ut in exemplis apparet.

Conſtat etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cujuſvis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum mediū proportionalem: cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem: ſuperparticularis vero inter numeros, ſola unitate differentes: ſuperbipartientes deniq; inter numeros, quorum differentia eſt binarius ſi inter duos numeros duplę proportionis vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis: caderet quoq; per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & unitatē: vel inter numeros ſola unitate differentes vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdē cum illis proportiones habent, quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neq; inter binarium & unitatem, neq, inter duos numeros ſola unitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abeſt, ut aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interjicitur ſolum numerus qui ab utroque unitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, (ſive C D, unitas ſit, & A B, ternarius ſive non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor unitate quã A B, major vero quam C D, unitate quoque. Dico E F, non eſſe medium proportionalẽ inter A *B*, C D. Si enim dicatur eſſe A B, ad E F, ut *E* F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, æquali, ut reliqua ſit unitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi *C* D, æquali, ut relinquatur etiam unitas H F; erit quoque ut A *B*, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cum A G. *E* H, ipſis E F, C D, æquales ſint ex conſtructione Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc eſt unitas ad unitatem, Vt totus A *B*; ad totum E F, major ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A *B*, & C D.

A . . G . B | A . . . . . . G . B
E . H . F | E . . . . . . H . F
C . D | C . . . . D

Itaque inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt, quod fieri non poſſe, proxime demonſtravimus.

Pari ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & unitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita ut ſit *A* B, ad D, ut D, ad C: Et convertendo C, ad D, ut D, ad A *B*. Et quoniam unitas *C*, metitur *D*: metietur quoque D, ipſum A *B*. At binarius, vel ternarius *D*, metitur quoque ſenarium A E. Igitur D, metitur totum A E,
a 11. pronũ & ablatum A E *a* ac proinde & D, numerus metietur reliquam unitatem B E. Quod eſt abſurdum.

*A* . . . . . . B . E
D . .  D . . .
C .

Cadat deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium A B, & unitatem *C*, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, ut prius, *D*, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur *D*,
b 11. pronũ metitur totum A B, & ablatum A E: *b* ac proinde & D, numerus reliquam unitatem E B, metietur. Quod eſt abſurdum.

A . . . . E . *B*
D . . . .
C .

Ex quibus fit, neque illud intervallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, ut *D*iapaſon, vel, ut vulgo dicitur, octava neque illud, quod in ſeſquioctava proportione reperitur, cujuſmodi eſt

eſt Tonus,ſeu vulgo,ſecunda, biſariam poſſe ſecari,hoc eſt, in duas proportiones æquales illa enim proportio biſariam(quod ad propoſitū attinet) ſecari dicitur,inter cujus terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo 24.2.6. Idcirco proportio quadrupla biſariam diviſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctava, non cadere medium numerum proportionalem, perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum,biſariam ſecari non poſſe. Vnde Diapaſon prima ſui diviſione in Diapenten,& Diateſſaron, quorum intervallorum illud in proportione ſeſquialtera , hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit,apud Muſicos ſecatur,ut hic apparet,2.3.4. Eſt enim hic proportio dupla diviſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam,tanquam in maximas ſui partes inter ſe inęquales. Ita quoq; Tonus in duo ſemitonia , quorum alterum majus , alterum minus dicitur ſecari ſolet. Sed de his plura apud Muſicos reperies.

Rurſum ex his demonſtrari poteſt,proportionem diametri cujusvis quadrati ad latus ejuſdem numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea,quæ ad propoſ.47. lib. 1. demonſtravimus,quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti,quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit ut proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametris ad latus. Cum ergo illa proportio,cujus duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat , quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat,qui illam biſariam ſecet, ut oſtendimus, manifeſtum eſt,nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe,ſed eſſe irrationalem,ſeu,quod idem eſt diametrum eſſe lateri incommenſurabilem,qua de re plura ad 9.& ultimam propoſ. lib. 10.ſcribemus.

## THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

Si duo numeri ſint inter ſe primi , & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum,ac unitatem medii continua proportione cadent.

*Cadant inter numeros A B, inter ſe primos medii continue proportionales* C,D. *Dico totidem cadere continue proportionales inter unitatem , & A, nec non inter unitatem, &* B,*quot inter A, & B, cadunt. Inventis enim duobus numeris* E,*&* F, *minimis in ratione* A , *ad C,* a *ſumantur in eadem proportione tres minimi G,H,I,* & *quatuor* K,*L,M,N, & ſic deinceps , donec multitudo aſſumptorum* a 2. oct.

rum

A,8. C,12. D,18. B,27.
*Vnitas.*
1.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

*rum æqualis ſit multitudini A,C, D,* B. *Quoniam ergo* A, B, *extremi inter ſe primi ſunt;* a *erunt A,* C, D, B, *minimi in proportione* E, *ad* F. *Sunt autem & totidem* K, L, *M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur* K, L, *M, N, ipſis* A,C,D,B, *æquales ſunt ſinguli ſingulis, ut* K, *ipſi A, &* N, *ipſi* B, *ne minores minimis dentur. Quia vero, ut conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. hujus lib. E, ſeipſum multiplicans produxit* G, *multiplicans vero ipſum*G, *fecit* K, b *metietur E, ipſum* G, *per E, &* G, *ipſum* K, *per eundem* E: c Metitur *autem & unitas ipſum* E, *per* E. *Æquè igitur metietur unitas ipſum E, &* E, *ipſum* G, *&* G, *ipſum* K; Ac *propterea eadem pars erit unitas ipſius* E, *&* E, *ipſius* G, *&* G, *ipſius* K. d *Proportionales ergo ſunt deinceps, unitas, & numeri,* E,G,K. *Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2. hujus lib. quod* F, *ſeipſum, multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, faciat* N: e *metietur* F, *ipſum* L *per F, & I, ipſum* N, *per eundem* F: f *Metitur autem & unitas ipſum* F, *per* F. *Æque igitur metietur unitas ipſum F, & F, ipſum I, & I, ipſum* N: *Ac propterea eadem pars erit unitas ipſius* F. *&* F, *ipſius I, & I, ipſius* N. g *Proportionales ergo ſunt continue, unitas, & numeri F,L,N;* Ac *proinde cum tam multitudo* E, G,K, *quam F,I,N, una cum unitate, æqualis ſit multitudini* K, *L, M,* N, *vel* A,C,*D*,B, (*ut perſpicuum eſt ex propoſ.* 2. *hujus lib. Nam duo* E, *F, ſunt ſecundi ab unitate: & tres* G,H,*I, tertii: & quatuor* K,L,M,*N, quarti, &c.*) *tot cadent medii continue proportionales numeri inter unitatem, &* K, *numerum, ſeu A, ſibi æqualem: & inter unitatem, & numerum N, ſive* B, *ſibi æqualem, quot inter numeros* A,B. *Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medii, &c. Quod oſtendendum erat.*

a 1. oct.
b 7. pronū.
c 5. pronun.
d 20. defin.
e 7. pronun.
f 5. pronun.
g 20. defin.

## SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt, numeros qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque unitatem habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C, hoc eſt, quas habent E, & F, numeri ad unitatem, id quod in ſcholio propoſ. 2. hujus lib. quoque aſſeruimus.

Conſtat etiam ex demonſtratione hac, ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps: omnes productos eſſe continue proportionales ab unitate. Oſtenſum enim eſt & E,G,K, & F, I, N, qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ. 2. hujus lib. continue eſſe proportionales ab unitate.

THE-

## THEOR. 8. PROPOS. 10. x.

**Si inter duos numeros, & unitatem continue proportionales ceciderint numeri: quot inter utrumque ipſorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medii continua proportione cadent.**

*Cadant inter utrumque numerorum* A,B, *& unitatem, quotcunque numeri medii continue proportionales: inter A, quidem & unitatem, numeri* C,D,E *: At vero inter B, & unitatem, numeri* F,G, H, *illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrumque A,B, & unitatem. Multiplicantes enim ſe mutuo* C, *& F, faciant I.* Deinde C, *multiplicans I, &* G, *faciat* K, *&* L. *Rurſus idem C, multiplicans* K, L, *&* H, *faciat* M, N, *& O, totidem inter A, & B, quot ſunt inter utrumque A, & B, & unitatem. Quoniam igitur eſt, ut unitas ad* C, *ita* C, *ad* D, D, *ad* E; *&* E, *ad* A: *æque metietur unitas ipſum* C, *&* C, *ipſum* D, *&* D, *ipſum* E, *&* E, *ipſum* A: a *Metitur autem unitas ipſum* C, *per* C. *Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur.* b *Quare* C, *ſeipſum multiplicans fecit* D : *multiplicans autem* D, *fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione* F. *ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit* B. *Itaq; cum* C, *multiplicans* C, *& F, fecerit* D, *& I:* c *erit ut* C, *ad F, ita* D, *ad* I. *Similiter, quia* F, *multiplicans* C, *& F, fecit I, &* G : d *erit ut* C, *ad* F. *ita I, ad* G. *Sunt igitur tres* D, *I,* G, *continue proportionales in ratione* C, *ad* F. *Rurſus quia* C, *multiplicans* D, *I,* G, *fecit* E, K, *L: habebunt* E, K, *L, per ea, quæ ad propoſ.* 18. *lib.* 7. *oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam* D, *I,* G, *hoc eſt, quam* C, *ad* F. *Eodem modo, quia* C, *& F, multiplicantes* G, *fecerunt L, & H:* e *erit ut* C, *ad* F, *ita L, ad* H. *Quatuor ergo numeri* E, K, *L, H, continue proportionales ſunt in ratione* C, *ad* F. *Poſtremo, quia* C, *multiplicans* E, K, *L, H, fecit* A, M, *N,* O, *habebunt, ex iis, quæ à nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A,* M, *N,* O, *eandem continuam proportionem, quam E,* K, *L, H, hoc eſt, quam* C, *ad* F. *Eadem ratione, cum* C, *&* F, *multiplicantes H, fecerint* O, *&* B, f *erit, ut* C, *ad* F, *ita* O, *ad* B. *Quinque igitur numeri A,* M, *N,* O, B, *continue proportionales ſunt in ratione* C, *ad* F : *Ac proinde tot medii proportionales cadant inter A, & B, quot inter* A, *vel*

*A*, 81. M, 162. *N*, 324. O, 648. B, 1296.
*E*, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. *I*, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
*Vnitas.*

a 5. pronun.
b 9. pronun.
c 17. sep.
d 17. sept.
e 18. sep.
f 18. sep.

*A, vel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C; D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Ex his conſtat, numeros, qui medii proportionales cadunt inter *A*, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales ſunt C, & F, habent.

Patet etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, ſecundum ab unitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, *D*, E, A, continue proportionales ſunt ab unitate: D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tũ ad ea quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium ſumentes.

## I.

Si ſint ab unitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertii ab unitate proportionem duplicatam ejus, quam habent ſecundi ab unitate; quarti vero ejuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps uno amplius.

Sint numeri A, B, C, *D*, continuo ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alii E, F, G, H. Dico proportionẽ B, tertii ab unitate ad F, ab eadem tertium duplicatam eſſe ejus, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter utrumque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis, inter *B*, quidem & unitatem, numerus A: At inter F, & unitatem numerus E: *a* cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo per ſcholiũ hujus propoſ. in ratione *A*, ad E. Cadat igitur, & ſit I.

*a 10. 8.* *D*, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64,
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

Eodem modo cadent inter C, & G, duo medii in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L: quot nimirum cadunt inter utrumque C, G, & unitatẽ. Nec non inter DH, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione

tione A,ad E proportionales. Quoniam igitur ex defin. B,ad F, proportionem habet duplicatam ejus,quam habet B,ad I, eſt autem ut B,ad I,ita,A,ad E; Habebit quoque B,ad F,rationem duplicatam ejus,quam habet A,ad E. Non aliter habebit C,ad G, rationem triplicatam rationis A,ad E; quia ratio C ad G,triplicata eſt proportionis C,ad K; & eſt ut C,ad K,ita A,ad E, Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A,ad E,& ſic de cæteris.

Hoc idem demonſtrabimus ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

## II.

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium ; Habebunt tertii ab illo numero proportionem duplicatam ejus, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero ejuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps uno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B,C,D,E,& ab eodē totidem alii F,G,H,I. Dico rurſum, proportionis B,ad F, eſſe duplicatam proportionem C,ad G; & D,ad H, triplicatam : & E, ad I quadruplicatam. Ex A,in ſe fiat K,& ex A,in K,fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B,in N,fiat O, & ex B,in O, fiat P. Poſtremo ex F,quoque in ſe fiat Q, & ex F in Q,fiat R,& ex F,in R, fiat C. Quibus peractis: erunt A, K; L,M continue proportionales ab unitate, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 9. hujus lib. Eademque ratione erunt B, N,O,P, ab unitate proportionales; nec non & F Q R S. Quia igitur ratio N,ad K, duplicata eſt rationis B,ad A, ex theoremate 1. hujus ſcholii: Eſt autem, ex defin. ejuſdem rationis B,ad A, duplicata quoque ratio C,ad A; Erit C,ad A, ut N,ad K. Eodem modo erit A, ad G, ut K,ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q duplicata rationis A,ad F; & ejuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C,ad A, ut N,ad K; & A,ad G, ut K, ad Q; erit ex æquo C,ad G, ut N,ad Q: Atqui ratio N,ad Q, duplicata eſt rationis B,ad F, ex theoremate 1. hujus ſcholii, quod tam B,N, quam F Q, ſint ab unitate continue proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. hujus lib. Igitur & ratio C,ad G, duplicata eſt rationis B, ad F, Eiſdem argu-

E,162. I,512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G,32.
B, 6. F,8.
A, 2.
N,36. K,4. Q,64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P,1296. M,16. S,4096.

E,81. I,1.
D, 4, Vnitas. H,2.
C,36. 1. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

gumentis erit ratio D,ad H triplicata rationis B , ad F. Nam ratio O,ad L,ex 1.theoremate,triplicata eſt rationis B,ad A ; quod tam B, N, O,quam A,K,L,ſint ab unitate continuè proportionales,ex ſcholio propoſ.9. hujus lib. & ejuſdem triplicata eſt ratio D,ad A, ex defin. Igitur eſt D,ad A,ut O, ad L. Eodemque modo eſt A,ad H,ut L,ad R : quod utraque proportio triplicata proportionis A,ad F: proportio quidem A,ad H , ex defin. ita proportio L,ad R,ex 1. theor. hujus ſcholii,propterea quod tam A, K,L,quam F,Q.R, continue proportionales ſunt ab unitate , ex ſcholio propoſ.9. hujus lib. Eſt ergo ex æquo D,ad H, ut O, ad R. Sed ratio O,ad R,triplicata eſt rationis B,ad F ; ex 1. theor. eo quod tam B,N,O,quam F,Q.R, ſunt continue proportionales ab unitate ex ſcholio propoſ.9. hujus lib. Igitur & ratio D,ad H, triplicata eſt ejuſdem rationis B,ad F. non ſecus demonſtrabimus rationem E,ad I,eſſe quadruplicatam rationis B,ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri unius ordinis deſinant in unitatem,ut ex ſecunda figura eſt manifeſtum,in qua I, eſt unitas.

Cæterum theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus , lib. 14. propoſ.28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis univerſalem, hoc modo.

## III.

Si inter duos numeros , & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quod inter utrumque ipſorum , & aſſumptum deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medii continua proportione cadent.

Cadant inter utrumque numerorum A , B , & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales,inter A, quidem & C, numeri D,E,F, inter B , vero & C, totidem numeri G. H;I. Dico tot quoq; medios continue proportionales cadere inter A & B,quot inter A,& C,& inter B, & C. Item tot inter F,& I, quot inter F,& C,& inter I,&C. Et tot inter E,& H, quot inter, E, & C & inter

A,162. Q,216. R,288. S,384. B,512.
E,54. O,72. P,96. I,128.
E,18. N,24. H,32.
D,6. G,8.
C,2.
K,9. L,12. M,16.

inter H,& C, Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D,ad G: erit ex defin. ratio K,ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. hujus ſcholii, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt ejuſdē rationis D, ad G. Igitur eſt ut K,adM, ita E,ad H; Atque adeo cum inter K,& M, cadat unus medius proportionalis L: a cadet quoque unus medius, nimirum N,inter E,& H; quemadmodum & inter E,& C,& inter H,& C,unus medius cadit: a 8. oct. Simili modo, ſi in eadem proportione D,ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F,& I, duos medios cadere, ſicut & inter F,& C,& inter I,& C, duo medii cadunt. Et eadem ratione inter A,& B, tres medii cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.

Hoc etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, unitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt hac ſecunda figura, in qua numerus B; unitas eſt, caduntque tam inter A,& G, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medii proportionales cadunt inter A, & B, nec non inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D,& G, numero aſſumpto C, propinquiores.

A,1048576. Q,32768. R,1024. S,32. B,1.
F,65536. O,2048. P,64. I,2.
E,4096. N,128. H,4.
D,256. G,8.
C,16.
K,1024. L,32. M,1.

## THEOR. 9. PROPOS. 11.

xj.

Duorum quadratorum numerorum unius medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

*SINT quadrati numeri* A. *&* B, *quorum latera* C, *&* D. *Dico inter* A, *&* B, *unum medium proportionalem, numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis* C, *ad* D, *lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo* C, *&* D, *faciat* E. *Quia igitur* C, *multiplicans ſeipſum fecit* A, *quadratum, ex defin. quadrati; & ipſum* D, *multiplicans fecit* E, *ex con-*

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

A,9.E,21.B,49.
C,3.D,7.

*ex conſtructione:* a *erit ut* C.*ad* D, *ita* A, *ad* E. *Rurſus, quia* D, *multiplicans* C, *fecit* E, *ex conſtructione: & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit* B, *quadratum:* b *erit quoque, ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* B. *Quare* A,E,B, *continue proportionales ſunt in ratione laterum* C, *&* D. *Ac proinde inter quadratos A, &* B, *medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod* A,E,B, *continue proportionales ſunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet ejus, quam habet* A, *ad E: duplicatam quoque rationem habebit* A, *quadratus ad B, quadratum, ejus, quam habet* C, *latus ad latus* D: *cum hac proportio eadem ſit, qua* A, *ad* E. *Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.*

a 17.ſep

b 17.ſeptim.

## SCHOLIVM.

Perſpicuum eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris, C, ad latus D, ut demonſtratum eſt.

Pari ratione liquet, numerum medium proportionalem *E*, & utrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim

A,9. E,21. B,49.
*C*,3. D,7.

A,E,B, proportionalem ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E ad B ut C ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum *B*, conſequens conſequentem ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem: quandoquidem eſt *E*, ad B, ut C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, ut C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B: habebunt E, & B, communem menſuram D: Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum *A*, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

## xi. THEOR. 10. PROPOS. 12.

Duorum cuborum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam, habet lateris ad latus rationem.

*SINT numeri cubi A, &* B, *quorum latera* C, *&* D. *Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere* *tur: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam eſſe proportionis C, ad D; lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E: & D, ſeipſum multiplicans faciat F: At C, & D, ſe mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G, faciant H & I. Quoniam igitur C, ſeipſum, & D, multiplicans fecit E, & G, a erit, ut C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F; b erit quoque ut C, ad D, ita G, ad F. proptereaque E G F, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D. Rurſus, quia ex defin. cubi, C, ipſum E, multiplicans fecit A, & ex conſtructione multiplicans ipſum G, fecit H: c erit ut E, ad G, hoc eſt, ut C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I; multiplicans vero ipſum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; d erit quoque, ut G, ad F, hoc eſt, ut C, ad D, ita I, ad B; e Eſt autem & H ad I, ut C, ad D: quod C, & D, ipſum G, multiplicantes fecerint ex conſtructione, H, & I. Igitur A, H I B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medii H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B. continue ſunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem ejus quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, ejus, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum ſit C, ad D, ut A, ad H. Quamobrem duorum cuborum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.*

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

a 17. ſep.
b 17. ſep.
c 17. ſep.
d 17. ſeptim.
e 18. ſep.

## SCHOLIUM.

Hic quoque manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H; & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad *D*.

Eodem modo conſtat, duos numeros medios proportionales, H, I, & utrumlibet cuborum A, *B*, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D: hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, ut C, ad D. Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, ut *C*, ad D: *M*etitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quod H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C, atq; adeo inter ſe com-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A,ad H,ut C,ad D: metiatur autem latus C,cubum ſuum A,antecedens antecedentem, metietur quoque D,ipſum H,conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D,cubum ſuum B: immo & ipſum I,quod I,factus ſit ex multiplicatione D,in G,ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D: Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt,priorum trium numerorum A,H,I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A, poſteriorum vero trium H,I,B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi E.

## THEOR. 11. PROPOS. 13.

xij.

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos: qui ab illis ptoducti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes jam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eveniet.

*Sint continue proportionales A,B,C.qui ſeipſos multiplicantes faciant* D,E,F, *multiplicantes autem ipſos* D,E,F, *faciant* G,H, *I*; & *rurſum multiplicantes ipſos* G,H,I, *faciant* K,L,M, & *ita deinceps. Dico quoque* D,E,F, & *G*,H,*I*, & K,L,M,*continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A*, & B,*ſe mutuo faciant N*; & B, C, *ſe mutuo multiplicantes faciant* Q. *Deinde A, multiplicans* N,E,*faciat P, Q. Item* B, *multiplicans* O, F,*faciat* R, S. *Similimodo A,*

*A*, 2. B, 4. *C*, 8.
D, 4. *N*, 8. *E*,16. O,32. *F*,64.
*G*, 8. *P*,16. *Q*,32. *H*,64. *R*,128. *S*,256. *I*,512.
K,16. *T*,32. *V*,64. *X*,128, *L*,256. *Y*,512, *Z*,1024. a,2048. *M*,4096.

*multiplicans* P, Q, *H*, *faciat T,V,X*; & B; *multiplicans* R,S,I, *faciat Y, Z, a. Quoniam igitur* A, *multiplicans ſeipſum*, & B, *fecit* D, N, a *erit ut A,ad* B, *ita* D, *ad* N. Eodem *modo,quia B, multiplicans A*, & *ſeipſum fecit N*, & *E*; *erit etiam, ut A,ad B,ita N, ad E*. Sunt *igitur* D,N,E, *continue proportionales in ratione* A, *ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum*, & *numerum* G, *multiplicans fecit* E, & O; b *erit ut* B, *ad* C, *ita* E, *ad* O. *Eademque ratione,cum* C, *multiplicans* B, & *ſeipſum, fecerit* O, & F; *erit ut* B, *ad* C, *ita* O, *ad* F: *proptereaq;* & E,O, *F, continue proportionales ſunt in ratione* B, *ad* C, *ſeu A, ad* B. *Quare cum* D,N,E, *in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua* E, O,F: *erit ex æquo* D, *ad* E, *ut* E, *ad* F, *atque adeo* D, E,F, *continue proportionales ſunt.*

a 17. ſep

b 17. ſeptimo.

Deinde

*Deinde, quia A, multiplicans* D,N,E, *fecit* G,P,Q: *erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus,* G,P,Q, *in eadem ratione, in qua* D,N,E, *hoc eſt, in ratione A, ad* B *proportionales. Item quia* A, *&* B, *multiplicantes* E, *fecerunt Q, &* H: a *erit quoque, ut A, ad* B, *ita Q, ad H. Sunt ergo* G,P,Q,H, *proportionales in ratione* A, *ad* B. *Similiter, quia* B, *multiplicans* E,O,F, *fecit* H,R,S; *erunt ex demonſtratis ad propoſ.* 18. *lib.* 7. H,R,S, *proportionales in ratione* E,O,F, *hoc eſt, B, ad* C, *ſeu* A, *ad B. Et eodem modo, cum* B,C, *multiplicantes* F, *fecerint* S, *& I:* b *erit ut* B, *ad* C, *hoc eſt, ut* A, *ad* B, *ita S, ad I; proptereaque &* H,R,S,I, *proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum* G,P,Q,H, *eandem habeant proportionem continuam, quam H,R,S,I, erit ex æquo* G, *ad H, ut* H, *ad I: Ac proinde* G,H,I, *continue ſunt proportionales.*

a 18. ſep.
b 18. ſept

*Non diſſimili argumento demonſtrabimus &* K,L, *M, eſſe continue proportionales: & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

Sunt autem, ut ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A,B,C, Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam ejus, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

Iam quoque numeri ſecundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata. Et ſic deinceps ſemper uno amplius.

Brevius propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A,B,C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E,F, & in hos ex eiſdem numeris G,H,I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K,L, M. Dico D,E,F, & G,H,I: & K,L,M, eſſe quoque continue proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. hujus lib. tam A,D,G,K, quam B,E,H,L; & C,F,I, M, continue ſunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theorema. ſcholii propoſ. 10. hujus lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed ejuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G,H,I, eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K,L,M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

| | | |
|---|---|---|
| A, 2. | B, 4. | C, 8. |
| D, 4. | E, 16. | F, 64. |
| G, 8. | H, 64. | I, 512. |
| K, 16. | L, 256. | M, 4096. |

Ex qua rurſu demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione duorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholii propoſ. 10. hujus lib. elicitur.

Quamvis autem in utraque demonſtratione hujus propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiam ſi plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quam tres A, B, C, *D*, continue proportionales, qui ſeipſos multiplicantes faciant E, F, G, H poſtea vero multiplicantes ipſos a 13. oct. E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, a ex demonſtratis proportionales ſunt. Item F, G, H, cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſeipſos, hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſeipſos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M, & alii deinceps eodem modo producti.

A, 2. *B*, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. E, 19. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

## xiij. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus unius metietur latus alterius. Et ſi unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

*Metiatur quadratus* A, *cujus latus* C, *quadratum* B, *cujus latus* D. *Dico & latus* C, *latus* D, *metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo* C, *&* D, *faciant* E. *Quoniam igitur, ut liquet ex demonſtratione propoſ.* 11. *hujus lib. A*, E, B, *continue proportionales ſunt in ratione* C, *ad D; Metitur autem* A, *primus extremum* B, b *metietur* b 7. oct. *quoque* A, *primus ſecundum* E. *Quare cum ſit ut* A, *ad* E, *ita* C, *ad D, &* C, *latus latus* D, *metietur.*

A. 4. *E*, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

*Metiatur jam* C, *latus latus* D. *Dico & quadratum* A, *quadratum* B, *metiri.* Eodem *enim modo erit, ut* C, *ad* D, *ita* A, *ad* E, *propterea quod* A, E, B, *continue proportionales ſunt in ratione* C, *ad* D, *ut demonſtratum eſt propoſ.* 11. *hujus lib. Quare cum* C, *metiatur* D, *metietur quoque* A, *primus* E, *ſecundum, ac proinde & extremum* B, *metietur, ex theoremate* 2. *ſcholii propoſ.* 6. *hujus lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.*

## xiiij. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur & cubus cubum metietur.

*Metiatur cubus* A, *cujus latus* C, *cubum* B, *cujus latus* D. Di-

*n & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſeipſum multiplicans faciat E, & F, multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonſtratione propoſ. 12. hujus lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum, a metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, ut A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.* a 7.oct.

A, 8. H, 24. I. 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

*Metiatur jam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, ut oſtenſum eſt propoſ. 12. hujus libr. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propoſ. 6. hujus lib. demonſtravimus. Itaq; ſi cubus numerus cubum numerum metiatur; &c. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 14. PROPOS. 16. XV.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur alterius latus. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur.

*Sint quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B, b metietur & quadratus A; quadratum B. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.* b 14.oct.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

*Sed jam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; c metietur quoque C, latus illius latus hujus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.* c 14.oct.

## THEOR. 15. PROPOS. 17. XV.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

*Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D: Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D,*

a 15. oct.

A, 8. B, 27.

C, 2. D, 3.

*metietur. Si enim C, dicatur metiri D: a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.*

*Sed jam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur, Nam ſi metiri dicatur: b metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c, Quod demonſtrandum erat.*

b 15. oct.

## SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi majores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi unius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c Igitur & latus *D*, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

c 14. & 15. oct.

Quod ſi latus C, lateris D, multiplex ſit: metietur latus D, latus C. d Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur. Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi erit multiplex.

d 14. & 15. oct.

A, 36. B, 9.

C, 6. D, 3.

At vero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex, non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. e Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 64. B, 8.

C, 4. D, 2.

A, 49. B, 9.

C, 7. D, 3.

e 16. & 17. oct.

Similiter ſi C, latus lateris *D*, non ſit multiplex, non metietur D, latus latus C. f Igitur, nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

A, 125. B, 8.

C, 5. D, 2.

f 16. & 17. oct.

THEOR.

## THEOR. 16. PROPOS. 18. xvj.

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

*Sint plani numeri ſimiles* A,B, *& latera illius ſint* C. D. *hujus vero illis proportionalia* E F; *ita ut* C,D, *ſe mutuo multiplicantes faciant* A, *&* E.F , *mutuo ſe multiplicantes faciant B* , *ſitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, &* B, *cadere unum numerum medium proportionalem, & proportionem A , ad B , eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum* C,E, *vel* D, F. *Multiplicantes ſe mutuo D,*E, *faciant G. Quoniam igitur eſt* C, *ad* D, *ut* E, *ad* F ; *erit permutando* C, *ad E, ut* D, *ad* F. *Et quia* D, *multiplicans* C, *& E: fecit A, &* G, a *erit* A, *ad* G, *ut* C, *ad E, hoc eſt, ut* D, *ad* F. *Similiter quia* E, *multiplicans* D, *&* F. *fecit* G, *& B*, b *erit quoque* G, *ad B, ut* D, *ad F. Proportionales ergo ſunt* A,G,*B, in ratione* C, *ad E, vel* D, *ad* F : *Atque adeo inter* A, *&* B, *medius proportionalis cadit G.*

A. 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſep.
b 17. ſept.

*Quia vero, cum A,* G, *B, ſint continue proportionales* A, *ad* B, *duplicatam habet rationem ejus, quam habet* A, *ad* G, *hoc eſt* , C, *ad E, vel* D, *ad* F : *perſpicuum eſt proportionem numeri plani* A, *ad planum B, eſſe duplicatam ejus, quam habet* C, *ad E, vel* D, *ad* F, *latus homologum ad latus homologum.* Duorum *igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt *A*,G,B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel *D*, ad F: manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & *B*, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum, G,E, vel *D*,F, aſſumptorum.

Conſtat etiam ex dictis, medium proportionalem *G* , & utrumlibet planorum A, *B*, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A,G,B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, ut *C*, ad E, vel D, ad F, metiantur autem E, F , latera numerum B, cujus ſunt latera conſequentes conſequentem , ſi de proportionib, C, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur : metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quod ſit G, ad *B*, ut C, ad E, vel D, ad F. *A*tqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cujus ſunt latera. Igitur G, A , menſuram communem habent tam *C*, quam D, Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe, Rurſus cum ſit

A, ad

A,ad G,ut C,ad E,vel D,ad F : metiantur autem C,D,latera ſuum planum A,antecedentes antecedentem:metientur etiam E,F,ipſum G,conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B,metiantur, habebunt G,B,communem menſuram tam E, quam F: ideoque erunt inter ſe compoſiti.

Ex qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorũ A,G,communes menſuras eſſe C,D,latera prioris plani A: poſteriorum autem G,B,menſuras communes eſſe E,F, latera plani poſterioris B.

xviij.

## THEOR. 17. PROPOS. 19.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medii proportionales ſunt numeri : Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

A,30. M,60. N.120. B,240.
I,6. L,11. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10

*Sint ſolidi numeri ſimiles A,*B,*& latera illius ſint* C, *D, E, hujus vero illius proportionalia* F.G.*H. ita ut ſit* C. *ad* D. *quemadmodum* F. *ad* G. *&* D.*ad E.ſicut* G. *ad H.* Dico *inter* A. *&* B. *cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad* B. *eſſe triplicatam ejus, quam habent latera homologa* C.F. *vel* D G. *vel E. H. Multiplicantes n. ſe mutuo* C, *D. faciant I: &* FG. *ſe mutuo multiplicantes faciant* K. *Item* D.F. *ſe mutuo multiplicantes faciant* L. *Poſtremo E. H ipſum* L. *multiplicantes faciant* M. *N.* *Quia igitur* C. D. *E. ipſis* F. G. H. *proportionales ſunt : erunt & permutando proportionales, nimirum ut* C. *ad* F. *ita D. ad* G. *&* E. *ad H.* *Quoniam vero* D. *multiplicans* C. *&* F. *fecit I. &* L: a *erit ut* C. *ad* F. *ita I ad* L. *Simili modo, quia* F, *multiplicans* D. *&* G. *fecit L. &* K: b *erit quoque ut* D. *ad* G. *ita L ad* K. *Sunt ergo I.* L.K. *continue proportionales in ratione* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G. *vel E. ad* H. *Et quoniam* A. *ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum* C.D.*E: factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua* C. D *: ſit ut* E, *multiplicans I. faciat A. Eodem modo cum* B, *ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum* F. G. *H : &* K, *factus ex mutua multiplicatione* F.G *; numerus H. ipſum* K, *multiplicans faciet* B. *Quare cum* E. *multiplicans I. &* L. *fecerit* A. *&* M. c *erit* A. *ad* M. *ut I. ad L. hoc eſt, ut* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G *vel E. ad H. Eadem ratione, cum H. multiplicans* L. K. *fecerit N. & B:* d *erit N. ad* B. *ut L. ad* K. *hoc eſt, ut* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G. *vel E. ad H.* e *Eſt autem & M. ad N. ut* E. *ad H: quod E. H. multiplicantes* L, *fecerint ipſos M, & N. Igitur* A.M.*N.*B. *continue ſunt proportionales in ratione* C. *ad* F. *vel* D. *ad* G.

a 17. ſeptim.
b 17. ſept.
c 17. ſeptim.
d 17. ſept.
e 18. ſep.

*vel*

*vel E,ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medii M, N, continue proportionales cadunt.*

*Quoniam vero, cum A,M,N,B, ſint proportionales continue: proportio A,B, triplicata eſt ejus, quam habet A, ad M: Eſt autem A, ad M, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam ejus quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medii, &c. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

Cum demonſtratum ſit A,M,N,B, proportionales eſſe in ratione C,ad F,vel *D*,ad G,vel *E*,ad H, liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B,cadere duos medios proportionales M,& N,in ratione laterum homologorum C,F vel D,G,vel E H,aſſumptorum.

Ex iis quæ dicta ſunt,perſpicuum etiam eſt,duos medios proportionales M.N. & utrumlibet ſolidorum A.*B*. inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A,M,N,*B*,oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F,vel D ad G vel E,ad H,hoc eſt,eſſe A,ad M,& *M*,ad N,& N,ad *B* ut C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H; metiantur autem F,*G*,H,latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N ad B,& C,ad F, vel D ad G,vel E,ad H,loquamur: metientur quoque *C,D,E*, *ipſum* N, antecedentes antecedentem; quod ſit N ad B, ut C,ad F,vel *D*,ad G,vel E,ad H. Atque & C,*D*,E,ipſum M, metiuntur; (Cum enim M,factus ſit,per conſtructionem,ex E,in L, metietur E,ipſum M. *D*einde quia M N B,proportionales ſunt ipſis I, L, K,metitur autem K,ipſum *B*,quod B,factus ſit ex K,in H, metietur quoque I,ipſum M: Metiuntur autem & C,D,latera planum ſuum I. [a] Igitur & C,D: metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M,metientur.) Nec non & ipſum A,nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A,M,N,habent communem menſuram tam C, quam D, & quam *E*; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus qui eſt A,ad M,ut C,ad F,vel D,ad G,vel E,ad H; metiuntur autem C D,E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antetecedentem; metientur quoque F,G,H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur vero & F,*G*,H, ipſum N; Cum enim factus ſit ex H, in L,per conſtructionem, metietur H, ipſum N. *D*einde quia A,*M*,N, ipſis I, L,K, proportionales ſunt: metitur autem I,ipſum A,quod A,factus ſit,ex I,in E; metietur etiam K,ipſum N. Cum ergo & F G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F G,ipſum N,atque adeo, F,G, H,ipſum N,metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum late-

A,30. *M*,60. N,120. B, 240.
I,F. L,12. K,24.
*C*,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

[a] 11. *pronun.*

A,30. M,60. N.120. *B*,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. *D*,3. F,4. G,6. H,10.

latera ſuum ſolidū. Igitur *M*, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, & quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, *E*, latera prioris ſolidi *A*: At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi *B*, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, *B*.

Quia vero ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducantur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium: ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum: ſive deniq; ſecundum in tertium, & productus numerus in primum. Quin etiam, propoſitis quotvis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter ſe permutent. Quæ quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo ejuſmodi theorema.

## Datis quotlibet numeris procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

A,3. B,5. C,8.
D,15. E,120. F,24. G,40.

[a] 15. defin.
[b] 15. defin.
[c] 15. defin.
[d] 19. ſeptim.

Sint primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: *Item ſi ex B, in C fiat G, & G, in* A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, [a] erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem, [b] ita quoque eſt F, ad A: quod A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A: ut autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad unitatem: propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, ut E ad B, ita F, ad unitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in unitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in E, productum ex A, in G. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B, Quod eſt primum.

E, F,
D, A.
B, unitas.

[e] 15. defin.
[f] 15 defin.
[g] 15. defin.
[h] 19. ſept.

Rurſus quia ex C, in D, fit E: [e] erit ut E, ad D; ita C, ad unitatem. Sed ut C, ad unitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eo quod G, factus eſt ex B, in C, Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad unitatem: propterea quod D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit, ut E, ad A, ita G, ad unitatem: [h] ac pro-

E, G,
D, B.
A, unitas.

proinde numerus factus ex E,in unitatem,id eſt. ipſemet numerus E,æqualis erit numero genito ex A,in G , productum ex B , in C. Quemadmodū igitur E,gignitur ex A,in B, & ex producto in C, ita idem E,procreatur ex B,in C,& ex producto in A , ꝗ eſt ſecundum.

Sint deinde quatuor numeri A,B,C,D : atque ex A , in B, & ex producto in C,& ex producto in D, fiat E. Dico eundem E,gigni ex A,in B,& ex producto in D,& ex producto in C. Item ex A,in G,& ex producto in B,& ex producto in D. Item ex A,in C,& ex producto in D,& ex producto in B : Item ex A,in D, & ex producto in B,& ex producto in C,item ex A,in in D,& ex producto in C,& ex producto in B. Item ; ex B,in C , & ex producto in A,& ex producto in D : item ex B,in C,& ex producto in D,& ex producto in A : Item ex B,in D,& ex producto in A,& ex producto in C. Item ex B,in D,& ex producto in C,& ex producto in A : Item ex C,in D,& ex producto in A,& ex producto in B. Item ex C,in D,& ex producto in B,& ex producto in A : ita ut præter primam multiplicationem,qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe,fiant 11. multiplicationes diverſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim ut in tribus oſtenſum eſt idem numerus fit,ſive genitus numerus ex A, in B , ducatur prius in C, deinde hic productus in D,ſive prius in D , deinde hic productus in C, conſtat id quod primo loco proponitur.

A,2. B,3. C,D,5.
E, 120.

*Deinde quia ut in* tribus eſt oſtenſum,idem numerus fit ex A, in B,& ex producto in C,qui fit ex A, in C, & ex producto in B,perſpicuum eſt eundem numerum gigni tum ex A,in B , & ex producto in C,& ex producto in D,tum ex A, in C,& ex producto in B , & ex producto in D,quod eſt ſecundum.

Tertio quoniam,ut in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur,ſive genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D,ſive prius in D,deinde hic productus in B,patet , eundem generari numerum tum ex A,in C, & ex producto in B , & ex producto in D,tum ex A, in C,& ex producto in D,& ex producto in B. Cum ergo ille ſit æqualis proxime oſtenſus primo producto,erit & hic æqualis eidem,quod eſt tertium.

Quarto quia,ut in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit ex A, in B,& ex producto in D,qui ex A, in D,& ex producto in B,gignetur quoque idem numerus ex A,in B, & ex producto in D,& ex producto in C,qui ex A, in D,& ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei,qui fit ex A,in B,& ex producto in C , & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

Quinto quoniam , ut demonſtratum eſt in tribus , idem numerus gignitur ex A, in C,& ex producto in D, qui ex A , in D, & ex producto in C,producetur idem numerus ex A,in C,& ex producto

in D &

in D,& ex producto in B,qui ex A,in D,& ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui ſit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D , erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

Sexto,quia,ut in tribus demonſtravimus,idem numerus fit ex A, in B,& ex producto in C.qui fit ex B,in C,& ex producto in A ; liquet eundem procreari numerum tam ex A,in B , & ex producto in C,& ex producto in D,quam ex B,in C,& ex producto in A , & ex producto in D,quod eſt ſextum.

Septimo quia ut in tribus oſtendimus,idem numerus gignitur, ſive productus ex B,in C,ducatur prius in A, deinde hic productus in D,ſive prius in D,deinde hic productus in A: conſtat eundem numerum fieri ex B,in C,& ex producto in D,& ex producto in A , qui fit ex B,in C,& ex producto in A,& ex producto in D. Sed hic proxime oſtenſus eſt æqualis ei,qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D, Igitur & ille,quod eſt ſeptimum.

Octavo quia, ut in tribus oſtenſum eſt,idem numerus procreatur ex A. in B. & ex producto in D. qui ex B in D.& ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A in B. & ex producto in D.& ex producto in C. qui ex B.in D.& ex producto in A. & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A,in B. & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur & hic Quod eſt octavum.

Nono quia,ut demonſtratum eſt in tribus,idem numerus fit ex B, in C.& ex producto in D qui ex B.in D. & ex producto in C: procreabitur idem quoque numerus ex B in C.& ex producto in D. & ex producto in A. qui ex B.in D.&,ex producto in C. & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei,qui fit ex A in B & ex producto in C.& ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

Decimo quoniam,ut in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A in C. & ex producto in D, qui ex C.in D.& ex producto in A. producetur quoque idem numerus ex A.in C.& ex producto in D.& ex producto in B. qui ex C. in D. & ex producto in A,& ex producto in B. Sed ille, ut tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei,qui fit ex A. in B. & ex producto in C.& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A,2. B,3. C,4. D,5.
E,120.

Poſtremo quoniam, ut oſtenſum eſt in tribus,idem numerus gignitur ex B. in C. & ex producto in D,qui ex C in D. & ex producto in B,procreabitur quoque idem numerus ex B. in C. & ex producto in D,& ex producto in A. qui ex C. in D.& ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A.in B & ex producto in C. & ex producto in D. Igitur& hic eidem æqualis erit. Quod eſt undecimum.

Eodem argumentandi modo utendum eſt in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod jam in quatuor demonſtratum eſt, & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A,B,C,DE, apparet, quorum ordinē ter immutavimus, idemque ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C,D,E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A,B,C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit ut quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

## THEOR. 18. PROPOS. 20. xvij.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

*Cadat inter A, & B, medius proportionalis* D. *Dico* A, & B, *eſſe planos ſimiles. Sumantur* D, & E, *minimi in ratione* A,C,B. *Quia igitur* D, E, *minimi ſunt in ratione* A, *ad* C, a *metientur* D, & E, *ipſos* A, & C, *æque: metiantur per* F. *Similiter æque metientur ipſos* C, & B: *metiantur per* G. b *Itaque* F, *multiplicans* D, & E, *faciet* A, & C: c *Item* G, *eoſdem* D, & E, *multiplicans faciet* C, & B. *Quia ergo* E, *multiplicans* F, & G *fecit* C, & B, d *erit, ut* C, *ad* B, *ita* F, *ad* G. *Vt autem* C, *ad* B, *ita erat* D, *ad* E. *Igitur erit ut* D, *ad* E, *ita* F, *ad* G, & *permutando ut* D, *ad* F, *ita* E *ad* G, *Quoniam vero* F, *multiplicans* D, *fecit* A, *erit* A, *planus, cujus latera* D,F. *Simili modo quia* G, *multiplicans* E, *fecit* B, *erit &* B, *planus, cujus latera* E, G. *Cum ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt,* D, *ad* F, *ut* E, *ad* G, *erunt ex defin.* A. B. *plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros unus, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A,18. C,24. B,32.
D,3. E,4. F,6. G,8.

a 21. *ſeptim.*
b 9. *pronū.*
c 9. *pronun.*
d 17. *ſeptim.*

## THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri,

CADANT *inter* A, & B, *duo medii proportionales* C, D. *Dico* A, & B, *eſſe ſimiles ſolidos. Sumātur tres,* E, F, G,

A,24. C,72. D,216. B,648.
E, 1. F,3. G,9.
H,1. L,1. M,24. K, 3. L,3. N,72.

*minimi in ratione A,C,D,B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F;* a 20.oct. *a erunt E, & G, plani ſimiles : ſint ipſius E, latera H.I, ipſius vero G, latera illis proportionalia K,L. Et quia* b 21.ſeptim. *E,F, G, cum minimi ſint in ratione A.C, D,* b *æque metiuntur ipſos A, C, D, ejuſdem rationis cum illis, metiantur per M, eodemque modo.* c 21.ſep. c *quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D,B, eandem habentes rationem cum illis : metiantur per N :* d 9.pronũ. d *ita ut M, multiplicans E,F, G, faciat A,C, D, & N, multiplicans eoſdem E, F,G, faciat C, D, B, factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & E. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H,I,M ; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N ; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habens H, I, M : & B, ſolidus etiam, latera habens K,L,N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, ut oſtendimus :* e 18.ſep. e *erit C, ad D, ut M. ad N :* f 17.ſept. f *Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F : quod N, multiplicans E, & F. fecerit ipſos C, & D : Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I,L. Etenim inter planos ſimiles E,G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ 19. hujus lib. in ratione laterum homologorum H,K, vel I,L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, ut M, ad N, & permutando H, ad I, ut K, ad L : & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K, L, M : ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A & B. Quamob rem ſi inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3 N, 78.

A, 8. G, 12. D, 3. L, N, 3.
E, 4. E, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

## SCHOLIVM.

Duo exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, unitatem E, eſſe planum numerum. & unitates H, & I, ejus latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus Si enim unitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cujuſmodi ſunt etiam A,B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine ulla exceptione demonſtret.

THE-

## THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

*Sint tres numeri* A, B, C, *continue proportionales, ſitque primus eorum* A, *quadratus.* Dico *& tertium* C, *quadratum eſſe. Nam cum inter* A, *&* C, *cadat medius proportionalis;* a *erunt* A, *&* C, *plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit &* C, *ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c.* Q*uod demonſtrandum erat.*

A, 9. B, 54. C, 324. a 20. oct.

## THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

*Sint quatuor numeri* A, B, C, D, *proportionales continue, &* A, *primus ſit cubus.* Dico *&, quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter* A, *&* D, *cadant duo medii proportionales* B, C: b *erunt* A, *& D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente* A, *cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus* Q*uamobrem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A, 27. *B*, 45. C, 75. *D*, 125. b 21. oct.

### *SCHOLIVM.*

Hæc eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcidentium duarum propoſitionum, quam qui diligenter examinare velit, inveniet ſane mancam eſſe & imperfectam. cum enim ad defin. 21 lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamvis, non quibuſcunque lateribus unius exhiberi, poſſint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibuſdam lateribus unius proportionalia ſint quædam alterius Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorum unus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamē in demonſtratione pro conceſſo, atq; omnib. perſpicuo aſſumebatur. *N*am poſitis duobus numeris planis 32. & *64.* ſimilibus, ſatis eſt, ut duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3, & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimitum 4. & *16.* proportionalia. Vnde etiā ſi prior ſit quadratus, habēs duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, imo omnino negare, poſteriorē habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt inter ſe quoque æqualia, atq; adeo eſſe quadratū: quemadmodū etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia, Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione ulla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe æqualia? Item dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter utramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

Sint tres numeri A.B.C: continue proportionales, & primus A. quadratus: Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A. cum D. ex defin. in ſe faciat A. erunt D. & A. ex ſcholio propoſ. 9. hujus lib. ab unitate continue proportionales, eritque convertendo A. ad D. ut D. ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem; cadant medii proportionales multitudine æquales nimirum unus: cadent quoque totidem, ex theor. 3. ſcholii propoſ. 10. hujus lib. inter unitatem, atque C. numerum, nimirum unus, qui ſit E. Quoniam igitur unitas & E. C. numeri ſunt continue proportionales: producetur C. ex E. in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. hujus lib. Ac proinde C. quadratus erit ex defin. cujus latus E.

A,36. B,48. C,64.
D,6. E,8.
unitas,

Aliter. Sumptis tribus numeris D E.F. minimis in ratione A. ad B. & B. ad C; metietur D. ipſum A. & F. ipſum C. æque, ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 1. lib. 7. Et quoniam extremi D. F. minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propoſ. 2. hujus lib. ſunt quadrati: Eſt autem A, quadratus ex hypotheſi: a cadet inter A. & D. quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero eſt ex æquo, ut A. ad C. ita D. ad F; & permutando, ut A. ad D. ita C. ad F,

A,36. B,48. C,64.
a 11. oct. G,18. H,32.
D,9. E,12. F,16.
L,64. K,8. L4.

b 8 oct. F, b cadet quoque inter C. & F. unus proportionalis medius, nimi-
c 7. oct. rum H. Cum ergo F primus metiatur C. ultimum; c metietur i-
dem & ſecundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur
I, toties numerum K quoties F. ipſum H. metitur; ita ut H. ad F &
K. ad I. eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L,
d 11. oct. quadratus ipſius K d. Itaque quia ratio L. ad F. quadrati ad quadra-
tum, duplicata eſt rationis K. ad I. lateris ad latus, hoc eſt H. ad F. Eſt
autem & ratio C. ad F. ejuſdem rationis H: ad F. ex defin. duplicata,
quod convertendo ſint proportionales etiam C. H. F. erit L. ad F. ut
C. ad F; Ac proinde L. & C. æquales ſunt. Exiſtente ergo L. qua-
drato, ex conſtructione, & C. quadratus erit.

e 20. oct. ALITER. e Quoniam A & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C; ita ut

ſit D,

D.ad E. ſicut F. ad G: aſſumaturque H. latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D. in E, & ex H. in ſe, *a* erunt D. H. E. continue proportionales. Cum ergo ſit F. ad G. ut D. ad E; cadatque inter D. & E. medius proportionalis H. *b* cadet quoque inter F. & G. unus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cum F. I. G. ſint continue proportionales: *c* idem numerus fiet ex F. in G. qui ex I. in ſeipſum, Fit autem C. ex F. in G. Igitur & idem C. fiet ex I. in ſeipſum: Atque adeo C. quadratus erit, ex definitione, cujus latus I.

a 20. ſep.

b 8. oct.

c 20. ſeptim.

A,36. B,48. C.64.
H,6. I, 8.
D,3. E,12. F, 4. G,16.

A,36. B,48. C,64.
H,6. I, 8.
D, 6. E,6. F, 8. G, 8.

Sint rurſum quatuor numeri *A*.B.C.D. continue proportionales, & A. primus, ſit cubus. *D*ico & D. quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E. latere cubi A; fiat ex E. in ſeipſum numerus F. ac proinde, ex defin. ex E. in F. cubus A. Quia ergo E. in ſe facit F. & in F. facit *A*. erunt ex ſcholio propoſ. 9. hujus lib. E.F.A. continue proportionales ab unitate: atque idcirco convertendo proportionales quoq; erunt numeri *A*.F *E* & unitas. Itaque cum tam inter numerum D. quam unitatem, ac eundem numerum A. cadant medii proportionales multitudine æquales, videlicet duo: cadent ex theorem. 3. ſcholii propoſ. 10. hujus lib. totidem medii inter unitatem, & numerum D. qui ſint G.H Itaque quia unitas & numeri G. H. D. continue ſunt proportionales: fiet H. ex G. in ſe, & *D*. ex G. in productum H. ut ad propoſ. 10. hujus lib. à nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cujus latus G.

A,64. B,160. C,400. *D*, 1000.
F,16. H,100.
E, 4. G,10.
unitas.

Aliter. Inventis quatuor numeris minimis E.F.G.H. in ratione A. ad B. & B. ad C. & C. ad D. metietur E. ipſum A. & H. ipſum *D*. æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demonſtravimus. Et quia E.H. extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. hujus lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi: *d* cadent inter E. *A*. cubos duo medii proportionales, qui ſint I.K. Quoniam autem, ex æquo, eſt ut A. ad D. ita E. ad H: & permutando, ut A. ad E, ita *D*. ad H: *e* cadent quoque inter H. D, duo medii proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur *D*. extre-

A,64. *B*,160. C,400. D,1000.
K,32. M,500.
I,16. L,250.
E, 8. F,20. G,50. H,125.
P,1000. O,10. N,5.

d 12. oct.

e 8. oct.

mum,*f* metietur idem & L,ſecundum. Sumpto deinde N, latere
cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L: ita ut
L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit
a 12. oct. quoque P, cubus ipſius O. *a* Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cu-
bum, triplicatæ ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt, L, ad H:
Sit autem & ratio D, ad H, ejuſdem rationis L, ad H, ex defin tripli-
cata, quod convertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H: erit
P, ad H, ut *D*, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare
cum P, cubus ſit ex conſtructione, cubus quoque erit D.

xxij.

## THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

*Sit enim* A, *ad* B, *ut* C, *quadratus ad quadratum* D; *ſitque A, quadratus. Dico &* B, *eſſe quadratum. Cum enim ſit* A, *ad* B, *ut*
C. *ad* D: b *cadat autem inter* C, *&* D, *qua-*
b 11. oct. *dratos unus medius proportionalis, videlicet*
c 8. oct. *Et* c *cadet quoq; inter* A, *&* B, *medius unus,*
*qui ſit* F. *Quia igitur tres numeri ſint con-*
*tinue proportionales* A, F, B: *& A, primus eſt quadratus: erit &*
d 22. oct. *B, tertius quadratus.* d *Quare ſi duo numeri rationem habeant in-*
*ter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c,*
*Quod erat oſtendendum.*

*A*, 36. *F*, 48 *B*, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

### COROLLARIVM.

Liquet ex his, proportionem cujuſvis numeri quadrati ad quemlibet
numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus nume-
e 24. oct. ris quadratis. Si enim exhiberetur, *e* eſſent ambo priores numeri haben-
tes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati,
cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſe-
cundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportio-
nem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, ef-
ſent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.127. &c. quadrati. Primo enim
f 24. oct. 4. exiſtente quadrato, *f* eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & c. quod
g 11. oct. eſt abſurdum. *g* Nã inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. cade-
ret medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cum tamen in ſcholio pro-
poſ. 8. hujus lib demonſtratum ſit, inter numeros duplæ proportionis
quoſvis non poſſe cadere medium proportionalem.

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non ha-
h 11. oct. bebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim ha-
i 8. oct. berent, *h* caderet inter eos medius proportionalis. i Igitur & inter 5. & 1.
minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non poſſe, demõ-
ſtratum à nobis eſt in ſcholio propoſ. 8. hujus lib.

xxiiij.

## THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cu-
bus

bus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

*Sit enim A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum, ſitque A, cubus. Dico & B, cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, ut C, ad D, a cadant autem inter C, & D, cubos duo medii proportionales, qui ſint E F: b cadent quoque inter A, & B, duo medii, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continue proportionales, & A, primus eſt cubus; c erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.* a 12. oct. b 8. oct. c 23. oct.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A,8. | G,12. | H,18. | B,27. |
| C,64. | E,96. | F,144. | D,216. |

### COROLLARIUM.

Patet etiam ex his, proportionem cujuſvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, d eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus. d 25. oct.

## THEOR. 24. PROPOS. 26. xxiv.

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

*Sint plani ſimiles A, & B. Dico eſſe ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles: e cadet inter eos unus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B: erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propoſ. 2. hujus lib.* e 18. oct.

| | | |
|---|---|---|
| A,20. | C,30. | B,45. |
| D,4. | E,6. | F,9. |

*Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, ut eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, ut ad F, Ergo ſimiles plani numeri rationem inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.*

| | | |
|---|---|---|
| A,20. | C,30. | B,45. |
| D,4. | E,6. | F,9. |

### SCHOLIUM.

Facile etiam demonſtrabimus converſum hujus; videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter ſe, quam quadrati C, d Dico A, B, eſſe planos ſimiles. f Quoniã enim inter quadratos C, f 11. oct.

| | |
|---|---|
| A,8. | B,18. |
| C,16. | D,36. |

D,cadit unus medius proportionalis : Et eſt. ut
a 8. oct. C,ad D,ita A,ad B; *a* cadet quoque medius pro-
b 20. oct. portionalis inter A,& B, *b*.Quare A,& B,plani ſi-
miles ſunt.

A,8. B,18.
C,16. D,36.

Ex hoc perſpicuum eſt,planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere,quam quadratus ad quadratum.Si enim haberent: eſſent,ut modo demonſtratum eſt,plani ſimiles, quod eſt abſurdum,ponuntur enim non ſimiles.

## XXV. THEOR. 25. PROPOS. 27.

**Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe; quam cubus numerus ad cubum numerum.**

*Sint ſimiles ſolidi A,B. Dico eſſe, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A B,ſunt ſo-*
c 19. oct. *lidi ſimiles; c cadent inter eos duo medii proportionales, qui ſunt C, D. Sumptis autem quatuor numeris E,F,G,H,minimis in continua proportione A,C,D,B; erunt extremi E H,ex coroll. 1. prop. 2. hujus lib. cubi. Quare, cum ex aquo ſit A, ad B: ut E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B, ut eſt cubus aliquis, nimirum E,ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe,&c. Quod erat oſtendendum.*

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

### SCHOLIVM.

Converſum hujus etiam demonſtrabimus: ſcilicet.

**Numeri,qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum,ſunt ſolidi ſimiles.**

Numeri enim *A,B*, proportionem habeant inter ſe,quam cubi
C,D. Dico A. B.ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum
d 12. oct. ſit A,ad B,ut C,ad D: *d* cadant autem inter C
e 8. oct. D,cubos duo medii proportionales, *e* cadent
f 21. oct. quoque inter A,B duo medii. *f* Sunt ergo A,
& B,ſolidi ſimiles.

A,16, B,54.
C,64. D,216.

Ex his omnibus perſpicue infertur,nullos numeros habentes du-
g 18. oct. plam proportionem,vel ſuperparticularem,vel ſuperbipartientem,
eſſe ſimiles planos,vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani, *g* cade-
ret inter eos medius unus proportionalis,quod fieri non poſſe,jam
dudum oſtenſum eſt in ſcholio propoſ 8.hujus lib. Eadem ratione
non erunt ſimiles ſolidi,cum inter eos cadere non poſſint duo me-
h 8. oct. dii proportionales.Nam *h* alias caderent quoque duo medii inter
minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non po-
teſt,quod hi vel ſola unitate,vel certe binario tantū inter ſe diſtent,

ut

ut in ſcholio prædicto traditum eſt, inter quos certum eſt, non poſſe recipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

Similiter nec duo quivis numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſunt habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus, latera habet ſolummodo unitatem, & ſeipſum, quamvis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1.19. & 1.23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quivis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit latera tantum habet duas unitates, & ſeipſum. Vt hi numeri ſolidi 25. & 47. latera habent 1.1.29. & 1.1.47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

Rurſus neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamvis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo hujuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani, vel ſolidi ſimiles; a cadet inter illos unus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continue proportionales, ut in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtravimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. hujus lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

a 18. & 19. oct.

Ex his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare majorem. Nam ſi eum non numeraret; b eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, ut proxime oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles: quod abſurdum eſt, & contra hypotheſin. Verum hoc oſtenſive quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitque A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, unitas, & numerus D, ipſi A, æqualis, quod nullus alius numerus, præter C, unitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, laterib. C, D, proportionalia, ita ut ſit C, ad E, ut D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, ut E, ad F. c Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum, æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium: Fit autem ex C, unitate in F, ipſemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. d Quare D, ipſum F, metietur. e Metitur autẽ F, ipſum B, quod B, gignatur ex E, in F. f Igitur & D, id eſt, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12

b 31. ſeptim.
c 19. ſep.
d 4. pronũ.
e 4. pronun.
f 11. pronũ.

Hinc perſpicuum eſt, duos numeros inter ſe primos, quorum minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor majorem, ut proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Sint deinde duo ſolidi ſimiles A,B, ſitque A, minor primus. Dico A, ipſum C, metiri. Nam cum A & B, ſint ſolidi ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint B,C, unitates, & numerus D, ipſi A, æqualis quod nullus alius numerus, præter unitatem & numerum D, ipſi A æqualem, metiatur numerum primum A: ſint E,F,G, latera numeri B, lateribus B,C,D, proportionalia, ita ut ſit B a 19. ſep. ad E ut C ad F, & D ad G. Quia igitur eſt C, ad F, ut D ad G erit permutando C, ad D ut F ad G. *a* Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, ſecundo in F, tertium. Fit autem ex C, unitate in G, ipſemet numerus G. Idem ergo b 4. pronun. numerus G, fiet ex D in F *b* Quare D ipſum G, metietur. *c* Metitur c 4. pronun. autem G, ipſum B, quod G, latus ſit ipſius B. *d* Igitur & D, hoc eſt A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod eſt propoſitum.

A,3. B,24.

B,1. C,1. D,3. E,2. F,2. G,6.

Atque ex hoc etiam conſtat, duos numeros inter ſe primos, quod1 11. pronũ. rum minor primus ſit, non poſſe eſſe ſolidos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor majorem, ut proxime oſtendimus. Cum ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi, ſed inter ſe compoſiti, quod eſt contra hypotheſin.

Itaque facilis admodum eſt inventio duorum planorum, vel ſolidorum non ſimilium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem: vel certe duo numeri primi, vel duo inter ſe primi, quorum neuter quadratus ſit, aut cubus; erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani vel ſolidi non ſimiles.

e 26. oct. Rurſus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter f 24. oct. vero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles: *e* haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, *f* eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum, ponitur enim non quadratus.

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter vero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent g 27. oct. ſolidi ſimiles, *g* haberent proportionem quam cubus ad cubum. h 25. oct. Cum igitur 27. cubus ſit, *h* eſſet & 40. cubus, quod eſt abſurdum: ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

# EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

## THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

*DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, a erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles, b unus medius cadit proportionalis. c Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut ſint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitque primus D, quadratum, ex conſtructione; d erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A,6. B,54.
D,36. E,108. C,324.

a 17. ſep.
b 18. oct.
c 8. oct.
d 22. oct.

## THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

*Duo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, facit D, & C; e erit ut A, ad B, ita D, ad C. f At inter D, & C, quadratos unus medius cadit proportionalis. g Igitur & inter A, & B, unus medius proportionalis cadet; h Ac propterea*

A,6. B,54.
D,36. C,124.

e 17. ſeptim.
f 11. oct.
g 8. oct.
h 20. oct.

*Pterea A,&B,ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes,&c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Ex his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

### I.

Si duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit.

Duo quadrati A B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A,&B, ſint ſimiles plani, nimirum quadrati: *a* erit C, ex eis productus, quadratus.

a 1. *noni.*

A,4. B,25.
C, 100,

### II.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus: Et reliquus quadratus erit.

Duo numeri A,B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitque A, quadratus. *Dico* & B, quadratum eſſe. Cum enim A,&B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: *b* erunt *A*,& B, ſimiles plani; *c* atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis: videlicet D. *d* Quare A, exiſtente quadrato, erit & B, quadratus.

b 2. *noni.*
c 18 *oct.*
d 22. *oct.*

A,9. D, 12. B, 16.
C,144.

### III.

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A,B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum: ſitque A, quadratus. Dico B, non quadratum eſſe. Si enim B, dicatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. hujus ſcholii: Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſin. Non igitur quadratus eſt B, numerus.

A,4. B, 20.
C,80.

### IV.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem: Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuo multi-

multiplicantes faciant C. Dico C,non eſſe quadratum. Nam ſi C,foret quadratus,cum producatur ex A,in B,ſitque A,quadratus,eſſet & B,ex theor. 1. hujus ſcholii: quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non igitur C,quadratus erit.

A,9. B,20.
C,180.

## THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

*Faciat cubus A,ſeipſum multiplicans numerum B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim G,latus cubi A; & ex C,in ſe fiat D,& idcirco ex C, in D,ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C,ſeipſum multiplicans fecit D.* a *metietur C, ipſum D, per C:* b *Metietur autem & unitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt unitas ipſius C, qua C, ipſius D, nimirum denominata à C: Ac proinde* c *ut unitas ad C, ita C, ad D: Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A;* d *metietur D, ipſum A, per C, Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, qua D, ipſius A.* e *ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: ſed ut C, ad D, ita erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A: Atque adeo inter unitatem & numerum A, duo medii proportionales cadunt numeri C-D.* f *At quia A, ipſum B, metitur per A, quod A, ſeipſum multiplicans fecerit B;* g *metitur vero & unitas ipſum A per A; Eadẽ erit pars unitas ipſius A, qua A, ipſius B;* h *Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & numerum A, cadant duo medii proportionales C, & D,* i *cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B: ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus,* k *erit quoque E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſeipſũ multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.*

A,8.
E,16. D,4.
F,32. C,2.
B,64. Vnitas.

a 7. pronun.
b 5. pronun.
c 20. defin.
d 7. pronun.
e 20. defin.
f 7. pronũ.
g 5. pronun.
h 10. defin.
i 8. oct.
k 23. oct.

## THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

*FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe multiplicans enim A, ſeipſum faciat D;* l *eritque D, cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C,* m *erit ut A, ad B, ita D, ad C,* n *At inter A, & B, cubos duo medii proportionales cadunt.* o *Igitur & inter D, & C, duo*

A, 8. B,27.
D,64. C,216.

l 3. noni.
m 17. ſep.
n 12. oct.
o 8. oct.

a 13. oct. *medii proportionales cadent: a Ac propterea D, exiſtente cubo, &*
*C, cubus erit. Quocirca ſi cubus numerum cubum numerus multi-*
*plicans, &c. Quod erat oſtendendum.*

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

*Fiat ex cubo A, in numerum B numerus cubus C. Dico & B, cu-*
b 12. noni. *bum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D: b qui cubus erit.*
*Quoniam igitur A, multiplicans A,*
c 17. sep. *& B, fecit D, & C, c erit ut A, ad*
d 12. oct. *B, ita D, ad C: d At inter D, & C,*
e 8. oct. *cubos duo cadunt medii proportio-*
f 2. oct. *nales. e Totidem igitur & inter A, & B, cadent: f Ac proinde exi-*
*ſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem ſi cubus numerus nu-*
*merum quendam multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.*

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

### SCHOLIVM.

Ex his & hæc, quæ ſequuntur, facile demonſtrabuntur, videlicet.

### I.

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

Fiat ex A. cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; g & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

A, 8. B, 20.
g 5. noni. C, 160.

### II.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicans non cubus erit.

Fiat ex cubo A, in numerum B, non cubus C, Dico & B, non eſſe cubum. Si namque B, ſit cubus, h & factus cubus C, cubus erit, quod eſt contra hypotheſin.

A, 8. B, 17.
h 4. noni. C, 136.

## THEOR. 6. PSOPOS. 6.

vj. Si numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cubus erit.

*MVLTIPLICANS ſeipſum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum eſſe, Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit. cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis ſit, ut perſpicuum eſt ex iis, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C: a erit & A, cubus.*

A, 8. B, 64. C, 512.

Qua

*Quare ſi numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 5. noni.

## SCHOLIVM.

Aliam demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt & quidem longiorem. Poſtquam enim demonſtrarunt C, factum ex A, in B, eſſe cubum, inferunt: *b* Ergo inter B, & C, cubos duo medii proportionales cadunt. *c* Quoniam vero eſt ut B, ad C, ita A, ad D, quod A, multiplicans A, & B, ipſos B, & C, fecit; *d* cadent quoque inter A, & B, duo medii proportionales. Atque adeo exiſtente B, cubo, & A cubus erit. Verum noſtra demonſtratio brevior eſt, & planior, ut perſpicuum eſt.

A, 8. B, 64. C, 512.

b 12. oct.
c 17. ſep.
d 8. oct.
e 23. oct.

## THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus ſolidus erit.

*Numerus compoſitus A, multiplicans numerum quemlibt B, faciat C. Dico C, eſſe ſolidum. Cum enim A, ſit compoſitus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis, metiatur D, ipſum A, per E. Quo poſito g, multiplicante D, ipſum E, producetur A. Cum ergo B, ipſum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B: Ac propterea ſolidus erit ex defin. cujus latera D, E, B. Quapropter ſi compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.*

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

f 13. defin.
g 9. pronun.

## THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus eſt, & unum intermittentes omnes: Quartus autẽ eſt cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus, ſimul, & quadratus, & quinq; intermittentes omnes.

*Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab unitate eſſe quadratum, & unum intermittentes omnes, quales ſunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cujuſmodi ſunt F, I, M, ſeptimum vero F, cubum ſimul; & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimi-*

*Vnitas.* A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243 E, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 53144.

*rum*

*rum M. Quoniam enim eſt unitas ad* A, *ut* A, *ad* B : *æque metietur unitas numerum* A, *& numerus* A, *numerum* B : a *Metitur autem unitas numerum* A, *per* A. *Ergo &* A, *ipſum* B, *per* A, *metietur :* b *Atque adeo* A, *multiplicans* A, *ipſum* B, *producet. Quare* B, *quadratus eſt. Quia vero tres deinceps proportionales ſunt* B, C, D, *& eſt* B, *quadratus :* c *erit &* D, *quadratus. Eadem ratione aſſumptis tribus deinceps proportionalibus* D, E, F, *cum* D, *ſit quadratus,* d *&* F, *quadratus erit : Nec non & omnes unum intermittentes.*

a 5. pronun.
b 9. pronun.
c 11. oct.
d 22. oct.

*Rurſus quia eſt unitas ad* A, *ut* B, *ad* C, *æque metietur unitas numerum* A, *& numerus* B, *numerum* C. e *Metitur autem unitas ipſum* A, *per* A. *Igitur &* B, *ipſum* C, *per* A, *metietur,* f *atque adeo* B, *ipſum* A, *multiplicans procreabit numerum* C. *Quare cum* A, *ſeipſum multiplicans faciat* B, *multiplicans vero* B, *faciat* C, *ut eſt oſtenſum, erit* C, *cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales ſunt* C, D, E, F, *& eſt* C, *cubus,* g *erit &* F, *cubus. Eodem argumento, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus* F, G, H, I, *cum* F, *ſit cubus,* h *& I, i, cubus erit, atque omnes ſemper duos intermittentes.*

e 5. pronun.
f 9. pronun.
g 23. oct.
h 23. oct.

*POSTREMO quia* F, *ſeptimus ab unitate oſtenſus eſt & quadratus, & cubus : ipſe erit cubus ſimul & quadratus : Atque eodem modo M, ſeptimus ab* F, *intermiſſis nimirum quinque* G, H, I, K, L, *cubus erit ſimul & quadratus : Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Hoc theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

Si ſint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono : undecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numero poſitos in locis tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctavo, & aliis, quæ ternarius metitur, cujuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertius decimus, decimus ſextus, decimus nonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimo octavo, vigeſimo quarto, & aliis, quæ metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertius decimus, decimus nonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

Nam

Nam primi ordinis numeri omnes ſemper unum intermittunt poſt tertium ab unitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab unitate: Numeri deniq; tertii ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab unitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proporti- ix.
onales fuerint; qui vero poſt unitatem ſit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt unitatem, ſit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

*Sint ab unitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A; proximus unitati quadratus. Dico*

*Vnitas.* A,4. B,16, C,64. D,256. E,1024. F,4096.

*& reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab unita-*
*te, & omnes unum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati*
*ſint;* a *jam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedii C,* a 8. noni.
*& E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue pro-*

*Vnitas.* A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

*portionales ſint* A,B,C; *ſitque A, quadratus;* b *erit & C, quadra-* b 22. oct.
*tus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus*
C,D,E, *cum* C, *ſit quadratus;* c *& E, quadratus erit. Omnes igi-* c 22. oct.
*tur A,B,C,D,E,F, quadrati ſunt. Idem oſtendemus; ſi plures nu-*
*meri ſint continue proportionales.*

*Sit jam* A. *proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos intermittentes,*

*Vnitas.* A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

*cujuſmodi ſunt* C, *& F, ſint cubi,* d *jam eſt demonſtratum. Quod*
*autem & reliqui* B, D, E, *cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit unitas* d 8. noni.
*ad A; ut* A, *ad* B; *æque metietur unitas numerum A, ac numerus A;*
*numerum* B: e *Metitur autem unitas numerum* A, *per ipſummet* A. e 5. pronun.
*Igitur &* A, *ipſum* B, *per ſeipſum metietur;* f *Atque adeo cubus A,*
*ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit* g *Quare* B, *cubus eſt.* f 9. pronun.
*Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A,*B,C,D, *eſt-*
*que* A, *cubus,* h *& D, cubus erit. Eademque ratione, aſſumptis* g 3. noni.
*quatuor deinceps proportionalibus* B,C,D,E, *cum B, cubus ſit:* i *&* h 23. oct.
*E, cubus erit: Omnes igitur A,*B, C,D, *E, F, cubi ſunt: Non ſecus* i 23. oct.
*demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales*

*fuerint. Quocirca, ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

Non demonſtravit Geometra, ſi numerus, qui poſt unitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nã ſi proximus unitati ſit cubus ſimul, & quadratus, qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, ut demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

Verum tota propoſitio facilius ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus unitati quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe, Quoniam enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem ſcholio A, multiplicans B, facit C, ſuntque A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex ſcholio propoſ. 2. hujus lib. Rurſus quia ex eodem ſcholio propoſ. 10 lib. 8. A, multiplicans C, facit D, ſuntque A C, quadrati; erit ex eodem ſcholio propoſ. 2. hujus lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 8. *A*, multiplicans D, producat E: & multiplicans E, faciat F, &c.

Vnitas. *A*,4. B,16. C,64. *D*,256. E,1024. F,4096.

Sit deinde A proximus unitati cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. cubus A, ſeipſum multiplicans facit B: *a* erit & B, cubus. Item quia ex eodem ſcholio A, multiplicans *B*: facit C, ſuntque A, B, cubi, *b* erit & C, cubus. Rurſus quia ex eodem ſcholio A, multiplicans C, facit D, ſuntque A, C, cubi; *c* erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex ſcholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

Vnitas. A,8. B,64. C,512. *D*,4096. E,32768. F,262144.

a 3. *noni.*
b 4. *noni.*
c 4. *noni.*

x.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem, non ſit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt unitatem, non ſit cubus, neq; alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

*Sint*

*Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus unitati nō ſit quadratus. Dico nec alium ullum eſſe quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, hoc eſt, præter B, L, F, H, &c. Si enim præter hos alius eſt quadratus, ſit quadratus E.* a Cum ergo a 8. noni.

*Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256.*
*I, 512. K, 1024. L, 1048. M, 4096.*

*& D, ſit quadratus; ſitque ut D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & convertendo, ut E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E:* b *ſed B, tertius ab unitate eſt quadratus.* c *Igitur & A, primus ab unitate quadratus erit. Quod* b 8. noni. *eſt abſurdum; ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, qua-* c 24. octi. *dratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, nullum alium, præter dictos quadratum eſſe.*

*Sed jam A, proximus unitati non ſit cubus. Dico nec alium ullum eſſe cubum, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam ſi præter hos alius po-* d 8. noni. *teſt eſſe cubus, ſit D, cubus.* d *Cum ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & convertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D:* e *Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab unitate.* f *Igitur & A, primus ab unitate cubus erit, quod eſt contra hypotheſin. Non igitur D, cu-* e 8. noni. *bus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus;* g *cum & C, cubus ſit, ſit-* f 25. octi. *que ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & convertendo* g 8. noni. *ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo,* h *erit, & A,* h 25. octi. *cubus, quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoq; eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

Non eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt unitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab unitate, & quinq; intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus; non exiſtente primo ab unitate cubo ſimul & quadrato.

Sit enim primum A, qui poſt unitatem, cubus quidem non au-

a 9. *noni.* tem ſimul & quadratus. Dico B, tertium eſſe cubum ſimul, & qua-
b 8. *noni.* dratum: cubum quidem, *a* quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, *b* quadratum vero, quod tertius ſit ab unitate.

Vnitas. B,8. B, 46.

Sit deinde A, poſt unitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe
c 8. *noni.* cubum ſimul, & quadratum; *c*
d 9. *noni.* Cubum quidem, quod quartus
ſit ab unitate: quadratum vero, *d* quod primo exiſtente quadrato, omnes ſint quadrati.

Vnitas. A,4. B,16. C,64.

Sit poſtremo A, poſt unitatem neque cubus neque quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum, præter ſeptimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum enim primo non

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. *E*,7776. F, 46656.

e 10. *noni.* exiſtente quadrato, *e* nullus alius quadratus ſit, præter tertium ab unitate, ut unum intermittentes omnes, cujuſmodi ſunt, ut in ſcholio propoſ. 8. hujus lib. docuimus, tertius, quintus, ſeptimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimus ſeptimus,
decimus nonus, &c. Primo autem non exiſtente cubo, *f* nullus alius
f 10. *noni.* ſit cubus, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, quales ſunt, ut ex eodem ſcholio apparet, quartus; ſeptimus, decimus, tertius decimus, decimus ſextus, decimusnonus, &c. Perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertium decimum, decimum nonum, qui quidem omnes quinq; intermittunt, quadratos eſſe ſimul, & cubos, & ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, ut liquido conſtat ei, qui recte propoſitionem hanc & octavam hujus libri expenderit.

## xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris.

*Sint ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, ut C, quemlibet majorem, ut G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam*
g 10. *defin.* *quam unitas & quatuor numeri A, B, C, D, g æque metietur unitas*
a 5. *pron.* *numerum D, atque numerus C, numerum G; a Sed unitas metitur nume-*

*Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.*

*numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur: Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit ut E, ad F, ita unitas ad A &c. Sic quoque metietur, A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo ut A ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

Perſpicuum autem eſt ex his quantum abeſt major numerus à minore metiente, tantum diſtare ab unitate eum numerum, per quem minor majorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad majorem, quæ unitatis ad eum, per quem metitur minor majorem, ut ex demonſtratione apparet. Itaque B,

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quam inter unitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter G, & F, quam inter unitatem & C, duo interjecti ſunt numeri.

Hinc rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab unitate. Si vero minor aliquis majorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum à majore diſtat, quantum minor ab unitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet tum, per quem metitur, [b] producitur ille, quem metitur. Ergo C, ſeipſum multiplicans gignet F, cum F, tantùm abſit à C, quantum C, ab unitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, ut diximus. Sic quoque B, multiplicans, D, faciet eundem F: quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

[b] 9. pronun.

## THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum metiuntur, iidem & eum, qui unitati proximus eſt, metientur.

*Sint ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, unitati proximum. Si namque non metitur ipſum A: [c] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe*

[c] 13. ſeptim.

pri-

a 9. pronũ. *primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, a atque adeo E, multiplicans*
*F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac*
*proinde A, multiplicans C, facit D, ut in ſcholio præcedentis propoſ.*
*oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum,*
*& ex E, ſecundo in F, tertium.* b *Quare erit ut A, primus ad*
b 19. ſeptim. *E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint*
*inter ſe primi;* c *ac proinde in ſua proportione minimi;* d *metietur*
c 23. ſep. *æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G,* e *atque*
d 21. ſep. *adeo E, multiplicans G, faciat G. Quia vero & A, ex ſcholio eodem*
e 9. pronun. *præcedentis propoſ. metitur C, per B,* f *Atque adeo A, multiplicans*
*B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A. primo in B, quartum,*
f 9. pronũ. *& ex E, ſecundo in G, tertium.* g *Erit igitur ut A, primus ad E,*
g 19. ſep. *ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. quapropter cũ*

*Vnitas* A, 10, B 100. C, 1000. D, 10000.
*E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.*

h 23. ſep. *A, & E, ſint inter ſe primi;* h *ac propterea in ſua proportione minimi:*
i 21. ſep. i *Metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B Metiatur E, ipſum*
k 9. pronun. *B per H:* k *ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A,*
*ipſum B, per A. atque idcirco A, ſeipſum multiplicans facit B, ut ex*
*eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus*
l 20. defin. *B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum.* l *Quare*
*erit ut E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium.*
*Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint:* m *ac proinde in ſua proportione*
m 23. ſep. *minimi;* n *æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt*
n 22. ſeptim. *contra hypotheſin. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum*
*eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri*
*ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri: Quod eſt*
*abſurdum. Metietur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus*
*quoſcumque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri*
*quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, ultimus numerus*
*ſtatuatur.*

ALITER *Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico &*
o 31. ſep. *E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur;* o *erit E, ad A, primus.*
*Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans*
*facit B, ut ex ſcholio propoſ. præcedentis conſtat* p *erit B, ad E, primus.*
p 27. ſeptim. *Quia ergo A & B, ad E. primi ſunt: ſit autem C, ex A in B, per idem ſcholium præcedentis*

*Vnitas.* A, 6. *B*, 36. C, 216. *D*, 1296.
E, 3.

*propoſ.* q *erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad*
b 26. ſept. *E, primi ſunt: & ſit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ.*
r 26. ſept. r *erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod*
*eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A, Si igitur ab unitate*
*quot-*

*quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.*

## COROLLARIVM.

Itaque neque ullus numerus primus, qui major ſit eo, qui proximus eſt, unitati, neque ullus minor proximum unitati non metiens, metiri poteſt ultimum. Si namque metiretur ultimum; metiretur quoque unitati proximum, ut demonſtratum eſt, quod non ponitur.

## SCHOLIVM.

Eſt autem admirabilis prima hujus propoſitionis demonſtratio, Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmativa E, ipſum A, metiri: quod videtur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album ex eo, quod non eſt albus, parodoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in aliis nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturq; ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum non dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim hujus demonſtrationis expendiſſet, vel certe ſi expendit, eam in memoriam revocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides uſus eſt hoc etiam demonſtrandi modo, ut ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrandi uſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. ut ibidem monuimus.

Cæterum ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque numerum primum, qui ultimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. *a* Cum enim metiatur proximum unitati: hic autem omnes ſubſequentes: *b* quod ſemper minor majorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris *c* manifeſtum eſt quod & ille omnes metiatur.

a 12. *noni.*
b 11. *noni.*
c 11. *pranun.*

## THEOR. 13. PROPOS. 13. xiii.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero poſt unitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

*Sint ab unitate continue proportionales quotcunque numeri* A, B, C, D, *quorum* A, *proximus unitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos* A, B, C, *metiri maximum* D. *Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius* E, *diverſus ab* A, B, C, *ipſum* D. *Manifeſtum autem eſt,* E, *non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum* D: d *metietur quoque ipſum* A, *unitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur* E, *primus eſt ſed compoſitus:* c *atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quem*

*Vnitat.* A, 5. B, 25. C, 125. D, 624.
*E*---.*H*---. G---.*F*---

d 12 *noni.*
c 33. *ſep.*

a 11. pronun.
b 12. noni.
c 8. pronũ.
d 11. noni.
e 8. pronun.
f 12. noni.
g 33. ſept.

dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; a metietur quoque ille alius primus eundem D: b atque adeo & ipſum A, primum, nimirum unitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur jam E, ipſum D, per F. Dico F, diverſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C: c & viciſſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. d Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſin, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diverſus. Quoniam vero E, metitur D, per F, e metietur viciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, ultimum: f metietur & A, proximum unitati, qui primus eſt, quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus: g atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quẽ rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A.

Vnitas. A,5. B, 25. C,125. D ,625.
E-- -H---- G-- F.--

h 11. pronun.
i 12. noni.
k 9. pronun.
l 19. ſeptim.

Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum E, metiatur D, extremum: h metietur quoque ille alius primus eundem D: i atque adeo & ipſum A, proximum unitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum F, metitur Iam vero quoniam E, metitur D, per F: k fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in ſcholio propoſ. 11. hujus lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium: l Ac proinde erit ut A primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipſum E, ut oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diverſus ab A, B, metitur C, ultimum (relinquimus enim jam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diverſum eſſe ab A B, & non primum, ſed compoſitum quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diverſus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

m. 8. pron.
n 11. noni.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, metiaturque F, ipſum C, per G: m etietur utique F, ipſum C, per aliquem ipſorum A, B: m & viciſſim aliquis ipſorum A B, (videlicet is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. n Cum ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B, quod eſt abſurdum. Oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, quem aliquem ipſorum A, B Non ergo G, eſt idem qui

ali-

aliquis ipſorum A, B, ſed diverſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; a metietur viciſſim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturque ultimum C. b metietur quoque numerum primum A, unitati proximum, quod eſt abſurdum. Non ergo G primus eſt, ſed compoſitus, c ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, ultimum, d metietur quoque illi alius primus eundem C, e atque adeo ipſum A, unitati proximum qui primus eſt, quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum G, metietur. f Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in ſcholio propoſ. 11. hujus lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. g Quare erit ut A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, ut demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diverſus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim jam numeros C, & D,) per H, oſtendemus ſimiliter H, diverſum eſſe ab A, quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

a 8. pronun.
b 12. noni.
c 33. ſep.
d 11. pronun.
e 12. noni.
f 9. pronũ.
g 19. ſeptim.

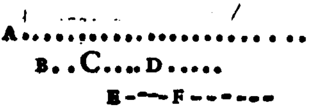
Nam ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B per H: metietur utique G, ipſum B, per A: h Et viciſſim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipſum B, per A, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 11. hujus lib. erit G, idem qui A, quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diverſus. i Iam vero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, ut in ſcholio propoſ. 11. hujus lib. docuimus: Fiet idem numerus B, ex H primo in G, tertium, & ex A, medio in ſe ipſum. k Quare erit ut H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, ut eſt demonſtratum. Igitur, & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

h 8 pronun.
i 9. pronun
k 20. ſeptim.

## THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

**Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.**

*Sit numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim ſi fieri poteſt, primus numerus E, diverſus à B, C, D, ipſum*



a9. prouſ.
b37.ſept.

*pſum A, per numerum F. Quia, igitur E, metitur A, per F, a multiplicans E, ipſum F, faciet A, b Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diverſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium eum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

c2.oct.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E. in ſua propoortione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G. Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus ſed compoſitus: c ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & ſic deinceps, donec habeantur tot, uno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, ut conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M, metitur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F. vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum, ſi vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit ex ſcholio ejuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad I, cum I, gignatur ex F, in ſeipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quod ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. Quod ſi H, primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H------ F, 2. G, 3.

Deinde metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem

dem modo compoſitus vel ad F,vel ad K.Si ad F, habetur propoſitum,ſi vero ad K,cum K,gignatur ex F,in G,erit quoque H,compoſitus vel ad F,vel ad G.Quod ſi H.ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F,vel G,ex propoſ.32.lib.7.

Rurſus metiatur H,non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O,erit H,compoſitus vel ad F,vel ad O.Si ad F,habetur propoſitum, ſi vero ad O,qui quidem fit ex F,in L, erit H , compoſitus vel ad F, vel ad L.Si ad F,habetur propoſitum,ſi vero ad L,cum L , gignatur ex G,in ſe,compoſitus quoque erit H,ad G. Quod ſi H , ſit primus, probavimus eodem modo ex propoſ.32.lib.7. eum metiri ipſū G.

Præterea *A*,metiatur H,non primus quartum D, qui cum fiat ex F in P,erit H compoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad P, qui quidem fit ex G,in L, erit etiam H, compoſitus vel ad H,vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum : ſi vero ad L cum L producatur ex G in ſe: erit quoque H, ad G , compoſitus. Quod ſi H,primus ſit oſtendemus eodem modo ex propoſ.32.lib. 7. eum metiri ipſum G.

Eodem modo ſi H,non primus metiatur ultimum E,oſtendemus H,compoſitum eſſe ad H,Si vero H,primus ſit, eum metiri ipſum G: atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.

Itaque ſi H,metiatur primum numerum A, metietur idem ipſū F,vel ad eum compoſitus erit: Si vero H,metiatur ultimum E,metietur idem ipſum G,vel ad eum compoſitus erit: Si denique H, metiatur aliquem , præter primum & ultimum,metietur idem vel ipſum F,vel ipſum G,aut ad alterutrum erit compoſitus. Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

## DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum,quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtravit prioribus 10 theorematibus.

QVoniam ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris,quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo perinde ac ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; non alienum inſtituto noſtro duximus,nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2.demonſtrata ſunt de lineis,hoc loco de numeris demonſtrare.Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis eſt traditum.Sequemur autem eundem ordinem,quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

### I.

**Si fuerint duo numeri , ſeceturque ipſorum alter in**

quot-

quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiviſo, & qualibet parte numeri diviſi continentur.

Sint duo numeri A B, & C, quorum A B, dividatur in A D, D E, E B; Fiatque F. ex C. in A B; Item G H. ex C, in A D; & H I. ex C, in D E; & I K. ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris G H, H I, I K, hoc eſt toti numero G K, ex G H, H I, I K, compoſito. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; a metietur A B, ipſum F, per C, hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipſius G H, & D E, ipſius H I; & E B, ipſius I K pars erit à C, denominata, eadem nimirum quæ A B, ipſius F. Quia vero per ea, quæ ad propoſ. 5. lib. 7. demonſtravimus, totus A B totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F; b Ac proinde inter ſe æquales erunt, F, & G K. Quod eſt propoſitum.

A . . . D . . E . B C . .
F . . . . . . . . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

a 2. pronun.
b 4. pronũ.

## II.

Si numerus in duas partes dividatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim A B, dividatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B, quod eſt propoſitum.

D . . . . . .
A . . . . C . . B

Idem demonſtrabitur, ſi A B, plures partes, quam in duas ſecetur, ut, ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.

E . . . . . .
A . . . C . . D . B

## III.

Si numerus in duas partes dividatur: Numerus planus ſub toto, & una parte comprehenſus æqualis eſt &

illi,

illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

Sit numerus AB, diviſus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus AC, CB. continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC æqualis ſit: erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex AC, in AB; vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .

A . . . . C . . . . . . B

## IV.

Si numerus in duas partes dividatur. Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui à partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

Sit numerus AB, diviſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB, in AC per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, una cum quadrato ipſius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, una cum quadrato ipſius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium AC, CB, una cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . . C . . . . B

## V.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales; & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medii, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus, enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, una cum quadrato numeri intermedii CD, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel BC, & alterutram partium inæqualium AD, DB,) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio

midio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4, theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B; una cum plano numero bis comprehenſo ſub C D, D B, numero vero comprehenſo ſemel ſub C D, D B, una cum quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, ut ſi hic numerus factus ex C B, in D B, ſumatur pro quadrato ipſius D B, una cum numero facto ex C D, in D B: numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C D, una cum reliquo numero facto ex C D, in D B, ſemel, & numero ex C B, hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipſius C B, æqualis erit quadrato ipſius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B: hoc eſt, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrto ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

A.....C...D..B

## VI.

**Si numerus in duas partes æquales dividatur, & illi aliquis alius numerus adjiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adjecto in adjectum, una cum quadrato dimidii numeri, æqualis eſt quadrato ejus numeri, qui ex dimidio & adjecto componitur.**

Numerus enim A B, ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adjecto B D, tanquam uno, nimirum ex A D, in adjectum B D, una cum quadrato dimidii numeri C B, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adjecto B D, tanquam uno hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C B, B D, una cum numero his comprehenſo ſub C B, B D, hoc eſt, quadratis partium C B, B D, una cum numeris ſub C B, B D, & ſub A C, B D, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub A C, B D, & ſub B C, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit ut ſi hic numerus factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, una cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipſius C D, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C B, una cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D, in B D, una cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. Quod eſt propoſitum.

A....C....B..D

Si nu-

## VII.

Si numerus in duas partes dividatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

Dividatur numerus A B, in partes A C, C B. Dico quadratum totius A B, unà cum quadrato partis C B æqualem eſſe numero bis, qui fit ex toto A B, in dictam partem C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Cum enim ex 4. theorem. quadratus totius A B, æqualis ſit quadratis partium A C, C B, una cum numero, qui fit bis ex A C, in C B, ſi quadratus ipſius C B, addatur communis; erunt quadrati numerorum A B, C B, ſimul, æquales quadratis numerum A C, C B, una cum numero qui fit bis ex A C, in C B. Atqui ei, qui fit ex A C, in C B, una cum quadrato ipſius C B, æqualis eſt, per 3. theorema, numerus qui fit ex A B, in C B: *A*c proinde ei, qui fit bis ex A C, in C B, una cum quadrato ipſius C B, bis, æqualis eſt, qui fit bis ex A B, in C B. Igitur ſi pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, una cum quadrato ipſius, C B, bis, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . C . . . . B

## VIII.

Si numerus in duas partes dividatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

Secetur numerus A B, in partes A C, C B. *D*ico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, una cum quadrato reliquæ partis A C; æqualem eſſe quadrato numeri qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis ſit dictæ parti C B; cum quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſive dicta parti C B, ſit æqualis per 4. theorem. quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui fit ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum AB, C B, una cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorrum, A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, una cum quadrato numeri A C, fit, ut ſi pro quadratis numerorum A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, una cū quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

A . . . . C . . . B . . . D

Si nu-

## IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diviſus ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D; D B; duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D D B,) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D; æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C; C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D: Si communis apponatur quadratus partis D B: erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B: una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur, ſi pro quadrato ipſius D B, una cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis, AC propterea quadrati partium A D, D B, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitum.

A.....C...D..B

## X.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, adjiciatur autem illi alius quiſpiã numerus. Quadratus compoſiti numeri ex toto & adjecto, & quadratus numeri adjecti, ſimul dupli ſunt ejus quadrati, qui ex dimidio efficitur, & ejus, qui fit à numero compoſito ex dimidio, & adjecto.

Sit numerus A B, diviſus in partes duas æquales A C, C B, eique adjiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adjecto B D, & quadratum adjecti numeri B D, utrosq; ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adjecto B D. Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theorem, quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D, ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una

A...C....B..D

una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius B D, una cum numero bis qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt quadrati numerorum C B, C D, & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, una cum numero, qui fit bis ex C B, in C D: ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt numerorum A C, C D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

Iam vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, ut numerus aliquis in duas partes dividatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in unum partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, ut ibi monuimus, ita demonſtrabimus.

Dividatur, ſi fieri poteſt, numerus A B, in C, ita ut numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus ſub extremis A B, C B, æqualis eſt quadrato numeri medii A C; *a* erit ut A B ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, major quam A C, ita A C. Igitur & A C, major eſt quam C B. Ablato jam C D, qui ipſi C B, ſit æqualis, erit quoque ut A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt ut A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum: *b* erit quoque ut totus A B, ad totum A C, vel ut detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, reſiduus, hoc eſt, C D, ipſi C B, æqualis ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt ut A C, ad C D, ita C D, ad A D: & eſt A C, major quam C D, erit quoque C D, major quam A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam ut A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia eſt, ut totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum erit, *c* quoque ut totus A C, ad totum C D, vel ut detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduus, hoc eſt D E, ipſi A D, æqualis ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cum ſit ut C D, ad D E, ita D E, ad E C: ſit autem C D, major quam D E; erit etiam D E, major, quam E C: Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec unquam finis erit hujus detractionis. Quod eſt abſurdum: cum numerus non poſſit dividi in infinitum. Non ergo numerus A B, dividetur ita, ut planus numerus ex toto in unam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum.

a 20. ſept.

b 11. ſept.

c 11. ſept.

Aliter. Quoniam numerus A B, in C, ita diviſus eſt, ut is qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C: Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, una

cum quadrato ipſius A C,quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B,C B , una cum quadrato ipſius A C,quadratus,quippe cum æqualis ſit quadrato, numero,qui fit ex numero compoſito ex AB,&CB,per 8.theorem. Igitur duo numeri quadrati (nimirũ is ,qui quater continetur ſub A B,CB,una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent,quam 5.ad 1.vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex coroll propoſ.24.lib 8. Non ergo numerus A B , dividitur ita in C,ut is qui producitur ex A B,in C B,æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

Verum hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. hujus lib.

## xvj. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

*Sint tres numeri A,B C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirum A,B, ſimul ad C; & B C, ſimul ad A; & A,C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D,E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C.* a 24.ſep. *a Quia igitur D,E. minimi in ſua proportione inter* b 30.ſept. *ſe primi ſunt: b erit & uterque D,E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compoſitus ex D,E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; c erit quoque numerus factus ex D,E, tanquam uno in D,* c 26.ſept. *ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D,E, tanquam uno, in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholii præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E Igitur & A,B, compoſiti, primi ſunt ad E:* d 27.ſeptim. *d Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A,B, ſimul compoſiti.*

A,9. B,12.
C,16.
D,3. E,4.

e 30.ſep. *Deinde quia, ut prius, e uterque D,E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D,E; efficitur, cum tam compoſitus ex D,E, quam ipſe E, primus ſit ad D,)* 26.ſem. *f numerum factum ex D,E, tanquam uno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam in E, æqualis eſt per 3. theorem. ſcholii antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt,* ſep. *a atque adeo & ad*

B,12. C,16.
A,9.
D,3. E,4.

*ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.*

*Poſtremo quia, ut prius,* b *uterque D, & E, ſimul ad quemlibet* b 30. ſep. *ipſorum primus eſt: atque adeo è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E,* c *erit quoque qui fit ex D, ad compoſitum ex D, E, primus:* d *Ac proinde & idem fit qui ex D, in E, ad eum qui fit ex D E, tanquam uno, in ſe primus erit. Qui autem* c 26. ſep. *fit ex D, E, tanquam uno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorem. anteceden-* d 27. ſep. *tis ſcholii, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, una cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atqut is qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, ut oſtenſum eſt.* e *Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſeipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, in-* e 20. ſeptim. *ter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum, nimirum ad eum qui fit ex D, in E, primi ſunt, ut oſtenſum eſt,* f *erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex iis, qui* f 30. ſep. *fiunt ex D, & E, in ſeipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cum igitur ex D, in E, in ſe ipſos fiant A, & C: Item ex D, in E, fiat B, erunt A, & C. ſimul compoſiti, primi ad B. Quamobrem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.*

A, 9.   C, 16.
B, 12.
D, 3.   E, 4.

## SCHOLIVM.

Campanus hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis hoc modo ipſum proponens.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

Sint continuè proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos: Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C: & A, C, D, ſimul ad B: & B, C, D, ſimul ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe: atq; adeo eos aliquis numerus cō-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E.--- F, 2. G, 3. H---

munis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt, ſumanturque F,& G, duo minimi in ratione A,B,C,*D* , numerorum. Quoniam ergo A,B,C,D, continue proportionales ſunt,& minimi: metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipſorum F,G, vel certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F,G, ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. Atque idcirco ipſum E , & alterum ipſorum F,G, aliquis numerus metietur ; Metiatur eos H Itaque cum H metiatur E ; & E, ponatur metiri compoſitum ex A,B,C,& ipſum D: *a* metietur quoque H, eundem compoſitum ex A,B,C, & ipſum *D*. Quia vero H, metitur quoque alterum ipſorum F,G: & tam F, quam G , medios numeros B,C, metitur ex coroll. 3. propoſ. 3. lib. 8. *b* metietur quoq; H, medios B,C : *c* ac propterea & compoſitum ex *B* ,C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum ex A,B,C, & detractum compoſitum ex B,C, ut demonſtravimus: *d* metietur quoque idem H , reliquum A ; Metiebatur autem & ipſum D. *S*unt ergo A,D, extremi minimorum A,*B*,C,D, inter ſe compoſiti. *e* Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitus ex A,B,*C*,& numerus D. Ergo inter ſe primi.

A,8. B,12. C,18. D,27.
E.---F,2. G,3. H.---

a 11. pronun.
b 11. pronun.
c 10. pronun.
d 12. pronun.
e 3 oct.

Rurſus, ſi A,B,D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad *C*, metietur eos, ut prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rurſum ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. vel metietur alterum ipſorum F,G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F,G. Metiatur ergo H, ipſum E,& alterum ipſorum F,G. Itaque cum H, metiatur E : & E , compoſitū ex A,B,D: *f* metietur etiam H , eundem compoſitum ex *A*, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F,G, qui metiuntur, per coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8. medios *B*,C, *g* metietur quoque H, ipſos B,C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum ex A,B,D , & detractum B, *h* metietur quoque H, compoſitum ex A D , reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F,G quorum F, ipſum A, & G , ipſum D, metitur, ut conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. *i* metietur etiam H, alterum ipſorum A,D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A,D, extremi inter ſe compoſiti. *l Sed* & primi inter ſe ſunt Quod fieri non poteſt. Non igitur A,B,D , ſimul compoſiti, ad *C*. compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

f 11. pronun.
g 11. pronun.
h 12. pronun.
i 11. pronun.
k 12. pronun.
l 3. oct.

Non aliter oſtendemus & A,C,*D*, compoſitos, eſſe ad B, primos: nec non & B,*C*,D, ſimul ad A. Eademque ratio eſt de quotlibet numeris continue proportionalibus.

## xvij. THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint: Non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

*Sint primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit ut A, ad B, ita B, ad alium nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, a atque adeo in ſua proportione minimi: b ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdũ. Non ergo eſt ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A.....
B......
C --------

a 23. ſeptim.
b 21. ſeptim.

## THEOR. 17. PROPOS. 17. xviij.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit ut primus ad ſecundum, ita ultimus ad alium quempiam.

*Sint continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit ut A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi c minimi in ſua proportione. d Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum B, & D, ipſum E. Atqui eſt ut A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipſum B: & B, ipſum C, metietur: e atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt ut B, ad C, ita C, ad D, metitur autem B, ipſum C: metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, f metietur quoque ipſum D. Metitur vero & ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt ut A, ad B, ita D, ad alium numerum E, eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ----

c 23. ſept.
d 21. ſept.
e 11 prænun.
f 11. prænun.

## PROBL. 1. PROPOS. 18. xix.

Duobus numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inveniri.

*DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inveniri poſſit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, ut A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt,* *aut non. Si ſunt inter ſe primi,* a 16.noni. a *perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt* A, & B, *inter ſe primi: multiplicans* B, *ſeipſum faciat* C, *Aut igitur* A, *metitur ipſum* C, *aut non. Metiatur primum* A. *ipſum* C, *per* D. *Dico ipſis* A B, *inveniri poſſe tertium proportionalem, imo ipſum* D, *eſſe tertium proportionalem.* b 9.pronũ. *Cum enim* A, *metiatur* C, *per* D, b *fiet* C, *ex* A, *in* D: *Fit autem ex conſtructione, idem* C, *ex* B. *in ſeipſum. Igitur, qui continetur ſub* c 20.ſep. *extremis* A D, *æqualis eſt ei, qui ex medio* B, *deſcribitur;* c *Ac proinde erit ut* A, *ad* B, *ita* B, *ad* D. *Quare* D, *inventus eſt tertius proportionalis ipſis* A, B.

A,4. B,7.

A,4. B,6. D,9. C,36.

*Sed non metiatur* A, *ipſum* C. *Dico ipſis* A B, *non poſſe reperiri tertium proportionalem Si enim inveniri poteſt, inventus ſit* D, *ita ut ſit* A, *ad* B, *quemadmodum* B, *ad* D. *Quoniam igitur eſt, ut* A, *ad* d 20.ſept. B, *ita* B, *ad* D, d *erit numerus contentus ſub extremis* A, D, *æqualis ei, qui fit ex* B, *medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi* C. e.7.pronũ. *Quare cum* C, *fiat ex* A, *in* D; e *metietur* A, *ipſum* C, *per* D: *ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inveniri poteſt ipſis* A, B, *tertius proportionalis, quando* A, *primus non metitur* C, *productum ex* B, *ſecundo in ſeipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis* B, & A, *inveniri poſſit alius tertius numerus, ad quem ita ſit* A, *ut* B, *ad* A. *Duobus ergo numeris datis conſideravimus, &c. Quod faciendum erat.*

A,6. B,4. D - -- C,16.

XX.

## PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inveniri.

*Sint dati tres numeri* A, B, C, *(ſive deinceps proportionales ſive non, oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit* C, *ad aliquem alium numerum, ut* A, *ad* B. *Multiplicans* B, *ipſum* C, *faciat* D. *Aut igitur* A, *ipſum* D, *metitur, aut non. Metiatur primum* A, *ipſum* D, *per* E. *Dico ipſis* A, B, C, *inveniri poſſe quartum proportionalem, imo ipſum* E, *eſſe quartum proportionalem.* f 9. pronun. *Cum enim* A, *metiatur* D, *per* E, f *fiet* D, *ex* A, *in* E: *Fit autem idem* D, *ex* B, *in* C, *per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis* A, E, *continetur, æqualis eſt ei, qui ſub* B, C, *ſecundo & tertio continetur;* g *Ac* g 19.ſept. *propterea erit ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E. *Quare inventus eſt* E, *ipſis* A, B, C, *quartus proportionalis.*

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.

A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

*Sed*

*Sed jam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inveniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inventus quartus proportionalis E: ita ut ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, a erit numerus* a 19. ſept. *contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D fiat ex A, in E; b metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur* b 7. pronũ. *non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inveniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inveniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, ut C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſideravimus, an poſſit, &c Quod erat faciendum.*

A, 4. B, 6. C. 9. E---- D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40.

## SCHOLIVM.

Hæc quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adjungi alius proportionalis, quamvis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi dividatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duob. numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. dividatur per 3. invenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim diviſis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diviſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$ per diviſorem 3. ut ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe, c erunt 3 8. 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.

Datis autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium c 20. ſept. genitus dividatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium, genitus dividatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. Cum enim diviſis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diviſus 120. ex multiplicatione Quotientis 13. $\frac{1}{3}$ per diviſorem 9. ex iis quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diviſus ex ſecundo in tertium. d Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales ſunt. d 19. ſept.

Ex his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adjungi. Sumptis enim tribus ultimis ſi ipſis alius poteſt inveniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema abſolvunt. Aut enim (ajunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi. Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quonam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro hujus problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes in errorem, eumq; non levem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inveniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas hujus rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. ſunt inter ſe primo, & nihilominus eis adjungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt eſſe ut 4 ad 8. ita 9. ad 18. cum utrobique proportio ſit ſubdupla: Idem videri poteſt in exemplis aliis infinitis, ut hic 2.4.7.14. Item 3.94.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adjungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalẽ. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

Sint trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inveniri nullo modo poſſe quartũ proportionalem. Si enim poteſt inveniri, ſit ille D, ita ut quemadmodum A, ad B, ita C, ad D, & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, *a* & ob id minimi. *b* Igitur metientur æque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E, At vero & A, ſeipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primus inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inveniri nequit.

A,3.B,6.C,8.D,16.E----

*a* 23. *ſeptim.*
*b* 21. *ſeptim.*

Hæc eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe ut B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrarunt: Imo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris

meris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inveniri, quam tribus A,B,C, cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, ut hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (ut cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam, quotieſcunq; quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, ut detur alius ad quem ita ſe habeat quartus ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione ulla exigunt, ut detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, ut B, ſecundus ad C, tertium. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi utuntur.

Sint enim quatuor numeri A,B,C,D, proportionales, non tamen deinceps, ſintque A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, ut ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, ut B, ad C, ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo ut ipſi oſtenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, ut D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alii Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

A,4. B,12. C,3. D,9. E---

Primum vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi a tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; a manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inveniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſolvimus. a 17. noni.

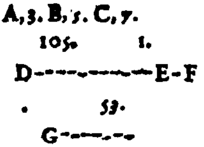
## THEOR. 18. PROPOS. 20. xxi.

**Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.**

*Sint propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros.* b *Sumpto enim numero D, E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei unitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures propoſita multitudine A, B, C.* b 38. ſep.

A,2. B,3. C,5.
30. 1
D-------------E..F

*SED jam non ſit primus D F.* c *Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico, G primum nulli ipſorum A, B, C,* c 33. ſept.



*eundem eſſe. Si namque G, ſit idem qui unus ipſorum A,B,C; metiantur autem A,B,C, ipſum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, a metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatem. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui unus ipſorum A, B, C : Ac proinde inventi ſunt primi numeri A, B, C, G, plures propoſitæ multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures invenientur quam A, B, C. G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat,*

a 11. pronun.

## SCHOLIVM.

Poterat idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propoſitis, inveniri alium primum numerum ab illis diverſum.

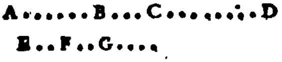
Nam ſi primi quotcunque propoſiti ſint A, B, C, inveniemus eodem modo alium primum ab illis diverſum, videlicet D F, ſi primus eſt, vel certe G, qui ipſum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium ſextum, inveniemus, & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet inveniemus.

xxij.

## THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si pares numeri quotcunque componantur : totus par erit.

*Componantur quotcunque pares numeri* A B, B C, C D. *Dico & totum compoſitum* A D, *parem eſſe. Cum enim* A B, B C, C D, *ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo* E, *dimidia pars ipſius* A, B, *&* F, *ipſius* B C : *&* G, *ipſius* C, D. *Quoniam igitur eſt ut* A, B, *ad* E, *ita* B C, *ad* F : *&* C D, *ad* G : (*quod ſemper ſit proportio dupla*) b *erit quoque ut* A B, *ad* E, *ita* A D, *ad* E, F, G, *ſimul. Eſt autem* A, B, *ipſius* E, *duplus. Igitur & totus* A D, *compoſiti ex* E, F, G, *duplus erit* : Ac *propterea* A, D, *dimidiam partem habens numerum ex* E, F, G, *compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.*



b 12. ſep.

xxiij.

## THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par : Totus par erit.

Com.

*COMPONANTVR quotcunque numeri impares quorum multitudo par* AB, BC, CD, DE. *Dico, & totum compoſitum* AE, *parem eſſe. Cum enim* AB, BC, CD, DE, *ſint impares: differet quilibet unitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit.* a *Quare, & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo unitatum detractarum par.* b *Igitur & totus* AE, *compoſitus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum.*

A...B...,C........D.........E

a 21. *noni.*
b 12. *noni.*

## THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxiiij.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

*Quotcunque numeri impares, quorum multitudo impar eſt,* AB, BC, CD, *componantur: Dico & totum,* AD, *compoſitum, imparem eſſe. Cum enim impar numerus differat unitate a pari ex definitione: ablata unitate* ED, *ab impari* CD: *erit reliquus* CE, *par.* c *Eſt autem &* AC, *compoſitus ex imparibus* AB, BC, *multitudine paribus, par,* d *Igitur &* AE, *compoſitus ex paribus* AC, CE, *par erit. Quare addita unitate* ED, *totus* AD, *impar erit, cum impar à pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.*

A.....B...C........E.D

c 12. *noni.*
d 21. *noni.*

### SCHOLIVM.

Pari ratione Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta unitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat unitate. e Quare reliquns ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa unitate, totus fiet impar; cum à pari ſola unitate differat. Quod eſt propoſitum.

e 21. *noni*

## THEOR. 22. PROPOS. 24.

Si à pari numero par detrahatur. Et reliquus par erit. xxv.

*Ex pari numero* AB, *detrahatur par* CB. *Dico & reliquum* AC, *parem eſſe, Aut enim* CB, *par detractus dimidia pars eſt ipſius* AB, *aut major quam dimidia pars, vel minor.*

A....●.C......B

*Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipſi* CB, *pari æqualis ſit* AC, *reliqua pars dimidia, erit &* AC, *numerus par.*

*Sed jam* CB, *par detractus major ſit, vel minor dimidia parte ipſius. Quoniam igitur* AB, CB, *pares numeri, dimidias*

A......C...D...E....B

A......D... C.. E.. B

*duas partes habent, ex definitione ſit* D B. *dimidia pars ipſius* A B, *&* E B, *dimidia ipſius* C B. *Itaque cum ſit ut* A B, *ad* D B, *dimidium, ita* C B, *ad* E B, *dimidium, erit permutando ut* A B, *ad* C B, *ita* D, B, *ad* E B: *& dividendo ut* A C, *ad* C B, *ita* D E, *ad* E B. *Rurſusque permutando, ut* A C, *ad* D E, *ita* C, B, *ad* E B, *Atqui* C B. *ipſius* E B, *duplus eſt. Igitur &* A C, *ipſius* D E, *duplus erit: Ac propterea* A C, *cum bifariam dividatur, (quod* D E, *ſit ejus pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

A..D....C......B

a 23. noni.

Facilius demonſtrabimus hanc propoſ. ducendo ad impoſſibile hoc modo. Si A C, reliquus non dicatur par, ſed impar; detracta unitate A D, erit reliquus D C, par. a Igitur compoſitus D B, par quoque erit: ac proinde, addita unitate A D, totus A B, impar fiet, quod eſt abſurdum, cum par ponatur.

xxvj.

### THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

A........C. D.... B

b 24. noni.

*Ex pari numero* A B, *impar detrahatur* C B. Dico *& reliquum* A C, *imparem eſſe.* Detracta *enim unitate* C D, *ex* C B, *reliquus ſit numerus* D B *par. Quia igitur & totus* A B, *ponitur par*: b *erit & reliquus* A D; *par.* Dempta *ergo unitate* C D, *reliquus* A C, *impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.*

xxvij.

### THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

A.... C......D.B

c 42. noni.

*Ex impari numero* A B, *impar detrahatur* C B. Dico *reliquum* A C, *parem eſſe.* Detracta *enim* D B, *unitate ex imparibus* A B, C B: *erunt reliqui* A D, C D, *pares. Quia ergo ex pari* A, D, *par aufertur* C D; c *erit & reliquus* A C, *par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

xxviij.

### THEOR. 25. PROPOS. 27.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

*Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim A D, unitate ex impare A B, erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; a reliquus D C, par quoque erit: Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.*

A . D . . . . . C . . . . . . B

a 24. noni.

## THEOR. 26. PROPOS. 28. xxix.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

*Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt unitates. Quare cum B, ſit par, componetur C, ex tot partibus ipſi B, æqualibus, quot ſunt unitates in A; b Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.*

A . . . B . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . .

b 21. noni.

### SCHOLIVM.

Eadem demonſtratione oſtendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

Nam rurſus C, componetur ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . . B . . . . . . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . .

### COROLLARIVM.

Conſtat quoque ex his, parem numerum in ſe multiplicatum procreare parem: ut patet, ſi pares A, & B, ponantur æquales.

A . . . . B . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . . .

## THEOR. 27. PROPOS. 29. xxx.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

*Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot ſunt unitates in A. Quare cũ tam A, quam B, ſit impar: componetur C, ex imparibus ipſi B, æqualib. quorum multitudo impar eſt, nimirum æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. c Igitur C, impar erit. Quocirca ſi impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.*

A . . . B . . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . .

c 23. noni.

COROL-

## COROLLARIVM.

A... B...
C.........

Hinc ſequitur, Imparem numerum in ſe multiplicatum gignere imparem: ut conſtat, ſi impares A, & B, ponantur æquales.

## EX CAMPANO.

**Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.**

a29. noni.

A... C....
B..........

Metiatur impar A, parem B, per C. Dico C, parem eſſe. Nam ſi impar ſit; a erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod eſt abſurdum, cum ponatur par. Eſt ergo C, par.

**Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.**

b28. noni.

A... C......
B.............

Metiatur impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem eſſe. Si enim ſit par; b erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod eſt abſurdum, cum impar ponatur. Eſt ergo C, impar.

## SCHOLIVM.

Ex his clariſſime quoque demonſtrabimus theorem 11. lib. 2. numeris non poſſe accommodari: Id quod etiam in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. aliter oſtendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonſtraturos. Secetur enim, ſi fieri poteſt, numerus AB, in partes AC, CB, ita ut numerus ex AB, in CB, factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur utraque pars AC, CB, impar eſt; aut major AC, impar, & minor CB, par; aut contra, major AC, par, & minor CB, impar: aut denique utraque pars AC, CB, par.

A ---C---B
D--- E--

c22. noni. d28. noni. Sit primum utraque pars AC, CB, impar. c ideoque totus numerus AB, par. d Igitur qui fit ex AB, in CB, par eſt; qui vero ex AC, in ſe fit, impar eſt, ex Coroll. hujus propoſ. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex AC, in ſe: erit par numerus impari æqualis, quod fieri non poteſt.

e28. noni. Deinde ſit AC, impar, & CB, par, ideoque ex ſcholio propoſ. 23. hujus lib. totus AB, impar. e Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus par eſt: & numerus ex impare AC, in ſe genitus, impar, ex coroll. hujus propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis, quod eſt abſurdum.

f29. noni. Tertio ſit AC, par, & CB, impar, ideoque ex ſcholio propoſ. 23. hujus lib. totus AB, impar. f Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar eſt: & numerus ex pare AC, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. hujus lib. erit rurſus ille par huic impari æqualis: quod eſt abſurdum.

Quar-

Quarto ſit utraque pars *A* C,C B,par. Inventis igitur, ex ſcholio propoſ.35.lib.7.duobus numeris minimis D E,proportione A C,ad C B: *a* erunt D E,inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, a 24.*ſep.* ſed vel uterque impar, vel unus impar,&alter par. Et quia eſt,ut *A*C, ad C B,ita D,ad E: *b* erit convertendo,ut C B,ad A C,ita E, ad D: Et b 26.*ſep.* componendo,ut A B,ad A C,ita totus D E,ad D: *c* Eſt autem ut *A*B, c 20.*ſep.* ad *A* C,ita A C,ad C E: quod numerus factus ex *A*B, in C B, æqualis ponatur quadrato medii A C. Igitur erit quoque ut totus D *E*,ad D,ita D,ad E,*d* ac proinde numerus,qui fit ex toto *D* E, in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D E, ſectus eſt d 20.*ſep.* in partes D E,quarum vel utroq; impar eſt,vel una impar, & altera par,ita ut numerus factus ex toto D *E*,in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D,quod fieri non poſſe tam demonſtratum eſt in numero *A* B,quando utraque pars *A* C,C B,vel impar eſt,vel una impar,& altera pars. Conſtat ergo propoſitum.

## THEOR. 20. PROPOS. 30. xxxiij.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

*Metiatur impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipſius B,metiri. Metiatur A,ipſum B,per C. Erit ergo ex iis, quæ ex antecedente propoſ. ex Campano demonſtravimus, numerus C,par. Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A,metiatur B, per C, e metietur quoque C,ipſum B, per A: Ac proinde C,pars erit ipſius B, denominata ab A,ut ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam vero eſt ut C,ad dimidium ſui,ita B, ad dimidium ſui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipſius C,ad dimidiam partem ipſius B, Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, ut oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidii ipſius B, pars ab eodem A,denominata. f Ac propterea A,dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.*

e 8. *pronun.*

f 40.*ſep.*

A . . .     C . . . .

B . . . . . . . . . . . .

xxxiv.

## THEOR. 29. PROPOS. 31.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

A . . . . B . . . . . . . .

C . . . . . . . . . . . . D . . .

*Impar numerus A, primus ſit ad numerum B, cujus duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D, qui neceſſario impar erat. Nam ſi ſit par, cum metia-*

*tur*

a 28. noni. *tur imparem* A *: erit A, ſactus ex* D*, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum, ponitur enim A, impar. Quare* D*, impar parem* C*, metiens, (eſt enim* C*, par, cum dimidium*

A..... B.........
C. ............D--

b 30. noni. *habeat B.)* b *metietur quoque numerum* B*, ejus dimidium: Metitur autem & A. Igitur* D*, ipſos* A, B*, primos inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad* C*, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.*

### COROLLARIVM.

Sequitur hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad ejus duplum, ut Euclides demonſtravit, ſed etiam ad ejus quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus eſt ad
c 31. noni. duplum, c primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt: Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

## THEOR. 30. PSOPOS. 32.

XXXV. Numerorum à binario duplorum unusquiſque pariter par eſt tantum.

*Numeri à binario* A*, dupli quotcunque ſint* B, C, D, E. Dico B, C, D, E*, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam expoſita unitate, cum* A*, ſit binarius, &* B, C, D, E*, à*

*Vnitas. A,*2. B,4. C,8. D,16. E,32,

*binario dupli: erunt A,*B, C, D, E*, ab unitate deinceps proportionales nimirum in proportione dupla.* d *Quare* A*, quemlibet ipſorum*
d 11. noni. B, C, D, E*, & quilibet minor majorem ſequentem metitur per aliquem ipſorum* A, B, C, D, E*: qui cum omnes ſint pares, utpote dupli à binario: metietur quemlibet ipſorum* B, C, D, E*, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.*

*Quod autem iidem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim* A, B, C, D, E*, ſint ab unitate continue proportionales, ſitque* A*, proximus unitati numerus primus, nimirum*
e 13. noni. *binarius:* e *nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A,* B, C, D, E*: qui cum ſint omnes pares, metietur quemlibet ipſorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par eſt tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonſtrandum erat.*

### SCHOLIVM.

Hinc cum Arithmeticis colligemus artem, qua omnes numeros inveniamus, qui ſint pariter pares tantum. Sint enim A, *B*, C, *D*, E, F,

à bi

à binario dupli, qui ex hic demonſtratis omnes ſūt pariter pares

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.

I ---H----G ----

tantum. *D*ico nullum alium eſſe pariter parē tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò ſi ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantùm inveniri, nullo relicto. Si enim fieri poteſt, ſit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cujus pars dimidia ſit H. *E*rit igitur H, numerus par, (Nam ſi dicatur impar, cùm ſit ipſius *G*, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipſum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod eſt abſurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cujus rurſum dimidia pars ſit I. Erit igitur rurſum I, par numerus: (Nam ſi dicatur impar, cùm ſit ipſius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipſum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod eſt abſurdum: ponitur enim pariter par tantùm) *A*tque ita deinceps erit ſemper dimidia pars numerus par, donec ad unitatem veniamus. Sit ergo jam ipſius I, dimidia pars unitas, ita ut ſit I, binarius. Igitur H, G, ſunt à binario I, dupli: *A*c proinde G, erit aliquis ex ordine ipſorum *A*, *B*, C, D, E, *F*, ponitur autem, non eſſe. Quod eſt abſurdum. Nullus ergo alius pariter par eſt tantùm, præter eos, qui à binario ſunt dupli.

## THEOR. 31. PSOPOS. 33.

xxxvj.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantùm.

HABEAT *numerus A, dimidiam partem numerum imparem.* Dico *A, eſſe pariter imparem tantùm. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipſum* A, *per illum dimidium imparem. Quare* A, *ex definitione, pariter impar eſt Quòd autem idem* A, *ſit pariter impar tantùm, hoc modo demonſtrabimus: Sit* B, *dimidia pars ipſius* A; *&* C, *binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantùm; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum* D, *par per parem* E. a *Igitur ſit A, ex* D, *in* E: *ſed idem A, ſit ex* C, *binario in* B; *ejus dimidium. Ergo numerus factus ex* C, *primo in* B, *quartum æqualis eſt ei, qui ſit ex* D, *ſecundo in* E, *tertium.* b *Ac propterea erit ut* C, *ad* D, *ita* E, *ad* B. *Metitur autem* C, *binarius parem* D. *Igitur &* E, *ipſum* B, *metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo* A, *pariter par. Ergo pa-*

A..............

A............

B. . . . . C.:

D----  E---

a 9. pronun.

b 19. ſept.

*riter impar tantùm. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, invenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantùm. Quòd enim quilibet illorum ſit pariter impar tantùm, conſtat ex hac propoſitione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparē. Quòd autem illi ſoli ſint pariter impares tantùm, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demonſtratur, omnes pares, qui nec à binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, prætet duplos imparium numerorum, manifeſtum eſt, nullum alium præter ipſos, eſſe pariter imparem tantùm; ſed vel eſſe pariter parem tantùm, vel certè pariter parem & pariter imparem.

| | |
|---|---|
| Impares | 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. |
| Pariter impares tantum | 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. |

## THEOR. 32. PROPOS. 34.

xxxvij. SI par numerus neque à binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

*PAR numerus A, neque ſit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem.* Dico A, *& pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quòd enim ſit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par eſt.*

*QVOD autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtendemus. Diviſo A, bifariam, & ejus dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam ſi in binarium incideremus, eſſet A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Aliàs ſi per imparem metiretur,*
a29. noni. *a cùm impar imparem multiplicans faciat imparem: eſſet A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem: atque adeò viciſſim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, ~~& pariter impar~~. Si par ergo numerus neque à binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat.*

SCHO-

## SCHOLIVM.

FACILE ex his inveniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſunt, & pariter impares. Relictis enim omnib⁹ illis, qui à binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares: erunt ex hac propoſ. omnes alii pares, & pariter pares, & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. ſcripſimus.

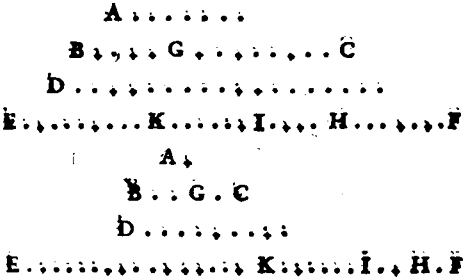
## THEOR. 35. PROPOS. 35.

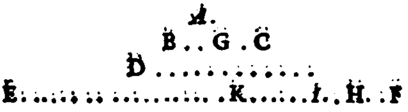
xxxviij.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & ultimo æquales ipſi primo: Erit ut ſecundi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

*SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F: & ex B C ſecundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo, A, æquales. Dico eſſe ut B G, ad A, ita E H, ad A, B, C, & D, ſimul. Detrahatur F I, ipſi B C, & F K, ipſi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis eſt ipſi B C, & ablatus F H, ablato C G: erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò eſt ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F: convertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A: Atque eſt K F, ipſi D, & I F, ipſi B C, & H F, ipſi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Dividendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F;* a *Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc eſt, totus E H, ad D, B C, A, ſimul. (quibus ſumpti ſunt æquales K F, I F, H F;) ut I H, ad H F, hoc eſt, ut B G, ad A: ſunt enim B G, & A, ipſis I H, & H F, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.*

a 12. ſeptimi.





## SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum continuè proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & ultimus fuerint noti. Cùm enim ſit ut exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus à ſecundo, & ultimo dematur, fiatque ut reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus ultimi ad alium. Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui ultimum antecedunt. Si igitur adjiciatur ultimus, habebitur tota ſumma. Invenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum ultimi, & productus dividatur in exceſſum ſecundi: ut liquet ex ſcholio propoſ. 19. hujus lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inveniendus eſt, ſunt exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus ultimi: Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. ultimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe ut 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto ultimo, ſi ſecundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui ſi dividatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo ultimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inventæ 1003 procreabitur ſumma omnium 3280.

1.3.9.27.81.243.729.2187.

## THEOR. 34. PROPOS. 36.

xxxix.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

*SINT ab unitate quotcunque numeri A*, B, C, D, *dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat* F. D*ico* F, *eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri*

Vnitas, A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ---- 262. H, 124. *I*, 248. F---- 426.
K, 31. M, 31. L, 31. *N*, 465.
O---- P----

A, B, C, *D, tot ſumantur ad E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo ut* A, *ad* D, *ita E, ad I;* a A*c propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex* D, *ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F, ex D, in E. Igitur idem* F, *fiet ex* A, *in I;* b *ideoque I, ipſum* F, *metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſius I, duplus*
*erit,*

a 19. *ſep.*
b 7. *pronun.*

*erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, ultimo numeri K,L, primo E, æquales, ſintq; reliqui exceſſus M,N.* a *Erit igitur ut M, ad E, ita N, ad E,G,H,I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cùm enim G, duplus ſit ipſius E, ablatusq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E,G.H,I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex unitate, & A,B,C,D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis unitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cùm unitas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cùm enim F, factus ſit ex E, in D;* b *metietur D, ipſum F;* c *atque adeò eundem F, metietur unitas, & numeri A,B,C,* d *qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cùm I, ipſum F, metiatur, ut oſtenſum eſt,* e *metientur quoq; eundem F, numeri E,G,H,* f *qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, ut mox oſtendemus; Erunt unitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cùm æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.*

a 35. noni.

a 7. pronun.

c 11. pronun.

d 11. pronun.

e 11. pronun.

f 11. noni.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G------62. H,124. I,248. F-----496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O-------- P----

*QVOD autem nullus alius numerus, præter A,B,C,D,E,G,H,I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P:* g *atque adeò F, fiat ex O, in P; Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium:* h *ac propterea eſt ut E ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A,B,C, D, ab unitate ſint proportionales, & A, proximus unitati primus,* i *ultimum D, nullus alius, præter A,B,C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P: neque igitur E, ipſum P, metietur. Cùm ergo F, primus ſit,* k *erunt E, & P, inter ſe primi:* l *ideoque in ſua proportione minimi:* m *Ac proinde æquè metietur E, ipſum O, & P, ipſum D.* n *Nullus verò alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A,B,C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli E,G,H. Erit igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H:* o *Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex*

g 9. pronũ.

h 19. ſept.

i 13. oct.

k 31. ſep.

l 23. ſep.

m 21. ſept.

n 32. oct.

o 19. ſept.

P, in

a 19. ſeptim. *P, in O, qui ex B, in H, a atque adeò erit, ut P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diverſus ab omnibus A, B. C, D, E, G, H, I, Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inveniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, juxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab unitate dupli in unam ſummam colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continuè dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab unitate, excluſa unitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab unitate dupli, una cum ipſa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inventus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facilè ex ſubjectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1 2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. ultimum duplorum, perfectus, cujus partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia compoſitus ex his 1, 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 1. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compoſitus ex his 1 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cujus partes aliquotæ ſunt 1. 2 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inveniemus.

LVBET hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus, hinc exordientes.

## I.

QVOLIBET numero per duos quoſvis numeros diviſo, erunt duo hi numeri Quotientibus converſo ordine proportionales.

NVMERVS enim *A*, diviſus per B, *C*, faciat Quotientes *D*, E, *Dico* eſſe, ut B, ad *C*, ita *E*, ad D. Quoniam enim diviſo A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, ut ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet

A, 48.
B, 8. C, 3.
D, 6. E, 16.

fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium: a erit ut B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum. a 19. ſep.

## II.

QVOLIBET numero per quotvis numeros diviſo, erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus reſpondentibus converſo ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico eſſe ut B, ad C, ita G, ad F. Et ut C, ad D, ita H, ad G: Et ut D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proximè demonſtrato. Cùm enim duo B, C, dividentes A, faciant F, G, erit ut B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, dividentes A, faciant G, H: erit ut C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, dividentes A, faciant H, I: erit ut D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, ſi plures fuerint. Quod eſt propoſitum.

A, 48.
B, 3. C, 4. D, 8. E, 6.
F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

## III.

QVOLIBET numero per quotvis numeros continuè proportionales diviſo, erunt Quotientes converſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, ut D, ad E, ita I, ad H: Et ut C, ad D, hoc eſt, ut D, ad E, ita H, ad G: Et ut B, ad C, hoc eſt, ut C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

## IV.

SI ſint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eiſdem proportionibus; erit ut ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

SINT quotvis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alii E, F,G, quorum ſumma H; ſitque ut A,ad B,ita E,ad F; & ut B, ad C,ita F,ab G. Dico eſſe,ut D, ad A, B,C, ſigillatim,ita H,ad E,F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit ut A,ad B, ita E, ad F; erit componendo,ut A,B, ſimul ad B,ita E,F,ſimul ad F: Vt autem B, ad C,ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, ut A,B,ſimul,ad C,ita erit EF, ſimul ad G: Et componendo,ut A, B, C,ſimul,hoc eſt,ut D,ad C,ita E, F,G, ſimul,hoc eſt,H,ad G.

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G,40.
H, 58.

QVIA igitur eſt,ut D,ad C, ita H,ad G: Et convertendo, ut C, ad B,ita G,ad F; erit ex æquo,ut D,ad B,ita H,ad F.

DENIQVE quia eſt,ut D,ad B, ita H,ad F: Et convertendo,ut B, ad A,ita F,ad E; erit ex æquo,ut D,ad A, ita H,ad E. quod eſt propoſitum. Eademque tario eſt de pluribus.

## V.

SI ſint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diviſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diviſa facit.

NAM, ut in 4. theor. oſtenſum eſt,eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde utriuſque proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diviſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis: idem Quotiens omnino procreabitur, ſi utraque ſumma ſeorſum per primos numeros, quæque per ſuum, dividatur. Eademque ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diviſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

## VI.

SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim dividatur; & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine converſo.

SINT continuè proportionales quotvis numeri A,B,C, D, quorum ſumma E, per ipſos diviſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diviſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine converſo, hoc eſt, F,& O,eoſdem eſſe: Item G,& N: H,& M: L& L,&c.

Quo-

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G H,I, eandem continuam proportionem habent converſo ordine, quam numeri A, B,C,D. Et quotientes L,M,N,O, converſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema E, ad A, ut K, ad I. Quare cum ex diviſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diviſione E, per A, qui ex diviſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F,& O, æquales erunt F,& O. Eadem ratione æquales erunt G,& N; H,& M; I,& L,&c. quod eſt propoſitum.

A,1. B,2. C,4. D,8.

E,15.

F,15. G,$7\frac{1}{2}$. H,$3\frac{3}{4}$. I,$1\frac{7}{8}$.

K,$28\frac{1}{8}$.

L,$1\frac{7}{8}$. M,$3\frac{3}{4}$. N,$7\frac{1}{2}$. O,15.

## VII.

**SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim dividatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in ultimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in ſe.**

SINT primum quotvis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B,C,D,E,F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diviſa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum ſumma O. Dico ſummæ O, æqualem eſſe numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K,L,M,N, ſunt continuè proportionales converſo ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, ut I, ad H.[a] Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diviſa per H,I,K,L,M,N, producit eoſdem Quotientes converſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diviſa per H, facit Quotientem N, producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,32

G, 63.

H,63. I,$31\frac{1}{2}$. K,$15\frac{3}{4}$. K,$7\frac{7}{8}$. M,$3\frac{15}{16}$. N,$1\frac{31}{32}$.

O,$124\frac{1}{2}$.

[a] 19. ſeptim.

SINT deinde quotvis numeri multitudine impares continuè proportio-portionales A,B,C,D,E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diviſa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in ſeipſum. Quod enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, ut prius. Deinde verò quia

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
O, 31. H, $15\frac{1}{2}$. I, $7\frac{3}{4}$. K, $3\frac{7}{8}$. L, $1\frac{15}{16}$.
M, $60\frac{1}{16}$.

tres numeri H, I, K, continuè proportionales ſunt, a erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur, quod eſt propoſitum.

a 20. ſeptim.

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cujus latus, ſive radix, eſt medius terminus.

ITAQVE ſi inveniendi ſint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in ultimum gignitur, vel ex quibuſvis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant; accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim dividatur: erunt Quotientes quæſiti numeri, ut ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotvis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cujus latus, ſive radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione tondem numeri continuè proportionales, eorumque ſumma per eos ſigillatim dividenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, ut ex eodem hoc 7. theor liquet Atque mirabile ſanè eſt, poſſe reperiri quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in ultimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis: & denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſe ipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex uno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumque ſummam per utrumq; dividat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, ut oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in ultimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inveniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione unius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque ſumma 11. per utrumque dividatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti.

ſiti.

ſiti. Habent enim proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

# MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

## I.

DVÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum unius numerator ſit unitas, eandem proportionem habent. quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, ſit unitas. Dico ita eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, ut eſt numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim unitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quod minutia A B, dividitur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot unitates ſunt in A, ita ut quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. a Igitur eadem pars eſt unitas C, numeri A, quæ minutiæ C B, minutiæ A B; ac proinde eſt, ut unitas, C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et convertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, ut minutia A B, ad minutiam C B, quod eſt propoſitum. a 29. defin.

$$\frac{A,6.}{B,11.} \qquad \frac{C,1.}{B,11.}$$

QVONIAM verò minutiæ ſunt fractiones, ſive particulæ vel unitatis, vel alterius cujuſpiam numeri, (Neque enim eorum ſententiam probare poſſum, qui exiſtimant, eas reſpectu ſolius unitatis eſſe accipiendas; propterea quod falſo putant, earum demonſtrationes non poſſe omnes explicari in numeris integris, ſed ſolum in unitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonſtrationes quibuſvis etiam numeris integris accommodabimus,) conabimur omnes minutiarum demonſtrationes numeris integris explicare, ut exemplis etiam ſtudioſus lector addiſcat, veras eſſe demonſtrationes, quas aſſerimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, hujus numeri integri 44. Et quia ejus $\frac{1}{11}$. eſt 4. & $\frac{6}{11}$. ſunt 24. perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. ut eſt numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. ut 6. ad 1.

HANC porrò propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in univerſum de quibuſcunque duabus minutiis ejuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat unitatem.

## II.

NVMERATOR cujuſvis minutiæ ad denominatorem

**torem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cujus eſt minutia.**

SIT minutia quæcunque A,B. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem B, ut eſt minutia A B, ad ſuum integrum. Sumatur minutia C B, cujus numerator C, unitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cujus numerator D, æqualis ſit eidem denominatori B, ita ut ſuo integro ſit æqualis. Quando enim numerator denominatori eſt æqualis, minutia ſuo integro æquivalet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipſum integrum diviſum eſt, ac proinde totum integrum contineat. a Quoniam igitur eſt, ut A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: a 1. hujus. Et ut C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo ut A ad D, hoc eſt, ut numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc eſt, ad integrum. quod eſt propoſitum.

$$\frac{A,3.}{B,5.}\quad\frac{C,1.}{B,5.}\quad\frac{D,5.}{B,5.}$$

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B, numerator A, unitas, ita ut minutia ſit pars aliquota integri C, ſive C, ſit unitas, ſive numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quod tot minutiæ ipſi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties unitas eſt in B, denominatore. Cum ergo & unitas A, ſit pars numeri B, ab ipſo B, denominata, ut ad defin 2. lib. 7. ſcripſimus; eadem pars erit unitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. b 20. defin. b Quare erit, ut A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C, quod eſt propoſitum.

$$\frac{A,1.}{B,5.}\quad\frac{C,1.}{C,30.}$$

DEINDE non ſit unitas numerator A. Sumatur minutia D B, cujus numerator D, unitas & denominator idem B, qui minutiæ A B. c 1. hujus. c Et quia eſt ut A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et ut D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, ut proximè demonſtravimus; erit ex æquo, ut A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. Quod eſt propoſitum.

$$\frac{A,3.}{B,5.}\quad\frac{D,1.}{B,5.}\quad\begin{matrix}C,1.\\C,30.\end{matrix}$$

ITAQVE ſi data minutia $\frac{3}{5}$. ſit hujus numeri integri 30. erit ejus $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. ubi vides ita eſſe 18. ad 10. ut eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

## III.

**MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.**

SIT quælibet minutia A B. Dico eam eſſe partem numeratoris d 2. hujus. A, à denominatore B, denominatam. d Quoniam enim eſt, ut A, ad B, nu-

B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C, erit permutando, ut A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et convertendo, ut minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties unitas eſt in denominatore B, ) ab ipſo denominatore B; denominata; ( Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum; quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties eſt vnitas in numeratore A, ) eadem pars à denominatore B, denominata, quod eſt propoſitum.

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$ eſſe hujus integri 30. cujus $\frac{3}{5}$. ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator valet 150. ( quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. ſumitur reſpectu unitatis, numerator continet tres unitates, & denominator quinque.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat; quæ tres unitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque unitatum, quarum quælibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque unitates conficiunt 150. pars, inquã, à denominatore 5. denominata.

## IV.

### DATÆ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat unitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet unitatem; demonſtratur hic de quibuſvis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, ut eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. a Quia enim eſt, ut A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam b cum ſit, ut C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit convertendo, ut B, ad C, ita integrum ad minutiam C B, ) erit ex æquo, ut A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B, quod eſt propoſitum.

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

a 2. hujus.
b 2. hujus.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. ſint hujus integri 28. cujus $\frac{6}{7}$. ſunt 24.

& $\frac{3}{7}$. ſunt

& $\frac{3}{9}$. ſunt 12. ubi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. ut eſt numerator 6. ad numeratorem 3.

## V.

SI duarum minutiarum numerator prioris, in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, ut prior numerus productus ad poſteriorem.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C D, ut eſt F, ad H. Fiat enim H, ex *B*, in D Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, *a* erit ut *A*, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, *b* ita eſt minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, (ut minutia A B, ad integrũ, ita F, ad H. Rurſus quia C, *D*, multiplicantes B, faciunt G, H; *c* erit ut C, ad *D*, ita G, ad H: Et convertendo, ut D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita eſt integrũ ad minutiam C D, (Nam *d* cum ſit, ut C, ad *D*, ita minutia C D, ad integrum, erit convertendo, ut D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoque, ut H, ad G, ita integrum ad minutiã C D. Ex æquo igitur erit, ut F, ad G, ita minutia A B, ad minutiam C D, quod eſt propoſitum.

a 18. *ſep.*
b 2. *hujus.*
c 18. *ſep.*
d 2. *hujus.*

| | | |
|---|---|---|
| F, 10. | | G, 12. |
| A, 2. | | C 4. |
| B, 3. | × | D, 5. |
| | H, 15. | |

| | |
|---|---|
| F, | *A* B. |
| H. | Integrum. |
| G. | C D. |

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ ejus, 20. at quatuor quintæ ejuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt, ita eſſe 20. ad 24. ut 10. ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C *D*, æqualis: ſi minor, minor: Et ſi major, major; propter eandem proportionem F, ad *G*, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum utra duarum minutiarum major ſit.

## VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum unus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter verò ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F, & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ut eſt H, ad ſummam numerorum F, G. [a] Quoniam enim eſt, ut minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, ut ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H, (nam [b] ut minutia CD, ad integrum, ita eſt C, ad D. [c] Et ut C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quod G, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, ut ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H: Et convertendo, ut integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G, quod eſt propoſitum.

$$\begin{array}{ccc} F,\ 16. & & G,\ 12. \\ \dfrac{A,\ 2.}{B,\ 3.} & \times & \dfrac{C,\ 4.}{D,\ 4.} \\ & H,\ 15. & \end{array}$$

[a] 5. *hujus.*
[b] 2. *hujus.*
[c] 18. *sept.*

$$\begin{array}{ccc} AB, & CD, & F,\ G, \\ & CD. & G. \\ \text{Integrum.} & & H. \end{array}$$

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$ particulæ numeri 30. cujus $\frac{2}{3}$. ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. ejuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30 ad hanc ſummam 44. ut eſt 15. ex denominatoribus productus ad ſummam numerorum 20. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

## VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit ut prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam AC, ut eſt denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [d] erit ut D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, [e] ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, ut C, ad B. quod eſt propoſitum.

$$\begin{array}{ccc} D,\ 105. & & E,\ 35. \\ \dfrac{A,\ 5.}{B,\ 7.} & \times & \dfrac{A,\ 5.}{C,\ 12.} \end{array}$$

[d] 17. *sept.*
[e] 5. *hujus.*

*DVÆ* minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cujus $\frac{5}{7}$. ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. ejuſdem 10. Manifeſtum autem eſt, ita eſſe 30. ad 10. ut poſterior denominator 21. ad priorem 7.

## VIII.

MINVTIÆ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores

ean-

eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem; illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

a 2. hujus.

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

SINT duæ minutiæ A B, C D, ſitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales eſſe. *a* Quoniam enim eſt, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et ut C ad D; ita minutia C D, ad idem integrum: ut autẽ A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia A B, ad integrum, ut minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ A B, C D, quod eſt propoſitum.

b 2. hujus.

SED ſint jam æquales minutiæ A B, C D. Dico eſſe ut A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit ut minutia A B, ad integrum, ita minutiæ C D, ad idem integrum. *b* Eſt autem, ut minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. *Igitur erit quoque*, ut A, ad B, ita C, ad D, quod eſt propoſitum.

c 2. hujus.

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

DEINDE ſit major proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico majorem eſſe minutiam A B, quam C D. *c* Cum enim ſit, ut A, ad B, ita minutia A B, ad integrum, & ut C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum, ponatur autem major proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque major proportio minutiæ A C, ad integrum, quam minutiæ C D, ad idem integrum. Major ergo eſt minutia A B, quam minutia C D, quod eſt propoſitum.

d 2. hujus.

VERVM ſit jam minutia A B, major, quam minutia C D. Dico majorem eſſe proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim major proportio minutiæ A B, majoris ad integrnm, quam minutiæ C D, minoris ad idem integrum. *d* Cum ergo ſit, ut minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & ut minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, quod eſt propoſitũ.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. integer numerus ſit 24. cujus tam $\frac{3}{4}$. quam $\frac{9}{12}$. ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. ejuſdem numeri 24. ſunt 16. ubi manifeſtum eſt, numerum 18, majorẽ eſſe numero 16. ideoque minutiam $\frac{3}{4}$. majorem eſſe minutia $\frac{2}{3}$.

## IX.

MINVTIÆ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales; Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores: Cuius autem nutem numerator, majorem proportionem habet, illa major eſt: Et majoris numerator majorem habet proportionem, quam denominator.

SINT duæ minutiæ A B, C D, ſitque eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipſas æquales eſſe. Erit enim permutando, ut A, ad B, ita C, ad D: *a* ac proinde minutiæ æquales erunt, quod eſt propoſitum. a 8. hujus.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SED ſint jam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita eſſe, A, ad C, ut B, ad D. *b* Erit enim ut A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, ut A, ad C, ita B, ad D. quod eſt propoſitum. b 8. hujus

DEINDE ſit major proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, majorem eſſe minutia C D. Erit enim permutando quoque major proportio A, ad B, quam C, ad D, *c*. ac propterea major erit minutia A B, quam C D, quod eſt propoſitum. c 8. hujus.

A, 6. C, 3.
R, 9. D, 5.

VERUM ſit jam minutia A B, major quam C D. Dico majorem proportionem eſſe A, ad C, quam B, ad D. *d* Erit enim major proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando major proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod eſt propoſitum. d 8. hujus.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$ partes integri numeri 90. ubi vides minutiam $\frac{6}{9}$ hoc eſt, 60. æqualem eſſe minutiæ $\frac{2}{3}$. id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id eſt, 60. majorem eſſe minutia $\frac{3}{5}$. hoc eſt, numero 54.

## X.

DUAS minutias diverſarum denominationum ad alias duas ejuſdem denominationis illis æquales reducere.

DUÆ minutiæ A B, C D, habeant diſſimiles denominatores B; D. Fiat E, ex A, in D: & F, ex C, in B: & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, eſſe æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; *e* erit ut A, ad B, ita E, ad G. *f* Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G; *g* erit ut C, ad D, ita F, ad G. *h* Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B; 3. ✕ D, 5.
G, 15.

e 18. ſep:
f 8. hujus:
g 18. ſeptimi
h 9. hujus:

## XI.

INTEGRUM numerum quemcunq; ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam cujus denominator C. Sumatur unmerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, unitati A, æqualē eſſe: a 2. hujus. a Quia enim eſt, ut B, ad C, ita minutia B C ad integrum A; Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id eſt, unitati, erit æqualis, quod eſt propoſitum.

B, 6.
A, 1.
C, 6.

DEINDE ſit integer numerus A, revocandus ad minutiam, cujus denominator C, & ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem eſſe. Supponatur enim integro A, unitas D, ut fiat minutia A D, tot unitatib. æqualis, quoties unitas eſt in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, ut A, ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, b ipſæ inter ſe æquales erunt. Quare cum minutia b 8. hujus. A D, ſit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui eſt unitas; erit quoque minutia B C, eidem integro A, æqualis eſt propoſitum.

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

## XII.

## DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A ut fiat numerator C, manente eodē denominatore B: vel denominator B, quando par eſt, dimidietur, ut fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico utramque minutiam C B, A D, duplam eſſe minutiæ A B. c 4. hujus. Cum enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem; c erit ut C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B minutia ad minutiam. Eſt autem C, ipſius A, duplus ex conſtructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit, quod eſt propoſitum.

A, 3. C. 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

d 7. hujus. RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem; d erit ut B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Eſt autem B, ipſius D, duplus, per conſtructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit, quod eſt propoſitum.

DEINDE dimidianda ſit minutia A B. Dupletur denominator B, ut fiat denominator C, manente eodem numeratore A, Vel numerator A, quando par eſt, dimidietur, ut fiat numerator D, manente eodem denominatore e 7. hujus. B. Dico utramque minutiam A C, D B, dimidium eſſe minutiæ A B. Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; e erit ut B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minu-

A, 6. A, 6, D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

tiæ

tiæ ad minutiam. Cum ergo ergo B, ſit per conſtructionem ipſius C, dimidium; erit & minutiæ A C minutia A B, dimidium quod eſt propoſitum.

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; *a* erit ut D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B. minutia ad minutiam. Cum ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium, quod eſt propoſitum. a 4. *hujus.*

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore: vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore, vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.

## XIII.

### MINVTIA minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cujus numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, reſpectu integri numeri E, ſive unitatis E, & valorem hujus minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F ex A, in C, & *G*, ex B in D. Dico datam minutiam minutia æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri E, cujus videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rurſus H, ex C in B. *b* Et quoniam eſt ut A ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum nimirum ad minutiã C D, cujus integrum eſt F: *c* Item ut A, ad B, ita eſt F ad H, quod *A B*, B ipſum C multiplicantes faciant F H. Erit quoque ut minutia A B ad minutiam C D, ita F ad H. Rurſus *d* quia eſt, ut C, ad D, ita minutia C D ad ſuum integrum E: *e* Item ut C, ad D, ita eſt H, ad G, quod B, ipſos C *D*, multiplicans fecerit H G, Erit quoq; ut C D, minutia ad ſuum integrũ E, ita H, ad G. Quoniam igitur eſt, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita F ad H: Et ut minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, ut AB, minutia minutiæ C *D*, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quod ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutia C D; cum ejus valorem reſpectu integri E,

b 2. *hujus.*
c 18. *ſeptim.*
d 2. *hujus*
e 17. *ſeptim*

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, $\frac{1}{4}$.

AB. B.
CD. H.
E. G.

expri-

exprimat. Igitur erit quoque ut F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad
12. hujus. integrum E. *a* Cum ergo quoque ſit, ut F, ad G, ita minutia F G, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & F G: ac proinde cum minutia K. æqualis ſit datæ minutiæ erit quoque ſimplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cujus integrum E, quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiæ $\frac{3}{4}$ reſpectu integri 24. Hujus numeri. $\frac{3}{4}$ ſunt 18. & hujus numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12 qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$; quæ huic $\frac{1}{2}$ æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

## XIV.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

b 13. hujus

E, 6.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.}$ $\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}$

F, 12.

SIT primum A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D fiat F. *b* Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam E F, quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita ut C D, ſit minutia minutiæ E F, & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A in C, & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E, & K ex H, in F; atque ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri ultimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cujus numerator, I & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe. *c* Nam minutia G H,

G, 6. I, 6.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.}$ $\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}$ $\frac{E,\ 1.}{F,\ 2.}$

H, 12. K, 24.

c 13. hujus

d 13. hujus

æqualis eſt minutiæ A B, minutiæ C D, reſpectu minutiæ E F; tanquam integri cujuſdam. *d* Item minutia I K, æqualis eſt minutiæ G H; (hoc eſt, minutiæ A B, minutiæ C D) minutiæ E F reſpectu integri, cujus E F, eſt minutia, & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris ultimo loco productis conſtituta; æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum, quod eſt propoſitum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiarũ $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Hujus numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & hujus numeri $\frac{3}{4}$ ſunt 9. Hujus deniq; $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quam denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

DATIS

## XV.

**DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita ut alterius numeri numeros hujus inventæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius hujus minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.**

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B ad aliam æqualem reducenda ſit, cujus numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem eſſe; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum, & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H. *a* erit ut A, ad B, ita G, ad H; *b* Ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D facit, F *c* metietur C, ipſum F per D: *d* Metietur autem & unitas ipſum D, per D. Eadem igitur pars eſt C, ipſius F, quæ unitas ipſius D. Cum ergo unitas ſit ipſius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipſius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipſius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, fit ex F, in A Quia igitur C, minutia eſt minutiæ F, reſpectu integri G, ſuntq; numeratores, unitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; *e* conſtituet C, minutia minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem M, (quas minutias C, F, M, ſeorſum ſcripſimus) reſpectu ejuſdem integri G, cujus nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant unitatem, & denominatores numerum K, (quod numeratores ſint unitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus eſt numerus K,) conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiam ſimplicem ejuſdem integri G, cujus numerator eſt unitas, & denominator numerus K, qualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri C, pars erit ipſius integri C, à numero K, denominata. Quocirca numerus G, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties unitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L. numerũ. Quod

G, 24. K, 8.

$\frac{A,\ 2.}{B,\ 3.}$ F, 12. $\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}$

H, 36. L, 9.

C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

a 17. *ſeptim.*
b 8. *hujus*
c 7. *pronũ.*
d 5. *pronun.*
e 13. *hujus*

eſt propoſ.

## XVI.

DVÆ minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicisſim ducti gignunt æquales numeros. Cujus vero numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum gignit illa major eſt. Et majoris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus majorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D, & ex A, in D fiat E, atque ex C in B, fiat F, ſintque primum numeri E F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E factus ex A, primo in D, quartum æquales eſt numero F, facto ex

a 19. ſept.
E, 24. F, 24.
A, 2. C, 8.
B, 3. ⋈ D 12.
b 9 hujus.
c 5. hujus.

C, ſecundo in B, tertium, a erit ut A, primus ad C, ſecundum numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. b Quare minutiæ A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic. c Quoniam eſt ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis quod eſt propoſitum.

SED ſint tam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum d erit ut ut A, ad C, numerator ad numeratorem ita B ad D, denominator ad denominatorem. e Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL ſic f Quoniam eſt, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E F, æquales, quod eſt propoſitum.

d 9. hujus.
e 19. ſeptim
f 5. hujus.

DEINDE ſit E numerus major numero F. Dico minutiam quoque A B, majorem eſſe minutia C D. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, major quam F, gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G primo in D, quartum, & ex G, ſecundo in B, tertium g erit ut

E, 24. F, 21.
G, $1\frac{3}{4}$ A, 2. C, 7.
B, 3. ⋈ D, 12.
g 19. ſeptim:

G, primus ad C, ſecundum ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autem major proportio A ad C, quam G, ad C, quod A, major ſit quam G, h Igitur major quoque erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia A B, major erit, quam minutia C D. VEL ſic i. Quoniam eſt ut E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D, Eſt autem E, major quam F; erit quoque minutia A B, major quam minutia C D, Quod eſt propoſitum.

h 9. hujus.
i 5. hujus.

VERVM

VERVM ſit jam minutia A B, major quam minutia C D. Dico & numerum E numero F, eſſe majorem. Cum enim major ſit minutia A B, quam minutia C D, *a* erit major proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quã B, ad D, qui ſit G. *b* Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum qui ex C, ſecundo in B, tertium Cum ergo ex A, in D, major fiat, quam ex C, in D, propterea quod B. major eſt quam G, erit quoq; E, factus ex A, in D, major quam F, ex C, in B genitus. VEL ſic. *c* Quoniam eſt, ut minutia A B, ad minutiam C D, ita E ad F. Eſt autem A B minutia major quam minutia C D, erit quoque E, maior quam F, quod eſt propoſitum.

a 9. *hujus.*
b 19. *ſeptimi*
c 5. *hujus.*

ATQVE hæc eſt quoque demonſtratio eius regulæ, quam in Arithmetica præſcripſimus ad dignoſcendum, utra duarum minutiarum propoſitarum major ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

## XVII.

### DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos revocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim, ſi fieri poteſt, ad minores terminos C D, ita ut minutia C D, minutia A B, ſit æqualis. d Quoniam igitur eſt, ut A, ad B, ita C ad C, ſuntque C D, numeri minores numeris A B, non erunt A B, minimi termini in ſua proportione: *e* ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint, quod eſt abſurdum.

A, 1. C, -
B, 12. D, -

d 8. *hujus.*
e 13. *ſep.*

SI vero A, B, non ſint inter ſe primi; *f* ſit eorum maxima menſura C, quæ metiatur A, per D; & B per E Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ A B, & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; *g* producentur A B ex C, in D, E. *h* Quare erit, ut A, ad B, ita D ad E, *i* ac propterea minutiæ A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E; erunt ex coroll. propoſ. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 11.

f 2. *ſep.*
g 8. *pronun.*
h 17. *ſep.*
i 8. *hujus.*

## XVIII.

### DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando fieri poteſt, revocare.

SIT data minutia A B, revocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus ſit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum

A, 3. E, 9.
B, 4. C,12.
D,36.

C,fiat D,quem metiatur B,denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C,cujus numerator *E*,& denominator C,datas, æqualem eſſe minutiæ A B,datæ. Qui enim B, metitur D,per E, *a* fiet D,ex B,in E : Factus eſt autem idem D,ex A,in C. *b* Igitur erit,ut A,primus ad B,ſecundum, ita E, tertius ad C,quartum ; *c* ideoque minutiæ A B,E C,æquales erunt, quod eſt propoſitum.

a 9. *pronun.*
b 19. *ſeptim:*
c 8. *hujus.*

QVOD ſi B,non metiatur D ex A,in C,procreatum, poterit data minutia *A* B,reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, ſi fieri poteſt, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C,æquales ſunt ; *d* erit ut A,ad B,ita E,ad C. *e* Idem igitur numerus fiet ex A,primo in C,quartum,qui ex B, ſeſecundo in E,tertium, videlicet numerus D, factus ex A,in C. *f* Igitur B,metietur D per E, quod eſt abſurdum. Ponitur enim ipſum D non metiri.

d 8. *hujus.*
e 19. *ſeptim*
f 7. *pronun.*

A, 3. E, –
B, 4. C,10.
D,30.

## XIX.

QVANDO minor numerus per majorem dividitur, numerus Quotiens eſt minutia, cujus numerator eſt numerus minor diviſus, denominator vero major numerus dividens.

g 8. *hujus.*

SIT minor numerus A, dividendus per majorem B. Dico Quotientem eſſe minutiam A B,cujus numerator A, & denominator *B*. *g* Quoniam enim eſt, ut A, ad B,numerus diviſus ad dividentem, hoc eſt, ut numerator ad denominatorem, ita minutia A B,ad integrum,hoc eſt,ad unitatem ; erit ex defin. Diviſionis minutia A B. Quotiens diviſionis numeri A, per numerum B,quod eſt propoſitum.

A,6. B,11.
A,6.
B,11.

HINC fit, ſi diviſo numero integro majore per integrum numerum minorem,aliquid ſuperſit ; Quotienti integro invento addendam adhuc eſſe minutiam,cujus numerator ſit numerus ex diviſione reliquus ; denominator vero,numerus dividens. Nam reliquus ille numerus,qui neceſſario minor eſt numero dividente, dividendus adhuc eſt per eundem numerum dividentem, qui major eſt. Verbi gratia Diviſo numero 23.per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc dividenda per 4. *h* Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$ ita ut totus Quotiens ſit $5\frac{3}{4}$.

h 19. *hujus fin.*

## XX.

MINVTIAS plures in unam ſummam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ AE,CB,ejuſdem denominatipationis. Ex A,& C,numeratoribus fiat ſumma D,cui idem denominator *B*, ſupponatur. Dico minutiam DB, eſſe ſummam ex additione minutiarum AB,CB,collectam. Quoniam enim minutiæ eandem habent denominationem; *a* erit ut A, ad C, ita minutia AB,ad minutiam CB. Et componendo, ut AC, ſimul ad C,ita minutiæ AB, CB, ſimul ad minutiam CB. *b* Vt autem C, ad D,ita quoque eſt minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit,ut AC,ſimul ad D,ita minutiæ AB, CB, ſimul ad minutiam DB. Cùm ergo A,& C,ſimul æquales ſint ipſi D,ex conſtructione; erunt quoque minutiæ AB, CB, ſimul æquales minutiæ DB. quod eſt propoſitum.

| | | |
|---|---|---|
| A,3 | C,4 | D,7 |
| B,10. | B,10. | B,10. |

a *4. hujus*

b *4. hujus*

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ AB,CD, diverſarum denominationum. Ducatur A,numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C,numerator poſterioris in B, denominatorem prioris,collectaq; ſit ſumma E,ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F,ex multiplicatione mutua denominatorum B,D,procreatus. Dico minutiam EF,eſſe ſummam ex datis duabus minutiis AB,CD,collectam. *c* Quoniam enim eſt,ut integrum ad ſummam duarum minutiarum AB,CD,ita F,ex denominatoribus productus ad E,ſummam productorum ex numeratoribus in denominatores viciſſim ductis: erit convertendo,ut ſumma minutiarum AB, CD,ad integrum,ita E,ad F: *d* Vt autem E,ad F,ita quoque eſt minutia EF,ad idem integrum. Igitur erit,ut ſumma minutiarum AB, CD,ad integrum,ita minutia EF,ad idem integrum. Quapropter ſumma minutiarum AB, CD,æqualis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF,ſumma erit ex minutiis AB, CD, collecta quod eſt propoſitum.

| | | |
|---|---|---|
| A,2 | C,3 | E,17. |
| B,2. | D,4. | F,12. |

c *6. hujus.*

d *2. hujus.*

VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorũ in denomitores viciſſim & ex multiplicatione denominatorum inter ſe, fiunt duæ minutiæ ejuſdem denominationis,minutiis AB, C*D*, æquales,ut ex demonſtratione propoſ. *10.* conſtat: ſi ſummæ E,productorum ex numeratoribus in denominatores ſupponatur F, cõmunis denominator ex denominatoribus procreatus,facta erit minutia EF. ſumma minutiarum AB,CD,hoc eſt, duarum illarum ejuſdem denominationis,ad quas AB,CD,reductæ ſunt,ut initio hujus propoſitionis demonſtratum.

IAM vero datis pluribus minutis; addendæ primum erunt duæ primæ:deinde hæc ſumma cum tertia conjungenda,atque hæc ſumma cum quarta,& ſic deinceps,donec omnes abſolvantur.

QVOD ſi dentur integra cum minutiis, addenda erunt integra ſeorſum,& minutiæ ſeorſum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. minutiæ hujus integri 60. cujus $\frac{2}{3}$. ſunt 40. & $\frac{3}{4}$. ſunt 45. Ex 40. & 45. fit ſumma 85. hoc eſt, totus numerus integer 60. & inſuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodũ ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta eſt ſumma $\frac{17}{12}$. id eſt, ſemel & 1. inſuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam ſumma minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{21}{27}$ hoc eſt, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum ſit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipſius 12 at $\frac{4}{9}$. ejuſdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. confici 28. hoc eſt $\frac{7}{9}$. ipſius integri 36.

## XXI.

## MINVTIAM minorem ex majore detrahere.

EX majore minutia AB detrahenda ſit minor C B, ſintque primùm hæ minutiæ ejuſdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore majoris, reliquus ſit numerus D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ C B, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, ſubtractus relinquit D, componetur A, ex C & D. Minutia ergo A B, cujus numerator A, ex numeratoribus C D, collectus eſt, ſumma eſt duarum minutiarum C B, D B, ut in prima parte antecedentis propoſ. oſtenſum eſt. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B, reliqua fiet minutia DB, quod eſt propoſitum.

$$\frac{A,\ 7.}{B,\ 10.}\qquad\frac{C,\ 3.}{B,\ 10.}\qquad\frac{D,\ 4.}{B,\ 10.}$$

DEINDE minutiæ AB, C D, habeant diverſos denominatores detrahendaq; ſit minor C D, ex majore A B. Ex C, numeratore minoris in B denominatorem majoris fiat E, & ex A, numerator majoris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat C, cui ſupponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, eſſe reliquam poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia AB. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H, a erit ut A ad B, ita F, ad H: b ut autem A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque ut F ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rurſus quia B, multiplica, C, D, facit E, H, c erit ut C, ad D, ita E, ad H. d Vt autem C, ad D, ita eſt minutia C D, ad integrum. Igitur erit quoque ut E, ad H, ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur eſt ut E primus ad H ſecundum, ita minutia C D, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et ut G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia G H, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholii propoſ. 22. lib. 7. ut E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundum, ita minutiæ CD, GH, terti-

$$\text{F, 13.}\qquad\qquad\text{E, 8.}$$

$$\frac{A,\ 3}{B,\ 4.}\times\frac{C,\ 2.}{D,\ 5.}\qquad\frac{C,\ 7.}{F,\ 20.}$$

a 17. ſeptim

b 2. hujus.

c 17. ſep.

d 3. hujus.

e 2. hujus.

tertius & ſextus numerus,ſimul,ad integrum. Vt autem E, G,ſimul ad H,ita eſt F,ipſis E,G,æqualis. (Nam E,ex F , detractus reliquit G,(ad eundem H Igitur erit quoq;,ut F,ad H,ita minutiæ C D,G H ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit,ut eſt F, ad H , ita eſſe minutia AB,ad integrum ; erit quoque ut minutia A B,ad integrũ, ita minutiæ C D, G H,ſimul ad idem integrum:ac propterea æquales erunt minutia A B,& minutiæ C D,G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D,ex minutia A B,reliqua erit minutia G H,quod eſt propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim,& ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ ejuſdem denominationis minutiis datis æquales, ut ex demonſtratione propoſ.10. conſtat ; ſi E factus ex C, in B,detrahatur ex F,facto ex A,in D ; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H,ex denominatoribus productus, fiet minutia G H,reliqua poſt detractionem minutiæ C D,ex minutia A B,veluti initio hujus propoſ. oſtenſum eſt.

IAM vero ſi dentur integra una cum minutiis , ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris,& minutia à minutia. Quod ſi minutia detrahenda,major ſit quam ea,à qua fieri debet , ſubtractio, a 11. hujus
a reducenda prius erit unitas una numeri integri,à quo fit ſubtractio,ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint 6$\frac{2}{3}$ ex 10$\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{3}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{1}{12}$. Totus ergo numerus reliquus erit 4$\frac{1}{12}$. At ſi ſubtrahenda ſint 4$\frac{5}{7}$ ex 20$\frac{1}{4}$. faciemus ex una unitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{1}{4}$. facit $\frac{5}{4}$. remanebuntque 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{5}{7}$. ex minutia $\frac{5}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{15}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit 15. $\frac{15}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ hujus numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$ id eſt,16.detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt,ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. ut ſuperior calculus docuit.

## XXII.

## MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia AB,per minutiam GD, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A C,inter ſe fiat E,cui ſupponatur F,ex denominatoribus B, D,procreatus. Dico minutiam E F,gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D,inter ſe , Fiat enim G,ex E,in D ; & H,ex C,in F, b Eritque ut minutia E F,ad minutiã C D, ita C,ad H. Quia vero C , multiplicans A F,facit E H; c erit ut A,ad F, ita E , ad H : Et permutando , ut A, ad E,ita F,ad H. Rurſus quia D,multiplicans E,& B , facit C , & F ; erit

| | | |
|---|---|---|
| H, 60. | | G, 40. |
| A, $\underline{2.}$ | C, $\underline{4.}$ | E, $\underline{8.}$ |
| B, 3. | D, 5. × | F, 15. |

b 5. hujus.

c 17. ſep.

a 17. ſep.

A. G.
E. F.
B. H.

*a* erit ut E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, ut hic apparet, erit ut A, ad B, ita G. ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D : *b* Et ut A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoq; ut minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad I. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E E, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D, quod eſt propoſitum.

b 2. hujus.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero unitas, ut fiat quaſi minutia, cujus numerator eſt numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur ejuſdem minutiæ propoſitæ denominator ; propterea quod unitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$ per 5. fient $\frac{15}{4}$. ut hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI vero integris minutiæ adhæreant, *c* revocanda erunt integra ad minutiam ejuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore hujus minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis unus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ. $\frac{23}{3}$ $\frac{9}{2}$.

c 11. hujus.

IAM ut multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, ut in aditione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti; quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum ejus quadrato. Itaq; ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ hujus numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, ut $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. ejuſdem faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$ quadrati, qui ex 60. in ſe producitur : Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. ejuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 19.20. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc eſt quadrati ipſius 60.

## XXIII.

### MINVTIAM per minutiam dividere.

SIT dividenda minutia A B, per minutiam C D, & primum hujus numeri C D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita ut diviſo A, per C, Quotiens ſit E, & diviſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam B F, eſſe Quotientem diviſionis minutiæ

| | | |
|---|---|---|
| A, 12 | C, 3. | E, 4. |
| B, 16. | D, 8. | F, 2. |

A B,

AB,per minutiam CD. Quoniam enim C,metitur A,per E; & D, metitur B,per F; a gignetur A,ex C,in E,& E,ex D, in F. b Igitur a 9. pronũ. minutia AB, producta eſt ex multiplica- b 22. hujus. tione minutiæ EF, per minutiam CD;ac proinde ex defin. multiplicationis erit, ut minutia AB,ad minutiam CD,ita minutia EF,ad 1. Quocirca cum ſit,ut AB,minutia diviſa ad CD,minutiam dividentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin: Diviſionis minutia EF, Quotiens diviſionis minutiæ AB,per minutiam CD,quod eſt propoſitum.

$$\frac{A,\ 6.}{B,\ 8.}\qquad\frac{C,3.}{D,8.}\qquad\frac{E,\ 2.}{F,\ 1.}$$

$$\frac{A,\ 3.}{B,\ 8.}\qquad\frac{C,3.}{D,4.}\qquad\frac{E,1.}{F,2.}$$

DEINDE numeri C,D, minutiæ CD;non metiantur numeros A,B,minutiæ AB. c Reducatur minutia AB;ad aliam æqualem c 15. hujus. EF,cujus numeros E,F, numeri CD, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H,ex A, in D, & ex C,in B,productos: quod quidem fiet,ſi K,ex C,in D; procreatus ducatur in AB;ut gignantur E,F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C,D,metiuntur E,F,per GH,erit minutia GH,Quotiens diviſionis minutiæ EF,vel AB,illi æqualis, per minutiam CD, ut initio hujus propoſ. demonſtratum eſt,quod eſt propoſitum.

$$\frac{E,\ 24.}{F,\ 36.}\qquad\frac{A,2.}{B,3.}\qquad K,12.\qquad\frac{C,\ 3.}{D,\ 4.}\qquad\frac{G,\ 8.}{H,9.}$$

$$\frac{E,90.}{F,135.}\qquad\frac{A,\ 6.}{B,9.}\qquad K,15.\qquad\frac{C,\ 3.}{D,\ 5.}\qquad\frac{G,30.}{H,27.}$$

QVIA vero GH,numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A,in D,& ex C,in B,ut dictum eſt,ſatis eſt ad diviſionem cujuſvis minutiæ per quamlibet minutiam,ſi numerator A, minutiæ dividendæ in D,denominatorem minutiæ dividentis,& C,numerator minutiæ dividentis in B,denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G,dabit numeratorem, & poſterior H denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutiis,ſive numeri minutiæ dividentis numeros minutiæ dividendæ metiantur,ſive non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ dividentis,& ex numeratore minutiæ dividentis in denominatorem minutiæ dividendæ,procreantur duo numeri,per quos numeri minutiæ dividentis metiuntur numeros minutiæ,ad quam minutia dividenda ſecundum doctrinam propoſ. 15. revocatur, ut ex ejus propoſ. demonſtratione liquet,atq; in hoc appoſito exemplo apparet,ubi numeri C, D, numeri A,B,metiuntur per GH,& numeros E,F, procreatos ex A,B,in K,productum ex C; iidem numeri C,D, metiuntur per L,M: atque adeò tam minutia

$$\frac{E,\ 48.}{P,\ 54.}\qquad\frac{A,8.}{B,9.}\qquad K,6.\qquad\frac{C,\ 2.}{D,3.}\qquad\frac{G,\ 4.}{H,3.}\qquad\frac{L,\ 24.}{M,\ 18.}$$

tia G H, quam L M, Quotiens eſt minutiæ A B, per minutiam C D diviſæ.

IAM vero ſi numerus integer dividendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia dividenda ſupponenda eſt ei unitas, ut fiat quaſi minutia, cujus numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1: Vt ſi numerus 8. dividendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. ut in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. dividenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. ut in poſteriori exemplo apparet.

$$\frac{8}{1.} \quad \frac{1}{2.} \quad \frac{16.}{1.}$$

$$\frac{1}{2.} \quad \frac{8}{1.} \quad \frac{1}{16.}$$

QVOD ſi minutiæ adhærent integris, reducenda erunt integra ad minutiam ejuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutæ diuidendæ in denominatorẽ minutæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ denominatorem autẽ ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam juvandam, loca numerorum minutiæ dividentis inter ſe permutare, ut in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis uſurpare. Vt ſi dividenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ dividentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. ut hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ dividendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ dividentis, juxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, ut fiat numerator, &c.

$$\frac{3}{4.} \quad \frac{7}{2.} \quad \frac{21}{8.}$$

SIT integer numerus 700. cujus minutia $\frac{3}{4}$. dividenda ſit per ejuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt diviſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proxime inventa eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus dividatur per ejus dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inventus ſupra fuit, ex diviſione 8. per $\frac{1}{2}$.

## XXIV.

### MINUTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia A B. in minutiam C D, inſerenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, unius particulæ minutiæ C D, ad minutiam C D: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. unius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numeratur prioris, & compoſito nume-

F, 24.

$$\frac{A,\ 3.}{B,\ 4.} \quad \frac{C,\ 6.}{D,\ 7.} \quad \frac{G,\ 27}{H,\ 28.}$$

mero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe minutiæ A B, reſpectu unius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia unius particulæ minutiæ C D, [a] reducitur ad ſimplicem minutiam A H, cujus numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex unitate in A, denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D procreatus, ut in appoſito exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis eſt habens eundem denominatorē H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (cùm enim B, in C, D. faciat F H; [b] erit ut C, ad D, ita F, ad H; [c] ac propterea minutiæ B D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cujus numerator G, ex numeratoribus F A, minutiarum F H, A H, componitur, [nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A] denominator autem H idem qui earundem minutiarum F H A H: efficitur, inquam, minutiam C H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, ut initio propoſ. 29. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummā ex minutia A B, reſpectu unius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H. collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſinuatione minutiæ A B, in minutiam C D: id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, unius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D ſimul, quod eſt propoſitum.

a 14. hujus

b 17. ſeptim.

c 8. hujus.

$$\frac{A,3.}{B,4.} \quad \frac{1}{D,7.} \quad \frac{A,3.}{H,28.}$$

IAM vero ſi plures minutiæ A B, C D; E F; G H, ſint inſerendæ, hoc eſt ſi minutia A B, unius particulæ minutiæ C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H: & minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex C numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorē penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator ejuſdem penultimę minutiæ E F, ut fiat numerus K. Deinde producto ex K, in C, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator ejuſdem minutiæ C D, ut fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adjiciatur A, numerator ejuſdem minutiæ A B, ut fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper ultimus numerus conflatus in denominatorē proxi-

| | | | |
|---|---|---|---|
| P, 119. | M, 59. | | K, 14. |
| $\frac{A,1.}{A,1.}$ | $\frac{C,3.}{B,2.}$ | $\frac{E,2.}{F,3.}$ | $\frac{G,4.}{H,5.}$ |
| Q, 120. | N, 60. | | L, 15. |

proxime antecedentis minutiæ, productoq; numerator ejuſdẽ pro-
xime antecedentis minutiæ adjiciatur, donec nulla minutia ſuper-
ſit. Numero autem P, qui ultimo loco conflatus eſt, ſupponatur nu-
merus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, du-
cendo primum H, in F, ut fiat L, deinde L, in D, ut fiat N; poſt hæc
N, in B, ut fiat Q, &c. Dico minutiam P, Q, ex inſitione datarum mi-
nutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nã ut in duabus
minutiis oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minu-
tiæ E F, in minutiam GH, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia EF,
unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Dein-
de minutia C D, unius particulæ minutiæ E F, unius particulæ mi-
nutiæ G H, *a* facit minutiam ſimplicem, cujus numerator C; (produ-
*a 14. hujus* ctus nimirum ex C, in unitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) &
denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominato-
rum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cujus numerator eſt nu-
merus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N;
*b 8. hujus.* ex D, in L, productus, *b* æqualis eſt minutiæ K L; *c* quod numera-
*c 17. sep.* tores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionẽ
habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius mi-
nutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtra-
bimus, minutia M N, cujus numerator M, ex numeratore C, & ex
numero, qui fit ex *D*, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ
ex minutia, cujus numerator C, & denominator N, atque ex minu-
tia, cujus numerator C ut denominator N, atque ex minutia,
cujus numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N;
æqualis quoque erit eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minu-
tia *G* H, & ex minutia E F, unius particulæ minutiæ *G* H, atque ex
minutia C D, unius particula minutiæ E F, unius particulæ minutiæ
G H. Rurſus minutia *A* B, unius particulæ minutiæ C D, unius
*d 14. hujus* particulæ minutiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, *d* facit minu-
tiam ſimplicem, cujus numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id
eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Mi-
*e 8. hujus.* nutia quoque cujus numerator eſt numerus ex B, in *M*, procreatus;
*f 17. sep.* denominator vero idem numerus Q ex B, in N, productus, *e* æqualis
eſt minutiæ M N, *f* quod numeratores harum minutiarum ad deno-
minatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N,
gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur
P Q, cujus numerator P, ex numeratore A; & ex numero; qui fit ex
B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cu-
jus numerator A, &, denominator Q, atque ex minutia; cujus nu-
merator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, ut initio pro-
poſ. 20. monſtratum eſt; æqualis quoque erit eadem minutia
P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F; unius
particulæ minutiæ G H, & ex minutia C D, unius particulæ minu-
tiæ E F, unius particulæ minutiæ G H, & ex minutia A B.

unius

vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorẽ prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G, H. produci ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD.[a] reducitur ad minutiam ſimplicem EH, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus AC, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus, B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: [b] Minutia quoque FH, æqualis eſt minutiæ CD; [c] quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex ijs, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus æqualis eſt ſummæ minutiarum EH, FH, ) æqualis ſummæ collectæ ex minutia CD; (hoc eſt, ex minutia FH, ) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id eſt, ex minutia EH, ) atque ideo minutia GH, procreatur ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

E, 18  F, 24.

$$\begin{array}{llllll} A, & \underline{3} & C, & \underline{6} & G, & \underline{42} \\ B, & 4. & D, & 7. & H, & 28. \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} A. & \underline{3} & C. & \underline{6} & E, & \underline{18} \\ B, & 4. & D, & 7. & H. & 28. \end{array}$$

[a] 14. huius.

[b] 8. huius.

[c] 17. ſeptimi.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inſerendæ AB, CD, EF, GH, hoc eſt, minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutia EF, minutiæ GH, addendæ ſint ad minutiam GH, ita agendum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla superſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur

P, 232.  M, 104.  K, 20.

$$\begin{array}{llllllll} A, & \underline{1} & C, & \underline{3} & E, & \underline{2} & G, & \underline{4} \\ B, & 2. & D & 4. & F, & 3. & H, & 5. \end{array}$$

Q, 120.  N, 60.  L. 15.

natur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam PQ, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiarum EF, GH, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia EF, totius minutiæ GH, & ex minutia GH. Deinde minutia CD, totius minutiæ EF, totius minutiæ GH, *a* facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; *b* æqualis eſt minutiæ KL: *c* quod numerãtores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem, quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cum minutia MN, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ GH. Rurſus minutia AE, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, *d* facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq; cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē eſt idē Q, ex B, in N, procreatus, *e* æqualis eſt minutiæ MN: *f* quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem: cùm B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quē facit B, in M, cum æqualis ſit, ex ijs, quæ initio prop. 20. demōſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autē eſt idem Q; æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, minutiæ GH, & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, quod eſt propoſitum. Eademque de pluribus eſt ratio.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

a 14. *huius.*
b 8. *huius.*
c 17. *ſeptimi.*
d 14. *huius.*
e 8. *huius.*
f 17. *ſeptimi.*

## DE PROPORTIONVM *compoſitione.*

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquuum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: Id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propoſ. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit, defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propoſitionibus, vbi duplicatatam, triplicatam, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatiue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit vere totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerumque interpretes Euclid. exiſtimant, ex hoc perſpicue confirmari poteſt: quod pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nā cū hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad def. 10. l. 5 oſtēdimus, ſi poſitis his tribus terminis cōtinue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. nō ſolū duplicata diceretur proportionis 1. ad 10 vt vult def. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10 & 10, ad 100 æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti! Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continue proportionalibus, 4 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 4. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoque pars maior quam totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4 ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24 ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2 ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio) nimirū proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videl. ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totum eſt, & eius partes cōponentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2 ad 16. ſi alterutra harū ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione

| | |
|---|---|
| 24. | 48. |
| 12.2. | *3.16.* |

ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quod ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quam totum, hoc eſt, quam proportio 24, ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiam ſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis 12, 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4 ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1 ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo 12.4.2.1.6.3.1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex, ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augerent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3, illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6 non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo mouentia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quam agens vt 6?

| | |
|---|---|
| 24. | 48. |
| 12.2. | 12.4. |

LIQVET ergo huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus compoſita, propter terminorum continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur poſitis tribus, quatuor aut pluribus terminis continue proportionalibus,

bus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis quam, primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex, ijs quæ iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio ac diuiſio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata) quarum quælibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim ſint in vnam ſummam colligendæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in vnam ſummã colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8, ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla eſt.

$$\frac{3}{1} \times \frac{5}{5} \qquad \frac{12}{4} \times \frac{40}{8}$$

$$\frac{8}{1} \qquad \frac{256}{32}$$

Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadrupartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt 2$\frac{4}{7}$. & 1$\frac{1}{2}$ quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla ſeſquidecima quarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quam 342. 84. Sed quando per denominatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum eſt. Nam 2$\frac{4}{7}$ reuocavimus ad $\frac{18}{7}$ & 1$\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligẽdum eſt.

$$\frac{18}{7} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{54}{21} \times \frac{6}{4}$$

$$\frac{57}{14} \qquad \frac{342}{84}$$

DEINDE ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: itẽ ex proportione quadrupla ſeſquidecima quarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla & dupla ſuperquadrupartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | ✕ | 3 | 256 | ✕ | 12 | | 57 | ✕ | 3 | 342 | ✕ | 4 |
| 1 | | 1 | 32 | | 4 | | 14 | | 2 | 84 | | 4 |
| | | 5 | | 40. | | | | | 72 | 864 | | |
| | | 1. | | 128. | | | | | 28 | 336 | | |

TERTIO ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt per proportionem duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, produceturque ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3—2 | 6 | 12—10 | 120 | | 3—8 | 24 | 9—26 | 144 |
| 1—1 | 1 | 4—5. | 20 | | 2—5. | 10 | 6—10 | 60 |

QVARTO & vltimo ſi proportio ſextupla diuidenda proponatur per proportionem triplam: Item proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionem ſeſquialteram: ſi diuiſoris termin permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetu operatio.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6—1 | 6 | 120—4 | 480 | | 24—2 | 48 | 144—6. | 864 |
| 1—3. | 3. | 20—12. | 240 | | 10—5. | 30. | 60—9. | 540 |

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quod in proportionibus neceſſe non eſt, interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionum à nobis præſcriptã, quam auctores additionem falſo nuncupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib 6. egit. conuenire, atque adeo compoſitionem illam Euclidis vere eſſe multiplicationem non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D. ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturque A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex conſequente vero B, in conſequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B. & C, ad D; ita vt ſi proportiones hæ A, ad *B*, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ dupli-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A, 6. | C, 12. | | A, 3 | C, 6 |
| B, 2. | D, 4. | | B, 2. | D, 5. |
| E, 72. | F, 8. | | E, 18. | F, 10. |
| G, 24. | | | G, 12. | |

duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. ſi autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G, *a* erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt, G, & F, *b* erit vt C. ad D, ita G, ad F Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eædem ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquido conſtat compoſitionem illam proportionum eſſe multplicationem, quam tradidimus.

a 18 ſeptimi.
b 17. ſeptimi.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non eſſe aliud, quam diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F, quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, quæ relinquitur, ſublata proportione *C*, ad *D*, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, *B*, in C, fiunt G, F, *c* erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in *C*, *D*, fiunt G, E; *d* erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem eſt, quæ G, ad F.) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F; ac proinde ſubducta proportione C, ad D, *ex proportione* A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad *E*, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Voluminio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A. 9. | C, 3. | A, 4. | C, 6. |
| B, 1. | D, 1. | B, 2. | D. 3. |
| E. 9. | F, 3. | D, 8. | F, 12. |
| G, 27. | | G, 24. | |

c 1. ſeptimi.
d 17. ſept.

FINIS ELEMENTI NONI.

# EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMUM.

## DEFINITIONES.

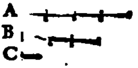
### I.

**COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.**

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarũ cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines cum ſolidæ, tum planæ, neque perfecte intelligi poſſunt, neq; cum res tulerit, in opus atq; vſum conferri; propterea quod plerumq; latera earum incommenſurabilia ſunt: Id quod & de planis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommenſurabilia ſæpenumero exiſtant, vt ad finem huius lib. demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus diſſerit, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demõſtrata, ita plan⁹ reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore à quouis, qui præcedentiũ tamẽ librorũ demõſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neq; enim in eorũ poſſũ ſententiã ire, qui putãt ad eius intelligentiã eſſe neceſſariã eã partẽ Arithmetices, quæ de radicibus numerorũ, tã rationalibus quã irrationalibus, vt vocãt ſermonẽ inſtituit: Imo contra perſuaſũ mihi prorſus habeo, cognitionẽ perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantũ abeſt,

abeſt, ut exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, ut facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, majore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad uſum poteſt revocare, hic vero nullo modo. Hâc enim de cauſa & nos priora decē theoremata ſecundi lib. numeris accommodavimus, ut oblectationem animi majorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem ut ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) ut in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra utitur, uſurpaſti, ut ea res & majori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putavimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius effuſuri, quam lucis aliquid majoris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adjumento, ac luce, quam his noſtris commentariis afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſolæ neceſſariæ ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes hujus lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſeipſos, quando volunt, præſertim cum jam hoc ipſum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQUE, ut ad inſtitutum redeamus, inchoans rem pſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus utendum erit: declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commēſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura, C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B.) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas lineas tam unius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis unius palmi; &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas una, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidave commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.



## II.

INCOMMENSURABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cujuſuis, & latus ejuſdem quoniam nullam habent menſuram communē, ut propoſitione ultima hujus lib. demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq;, quanam ratione inveniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

## III.

RECTÆ lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARUM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cujusmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commenſurabiles ſimpliceter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura cõmunis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt ejusmodi, ut earum quadrata ſint commenſurabilia; aliæ vero ita ſe habent, ut & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt ſecundum earum quadrata (eſt enim, ut ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cujusq; lineæ quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſa ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſũ lineas potētia cõmenſurabiles nõ autē cõmēſurabiles longitudine, reſpõdendũ eſt, lineas lõgitudine cõmenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitinone commenſurabilium magnitudinũ, cũ hujusmodi lineas una communis menſura metiatur, ut dictum eſt: At vero quoniam lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, ut eæ propria definitione explicarentur.

## IV.

INCOMMENSURABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem linea commenſurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quaſi convenientiam inter ſe, & connexionē, ut li-ut lineæ longitudine commenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles potentia, ita ut nullæ lineæ dari poſſint commenſurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commenſurabilia quoq; ſint, quoniam quadratum ex communi earum menſura deſcriptum metitur tanquam menſura communis earum quadrata, ut in ſubjecta figura apparet: ſicut enim recta AB, metitur rectas CD. EF. ita quoq; quadratũ AG, quadrata CH, EI, metitur. Non autẽ, ut omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiã cõmẽſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſũt potẽtia cõmenſurabiles, hoc eſt, quadrata habẽt cõmenſurabilia, quæ tamẽ lõgitudine omnino incommenſurabiles ſunt, ut in hoc libro demonſtrabitur. Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quam potentia, hujuſmodi colligatio reperitur, ut omnes lineæ potentia incommenſurabiles; ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, ut omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. hujus libri.

## V.

His poſitis, oſtenditur cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis erunt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potenti, aut hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quanquam ejus verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudiné, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, ut diximus.

Linea autẽ illa propoſita, ratione cuj⁹ alię cõmenſurabiles ſunt, vel incõmenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ nõ ſemper notæ ſunt, quãvis ſingulæ ſeorsũ ſumptæ exiſtãt certæ quoq;, ac notę; cũ quęlibet in quotcũq; partes ęquales poſſit dividi.

Et

## VI.

ET huic commenſurabiles ſive longitudine & potentia, ſive potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunq; appellari quoque Rationales, non quidem ex poſitione, ut illa, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei cõmenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQUE ex ſententia Euclidis, radix quadrata hujus numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cujus quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali; (eſt enim tam numerus 20. quam 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato, ut 16. 100. &c.) quamvis longitudine, ſit eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.

## VII.

HUIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QUONIAM antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantũ ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellavit Rationales; liquido conſtat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt utroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam hujus numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cujus quadratum eſt 20. vel 1000. &c. nõ poſſe appellari Irrationalem, cum nõ ſit longitudine & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

## VIII.

ET quadratum, quod à propoſita recta fit, dicatur Rationale.

QUEMADMODUM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea deſcriptum Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabileſue dicuntur.

## IX.

ET huic commenſurabilia quidem Rationalia.

OMNES planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, ut illud, ſed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commenſumenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunque commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia, quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potentia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari juxta defin. 6. Rationales.

## X.

HUIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali linea deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

## XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſunt, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatiis incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita ut ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia: ſi vero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatiis incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, ut ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: *longitudine & potentia; atque potentia tantum:* apponere fere ſemper vocibus iſtis; *commenſurabiles ac incommenſurabiles:* Vix autem, & rariſſime his: *Rationales, & Irrationales:* Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine

dine & potentia, vel potentia tantum: Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadvertit, occaſionem multis præbuit, ut varie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusq;, ſint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adjungemus poſtulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum uſus in hoc libro reperitur.

## POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTULETUR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus ejusdem generis inæqualibus, cum major infinita non ſit; minor vero infinite poſſit augeri, perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet majorem. conſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri ejusdem generis, cum alterutra ita poteſt multiplicari, ut alteram excedat Atque ex hujus conditionis defectu angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diverſi eſſe generis, docuimus.

## AXIOMATA SIVE PRONVNCIATA.

### I.

MAGNITUDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

### II.

MAGNITUDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

### III.

MAGNITUDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

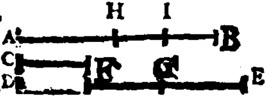
HÆC axiomata, ut ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in ultimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, ut ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani neglexim us, ut docuimus ad initium primi libri: curavimus ut duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quod ſi unus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

## THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

DUABUS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

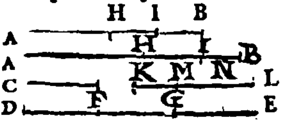
PPOPOSITÆ *ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur enim C, toties donec magnitudo facta DE, maior ſit quam AB, ita ut DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam AB. Diviſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI, atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB, multitudine æquales ſint partibus ipſius DE. Sint ergo jam partes AH, HI, IB, tot, quot ſunt ipſa DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior eſt quam AB; At ex DE, ablatum eſt DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, ſi DE, ipſius ſit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex DE, dimidium auferretur, nec non & ex AB, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE. maior eſt quam HB, auferturque ex FE; dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, ſi FE, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex HB, maius quam dimidium HI: erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem, ipſius DE, qualis hic eſt GE, ma-*



*GE, majorem eſſe poſtrema parte ipſius AB, qualis hic eſt IB. Cum ergo GE, poſtrema pars ipſius DE, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, major quam IB, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt IB, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.*

IDEM *demonſtrabitur, ſi ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rurſus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, majus reliquo HB, necnon & reliquum GE, maius reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum ſit DB, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.*

ALITER. *Facta conſtructione, ut prius, ſumatur KL, ita multiplex ipſius IB, ut eſt multiplex DE, ipſius C. Diviſa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipſi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH, major eſt quam HB, vel certe illi æqualis ſit, ſi ablatum ſit dimidium ex AB; & HB, maior eſt, quam IB; erit quoque AH, major quam IB, hoc eſt, quam KM. Rurſus quia HI, major eſt quam IB, vel certe illi æqualis; eſt autem IB, ipſi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quam tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, major quam tota KL: Eſt autem DE, major adhuc, quam AB. Multo ergo major erit DE, quam KL. Quare cum ſit ut DE, ad C, ita KL, ad IB; (ſumpta enim fuit KL, ipſius IB, tam multiplex, quam multiplex eſt DE, ipſius C,) [a] erit quoque C, major quam IB. Ac proinde relicta eſt, IB, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.*



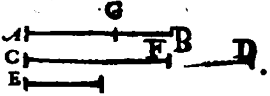
[a] 14. quinti.

## SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonſtratione hujus Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, ut minor multiplicata, tandem majorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. libr. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij. SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur; Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.



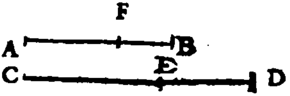
*DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis A B, C D, quarum minor A B, detrahatur ex majore C D, & reliqua hujus ex A B, & ſic deinceps, alterna quadam detractione auferatur ſemper minor de majore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines A B, GD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas, ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta aut FAB, ex C D, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorem ita ut AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta, FD, ex AB, relinquat ſe minorem GB, ita ut F D, metiatur ipſam A G; atque hoc ſemper fiat.* a *Relinquetur ergo tandem ex C D, vel AB,* a 1. *dec.* *magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm A B, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorem, erit C F. ablata major, quàm dimidia ipſius CD; aliàs ſi eſſet dimidia, vel minor quàm dimidia, poſſet adhuc* A B, *detrahi ex* CD. *Eodem modo erit AG, ablata ex AB, major quã dimidia ipſius A B: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cùm ſemper auferatur majus, quàm dimidium,* b *relinquetur* b 1. *dec.* *tandẽ magnitudo quadã minor quàm E.) Sit ergo jam relicta GB, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B, & A B, metitur CF;* c *metietur quoq;* E, *ipſam C F: Metitur autem E, &* c 2. *pronun.* *totam C D.* d *Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur A G;* e *quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem* d 3. *pronun.* *E, & totam AB:* f *ergo E, reliquam etiam G B, metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A B,* C *D, magnitudines* e 2. *pronun.* *aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod* f 3. *pronun.* *erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

HOC Theorema convertemus ad hunc modum.

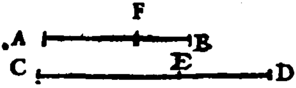
SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines A B, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturque F B, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nũquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt metiatur FB, præcedentem ED, Quoniam igitur F B, metitur E D, & ED, metitur A F; g metietur quoque F B, ipſam A F; Metitur g 2. *pro-*



a 1. *pronun.* b 2. *pronun.* c 1. *pronun.*

autem & ſcipſam. *a* Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE. *b* Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, *metiri ipſam* ED; c Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, utramq; AB, ED, metitur, quod eſt abſurdum, ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.



SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de majore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

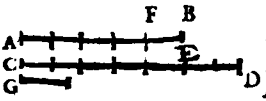
NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, ut demonſtravit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim commenſurabiles.

ITAQVE facilè ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de majore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur utramq; magnitudinem propoſitam, ut conſtat ex demonſtratione primi theorematis hujus ſcholij. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, oſtenſum eſt, eandem reliquam FB, metiri utramq; magnitudinem AB, CD. Si verò nunquam reliqua magnitudò præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, ut Euclides hoc loco demonſtravit.

## 111. PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram invenire.

*DATÆ duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram invenire. Quoniam AB, CD, commenſurabiles ſunt, ſit ut ſi minor AB, ex majore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat ED; & ED, detractaex AB, quoties poteſt, relinquat FB, & hoc ſemper ſiat alterna quadam detractione, tandem reliqua quapiam magnitudo pracedentem metiatur, per 2. theor. pracedentis ſcholii. Metiatur jam FB, reliqua pracedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinem AB, CD, Quod enim utramque metiatur, ita oſtendemus.*

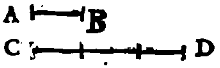


*mile. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur AF; a metietur quoq; FB, ipſam AF: At metitur FB, & ſeipſam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atq; adeò & ipſam CE, quam AB, metitur. Cùm ergo & ipſam ED, metiatur; d metietur quoq; FB, totam CD, Metitur ergo FB, utrāque AB, CD. Quare utriusq; AB, CD, communis menſura eſt FB.*

a 2. pronun.
b 1. pronun.
c 2. pronun.
d 1. pronun.

*QVOD autem FB, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, major quàm FB. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, major quàm FB. Quia igitur G, metitur utramq; AB, CD; metitur autem & AB, ipſam CE, e metietur quoque G, ipſam CE: At metitur quoq; totam CD, f Igitur G, reliquam quoq; ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. g Ergo & G, ipſam AF, metietur. Quare cùm G, totam etiam AB, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. h Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm FB, communis menſura eſt ipſarum AB. CD. Quare FB. maxima earum communis menſura eſt.*

e 2. pronun.
f 3. pronun.
g 2. pronun.
h 3. pronun.



*QVOD ſi minor magnitudo AB. metiatur majorem CD, ita ut detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis: cùm & ſeipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus comm.enſurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.*

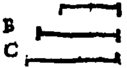
## COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

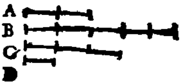
ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoq; maximam menſuram FB. Eademq; eſt ratio de cæteris.

## SCHOLIVM.

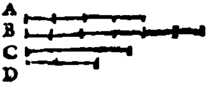
EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B. C. Primùm experior per ea, quæ ad propoſ. 2 hujus lib. docuimus, an duæ A, & B. cõmenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres A. B. C. eſſe incommenſurabiles, quòd nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A. & B.

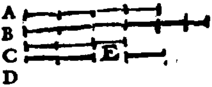


SI vero A. & B, fuerint commenſurabiles, ſit earum maxima communis menſura inventa D; quæ ſi metiatur quoq; magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cùm habeant communem menſurâ D.



QVOD ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima communis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinum A, & B, per coroll. hujus propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoq; C, nō erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſin.



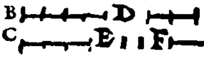


SI verò C, & D, ſunt commenſurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commenſurabiles. a 3. dec. *a* Inventa enim E, maxima menſura ipſarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipſas A, & B; b 2. pronun. *b* metietur quoque E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, ſint commenſurabiles, necne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus eſt dictum.

## PROBL. 2. PROPOS. 4.

iiij. TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem invenire.



*SINT data tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam menſuram invenire oporteat.* c 3. dec. *c Sit D, maxima menſura ipſarum A, B, inventa. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt, D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nam ſi major magnitudo quàm D. metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propoſ. 3. hujus lib. maximam menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, major magnitudo minorem quod fieri non poteſt. Si verò D, non metiatur C. erunt ſaltem D, C, commenſurabiles. Cùm enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur quælibet menſura earum communis ipſam D, maximam menſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propoſ. Cùm ergo eadem illa menſura metiatur quoque ipſam C; erunt D, & C. commenſurabiles.* d 3. dec. *d Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inventa. Dico E. maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A. B. C. Quòd enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E. metitur D. & C; & D. metitur A & B;* e 2. pro *e metietur quoque E. ipſas A & B. Metitur autem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarum A. B. C. quemadmodum aſſeruimus.*

*QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, major quàm E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A. & B; metietur quoque earum maximam menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D. & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. major magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo major magnitudo quàm E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.*

## COROLLARIVM.

APERTE quoq; ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communẽ.

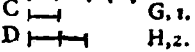
INFERTVR autem hoc ex ultima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

SIMILI modo pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum menſuram communem inveniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, invenienda erit primùm maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua verò omnia abſoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus eſt dictum.

## LEMMA.

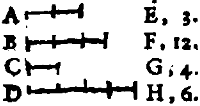
*SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.*

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdẽ rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita G. ad H. Dico ex æquo eſſe, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D. componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G, & G, ad H; perſpicuum eſt cùm proportiones componentes proportionẽ A, ad D, æquales ponãtur proportionibus, quæ proportionẽ E, ad H. cõponunt,



nunt,& compoſitas proportiones, nempe A, ad D,& E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe ut A, ad D, ita E, ad H, Quod eſt propoſitum.

IDEM ſequitur,ſi magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, ut in hoc exemplo apparet, in quo eſt, ut A,ad B, ita G,ad H; & ut *B*,ad C,ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



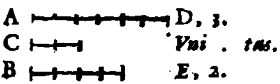
## SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur,& in aliis multis,utendum nobis erit; placuit illud hoc loco breviter demonſtrare, cùm non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diverſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantùm eſt in quantitatibus ejuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lẽma transferri poſſit,cùm omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conveniant. Vel certè demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A,B,C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E,F, G, H, rationem inducant numerorum.

## v. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

*SINT magnitudines commenſurabiles* A, *B*. *Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum.* a *Sit enim earum maxima menſura inventa* C: *Et quoties ea repetita metitur* A, *toties unitas repetita metiatur numerum* D: *Et quoties eadem* C, *repetita metitur* B, *toties unitas repetita metiatur numerum* E. *Quoniam igitur magnitudo* C, *magnitudinem* A, *& unitas numerum* D, *æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo* A, *magnitudinem* C, *atq; numerus* D, *unitatem. Quare erit ut* A, *ad* C, *ita numerus* D, *ad unitatem: Eſt autem & ut* C, *ad* B, *ita unitas ad numerum* E; *quod* C, *ipſam* B, *atq; unitas numerum* E, *æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, ut* A. *magnitudo ad* B, *magnitudinem, ita* D, *numerus ad* E, *numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat demonſtrandum.* a 3. dec.



SCHO.

## SCHOLIVM.

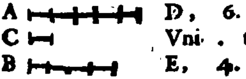
CVM Euclides ad demonſtrationẽ hujus theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, ut rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atque adeò in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantùm commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem quam numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſq; demonſtratio hujus theorematis convenit; At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cùm ſint, communis menſuræ ſunt expertes, ac propterea hujus theorematis demonſtratio in ipſas convenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porrò ejusdem hujus theorematis liquidò conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B. libeat invenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos unitas æquè, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam ut demonſtratum eſt, magnitudines A, & B. proportionem habent, quam numeri D, & B.

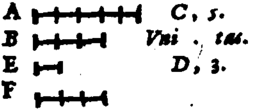
QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quamcunque communem earum menſuram, nihilominùs hoc theorema demonſtrabimus eodem argumento. Quamvis enim numeri D, & E, majores inveniãtur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex appoſita figura apparet. Quoniam verò in priori demonſtratione numeri inventi, ſunt minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſurem aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit,



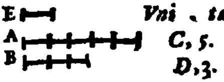
## THEOR. 4. PROPOS. 6. VI.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

*HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A B, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero C, in tot æquales partes diviſa intelligatur magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Deinde quoties unitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties unitas in C, continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad unitatem: Eſt autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod E, ipſam F, & unitas ipſam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propoſ 4. hujus lib. erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita*
a 9. quinti. *A, ad B. Igitur erit ut A, ad B. ita A, ad F, a ac propterea B. & F magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cùm E. ipſum F, metiatur, metietur quoque eadem E. ipſam B: Metiebatur autem*
b 1. def. *& ipſam A. Igitur magnitudo E. utramque A. & B. metitur: b Ac proinde A. & B. magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.*



*ALITER. Quod ſunt unitates in C. in tot partes æquales intelligatur diviſa magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt ut E. ad A. ita unitas ad C, quod E. ipſam A, & unitas ipſum D, æquè metiantur; poniturque ut A. ad B. ita C. ad D; erit per idem lemma ſuperius, ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas numerum D. Igitur & magnitudo E. magnitudinem B. metitur: Metitur autem E. ipſam quoque A. Igitur A. & B. haben-*
c 1. def. *tes eandem communem menſuram E. c commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.*



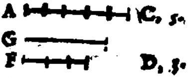
## COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via qua lineam rectam inveniamus, ad quam ita ſe habeat quævis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi invenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; dividenda erit linea A, in tot æquales partes, quot unitates ſunt in C, & ſumenda alia linea F, tot earundem partium quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſſit inveniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si namque invenienda ſit linea, ad cuius quadratum

ita

ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D. a Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D, ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.



a 13. ſexti.

## SCHOLIVM.

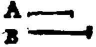
IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

## THEOR. 5. PROPOS. 7.

vij. 0.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

*SINT incommenſurabiles magnitudines* A, *&* B. *Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim* A, *&* B, *proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum:* b *erunt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur* A, *&* B, *proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.*



b 6. decimi.

## *SCHOLIVM.*

QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

## THEOR. 6. PROPOS. 8.

viij. 0.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON *habeant magnitudines* A, *&* B, *inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe. Si enim* a 5. decimi. *A, & B, credantur eſſe commenſurabiles; a erit earum proportio, quam numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.*

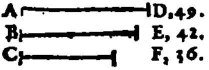
## *SCHOLIVM.*

QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt cõtra hypotheſim. Non autem colligendũ eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; imò nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5 huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

## LEMMA.

SI ſint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoque proportionales, ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.

Sint continuè proportionales tam quãtitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non: ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad *B*, & D, ad E, æquales; quãdoquidẽ eorũ proportiones duplicatæ æquales ſunt.

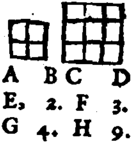


IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quam tres; ſi ta-ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

## THEOR. 1. PROPOS. 9.

[vij]

QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ vero à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

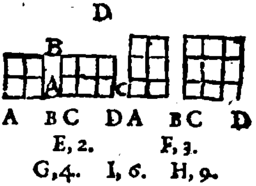


*SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine ſunt commenſurabiles; a erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: b habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD. duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: c Item & numerus quadratus G. ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitum.*

a 5. decimi.

b 20. ſexti.

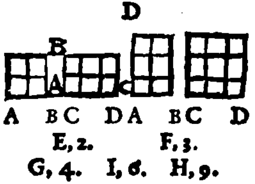
c 11. octa.



*ALITER. Poſita eadem conſtructione, contineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt conſtat ex demonſtratione prop. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdem propoſ. Quoniam igitur eſt*

AB, ad

a 1.ſexti. AB,ad CD,vt E.ad F: a Vt autem AB,ad CD,ita eſt quadratum ex
AB,ad rectangulum BD,ob eandem altitudinem AB,ſi CD,ponatur
baſis rectanguli; Item vt E,ad F,ita eſt G,ad I: Erit quoq; quadra-
tum,ex AB,ad rectangulum BD,vt quadratus numerus G, ad nu-
b 1. ſexti. merum I. Rurſus quia eſt AB,ad CD,vt E,ad F. b Vt autem AB,
ad CD ita eſt rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem
altitudinem CD,ſi AB,ponatur baſis
rectanguli; Item vt E,ad F,ita eſt I,
ad H: Erit quoque rectangulum BD,
ad quadratum ex CD, vt I,numerus
ad numerum quadratum H. Quare
tres magnitudines, nimirum quadra-
tum ex AB,rectangulum BD,& qua-
dratum ex CD,in eadem ratione con-
tinua ſunt,in qua tres numeri G,I, H. Igitur ex æquo,per lemma
propoſ.4.huius lib.erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD,
vt numerus quadratus G,ad numerum quadratum H. Quod eſt
propoſitum.

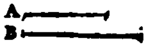


SIT ſecundo quadratum ex AB,ad quadratum ex CD,vt nume-
rus quadratus G,ad numerum quadratum H.Dico rectas AB,CD,
eſſe longitudine commenſurabiles.Sint enim numeri E,& F,latera
quadratorum numerorum G,& H,vt in priori figura.Quoniam igi-
tur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex BD, vt quadratus
c 20.ſexti. numerus G,ad quadratum numerum H: c Habet autem quadra-
tum ex AB,ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam la-
d 11.oct. teris AB,ad latus CD. d Item & quadratus numerus G,ad qua-
dratum numerum H,proportionem habet duplicatam lateris E,ad
latus F:erit proportio lateris AB,ad latus CD,quæ lateris E,ad la-
tus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportio-
nes æquales ſunt.Quare cum rectæ AB,CD,proportionem habeant,
e 6. decim. quam numeri E,F,,e ipſę commenſurabiles erunt longitudine.Quod
eſt propoſitum.

f 1.ſexti. ALITER. Repetatur conſtructio figurę poſterioris. f Quia igi-
tur eſt vt AB,ad CD, ita quadratum ex AB,ad rectangulum BD;
Item vt AB,rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum
ex CD,vt ſupra diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum
BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione li-
neę AB, ad lineam CD. Sunt autem & numeri G,I,H, continuè
proportionales in ratione numeri E,ad numerum F,vt ſupra oſten-
dimus; poniturque quadratum ex AB,ad quadratum ex CD, vt
quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit
g 6. deci- per lemma præcedens AB,ad CD,vt G,ad I,hoc eſt,vt E,ad F: g
mi. ideoque AB,CD, rectæ proportionem habentes, quam numeri E,F,
commenſurabiles ſunt longitudine.Quod eſt propoſitum.

SINT

*SINT tertio rectæ AB, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod eſt propoſitum.*



*QVARTO, ac poſtremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur, habebunt earum quadrata, vt eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quod eſt abſurdum, ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incomenſurabiles: Quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commenſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter quã numerus ad numerum: [a] ipſa commenſurabilia erunt; [b] Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſurabilia exiſtent. Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt.

a 6. dec.
b 3. def.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamen quam numerus ſimpliciter ad numerum, [c] potentia quidem commenſurabiles ſunt, [d] cum earum quadrata commenſurabilia ſint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas, potentia commenſurabiles, non omnino, & longitudine commenſurabiles eſſe. Solum enim ex lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte huius theorematis.

c 3. def.
d 6. decimi.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamẽ, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitudine, at potentia commenſurabiles, vt modo diximus, liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles eſſe, ſolum enim ex lineæ longitudine incommenſurabiles, quarũ qua-a 4. defin. quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, a potentia quoque incommenſurabiles ſunt, b cum earum quadrata incommenſurabilia ſint.

b 8. decimi.

POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

## SCHOLIVM.

VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusque percipiatur, diligenter conſideranda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris exprimi poſſunt, ſi cum linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ; (eſt enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde è contrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, ſeu latera ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor menſuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H,) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quam ſunt vnitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commẽſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

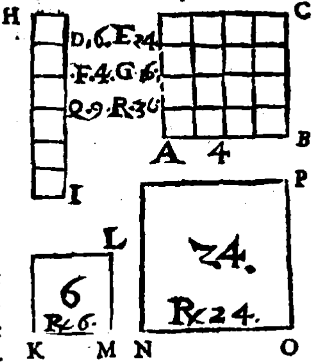
EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, c vt in Arithmeticis eſt demõſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectan-

c 26. octaui.

rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; atque ipſi HI, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratū NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per conſtructionem; cōtinet autem quadratum KL, 6. mēſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarum 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erunt Rad. 6. & Rad 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cum 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntque lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterū ſubdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. *b* Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eædem lineæ KM, NO, ſimpliciter, & abſolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum enim proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis *AB*, imò illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

a 14. *ſecundi,*

b 6. *decimi,*



RVRSVS

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F,G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24 At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus & G, ex 16) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q.R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q.R, cum alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoque eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea cõferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadem quadrata KL, NP. conſiderentur abſolute, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati *AC*, ex Rationali linea *AB*, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F,G, vel Q.R, continentur. Nam ſi recta K, M, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F,G. Item ſi eædem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex habebunt earum quadrata menſuras quadratas, 9. & 36. quot nimirũ vnitates comprehẽdũtur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4 &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus: Quadrata quæ deſcribũtur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilib⁹, licet interdũ longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, quãuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpenumero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionẽ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato

Ratio-

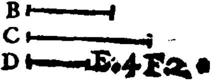
Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ rationali ſint longitudine incommenſurabilia. &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ.47.lib.1.demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes medius cadat proportionalis; vt in ſcholio propoſ.8.lib.8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ.7.lib.8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ.vltima huius lib.

## THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

*SINT proportionales quatuor magnitudines* A,B,C,D, *ſitque A, prima ſecunda* B.*commenſurabilis. Dico & tertiam* C, *quartæ* D, *commenſurabilem eſſe. Quoniam enim A, &* B,*inter ſe commenſurabiles ſunt,* a *habebit* A,*ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quã* E,*ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad* D: *Igitur &* C,*ad* D,*proportionem habet, quam numerus* E, *ad numerum F.* b *Quare* C,*&* D,*cõmenſurabiles inter ſe ſunt.* a 5. dec. b 6. decimi.



*SED ſit iam A, ipſi* B,*incommenſurabilis.* Dico *&* C,*ipſi* D, *eſſe incommenſurabilem. Quoniam enim A, & B, incommenſurabiles ſunt,* c *non habebit* A,*ad* B,*proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt* A,*ad* B,*ita* C,*ad* D.*Igitur nec* C,*ad* D,*proportionem habet, quam numerus ad numerum.* d *Quare* C,*&* D,*incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.* c 7. dec. d 8. decimi.

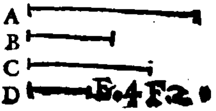
### *SCHOLIVM.*

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudin commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus, poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio prop. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt
a 3. def. potentia ipſi *B*, *a* erunt earum quadrata commenſurabilia, *b* ac pro-
b 5. decimi. pterea proportionem habebunt quam numerus ad numerum. *c* Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex
c 22. ſexti. C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterque deſcriptæ) Igitur & quadrata ex *C*, D, proportionem habebunt, quã
d 6. decimi. numerus ad numerum. *d* Quare commenſurabilia erunt; *e* Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia
e 3. def. tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectę A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt. non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, *D*, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtẽdimus: Igitur potentia tantum ſunt cõmenſurabiles. Quod eſt propoſitum

EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum, incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ *C*, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5 huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam



lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ
f 6. decimi. numeri ad numerum; *f* atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia

tentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [a] Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 8. dec.

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores verò duæ lineæ, demonſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine cõmenſurabiles eſſe vel incommenſurabiles. Si enim plana ſolidaue commenſurabilia ſint, [b] habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipſis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum.

[b] 5. decimi.

## LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus. A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quã numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

## SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, quæ dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EXPONANTVR *quatuor numeri* A, B, C, D, *ita vt non ſit ſicut* A, *ad* C, *ita B, ad D; & fiat ex* A, *B, numerus E; & ex* C, D, *numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.*

A, 2. C, 3.
B, 6. D, 16.
E, 12. F, 48.

HÆC eſt eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpenumero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris *6.* & *8* vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & *6.* non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis, 3 & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſim.l.s, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunque duobus lateribus alterius, qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib: *8.*

x.
xj.

## PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

*SIT recta propoſita* A, *cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri* B. *&* C, *proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Deinde ex corollario propoſ.* 6. *huius lib. reperiatur linea* D, *ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex* A, *vt numerus B, ad numerum* C. *Dico* C, *eſſe ipſi A incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim* A, *&* D, *longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex* A, *ad quadratum ex* D, *vt numerus* B, *ad numerum* C; *non eſt autem proportio B. ad C, qua numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadra-*

B, 10.
C, 6.

*tum*

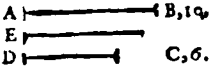
*tus ad numerum quadratum. Igitur* a *rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudini ſint incommenſurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C,* b *ipſa commenſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.* a 9. *decim.* b 6. *decimi.*

*SIT iam eidem rectæ propoſita A, inuenienda linea incommenſurabilis longitudine, & potentia.* c *Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilem eſſe longitudine, & potentia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D;* d *& A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum; erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia ſunt incommenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino longitudine incommenſurabiles ſunt. Eſt igitur E ipſi A, incommenſurabilis longitudine & potentia. Quocirca propoſita recta linea inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.* c 13. *ſexti.* d 10 *decimi.*

## SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſuræ cæterarum ſumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis ex defin. 7. cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CÆTERVM ex demonſtratione huius theorematis liquidò conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem eſſe, ipſi incommenſurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento oſtendemus, eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, ſint cōtinuè proportionales, erit ex coroll. prop. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A. Eſt autem recta D, rectæ A, incommenſurabilis longitudine, *e* Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E incomenſurabile erit. Quare rectæ, D, & E, ex defin incommenſurabiles ſunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib. e 10. *decimi.*



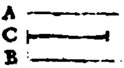
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedēti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demonſtretur, vt ex dictis apparet.

xij. viij.

## THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVÆ eidem magnitudini ſint commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

*SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, & C, ſint commenſurabiles,* a 5. dec. *a habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rurſus quia C, B, cōmenſurabiles ſunt, habebit quoque C, ad B, proportionē, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G,* b 4. oct. *b ſumanturq́; tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C: & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad B, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K,* c 6. dec. *c inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.*



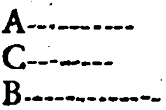
D, 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I, 4. K, 6.

## SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atque A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoque A, & B, inter ſe lōgitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine comenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia cōmenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles, d 5. dec. *d* erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. e 4. oct. *e* Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rurſum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. f Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt, f 6. dec atque adeo lineæ A, B, potentia commenſurabiles. Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantum eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ, longitudine inter ſe commenſurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum ſit commenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantum Rationali expoſitæ commenſurabiles, quas quidem inueniemus poſtea in ſcholio 2. propoſ. 19. huius lib.

SED & conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus hoc modo.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiam commenſurabilis: erit & reliqua eidem commenſurabilis.



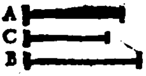
SINT enim A, & B, commenſurabiles, ſitque A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, commenſurabilem eſſe. Cum enim tam B, quam C, ipſi A, ſit commenſurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine, ſit autem A, ipſi C, commenſurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commenſurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B, C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At verò ſi lineæ A, & B, potentia tantum ſint commenſurabiles, & A, ipſi C, commenſurabilis ſiue longitudine, & potentia, ſiue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilem; quia vtraque B, C, ipſi A, hac ratione potentia eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit ſi A, ipſi C, commenſurabilis ſit longitudine, reliquã B, eidem C, longitudine commenſurabilem eſſe, quia non vtraque B, C, ipſi A, longitudine commenſurabilis eſt, ſed C, quidem longitudine, at verò B, potentia tantutum, vt ex hypotheſi conſtat.

## THEOR. 10. PROPOS. 13. xij. o.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidẽ ſit cõmenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommẽſurabiles erunt magnitudines.

SINT *duæ magnitudines* A, *&* B, *quarum* A, *ſit ipſi* C, *commenſurabilis, &* B, *eidem* C, *incommenſurabilis.* Dico A, *&* B, *inter ſe incommenſurabiles eſſe.* *Si enim* B, *dicatur eſſe commenſu-*



a 12. decimi. *rabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; a erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles, quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.*

## SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, *b* oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis. b 12. decimi.

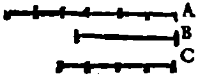
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma eſt, fit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſeriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

xiiij.
viij.

## THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

*SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem, Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac*



c 21. decimi. *propterea & C, ipſi B; cum & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; c erunt & A C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

HIC quoque ſi magnitudines A, *B*, C, ſint lineæ, & A, B, cõmenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum,

ſiue

ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, *a* eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (cum hoc poſito, utraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum, ponitur enim A, ipſi C. longitudine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, cōmenſurabiles ſint potentia tantùm, & A, ipſi C. potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles; *b* & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, utraque A, C, ipſi B. potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.

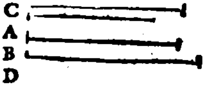
a 12. *decimi.*

b 12. *decimi.*

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.

QVÆ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommenſurabiles A, B, quibus cōmenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A, & C, cōmenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B. incommenſurabilis; *c* eritquoq; reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incōmenſurabilis; *d* erit & reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.



c 14. *decimi.*

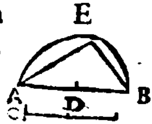
d 14. *decimi.*

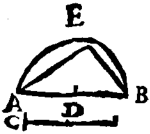
SI autem magnitudines A, B. C, D. ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommenſurabiles, vel longitudine & potentia, ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine commenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incōmenſurabiles. Si verò A, & B. incommenſurabiles ſint potentia, & ipſis potentia tantùm commenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incommenſurabiles; ut perſpicuum eſt.

## LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus poteſt, quàm minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamē quia hic brevius ex iis, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile judicavimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo AB, plus poſſit





quàm C. Diviſa AB, biſariam in D, deſcri-
batur ex centro D, & intervallo DA, vel
a 1. quarti. DB, ſemicirculus A E B, *a* in quo aptetur
recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque re-
cta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quàm C, quadrato
b 31. tertii. rectæ EB. *b* Cùm enim angulus E, in ſemicirculo rectus
c 47. primi. ſit; *c* erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex A E,
EB; atque idcirco AB, plus poterit quàm A E, hoc
eſt, quàm C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum.
Similiter.

DVABVS datis rectis lineis ſive æqualibus, ſive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas poteſt.

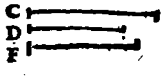
HOC etiam tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo
in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniun-
gantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta
d 47. primi. AB, *d* quippe cùm quadratum ex AB, æquale ſit quadra-
tis ex A E, E B.

## THEOR. 12. PROPOS. 15.

xiv.
xij.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſſit quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſſit quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

*SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, poſſitque A, prima plus quàm B, ſecunda quadrato recta E; & C, tertia plus poſſit quàm D, quarta, quadrato recta F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si verò E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilem eſſe.*



*Quoniam enim eſt ut A, ad B, ita C, ad D;* e 22. ſexti. *c erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratũ ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E. per hypo-*

*hypotheſin; & quadratum ex C, quadratis D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et dividendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D;* a *Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; convertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commenſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, ut in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 22. ſexti.

## *SCHOLIUM.*

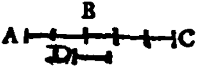
EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantùm commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantùm ipſi C, eſſe commenſurabilem, ut conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. hujus lib. ſcripſimus.

## THEOR. 13. PROPOS. 16.

xv. ix.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

*COMPONANTUR duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utriq; ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe.* b *Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur,* c *metietur quoq; D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cùm ergo D, metiatur AC, & A; erunt AC, AB, commenſurabiles: Similiter cùm D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, utrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.*



b 3. decimi.
c 1. pronun.

*SED jam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe.* d *Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB;* e *metietur quoque D, reliquam BC. Quare cùm D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.*

d 3. decimi.
e 9. pronun.

COROL-

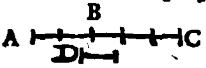
## COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam ut in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius AC, & ablatæ AB, cùm metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles AC, BC. Quod eſt propoſitum.

xvj.

## THEOR. 14. PROPOS. 17.

ix. SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.



*COMPONANTVR duæ magnitudines incommenſurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, utrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt utrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi AB,* a 3. dec. *a ſitque D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur* b 3. pronun. *D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cùm D, metiatur utramque AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commenſurabilis eſt AC, ipſi AB: Eademque ratione neq; ipſi BC, commenſurabilis eſt.*

*SED jam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommenſurabilis ſit uni ipſarum componentium, nempe ipſi AB. Dico quoq; AB,* c 16. decimi. *BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, c erit quoque tota AC, utrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarum, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commenſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi AC, ipſi BC, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendũ.*

## COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ incommenſurabilem eſſe, nempe ſi AC, incommenſurabilis ſit ipſi AB, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC. incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi BC, foret commenſurabilis, eſſet quoq; AC. ex coroll. præcedentis propoſ. reliquæ AB, commen-

commenſurabilis. Quod eſt abſurdum, ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo AC, ipſi BC, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum,

## SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, in duabus proximis antecedentibus propoſitionibus, earumque corollariis, ſi de lineis agatur, intelligendas eſſe lineas longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles. Aſſumitur enim ad utriusque propoſitionis demonſtrationem cõmunis menſura D, &c. quam quidem ſolùm lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles habent, ut ex defin. apparet.

## LEMMA I.

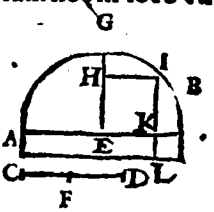
SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonſtravimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

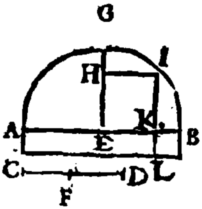
## LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolvi poſſit ex propoſ. 28. lib. 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidiã maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, ut vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptum, (quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) minus ſit quadrato ex dimidia parte maioris deſcripto; (quod quidẽ applicatũ eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamvis, inquam, abſolvi hoc poſſit per propoſ. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco cũ aliis interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AC, CD, quarum AB, maior ſit, oporteatq; ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogram-



mum



mum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta CD, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & intervallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quàm tota CD, erit quoque AE, dimidia ipſius AB, hoc eſt, EG. ipſi AE, æqualis, maior quàm CF, dimidia ipſius CD. Poſita igitur EH, æquali ipſi CF, agatur per H, ipſi AB, parallela HI, demittaturq; IKL, ad AB, perpendicularis, & ſit KL, ipſi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam enim KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, ut a 17. ſexti. in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; a erit rectangulum ſub AK, KB, hoc eſt, rectangulum AL, æquale quab 34. primi. drato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH; b (eſt enim KI, ipſi EH, æqualis, ob parallelogrammum) EI, hoc eſt, quadrato ex CF: Eſt autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quòd quadratum ex CD, per ſcholium propoſ. lib. 2. quadruplum ſit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensq; quadrato BL, æquale eſt quartæ parti quadrati ex CD, deſcripti. Quod eſt propoſitum.

## SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita ſecare, ut rectangulũ ſub partibus contentũ, æquale ſit dato rectilineo, quod tamẽ maius non ſit, quàm quadratum à dimidia linea deſcriptũ.

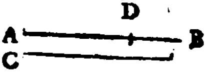
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunq; cui æquale ponatur quadratum ex CF, non majus quàm quadratum ex dimidia AE, ita ut latus CF, non majus ſit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, ſit EH, æqualis ipſi CF. Deinde acta HI, parallela ipſi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis oſtendemus, ut priùs, rectangulum ſub partibus AK, KB, æquale eſſe quadrato ex IK, hoc eſt, quadrato ex CF, atq; adeò & recti-

rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex CF. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe majus, quàm quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi majus eſſet, eſſet quoque recta CF, major quàm recta EG. Quare ex EG, abſcindi non poſſet recta ipſi CF, æqualis; quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonſtratione manifeſtum eſt.

## LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ inæquales, & ad majorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ſitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, deſcripti, ita ut DB, latus ſit quadrati, quo parallelogrammũ applicatum deficit. Dico ſegmenta AD, DB, inæqualia eſſe. Si enim AD, DB, ſegmenta dicantur eſſe æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad AB. deficienſq; figura quadrata ex *D*B, deſcripta, æquale ſit rectangulo ſub AD, DB, ſit autem quod ſub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex AD, dimidio ipſius AB, deſcriptum; atque adeò ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipſius parallelogrammi: Eſt autem & quadratum ex C, per hypotheſin, quadruplum eiuſdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia ſunt, atque rectæ A*B*, & C, æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, & A*B*, maior. Inæqualia igitur ſunt ſegmenta A*D*, D*B*. Quod eſt propoſitum.



HOC facilè etiam apparet ex conſtructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abſciſſa ſit per conſtructionem, EH, æqualis dimidiatæ parti ipſius CD, nempe ipſi CF, ductaque HI, parallela ipſi A*B*, & tandem demiſſa perpendicularis IK, ut partes factæ ex applicatione ſint AK, K*B*; manifeſtum eſt AK, K*B*, ſegmenta eſſe inæqualia, cùm A*B*, in E, ſecta ſit bi-ſit biſariam. Immò hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

## xvii. xiij. THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet.

*SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propoſ. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum ſub AD, DB, faciatque ſegmenta AD, DB, longitudine commenſurabilia. Dico AB, plus poſſe quàm C, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quoniam enim per 3. lemma præcedentis propoſ. AD, major eſt, quàm DB; dividatur AB, bifariam in E, & ipſi ED, æqualis ſumatur EF. Quo facto, cùm tota EA, EB, æquales ſint, & ablata quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF. BD. æquales. Et quia recta AB, diviſa eſt bifariam in E, & non bifariam in D, a erit rectangulum ſub AD, DB, una cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadratum rectanguli ſub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB. Eſt autem quadruplo rectanguli ſub AD, DB, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale eſt quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum eſt ex ſcholio propoſ. 4. lib 2 quadrati ex ED, cùm FD, dupla ſit ipſius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale eſt quadratum ex AB, quod quadratum ex AB, quadruplum ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiatæ parte ipſius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia ſunt quadrato ex*

a 5. ſecundi,

AB:

*AB: Ac proinde recta AB, plus poteſt quàm recta C, quadrato recta FD. Hanc igitur FD, demonſtrare oportet longitudine commenſurabilem eſſe ipſi AB. Quoniam recta AD, DB, longitudine ponuntur cōmenſurabiles: a erit quoque toto AB, parti DB, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi DB, compoſita ex DB, AF, longitudine commenſurabilis; (quod compoſita ex DB, AF, dupla ſit ipſius DB,) Igitur cùm utraque AB, & compoſita ex DB, AF, longitudine ſit commenſurabilis ipſi DB, b erunt quoque AB, & compoſita ex DB, AF, longitudine inter ſe commenſurabiles; Ac propterea cùm AB, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, commenſurabilis ſit longitudine compoſita ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib. commenſurabilis longitudine reliqua FD. Ergo AB, plus poteſt quàm C, quadrato recta FD, longitudine ſibi commenſurabilis.*

a 16. decimi.

b 12. decimi.

*SED jam AB, plus poſſit quàm C, quadrato linea ſibi longitudine commenſurabilis; & quarta parti quadrati ex C, aquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe quàm C, quadrato recta FD. Quare cùm AB, ponatur plus poſſe, quàm C, quadrato recta longitudine ſibi commenſurabilis; erit recta AB, ipſi FD, longitudine commenſurabilis. Igitur cùm tota AB, compoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam una, commenſurabilis ſit longitudine ipſi FD; erit eadem AB, longitudine commenſurabilis reliqua compoſita ex AF, DB, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cùm ipſius ſit dupla: Igitur cùm utraque AB, DB, longitudine ſit commenſurabilis compoſita ex AF, DB; c erunt quoque AB, DB, longitudine inter ſe commenſurabiles; Atque adeò cùm tota AB, compoſita ex AD, DB, commenſurabilis ſit longitudine ipſi DB; d erunt ipſa AD, BD, longitudine quoque inter ſe cōmenſurabiles. Quocirca ſi fuerint dua recta linea inaquales, &c. Quod erat demonſtrandum.*

c 12. decimi.

d 16. decimi.

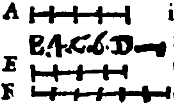
## THEOR. 16. PROPOS. *19.*

xviij.
xiv.

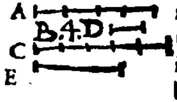
SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam dividat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum biles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm: Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commenſurabiles eſſe; Si verò potentia inter ſe ſolùm ſunt cõmenſurabiles: dicũtur ipſa quoq; Rationales, potentia ſolùm inter ſe commenſuabiles.

## SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei utraq; eſt commenſurabilis. Aut denique utraque expoſitæ Rationali cõmenſurabilis eſt ſolùm potentia. Hæc autẽ tria genera inveniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diviſa in quatuor partes, quot nimirum unitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta una partium rectæ A; & quoties *D*, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties unitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus quæ quidẽ magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cùm habeant D, communem menſuram Inventæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine cõmenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarum una nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

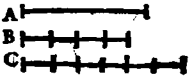


IAM verò D. metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita ut utraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur ut prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles Quare C, E, Rationali *A*, longitudine commenſurabiles Rationales ſunt. Cùm ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inventæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine cõmenſurabiles, & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ.



a 11. *dec.* POSTREMO expoſitæ Rationali A, a inveniatur recta B, longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes

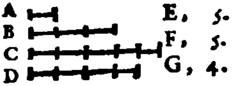
partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolùm eſſe commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C; quòd B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeò & potentia; *a* Igitur quadrata rectarum *A*, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C. ipſi A. potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; *b* erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolùm potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inventæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantùm commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.



a 12. *decimi.*

b 14. *decimi.*

QVOD ſi quis optet invenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta menſura quavis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolùm expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles facilè hoc modo demonſtrabimus. *c* Quoniam Rationales lineæ ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; *d* quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunq; inter ſe commenſurabiles eſſe.

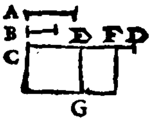
c 6. *defin.*

d 12. *ſexti.*

## LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & *B*. Dico eſſe ut A, ad *B*, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſũ.



Ex quãtacũq; enim linea rectaCD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturq; rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & *B*, *a* Quoniam a 1. ſexti. igitur eſt ut CE, ad EF, hoc eſt, ut A, ad *B*, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, ut quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.

EODEM modo erit, ut *B*, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

## LEMMA IV.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio *B*. Dico & A, Rationale eſſe. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, quod nimirum ab expoſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur *B*, Rationale eſt, *b* erit ipſum Rationali C, commenſurabile: b 9. def. Eſt autem & A, ipſi *B*, commenſurabile. Igitur A, & C, cùm commenſurabilia ſint ipſi *B*, *c* inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali c 12. decimi. quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripta commenſurabile, *d* Rationale eſt. Quod erat demonſtrandũ. d 6. def.

## THEOR. 17. PROPOS. 20.

xix.
xv.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

*SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus* BC, CD, *ſecundum aliquem prædictorum modorum, (hoc eſt, ſecundum aliquẽ trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ explicuimus; ita ut vel altera ipſarum BC, CD, Rationali expoſita A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei utraque commenſurabilis ſit aut longi-*

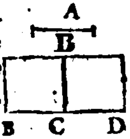
*longitudine, aut potentia tantùm. Dico BD, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur enim ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expoſita A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm: a erit quoque quadratum BE, ex BC, deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile: b Eſt autem quadratum ex A, Rationale, ratione cujus reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. c Igitur & BE, illi cõmenſurabile, Rationale eſt. Quia verò BC, hoc eſt, EC, & CD, longitudine cõmenſurabiles ſunt, (ponuntur enim BC, CD. Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles,) d & eſt ut EC, ad CD, ita EB, ad BD; e erunt quoque EB, BD, commenſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propoſ. BD, Rationali BE, commenſurabile, Rationale eſt. Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 3. *def.*
b 8. *def.*
c 9. *def.*
d 1. *ſexti.*
e 10. *decimi.*

## THEOR. 18. PROPOS. 21.

xx.
xvj.

SI Rationale ad Rationalem applicetur latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.



*SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis BC, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholia 2. propoſitionis 19. expoſuimus, hoc eſt, ſive BC, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſive non, commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, commenſurabilem longitudine. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BE; quod ſimiliter, ut in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur BE, BD, Rationalia ſunt, f ipſa commenſurabilia erunt quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; g Ac propterea & commenſurabilia inter ſe erunt: h Eſt autem ut BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commenſurabiles ſunt longitudine, ut in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi BC, commenſurabilis longitudine; i ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, ut in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtravimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.*

f 9. *def.*
g 12. *decimi.*
h 1. *ſexti.*
i 6. *def.*

## LEMMA I.

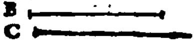
RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, ut in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt, quod eſt abſurdum. Ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

HOC idem conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes ſpatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

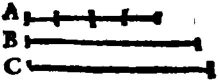
## LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolùm commenſurabiles invenire.



DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tãtùm inter ſe commenſurabilium. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inveniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi *B*, *a* inveniatur C, longitudine tantùm incommenſurabilis, ſeu (quod idem eſt) potentia tantùm commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt, (B, quidem, quòd ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quòd inventa ſit potentia tantùm incõmenſurabilis ipſi *B*, atque adeò ipſi A.) Rationales erunt *B*, & C: Sunt autem & potentia ſolùm commenſurabiles. Inventæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantùm commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.

a 11. *decimi.*



POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantùm incommenſurabilis *b* inveniatur *B*; & huic rurſum longitudine tantùm incommenſurabilis C, maior aut minor quàm A. Dico *B*, C, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

b 11. *decimi.*

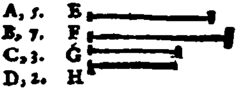
Quòd

Quòd enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet
ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſten-
demus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commmẽſu-
rabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in
ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare
cum vtraq; *B*, C, expoſitæ Rationali A, ſitq; potentia com-
menſurabilis; *a* erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo
ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſura- a 6. *def.*
biles.

## SCHOLIVM.

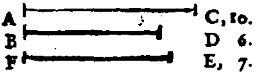
QVOD ſi inueniendæ ſint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex *E*, ad quadratum ex F, vt in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratū ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potentia tantum commenſurabiles inter ſe. Quod enim



Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cum enim earum quadrata pro-
portionem habeant, quam numeri A, *B*, C, D, (nempe quadratum
ex *E*, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtru-
ctione; ſimiliterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt *B*, ad
C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C. ad D. At vero ex æ-
quo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterque
quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadra-
tum ex F, ad quadratum ex *H*, vt B, ad D,) *b* erunt ipſa inter ſe com- b 6. *dec.*
menſurabilia; ac propterea & rectæ ipſæ potentia ſaltem commen-
ſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali erunt & reliquæ F, G, H, Ratio-
nales. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita o-
ſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris
primis A, B, *C*, D: numeri autem primi proportionem non habent,
quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt
etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri
quadrati. *c* Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles c 9. *deci-*
ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. *mi.*
Rationales igitur ſunt, & potentia tantum commenſurabiles. Quod
eſt propoſitum.

QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis

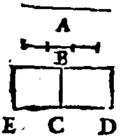


commenſurabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A,B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C,D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C,D, metiatur) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe & ipſis A,B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum *B*,F, proportionem habentia, quam numeri D,E, *a* commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio *a 6. decimi.* D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quod D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cũ E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) *b* erunt rectæ *B*,F, longitudine incommen- *b 9. decimi.* ſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & E, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A,F, longitudine incommenſurabiles, &c.

xxi.

## THEOR. 19. PROPOS. 22.

xix. QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.



*SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum* BD, *contentum ſub Rationalibus* BC, CD, *potentia tantum commenſurabilibus (ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non) Dico rectangulum* BD, *eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi BD, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex* BC, *quadratum* BE, *quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus.* c *Et quoniam eſt vt* EC, *hoc eſt,* BC, *c 1. ſexti.* *ad* CD, *vt* BE, *ad* BD: *Eſt autem* BC, *ipſi* CD, *longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ.*

*propoſ.10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi BD, incommenſurabile. a Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A. ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; b erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A. eidem BD, incommenſurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſita incommenſurabile exiſtens. c Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1 lemmate propoſ. antecedentis.*

a 9. *def.*

b 14. *decimi.*

c 10. *def.*

*VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media d propterea quod media proportionalis eſt inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.*

d 17. *ſexti.*

## SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. *e* Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineã Irrationalẽ, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.

e 17. *ſexti.*

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non ſolum recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continuè proportionales, quales ſunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio prop. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum medium proportionale eſt inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari poteſt.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ commenſurabilibus, quale eſt Medium BD. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatiũ Mediũ contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe

Medijs longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum, ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

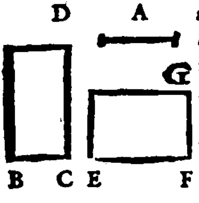
xxij.
xx.

## THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

*SIT linea Media A, & Rationalis* BC, *ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſita commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum* a *applicet urque ad* BC, *rectangulum* BD, *æquale quadrato ex media* A, *vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatque latitudinem* CD. *Dico* CD, *Rationalem eſſe, & ipſi* B,C, *longitudine incommenſurabilem Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantū inter ſe cōmēſurabilibus contentū, alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum* EG, *ſub rationalibus* EF, FG, *potentia tantum commenſurabilibus contentū. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum* BD, *æqualia erunt* BD, & EG, b *lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angu-*

a 45. pri.



b 14. ſexti.

*angulos, nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; a Ac propterea* a 22. ſexti.
*quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum*
*ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratum ex BC, commenſurabile*
*eſt quadrato ex EF, (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales:*
*atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia,*
*vel potentia tantum) Igitur b & quadratum ex FG, commenſurabile* b 10. decimi.
*erit quadrato ex CD: propter eaque & rectæ FG, CD,*
*commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſita*
*Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis;*
*erit quoque CD, expoſita Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus*
*in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione,*
*Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi*
*BC. Quoniam enim EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles,*
*hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF,*
*ad FG, ita quadratum ex EF, ad rectangulum EG, ſub EF, FG, contentum,*
*ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. c erit quadratum ex EF,* c 10. decimi.
*incommenſurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod*
*huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato*
*ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem*
*potentia commenſurabiles) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile*
*ſit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato*
*ex EF, incommenſurabile; d incommenſurabilia erunt quadratum* d 13. decimi.
*ex CD, & rectangulum BD. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius*
*lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad*
*rectam BC. e Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine CD, & BC.* e 10. decimi.
*Rationalis ergo eſt CD, & Rationali BC, longitudine incommenſurabilis.*
*Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum,*
*&c. Quod demonſtrandum erat.*

## SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad *BC*, rectangulum
quadrato ex A, æquale, ſi ipſis BC, & A, *f* ſumatur tertia f 11. ſexti.
proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales
ſint; *g* erit rectangulum *BD*, ſub extremis BC, CD, contentum g 17. ſexti.
æquale quadrato mediæ proportionalis A.

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifeſtũ eſt, omne mediũ, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rect-

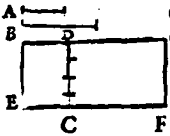
angu-

angulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

## xxiiij. THEOR. 21. PROPOS. 24.

### MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

*SIT Media A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis CD, a ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur DE, Medium ad Rationalem*
a 45. primi.
*CD, applicatum, facit CE, latitudinem; b erit*
b 23. decimi. *CE, Rationalis ipſi CD, longitudine incommenſurabilis. Rurſus ad CD Rationalem c applicetur*
c 45. primi. *rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia recta A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia DE, DF, commenſurabilia.*
d 1. ſexti. *d Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF.*
e 10 decimi. *e Igitur EC, CF, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi CD, incommenſurabilis.*
f 14. decimi. *f Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ CD, ſit commenſurabilis; (Nam cum EC, CF ſint longitudine oſtenſa commenſurabiles, & EC, ipſi CD, commenſurabilis ſaltē potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem CD, commenſurabilis potentia ex ijs, quæ in ſcholio propoſ 12. huius lib. ſcripſimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles,*
g 22. decimi. *g Ac proinde recta B, potens rectangulum DE, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD CF, Media eſt. Media igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.*



## COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit DF, eſſe quoque Medium, nimirum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium DF, ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Medium eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum *DE*, Medium. (Nam cum DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus) & B, ipſum DF. Quoniam igitur D*E*, DF, commenſurabilia ſunt, erunt quoq; quadrata ex *A*, *B*, ipſis æqualia, commenſurabilia,

bilia. Quare A,B, rectæ potentia ſaltem ſunt commenſurabiles; Atque idcirco exiſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

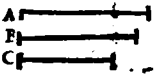
## LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine cōmenſurabilem, dici Mediam, & ipſi cōmenſurabilē, nō ſolū lōgitudine ſed & potētia. Vniuerſe enim quæ lōgitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt cōmenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommēſurabilis, dicetur & ſic media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

## LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniãtur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; [a] erit vtraque B, C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erunt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A, C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.



[a] 24. *decimi.*

### SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Media ſit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles,

THEOR.

xxiv.
xxiij.

## THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulnm, Medium eſt.

CONTINEATVR *rectangulum* AD, *ſub Medijs* AC, CD, *longitudine commenſurabilibus.* Dico AD, *medium eſſe.* Deſcribatur *ex* CD, *Media quadratum* BD, *quod erit Medium.* a *Et quoniam eſt*

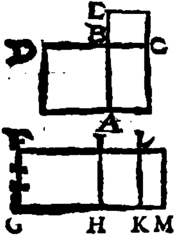
a 1. ſexti. *vt* AC, *ad* CB, *ita* AD, *ad* DB: *Sunt autem* AC, CB, *hoc eſt*, AC, CD, *longitudine commenſurabiles; erurt* AD, DB, *commenſurabilia. Quare ſpatium* AD, *Medio* DB, *commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. præcedentis prop. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum,*

xxv.
xxiij.

## THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT *rectangulum* AC, *comprehenſum ſub Mediis* AB, BC, *potentia tantum commenſurabilibus. Dico* AC, *eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex* AB, BC, *quadrata* AD, CE, *quæ Media erunt. vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus, cum rectæ* AB, BC,
b 45. primi. *Media ponantur. Exponatur Rationalis* FG, b *ad quam applicetur*



FH, *quadrato* AD, *ex* AB, *deſcripto æquale; & ad* HI, *rectangulum* IL, *rectangulo* AC, *æquale; & denique ad* KL, *rectangulum* LM. *æquale quadrato* CE, *ex* BC, *deſcripto; eritque totum* FM, *vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero* AD, CE, *Media ſunt, erunt &* FH, LM, *illis æqualia, Meda: quæ cum applicentur ad Rationales* FG, KL, (c *eſt enim &* KL, *Rationali* FG, *æqua-*
c 34. primi. *lis, ob parallelogrammum* FK, *Rationalis*) *faciantq; latitudines* GH, KM, d *erunt rectæ* GH, KM, *Rationales, ipſi*
d 23. decimi. FG, *ſeu* KL, *longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ* AB, BC, *potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt, erunt & earum quadata* AD, CE, *atque adeo & ipſis æqualia rectangula* FH, LM, *commenſurabila*: e *Vt autem* FH, *ad* LM, *ita eſt recta* GH,
e 1. ſexti. *ad* KM. f *Igitur* GH, KM, *longitudine inter ſe commenſu-*
f 10. decimi. *rabiles ſunt. Quare* GH, KM, *Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero* FG, *ſolum com-*

*menſu-*

menſurabiles potentia, cum ei oſtenſa ſint longitudine incommenſurabiles;
a Ac propterea rectangulum ſub ipſis GH,KM, Rationale a 20. deci-
eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, mi.
ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtrique) b & vt DB. ad BC, ita b 1. ſexti.
AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; vt AD, ad
AC, ita AC, ad CE, atq; adeo AD, AC, CE. proportionalia ſũt. Igitur
& illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: c Habent autem c 1. ſexti.
rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL,
LM, Igitur & rectæ GH, HK, KM. proportionales ſunt; d proptereaq; d 17. ſext.
rectangulum ſub GH, KM. quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem
rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratum
ex HK, Rationale eſt; ideoque & recta HL, Rationalis erit: e & ob
hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel e 6. defin.
longitudine, & potentia, vel ſolum potentia. Et ſiquidem HK, ipſi
HI, longitudine ſit commenſurabilis, f rectangulum HL, ſub Rationalibus
HI, HK, longitudine commenſurabilibus contentum, hoc eſt, f 20. deci-
AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipſi HI, potentia ſolum mi.
commenſurabilis ſit, g erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, g 22. deci-
HK, potentia tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, mi.
illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Medijs AB, BC,
potentia tantum commenſurabilibus contentum vel Rationale, vel
Medium Quocirca quod ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus,
&c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum
ipſi AC, æquale. h ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta pro- h 12. ſexti.
portionalis, ſumatur pro latere HK. i Nam rectangulum ſub extre- i 16. ſexti.
mis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub medijs AB, BC.

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam
applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum
contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus
eſſe vel Rationale, vel Medium, docebit Euclides propoſ.
28. quanam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potentia tantum
commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Prop. verò 29.
duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium
Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, k rectangulum contentum ſub duabus
Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; k 20. de-
l Sub duabus verò Rationalibus potentia tantum commenſurabi- cimi.
libus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellarique Medi- l 22. deci-
um & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis mi.

a 25. decimi. conſtat a rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitudine
commenſurabilibus eſſe Medium; b Rectangulum autem ſub
b 26. decimi. duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum
eſſe vel Rationale vel Medium.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incōmenſurabilibus continetur; Reſpondemus illlud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere, nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

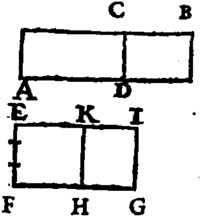
SIT enim rectangulum AC, comprehenſum ſub duabus Medijs
AB,BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC,
neque Rationale eſſe, neque Medium, &c. Conſtructis enim eiſdem,
vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales
eſſe, & ipſi FG, longitudine incōmenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC,
ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earum
quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH,
c 1. ſexti. LM, incommenſurabilia c Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad
d 10. decimi. rectam KM. d Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles.
Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia
e 22. decimi. tantum inter ſe commenſurabiles; e Ac propterea rectangulum
ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta
f 17. ſexti. ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media f Poteſt autem rectangulum
ſub ipſis GH, KM, recta HK; (Nam vt prius oſtendemus,
tres GH, HK, KM, eſſe porportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt,
g 21. decimi. & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, g
faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem,
& ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum.
oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo
h 23. dec. neque IK, medium eſt; ſi enim eſſet Medium, h faceret ipſum applicatum
ad Rationalem HI, latitudinē HK, Rationalem, & ipſi HI,
longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt
enim HK, Irrationalis, & Media Itaque cum IK, neque Rationale ſit,
neque Medium; neceſſario neque AC, illi æquale, Rationale erit,
neque medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale
erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media continetur cum HI,
Rationalis ſit, & HK, oſtēſa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ
poteſt ſpatium ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus,
quales ponuntur AB, BC, comprehenſum,
poſſe quoque rectangulum ſub Rationali, & Irrationali,
quæ Media vocatur, contentum.
Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 24. PROPOS. 27.

xxvi,
xxij.

### MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

*SVPERET Medium* AB, *Medium* AC, *rectangulo* DB *Dico* DB, *non eſſe Rationale. Sit enim ſi fieri poteſt,* DB, *Rationale, Expoſita ergo Rationali linea* EF, a *ad ipſam applicetur rectangulum* EG, *Medio* AB, *æquale; & Medio* AC, *rectangulum* EH, *æquale, vt ſit reliquum* HI, *Rationali* DB, *æquale. Erunt igitur* EG, EH, *æqualia Mediis* AB, AC, *Media; &* HI, *æquale Rationali* DB, *Rationale. Quoniam ergo Media* EG, EH, *ad Rationalem* EF, *ſunt applicata,* b *erunt rectæ* FG, FH, *Rationales, & ipſi* EF, *incommenſurabiles longitudine. Rurſus quia Rationale* HI, *applicatum eſt ad Rationalem* HK, ( c *eſt enim recta* HK, *Rationali* EF, *æqualis*) d *erit recta* HG, *Rationalis, & ipſi* EF, *longitudine commenſurabilis. Quare cum* HG, EF, *longitudine ſint commenſurabiles; & EF, ipſi* FH, *longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum;* e *erit & HG, eidem FH, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt* FH, *ad* HG, *ita quadratum ex FH, ad rectangulum ſub FH, HG, ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib.* f *Igitur quadratum ex* FH, *incommenſurabile eſt rectangulo ſub* FH, HG, *Sed quadrato ex FH, commenſurabile eſt quadratum ex HG, (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus FH,* HG, *deſcripta)* g *atque adeo & duo quadrata ex FH, HG, ſimul, quadrato ex* FH, *commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub FH, HG, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illius eſt duplum) Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex* FH, HG *ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub* FH, HG, *bis* h *Quare & compoſitum ex quadratis rectarum* FH, *HG, & ex rectangulo bis ſub FH, HG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG,* i *At quadratis ex FH, HG, vna cum rectangulo bis ſub FH, HG, æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG; Eſt autem compoſitum hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. quod oſtenſum ſit commenſurabile quadrato Rationali ex* FH. *Igitur cum huic compoſito, quod Rationale eſt, incommenſurabile ſit quadratum ex FG,* k *erit quadratum ex FG, Irrationale,* l *ac propterea & recta* FG, *Irrationalis erit. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt,* FG, *Rationalis longitudine ipſi* EF, *incommenſurabilis.* Non ergo DB, *quo Medium* AB, *ſuperat Medium* AC, *Rationale eſt. Quam ob rem Medium non ſuperat Medium Rationali. Quod erat oſtendendum.*

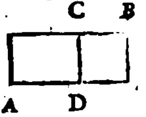


a 45. primi.
b 23. decimi.
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. dec.
f 10. dec.
g 16. decimi.
h 17. dec.
i 4. ſecundi.
k 10. def.
l 11. def.

## SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.



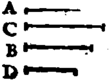
RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoq; eſſe Rationale. Quoniã enim AB. AC, Rationalia ſunt; *a*
a 9. *deſin.* erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ; *b* atque adeo & inter ſe commen-
b 12. *dec.* ſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitum ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC. erit quoque idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.

## PROBL. 4. PROPOS. 28.

xxvij.
o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

*EXPONANTVR per lemma 2 prop. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles, c inter quas media propor-*
c 13. *ſexti.* *tionalis ſumatur* C, *d ſiatque vt* A, *ad B, ita* C, *ad D.* Dico C, *D, eſſe*
d 12. *ſexti.* *Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale compre-hendant. Quoniam enim A,* B, *Rationales ponuntur potentia tantum*



*commenſurabiles; e erit rectangulum ſub ipſis*
e 22. *dec.* *contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo f cum ipſum poſſit recta* C, *erit* C,
f 17. *ſexti.* *Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita* C, *ad* D, *ſuntque* A, *B, potentia tantum commenſurabiles; erunt quoque* C, *D. ſolum commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ.* 10. *huius lib. oſtendimus. g Eſt ergo &* D, *Media* C, *commenſurabilis Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ* C, D, *potentia*
g 24. *dec.* *tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam enim eſt vt* A, *ad* B, *ita C, ad D, & permutando vt* A, *ad* C, *ita* B, *ad D. Vt autem* A, *ad C, ita eſt* C, *ad* B; *erit quoque vt* C, *ad B, ita B, ad* D, *ideoque* B, *media proportionalis inter* C, *& D,* h *pote-*
h 17. *ſexti.* *rit rectangulum ſub ipſis* C, D, *comprehenſum. Eſt autem quadratũ ex B. linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub* C, *D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus* C, *D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.*

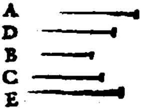
## PROBL. 5. PROPOS. 29.

xxviij.
o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

EXPO-

*EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles a & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. b Deinde* a 13. ſexti *fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe potentia tantum* b 12. ſext *commenſurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, c quod illi æquale eſt, d Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media.* c 17. ſexti. *Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E, ſunt autem* d 22. dec. *B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; Erunt quoque D E, potentia ſolùm commenſurabiles vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, e erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis, Media;* e 24. dec. *Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. f Rectangulum igitur ſub* f 16. ſexti. *DE æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autem quod ſub A, C, Rationalibus, potētia ſolum commenſurabilibus g Irrationale, & Mediū. Igitur* g 22. dec. *& rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.*



## SCHOLIVM I.

IN ijs quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

### DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quando quidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

| | |
|---|---|
| A, 6. | C, 12. |
| B, 4. | D, 8. |
| E, 24. | F, 96. |

QVONIAM autem in lib. 9. *h* oſtenſum eſt, ſi impar numerus, h 28. & 29. noni. vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, ſi impar multiplicet imparem, perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorū vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par; Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

## LEMMA. I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIATVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta a 24. & 26. noni. ſunt duo plani ſimiles AB, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar. *a* Et quoniam, ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto BD, ex AB, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariam in E: Dico numerum factū b 1. noni. ex AB, in BD, *b* qui quidem quadratus eſt, cōpoſitum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB: erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur, quod eſt propoſitum.

A.....E.....D........B
C.......

## COROLLARIVM.

EX his manifeſtū eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumantur AB, & C, non ſimiles, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum BE, c 1. noni. ED, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex AB, in BD, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, *c* numeri AB, BD, hoc eſt, AB, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum ponuntur enim non ſimiles.

## *SCHOLIVM.* II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe AB, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nā quadrati numeri ex BE, ED, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratū ex ED, numero qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus eſt.

A.....E.....D........B
C........

SI vero inueniendi ſunt duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nã ſimiliter oſtendemus quadratum ex BE, æqualem eſſe quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE, ED, eſt numerus factus ex AB, in BD, qui cum non ſit quadratus, ( ſi enim eſſet quadratus, eſſent AB, BD, plani ſimiles, quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A...E...D........B  
C.......

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

## LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles AB. & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum AB, DB, inter ſe, vna cum quadrato ex DE, æqualis ſit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipſius ma-

A..H..I.E.F.G...D........B  
C........

ius latere BF. Erit ergo latus ipſius vel æquale numero BE, vel maius, (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur: Eſſet autē dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.)

A..H..I.E.F.G...D.......B

C........

Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE, ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo ſcilicet, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, æqualis reliquo quadrato ex DE; Ideoque & latus DF, lateri DE, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, æquale eſt numero BE. Sed neque maius. Sit enim ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero BI, qui maior ſit, quam BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore: maior eſt quadrato ex BE. latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum ex alter AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Eſt autem quadrato ex BE, oſtenſus in lemmate præcedentis æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe, maius eſt latere BE. Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille cōpoſitus maior eſt quadrato ex BF.

A..H..I.E.F.G...D.......B
C.......

SIT iam ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus unitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus eſt, (diviſus enim eſt AD, in E, bifariam) & ablatus AH, ablatæ unitatis EF; erit & reliquus HD, reliqui F D, duplus, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco HD, in F, biſariam dividitur. Quare ex 6. theorem. eorũ, quæ ad prop. 14. lib. 9. demonſtravimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, unà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidẽ quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, unà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, unà cũ quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in B D, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundẽ BD, producant æquales numeros; *a* habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis.

a *18. ſeptimi.*

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod ſit B G, ita ut qui ex AB, in B D, unà cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus I D, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, dividetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus, qui fit ex I B, in BD, unà cũ quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis, qui fit ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, unà cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG,

& DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex AB, in BD, unà cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.

A..H..I.E.F.G...D........B
C........

## SCHOLIVM III.

EX hoc facilè inveniemus duos numeros, ita ut ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inveniãtur duo quadrati, ita ut compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadraum.

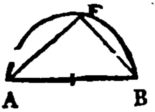
IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos, diviſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

xxix.
xvij.

## PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

*EXPONATVR linea Rationalis* AB, *& inveniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD,* CE, *quorum exceſſus* DE, *non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ.* 6. *huius lib. fiat ut* CD, *numerus ad numerum* DE, *ita quadratum, ex* AB, *ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex* AF, *accommodetur q;* AF, *in ſemicirculo* ABF, *circa diametrum* AB, *deſcripto: ac deniq; connectatur recta* FB. a *Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo;* b *erit quadratum ex* AB, *æquale duobus quadratis ex* AF, *&* FB; *hoc eſt, recta* AB, *plus poterit quàm* AF, *quadrato recta* FB. *Et quia eſt quadratum ex* AB, *ad quadratum ex* AF, *ut numerus* CD, *ad numerum* DE, c *erunt quadrata ex* AB, AF; *commenſurabilia; atque adeò cùm quadratum ex* AB, *ſit Rationale, nempe ex linea Rationali* AB; *deſcriptum; erit & quadratum ex* AF, *Rationale, propterea q; & recta* AF, *ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt* AB, AF, *atq; adeò commenſurabiles ſaltem potentia. Quia verò quadratum*



a 31. tertii. C.,...E.....D

b 47. primi.

c 6. decimi.

dratū ex AB, ad quadratū ex AF, proportionē nō habet, quā quadratus numerus ad quadratū numerū; (cùm neque quadratus numerus CD, ad non quadratū DE, proportionē habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & DE, quadratus eſſet, a ut in Arithmeticis eſt demonſtratum, quod non ponitur) b erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, ut oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles.

a 74. oct.
b 9. decimi

IAM verò, quoniam eſt ut CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, ut quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) c Quare rectæ AB, FB, longitudine commenſurabiles ſunt. Invenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major AB, plus poſſit, quàm minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

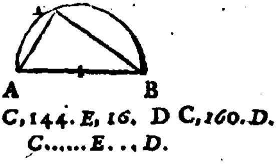
c 9. decimi.

## PROBL. 7. PROPOS. 31.

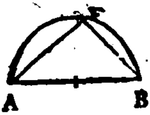
xxx.
xviij.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inveniantur q; per lemma 2. propoſ. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita ut ex illis compoſitus CD, non ſit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus CD, ſecetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumvis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipſorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs ſecundum priorem modum, eſſet totus CD, etiam quadratus: juxta poſteriorem verò, quilibet ipſorum CE, ED, quadratus quoque, d ut in Arithmeticis oſtenſum eſt, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. ut CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in ſemicirculo AFB, circa AB, deſcripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, ut in præcedenti, AB, plus quàm AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propoſ.



d 24. octavi.



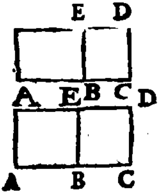
C,144. E, 16. C, 160. D.
C……E…D.

*propoſ. Quoniam verò rurſus, ut priùs, eſt per converſionem rationis, ut CD. ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB; Non habet autem CD, ad CE, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. a Quare rectæ AB, FB, longitudine incommenſurabiles ſunt. Invenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commenſurabiles, ita ut maior AB, plus poſſit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod erat faciendum.*

a 9. decimi.

## LEMMA.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris.



SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum conſtitutæ, quarum AB, maior ſit. Dico eſſe, ut AB, ad BC, ita rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC. Deſcribatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturque rectangulum AD: eritq; rectangulum AE, ſub AB, BC, contententum; quòd BE, ipſi BC, ſit æqualis; *b* perſpicuum autem eſt, eſſe ut AB, ad BC, ita AE, ad BD.

b 1. ſexti.

EODEM modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, ut in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, minor eſt, quàm BC.

xxxj.
xxiv.
xxv.

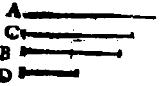
## PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

c 30. decimi.

*c REPERTÆ ſint duæ Rationales A. B. potentia tantùm commenſurabiles: ita ut A, major plus poſſit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur AB, ſunt Rationales potentia ſolùm commenſurabiles; a erit rectan-*

a 22. decimi.



*rectangulum ſub A, B, Irrationale, & recta C, ipſum potens, linea Media. Et quia eſt ut A, ad B, ita C, ad D; ſunt autem A, & B, potentia tantùm commenſurabiles; erunt quoque C, & D, potentiis ſolùm commenſurabiles, ut in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus. b Quare D, Mediæ C, commenſurabilis,* b 24. decimi. *Media quoque eſt. Inventæ ergo ſunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commenſurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim ſit ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; ſit autem ut A, ad C, ita C, ad B, erit quoq; ut C, ad B, ita B, ad D; c Ac propterea rectangulum ſub C, & D, æquale erit qua-* c 17. ſexti *drato ex B. Quamob rem, cùm quadratum ex B. Rationali Rationale ſit; erit & rectangulum ſub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm commenſurabiles, Rationale. Quoniam verò eſt ut A, ad B, ita C, ad D: poteſt autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, ex conſtructione; d poterit quoque C, plus quàm D, quadrato* d 15. decimi. *lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Invenimus igitur duas Medias, C, D, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus poſſit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.*

*QVOD ſi reperta ſint A, B, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut A, plus poſſit quàm B, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; reliqua autẽ fiant, ut priùs, oſtendemus eodem modo, inventas eſſe duas Medias C, D, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus poſſit quam minor D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.*

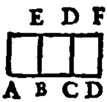
## *SCHOLIVM.*

ALII hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem brevius ac faciliùs idem ſine ipſo oſtendimus, ut facilè judicabunt, qui cum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Immò rectas C, D, Medias eſſe potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hîc oſtendimus, ac in propoſ. 28. hujus libri.

## LEMMA

SI ſint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum conſtitutæ. Dico eſſe ut AB, ad CD, ita rectangulum ſub AB, BC, adre-



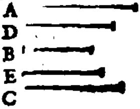
ad rectangulum ſub B C, *C*D. Deſcribatur enim ex *B* C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum AF, Eritq; A E, contentum ſub AB,BC; & CF, ſub BC, CD, quòd a1. *ſexti.* BE,CD, ipſi BC, æquales ſint. *a* Perſpicuum autem eſt eſſe AB, ad CD, ut A E, ad CF. Quod eſt propoſitum.

xxxij.
xxvj.

## PROBL 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas medias potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

*SINT inventa tres Rationales* A, *B*, C, *potentia tantùm commenſurabiles, ita ut A, plus poſſit quàm* C, *quadrato linea ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum.* b 30. *decimi.* b *Repertis duabus Rationalibus A*, C, *potentia tantùm commenſurabilibus, ita ut A, plus poſſit quàm* C, *quadrato linea ſibi commenſurabilis longitudine; inveniatur alia* B, *utrique* A, *&* C, *potentia ſolùm commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ.* 21. *huius lib. demonſtravimus)* c13. *ſexti.* c *Et ipſarum* A, B, *ſumatur media proportionalis* D; d 12. *ſexti.* d *fiatque ut D, ad* B. *ita* C, *ad* E. *Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt ut* A, *ad* C. e 17. *ſexti. ita rectangulum ſub* A, B, *ad rectangulum ſub B,* C; e *Eſt autem* f 16. *ſexti. rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex* D, f *& rectangulo ſub* B, C, *æquale rectangulum ſub* D, E, *quòd proportionales ſint* D, B, C, E; *Erit quoque ut* A, *ad* C, *ita quadratum ex* D, *ad rectangulum ſub* D, E: *Sed ut quadratum ex* D, *ad rectangulum ſub* D, E, *ita eſt per lemma* 3 *propoſ.* 19. *huius lib. recta* D, *ad rectã* E. *Igitur erit ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* E: *Sunt autem* A, C, *potentia ſolùm commenſurabiles. Ergo &* D, E, *potentia ſolùm commenſurabiles ſunt, ut in ſcholio propoſ.* 10. *huius lib. oſtendimus.* g 22. *decimi.* g *Quia verò* D, *potens ſpatium ſub* A, B, *Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Irrationalis eſt, &* Media; h 24. *decimi.* h *erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis Media. Inventa ergo ſunt duæ Mediæ D, E, potentia ſolùm commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub* B, C, i 22. *decimi.* i *quod Medium eſt, (quòd* B, C, *ſint Rationales potentia tantùm commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub* D, E; *erit rectangulum ſub* D, E, *Medium. Denique quia oſtendimus eſſe ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* E; *poteſt autem A, plus quàm* C, *quadrato linea ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione;* k 15. *decimi.* k *poterit etiam* D, *plus quàm E, quadrato linea longitudine ſibi commen-*

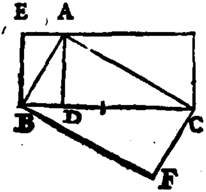


*commenſurabilis. Invenimus ergo duas Medias* D, E, *potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent, ita ut maior* D, *plus poſſit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.*

*QVOD ſi reperta fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut* A, *plus poſſit quàm* C, *quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, ut priùs, demonſtrabimus ſimiliter, inventas eſſe duas Medias D, E, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita ut maior* D, *plus poſſit quàm minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facilè apparere poteſt ex adducta demonſtratione.*

## LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contentum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC, & contentum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum deniq; ſub BC, AD, æquale contento ſub AB, AC.



QVONIAM ex coroll. prop. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis eſt inter CD, *B*D; *a* erit rectangulũ ſub CB, BD, quadrato ex AB, æquale. *a 17. ſexti.*

EADEM ratione erit rectangulũ ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniam per idẽ coroll. AC. media proportionalis eſt inter BC. CD.

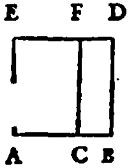
RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter BD, DC, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulũ ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, *b* quia triangula ABC, ABD, ſimilia ſunt; erit ut BC, ad AC, ita AB, ad AD. *c* Quare rectangulum ſub BC, AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, AC. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum ſub BC, AD; Item rectangulum AF, ſub AB, AC, contentũ. *d* Quoniam igitur rectangulũ CE, duplũ eſt trianguli A*B*C, nec nõ & rectãgulum *b 8. ſexti.* *c 16. ſexti.* *d 41. primi.*

gulum AF, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF, quod eſt propoſitum.

## LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales; erit ut maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.



SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitq; maior pars AC. Dico eſſe ut AC, ad CB, ita rectangulũ ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB. quadratum ABDE, ducaturq; CF, ipſi AE, parallela; eritque AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint. a Quoniam igitur eſt ut a1. ſexti. AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.

EADEM ratione erit, ut minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum ſub AB. BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota, & maiore parte.

## LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB. BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, ſub AB, BC: ducaturque DE, ipſi AB, parallela, eritque BE, contentum ſub AB, & b1. ſexti. BD, dimidia minoris. b Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quòd & baſis BC, dupla ſit baſis BD, conſtat propoſitum.

EODEM modo ſi BC, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod

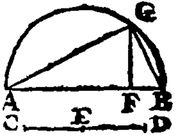
quod ſub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur ſub AB, minore, & BD, dimidia maioris, ut ex ſecunda figura apparet.

## PROBL. 10. PROPOS. 34.

xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia a 31. decimi.
ſolùm commenſurabiles, ita ut major AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; ſeceturque CD, biſariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. hujus lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE. hoc eſt quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud quod ſub AF, FB, continetur. Poſtremo deſcripto ſemicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus poteſt, quàm CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, applicatumque eſt ad AB, rectangulum ſub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipſi FB, longitudine incommenſurabilis. Eſt b 19. decimi.
autem ut AF, ad FB, ita per lemma 2. propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub AB, AF, ad rectangulum ſub AB, FB; Rectangulum verò ſub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum ſub AB, FB, quadrato ex GB, eſt æquale, per lemma 1. ejuſdem antecedentis propoſitionis; c quod angulus AGB, rectus ſit in c 31. tertii.
ſemicirculo AGB. Igitur quoque erit ut AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cùm AF, FB, longitudine ſint incommenſurabiles; d erunt quadrata ex AG, GB, d 10. decimi.
incommenſurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale eſt, e 4. def.
f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rurſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis, rectangulum ſub AF, FB, quod f 47. primi.
quadrato ex CE, æquale eſt factum, g æquale eſt quadrato ex FG, (propterea quòd angulus AGB, rectus eſt & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia: ac proinde & rectæ g 17. ſexti.
FG, CE, æquales. Quare CD, dupla exiſtens ipſius CE, dupla etiam erit ipſius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG.

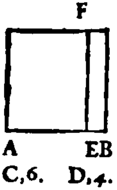


a 22. decimi. FG, (cum FG, dimidia ſit minoris CD.) a Sed rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, cùm ſit ejus dimidium, Medium eſt, per coroll. propoſ. 24, hujus lib. Atqui rectangulo ſub AB, FG, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectangulū ſub AG, GB. Contentum igitur ſub AG; GB, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitum ex earum quadratis, Rationale. Inventæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

## SCHOLIVM.

*DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo fieri poſſe, ut duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac ferè ratione*

*EXPONATVR Rationalis linea* AB, *& duo numeri C, D, quorum C, major ſit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; ut C, ad* D, *ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem deſcripto quadrato ex AB, educatur* E F, *ad* AB, *perpendicularis.*



*Quonim igitur eſt ut C, ad D, ita quadratum ex* AB, *ad quadratum ex AE: Non habet autem C, ad D, proportionem, quam quadratus ad quadratum;* b 9. decimi b *erunt latera* AB, *AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua* EB, *longitudine incommenſurabilis, ex coroll. propoſ.* 17. *huius lib.* c 1. ſexti. c *Vt autem* AB, *ad AE, ita eſt quadratum ex A*B, *ad AF. Igitur cùm* AB, *AE, incommenſurabiles* d 10. decimi. *ſint longitudine,* d *erunt quadratum ex* AB, *& rectangulum* AF, *incommenſurabilia. Quare quadrato ex* AB, *exiſtente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale. Eodēq; argumento oſtendemus* BF, *Irrationale eſſe. Quia verò AF,* BF, *componunt quadratum Rationale ex A*B; *perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus confici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.*

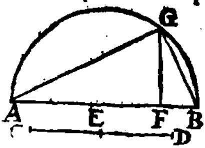
AT *verò ſi AF, FB, Rationalia ſint, oſtendemus & totum AFB, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cùm enim utrumq;* AF, FB, e 16. decimi. *Rationale ſit: erunt ipſa inter ſe commenſurabilia.* e *Igitur & totum A*FB, *ex ipſis compoſitum utrique eorum commenſurabile erit. Quare* AFB, *totum commenſurabile utrique Rationali* AF, FB, f 9. def. f *Rationale quoque eſt. Quod eſt propoſitum.*

PROBL.

## PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiiij. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum verò ſub ipſis contentum Rationale.

*a* REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut major AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, ut in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, ut in propoſ. antecedenti, rectas AG, GB, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratū ex Media AB, *b* æquale exiſtens quadratis rectarū AG, GB, Medium eſt, erit quoque compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus ut in antecedenti propoſitione, oſtendemus rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; atque adeò illud eſſe huic commenſurabile. Quare cùm rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1 lemma propoſ. 33 hujus lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inventæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32 decimi.

b 47 primi.

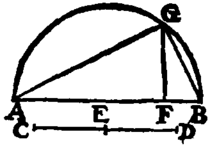
## PROBL. 12. PROPOS. 36. xxxv. xxix.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

*c* REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, ut in propoſ. 34 Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas AG, GB, potentia incommenſurabiles eſſe,

c 33. decimi.

a 47. *primi* les eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, *a* & quadratis rectarum *A*G, GB, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, ut in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, F G: atque adeò illud eſſe huic commenſurabile. Quare cùm ex conſtructione, rectangulum ſub A *B*, C D, Medium ſit: erit quoque rectangulum ſub A *B*, F G, hoc eſt, ſub A G, G*B*, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. hujus lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. Quoniam verò AB, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi CD; Eſt autem eidem C D, *ipſa* CE, longitudine commenſurabilis; quòd illa hujus ſit dupla; b 13. *decimi.* *b* erunt A B, C E, longitudine incommenſurabiles. Sed ut AB, ad CE, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. hujus lib. quadratum ex AB, ad rectangulum ſub A B, CE, hoc eſt, ad rectangulum ſub *A B*, FG: hoc eſt, ſub *A* G, *G* B, (ſunt enim rectangulum ſub A *B*, FG, & ſub AG, GB, per 1. lemma propoſ. 33. hujus lib. æqualia.) c 10. *decimi.* *c* Igitur quadratum ex A*B*, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AG, GB. Inventæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A *G*, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis, Quod faciendum erat.



## SCHOLIVM.

*EX hoc verò problemate facilè illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus nimirum.*

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

*QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ incommenſurabiles tam longitudine, quàm potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt compoſitum ex quadratis rectarum* AG, GB, *& rectangulum ſub* AG, G*B*, *commenſurabilia, quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB, potens compoſitum ex quadratis rectarum AG,* GB, *& alia recta potens rectangulum ſub A G,* G B, *id eſt, media proportionalis inter AG, GB, inventa erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles, Quod eſt propoſitum.*

PRIN-

## PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

## THEOR. 25. PROPOS. 37.

xxxvi. xxx.

**SI** duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

**COMPONANTVR** duæ Rationales AB, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, inventæ per 2. lemma propoſ. 21. hujus lib. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim *AB*, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi BC: & ut AB, ad BC, ita eſt rectangulum ſub A*B*, BC, ad quadratum ex *B* C, per lemma propoſ. 31. hujus lib. *a* erit rectangulum ſub A*B*, BC, quadrato ex BC, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub AB, *B*C, commenſurabile eſt ejus duplum, nempe quod bis ſub A*B*, *B*C, continetur; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt quadratum rectæ *A*B; (omnia enim ſunt Rationalia) *b* atq; adeò & compoſitum ex quadratis rectarum *AB*, BC, eidem quadrato ex BC, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. oſtendimus, & quod bis ſub *A*B, BC, continetur, incommenſurabile eſt *compoſito* ex quadratis rectarum *AB*, BC. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub *A*B, *B*C, & ex compoſito quadratorum rectarum *AB*, *B*C, hoc eſt, quadratum ex tota *A*C, ( *c* Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum AB, *B*C, unà cum rectangulo ſub *AB*, BC, bis) compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, *d* incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum *AB*, BC, Rationale, quòd commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex *B*C, Rationali. Igitur quadratum ex *A*C, quadrato Rationali ex *B*C, incommenſurabile, *e* Irrationale eſt; atque adeò & recta ipſa *A*C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu ut alii loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis A*B*, *B*C, potentia ſolùm commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. *decimi.*
b 16. *decimi.*
c 4. *ſecundi.*
d 17. *decimi.*
e 10. *def.*

### *SCHOLIVM.*

*ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis,* f *Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At verò compoſita ex ipſis,* g *Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.*

f 22. *decimi.*
g 37. *decimi.*

xxxvij.
xxxj.

## THEOR. 26. PROPOS. 38.

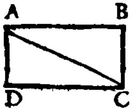
SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

COMPONANTVR duæ mediæ *a* ſuperiùs inventæ *AB*, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quia enim AB, eſt ad *BC*, ut rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, ut in lemmate propoſ. 31 hujus lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A *B*, BC, longitudine incommenſurabiles; *b* erunt rectangulum ſub AB, BC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub *A*B, BC, commenſurabile eſt, quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cùm AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia. *c* atq; adeò & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC. bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ 14. hujus lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A *B*, *B* C, unà cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, *d* quod huic compoſito æquale, eſt, *e* incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub A *B*, *BC*, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub *A B*. BC, commenſurabile rectangulum ſemel ~~ſub AB, BC~~, cùm hoc ſit illius dimidium *f* Igitur quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo ſub *A*B, *B*C: Ponitur autem rectangulum ſub *A*B, BC, Rationale, *g* Irrationale ergo eſt quadratum ex *A*C, *h* & ob id recta quoque AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel ut alii loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 28. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 16 *decimi.*
d 4. *ſecundi.*
e 17. *decimi.*
f 13. *decimi.*
g 10. *defin.*
h 11. *defin.*

## LEMMA

QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.



CONTINEATVR rectangulum A*B*CD, ſub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, *i* faciet ipſum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod eſt abſurdum, ponitur enim

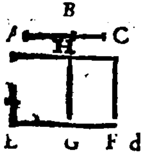
*i* 21 *decimi.*

enim BC, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 27. PROPOS. 39. xxxviij. xxxij.

**SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.**

COMPONANTVR duæ Mediæ *a* ſuperiùs inventæ AB, *a 29. decimi.*
BC, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant.
Dico totam *A*C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE,
*b* ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato *A*C; *b 45. primi*
& compoſito ex quadratis rectarum *A B*, *B* C, æquale alterum ad
eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum
DF, *c* æquale eſt duobus quadratis ex *AB*, *B*C, unà cum *c 4. ſecundi.*
rectangulo bis ſub AB, BC; erit reliquum HF æquale reliquo rectangulo,
quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniam verò ex hypotheſi,
rectangulum ſub *A*B, *B* C, Medium eſt; erit
& rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile,
hoc eſt, HF, *M*edium, ex coroll. propoſ. 24. hujus
lib. Rurſus quia quadrata Mediarum A*B*, *B*C, potentia
commenſurabilium, commenſurabilia ſunt;
*d* erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum *d 16. decimi.*
DG. utrivis ipſorum commenſurabile: Sed
utrumque quadratorum ex *M*ediis A B, B C. *M*edium eſt. Igitur
& DG, ex coroll. propoſ 24. hujus lib. *M*edium erit. Quia igitur
*Media* DG, HF, adplicantur ad Rationalem D E; ( *e* eſt enim G H, *e 34. primi.*
Rationali DE, æqualis) *f* erunt eorum latitudines E G, GF, Rationales *f 23. decimi.*
ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia *AB*,
BC, longitudine incommenſurabiles ſunt: & eſt ut A *B*, ad B C, ita
quadratum ex *A B*, ad rectangulum ſub A B, B C, ita quadratum ex
*A*B, ad rectangulũ ſub A*B*, *B*C. ex lemmate 3. propoſ. 19 hujus lib.
erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, *B*C,
ut in ſcholio propoſ. 10. hujus lib. oſtensũ eſt: Atqui quadrato ex
*A B*, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum
A *B*, *B*C: & rectangulo ſub A*B*, *B*C, commenſurabile eſt, quod
continetur bis ſub AB, BC, cùm hoc illius ſit duplum. Igitur per ea,
quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. diximus, erit & compoſitũ ex
quadratis rectarum *AB*, BC, hoc eſt, rectangulum DG, incommenſurabile
rectangulo bis ſub A*B*, BC, hoc eſt, rectengulo HF. *g* Cùm *g 1. ſexti.*
ergo ſit ut DG, ad HF, ita EG, ad GF: *h* erit EG, ipſi G F, longitudine *h 10 decimi.*
incommenſurabilis: Oſtenſum autẽ jam fuit E G, GF, eſſe Rationales.
Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantũ commenſurabiles,



a 37. decimi. *a* ac propterea & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu ut aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

### SCHOLIVM.

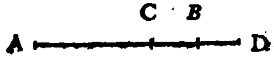
*VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam. Hic verò lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.*

### LEMMA

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, ſitq; maior pars AB; in qua ſumatur BC, minori BD, æqualis, ut ſit AC, exceſſus, quo AB, ſuperat BD, hoc eſt, BC, ipſi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniam enim quadrata ex AB, BC, *b* æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, unà cum quadrato ex AC, eſtq; BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis ſub AB, BD, unà cum quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quàm rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC, quod eſt propoſitum.

b 7. ſecundi.



### COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. THEOR. 28. PROPOS. 40.

xxxiiij. SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur,

tinetur Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR, duæ rectæ a ſuperius inuentæ AB,BC, potentia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, Rectangulum vero ſub ipſis contentum Medium. Dico totam AC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub AB,BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub AB,BC, illi commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarũ AB,BC, Rationale. b Incõmenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub AB,BC, compoſito ex quadratis rectarum AB,BC. c Igitur & rectangulum bis ſub AB,BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB,BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; d erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; e Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem Maior, quia f cum poſſit duo quadrata ex AB,BC; & rectangulum bis ſub AB,BC; compoſitum ex quadratis rectarũ AB,BC, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB,BC, Medium; rectè vocabitur AC, Maior, ſiquidem à Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 34. decimi.
b 10. defin.
c 17. decimi.
d 10. defin.
e 11. def.
f 4. ſecundi.

## THEOR. 29. PROPOS. 41.

XL.
XXXIV.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ g ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod vero continetur bis ſub AB,BC, Rationale, quod eius dimidium nempe quod ſub AB,BC, ſemel continetur, Rationale ponatur, h erit compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, incom-

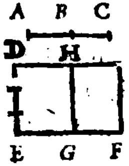
g 35. deci.
h 10. def.

a 17. decimi. menſurabile rectangulo bis ſub AB,BC. *a*
Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum
AB,BC, vna cum rectangulo bis ſub
AB,BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangu-
bis ſub AB,BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB,BC, vt diximus
b 10. defin. ſit Rationale; *b* erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale;
c 11. defin. *c* Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem
Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe
compoſitum ex qudratis rectarum AB,BC, & Rationale, rectangulum
ſcilicet bis contentum ſub AB,BC. Conuenit autem Rationale
Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles,
&c. Quod demonſtrandum erat.

## xlj. xxxv. THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

d 36. decimi. COMPONANTVR duæ rectæ *d* ſuperius inuentæ AB,BC, potentia
incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis
Medium & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque
compoſito ex quadratis ipſarum. Dico



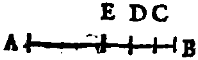
totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim
Rationalis DE, *e* ad quam applicetur rectangulũ
e 45. primi. DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex
quadratis rectarum AB,BC, alterum æquale applicetur
DG, Et quia quadratum ex AC, hoc eſt,
rectangulum DF, *f* æquale eſt compoſito ex quadratis
f 4. ſecundi. rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB,BC, erit
reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero
tam compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, hoc eſt, rectangulum
DG, quam rectangulum ſub AB,BC, atque adeo ex coroll 24.
huius lib. quod bis ſub AB,BC, nempe ipſum HF (cum illi ſit commenſurabile.)
Medium ponitur, *g* faciet DH, HF, ad Rationalem
g 23. decimi. DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine
incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum
AB,BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur
rectangulo ſub AB,BC: Eidem autem rectangulo ſub AB,BC, commenſurabile
eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB,
CB,

BC, hoc eſt, ipſum HF; *a* erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare *b* cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; *c* erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles; Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; *d* Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; *e* ideoque & recta ipſa AC. Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 13. *decimi.*
b 1. *ſexti.*
c 10. *decimi.*
d 37. *decimi.*
e 11. *def.*

## LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.



SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus inæqualiter in D, ſintque priores partes in AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, *f* æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex FD, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex FD. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius ſit quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniam vero quadratum ex AB, *g* æquale eſt tam rectangulo bis ſub AC, CB, vna cum quadratis AC, CB, quam rectangulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex

f 5. *ſecundi.*
g 4. *ſecundi.*

AD,

AD,DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC,CB, æquale rectangulo bis ſub AD,DB, vna cum quadratis ex AD,DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC,CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

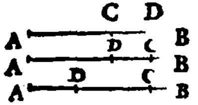
SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC,CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorum) maior quam CB; (quæ priorum minor eſt) ac proinde cum AE, EB, æquales ſint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque
a 5. ſecundi quia rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

xxxij.
xxxvj.

## THEOR. 31. PROPOS. 43.

**QVÆ ex binis nominibus ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.**

SIT ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi nõ poſſe in alia nomina, quę ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum cõmenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuideretur, eſſent AC, CB, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantum commenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt



ſunt, quam partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora ſunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur AB, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis ſub AD, DB, *a* quod tam illa, quam hæc æqualia, ſint quadrato ex AB; fit, vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub AC, CB, & reliqui rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſſe Rationale) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt. *b* Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt, erit & quod bis ſub AC, CB, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub AD, DB, Medium erit. *c* Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum quã ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

a 4. *ſecundi.*

b 22. *decimi.*

c 27. *decimi.*

## THEOR. 32. PROPOS. 44.

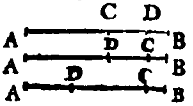
XLIII.
XXXVII.

QVÆ ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles,

quæ

quæ Rationale contineant, vt vult propoſ.38.huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe, in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Rationale: Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina AD,DB. Igitur vbicunque D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſũ rectanguli bis ſub AC,CB, & rectanguli bis ſub AD,DB, eundẽ eſſe, qui eſt cõpoſiti ex quadratis rectarũ AC, CB, cõpoſiti ex quadratis rectarũ AD,DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectãguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. ( Cum enim AC, CB, ponantur continere Ratioerit, & quod nalebis ſub AC, CB, ei quod continetur ſemel AC,CB, commenſurabile Rationale Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub AD,DB Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27 huius libri oſtendimus: perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC,CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt.) Quia vero rectæ AC,CB, Mediæ ſunt, &



a 16. dec. potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. a Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ.24. huius libri, Medium.

b 27. decimi. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD,DB. b Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur Quam obrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

XLIV. XXXVIIJ.

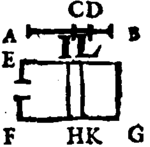
## THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVÆ ex binis Medijs ſecunda ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC,CB, Mediæ ſint potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant vt vult propoſ.39. huius lib Dico AB. ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuiditur enim ſi fieri poteſt, in alia nomina AD,

DB.

DB.Igitur vbicunq; punctum D,exiſtat,ſimiliter oſtendemus,vt in propoſitione 43. quadrata ex AC,CB,maiora eſſe quadratis ex AD, DB,vel minora. Exponatur rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG,æquale quadrato ex AB.Item EH,æquale quadratis ex AC,CB. Erit igitur reliquum IG,æquale ei, quod continetur bis ſub AC,CB,quandoquidem quadratum ex AB, *b* æquale eſt quadratis ex AC,CB,& rectangulo bis ſub AC,CB. Eodem modo ſi ad EF,applicetur EK,quadratis ex AD,DB,æquale,erit reliquum LG,æquale rectangulo bis ſub AD,DB, comprehēſo. Et quia quadrata ex AC,CB,inæqualia ſunt quadratis ex AD,DB; erunt quoque rectangula EH,EK,quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex AC, CB, maiora ſunt per lemma propoſ.39.huius lib.rectangulo bis ſub AC, CB;erit & EH,maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta FH,maior quàm dimidium ipſius FH.Eadem ratione oſtendemus FK, maiorem eſſe dimidio ipſius FG.Inæquales ergo ſunt partes FH,HG,partibus FK,KG,ſingulæ ſingulis. Quoniam vero AC,CB, Mediæ ſunt,& potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. *c* Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoque compoſitum ex ipſis,hoc eſt,EH,per coroll.propoſ.24.huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, *d* Quare EH,EK, ad Rationalem EF,applicata faciunt latitudines ~~FH,FK,Rationales~~ ipſi EF,longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cum rectangulum ſub AC, CB, ponatur Medium & erit,quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ 24 huius lib.Quare cum applicetur ad Rationalem HI,*e* erit HG,Rationalis ipſi HI,longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus LG,Medium eſſe,& KG,Rationalem ipſi KL,longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia AC, CB, longitudine ſunt incommenſurabiles, & eſt,vt AC,ad CB, ita per lemma 2, propoſ.19.huius libri,quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB,*f* erit quadratum ex AC,rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC,commenſurabile eſt compoſitum ex quadris rectarum AC,CB.(Cum enim AC,CB,potentia ſint commenſurabiles,atq; adeo ipſarum quadrata commenſurabilia; *g* erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorū,nimirum quadrato ex AC, cōmenſurabile) Rectāgulo vero ſub AC,CB,cōmēſurabile eſt,quod bis ſub AC,CB.Igitur & cōpoſitum ex quadratis rectarum AC,CB, hoc eſt rectāgulum EH,incōmenſurabile eſt per ſcholium,prop.14. huius



a 45. primi.

b 4. ſecundi.

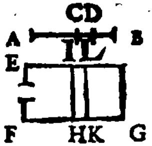
c 16. decimi.

d 23. decimi.

e 23. decimi.

f 10. decimi.

g 16. decimi.



huius libri rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, a 1. *ſexti.* ipſi IG. Quocirca *a* cum ſit, vt EH, ad IG, ita b 10. *deci-mi.* FH, ad HG, *b* erunt FH, HG, lõgitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia c 37. *deci-mi.* ſolum commenſurabiles. *c* Igitur FG, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum G. Eodem modo oſtendemus & FG, ex binis nominibus, diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod d 34. *dec.* fieri non poteſt, *d* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur AB, ex binis medijs ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quàm ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

## THEOR. 34. PROPOS. 46.

XLV.
XXXIX.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulũ vero ſub ipſis Medium, vt vult propoſ 40. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Medium. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter vt in propoſitione 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eum eſſe qui rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale: (quia cum vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque e 27. *dec.* eodem modo *M*edium erit rectangulum bis ſub AD, DB. *e* Igitur cum *M*edium non ſuperet *M*edium Rationali, non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale; Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diui-

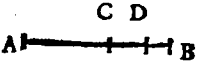
diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

## THEOR. 35. PROPOS. 47.

XLVI.
XL.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum vero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, quæ eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB. Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt; quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quia vero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: a Medium autem non ſuperat Medium Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quamobrem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.



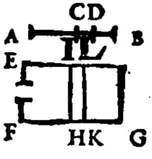
a 27. decimi.

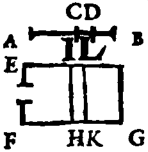
## THEOR. 36. PROPOS. 48.

XLVII.
XLI.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum, ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri, Dico AB, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina,





mina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſ. 45. oſtendemuſque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales eſſe, ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) a faciunt latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incõmenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG; b eſtque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, *diuiſaque in nomina ad punctum* H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, c iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

a 25. *decimi.*

b 1. *ſexti.*

c 43 *decimi.*

# DEFINITIONES

## SECVNDÆ.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

### I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

### II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine

ſit

ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

### III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis

### IV.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

### V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

### VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

## SCHOLIVM.

*NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum; nempe maius aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles, quod non ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi cōmēſurabilis, conſtituentur, vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.*

*PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato recta linea ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato recta linea ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile eſt; vt manifeſtum eſt.*

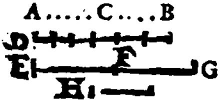
*RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitæ linea Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus à maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.*

xLviij.
xLij.

## PROBL. 13. PROPOS. 49.

### INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs quæ in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico FG, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, *a* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. *b* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; *c* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, ſit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum



a 6. *decimi.*

b 9. *decimi.*

c 37. *decimi.*

dratum

dratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt vt AB,numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque per conuerſionem rationis,vt AB,ad CB,videlicet ad exceſſum,quo antecedens AB,ſuperat conſequentem AC,ita quadratum ex EF,ad quadratum ex H,nimirum ad exceſſum,quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB,proportionem,quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF,& H,proportionem habebunt,quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *a* acproinde rectæ EF,& H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF,plus poteſt, quam minus FG,quadrato rectæ H,ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D,commenſurabile longitudine; erit EG,per definitionem,ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

a 9. *decimi.*

## PROBL. 14. PROPOS. 50.

XLIX.
XLiij.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB,CB,vt in præcedenti propoſitione,expoſitaq; Rationali quadam D;ſumatur ei longitudine commenſurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D,commenſurabilis,Rationalis.Fiat deinde vt numerus AC,ad numerum AB,ita per coroll.propoſ.6.huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF.Dico EG.eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex FG,EF,proportionem habentia, quam numeri AC,AB, *b* commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ FG,EF, commenſurabiles,ſaltē potentia: Oſtenſa eſt autem FG,Rationalis. Igitur & EF,Rationalis eſt. Quia vero AC,AB,proportionem non habent,quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG,EF, proportionem habebunt,quam numeri quadrati. *c* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ FG,EF.Sunt igitur EF,FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *d* Atque idcirco tota EG,Irrationalis eſt,quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe.Cum enim ſit vt numerus AC,ad numerum AB, ita quadratum ex FG,ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB,ad AC, ita quadratum ex EF,ad quadratum ex FG; ſit autem AB,maior quam AC; erit & quadratum ex EF,maius, quam quadratum ex FG. Sit,per lemma propoſ.14.huius lib.maius quadrato rectæ H Oſtendemus iam,vt in præcedenti propoſ. H,ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe.Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis;

b 6.*decimi*
c 9.*decimi.*
d 37. *dec.*

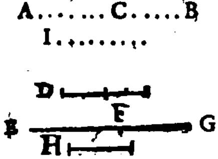
eſtque minus nomen FG, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod faciendum erat.

l.
xliv.

## PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidem quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. a Erunt ergo quadrata ex D & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, E, F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; b erunt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. c Erunt ergo quadrata ex EF FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum EF, oſtenſa ſit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; d erunt EF, FG, longitudine incommenſurabiles



f.
xvij.

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

biles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *a* Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autem I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; *b* ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex FG; Eſt autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14 huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

a 37. *decimi.*

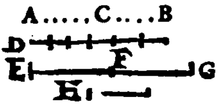
b 9. *dec.*

## PROBL. 16. PROPOS. 52.

LI.
XLV.

### INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D. cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationalis, cum Rationali D, commenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua conſtruantur, vt in propoſ. 49. oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totam EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartam eſſe. Erit enim rurſus, vt in 49 prop. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. prop. per conuerſionẽ rationis eſt, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non eſt autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratum. *c* Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt rectæ EF, & H. Itaque cum maius nomen EF, plus poſſit, quã minus FG, qua-



c 9. *dec.*

drato rectæ H,ſibi longitudinẽ incommenſurabilis,& maius rurſus nomen EF,longitudine commenſurabilę expoſitæ Rationali D;erit EG,per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam.Quod faciendum erat.

## PROBL. 17. PROPOS. 53.

LII. XLvj.

## INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS(repetita figura præcedentis propoſ.)duobus numeris AC,CB,vt in præcedenti propoſ. fiat conſtructio. vt in propoſ. 50. hoc eſt, ſumatur FG,longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D,&c.Oſtendemus ergo vt in propoſ. 50. EG, eſſe ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo,vt in 50 propoſ. quadratum ex EF, maius eſſe,quam quadratum ex FG: Sit ergo maius,quadrato rectæ H.Quoniam vero,vt in propoſ 49.oſtenſum eſt, per conuerſionem rationis eſt vt AB,ad CB,ita quadratum ex EF,ad quadratum ex H.Oſtendemus, vt in propoſitione antecedenti,rectas EF,& H,longitudine incommenſurabiles eſſe.Quare cum maius nomen EF,plus poſſit,quam minus FG,quadrato rectæ H,ſibi longitudine incõmenſurabilis, & minus nomen FG,longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D;erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

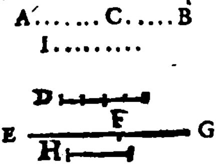
## PROBL. 18. PROPOS. 54.

Liij. XLvij.

## INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoque quadratus,habeatque ad neutrum ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ( quod quidem fiet,ſi numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipſorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum,per ea,quæ ad finem lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I,qui nec ad AB,nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum: qualis eſt quiuis numerus quadratus.Hic enim ad AB,& AC,non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri

a 30. ſept.



&reli-

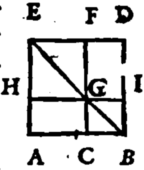
& reliqua fiant, ut in propoſ. 51. oſtendemusque ut ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles; atque totam EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextam eſſe. Demonſtrabimus enim ſimiliter, ut in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeque quadratum ex EF, majus, quàm quadratum ex FG. Sit ergo majus quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque ut in propoſ. 49. per converſionem rationis, eſſe ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm igitur AB, ad CB, atque adeò quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaq; cùm majus nomen EF, plus poſſit, quàm minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Invenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

a 9. dec.

## LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit utcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta AB, utcunque in C. Deſcribatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipſi BD, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; utrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum eiſdem partibus: At verò rectangula CD, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, medium proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, medium eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim b ut HG, ad GI, ita eſt tam FH, ad DG, quàm AG, ad CI; erit ut FH, ad DG, ita AG, ad CI: c Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit quoque ut FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atq; adeò DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, CI.



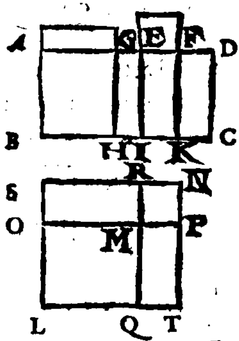
b 1. ſexti.
c 43. primi

*a 1. ſexti.* RVRSVS quia eſt, *a* ut AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI: erit ut AD, ad CD, ita AI, ad CI; Eſt autem AI, ipſi CD, æquale. Igitur erit ut AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale eſt inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.

## xiiij. xLviij. THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & denique A E, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus poteſt quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex ED, hoc eſt, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ſub A G, GE, contentum, per 2. lemma propoſ. 17. hujus lib. applicetur deficiens figura quadrata; *b* in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet. *b 18. decimi.* Quare AG, GE, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur jam per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ G H, E I, F K. *c 14. ſecundi.* *c* Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N, conjunganturq; quadrata L M, M N, ita ad angulum *M*, ut latera *M* O, *M* P, unam rectam lineam conſtituant O P. Facient ergo & latera *M* Q, *M* R, unam rectam Q R, ut demonſtratum eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, P*M*R, ad verticem *M*, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo *L*N, cùm rectæ O*M*, *M*P, rectis Q*M*, *M*R, æquales ſint; *d 34. primi.* ideoq; & tota O P, toti Q R, *d* ſit autem O P, ipſis S N, L T, & QR, ipſis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.



QVO-

QVONIAM verò rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per
conſtructionem, quadrato ex EF, *a* erit ut AG, ad EF, ita EF, ad a 17. *ſexti.*
GE, *b* Ac propterea & ut AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, b 1. *ſexti.*
medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata
LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium
proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Æquale
igitur eſt TM, ipſi EK. *c* Cùm ergo ipſi TM, æquale ſit MS, *d* & c 43. *primi.*
ipſi EK, æquale ſit FC, erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca totum d 36. *primi*
quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeò
recta OP, poteſt ſpatium AC, contentum ſub AB, Rationali, & AD,
ex binis nominibus prima, Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex
binis nominibus dicitur.

QVONIAM enim *A*G, GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles, *e* erit & tota *A*E, utrique ipſarum longitudine commenſurabilis: e 16. *decimi.*
Eſt autem *A*E, cùm ſit majus nomen ipſius *A*D,
ex binis nominibus primæ Rationali *A*B, commenſurabilis longitudine.
Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12.
hujus lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeò cùm AB,
ſit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. *f* Quare rectangula f 20. *decimi.*
AH, GI, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus contenta
Rationalia ſunt: Ideoq; & quadrata LM, MN, ipſis æqualia
Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt.

ET quoniam *A*E, ipſi ED, longitudine incommenſurabilis eſt;
Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis *A*G, &
ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine EF, ejus dimidia: erunt
ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. & AG, EF, inter ſe longitudine incommenſurabiles.
Quare & AH, EK, *g* eandem proportionem g 1. *ſexti.*
habentia, quam AG, EF, *h* incommenſurabilia ſunt, ac proinde h 10. *decimi.*
& LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. *i* Igitur rectæ
OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, k cùm eandem i 10. *decimi.*
habeant proportionem, quam LM, *M*T: Sunt autem & OM, MP,
Rationales oſtenſæ Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolùm k 1. *ſexti.*
commenſurabiles. *l* Quapropter tota OP, potens ſpatium l 37. *ſexti.*
AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium
ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c.
Quod demonſtrandum erat.

## THEOR. 38. PROPOS. 56. lix. xlix.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

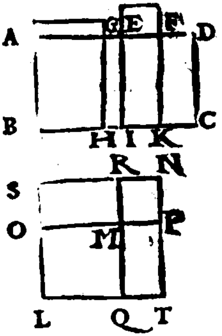
CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex
binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpa-

tium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipſius AD, majus nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitæ *AB*, longitudine commenſurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, ut in antecedenti propoſitione. Quo facto demonſtrabimus ſimiliter, ut ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda A*D*. Dico jam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali AB; *a* erunt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine commenſurabiles; *b* erit quoque tota AE, utrique ipſarum commenſurabilis. Quare cùm AE, majus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cùm ergo utraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; *c* erit utraque AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine; Ac proinde tam *A*B, AG, quàm AB, GE, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. Igitur *d* rectangula AH, GI, Media ſunt, proptereaque & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, NP, ſunt Mediæ.

a 13. *decimi.*

b *16. decimi.*



c 14. *decimi.*

d 22. *decimi.*

QVIA verò AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles; *e* erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia commenſurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM, MP, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommenſurabiles ſunt; ipſi verò AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG, & ipſi AD, longitudine commenſurabilis eſt EF, ejus dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. hujus lib. *A*G, EF, longitudine incommenſurabiles: *A*c proinde *A*H, EK, eandem habentia proportionem cum ipſis, *f* incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis *A*H, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt; *g* Ideoque & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, *a* cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT.

e *10. decimi.*

f 10. *decimi.*

g *10. decimi.*

a *1. ſexti.*

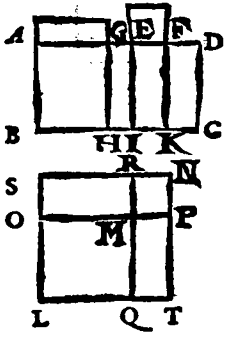
MT. Cùm ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autem EF, ipſi ED, quoque longitudine commenſurabilis; *b* erunt etiam EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cùm EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. *c* Quare EK, rectangulum, Rationale eſt; Eſt autem MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, Rationaleq; continentes; *d* atque adeò OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

b 12. *decimi.*
c 20. *decimi.*
d 38. *decimi.*

## THEOR. 39. PROPOS. 57. lvj.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur. 1.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarũ AE, ED, Rationali expoſitæ AB, longitudine commenſurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, ut in propoſ. 55. Similiter ergo, ut ibi, oſtendemus rectam OP, poſſe ſpatium AC: Et ut in antecedenti propoſ. 56. rectas OM, MP, eſſe Medias potentia tantùm commenſurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam verò ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtq; ED, ipſi AB, Rationali, hoc eſt ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; *e* erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommenſurabilis; Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia ſit ipſius



e 14. *decimi.*

a 22. decimi.

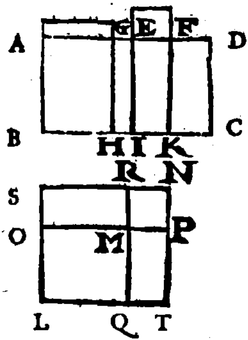
b 22. decimi.

ED, Rationalis; & EI, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; *a* Ac propterea EK, Medium eſt: ideoque & MT, æquale ipſi EK, Medium eſt, quod ſub Mediis OM, MP, continetur. Itaq; cum OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolùm commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; *b* erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

Lvij.
Lj.

## THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur maior.



c 19. decimi.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Major vocatur. Sit enim AE, ipſius AD, majus nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, ut in propoſ. 55. *c* Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus jam eodē modo, ut ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Major. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; *d* erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atque adeò & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia verò AE, majus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; *e* & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale eſt.

d 10. decimi.

e 20. decimi.

ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommen-

ſura-

ſurabilis; Et eſt E F, Rationalis, cùm ſit Rationali E D, commenſurabilis.
Igitur E F, & A B, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles.
*a* Quare E K, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; *a 22. decimi*
& M T, illi æquale, contentumq; ſub O M, M P, Medium eſt. Quocirca
cùm O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum
quidem ex ipſarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum
verò ſub ipſis M T, Medium; *b* Irrationalis erit tota *b 40. decimi.*
O P, quæ Major nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali,
& ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

## THEOR. 41. PROPOS. 59. lviij. lii.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius A D, majus nomen A E. Sunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & A E, plus poteſt, quàm E D, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis: & deniq; E D, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali A B Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55
*c* Erunt igitur rurſus A G, G E, longitudine incommenſurabiles. *c 19. decimi.*
Simili autem modo, ut in propoſ. 55. conſtabit rectam O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, ut in propoſ. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommenſurabiles. Et quia A E, majus nomen ipſius A D, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali A B; erunt
A E, A B, Rationales potentia tantùm commenſurabiles. *d* Quare *d 22. decimi.*
rectangulum A I, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem A I, æquale compoſito ex quadratis L M, M N. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia E D, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali A B, cùm ſit minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus quintæ, erit & E F, ipſius dimidia
eidem A B, commenſurabilis longitudine, & Rationalis. *e* Quare *e 20. decimi.*
E K, ſub Rationalibus E I, E F, longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt; atq; idcirco & M T, ſub O M, M P, contentum Rationale erit, cùm ipſi E K, ſit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M, M P, potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum
verò M T, ſub ipſis contentum, Rationale; *f* Irrationalis erit tota *f 41. decimi.*
O P; quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium cõ-

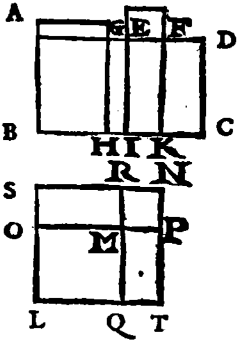
tinea-

tineatur ſub Rationali; & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

lix. liij.

## THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus Sexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.



CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſexta A D. Dico rectam, quæ ſpatium A G, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potens bina Media. Sit enim ipſius A D, majus nomen A E. Sunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ ſibi longitudine incōmenſurabilis; & denique neutra ipſarum A E, E D, longitudine erit commenſurabilis Rationali A B. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, *a* eruntq; A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, ut in propoſ. 55. rectam O P, poſſe ſpatium A C. Item ut in propoſ. 58. rectas O M, M P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, ut in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L M, M N, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque M T, ſub O M, M P, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum A E, E F, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi E D, hæc verò eidem commenſurabilis; *b* erunt A E, E F, longitudine incommēſurabiles. *c* Igitur & A I, E K, incommēſurabilia ſunt. *d* cùm eandem rationem habeant, quam A E, E F. Quare & compoſitum ex quadratis L M, M N, quod ipſi A I, æquale eſt, & rectangulum M T, quod ipſi E K, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium, & M T, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis, *e* erit tota O P, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

a 19. *decimi.*

b 13. *decimi.*
c 10. *decimi.*
d 1. *ſexti.*

e 42. *decimi.*

lx. liiij.

## THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus

bus

bus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

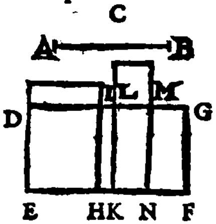
SIT ex binis nominibus A*B*, cujus majus nomen AC; *a* & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex *A*C; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex C*B*. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, unà cum rectangulo bis ſub AC, C*B*, *b* æqualia ſint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex A*B*, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, quod per quod ipſis LK, GF, parallela agatur, MN: eritque utrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, C*B*, continetur. *c* Et quoniam AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quòd tota AB, ſit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A*C*, C*B*, Rationalia, & ob id commenſurabilia; *d* quorum utrique cùm etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum D*K*. Igitur & DK, Rationale erit: quod cùm applicatum ſit ad Rationalem DE, faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.

a 45. prim

b 4. ſecundi.

c 37. decimi.

d 16. decimi.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales ſunt ſolùm potentia commenſurabiles, *e* erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atque adeò, & quod bis ſub ipſis, cùm ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum LF, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. hujus lib. Quare LF. applicatum ad LK, Rationalem, *f* facit LG, latitudinem Rationalem, & ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Eſt autem DL, oſtenſa eidem DE, commenſurabilis longitudine. *g* Igitur DL, LG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; *h* Ac propterea DG, ex binis nominibus eſt. Dico & primã eſſe.

e 22. decimi.

f 23. decimi.

g 13. decimi.

h 37. decimi.

QVONIAM enim ex lemmate propoſ. 54. hujus lib. rectangulum ſub AC, C*B*, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB; erit quoq; LN, medium proportionale inter DH, IK, atq; adeò *i* cùm rectæ DI, L*M*, IL, eandem rationem habeant, quam D*H*, LN, IK; erit quoq; recta LM, media proportionalis inter DI, IL. k Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commenſurabilia ſunt, quòd AC, CB, ponantur potentia commenſurabiles,

i 1. ſexti.

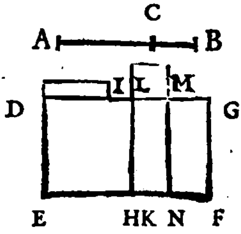
k 17. ſexti.

a 10. decimi. erunt & DH, IK, ipſis æqualia commenſurabilia. a Igitur & rectæ
DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles
ſunt. Quoniam autem DK, majus eſt, quàm LF,
quòd & quadrata ex AC, CB, majora ſint, per lemma propoſ. 39.
hujus libri, quàm rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL,
b 1. ſexti. major quàm LG, b cùm DL, LG, eandem rationem habeant,
quam DK, LF. Itaque quoniam DL, major eſt, quàm LG, & ad
DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata,
æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore
LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale
quadrato ex LM) dividiturq; DL, ad I, in partes DI, IL,
c 18. decimi. longitudine commenſurabiles, ut eſt demonſtratum; c poterit
DL, major plus quàm LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine
commenſurabilis. Quare cùm DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus,
& DL, majus nomen plus poſſe, quàm LG, minus nomen,
quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque
idem majus nomen DL, longitudine commenſurabile Rationali
expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum
ergo ejus, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum
erat.

## I.xj. THEOR. 44. PROPOS. 62.

LV. QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

d 45. primi



SIT ex binis Mediis prima AB, cujus
majus nomen AC, d & ad Rationalem
DE, applicetur rectangulum DF, æquale
quadrato ex AB, latitudinem faciens
DG. Dico DG, ex binis nominibus
eſſe ſecundam. Conſtituantur enim
eadem, quæ in propoſ. præcedenti, ita
ut rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis
ex AC, CB, & utrumque ipſorum
LN, MF, ei quod ſub AC, CB, continetur. Quoniam igitur
e 38. decimi. AC, CB, ex binis Mediis primam AB, componentes e Mediæ
ſunt potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent;
erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipſis æqualia
DH, IK, commenſurabilia, atque Media. f Cùm ergo propterea
f 16. dec. & totum DK, utrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit
g 23. decimi. quoque ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. DK, Medium, quod
cùm applicatum ſit ad Rationalem DE, g erit ejus latitudo DL,
Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam

niam rectangulum AC, CB, Rationale eſt, erit & ejus duplum, nempe LF, Rationale, quod cùm applicatum ſit ad Rationalem LK, a erit ejus latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum DL, LG, ipſa LG, ſit ipſi DE, commenſurabilis longitudine, ac DL, longitudine incommenſurabilis; b erunt DL, LG, longitudine incommenſurabiles. Quod cùm DL, LG, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolùm commenſurabiles: c ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam verò, ut in antecedenti propoſ. demonſtrabimus DL, majus nomen eſſe, & poſſe plus, quàm minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quocirca cùm ipſius DG, majus nomen DL, plus poſſit, quàm minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo ejus, quæ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendum.

a 21. decimi.
b 13. decimi.
c 37. decimi.

## THEOR. 45. PROPOS. 63. lxij.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Lvj.

SIT ex binis Mediis ſecunda AB, cujus majus nomen AC, d & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61 quoniam AC, CB, ex binis Mediis ſecundam AB, componentes, e Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex AC, CB, atque adeò rectangula ipſis æqualia DH, IK, commenſurabilia, & Media. f Cùm ergo propterea & totum DK, utrique ipſorum DH, IK, ſit commenſurabile, erit & ex coroll. propoſ. 24. hujus libri DK, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem DE, g erit ejus latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & ejus duplum LF, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem LK; h erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, ipſi CB, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque ut AC, ad CB, ita per lemma 3. propoſitionis 19. hujus libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, i erit quoque quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. k Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex qua-

d 45.
g 23. decimi.
h 13. decimi.
i 10. decimi.
k 16. decimi.

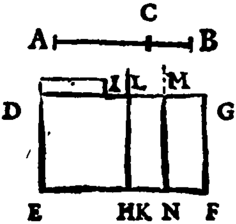
dratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſint, quippe cùm rectæ ipſæ potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt, ejus duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC, CB. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt rectangulum DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. conſcripſimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum D K, L F, habentes
a 10. decimi. *a* longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles;
b 37. decimi. *b* ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam verò ut in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeque plus, quàm minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cùm DL, majus nomen plus poſſit, quàm L G, minus quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum DL, LG. Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine commenſurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo ejus, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtradum.

LXiiij. LVij.

## THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

c 45. primi



SIT major A B, cujus majus nomen A C, *c* & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruantur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, CB, Majorem A B, componentes,
d 45. decimi. *d* potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum verò ſub ipſis, Medium; erit quoq; DK, compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At verò L F, duplum ejus quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem DE,
e 21. decimi. eſt applicatum; *e* erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cùm I. F, Medium ſit applicatum ad Rationalem LK,
f 22. decimi. *f* erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, LG, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitndine: hæc verò eidem D E, longitudine incommenſurabilis;
g 13. decimi. *g* incommenſurabiles e-

les erunt longitudine DL, LG: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [a] ideoque DG, ex binis nominibus eſt. Iam verò ut in propoſ. 61. demonſtrabimus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, BC, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommenſurabilia, [b] atque adeò & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò ut in propoſ. 61. oſtendimus, DI, major eſt, quàm LG, & ad DL applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, hoc eſt quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod dividit ipſam DL, ad I. in partes longitudinine incommenſurabiles, [c] poterit DL, plus quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa DL, (majus nomen ipſius DG, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta, Quadratum ergo Majoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. decimi.
b 10. decimi.
c 19. decimi.

## THEOR. 47. PROPOS. 65.

lxiv.
lviij.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cujus maius nomen AC, [d] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, [e] potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atquè adeò ipſius duplum, LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [f] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [g] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa verò longitudine incommenſurabilis, [h] erunt DL, MG, longitudine incommenſurabiles. Quare DL, LG. Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, [i] Ac propterea DG, eſt ex binis nomi-

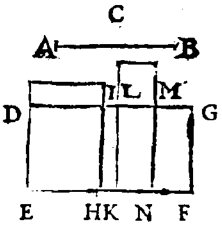
d 45 primi
e 41. decimi.
f 23. decimi.
g 21. decimi.
h 13. decimi.
i 37. decimi.

nibus. Iam verò, ut in propoſ. 61. oſtendemus rectangulum ſub DI, IL, æquale eſſe quadrato ex L M, & ut in antecedenti propoſ. DL, majus nomen eſſe, atq; poſſe plus, quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cùm & minus nomen L G, oſtenſum ſit expoſitæ Rationali D E, longitudine commenſurabile; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur ejus, quæ Rationale ac Medium poteſt., &c. Quod demonſtrandum erat.

## LXV. THEOR. 48 PROPOS. 66.

LIX. QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

a 45. primi SIT bina Media potens recta AB, cujus majus nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico D G, eſſe ex binis nominibus ſextam.



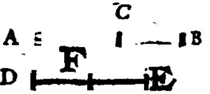
Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniam rectæ A C, CB, componentes ipſam A B, potentem bina Media, b 42. decimi. b potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum; erit tam DK, illi compoſito æquale, quàm LF, rectangulo bis ſub AC, CB, æquale Medium. Et quia Media c 23. decimi. DK, LF, applicata ſunt ad Rationalem DE; c erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. d 42. decimi. d Quoniam verò compoſitum ex quadratis rectarum A C, CB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB; eidem verò rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, CB, cùm hoc illius ſit duplum; e 13. decimi. e Erit compoſitum ex dictis quadratis, hoc eſt, DK, incommenſurabile rectangulo bis ſub AC, BC; hoc eſt, ipſi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, f 10. decimi. f longitudine incommenſurabiles ſunt. Rationales ergo ſunt DL, LG, potentia ſolùm commenſurabiles; g 37. decimi. g Ac proinde DG, eſt ex binis nominibus. Iam verò, ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus DL, eſſe maius nomen, poſſeq; plus quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cùm ergo oſtenſum ſit neutram ipſarum DL, LG, longitudine commenſurabilem eſſe expoſitæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſexta. Quadratum igitur ejus, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Quod erat oſtendendum.

THEOR.

## THEOR. 49. PROPOS. 67. LXVj.

**EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine com- LX.**
**menſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordi-**
**ne eadem.**

SIT ex binis nominibus quæcunque AB, diviſa in ſua nomi-
na, quorum majus AC, & CB, minus, ſitque recta DE, ipſi AB, lon-
gitudine commenſurabilis. Dico DE, quoque eſſe ex binis nomi-
nibus, & ordine eandem ipſi AB. *a* Fiat enim ut tota AB, ad totam a 12. *ſexti.*
DE, ita ablata AC, ad ablatam DF *b* Erit ergo & reliqua CB, ad b 19. *quin-*
reliquam FE, ut tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, longi- *ti.*
tudine commenſurabilis ponitur DE; *c* erit & DF, ipſi AC, & c 10. *de-*
FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis: *d* Sunt autem AC, *cimi.*
CB, cùm ſint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, Rationales. d 37. *de-*
Igitur & DF, FE, Rationales ſunt. Rurſus quia eſt ut AC, ad DF, *cimi.*
ita CB, ad FE, & permutando ut AC, ad
CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB,
potentia ſolùm commenſurabiles; *e* erunt e 10. *de-*
& DF, FE, potentia ſolùm commenſura- *cimi.*



biles. Igitur DF, FE, Rationales ſunt potentia tantùm commen-
ſurabiles; *f Ac* propterea DE, ex binis eſt nominibus. Dico & ipſi f 37. *de-*
AB, ordine eandem eſſe. Aut enim AC, plus poteſt quàm CE, qua- *cimi.*
drato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incõmen-
ſurabilis. Si quidem AC, plus poteſt quàm CB, quadrato rectæ
ſibi longitudine commenſurabilis; *g* poterit & DF, plus quàm FE, g 15. *de-*
quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi AC, *cimi.*
commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ, ita ut AB, ſit
ex binis nominibus prima; *h* erit & DF, eidem Rationali longitu- h 12. *de-*
dine cõmenſurabilis, cùm utraq;, & Rationalis, & DF, eidẽ AC, ſit *cimi.*
cõmenſurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis no-
minibus prima, hoc eſt, ordine eadem. Si verò CB, expoſitæ Ratio-
nali ſit longitudine commenſurabilis, ut AB, ſit ex binis nomini-
bus ſecunda; erit eodem modo & FE, Rationali expoſitæ longi-
tudine commenſurabilis. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis no-
minibus ſecunda. Si denique neutra ipſarum AG, CB, longitudine
ſit commenſurabilis expoſitæ Rationali, ita ut AB, ſit ex binis no-
minibus tertia; *i* erit & neutra ipſarum DF, FE, longitudine com- i 12. *de-*
menſurabilis expoſitæ Rationali. Quare & DE, ex defin. eſt ex binis *cimi.*
nominibus tertia.

AT ſi AC, plus poſſit, quàm CB, quadrato rectæ ſibi longitu-
dine incommenſurabilis; k poterit & DF, plus quàm FE, quadra k 15. *de-*
to rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ut prius, o- *cimi.*
ſtendemus DE, ex binis nominibus quartam eſſe, vel quintam, vel
ſextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel

quinta, vel ſexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIVM.

*QVOD ſi recta DE, potentia tantùm commenſurabilis ſit ipſi AB, quæ eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eodem modo, (ſi loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponamus ubique: commenſurabilis potentia tantùm;) & DE, eſſe ex binis nominibus. At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, nullo modo concludemus. Nec enim ſequitur, ſi AC, majus nomen longitudine ſit commenſurabile expoſita Rationali; & DF, majus nomen eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quòd non utraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine: At verò DF, potentia tantùm, ex hypotheſi. Immò verò, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, ut DE, illi potentia tantùm commenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.*

*SIT enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diviſa in ſua nomina ad C, ſitq; ei commenſurabilis potentia tantùm DE, quam quidem, ut in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diviſamq; eſſe in ſua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri poſſe, ut DE, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit utraq; ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumq; maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſita commenſurabilis*
a 12. decimi. *longitudine. a Quare & inter ſe logitudine commenſubiles erunt.*
b 10. decimi. *Et quoniam eſt ut AC, ad DF, ita AB, ad DE, b erunt propterea & AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolùm commenſurabilis. Non ergo utraq; AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modo neq; utraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecunda vel quinta. Eſſet enim utrumq; nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commenſurabile Rationali expoſita, atq; adeò & inter ſe. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.*

*SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſolùm commenſurabilem, eſſe quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quàm CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit, ut AC, ad CB, ita*
c 15 decimi. *DF, ad FE, c poterit quoque DF, plus quàm FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita ut AC, plus*

poſſit

*poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; a poterit quoq; DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi AB.*

a 15. dec.

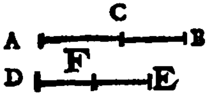
*IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.*

## THEOR. 50. PROPOS. 68.

LXVII. LXI.

### EI, quæ eſt ex binis Medijs, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis *Medijs* AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus ſitq; ei recta DE, longitudine commẽſurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. *b* Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. *c* Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; *d* erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, *Mediæ*. *e* Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, *M*ediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: *f* Sunt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; *g* erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint *Mediæ*, erunt DF, FE, *Mediæ* potentia tantum cõmenſurabiles; *h* Atque idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipſi AB, eandem eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub *A*C, C*B* ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratũ ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub *A*C, CB, ad rectangulũ ſub DF, FE. Cõmenſurabile eſt autem quadratum ex *A*C, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. *i* Igitur & rectangulum ſub *A*C, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC. CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; *k* atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Medium, ita vt *AB*, ſit ex binis Medijs ſecunda: erit



b 12. *ſexti.*
c 19. *quinti.*
d 10. *decimi.*
e 24. *decimi.*
f 38. *decimi.*
g 10. *decimi.*
h 38. *vel 39. dec.*
i 10. *decimi.*
k 18. *decimi.*

& rectangulum ſub DF,FD, ei commenſurabile, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. a 39. decimi. *a* Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs longitudine commenſurabilis, &c. Quod demonſtrandum erat.

### SCHOLIVM.

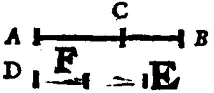
*EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE; ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Medijs eſſe, atque ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis eſt, ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus vbique: commenſurabilis potentia tantum, &c. vt manifeſtum eſt.*

LXVIII.
LXII.

## THEOR. 51. PROPOS. 69.

### MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

SIT linea Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Maiorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuperius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ſunt vel longitudine & potentia, vel potētia tantum; b 10. decimi. *b* erunt quoq; tam AC, DF, quã CB, FE, eodem modo commenſurabiles. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita c 22. ſexti. CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, *c* erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita cōpoſitū ex quadratis rectarū AC, CB, ad cōpoſitū ex quadratis rectarum DF, FE. Cōmēſurabile eſt autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. d 10. decimi. *d* Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum DF, FE. e 40. decimi. *e* Eſt autem compoſitum illud Rationale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. f 9. def. *f* Igitur & hoc Rationale eſt.



Rurſus quia eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex *AC*, ad rectangulum ſub *AC*, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE: & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub *AC*, C*B*; ad rectangulum ſub DF, FE: Eſt autem quadratum ex *AC*, quadrato ex DF, commenſurabile, quod rectæ *AC*, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. *a* Igitur & rectangulum ſub *AC*, C*B*, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. *b* Eſt autem rectangulum ſub *A*C, CB, Medium. Igitur & rectangulum ſub DF, FE, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quoniam vero eſt vt AC, ad C*B*, ita DF, ad FE, *c* ſuntque *AC*, CB, potentia incommenſurabiles, cum componant *Maiorem AB*; *d* Erunt quoque DF, FE, potentia incommenſurabiles. Itaque cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, *Medium*, vt oſtenſum eſt; *e* erit tota *DE*, *Maior*. *Maiori* ergo commenſurabilis & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

a 10. *decimi.*
b 40. *decimi.*
c 40. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 40. *dec.*

## THEOR. 52. PROPOS. 70.

lxix.
lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT (repetita figura antecedentis propoſ.) recta *AB*, potens Rationale ac *M*edium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & *D*E, eſſe potentem Rationale ac *M*edium. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum *AC*, CB, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum *D*F, FE: *f* Eſt autem illud compoſitum *M*ediũ, cum rectæ *AC*, CB, componant ipſam *AB*, potentem Rationale ac *M*edium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, *M*edium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub *AC*, CB, *g* quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE, atque adeo & rectangulum ſub DF, FE, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum DF, FE, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis *M*edium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; *h* erit tota DE, Rationale ac *M*edium potens, Igitur Rationale ac *M*edium potenti commenſurabilis, &c Quod erat demonſtrandum.

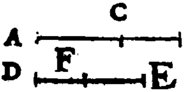
f 41. *decimi.*
g 41. *decimi.*
h 41. *decimi.*

LXX.
LXIV.

## THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia ſiue potentia tantum. Dico & DE, eſſe bina Media potententem. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in propoſ. 69. compoſitum ex quadratis rectarum AB, CB, compoſito ex quadratis rectarum DF, FE, commenſurabile eſſe: Nec non & rectangulum ſub AC, CB, eſſe commenſurabile rectangulo ſub DF, FE. a Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, quam rectangulum ſub AC, CB, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius lib. tam compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, quam rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo b quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, DB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt; Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulo ſub AC, CB, probauimus commenſurabile rectangulum ſub DF, FE; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ, DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; c erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.



a 42. decimi.

b 42. decimi

c 42. decimi.

LXXj.
LXV.

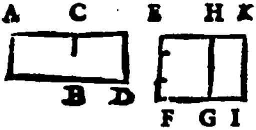
## THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medinm componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Tationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus:

Æqua-

Æquale ſiquidem non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo maius. *a* & expoſita Rationali EF, applicetur ad eum rectangulum EG, æquale ipſi *AB*, & ad HG, aliud HI, æquale ipſi *CD*, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniam AB, Rationale eſt, & CD, Medium, erit quoque EG, Rationale & HI, Medium; quæ cum applicentur ad Rationalem EF, *b* erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; At vero HK . Rationalis, & eidem EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia EG, HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nempe Medium; *d* erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; *e* Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam HK, *f* cum DH, HK, eandem rationem habeant, quam EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit & EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & ſpatium AD, compoſitum ex Rationali AB, & Medio CD, *g* Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

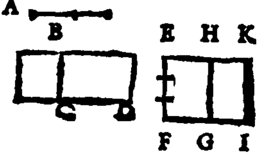


a 45. *primi.*
b 21. *decimi.*
c 23. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 37. *decimi.*
f 1. *ſexti.*
g 55. *decimi.*

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & ſpatium AD, *h* Irrationalis eſt, quæ vocatur *Maior*.

h 58. *decimi.*

SIT deinde *AB*, minus quam CD, & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius EK, ex binis nominibus & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK, quæ eſt ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus



bus ſecunda; cũ EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & *Medio* CD, compoſitum, *a* Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Mediis prima.

a 56. *decimi.*

SI vero HK, plus poſſit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, *b* Irrationalis eſt, quæ Rationale & *Medium* potens appellatur. Si igitur Rationale & *Medium* componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 59. *decimi*

LXXIJ.
LXVJ.

## THEOR 55. PROPOS. 73.

SI duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo *Media* incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam quæ poteſt totũ ſpatium AD, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem. Erit enim rurſus *AB*, vel maius, quam CD, vel minus: Æquale ſiquidem non erit; alias eſſent AB, CD, commenſurabilia quod non ponitur. Sit primo majus, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia AB, CD, ponuntur *Media*, & incommẽſurabilia; erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. *c* Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationẽ, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint, applicenturque ad Rationalem EF,) *d* Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; *e* ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius EK, poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, con-

c 10. *decimi.*

d 23. *decimi.*

e 37. *decimi.*

ten-

tentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & ſpatium AD, *a* Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur. a 57. decimi.

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, *b* Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur. b 60. decimi.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quopropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

## COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, *c* latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. c 23. decimi.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, *d*, latitudinem efficit ex binis nominibus primam. d 61. decimi.

ET quadratũ eius, quæ eſt ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, *e* latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. e 62. decimi.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, *f* latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. f 63. dec.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, *g* latitudinem facit ex binis nominibus quartam. g 64. decimi.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem facit ex binis nominibus quintam. h 65. decimi.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus: perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus haſtenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe. i 66. dec.

## SCHOLIVM.

*HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.*

*IN primo qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus, & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Me-*

*dijs ſecunda; & Maioris; & eius, qua Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, qua poteſt bina Media.*

*IN ſecundo, quem continet propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.*

*IN tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52 53, & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſexta.*

*IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex bis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia vel quarta, vel quinta, vel ſexta.*

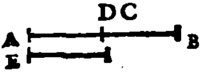
*IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.*

*IN ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.*

*IN ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.*

*REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.*

*SIT enim quacunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, biſariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe ſecundum Analogiam Arithmeticam inter AC, CB: & eſſe quoq; ex binis nominibus. Quoniam enim AD, ſuperat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DB; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.*



*RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.*

*IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.*

SE-

*SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.*

# PRINCIPIVM SENARIORVM, per detractionem.

## THEOR. 56. PROPOS. 74.

LXXiij.
LXViij.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniã enim per lẽma 3. prop. 19. huius lib. eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC; Et ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles; *a* erunt incommenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB. commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC; (Cum enim AB, AC, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia. *b* Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero ſub AB, AC, commenſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AB, AC, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. *c* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC. æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB, linea Rationali deſcripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC. Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. *decimi.*
b 16. *decimi.*
c 7. *ſecundi.*

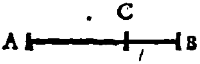
### SCHOLIVM.

*POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.*

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

a 37. decimi.

*NAM cum* AB, AC, *ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen* AB. *& minus* AC. *Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine* AB, *vt relinquatur Apotome BC.*



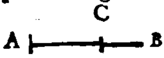
## THEOR. 57. PROPOS. 75.

LXXIV.
LXIX.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

b 16. decimi.
c 7. dec.
d 17. decimi.

DETRAHATVR à *Media* AB, *Media* AC, *potentia ſolum commenſurabilis* ipſi AB, ſitque rectangulum ſub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia ſunt commenſurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia, *b* atque adeo & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex AC. Eſt autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium Igitur ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum ſub *A*B, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis ſub *AB*, AC, Rationale. Igitur incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis ſub AB, *A*C. *c* Cum ergò compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex *B*C; erit quoque rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex *B*C, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. *d* Quare & rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia ſunt: Exiſtente ergo rectangulo bis ſub A*B*, *A*C, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta *B*C, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, à maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod oſtendendum erat.



### SCHOLIVM.

*POTVISSET hæc propoſitio proponi hoc modo.*

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationali eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

*CVM enim AB, AC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale;* a *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.* a 38. decimi.

## THEOR. 58. PROPOS. 76.

LXXV. LXX.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

DETRAHATVR à Media *AB*, Media AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A*B*, ſitque rectangulum ſub A*B*, AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex A*B*, AC, potentia commenſurabilibus commenſurabilia ſunt; *b* erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrumq; ipſorum *M*edium, quod & rectæ A*B*, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulum ſub A*B*, AC, *M*edium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub A*B*, AC, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. *M*edium. *c* Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub A*B*, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam *M*edium eſt, quadrato ex BC. *d* *M*edium autem non ſuperat *M*edium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta *B*C, Irrationalis. Vocetur autem *M*ediæ Apotome ſecunda, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis *M*edijs ſecunda, à maiori nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur à *M*edia *M*edia auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.

b 16. decimi.

c 7. ſecundi.

d 27. decimi.

### *SCHOLIVM.*

*HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.*

SI à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

*QVONIAM enim AB, AC, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, continentque Medium;* a 39. decimi. *a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome ſecunda.*

LXXVj. LXXj.

## THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquã BC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim cõpoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. & ei commenſurabile, hoc eſt, rectangulum, bis ſub AB, AC, Medium, hoc eſt, Irrationale; b 10. decimi. *b* erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. c 7. ſecundi. *c* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. d 10. defin. *d* Igitur quadratum ex BC, illi incommenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ Maioris à maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

## *SCHOLIVM.*

*SIC etiam theorema hoc poterat proponi.*

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

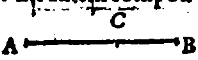
*NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium:* c 40. decimi. *c erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ* *lis, quæ vocatur Maior, eiuſque maius nomen AB, minus autem* AC. *Auferetur igitur AC, minus nomen ex maiori* AB, *vt relinquatur Minor* BC.

## THEOR. 60. PROPOS. 78.

lxxvij.
lxxij.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub AB, AC, Rationale; *a* erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. *b* Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, AC. *c* Sunt ergo rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale ſit; *d* erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; Reliqua Irrationalis eſt. &c. Quod oſtendendum erat.



a 10. *defin.*
b 7. *ſecundi.*
c 17. *decimi.*
d 10. *def.*

### SCHOLIVM.

*HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.*

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

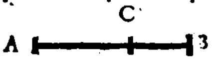
*CVM enim* AB, AC, *ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; e erit compoſita ex ipſis Irrationalis.* e 41 dec *quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC Aufertur igitur minus AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

lxxviij.
lxxiij.

## THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium;& quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitque tam compoſitum ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. *a 7. ſecundi.*



*a* Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis ſub, AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub AB, AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex *b 27. decimi.* BC. *b* Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Medium eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam eſt Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.

## SCHOLIVM.

*IN hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.*

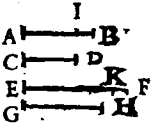
SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

*QVONIAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum, erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

## LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, ſitq; IB, exceſſus inter AB, CD, æqualis exceſſui KF, inter EF, GH. Dico eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH. Quoniam enim IB, exceſſus eſt inter AB & CD; erit AI, ipſi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.



## COROLLARIUM.

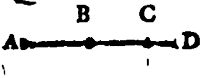
EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam, quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habent.

## THEOR 62. PROPOS. 80.

LXXIX.
LXXIV.

APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB, congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam Rationalem non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Eodẽ modo



erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, & rectangulum bis ſub AC,BC, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub AD BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum a 7. ſecundi. AC,BC, rectangulum bis ſub AC, BC, quadrato ex *AB*; *a* quod compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC,BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum AD,BD, ſuperat rectangulum bis b 7. ſecundi. ſub *AD*,*BD*, quadrato eodem ex AB; *b* cum & compoſitum ex quadratis rectarum *AD*, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub *AD*, BD, vna cum quadrato ex AB,) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD,BD, qui inter rectangulum bis ſub AC,BC, & rectangulum bis ſub AD,DB. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale ſit. (Nam cum *A*C,BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erunt c 16. dec. earum quadrata Rationalia, & commenſurabilia. *c* Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum *A*D, *B*D.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub *AC*,BC, & rectangulum bis ſub AD, *B*D, ſpatiũ d 22. decimi. Rationale eſt *d* Et quia rectangulum ſub AC,BC, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectane 27. decimi. gulum bis ſub *A*D, BD. *e* Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectãgulum bis ſub AC,BC, & rectangulum bis ſub *A*D,BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi *AB*, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

LXXX.
LXXV.

## THEOR. 63. PROPOS. 81.

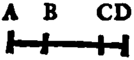
MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT *Mediæ Apotome prima AB*; & ipſi congruat *AC*, *Media* toti *AC*, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub *A*C,*B*C, AC, BC, ſit Rationale. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantùm commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantùm commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media eſt potentia ſolùm ipſi AC, commenſurabilis; *a* erit & AC, Media, cùm illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt AC, BC, potentia tantùm commenſurabiles. Quoniam verò idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ut in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt; Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſitionis 27. hujus lib. ſpatium Rationale; quod utrumque ſit Rationale. (cùm enim rectangulum ſub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub AC, BC, illi commenſurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub AD, BD.) Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; erunt & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. *b* Igitur & compoſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atque adeò & Medium, ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. Non aliter quoq; Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. *c* Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia ſolùm commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

*a* 24. *decimi.*

*b* 16. *decimi.*

*c* 27. *decimi.*



## THEOR. 64. PROPOS. 82.

lxxxj.
lxxvj.

MEDIÆ Apotomæ ſecundæ una tantùm congruit recta linea Media potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

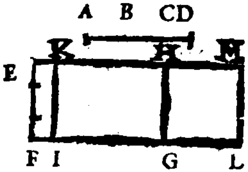
SIT Mediæ Apotome ſecunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantùm commenſurabilis, & rectangulum ſub AC, BC, ſit medium. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantùm commenſurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia

*a* 45. *primi.*
*b* 7. *ſec.*
*c* 24. *decimi.*

BD. Media toti AD, potentia tantùm commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, *a* ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. *b* Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, unà cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemq; modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cùm enim BC, Media ponatur, *c* erit & AC, ipſi potentia commenſurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia.

*d* 16. *decimi.*
*e* 23. *decimi.*
*f* 23. *decimi.*
*g* 10. *decimi.*
*h* 74. *decimi.*
*l* 10. *decimi.*
*k* 74. *decimi.*

Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt utrique eorum; atq; idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. *d* Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cùm applicetur ad Rationalem EF, *e* erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. hujus lib & ejus duplum, nempe KG, Medium: quod cùm applicetur ad Rationalem KI, *f* erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtq; ut AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ut oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. hujus lib. *g* erit quadrarum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, rectangulum EG, (cùm enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata commenſurabilia. *h* Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt utrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt ejus duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. docuimus. *i* Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolùm commenſurabilis ipſi EH, *k* erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonſtrabimus EK, Apotomen eſſe & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ una tantùm congruit recta linea Rationalis potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti: quod

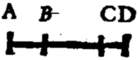


quod eſt abſurdum. Vnam enim tantùm congruere. *a* demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ una tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. a 80. *decimi.*

## THEOR. 65. PROPOS. 83. LXXXII.

LXXVII. MINORI una tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

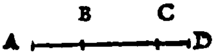
SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum ſub AC, BC, Medium. Dico ipſi AB, aliam non congruere, quæ eadem præſtet. Sit enim, ſi fieri poteſt, alia congruens *BD*, toti AD, potentia incommenſurabilis; faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AD, *B*D, Rationale, at rectangulum ſub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, ut in propoſ. 80. demonſtratum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. hujus libri; quod utrumque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. (Cùm enim rectangulum ſub *A*C, *B*C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. hujus lib. ejus duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub AD, *B*D. *b* Quare unum non ſuperabit alterum Rationali. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergò una tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. b 27. *decimi.*



## THEOR. *66.* PROPOS. 84. LXXXIII.

LXXVIII. EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, facienſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur ut in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, ut in propoſ. 81 demonſtravimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt; cùm utrumque ſit Medium. a Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quàm BC, congruet potentia toti incommenſurabilis. &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

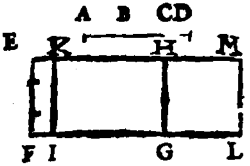


a 27. decimi.

LXXXIV. LXXIX.

## THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.



SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi verò congruens BC, toti A C, potentia incommenſurabilis, faciensque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat. ipſi recta alia BD, toti A D, potentia incommenſurabilis, ita ut & compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium eſt; erit etiam E G, illi æquale, Me-

dium.

dium. *a* Recta igitur EH, Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine in- a 23. de-
commenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Me- cimi.
dium eſt; erit & ejus duplum KG, Medium. *b* Igitur & recta b 23. de-
KH, Rationalis eſt, longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Et cimi.
quoniam KG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cùm
illud hujus ſit duplum; at rectangulum ſub AC, BC, incom-
menſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC:
*c* erit quoque KG, eidem compoſito, hoc eſt ipſi EG, incom- c 14. de-
menſurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum cimi.
EG, KG, rationem, *d* longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed d 10. de-
& oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolùm cimi.
commenſurabiles. Quare cùm ex Rationali EH, auferatur
Rationalis KH, potentia ſolùm commenſurabilis ipſi EH; *e* erit e 74. de-
EK, Apotome, & ei congruens, KH. Non aliter oſtendemus EK, cimi.
eſſe Aptomen, & ei congruentem eſſe KM. Non igitur Apotomæ
una tantùm recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. *f* Vnam f 80. de-
enim tantùm congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum cimi.
Medio Medium totum facit, una tantùm congruit, &c. Quod
erat oſtendendum.

## DEFINITIONES
### TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IV.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta,

SI

### V.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

### VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

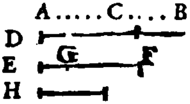
### SCHOLIVM.

*NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperiùs numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex majoribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, ut ex definitionibus eſt perſpicuum.*

## LXXXV. PROBL. 19. PROPOS. 86.

LXXX. INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A *B*, CB, ut in ſcholio 2. propoſ. 29. hujus libri docuimus, quorum exceſſus A*C*, non ſit quadratus; ita ut A B, C *B*, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A*B*, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F. Eritque E F; cùm commenſurabilis ſit Rationali, D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6 hujus lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, eſſe primam Apotomen. *a 6. dec.* *a* Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis; erit & G F, Rationalis. Quia verò A*B*, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. *b 9. dec.* *b* Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F, GF. Rationales ergo ſunt EF, G F, potentia tantùm commenſurabiles; *c 74. decimi.* *c* atque idcirco reliqua E G, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſſit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato ex H. Et quia eſt, ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G *F*; erit per converſionem rationis, ut A *B*, ad *C* B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem AB, C *B*, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & qua-

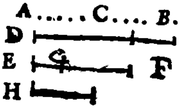


quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; *a* Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quàm congruens *GF*, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali *D*, commenſurabilis longitudine: erit E*G*, ex defin. prima Apotome. Invenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. a 9 *decimi.*

## PROBL. 20. PROPOS. 87. LXXXVI.

### INVENIRE ſecundam Apotomen. LXXXI.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propoſ. præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF, eritque GF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex *E*F, per coroll. propoſ. 6. hujus libri. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. Quoniam *b* enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri *A* C, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; *c* erunt GF, EF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt GF, EF, potentia ſolùm commenſurabiles; *d* Ideoque EG, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim recta EF, plus quàm *G*F, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt ut AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & convertendo, ut AB, ad A*C*, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex *G* F. Oſtendemus jam ut in antecedenti propoſ. rectam H, ipſi *E* F, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cùm tota *E*F, plus poſſit, quàm congruens *G*F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitque congruens *GF*, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit *E G*, ex defin. ſecunda Apotome. Invenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.



b 6. *decimi.*

c 9. *dec.*

d 71. *decimi.*

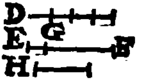
## PROBL. 21. PROPOS. 88. LXXXVII.

### INVENIRE tertiam Apotomen. LXXXII.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, C*B*, ut in propoſitione 86. ſumatur alius numerus I, ut in propoſitione 51. hujus libri docuimus, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat ut I, ad *AB*, ita quadratum ex D, ad quadratum a 6. decimi. tum ex EF, per coroll. propoſ. 6. hujus libri. *a* Erũtque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commenſurabilia; atque adeò & rectæ D, & E F, cõmmenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent, quàm b 9. dec. numeri quadrati; *b* erunt rectæ *D*, & E F, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem corollario propoſ. 6. hujus lib. Dico EG, eſſe tertiam c 6. dec. Apotomen. *c* Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia, quam numeri AB, *A* C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles ſaltem potentia. Cùm ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc ſit commenſurabilis, ut demonſtravimus. Et quia *A*B, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri d 9. dec. quadrati; *d* Erunt rectæ EF, GF, longitudine incõmenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, G F, potentia ſolùm commenſurabiles; Ac propterea cùm ex E F, auferatur G F, potentia illi ſolùm commen- e 74. decimi. ſurabilis; *e* reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt, ut I, ad A *B*, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; & ut A*B*, ad AC, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo ut I, ad A C, ita quadratum ex *D*, ad quadratum ex G F; Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, f 9. dec. proportionem habebunt, quam numeri quadrati. *f* Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit jam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H; Oſtendemusque, ut in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cùm tota E F, plus poſſit quàm congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. E G, tertia Apotome. Invenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

A..... C.... B

I......



LXXXVIII

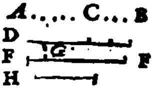
## PROBL. 22. PROPOS. 89.

LXXXIII.

## INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. hujus lib.

jus lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, ut ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſſit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt ut AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, erit per converſionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; a erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Invenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



a 9. decimi.

## PROBL. 23. PROPOS. 90. LXXXIX.

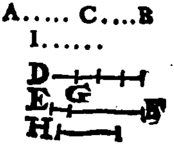
INVENIRE quintam Apotomen. LXXXIV.

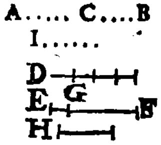
REPERTIS (repetita figura proxime antecedentis propoſitionis) duobus numeris AC, CB, ut in propoſitione præcedenti fiat conſtructio, ut in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur GF, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo ut in propoſ. 87. EG, eſſe Apotomen. Dico & quintam eſſe. Poſſit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia ſimiliter, ut in propoſ. 86. oſtendemus, per converſionem rationis eſſe ut AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rurſus, ut in propoſ. antecedenti rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles; eſtque congruens GF, Rationali D, commenſurabilis longitudine: erit ex defin. EG, quinta Apotome. Invenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

## PROBL. 24. PROPOS. 91. XC.

INVENIRE ſextam Apotomen. LXXXV.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, ut in propoſ. 54. ita ut AB, ad neutrum ipſorum AC, CB; & I, ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, ut in propoſ. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, ut ibi D, & EF, longitudine incommenſurabiles eſſe; & EG, Apotomen eſſe. Dico & ſextam eſſe; & EG, Apotomen eſſe. Dico & ſextam eſſe. Nam ut in propoſ. 88. erunt D, & GF, longitudine quoque incommmenſurabiles: Atque adeo neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit jam EF, plus





quam GF, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, ut in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi EF. Igitur cum tota EF, plus poſſit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine ſit commenſurabilis Rationali *D*; erit ex defin. EG, ſexta Apotome. Invenimus ergo ſextam Apotomen. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

*SED & expeditius ſex dictas Apotomas inveniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.*

a 49. decimi. *SIT invenienda exempli gratia, prima Aptome,* a *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cujus majus nomen A C, & minus C B. Abſciſſa igitur ex* A C, *recta* C D, *quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico AD, eſſe primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales ſunt potentia tantũ cõmenſurabiles: erunt etiã AC, DC,* b 74. decimi. *Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles.* b *Eſt ergo AD, Apotome.*

*Et quia A.B, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quàm* DC, *quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & eſt* A C, *Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione ejus, quæ ex binis nominibus prima dicitur: erit ex definitione Apotomæ prima, AD; prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inveniemus, ut ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta, ſextam, ſi minora nomina ex majoribus auferamus.*

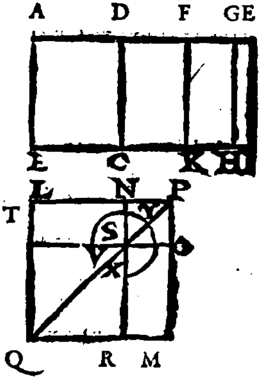
xcj.
LXXXVj.

## PROBL. 68. PROPOS. 92.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATUR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit Ipſi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ; Rationales potentia ſolum commenſurabiles: & tota A*E*, longitudine commenſurabilis Rationali A*B*: & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quam congruens D*E*, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale ſub AG, GE. deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. hujus libr. Et quia AE, plus poteſt, quàm DE, quadrato rectæ ſibi c 18. dec. longitudine commenſurabilis: *c* erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles; d 16. dec. *d* Ac propterea & utraque toti AE, longi-

longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB,
longitudine commenſurabilis. a Igitur & utraque AG, GE, ipſi a 12. de-
AB, longitudine eſt commenſurabilis: atque ex definitione 6. cimi.
Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi
BC, productæ occurrant in HI, b erit utrumque rectangulum b 20. deci
AH, GI, contentum ſub duabus ra-
tionalibus longitudine commenſu-
rabilibus, Rationale. Rurſus quia
utraque DF, FE, longitudine com-
menſurabilis eſt ipſi DE; & DE,
longitudine incommenſurabilis eſt
Rationali AB; (Nam ſi commenſu-
rabilis eſſet longitudine, cum & AE,
ſit eidem AB, longitudine commen-
ſurabilis; c eſſent AE, DE, longitu-
dine quoque commenſurabiles. c 12. deci-
Quod eſt abſurdum. ponuntur e- mi.
nim ſolum potentia commenſura-
biles;) d erit etiam utraque ipſarum
DE, FE, ipſi AB, longitudine in- d 14. de-
commenſurabilis. Et quoniam utraq; cimi.
DF, FE, Rationali DF, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt
propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tan-
tum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, e erit e 22. de-
utrumque rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus cimi.
potentia tantum commenſurabilibus, Medium.



IAM vero ipſi AH, f fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æ- f 14. ſe-
quale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angu- cundi.
lum LPM. g Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem dia- g 26. ſexti.
metrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, ut vides. Quoniam
igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt
quadrato ex FE, h erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; h 17. ſexti.
i Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant ratio- i 1. ſexti.
nem: erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter
quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM,
NO, per lemma propoſ. 14. hujus lib. medium quoque proportio-
nale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: k Sed ipſi FI, æ- k 36. de-
quale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti cimi.
gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum
AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & re-
liquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale: Ac propterea re-
cta TS, poteſt ſpatium AC. Dico TS, Apotomen eſſe.

QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationa-
lia: & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM,

a 1. ſexti. b 10. decimi. c 74. decimi.

NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cum unum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, *a* eandem rationem habentes cum LO, NO, *b* longitudine incommenſurabiles ſunt; *c* Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

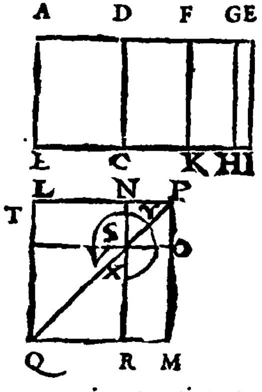
XCII. LXXXVij.

## THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

b 18. decimi. e 16. decimi. f 12. decimi. g 14. decimi. h 22. decimi.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali *AB*, & Apotoma ſecunda *AD*. *Dico* rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ *Apotomen* eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotome ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, ut in propoſitione præcedenti. *d* Eruntque rurſus, ut in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; *e* Ac propterea & utraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali A*B*, longitudine incommenſurabilis; ( Si enim commenſurabilis eſſet ipſi A*B*, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; *f* eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles. *g* Igitur & utraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt autem utraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commenſurabiles; *h* Atque idcirco rectangulum utrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia utraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali



nali A B, longitudine commenſurabilis; erit quoq; ut in ſcholio propoſit. 12. hujus lib. oſtendimus, eidem A B, Rationali longitudine commenſurabilis utraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. *a* Vtrumq; ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primam.

a *20. decimi.*

QVONIAM enim AG GE, longitudine ſunt commenſurabiles, *b* erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atq; adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, cōmenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtenſa enim ſunt AH, GI, Media eſſe) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, proptereaq; Medio NO, incommenſurabile; *c* erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles, erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; *d* erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

b *10. decimi.*

c 10. *decimi.*

d *75. decimi.*

## THEOR. 70. PROPOS. 94.

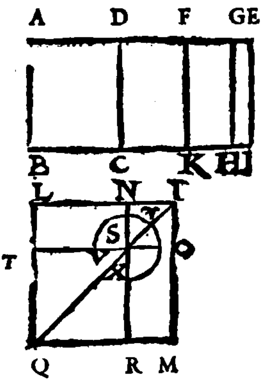
LXXXXIII
LXXXVIII.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit enim ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & neutra ipſarum A E, D E, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſi longitudine commenſurabiles. Secetur DE, biſariam in F, & cætera fiant, ut in propoſ. 92. eruntque rurſus, ut ibi, A G, G E, longitudine inter ſe commenſurabiles; *e* Ac propterea & utraq; toti A E, longitudine commenſurabilis erit. Eſt autē A E, poſita commenſurabilis longitudine Rationali AB, *f* Igitur & utraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommenſurabilis. Cum ergo utraque A G, G E, Rationali A E, commenſurabilis, Rationalis ſit; erunt tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales potentia ſolum commenſurabiles:

e 16. *dec.*

f 14. *decimi.*



a 22. decimi.

b 14. decimi.

c 22. decimi.

*a* Ac propterea utrum; rectangulum AG, GI, Medium erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali AB; erit quoq; utraq; DF, FE, ipſi DF, longitudine commenſurabilis exiſtens, *b* eidem AB, longitudine incommenſurabilis. Cum ergo utraq; DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis ſit Rationalis; erunt tam AB, DE, quã AB, GE. Rationales potentia tantum commenſurabiles; *c* atque propterea utrumq; rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter jam demonſtrabimus, ut in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 76. decimi.

QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, *d* commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE, commenſurabilis eſt lõgitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. & GE, FE, longitudine incommenſurabiles; *e* ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, hoc eſt illis æqualia NO, LO, *incommenſurabilia.* Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt TO, SO, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale ſit ipſi FI, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtendimus: erit LO, Medium.) *f* erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia. &c. Quod erat demonſtrandum.

XCIV.
LXXXIX.

## THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC. ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Ra-

DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione
Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali
AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi
longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, &
reliqua omnia fiant, ut prius. *a* Erunt ergo AG, GE, incommenſurabiles a 10. decimi.
longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt quam DE,
quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE,
applicatum eſt rectangulum ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati
ex DE, deficiensq; figura quadrata. Et quia AE, Rationalis
eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; *b* erit b 20. decimi.
rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, &
Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, *c* erit DI, atque c 22. decimi.
adeo & ejus dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint
longitudine incommenſurabiles; *d* incommenſurabilia erunt d 10. decimi.
AG, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter
demonſtrabimus, ut in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium
AC. Dico TS, eſſe minorem.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale
eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Eſt
autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis
rectarum TO, SO, Rationale. Idem quia F, Medium eſt oſtenſum;
erit & LO, contentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium.
Deniq; quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata;
erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atque
adeo rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter
cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitq; compoſitum
ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub
ipſis, Medium; *e* erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur e 77. decimi.
ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum
erat.

## THEOR. 72. PROPOS. 69.

XCV.
XC.

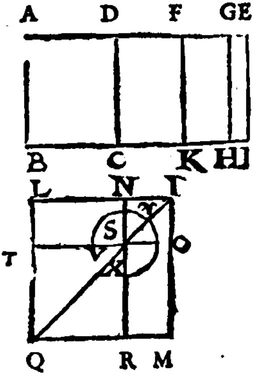
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proxime antecedente) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et deniq; AE, plus poterit quam DE, quadrato rectæ ſi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, ut prius. Erunt ergo rurſus, ut in antecedenti propoſ. AG, G E, longitudine incommenſurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incōmenſurabilis eſt Rationali AB, ut in propoſ. 93. diximus; *a* erit rectangulum AI, a 22. *decimi.* Medium. Item quia D E, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; *b* erit DI, atq; idcirco & ejus dimib 20. *decimi* dium FI, Rationale. Rurſus erunt, ut in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritque, ut oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

QVONIAM enim oſtenſum eſt AI. Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonſtravimus F I, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulum ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommenſurabiles, ut in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, S O, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; *c* erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum c 78. *decimi.* efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

## THEOR. 73 PROPOS. 97.

xcvj. SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma xcj. ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR ſpatium *A*C, ſub Rationali *A*B, & *A*potoma ſexta *A*D. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium *A*C, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipſi *A*D, congruens *D*E. Erunt ergo ex definitione *A*potomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum A E, D E, Rationali *A*B, commenſurabilis longitudine; Et denique *A* E, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incōmenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, ut ſupra. Erunt ergo rurſus, ut in propoſ. 95. *A*G, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam

tam AE,quam DE. Rationalis eſt,& Rationali AE, longitudine incommenſurabilis; a erit tam AI,quam DI, atque adeo & huius dimidium FI,Medium. Eruntque vt in propoſ.95.AH,GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE,DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; b Erunt AI,DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI,FI,commenſurabilia ſint, c erit FI,ipſi AI,incommenſurabile. Iam vero demonſtrabimus, vt in propoſ.92.rectam TS,poſſe ſpatium AC. Dico TS,eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22. decimi.
b 10. decimi.
c 14. decimi.

QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM,NO rectarum TO,SO,illi æquale,Medium. Item quia FI,Medium oſtenſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO,SO,Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile,vt oſtendimus; erit quoque LO,ſub TO,SO,contentum,incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO, SO,propterea quod LO,ipſi FI,& compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Denique TO,SO, potentia incommenſurabiles ſunt,vt in propoſ.95.eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO,SO,ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; d erit reliqua TS, ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta,&c. Quod erat oſtendendum.

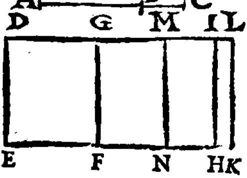
d 79. decimi.

## THEOR. 74. PROPOS. 98.

XCVIII.
xcvij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB,& ipſi congruens BC,ita vt AC,BC,ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; e & ad Rationalem DE,applicetur rectãgulum DF,æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG,eſſe Apotomen primã. Ad eandem enim DE,applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC;& ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC;ita vt votum DK,æquale ſit compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. f Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC,æquale eſt rectangulo bis ſub AC,BC,vna cum quadrato ex AB; ſin auferantur quadratum ex AB,& rectangulum DF; relinquetur GK,rectangulo bis ſub AC,BC,æquale; atque ado diuiſa GL, bifa-



e 45. primi
f 7. ſecundi

riam in M, ductaque MN. ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC,BC. Et quoniam AC,BC, Rationales ſunt; erunt quoque quadrata ex AC,BC, Rationalia; ideoque commenſurabilia. *a* Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, *b* erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; *c* erit GL, Rationalis ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam DK, Rationale & GK, Medium, hoc eſt, Irrationale incommenſurabilia ſunt: *d* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *e* Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

a 16. *decimi*
b 21. *decimi.*
c 23. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 74. *dec.*

QVONIAM enim per Lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC,CB, hoc eſt, MK, Medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC,BC, hoc eſt, inter DH,IK: erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales ſunt. *f* Quare rectangulum ſub DI,IL, æquale eſt quadrato ex ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc eſt, illis æqualia DH,IK, commenſurabilia ſunt, *g* erunt rectæ DI,IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum ſub DI,IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſque figura quadrata, atque ſit oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine commenſurabilis; *h* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cũ ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totã DL, plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotome ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat.

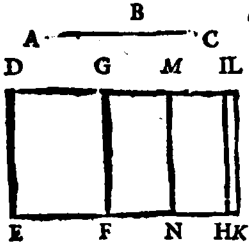
f 17. *ſexti.*
g 10. *decimi.*
h 10. *decimi.*

x cviij.
x ciij.

## THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT *M*ediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC,BC,ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale : *a* Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale a 45. *primi.* applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecundam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC: & GK, æquale ei, quod ſub AC,BC, continetur; ac proinde MK, ei, quod ſub AC,BC, continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC, *M*ediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & eadem quadrata, hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media & commenſurabilia; *b* b 16. *decimi.* ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & *M*edium per coroll. prop. 14. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, *c* erit D*L*, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. c 23. *dec.* Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale, ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Ratonalem DE, *d* erit GL, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi DE. d 21. *decimi,* Quia vero DK, *M*edium, id eſt, Irrationale, & G*K*, Rationale, incommenſurabilia ſunt; *e* erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem longitudine incommenſurabiles. e 10. *decimi.* Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt *D*L, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles; *f* Ac f 27. *decimi,* propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. *N*am ſimiliter, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum congruens GL, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE. erit ex defin. DG, Apotome ſecunda. Quadratum ergo *M*ediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendeudum erat.



## THEOR. 76. PROPOS. 100.

xcix.
xciv.

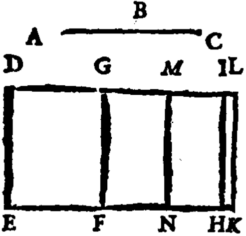
QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT *M*ediæ Apotome ſecunda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC,BC, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineatque *M*edium: *g* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrati ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, eſſe tertiam g 45. *decimi,*

Apo-

a 23. decimi.
b 23. dec.
c 10. decimi.
d 16. decimi.
e 10. decimi.
f 74. decimi.

Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Oſtendemus iam, vt in propoſ. præcedenti DK, *Medium* eſſe, *a* atque adeo rectam DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub AC, BC, *Medium* eſt, atque ob id & eius duplum GK, *b* erit quoque GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Quia vero AB, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, *c* erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. *d* Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc eſt, ipſi GK. *e* Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſæ & Rationes. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; *f* Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. *Dico eſſe &* tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurabilis, vt demonſtratum eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur *Mediæ* Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat oſtendendum.



C. XCV.

## THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

g 45. primi.
h 21. decimi.

SIT minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facienteſque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationales; rectangulum vero ſub AC, BC, *Medium*: *g* & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; *h* erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine com-ne cõmenſurabilis. Item quia rectangulũ ſub AC,BC, atque adeo & eius duplũ GL, *Medium* eſt; *a* erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe *Medium* incommenſurabilia ſunt: *b* erunt *DL*, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potẽtia tantum cõmenſurabiles: *c* Ac propterea reliqua *L*G, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AC, *B*C, potentia ſunt incommenſurabiles: Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, DH, I*K*, incommenſurabilia; *d* Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub DI, IL, æquale ſit quadrato ex ML, id eſt, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propoſ. 98. eſt demonſtratum: *e* poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: quandoquidem ad DL, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub *DI*, IL, æquale quartæ parti quadrati ex *G*L, minore deficiens figura quadrata, diuidenſque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota D*L*, plus poſſit quam congruens GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine oſtenſa commenſurabilis: erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur *Minoris* ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 25. *decimi.*
b 10. *decimi.*
c 74. *decimi.*
d 10. *deci.*
e 19. *decimi.*

## THEOR. *78.* PROPOS. 102.

ci.
xcvj.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali *Medium* totum efficiens A*B*, & ipſi congruens BC, ita vt *A*C, B*C*, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum *A*C, BC, *Medium*: rectangulum vero ſub ijſdem A*C*, BC, Rationale: *f* Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex A*B*, latitudinem faciens DG. Dico DG, *Apotomen* quintam eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, *B*C, atque adeo & illi æquale DK, Medium eſt; *g* erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, *B*C, atque adeo & eius duplum GK, Rationale eſt; *h* erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Et quia DK, *Medium* ſeu Irrationale, & GK, Rationale, incommenſurabilia ſunt: *i* erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Ratio-

f 45 *primi.*
g 21. *decimi.*
h 21. *decimi.*
i 10. *decimi.*

nales

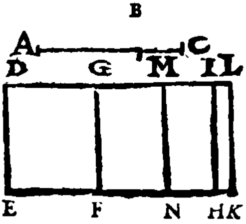
nales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt DI, GL, potentia ſolum commenſurabiles: a 74. decimi. a Atq; idcirco reliqua DG, Apotome eſt: Dico & quintam eſſe. Eodem enim modo, vt in antecedēti propoſ. demonſtrauimus DL, totam plus poſſe quam GL, congruentem, quadrato ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens GL, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

cij.
xcvij.

## THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque b 45. primi. compoſito ex quadratis ipſarum. b Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato, ex AB, ſpatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Quoniam igitur tam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; c 23. decimi. c Erit tam DL, quam GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum d 14. decimi. GK, commenſurabilia: d Erit & GK, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi e 10. decimi. DK, incommenſurabile: e proptereaque rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, f 74. decimi. potentia ſolum commenſurabiles. f Atque idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextam. Oſtendemus enim ſimiliter vt propoſ. 101 totam DL, plus poſſe quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum DL, GL, commenſurabilis ſit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſexta: Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum.



THEOR.

# THEOR. 80. PROPOS. 104.

ciij.
xcviij.

RECTA linea, Apotomæ longitudine commenſurabili: & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi AB, longitudine commmenſurabilis DE. Dico & DE, Apotomen eſſe, atque ordine eandem ipſi AE; *a* Fiat n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles: *c* Erunt quoque AC, DF, nec non & BC, EF, commenſurabiles longitudine: Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales Rurſus quia eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF: & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & ſunt AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles: erunt quoque ex ijs, quæ ad propoſ. 10. huius libri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtẽſæ; *d* reliqua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Poſſit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quo poſito, *e* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Si igitur AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB, ſit Apotome prima; *f* erit quoque DF, longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, cum tam Rationalis expoſita, quam DF, eidem AC, ſit longitudine commenſurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipſi AB. Si vero BC, ſit longitudine commenſurabilis Rationali: erit eodem modo EF, Rationali longitudine cõmenſurabilis: Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum AC, BC, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali; *g* erit quoq; neutra ipſarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quo poſito, *h* poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi logitudine incommenſurabilis. Quare vt prius, oſtendemus DE, eſſe Apotomen quartam, quintam, vel ſextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, &c. Quod oſtendendum erat.

a 12. *ſexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 74. *decimi.*
e 15. *decimi.*
f 12. *decimi.*
g 14. *decimi.*
h 15. *dec.*

## SCHOLIVM.

*IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propoſ. 67. huius libr. de* lineis ex binis nominibus ſcripſimus. Nimirum ſi recta DE, commenſurabilis ſit ipſi AB, potentia tantum, eodem modo demonſtrari poſſe. (ſi loco vocis: longitudine commenſurabilis: vtamur voce: potentia tantum commenſurabilis) & DE, Apotomen eſſe: At non poſſe inferri, illam eſſe ordine eandem ipſi AB. Non enim ſequitur, ſi tota AC, longitudine ſit commenſurabilis Rationali expoſita, & DF, eidem eſſe commenſurabilem longitudine, propterea quod non vtraq́; nempe Rationalis expoſita, & DF, eidem AC, longitudine commenſurabilis eſt: ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Imo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tantum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecunda, quarta vel quinta, eique congruens BC. & ſit DE, ipſi AB, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ prima, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine: a atque ideo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE: b erunt quoque AB, & DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum, ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſita, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles, quod non ponitur.

a 12. decimi.
b 10 decimi.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolum eſt commenſurabilis, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, c poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: erit quoque DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB; quia rurſus, cum ſit vt AC, ad BC, ita DE, ad EF, d poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta vel quinta, vel ſexta.

c 15. dec.
d 15. decimi.

*IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.*

## THEOR. 81. PROPOS. 105.

CIV.
XCIX.

**Recta linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.**

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia ſiue potentia tantum. Dico & DE, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. *a* Fiat enim vt AB, ad DE, ita B,C, ad EF. *b* Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; *c* erunt quoque BD, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, mediæ ſunt, *d* erunt quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; Et permutando vt AC, F, ad BC, ita D, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ, *e* erit reliqua DE, Mediæ Apotome Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniam enim eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cum quadratum ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles; *f* erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; *g* atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoque rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. *h* Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

a 12 *ſexti.*
b 12. *quinti.*
c 10. *decimi.*
d 24. *decimi.*
e 75. *vel* 76. *dec.*
f 10. *decimi.*
g 75. *decimi.*
h 76. *decimi.*

cv. cxvj. c.

## THEOR. 82. PROPOS. 106.

Recta linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

Sint Minor AB, ipſique congruens BC, ita vt AC,BC, potentia ſint incommenſurabiles, facienteſque compoſitum quidem ex quadratatis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero ſub iiſdem AC,BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Minorem eſſe. Fiant enim eadem quæ ſupra, ita vt rurſus AB,BC, ad DE,EF, eandem habeant rationem, quam AC. ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF,EF, ipſis AC,BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, a erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratũ ex BC, commenſurabile quadrato ex EF; quod rectas BC,EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. b Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, ex hypotheſi Rationale. Igitur, & compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, rectanguo ſub DF,EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC,BC, Medium: Erit quoque rectangulum ſub DF,EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntque AC,BC, potentia incommenſurabiles; c erunt etiam DF, EF, potentia incommenſurabiles. Quamobrem cum DF,EF, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum vero ſub iiſdem DF,EF, Medium; d erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 22. ſexti.

b 10. dec.

c 10. ſexti.

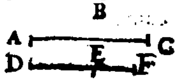
d 77. dec.

cvj. cxvij. cj.

## THEOR. 83. PROPOS. 107.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

Sit recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum ſub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus, vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potentia incommmenſurabiles. Igitur cum DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [a] erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 78. decimi.

## THEOR. 84. PROPOS. 108.

cvij. cij.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

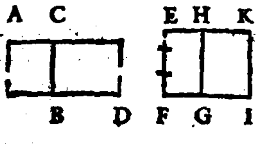
Sit recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, facienteſque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem DE, ipſi AB, quomodolibet cōmenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum eſt; rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulum ſub DF, EF; Sunt autem compoſitum ex quadratis re-

ctarum AC,BC, & rectangulum ſub AC, BC, per hypotheſin, incommenſurabilia; erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius libr. compoſitum ex quadratis rectarum DF,EF,& rectangulum ſub DF, EF, incommenſurabilia. Quocirca cum DF,EF, potentia ſint incommenſurabiles & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum ſub ipſis *Medium*; incommenſurabileque
*a 79. decimi.* compoſito ex ipſarum quadratis; *a* erit D,E, quæ cum *Medio Medium* totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum *Medio*, &c. Quod erat oſtendendum.

cviiij. ciij.

## THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus, ſit, vel Apotome, vel Minor.



DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectã, quæ
poteſt ſpatium reliquum AB, eſſe vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur
*b 45. primi.* enim Rationalis EF, *b* ad quam applicetur rectangulum
EG, æquale ipſi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi GD. ita vt totum
EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD.
*c 21. decimi.* Rationale eſt; *c* erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt *d* erit
*d 32. decimi.* HK, Rationalis, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Itaque cum
EK, quidem ſit longitudine commenſurabilis ipſi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis,
*e 13. decimi.* *e* erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo
*f 74. dec.* ſunt potentia tantum commenſurabiles *f* propterea que reliqua EH,
Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK, quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine; cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH,
*h 92. decimi.* Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, *g*
Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF, erit ex definitione EH; Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale,

*a* Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat. a 95. dec.

## THEOR 86. PROPOS. 110.

cix.
cix.

**Rationalia à medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.**

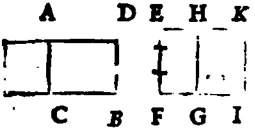
Detrahatur à *Medio AD*, Rationale CD. *Dico* rectam, quæ reli-
quum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel *Mediæ* Apotomen primam, vel
eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur b 32. decimi.
quæ ſupra. Et quia EI. Medio AD, æquale. *Medium* eſt; *b*
erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item c 21. decimi.
quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; *c* erit *HK*, Rationalis
ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidem ipſi
EF, ſit commenſurabilis longitudine, at *EK*, eidem EF, longitudine d 13. decimi.
incommenſurabilis; *d* erunt *HK*; EK, longitudine incommenſurabiles.
Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles; e 74. dec.
Ac proinde reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens
HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi
longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus
poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis,
cum congruens *HK*, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis
Rationali EF; erit ex defin EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens
ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecunda f 93. dec.
EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, *f* Mediæ eſt *A*potome prima.
Si vero *EK*, plus poteſt, quam *HK*, quadrato rectæ ſibi longitudine
incommenſurabilis, cum congruens HK, ſit oſtenſa commenſurabilis
longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta ex defin.
Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & g 96. decimi.
Apotoma quinta EH, hoc eſt, ſpatium illi æquale AB, *g* eſt ea, quæ
cum Rationali *M*edium totum efficit. Quamobrem rationali à *Medio*
detracto. Quod oſtendendum erat.

## THEOR. 87. PROPOS. 111.

cx.
cv.

Medio à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatur à Medio AD, *M*edium CD, quod incommenſurabile ſit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel



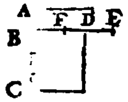
Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem quæ ſupra; quoniam EI, HI, Medijs a 13. *dec.* AD, CD, æqualia Media ſunt, *a* erunt EK, HK, Rationales ipſi EF, longitudine commenſurabiles. Et quia AD, CD, hoc eſt, EI, HI, ponuntur b 10. *dec.* incommenſurabilia; *b* erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales c 74. *dec.* ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; *c* Ac propterea reliqua FH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine cmõenſurabilis, cum neutra ipſarũ EK, HK, Rationali EF, lõgitudine cõmenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex def. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æ- d 94. *dec.* quale; *d* Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus, erit ex defin. EH, Apotome ſexta. Quamobrem recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, *e* eſt ea, quæ cum Medio e 97. *dec.* Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

cxj.
cvj.

## THEOR. 88. PROPOS. 112.

### Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt A, aliqua ex binis nominibus. f 45. *primi.* Expoſita autem Rationali BC, *f* applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur g 98. *dec.* A, Apotome eſt: *g* erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit longitudine. Rurſus h 61. *dec.* quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus: *h* erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomen BF. Erunt igitur ex def. eius, quæ ex binis nominibus prima eſt, BF, FD,



FD,Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa BF,Rationali BC,longitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; *a* erunt quoque BE,BF,inter ſe commenſurabiles longitudine. a 12. *dec.* Igitur cum tota BE, ſit longitudine commenſurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE,FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BF, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE. Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles) *b* erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. b 14. *dec.* Sed & vtraque FE, DE, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt FE,DE,potentia ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, *c* Apotome eſt; Atque ideo irrationalis. c 74. *dec.* Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat.

## COROLLARIVM.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.

Quadratum enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum *d* latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. d 23. *dec.*

At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatam, *e* latitudinem efficit Apotomen primam. e 98. *dec.*

Et quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatam, *f* latitudinem efficit Apotomen ſecundam. f 99. *dec.*

Quadratum vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, *g* latitudinem efficit Apotomen tertiam. g 110. *dec.*

Quadratum deinde Minoris ad Rationalem applicatum, *h* latitudinem efficit Apotomen quartam. h 101. *dec.*

At vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *i* latitudinem efficit Apotomen quintam. i 102. *dec.*

Quadratum denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, *k* latitudinem efficit Apotomen ſextam. k 103. *dec.*

Itaque cum hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe: à latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales: inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & à Media, & inter ſe differre.

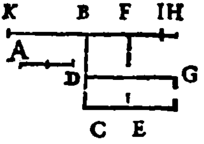
Quoniam vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, qui ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipſam ſequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium: quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quamobrem cũ & tam illæ, quam hæ à media differant: efficitur, Rationali quapiam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe differentes, de quibus haſtenus diſputauimus: Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

cxij.
o.

## THEOR. 89. PROPOS. 113.

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



a 45 primi.

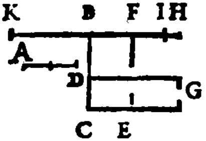
Sit Rationalis A, & ex binis nominibus CB, cuius maius nomen CB, a & ad EC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens *BF*. Dico BF, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus *BD*, DC, ipſius *BC*, ex binis nominibus; & in eadem proportione, & adhuc Apotomen *BF*, eſſe ordine eandem ipſi *B* C, ex binis

binis nominibus. *a* Applicetur enim rurſus ad DC, minus no- a 45. *primi*
men, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex *A*, atque adeo
rectangulo BE; latitudinem faciens DG; ſitque ipſi DG, æqua-
lis IH. Et quoniam æqualia ſunt BE, CG, *b* erit ut BC, ad DC, b 14. *vel*
ita LG, hoc eſt, ſibi æqualis *BH*, ad BF. Et dividendo ut BD, ad 16. *ſexti.*
DC, ita GF, ad FB: Eſt autem BD, major quam DC. Igitur &
IF, major eſt quàm FB: Ponatur FI, ipſi FB, æqualis; *c* & fiat ut c 12. *ſexti.*
HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo ut HF, ad
IF, hoc eſt, ad ſibi æqualem *B*F, ita FK, ad BK. Oſtenſum eſt
autem eſſe ut HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque ut
*B*D, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum ſint nomina ipſius
*B*C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum com-
menſurabiles. *d* Igitur & FK, BK, potentia ſolum commenſura- d 10. *de-*
biles ſunt. *cimi.*

Rurſus quia eſt ut HF, ad BF, ad FK, ad BK, *e* erunt quo- e 12. *quin-*
que HF, FK, antecedentes ſimul nempe tota HK, ad *B*F, & BK, *ti.*
conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam FK, ut FK, ad BK. Ac
propterea FK, media proportionalis eſt inter HK, BK. Quare
ut HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6.
quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, ſecunda. Quia
vero CG, cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato rationalis A,
æquale) ad Rationalem DC, applicatum, *f* facit DG, latitudi- f 12. *decimi*
nem Rationalem ipſi DC, longitudine incommenſurabilem; Erit
quoque H*B*, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine com-
menſurabilis ipſi D*C*. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe ut BD, ad
DL, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quō-
que ut *B*D, ad D, C, ita HK, ad FK. *g* Igitur ut quadratum ex BD, g 22. *ſexti.*
ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex
FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex *D*C,
(quod rectæ BD, DC, ſint Rationales potentia commenſurabiles,
cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus.) *h* Commenſu- h 10. *de-*
rabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed *cimi.*
fuit ut quadratum ex HK, ad quadratum ex FK, ita recta HK, ad
BK. *i* Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; at- i 10. *de-*
que adeo reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib. Oſtenſa *cimi.*
eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis,
Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis,
Rationalis exiſtit. Cum ergo oſtenſa *F*K, ipſi BK, potentia ſolum
commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK,
BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſura-
biles, *k* erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod k 74. *de-*
eſt primum. *cimi.*

QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam
parti BK, longitudine commenſurabilem, *l* erunt propterea & i 16. *de-*

BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoq; BK, ex ſcholio propoſ. 12. hujus lib eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe ut BD, ad CD, ita FK, ad BK; & permutando ut BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles;
a 10. decimi. *a* Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.



Item quia demõſtravimus eſſe ut BD, ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK. in eadem ratione cum BD, DC, nominib. ipſius BC, quæ eſt ex binis nominib. Quod eſt tertium.

Poſtremo vel BD, plus poteſt, quàm DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt BD, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit ut BD, ad DC, ita FK, ad BK;
b 15. decimi. *b* poterit quoq; FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Et ſi quidem BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. hujus lib. demonſtravimus; Si vero DC, ſit Rationali commenſurabilis longitudine: erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si deniq; neutra ipſarum
c 14. decimi. BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; *c* erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, ut conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertiis. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

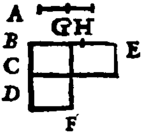
## THEOR. 39. PROPOS. 114.

cxiij.
o.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.

Sit Ra-

Sit Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, *a* & ad BG, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione: & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. *b* Applicetur enim rurſus ad BD, totã, rectangulum BF, æquale, eidem quadrato ex A, h. e. ipſi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia ſunt; *c* erit ut BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per converſionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoq; EG, ad H, ſecundum proportionem BE, ad GE, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus: ut ſit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad H G, ~~ex~~ GE, ablatam; erit quoq; BH, reliqua ipſius BE, ad HE, reliquam ipſius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis eſt inter BG, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc eſt, BH, ad HE: & ſunt BD, CD, cum ſint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantum commenſurabiles. *d* Erunt quoq; BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commenſurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habent rationem cum quadratis ex BH, HE, ut demõſtravimus, *e* longitudine ſunt commenſurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commenſurabilis exiſtens parti GH, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib. At vero cum BD, Rationalis ſit, nempe majus nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale, *f* erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis, longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. hujus lib. & BH, eidem BD, Rationali commenſurabilis eſt longitudine, atq; adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſæ ſunt commenſurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; *g* Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.



a 45. primi

b 45. primi

c 14. vel 16. ſext.

d 10. decimi.

e 10. decimi.

f 21. decimi.

g 37. decimi.

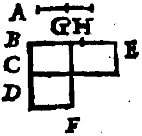
Quoniam vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, ut BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, ut HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis: *h* erit quo-

h 10. decimi.

que

que HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

Immo & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, in EH, ut BD, ad CD. Quod eſt tertium.



Poſtremo vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, *a* poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoq; BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. hujus lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; *b* erit quoque neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis atque tertiis definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt. Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 15. *decimi.*

b 14. *decimi.*

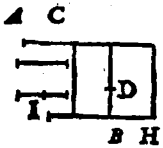
## cxiv. THEOR. 91. PROPOS. 115.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

Contineatur ſpatium AB, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cujus nomina CD, DB, commenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione nempe CD, ad DB, ut CE, ad AE. Poſſit *autem* recta F, ſpatium AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, *c* applicetur ad GB, quæ ex binis nominibus rectangulum CH, æquale quadrato

c 45. *primi*

ex G,



ex G, *a* Erit ergo latitudo BH, Apotome, cujus nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, ut CD, ad DB; atq; adeo ut CE, AE, & permutando ut totã HI, ad totã CE, ita ablata BI, ad ablatã AE, *b* Erit ergo & reliqua BH, ad reliquã AC, ut tota HI, ad totã CE, *c* Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quod utraq; HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD. *d* Igitur & BH, ipſi AC. Longitudine eſt commenſurabilis, *e* Atque idcirco & HC, ipſi BA, commenſurabile erit, *f* cum ſit ut HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale Rationale eſt. Igitur & BA, illi commenſurabile, Rationale erit, proptereaque & recta F, ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandum.

a 113. *decimi.*
b 19. *quinti.*
c 12. *decimi.*
d 10. *decimi.*
e 10. *decimi.*
f 1. *ſexti.*

## COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, fieri, poſſe ut ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium AB, contentum ſub AC, CE, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

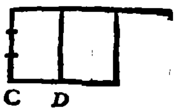
## SCHOLIUM.

*In proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine oſtenſa ſunt eſſe commenſurabilia; In poſteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.*

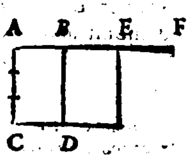
## THEOR 92. PROPOS. 116.

cxv.
cvij.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.



Sit Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarũ nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius libr. Expoſita enim Rationali AC, contineatur ſub AB, Media. & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. hujus lib. Poſſit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. hujus lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipſi AC, longitudine incommenſurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, ut conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. hujus lib. At verò quadratum hujus Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem ejus quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt. a 23. decimi.



Quod ſi compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſſit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE, Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, ut demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ invenientur & inter ſe, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

## cxviij. THEOR. 93. PROPOS. 117.

vij. Propoſitum ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

Sit quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; b ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt ut AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G, Erit quoq; ut quadratum b 5. dec.

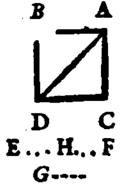
dratum ex AC, ad quadratum ex *AB*, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, *a* (Cum enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam: latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum eſt quadrati ex AB, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex *EF*, duplus erit quadrati numeri ex C: Ac propterea quadratus numerus ex *EF*, cum dimidium habeat, atque adeo bifariam poſſit dividi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe *EF*, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſeipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; *b* eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum, oſtenſus eſt enim par.) Quia vero *EF*, & G, in ſua proportione minimi, *c* inter ſe primi ſunt; & *EF*, oſtenſus eſt par: erit G, impar. (Si enim par eſſet, metiretur utrumque *EF*, & C, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Dividatur jam par numerus *EF*, bifariam in H. Quia igitur numerus *EF*, duplus eſt numeri *E*H, *d* & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex *E*F, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G: & quadruplus quadrati ex *E*H: qualium partium 4. eſt quadratus ex *EF*, talium 2. erit quadratus ex G: & talium 1. quadratus ex *E*H. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex *E*H, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut ſupra de numero *E*F, diximus, erit quadratus ex *G*, dimidium habens, par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter *A*C, lateri *A*B. Igitur incommenſurabilis longitudine.

a 20. ſext. & 11. octavi.

b 29. noni.

c 24. ſeptimi.

d 11. oct.



*A*liter. Sit ſi poteſt fieri, diameter *A*C, commenſurabilis longitudine lateri *A*B: habeantque *A*C, *A*B, proportionem, quam numeri *EF*, & G, qui minimi ſint in ſua proportione: atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex *A*C, duplum quadrati ex *A*B: ſit autem ut quadratum ex *A*C, ad quadratum ex AB ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex *G*, ut in priori demonſtratione diximus: erit quoque quadratus ex *EF*, duplus quadrati ex *G*. Si ergo *G*, eſt unitas, atque adeo & quadratus ex ea, unitas: erit quadratus ex *EF*, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, ut jam eſt demonſtratum, quadratus ex *EF*, duplus

duplus eſt quadratus ex G, metietur quadratus ex G, quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cum ergo & G, ſeipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum C: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

a 14. oct.

## SCHOLIVM.

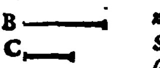
*Sed & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib 1. demonſtrata à nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.* b *ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate nempe 2. quadratus non ſit, erunt ſolum binumeri 4. 16. 64. quadrati reliqui vero 2. 8. 32 non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem. quam quadratus ad quadratum, (* c *alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diameto ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.*

b 2. noni. c 24. oct. d 9. decimi.

*Hoc etiam theorema aliter demonſtrabimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.*

*Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verũ quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinens: viſum eſt eam paucis explicare aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.*

*INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenietur & aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sunt enim rectæ A C, longitudine inter ſe incõmenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit B. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 40. lib. 6. vt A, ad C, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem*



milem

milem, ſimiliterq; poſitam ſuper B, & ſunt A, & C, longitudine incommenſurabiles; *a* erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper *A*, & B, incommenſurabiles.

a 10. *decimi.*

Rurſus *b* quoniam circuli, quorum diametri A B, proportionem habent, quam quadrata ex A, & B, deſcripta: Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterq; poſitæ proportionem habent, quam rectæ *A*, & C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. *c* Habebunt quoq; circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quã rectæ A, C. Sed rectæ A, C, incommenſurabiles ſunt longitudine. *d* Igitur & circuli diametrorum A, B, incommenſurabiles ſunt.

b 2. *duodecimi.*

c 11. *quinti*

d 10. *decimi.*

Iam vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata ejusdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ ſuper A, B, *e* habebunt pyramides atq; priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommenſurabiles ſint, ut modo eſt demonſtratum; *f* incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.

e 5. *6. vel 7. duodecimi.*

f 10. *decimi.*

Quod ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, B, *g* habebunt hujusmodi coni, & cylindri eandem proportionalem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, *h* Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inventæ ſunt igitur non ſolum lineæ & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſive ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

g 11. *duodecimi.*

h 10. *decimi.*

Eadem autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, *i* oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, k atque adeo & earundem pyramides, & priſmata; ac deniq; conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, ut perſpicuum eſt.

i 10. *decimi.*

k *5. 6. 7. & 11. duodecimi.*

FINIS ELEMENTI DECIMI.

# EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

## Et ſolidorum primum.

### DEFINITIONES.

### I.

**Solidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.**

POſtquam Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, uſurpavit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commenſurabilium, atq; incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſſime in lib. 10. deinde expoſuit, ut conſtructio, atq; natura quinq; corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris nimirum in 13. 14. & 15. ſubtiliſſime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci. Nunc tandem aggreditur in hoc lib. 11. eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſive ſolida conſiderat, proprioq; vocabulo Stereometria eſt appellata.

Explicat autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum ſive corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem ita tres dimenſiones poſſideat, unam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſive corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adijcit, ſuperficies vocatur, ut in primo libro diximus.

Porro

Porro quemadmodum Mathematicis, ut rectè intelligamus lineam, percipiunt, ut imaginemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hæc enim deſcribit veſtigium quoddam lōgum tantum, hoc eſt, lineam, præterea quod punctum omnis eſt magnitudinis expers; ut autem percipiamus ſuperficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transverſum moveri; hæc enim deſcribit veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidē propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum qui in transverſum eſt factus: carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoq;, ut nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditam, conſulunt, ut concipiamus ſuperficiem aliquã æqualiter elevari, ſive in transverſum moveri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum atq; profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem quæ longa & lata exiſtit: profundum vero ſeu craſſum, propter elevationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſive corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta à linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſſignari, ut perſpicue in commentariis, qui in ſphæram Ioannis de Sacro Boſco, conſcripſimus, à nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

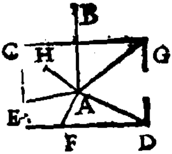
## II.

### Solidi autem extremum, eſt ſuperficies.

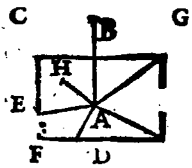
Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſive corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

## III.

### Linea recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

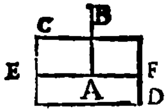


Vt linea recta A B, plano D, inſiſtens, ita ut B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, cum demum dicetur recta ſeu perpendicularis ad planum C D, cum rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut A B, æqualiter inſiſtat plano C D, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cum angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque



deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Et propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD, itaq; quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, qui ipſam tangunt, rectos angulos conficere.

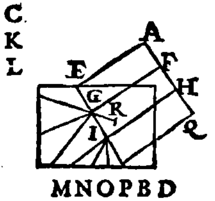
Vt autem recta quæpiam plano cuicunq; inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis; ipſamq; tangentibus, ſatis eſt, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoq; angulos efficere, ut perſpicuum fiet ex propoſ. 4. hujus lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia ſi duæ lineæ componant unam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, inſiſtat plano CD, efficiatque rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam unam lineam componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere; atq; idcirco non eſſe rectam ad planum CD. Hoc autem perſpicuum eſt, cum AB, circa EF, veluti axem, circumverti queat ita ut punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihil minus tamen ipſa cum EF, ſemper eoſdem rectos angulos & æquales conficiat. Quod ſi eadnm AB, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt AG, AD, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. hujus lib.



## IV.

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

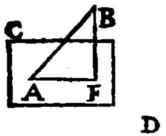
Inſiſtat planum AB, plano CD, ita ut linea AQ. ſit in ſubli-



mi, hoc eſt, extra planum ſubjectum CD, ut EB, in ipſo eodem plano. Sit autem horum planorum communis ſectio EB, quæ ut demonſtrabitur propoſ. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I, ex ipſis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG*HI*. ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, *G M*; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A*B*, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient utrobiq; à lineis FG, HI, anguli æquales Quare planum AB, æquabiliter plano CD; inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planũ aliud, concedendum quoque erit lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem ductas rectas eſſe ad reliquum planum.

## V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſiæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea & adiuncta comprehenſus.



Inſiſtat recta A*B*, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita ut punctum *B*, ſit extra planum in ſublimi, punctũ vero A, in plano. Deinde ex *B*, termino ſublimi rectæ A*B*, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritq; neceſſario angulus *B* A E, acutus [a] cũ in triangulo A*B*E, duo anguli *B*AE, *BE*A, duobus ſint rectis minores; & angulus *BE*A, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ

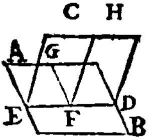
[a] 17 *primi*

AB, ad dictum planum CD; Ita ut tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.

## VI.

Plani ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

Plano namque AB, inſiſtat planum CD, ita ut pars ad C, ſit in ſublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipſo plano AB; ſitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum ſectio ſit DE. Si igitur ad DE, communem ſectionem ex ejus puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita ut tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.



Interdum Geometræ angulum CFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, ſive is acutus ſit, ſive rectus obtuſuſve: quanquam proprie ſolum angulus acutus inclinationem unius plani ad alterum oſtendat, ut Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem elevationem unius plani ſupra aliud quam inclinationem unius ad alterum; obtuſus vero receſſum quodammodo unius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu elevationem unius plani ſupra alterum, generaliter dici conſuevit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectus lineis, quæ in utroque plano ad aliquod unum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cujuſmodi eſt angulus GFH, ſive is rectus ſit, ſive acutus, ſive obtuſus.

## VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

Non obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis receſſerit.

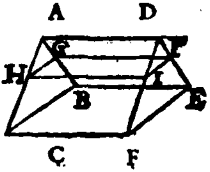
## VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

Intel-

Intellige, in quamcunq; partem, etiam infinite, producantur: hoc eſt, ſive ad dextram, ſive ad ſiniſtram: & ſive ſurſum, ſive deorſum, &c Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad ſiniſtram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cujus faſtigium intelligatur abſciſſum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dextram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

*Sit enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cujus Baſis B C F E, auferaturque faſtigium ACHDKI. Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana G B E K, H C F I, non convenire inter ſe, ſi ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F; producantur nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes G H, K I, conveniant in faſtigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt ut in nullam partem producta inter ſe conveniant. Sicut autem lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtrā, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum atq; deorſum. Itaq; duo plana quæcunq; vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conveniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallela, neq; unquam conveniunt, ſi videlicet in diverſis ſint planis & in tranſverſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 3. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano; Hic autem ſimpliciter dicitur, quæ nunquam conveniunt.



## IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

Potuiſſet Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe judicavit ut brevitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

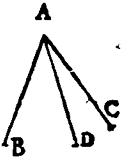
## X.

**Æquales, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.**

Quod ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia, ex præcedenti definitione circumſcribantur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur ejusmodi figuræ ſolidæ non ſolùm ſimiles, verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo hujusmodi ſolida neutrum alterum excedet, propter æqualitatem ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus, ex eorundem vero æqualitate laterum proportionalium æqualitas, ut in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtravimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent: ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

## XI.

Solidus angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.



Duæ lineæ in eodẽ exiſtentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt efficiunt angulum planum, ut lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſive corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adjungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes nõ debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt extra planum, in quo ſunt AB, AC, jam non componetur angulus planis totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A. tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui, ut mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idẽ dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.

## ALITER.

Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

Hæc

Hæc definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. cum enim ſaltem tres lineæ in eodem nō exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim *BAD*, in plano eſt, in quo rectæ *AB*, AD, & angulus *DAC*, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CA*B*, in plano, in quo rectæ AC, A*B*, atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiam ſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

Ex his vero perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continētur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

## XII.

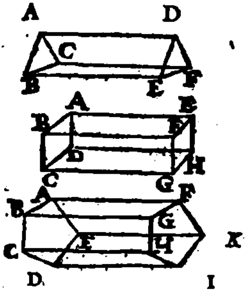
Pyramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.

VIDELICET figuræ ſolidæ à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtitutæ appellantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana quibus Pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad vnum pūctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum. Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin triangula ſunt ABD, ACD, BCD, Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: pẽtagonæ deniq; ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

## XIIII.

**Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.**

Figuræ ſcilicet ſolidæ quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia & parallela ſunt triangula ABC, DEF, vel quadrangula ABCD, EFGH; vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. parallelogramma vero ACFD, ABED, CBGF, vel ABFE, ADHE, CDHG, CBGF, vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG, dicũtur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit quam columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes appoſitæ ſunt æquales ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.



*Ex his manifeſtum eſt,* quantum hallucinentur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana adverſa parallela æqualia ſimiliaque triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, *definitio autem tradita infinita alia* genera priſmatis amplectatur, vt conſtat; præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib. & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpſerunt autem fortaſſe hi auctores occaſionem errandi quod Euclides & in prop. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Eu-

Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide; fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Imo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eandem cum illa baſin habentis; altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidem, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

## XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli ſphæra inveniri poterit hoc etiam modo.

Sphæra eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

Cicero in libro de Vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὴς Græci voçant, cuius omnis extremitas paribus à medio radijs attingitur.

## XV.

Axis autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

## XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

## XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

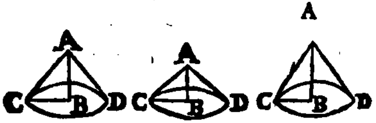
Hæ tres definitiones non egent expoſitione, dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrũ ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

## XVIII.

Conus eſt: quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circum aſſumpta figura.

Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur. Orthogonius erit conus; Si vero minor, Amblygonius. Si vero maior, Oxygonius.

Vt ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ cõtinetur duabus ſuperficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit: & curua alia eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



Quod ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videl. angulus prope verticẽ A, rectus eſt. Cum enim latera

AB,

AB, BC, ponãtur æqualia, [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus eſt, erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcẽs latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cũ hi duo æquipolleãt vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rect⁹, erit BAC, ſemirecto maior. Similiter BAD, maior erit ſemirecto: atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quieſcens latus AB, maius fuerit circumducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum enim latus AB, maius ſit latere BC, [c] erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA ſemirecto maior, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

[a] 5. *primi.*

[b] 18. *primi.*

[c] 18. *primi.*

## XIX.

Axis autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

Vt in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens *AB.*

## XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

Nimirum circulus, qui deſcribitur ab altero latere rectum angulum, quale eſt BC, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

Quoniam vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin. Non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt: placuit ex Appollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto; concto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſq; ad eum locum redeat, à quo cæpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraq; in infinitũ augetur, nimirũ recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

Verticem ipſius manens punctum.

Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

Verticem coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

Axem, rectam lineam, quæ à vertice circuli centrum producitur.

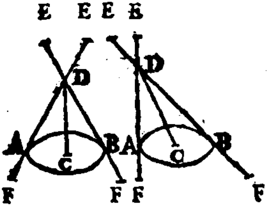
Baſim, circulum ipſum.

Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

Hæc autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

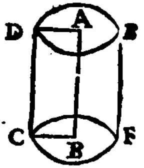
Sit circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D, iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad pũcta EF. Si igitur recta linea DB, feratur eouſque circuli AB, circumferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cæpit moueri: deſcribit ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea *DB*, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D, Axem rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam DB, ſola deſcribit. Coni verticem punctum



ctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum, quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis. Rectum vocat conum; Sin minus Scalenum.

### XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.



Veluti ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integrum expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque connexa, quã latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

### XXII.

Axis autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

Nempe recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

### XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur deſcripti.

Quales ſunt circuli à lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti.

Euclides porro ſolum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus eſt ad vtramque baſim, atque de hoc ſolum in lib. 12. diſputaturus. Cum igitur nos in eadem fere theoremata, ex aliis Geometris ſimus propoſituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonſtrauit, viſũ eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum vniuerſe, vt complectitur tam rectum quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.

Si duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſe se æquidiſtantes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferatur recta linea diametrorum terminos

ex ca-ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur: quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

Cylindrus eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

Cylindri baſes ſunt circuli ipſi.

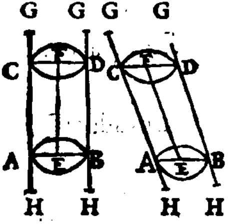
Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

Latus autem cylindri, linea quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent,

Sint duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra EF, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD; Iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorum ſemper æquidiſtantes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur, vnde moueri cœperunt, deſcribetur à linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum, producitur. Cylindrum vero appellat figuram AB, DC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD, Axem rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

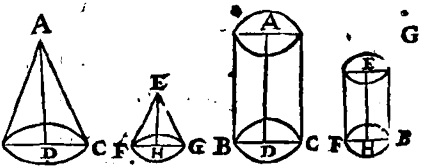


## XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

Recte

Recte Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autem Axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG, ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diametri baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe, quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proporionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BA, ad FG; Sit autem vt BC, ad, FG, *a* ita dimidia BD ad dimidiam FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HE. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt:, Triangula quidem, *b* propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, *c* ideoque latera omnia circa angulos æquales habẽt proportionalia atq; adeo inter ſe ſimilia exiſtũt: Rectangula vero, *d* eo quod reliqua duo latera, duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



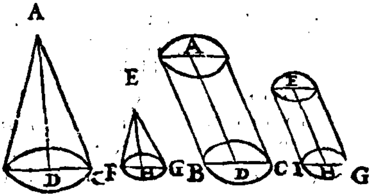
a 15. *quinti.*

b 6. *ſexti.*

c 5. *ſexti.*

d 34. *primi.*

Quod ſi coni vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG, ſimiliter & in cylindris



Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris vt AD, ad EH, ita BC. ad FG, extiterintque anguli inclinationũ ADB, FHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum couerſiones conos, & cylindros efficerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, *licet non ſint recti.*

## XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

## XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

## XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

## XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris & æquiangulis contenta.

## XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hæc ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymeo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia à Philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat, vt in *ſphæra Ioannis à Sacro Boſco* latius explicauimus. Horum omnium conſtructio tradetur lib. 13. Cubi quidẽ prop. 15. Tetraedri vero prop. 13. Octaedri deinde prop. 14 Dodecaedri autẽ prop. 17 Iſcoſaedri deniq; prop. 16. Vbi planius perfectiuſq; definitiones horum corporũ intelligẽtur. In plano enim difficillimũ eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles,

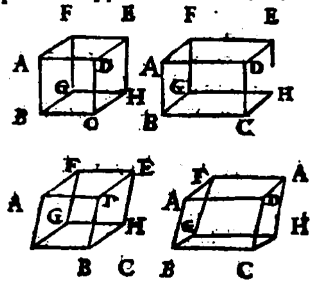
les,quibus ea quilibet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conficere.Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari poteſt vt demonſtrabimus ad finem lib.13.

Quoniam vero frequens hoc lib.11. fit mentio Parallelepipedi,& lib.15.agitur de mutua inſcriptione,circumſcriptioneque corporum regularium,neceſſarium eſſe duximus,tribus definitionibus explicare,quidnam ſit parallelepipedum,quidq; ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi,vel circa eandem deſcribi.

## XXX.

Parallelepipedũ eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris,quarum quæ ex aduerſo,parallelæ ſunt contenta.

Veluti ſolida figura cõprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF,FGHE,EDCH,HCBG, quarum oppoſitæ AC,FH, Item DF,CG; Item AG,DH, ſunt parallelæ; nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa,quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ.24.huius lib.



Sunt autem tot parallelepipedorum genera quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula,hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud,cubus reſpondebitque quadrato in planis figuris:ſi autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte longiora, quamuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedũ altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint,æquilatera quidem,ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedũ illud, Rhombus.Si denique ſex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia,neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula,& æquilatera vel rectangula tantum,vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogrãma, quæ ex aduerſo æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

## XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

## XXXII.

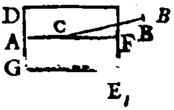
Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ circum quam deſcribitur.

Non eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ cum interdum figura exterior plures interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

Verum duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibuſque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

## 1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

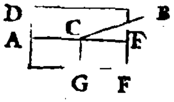


*Sit enim ſi fieri poteſt, recta linea* AB, *pars quidem* AC, *in ſubiecto plano* DE, *pars vero* CB, *in ſublimi, ita vt omnia puncta partis* AC, *in plano* DE, *iaceant puncta, vero omnia partis* CB, *ſupra planum* DE, *exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano* DE, *ipſi* AB, *recta linea continua quædam recta linea in directum poſita, nempe* CF. *Quamobrem duæ rectæ* AB, AF, *commune habent ſegmentum* AC. *Quod eſt abſurdum, vt in pronunciato* 10. *lib.* 1. *demonſtrauimus. Recta igitur linea pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Hæc eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directum & continuum poſitam. Qui enim concedit rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari

dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Veruntamen ei, qui ſic dubitat, reſpõdẽdum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ rectè, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F. erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam idipſum Geometrice, in plano videlicet DE. ipſi AC, dare poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineam conſtituat, quamuis quis dicat AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam. *a* Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpendicularis CG, & in eodem plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione, *b* erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.



a 11. *primi.*

b 14. *pri.*

Nunc ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam in vno exiſtere plano.

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plauo. Atque triangulum omnem in vno eſt plano.

*Rectæ lineæ AB, CD, ſe muto ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quidem nimirum EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra: Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra: quod fieri non poſſe, iam ſupra c demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe; pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel*

c 1. *vndecimi.*

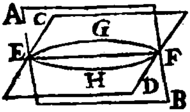
contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FH, KG, in vno concedatur eſſe plano pars vero EHK, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in ſublimi vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, a vt eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in vno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo. a 1. undecimi.

Quia vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt eius latera EF, EG; In quo autem ſunt rectæ EF, EG: b in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano in quo nimirum triangulum EFG, conſiſtere demonſtrauimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum. b 1. undecimi.

## iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

Secent ſe mutuo plana AB, CD, ſitque communis eorum ſectio EF. Dico EF, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdẽ habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 14. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat demonſtrandum.



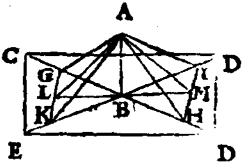
Aliter. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus,

**bus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.**

*Recta linea AB, inſiſtat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cum enim ſe mutuo ſecent in B; a erunt ipſa in vno plano, quod ſit CEDF.* a 2. vndecimi.
*Sumantur inter ſe æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK, ducanturque rectæ GK, IH, & in eodem plano per B, ducatur recta LM, ſecans rectos GK, IH, in pũctis L, & M. Dimittantur quoq; ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex conſtructione ſunt æqualia; b & anguli quoque ipſis contenti GBK. HBI, cum ſint* b 15 primi.
*ad verticem B, oppoſiti æquales. c erunt Baſes GK, HI, inter ſe, &* c 4. primi.
*anguli BGK, BIH, inter ſe quoque æquales.*



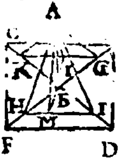
*Rurſus d cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti ſint* d 15. primi.
*æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex conſtructione. e Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.* e 26 primi.

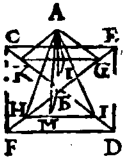
*Praterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex conſtructione; & anguli ipſis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypotheſi, f erunt & baſes* f 4 primi.
*AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt recta linea AI, AK.*

*Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triãguli AKG æqualia ſũt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus demõſtratis; g erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehenſi æquales.* g 8. pri.

*Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI, IM, trianguli AIM: & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonſtrauimus; h erunt quoque baſes* h 4 primi.
*AL, AM, æquales.*

*Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB. BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demonſtratis: i erunt quoque anguli ABL,* i 8. primi.
*ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cum ſint deinceps, recti erunt ex defin. 10 lib. 1 Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademque*





*ratione oſtendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter puncta, GI, & KH, ducta ſint, dummodo rectæ GI, KH, iungãtur: vel certæ literæ diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ, & tamen LM, non ducitur à ſiniſtra in dextram, vt in priori figura, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CE, DF, quod per rectas CE, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

v. Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

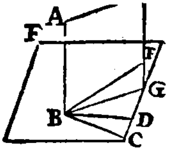
a 2. *vndecimi.*

b 2. *vndecimi.*

c 3. *vndecimi.*

d 4. *vndecimi.*

*Inſiſtat recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi eorum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano eſſe.* a *Cum enim qualibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint BC, BD, in plano FC; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi.* b *Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B, ſint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt.* c *Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD;* d *erit propterea & plano FC, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit recta BG, quæ ipſam in B, tangit ex defin. 3. huius lib. Quare rectanguli ABE, ABG, exiſtentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum Duabus igitur rectis BG, BD, in vno plano FC, exiſtentibus, non erit BE in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.*

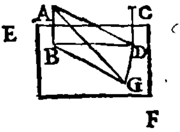


## THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj. Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

*Sint*

*Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex conſtructione; & anguli quoq; ipſis contenti*

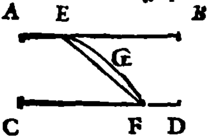


*ABD, GDB; æquales, nempe recti; a erunt baſes æquales AD, GB.* a 4. primi.
*Rurſus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſunt lateribus* b 8. primi.
*GD, DA, trianguli GDA. Eſt autem & baſis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoq; GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA,* c 3. undecimi.
*DC, in uno erunt plano, hoc eſt, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: d Eſt autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta* d 2. undecimi.
*igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti; e erunt rectæ AB, CD, parallelæ.* e 20. primi
*Si duæ itaq; rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

*In parallelis AB, CD, ſumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum ſunt parallelæ AB, CE. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra, ſecet jam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E, & F, ſitque communis ſectio horum*



*planorum EGF, f quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF,* f 3. undecimi.
*cum habeant eosdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent, quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque ſumpta ſint qualibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

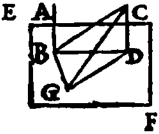
Hæc eadem propoſito vera eſt, etiamſi duæ rectæ A B, C D, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, ut manifeſtum eſt ex demonſtratione.

viii. 
## THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

*Sint parallelæ rectæ A B, C D: ſitque C D, plano E F, ad angulos rectes. Dico & A B, eidem plano E F, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim BD, in plano, E F, erit per defin. 3. huius lib. angulus*

a 29 primi

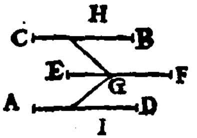


*CDB, rectus: a Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano E F, ducatur B G, perpendicularis ad BD: ponanturq; æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli C D B, æqualia ſunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex conſtructione; & anguli* b 4. primi. *quoque ipſis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti: b Erunt baſes CB, GD, æquales; Rurſus quia latera C D, D G, trianguli CDG, æqualia ſunt lateribus GB, B C, trianguli GBC, & baſis eſt communis CH:* c 8. primi. *c Erunt anguli C D G, G B C, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem C D G, rectus ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta G B, duabus rectis BD, BC, ſe mutuo ſecantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, ſecarent ſeſe in B, ob angulum CBD,) ad rectos angulos exiſtent:* d 4. undecimi. *d ac proinde ad rectos angulos erit plano per B D, B C, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta AB: e propterea quod rectæ BD, BC, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ AB, CD: cum puncta B, C, D, exiſtant in parallelis A B, C D.* e 7. undecimi. *Igitur & G B, recta rectæ BA ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius. lib. Quare cum AB, recta ſit ad rectas BG, BD;* f 4. undecimi. *f erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc eſt, ad planum E F. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat oſtendendum.*

ix. 
## THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

*Sint rectæ AB, C D, ipſi E F, parallelæ; non ſint autem in eodem*



*in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque eſſe. Nam à quolibet puncto G, recta EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI. in plano parallelarum C, D, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangentes mutuo in G;* a *erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF. & EF, ſit recta ad planum per GH, GI, ductum;* b *erit quoque AB, ad idem planum recta Similiter cum ſint parallelæ CD, EF. ſit autem EF, recta ad planum per CH, GI, ductum* c *erit etiam CD, recta ad idem planum;* d *Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.*

a 4. undecimi.
b 8. undecimi.
c 8. undecimi.
d 8. undecimi.

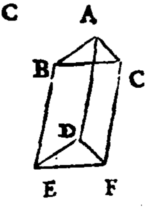
## SCHOLIVM.

Data opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nam ſi forent in eodem plano cum ipſa EF, eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Supervacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ex ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, nõ autem in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent.

*Sint rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales;* e *erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidẽ AD,* f *erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ, & æquales;* g *Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE. DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, ut modo demonſtravimus;* h *Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.*



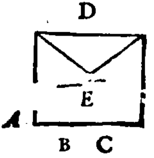
e 33. primi.
f 9. undecimi.
g 33. primi
h 8. primi.

SCHO-

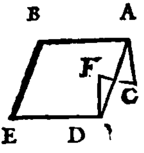
## SCHOLIVM.

Concluſio hujus theorematis vera etiam eſt, quando priores duę rectæ in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodem plano, ſitque AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducanturque rectæ BC, EF, quæ aut in una recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in una recta BF. Quoniam igitur parallelæ ſunt
a 29. primi AB, DE, a æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC,
b 32. primi æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

Non ſint jam BC, EF, in una recta linea conſtitutæ. Ductis re-
c 33. primi ctis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; c erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallela erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem
d 30. primi AD, parallelæ exiſtentes & æquales, d inter ſe
e 33. primi parallelæ erunt & æquales; e Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaq; cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF,
f 8. primi. & baſis BC, baſi EF, f erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.



Cæterum ut concluſio hujus theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas (ſive omnes ſint in eodem plano ſive non) ut tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione ſe mutuo ſecent, ut ex prima & ultima figura apparet. Nam alias concluſio vera non erit.



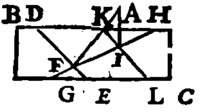
Sunt enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non ſunt æquales cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo evenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamvis AC, DF, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas conjungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non conjungunt ad eaſdem partes, ut vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio hujus theorematis locũ non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſervatur.

PROBL.

## PROBL. 1. PROPOS. 11. xj.

A dato puncto in ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

*Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubjectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta utcunque D E, a ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: & in plano B C, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, b ad quam ex A, perpendicularis dimittatar AI. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C. c Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela KL, cum D F, ad d rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione, e ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, f erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. g Quoniam vero AI, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitque rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atque adeo A I, ad rectos angulos erit duabus KI, I F. h Igitur A I, ad planum BC, recta erit. A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendũ erat.*



a 12. primi.
b 11. primi.
c 12. primi.
d 31. primi.
e 4. undecimi.
f 8. undecimi.
g 12. undecimi.
h 4. undecimi.

### SCHOLIUM.

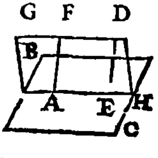
Quod ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita ut eadem ſit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis, i erit ipſa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cum perpendicularis ſit ad utramque DE, GH.

i 4. undecimi.

## PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, rectos angulos rectam lineam excitare.

*Sit à dato puncto A, in plano B C. ducenda perpendicularis ad datum planum BC. k Ex quovis puncto D, in ſublimi dimittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, l ducatur per A, ipſi DE, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam eſſe ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ ſint; & DE, recta ad planum BG, ex conſtructione:* m *erit quoque A F, ad idem planum B C, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.*



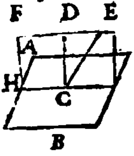
k 11. undecimi.
l 31. primi.
m 8. undecimi.

THEOR.

xiij.

## THEOR. 11. PROPOS. 23.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



*Sit datum planum AB. Dico à dato tibi puncto C, ad eadem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE,* a *qua in uno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, recta ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum eſt, dua recta linea ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. Quod erat demonſtrandum.*

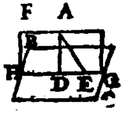
a 2. undecimi.

*Aliter. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, dua perpendiculares CD, CE. Cum igitur dua DC, EC, recta ſint ad idem planum AB;* b *erunt ipſa inter ſe parallela, cum tamen conveniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.*

b 6. undecimi.

### SCHOLIVM.

Eodem modo à puncto in ſublimi ad ſubjectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubjectum planum *B*C, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, *c* quæ in uno plano ſunt, planum FG, ſecans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum AC, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo AD, E. Quod eſt abſurdum: *d* cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quovis aſſumpti.



c 2. undecimi.

d 17. primi

Aliter. Si AD, AE rectæ ſunt ad planum *B*C, ipſæ *e* erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conveniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

e 6. undecimi.

## THEOR. 12. PROPOS. 24.

xiv.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

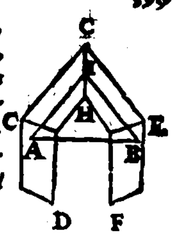
*Sit recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe convenient. Conveniant ad partes C, E,* f *& faciant communem ſectionem rectam lineam GH; In qua ſumpto puncto utcunque I, ducantur recta IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia*

f 3. undecimi.

igitur

*Igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI.* a *Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter ſe conveniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.*

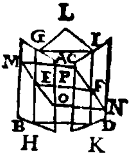
a 17. primi



## SCHOLIVM.

Facile etiam demonſtrari poterit converſum hujus, Videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.



Sint duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta ſit linea erit recta EF. Dico EF, rectã quoq; eſſe ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens faciatq; communes ſectiones cũ dictis planis rectas GH, IK, eruntq; anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. hujus lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quæ rectæ FG, FI, ad partes G, I, in plano GK, convenient, nimirum in puncto L; atq; adeo & plana AB, CD, in quibus exiſtunt, ad eaſdem partes convenient ad punctum L; b cum tota recta HGL, ſit in uno plano, nempe in AB, producto: Itẽ tota recta KIL, in uno quoq; plano, nimirum in CD, protracto. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo ſunt anguli IFE, KFE.) Eodem modo ſi aliud planum, videlicet MN, eadem plana ſecet per EF, faciens alias rectás communes cũ ipſis ſectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, ſit recta ad duas rectas IK, PN, recta c quoque erit EF, ad CD, per ipſas ductum. Quod eſt propoſitum.

b 1. undecimi.

c 4. undecimi.

## THEOR. 13. PROPOS. 15.

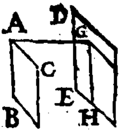
xv.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana.

*Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, ſe tangentibus in D, exiſtentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipſas ducta, eſſe parallela. Ex A,* d *enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G.* e *Deinde in*

d 11. undecimi.

*plano* e 31. primi.



a 9. undecimi.
b 29. primi

*plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallel. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi DE;* a *erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ;* b *Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG, ſimili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC,* c *recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione* d *Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.*

c 4. undecimi.
d 14. undecimi.

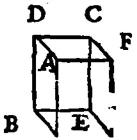
## SCHOLIVM.

Quod ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF. non ſunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponātur parallelæ rectis AB, AC, ita ut A G, ad planum HI, per GH, GI, ductū perpendicularis, cadat in G, oſtendemus, ut prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

Datum planum ſit AB, punctumq; extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utcunq; duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, e agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, paralellum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusque in alio cum illis plano parallelæ ſint, f parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.

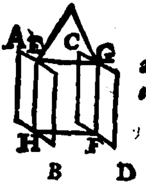


e 31. primi.
f 15. undecimi.

## xvj. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

*SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GE, eſſe lineam*



*neas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe convenient, cum ſint in plano EF, ſecante. Conveniant igitur in puncto I, a Quia ergo tota recta HEI, in uno eſt plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoq; eſt plano, videlicet in CD, producto: convenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cùm ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur &c. Quod erat demonſtrandum.*

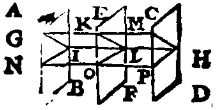
a 21. *undecimi.*

## SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione poteſt converti. Quamvis enim communes ſectiones planorum parallelorum factæ ab alio plano ſecante ſint parallelæ, ut hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantùm, ſunt parallela, alia verò in aliquam partem producta conveniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theroemati 30. lib. 1.

QVÆ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

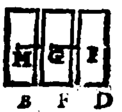


SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſintque communes corũ ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſintque cõmunes eorum ſectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, ut duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuo ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, *b* erunt communes ſectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, *c* atque adeo parallelæ erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque cum IG, IN, ſe mutuo tangentes in I, parallelæ ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibusque in alio plano: *d* erunt plana AB, CD, per ipſas ducta parallela. Quod eſt propoſitum.

b 16. *undecimi.*

c 9. *undecimi.*

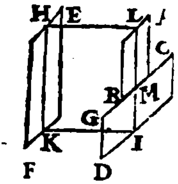
d 15. *undecimi.*



ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in utramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. demonſtravimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; *a* parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.

a *14. undecimi.*

QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamē inter ſe, ſed conveniant, tunc idem efficiunt planū; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conveniant, unā rectā conſtituunt lineam, veluti ad prop. 30. lib. 1. demōſtravimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conveniantq; producta ſecundū rectam CG. Dico plana AB, CD, unum planum conſtituere. Secet enim planū quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF, *b* erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cum rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantq; in eodem plano ſecante HI, & conveniant in M: ipſæ erunt in rectum & continuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, unum planum efficient; *c* propterea quod recta LI, in uno jaceat plano. Quod eſt propoſitum.



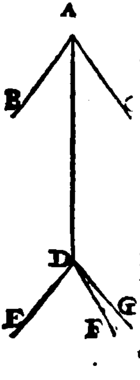
b *16. undecimi.*

c *1. undecimi.*

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certè ſi producta conveniant, unū planū conficient.

PORRO converſum quoq; propoſ. 10. facile demonſtrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea una unius anguli lineæ uni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallela ducti.



IN planis enim parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela; & AC, DF, ſint ad eaſdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum tranſire etiam per rectā DF: ita ut AC, DF, ſint communes ſectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. *d* Hinc enim efficitur, ſectiones AC, DF, parallelas eſſe. quod eſt propoſitum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis ſectiones AC, DF, faciat ſectiones AC, DG, *e* quæ parallelæ erunt. *f* Igitur angulus FDG, angulo BAC, hoc eſt, angulo EDF, æqualis erit. quod eſt abſurdum, cum unus ſit totū, & alter pars.

d *16. undecimi.*

e *16. undecimi.*

f *10. undecimi.*

THEO-

## THEOR. 15. PROPOS. 17. xvii.

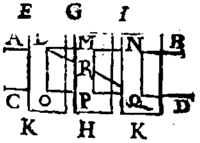
SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.

*RECTÆ lineæ AB, CD, (ſive eæ parallelæ ſint, ut in figura, ſive non, exiſtentes tamen in eodem plano: ſive in tranſverſum poſitæ, in diverſis exiſtentes planis (ſecentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmenta earum inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita eſſe OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & conjungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, a Eritque triangulum LNQ, in uno plano: ſimiliter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, ſecantur plano trianguli LNQ, b erunt communes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. c Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 2. undecimi.

b 16. undecimi.

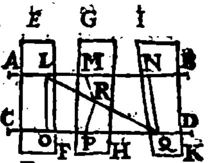
c 2. ſexti.

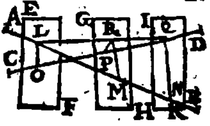


## SCHOLIVM.

QVOD, ſi datæ rectæ AB, CD, ſint in uno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, unam lineam rectam; ut in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum ſecabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, *d* quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumque R, in recta MP, exiſtet, cum ſit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano exiſtentia, ut in ſcholio propoſ. 7. hujus lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum ſectione. Quare RM, RP, unam rectam lineam MP, conſtituent, nimirum communem ſectionem planorum LOQN, GH.

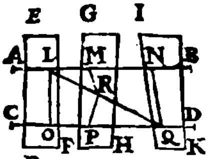
*d 16. undecimi.*

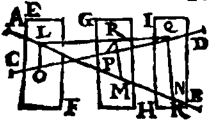




Si vero duæ rectæ AB, CD, non ſint in eodem plano, non efficient RM, RP, unam rectam lineam, ut in hiſce duabus figuris apparet; quia *e* cum triangulum LOQ, ſit in uno plano, & triangulum LNQ, in uno etiam plano, quod ab illo diverſum eſt, (Si namque duo illa

*e 2. undecimi.*





triangula in uno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt contra hypotheſin.) erunt rectæ R M, R P, in diverſis illis planis triangulorum: ac proinde unam rectam non conſtituent; *a* alias in uno eſſent plano quod eſt abſurdum.

a 1. *undecimi.*

EADEM hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes, non ſint parallelæ, ut in eiſdem hiſce duabus figuris apparet: ſed tunc R *M* P, ſemper erit una linea recta, ut ad initium hujus ſcholii demonſtratum eſt, quando AB, CD, in uno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.

NON ſecus ſi plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, ſecent, erunt earum partes proportionales, & cõmunes ſectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ. LNQ, rectas lineas conſtituent, ſi rectæ AB, CD, in uno ſint plano, non rectas autem, ſi non ſint in uno plano: quemadmodum de rectis MR. RP, dictũ eſt.

EX demonſtratione porro perſpicuum eſt, ſi quotlibet lineæ in uno plano exiſtentes ſecentur quotuis lineis parallelis, ſegmenta illarum linearum inter parallelas eſſe proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in poſtrema figura quomodocunq; in uno plano diſpoſitæ, quæ ſecentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad interſectionem rectarum C*D*, RM, pertineat.) QN. Dico ſegmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam ſegmenta OP, PQ. Iuncta enim recta LQ. *b* erit ut LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum L O Q, quam L M, ad M N, ob triangulum LNQ. Igitur erit, ut OP, ad PQ. ita L M, ad M N. Eademq; ratio eſt de pluribus. Vt autem rectè demonſtratio procedat in quibusvis duabus rectis, ducenda eſt recta à primo puncto ſectionis unius rectæ ad ultimum ſectionis punctum alterius. Ita vides in duabus A*B*, CD, ductam eſſe rectam ex L, primo puncto rectæ A *B*, ad Q, ultimum punctum rectæ C D. Idemq; ſervatum eſt in figuris hujus propoſ. *17*.

b *2. ſexti.*

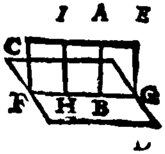
XVIII.

## THEOR 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

*SIT recta* A B, *ad planum* C D, *recta. Dico omnia plana per rectam* A*B, ducta, eſſe recta ad idem planum*, C D. *Ductum enim ſit per* A B, *planum* E F, *ſecans planum* C D, *per rectam lineam* F G. *Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta FG*, c *ducatur in pla-*

c 34. *primi*

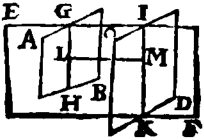


*in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD;* a *erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FC, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius lib. Similiq; argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.* a 8. *undecimi.*

## SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi unum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum & idem rectum.



SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit; *b* eademque perpendicularis erit ad IK, ac propterea ex defin. 4. hujus lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad utrumq; planum AB, CD, recta eſt, *c* ipſa parallela erunt. b 19. *primi* c 14. *undecimi.*

SED jam parallela ſint plana AB, CD: ſitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectam eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; *d* quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpẽdiculari LM: erit hæc ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. hujus lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. *e* Quare planum EF, per rectam LM, ductũ ad planum CD, erit rectum: ideoq; viciſſim planum CD; ad planum EF, erit quoque rectum. Quod eſt propoſitum. d 17. *undecimi.* e 18. *undecimi.*

HINC etiam problema hoc abſoluetur.

PER rectam in plano quovis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

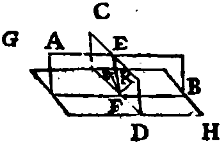
SIT data recta FG, in plano CD, ut in figura hujus propoſ. opor-

teatq; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum ſit·
a 12. undecimi. Ex quovis puncto B, rectæ FG, a erigatur ad planum CD, per-
pendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF. b quod
b 18. undecimi. ad planum CD, rectum erit. Quod eſt propoſitum.

XIX.

## THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illornm ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.



*SINT duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoque eſſe ad idem planum GH Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad BF,*
c 4. undecimi. *DF, c recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planũ GH, recta ex defin. 4. hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturq; in plano CD, ad planum GH, recto. Si deniq; EF, ad neutram BF, DF, eſſe cre-*
d 11. primi *datur recta; d ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI: Item in plano CD, ad DF, communem ejus ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoq; perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4, defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendi-*
e 13. undecimi. *culares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra e demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.*

XX.

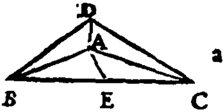
## THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet utut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR *angulus ſolidus ad A, tribus angulis*

*planis*

planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo eſſe majores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuum eſt, quoſuis duos majores eſſe reliquo: ſi vero duo tantum ſint æquales, & tertius utrovis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo majores eſſe. Quod ſi unus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſive æquales, ſive inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto a fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; conjunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem æquales; b erunt baſes BC, BE, æquales. c Quia vero latera DB, DC, majora ſunt latere BD; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE Cum igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC: & baſis CD, major baſe CE: d erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc eſt, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 23. primi

b 4. primi.

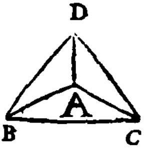
c 20. primi

d 25. primi

## THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

OMNIS ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus ſolidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis continetur, nempe B, ſub CBA, ABD, DBC, At C, ſub BCA, ACD DCB: D, vero ſub CDA, ADB, BDC. e Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores ſunt angulo CBD: ſimiliterq; duo anguli BCA, ACD, majores angulo BCD: & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt ſex anguli CBA ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. f Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus



e 20. undecimi.

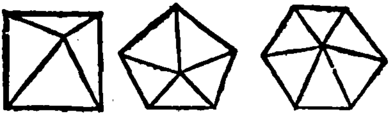
f 22 primi

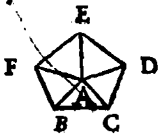
*rectis erunt majores. Cùm igitur ſex illi, una cum tribus ad A. æquales ſint ſex rectis propter triangula tria* BAC, CAD, DAB; a 32.primi. a *(ſunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales) ſi auferãtur ſex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A. ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli conſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis rectæ ſubtēdãtur ordine in eodē plano exiſtētes; cõſtituetur pyramis, cujus vertex, datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorúmve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus cõprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horũ triangulorum, (b 32.primi *b* cùm anguli cujuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis, quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtravimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorũ ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum propè baſim majores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet c 20.*undecimi.* tribus planis angulis continetur, *c* & horum quilibet duo reliquo, *nempe eo, qui in baſi, ſint majores*) ſuperabunt omnes anguli horũ triangulorum angulos eorundem prope baſin, minoribus quã quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.





VERVM ut res melius percipiatur, ſit exempli gratia angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus ſubtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in uno, eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, ſecat in punctis B, C, D, E, F, ita ut conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonã, & in ambitu quinq; triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt d 32.*primi* angulũ ſolidum A. *d* Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur, a erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis: quãdoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictũ eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in alijs omnibus angulis ſolidis.

a 22. undecimi.

## THEOR. 20. PROPOS. 22.

xxij.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales, fieri poteſt vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

*SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus* AD, AE, BF, BG, CH, CI, *hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores.* Dico *ex tribus rectis* DE, FC, HI, *quæ rectas illas æquales cõnectũt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum* DE, FG, HI, *quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito,* b *ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ* DE, FG, *maiores ſint quam HI, ita oſtendetur.* c Fiat *angulus* DAK, *angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes* AD, *ita vt fiat totus quidam angulus* EAK, *ex duobus* EAD, DAK, *compoſitus: quod quidem continget, quando duo anguli* DAE, *&* B, *duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque recta* KD, KE. *Quoniam igitur latera AK,* AD, *trianguli A*KD, *æqualia ſunt lateribus* BF. BG, *trianguli* BFG; *& anguli ipſis contenti* DAK, *&* B, *æquales;* d *erunt & baſes* KD, FG, *æquales. Rurſus quia latera* AK, AE, *trianguli A*KE, *æqualia ſunt lateribus*CH, CI, *& angulus* EAK, *maior angulo* C; *propterea quod duo anguli* DAE, *& B, maiores ponuntur angulo* C; e *erit & baſis* EK, *maior baſe HI:* f *Sunt autem rectæ* ED, DK, *maiores recta* EK *Igitur multo maiores erunt* ED, DK, *quam HI Cum ergo* DK, *oſtenſa ſit æqualis rectæ* EG; *erunt quoque* DE,

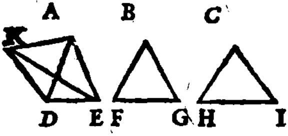
b 22. pri.

c 23. primi.

d 32. primi.

e 24. pri.

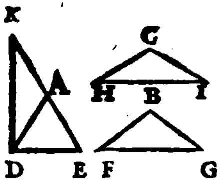
f 30. primi.



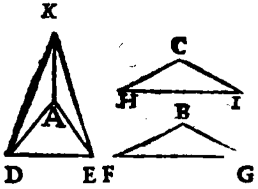
DE,

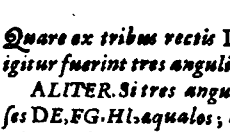
DE,FG. maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis a 4.pri. rurſum, & connectatur recta KD. a Erit b 20.pri. igitur, vt prius, DK, ipſi FG, æqualis. b Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE, & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, HI: c Hæ autem maiores ſunt, quam c 20.primi. HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

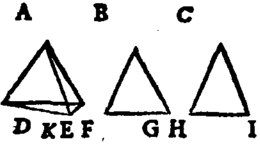


CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK: quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. d Erit igitur, d 4.primi. vt prius, KD, ipſi FG, æqualis e Quo- e 21.pri. niam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duab. CH, CI, ex hypotheſi & cõſtructione; erũt quoq; DE. DK, maiores f 20.primi. quam CH, CI: f Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG, erunt quoque DE, FG, maiores quam HI quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; item FG, g 22.pri. HI, maiores quam DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. g Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonſtrandum.





h 4.primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales: h erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. i 4.primi. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor: i erunt k 24. pri. quoque duæ illorum baſes æquales, k & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue



*ſiue inæquales;* l *erit quoque baſis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores eſſe recta DE.* a *Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, deſcripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis eſt angulo DAK, per conſtructionem: erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales;* b *erit baſis DK, baſi FG, æqualis. Rurſus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia ſunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, oſtenſus maior angulo KAE;* c *erit & baſis HI, maior baſe KE. Quare cum DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE:* d *Sed DK, KE, maiores ſunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod eſt propoſitum.*

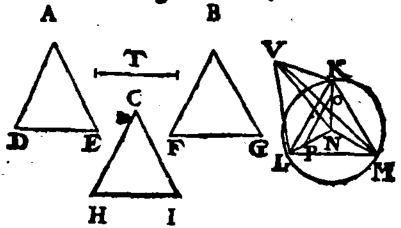
l 24. *pri.*
a 23. *pri.*
b 4. *primi.*
c 24. *primi.*
d 20. *primi.*

## THEOR. 3. PROPOS. 23.

xxiij.

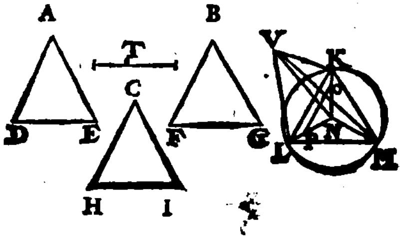
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; ſubtendanturq; baſes DE, FG, HI. e Fieri ergo poteſt, vt ex DE, FG, HI, triangulum conſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulũ KLM, ſitq; latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG, & latus KM, rectæ HI, æquale. f Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus cuius cen-



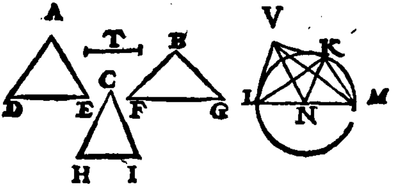
e 21. *vndecimi.*
f 5. *quarti.*

trum N,à quo ducantur rectæ NK,LN,NM.Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium,nempe AD, AE,&c. major qualibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrum N,intra triangulum KLM;quod quidem fiet,quando triangulum eſt oxygonium,vt ex coroll.propoſ.5.lib.4.conſtat. Si igitur AD, AE,maiores non credantur,quam NK,NL, erunt vel æquales,vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, trianguli NKL, & baſis DE,baſi KL,æqua-



a 8. pri. lis: a erit angulus A,angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C,angulo MNK,æqualis. Cum igitur tres anguli circa N,æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ.15. lib.1. erunt quoque tres anguli A,B,C,quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum,ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD,AE,ipſis NK,NL. Dico quod neque minores. Si enim minores ſint AD,AE,quam NK,NL,abſcindantur NO,NP, ipſis AD, AE,æquales,ducaturque recta OP. Quoniam igitur eſt vt NK,ad NO, ita NL,ad NP, cum & antecedentia inter ſe,& conſequentia ſint inter ſe æqualia: erunt latera NK,NL,trianguli NKL,ſecta pro-
b 2. ſexti. portionaliter: b ac proinde OP,ipſi KL, parallela erit. c Quare an-
c 29. pri. guli NOP,NPO,angulis NKL,NLK, æquales erunt, & triangulum
d 4. ſexti. NOP,triangulo NKL,æquiangulum. d Igitur erit vt NK, ad KL, ita
e 14. quinti. NO,ad OP. Eſt autem NK,maior quam NO. e Igitur & KL, hoc eſt,DE,quæ æqualis eſt ipſi KL,maior erit,quam OP. Quocirca cum latera AD,AE,trianguli ADE,ſint æqualia lateribus NO,NP, trian-
f 25. primi. guli NOP,& baſis DE,maior baſe OP, f erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C,angulo MNK, maior eſſe oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N,quatuor ſint rectis æquales, ex coroll propoſ. 15.lib. 1. erunt tres anguli A,B,C,maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt AD,AE, quam NK,NL; ſed neque æquales. Igitur maiores.

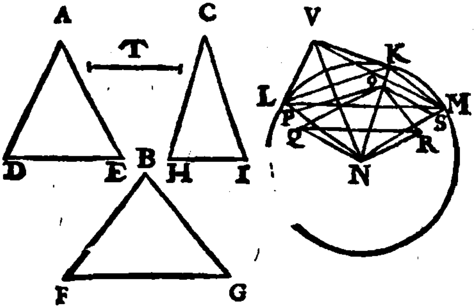
CADAT deinde centrum N, in latus LM; quod tum continget, quando triangulum KLM,angulum LKM,habuerit rectum,vt ex eodem coroll.propoſ.5.lib.4.manifeſtum eſt.Si igitur AD, AE, dicantur eſſe æquales ipſis NK,NL: erunt quoque BF, BG, æquales eiſ-



eiſdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM, æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Poſita autem fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoq; ſunt rectæ FG. *a* Sunt autem & maiores BF.BG, quam FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quam NK, NL: erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æquales ſit ipſi NM: minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, *b* cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL: ſed neque æquales: Igitur maiores.

a 20. primi.

b 20. primi.



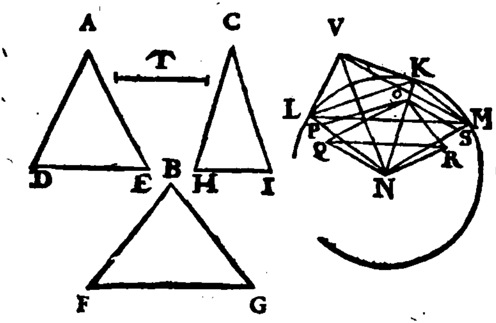
CADAT poſtremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto prop. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD.AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis: *d* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL: ſi abſcindantur NO, NP, ipſi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP: demonſtrabitur, vt in primo caſu angulus A, maior angulo ONP: & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM, *e* Fiat angulus ONQ, angulo A: & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, &

c 8. primi.

d 8. primi.

e 23. pri.

con-



connectantur OQ, OR, cadetq; OQ, infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferētia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta cum æquales ſint rectæ NO, NP, NQ. *a* Quare cum angu-
*a 29 primi.* lus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno: erit angulus
QON. minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angu-
lus NOR minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Ca-
det enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto an-
gulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli
NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE: Eſt autem &
*b 4 primi.* angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem: *b* erit OQ,
ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æ-
qualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM,
*c 24. prim.* æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR: & angulus LKM,
maior angulo QOR, vt oſtendimus: *c* erit baſis LM, hoc eſt, FG, ma-
ior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia
*d 25. pri.* ſunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR: & baſis FG, maior baſe QR:
*d* erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ,
angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angu-
lus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores po-
nuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B.
Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non
ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL, ſed neque æquales: Igi-
tur maiores.

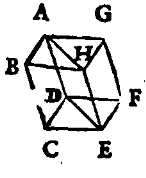
IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbi-
cũq; cētrũ N, exiſtat: poſſit recta AD, plus quã recta NK, quadra-
*e 12. vndecimi.* to lineæ T. per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ
AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. *e* Ex centro N excite-
tur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis,
connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniã igitur NV, recta eſt ad
planum circuli KLM, recta quoque eadem erit ex defin. 3. huius
*f 46. pri.* lib. ad rectas NK, NL, NM, *f* ac proinde quadratum rectæ VK, qua-
dratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum re-
ctæ AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum
KN, NV, æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac

propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, ęqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL: & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti: *a* erit baſis VK, æqualis a 24. pri. baſi VL: Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BC, CH, CL. Quamobrem cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia ſint lateribus AD. AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE: *b* erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus b 8. pri. demonſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C, Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

## THEOR. 21. PROPOS. 24. XXIV.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

*SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſa quælibet ſint parallela. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma ſimilia & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC: c Erunt* c 16. undecimi. *communes ſectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC: erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia Cum enim rectæ AB, BH,*



*parallelæ ſint rectis DC, CE, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis:* d 10. unde- *d erunt anguli ABH, DCE, æquales: eodemque argumento reliqui* cimi. *anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. e Quoniam vero AB, ipſi DC, in parallelogrammo* e 34. pri. *AD: & BH, ipſi CE, in parallelogrãmo BE, æqualis eſt: erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE: Ac propterea vt BH, ad HG: ita CE, ad EF, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales proportionalia: ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris AH, DE, f cum* f 34. pri. *latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC,*

CE, tri-

*CE, trianguli DCE; a & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt oſtenſum eſt; b erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter ſe. c Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter ſe æqualia. Similiter demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogramma oppoſita AC, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia & æqualia. Quod erat demonſtrandum.*

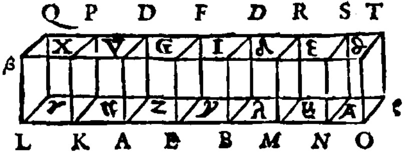
a 10. undecimi.
b 4. primi.
c 34. primi.

xxv.

## THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

*SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico vt eſt baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, ſumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AE: & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipſi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per ſcholium prop. 15 huius lib. Quoniam igitur ſolidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypotheſi, ipſum parallelepipedum erit ex definitione, d habebitque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. Eodē modo erūt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BNRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF, habebuntque plana oppoſita parallelogramma ſimilia, & æqualia. e Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX cum ſint ſuper æquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt: & ſimilia quoque, f cum anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & ſimilia, ſunt parollelogramma AY. KZ La. Cum igitur æqualia quoque ſint & ſimilia parallelogramma AD, KP, LQ. Erunt tria plana AG, AY, AD. ſolidi AE, FD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, ſolidi KLQP: g Sunt autē tria in vnoquoque ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur*

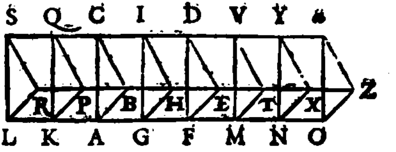


d 24. undecimi.
e 36. pri.
f 29. pri.
g 24. undecimi.

Igitur per deſin. 10. hujus lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BH, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG; (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoq; eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT; (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis;) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoq; ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis major eſt baſe, ſolidum quoq; ſolido majus eſt; & ſi minor, minus in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per deſin. 6. lib. 5. ut baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinem, ita ſolidum AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut eſt baſis DY, ad baſin CY, & ut baſis AY, ad baſin BY, & ut baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIUM.

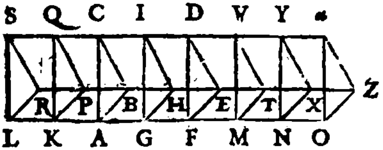
HÆC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur adverſis planis parallelo: erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cujus plana adverſa ſint triangula ABC, DEF, ſeceturque plano GHI, adverſis planis parallelo. Dico ut eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in utramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta utrinq; capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcunque rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZα; parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. hujus lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AL, a erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi ob parallelogrammum AD: igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH: b erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ; ob



a 16. un-
dec.

b 16. undec.

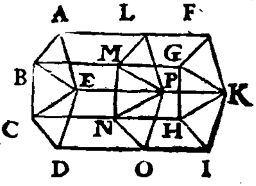
parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus GI, CH, trianguli
a 34. primi GHI; a cum AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale: b & anguli CAB,
b 10. undec. IGH, ſunt quoque æquales, eo quod rectæ CA, AB, parallelæ ſunt rectis IG, GH, & non in eodem plano; c Erunt triangula ABC,
c 4. primi. GHI, æqualia inter ſe, & æquiangula. d Quare latera circa æquales
d 4. ſex. angulos proportionalia habebunt: Atque idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, æqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHC, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia ſunt, & ſimilia; nec non AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. hujus lib. æqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG, & quam multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tam multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi OI, (multiplici eſt baſis FI, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) priſmati OZαIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod baſibus LI, OI, exiſtentibus æqualibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnibus planis priſmatis OZαIHG: Si autem baſis LI, major eſt baſe OI, priſma quoque priſmate majus eſt, & ſi minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. ut baſis AI, prima magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinem, ita priſma ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, ut eſt baſis AH, ad baſin FH, & ut baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.



SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cujus oppoſita plana ſit polygona, nempe pentagona, ſeceturque plano LMNOP. Dico rurſus ut eſt baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppoſita parallela reſolvantur in triangula, erit quoque priſma in totidem priſmata, quo-ta, quorum plana opposita ſunt triangula, reſolutum. Quare erit ut baſis BP, ad baſin MK, ita priſma ABEPML, ad priſma LMPKGF. per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit ut baſis CP, ad baſin NK, ita priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, & priſma CDEPNO, ad priſma NOPKHI, a Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita eſt recta EP, ad rectam PK, hoc eſt, ut CN, ad NH: & ut CN, ad NH, ita eſt CM, ad NG. Igitur priſmata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad priſmata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, ac proinde eandem inter ſe. b Vt autem unum ad unum, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit ut priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, ut baſis CM, ad baſin NG, ita priſma ABCDELMNOP, ex tribus compoſitum ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.

a 1. ſexti.

b 12. quinti.



POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtendi demonſtratione, qua uſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in utramque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia, c propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorum, d ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde ut prius oſtendetur priſmata ex una parte inter ſe æqualia, nec non & priſmata ex altera parte, &c.

c 16. undecimi.

d 10. undecimi.

## COROLLARIVM.

(Ex his infertur, ſi priſma quodcunq; ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilē planis oppoſitis: Veluti demonſtratum eſt in priori priſmate, triangulum GHI, æquale eſſe & ſimile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.)

## PROBL. 4. PROPOS. 26.

xxvi.

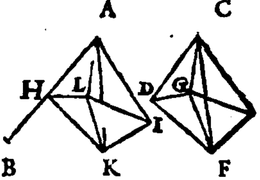
**AD datam rectam lineam, ejuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.**

*SIT ad punctum* A, *in data recta* AB, *conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido* C, *contento tribus angulis planis* DCE, DCF, FCE, *non in eodem plano exiſtentibus.* c *Ducatur ex* F, *ad planum per* CD, CE, *ductum perpendicularis* FG, *connectanturque rectæ* DF, DG, EF, EG, CG. *Deinde abſcindatur* AH, *æqualis ipſi* CD, f *fiatque angulus* HAI, *angulo* DCE, *æqualis*; *& recta* AI, *rectæ* CE, *æqualis*;

c 11. undecimi.

f 23. primi.

*Rurſus in plano per AH, AI, ductum conſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto exiſtit, & recta*
a 12. undec. *AL, rectæ CG, æqualis a Ex L, vero ad planum, in quo ſunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK quæ ipſi FG, æqualis ponatur, & conjungatur recta KA. Dico angulum ſolidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL: cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, trianguli CDG, &*
b 4. pri. *anguli HAL, DCG, æquales per conſtructionem; b Erunt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per conſtructionem; c æquales quoque erunt LI,*
c 4. pri. *GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF: & anguli HLK, DCF, recti ex defin. 3. hujus lib. d erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli*
d 4. pri. *AHK, ſint æqualia lateribus CD, GF, trianguli CDF, ex conſtructione (tum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantq; angulos æquales, nimirum rectos, ex defin. 3. hujus lib. e erunt baſes AK,*
e 4. pri. *CF, æquales) f Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Denique*
f 8. pri. *quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex defin. 3. hujus lib. g Erunt baſes IK, EF, æqua-*
g 4. pri. *les. Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; h Erunt quoq; angu-*
h 4. pri. *li IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus. Atque proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejuſq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.*

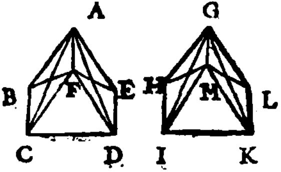


## SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in uno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita ut figuram planam polygonam conſtituant, pyramiſque quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſolvatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igi-

igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur, conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, ut fiat pentagonum BCDEF, quod in triangula reſolvatur BCF, BCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis CAF FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.



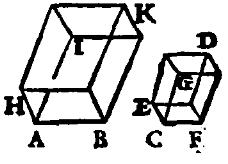
## THEOR. 5. PROPOS. 27. xxvii.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

*SIT à data recta* AB, *deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo* CD a *Fiat ad rectam* AB, *ejuſque punctum* A, *angulus ſolidus æqualis angulo ſolido* C, *ita ut tres anguli plani* HAI, IAB, BAH, *æquales ſint tribus angulis planis* ECG, GCF, FCE *Deinde ut eſt*, CF, *ad* CG, b *ſic fiat* AB, *ad* AI, *& ut* CG, *ad* CE, *ita* AI, *ad* AH, *eritque ex æquo, ut* CF, *ad* CE, *ita* AB, *ad* AH. *Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum* AK, *completis nimirum parallelogrammis* BH, HI, IB, *& per* I, B, H, *ductis planis* IK, BK, HK, *quæ parallela ſint parallelogrammis* BH, HI, IB. *Dico parallelepipedum* AK, *parallelepipedo* CD, *ſimile eſſe ſimiliterque poſitum. Cum enim anguli* BAH, FCE, *ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe ut* BA, *ad* AH, *ita* FC, *ad* CE, *ex conſtructione, erunt parallelogramma* HB, EF, *ſimilia, ſimiliterque poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterque poſita parallelogramma* HI, EG, *&* IB, CF. *Tria igitur plana* BH, HI,

a 26. undec.

b 12. ſexti.

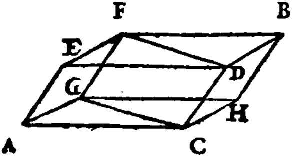


*I B, ſolidi* A K, *ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita tribus planis* F E E G, G F, *ſolidi* C D. a *Sunt autem tria cujuslibet æqualia & ſimi-* a24 undecimi. *lia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi* A K, *ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi* C D: *Ac proinde ex defin. 9. hujus lib. ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſolida* A K, C D. *A data ergo recta linea dato ſolido parallelepipedum ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.*

## xxviij. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios adverſorum planorum: biſariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallepipedum A B, in quo plana oppoſita ſint A H, E B, quorum diagonii, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ C G, *D* F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela eſt, *b* & æqualis ipſi *A* E, b 34. prim. cum ſint parallelogramma C E, G E; *c* erunt & inter ſe parallelæ, c 9. undecimi. & æquales C D, G F. *d* Ac proinde, quæ ipſas conjungunt C G, d 33. pri. D F, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per C G, D F, ducitur, ſecare biſariam parallelepipedum A B. *e* Cum enim plana A H, E B, ſint parallelogramma æqua- e 24. undecimi. lia, & ſimilia; erunt dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; *E* F D, F D B, æqualia inter ſe: ſunt autem & latera circa angulos æquales G A C, *C* H G, F E D. D B F, proportionalia. *f* Igitur ſimilia quoq; erunt dicta triangula. f 6. ſexti. *g* Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale ſit & ſimile pa- g 24. undecimi. rallelogrammo C B; & A *D*, ipſi G B, & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, *E* F D, & parallelogramma A F, A D, G F, priſmatis *A* CGFED, æqualia ſimilia duobus triangulis H C *G*, B D F, & parallelogrammis CB, BG, C F, priſmatis HGC, DBF: proptereaque priſmata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, ſectum erit parallelepipedum A B, biſariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

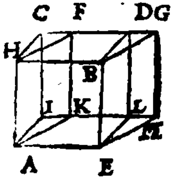


## xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

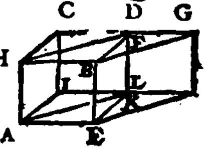
*SVPER baſin* A B, *in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem pla-*

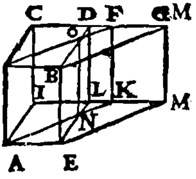
*næ parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ADCE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia.* a 35. pri. *a Cum enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta: erunt, ablato communi trapezio AELK,* b 34. pri. *æqualia quoq; triangula AIK, ELM. b Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus: c Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportio-* c 4. ſexti. *nalia, ideoq; inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. d Rurſus parallelo-* d 24. undecimi. *grammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: e Sed* e 26. pri. *& IF, ipſi LG, cum baſes IK, LM, ſint æquales.* f 4. pri. *(f Nam cum rectæ IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoq; inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM,) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.*



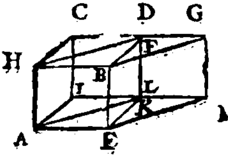
## SCHOLIVM.

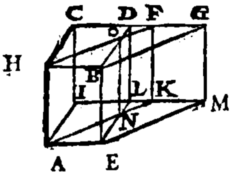
HÆC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere mediis, dummodo loco triangulorum aſſumantur priſmata, ut ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit: vel ultra L, eodem modo demonſtrabuntur, ut in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula ALK, ELM, æqualia. unde ut prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.





IN tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia: quib. ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, ut prius, æqualia erunt priſmata AIK, FCH, ELM, GDB, à quibus ſi auferatur priſma commune KLNODF, (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO,) remanebit ſolidum comprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO. æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur utrique priſma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.





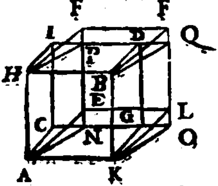
XXX.

## THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia.

*SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, neque CG, ID, producta; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AEMFK, eſſe æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eadem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur, in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q. adjunganturq; rectæ AN, KO, HP, BQ.* a *Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB. æquales; Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB.* b *Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum eſt APQR.* c *Quamobrem parallelepipedum AIDK, æque-*

a 34. primi



b 33. primi

c 29. pri.

*quale eſt parallelepipedo APQK. cum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK. cum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, QF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſive inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſive non; in eadem ſunt altitudine.

NAM ſi unum dicatur altius; ſi eo abſcindatur parallelepipedũ in eadem cum reliquo altitudine: erunt æqualia abſciſſum & reliquum. [a] Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.

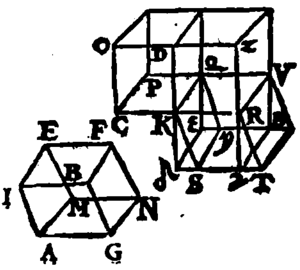
[a] 29. vel 30. undec.

## THEOR. 26. PROPOS. 31.

xxxi.
xxxii.

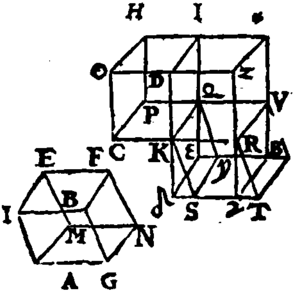
SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine; æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadem altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI. ad baſin CD, perpendiculares. quo poſito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano QK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia: Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt la-



lateribus L E, L A, & anguli QKS, EL*A*, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod K Q, L E, rectæ ponantur ad plana KT, L G, erunt & parallelogramma QS, E A, æqualia & ſimilia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia ſint lateribus L B, L E, & anguli Q K R, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma KV, L F, æqualia & ſimilia. Quare cum tria plana K T, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia; *a* tribus pla-
a 24. *undec.* nis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quam hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt, per defin.
b 24. *undec.* 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, E*A*GF, inter ſe æqualia.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in $\delta$: & I Q, K Y, in $\varepsilon$, compleaturque parallelepipedum Q$\delta\gamma$V. Item HI, $\beta$V, protractæ conveniant in $\alpha$: & OD, $\gamma$R, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKR$\alpha$. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, R$\delta\gamma$V, eandem habent baſin K V, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, $\delta$X, & inſiſtentes ipſorum lineæ K S, K$\delta$, RT, R$\gamma$, Q$\varepsilon$, VX, V$\beta$,



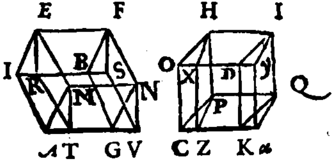
c 19. *undec.* collocantur in eiſdem rectis $\delta$T, $\varepsilon$X, *c* ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo *EAGF*, æquale erit parallelepipedum Q$\delta\gamma$V.

d 35. *primi* *d* QVONIAM vero parallelogramma KT, K$\gamma$, æqualia ſunt in-
e 7. *quinti* ter ſe: & KT, æquale eſt ipſi L G, erit & K$\gamma$, ipſi L G, hoc eſt, ipſi
f 25. *undecimi.* C D, æquale: cum baſes L G, C D, ponantur æquales. *e* Quare erit, ut CD, ad D R, ita K$\gamma$, ad D R: *f* Vt autem *C D*, baſis ad baſin D R, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KL$\alpha$R: cum parallelepipedum CH$\alpha$R, ſecetur plano IK, planis oppoſitis, C H, $\alpha$R, parallelo: Et eadem ratione, ut K$\gamma$, ad D R, ita eſt ſolidum Q$\delta\gamma$V, ad ſolidum IKR$\alpha$; cum & parallelepipedum I$\delta\gamma\alpha$, ſecetur plano K V, oppoſitis planis *D$\alpha\delta\beta$*, parallelo. *g* Igitur æqualia erunt parallepipeda
g 9. *quinti.* CHIK, Q$\delta\gamma$V, cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKR$\alpha$, nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, K$\gamma$, ad eandem baſin D R. Quare cum parallelepipedum Q$\delta\gamma$V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo A EF G: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

SINT jam neque inſiſtentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad baſin AB, neque C P, K Q, O H, D I, ad baſin, C D, perpendiculares. Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, E S, M T, NV, ad planum,in quo baſis AB,perpendiculares, Item à punctis H. I,P,Q,ad planum,in quo baſis C D,perpendiculares HX,IY, P Z,Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cum ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS,SV,VT,T R: Item rectæ XY, Yα, αZ, Z X, ut fiant parallelepipeda ETVF,HZαI, quæ cum ſint ejuſdem altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares,cum inter ſe æqualia, ut oſtenſum eſt. b Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat baſin E N,eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo baſin H Q, eandemque altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG,CHIK. Idemque oſtendetur, ſi unius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta,&c. Quod demonſtrandum erat.

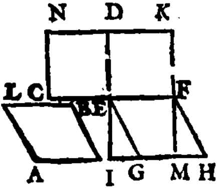
a 11. *undecimi.*

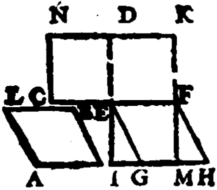
b 29. *vel* 30. *undec.*



## SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine,quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe ęqualia: Nimirũ ex ſolis baſibus,ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamvis eadem ſit demonſtratio illius,quæ noſtra. Sint n. duæ baſes æquales,nempe duo parallelogramma AB,CD, Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine,quorum inſiſtentes lineæ ad baſes AB, C D,ſunt perpendiculares,inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L: & recta E F,rectæ L B,& recta E G,rectæ L A,ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH,quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B,Conveniat autem H G,producta cum DE,producta in I,& compleatur parallelogrammum I K. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH,IF,EK,conſtituta parallelepipeda ejuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AC,CD,conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares addictas baſes. Perſpicuũ eſt igitur, ſolidum ſuper EH,æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB,ex defin.10.





hujus lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis hujus, per conſtructionem. a 29. undecimi. a Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper EH, IF, cum habeant baſin eandem, cujus infimum latus E F, erectam ſuper planum I K; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cujus infimum latus IH, atque inſiſtentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eiſdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo b 35. primi. ſuper AB. b Quoniam vero parallelogramma E H, I F, æqualia c 7. quinti. ſunt; & EH, æquale eſt ipſi CD, æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, d 25. undecimi. ut IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Eſt autem ut IF, ad E K, ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, quod ſolidum ſuper IK, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper DK, IM, erectis. Et eadem ratione, ut CD, ad EK; ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper EK, cum ſolidum ſuper CK, ſecetur plano ſuper DE, erecto parallelo planis ſuper C N, FK, erectis. Quare erit ut ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K. e 9. quinti. e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB, Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

SI enim unum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, f ſient æqualia abſciſ- f 31 undecimi. ſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.

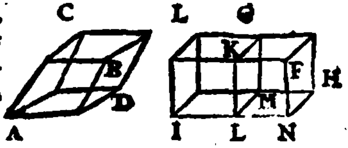
QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis unius credatur major baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum ejuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

## xxxiii. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, ut baſes.

*SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, ejuſdem altitudinis ſuper baſes* AB, EF. *Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, ut eſt baſis ad baſin.* g 45. primi. *g Super rectam enim* E K, *conſtituatur parallelogrammum* IK, *æqua-*

*æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF, Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totum unum parallelepipedũ IFLH: a erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales baſes, per conſtructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. b Quare erit ut ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidum ABCD, ad idem ſolidum EFGH; c Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ut baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, ut baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.*



a 31. *undecimi.*
b 7. *quinti*
c 25. *undecimi.*

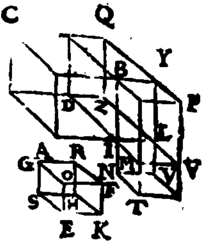
## SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, ut baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex majori abſcindantur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum, *d* eritq; ut baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſit quoque erat ad totum. Abſciſſum ergo æquali eſt toti. Quod eſt abſurdum.

d 32. *undecimi.*
e 9. *quinti.*

## THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvi.

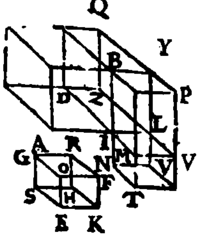
SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.



SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR: Item DI, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO, Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſint lateribus GR, GO: *f* & anguli contenti æquales, cum angulus ILM, ſit æqualis angulo AID, qui ob ſimilitudinem parallelepipedo-

f 15. *primi.*

pedorum æqualis eſt angulo EKH,ſeuRGO; erunt parallelogramma
IX,GF, ſimilia,& æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt; & æqualia
LN, RS: item IT, GE. Quare tria plana IX,LN,IT, parallelepipedi
TXIV, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis GF,RS, GE,
parallelepipedi EFGH: *a* Sunt autem tria cujuſque ſimilia & æqualia
*a 24. undec.* tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt,& ſimilia parallelepipeda
TXIV, EFGH, ex defin.10. hujus lib. Rurſus completis parallelogrammis
MB, *B* L, L M, perficiatur parallelepipedum MBPL:
Item completis parallelogrammis IY, *D*L, IQ, perficiatur parallelepipedum
IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem parallelepipedorum



*A*BC*D*, EFGH, eſt ut AI, ad
EK, hoc eſt ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt,
ad IM: & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. *b*
Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum
AD, ad DL: Et ut DI, ad IM,
*b 1. ſex.* ita parallelogrammum DL, ad LM: &
ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL,
ad LN. Igitur erit ut *A*D ad CL, ita DL,
ad LM: & *B*L, ad LN. *c* Sed ut A*D*, baſis
ad *D*L, baſin, ita eſt parallelepipedum
*c 32. undec.* ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut baſis *D*L, ad baſin LM,
ita parallelelepipedum DLYQ, ad parallelepipedū LM*B*P; & ut baſis
BL, ad baſin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum
LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum
DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ: ad parallelepipedum
LM*B*P, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedū LN
TX. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales
*A*DCB, DLYQ, LMBP, LNT*X*, ideoque
proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc
*d 32. undec.* eſt, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ *A*DC*B*; ad ſecundam
*D*LYQ, ex defin 10. lib. 5. *d* Vt autem A*D*cB, ad DLYQ, ita eſt
*e 1. ſex.* baſis *A*D, ad baſin DL; *e* *E*t ut AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc
eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum
EFGH, eſt triplicata proportionis homologorum laterum,
nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda,
inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

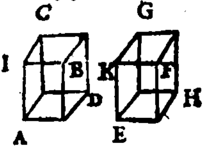
(Ex hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedū ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterum homologorum.

THE-

## THEOR. 29. PROPOS. 34. xxxiv. xxxv.

ÆQVALIVM ſolidorum parallelèpipedorum baſes & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altìtudines reciprocantur illa ſunt æqualia,

SINT aqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF. eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AD, ad EH; ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum inſiſtentes linea AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita ut AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt aquales: cum & parallelepipeda aqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, aquales, per ea qua ad finem propoſ. 31. hujus lib. oſtendimus. Quare erit, ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciproca.

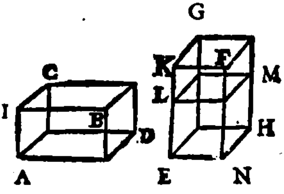


QVOD ſi altitudines AI, EK, inaquales fuerint: ſit EK, major, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, aqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. hujus lib. Quoniam igitur aqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF. a erit ut ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: b Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum aquales ponantur altitudines AI, EL. Et ut ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis KM, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, FHML, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN: erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: c Sed ut KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, aqualem. Quare erit ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac propterea reciproca ſunt baſes, & altitudines.

a 7. quinti.

b 32. undec.

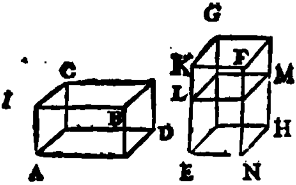
c 1. ſex.



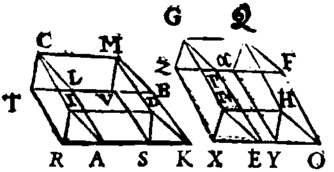
SINT jam baſes & altitudines reciproca. Dico parallelepipeda eſſe aqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt aquales: cum ſit baſis AD, ad baſin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, BH, aquales. d Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum aquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe aqualia erunt.

d 31. und.

QVOD



Quod ſi altitudo EK, major fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem: a Ut autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur [a 23. undecimi.] b Et ut EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN: [b 1. ſext.] c Ut autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, [c 32. undecimi.] cum ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN: erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit ut ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML: [d 9. quint.] d ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.



Sed proponantur jam parallelepipeda BACD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, EM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qa, GZ. connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV, XY, Za, XZ, Ya: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, ut baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. e Cum enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, [e 29. vel 30. undecimi.] æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido XaGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XaGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH erit, ut jam demonſtratum eſt, ut baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, ut baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

SINT jam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, ut prius; Cum ſit ut baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. f Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis: [f 24. undecimi.] erit quoque ut baſis CD ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi XaGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ per-

*nea perpendiculares ad baſes* CD. GH; *erunt ut jam oſtenſum eſt,* *æqualia parallelepipeda* RVCD, XαGH *a Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis* ABCD, EFGH, *æqualia. Igitur æqualia quoq; erunt parallelepipeda* ABCD, EFGH. *Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.*

a 29. v 30. *undec.*

## SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29 30 31.32.33.&34. conveniunt quoq; priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſerventur. Nam ſi duobus priſmatis ejuſmodi ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. *b* Quare æqualia erunt ejuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.

b 29.30. *vel* 31. *undecimi.*

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis ejuſdē altitudinis, & ſuper diverſas baſes conſtitutis adjiciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficienturū iter duo parallelepipeda ejuſdē altitudinis. *c* Quare erit parallelepipedũ ad parallelepipedum, ut baſis ad baſin: *d* Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogrammæ, vel certæ ut triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet unius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangulæ.

c 32. *undecimi,*
d 15. *quinti.*

PRÆTEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqvalia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, *e* quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata; eorum nimirum dimidia, *f* cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.

e 33. *undecimi.*
f 15. *quinti*

DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adjungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqvalia earundem altitudinum cum priſmatis. *g* Quare cum baſes & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum dimidia *h* eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.

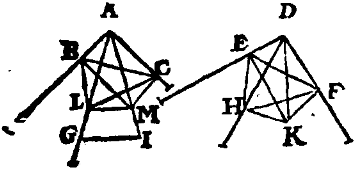
g 34. *undecimi.*
h 15. *quinti.*

xxvii.

## THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

*SINT duo anguli plani æquales* BAC, EDF, *quorum verticibus*
A, *&* D, *inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ* AG,
DH, *ita ut angulus* BAG, *angulo* EDH, *& angulus* CAG, *angulo*
*angulo* FDH, *ſit æqualis: à ſumptis autem punctis* G H, *in rectis*
AG, DH, *demittantur ad plana, in quibus anguli* BAC, EDF, *exiſtunt*
*perpendiculares* GI, HK, *incidentes in puncta* I, K, *& adjungantur*
*rectæ* IA, KD. Dico *angulos* GAI, HDK, *eſſe æquales inter*
*ſe. Nam ſi* AG, DG, *ſunt in æquales, auferatur à majori* AG, *ipſi*
DH, *æqualis linea* AL, *& ex* L, *in plano trianguli AGI, ducatur*
*ipſi* GI, *parallela* LM, *Quoniam igitur parallelæ ſunt* GI, LM, *& eſt*
GI, *ad planum anguli* BAC, *recta*; a *erit quoque* LM *ad idem pla-*
a 8. undec. *num recta.* Ducantur *autem ex punctis* MK, *ad rectas* AB, AC,
DE, DF, *perpendiculares*
MB, MC, KE, KF, *&*
*connectantur rectæ* BC,
BT. LC, EF, EH, HF. *Et*
*quia* LM, *recta eſt ad*
*planum anguli* BAC, *ipſa rectum angulum ef-*
*ficiet cum recta* AM, *in eodem plano ducta per defin.* 3. *hujus lib.* b
b 48. pri. *Quare quadratum rectæ* AL, *æquale erit quadratis rectarum* AM,
ML; c *Eſt autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis recta-*
c 47. pri. *rum* AC. CM, *cum & angulus* ACM, *rectus ſit, ex conſtructione.*
*Quadratum ergo rectæ* AL, *æquale eſt quadratis rectarum* AC,
d 47. pri. CM, ML,: d *At quadratis rectarum* CM, ML, *æquale eſt quadra-*
*tum rectæ* CL, *cum angulus* CML, *rectus ſit per defin.* 3. *hujus lib.*
e 48. primi *Igitur quadratum rectæ* AL, *æquale eſt quadratis rectarum* AC,
f 47. pri. CL; e *Ac proinde angulus* ACL, *rectus erit.* f *Rurſus quia qua-*
*dratum rectæ* AL, *æquale eſt quadratis rectarum* AM, ML: g *Eſt*
g 47. pri. *autem quadratum rectæ* AM, *æquale quadratis rectarum* AB, BM,
*cum*



cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadra-
tum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: a At
quadratis rectarum BM, ML: a At quadratis rectarum BM, ML, a 47. pri-
æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex mi.
defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadra-
tis rectarum AB, BL; b proptereaq; angulus ABL, erit rectus. Non b 48. pri.
aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli
ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, tri-
anguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; c Erunt & reli- c 26. pri-
qua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem mi.
argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare
cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE,
DF, trianguli DEF: & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hy-
potheſi; d erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, d 4. primi.
angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM,
ACM, totis angulis DEK, DEF, æquales: cum omnes ſint recti. I-
gitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æ-
quales erunt: Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint oſtenſa æ-
qualia: e erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia
igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa late- e 26. pri-
ribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, ſunt recti; f mi.
erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales f 4. primi.
ſint oſtenſa rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: g g 47. pri.
Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum
BM, ML: & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK,
KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint ex defin. 3. hujus lib. E-
runt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis recta-
rum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æ-
qualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales.; reliqua
quadrata rectarum LM, HK; æqualia erunt: ac proinde rectæ
LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM triangu-
li ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, &
baſis LM, baſi HK, æqualis; h erunt & anguli LAM, HDK, æ- h 8. primi.
quales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum ver-
ticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtent, &c. Quod oſtendendum
erat.

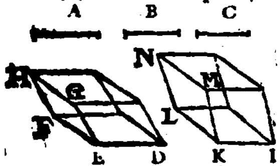
## COROLLARIVM.

(ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumq; utriq; Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nã propterea quod anguli plani BAC, DFE, ponuntur æquales & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.)

## xxxviii. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo; quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

*SINT continuè proportionales rectæ* A, B, C. *Conſtituaturq; angulus ſolidus* E, *ex tribus angulis planis quibuſcunque* DEE, DEG, FEG, *ita ut recta* DE, *ipſi* A: & EF, *ipſi* B, & EG, *ipſi* C, *ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis* DF, FG, GD, *perficiatur parallelepipedum* DH: *quod ſub tribus rectis* A, B, C, *dicitur contineri, aut ex ipſis fieri.* a 26. undecimi. a *Deinde ad rectam* IK, *ejuſque punctum* K, *fiat ſolidus angulus* K, *æqualis ſolido angulo* E, *ex tribus angulis planis* IKL, IKM, LKM; *qui æquales ſint tribus* DEF, DEG, FEG, *ita ut rectæ* IK, KL, KM, *æquales ſint mediæ lineæ* B. *Completis vero parallelogrammis* IL, LM, MI, *perficiatur parallelepipedum* IN, *quod contineri dicitur ſub linea* B, *ſe ex ipſa deſcribi.* Dico *ſolidum* DH, *æquale eſſe ſolido* IM. *Cum enim ſit ut* DE, *ad* IK, *ita* KM, *ad* EG, (*quod* DE, *ipſi* A; & IK, KM, *ipſi* B, & EG, *ipſi* C, *ſumpta ſit æqualis*,) & *anguli* DEG, IKM, *æquales:* b14. ſexti. b *Erunt parallelogrãma* DG, IM, *æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani* DEC, IKM, *ſunt æquales quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales* EF, KL, *quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex conſtructione, utrumque utriq;* Erunt *perpendiculares ex* F, L, *ad plana baſium* DG, IM, *demiſſæ; nimirum altitudines parallelepipedorum* DH, IN *ſi baſes ſint* DG, IM, *inter ſe æquales per coroll. propoſ.* c31. undec. *præcedentis.* c *Quare parallelepipeda* DH, IN, *cum habeant baſes* DG, IM, *æquales & æquales quoq; altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.*



### SCHOLIVM.

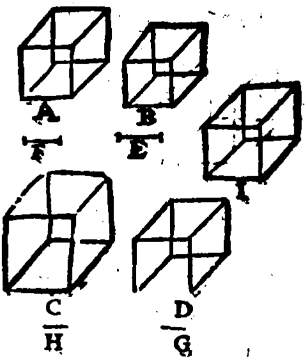
VICISSIM quoque, ſi parallelepipedũ ex tribus lineis rectis deſcriptũ, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media

linea

linea deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, deſcriptum ex rectis A, B, C, ut dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo I N, deſcripto a media B. Dico tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorũ altitudines ex FL, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes D G, I M, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. hujus lib. demonſtravimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex conſtructione; a habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, ut DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum. a 14. ſexti.

## THEOR. 32. PROPOS. 37. XXXIX.

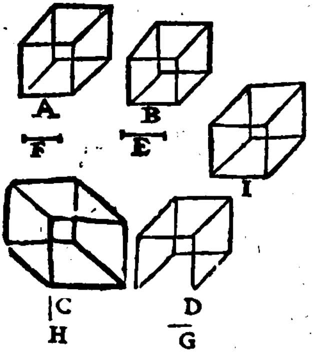
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D: conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta: Item ſupr C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſive hæc ſint illis ſimilia ſive non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem ſolidum A: ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidũ D. Inveniãtur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineæ A, B, E, F & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur: erit ex æquo ut A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, Et ut C, ad H, ita, ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. hujus lib. Igitur erit ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

SINT jam è contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoq; proportionales. b Tribus enim rectis b 12. ſexti.

a 27. undec. A,B,C,inveniatur quarta prorportionalis I, a ſuper quam deſcribatur parallelepipedum ipſi D, vel C, ſimile,ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur eſt,ut recta A,ad rectam B,ita recta C, ad rectam I: erit quoque,ut jam eſt oſtenſum,ut ſolidum A,ad ſolidum B,ita ſolidum C,ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A,ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C,ad ſolidum D. Igitur erit ut ſolidum C, ad ſolidum I,ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. b 9. quint. b Atque idcirco æqualia erunt ſolida I,& D. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta,continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ.2. lib.6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac popterea erit,ut recta C,ad I,rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C,ad I,ut recta A,ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint,&c. Quod erat demonſtrandum.



BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B,ita recta C,ad rectam D. Dico eſſe quoque ut ſolidum A, ad ſolidum B,ita ſolidum C, ad ſolidum D. c 33. undecimi. c Cum enim ſit proportio ſolidi A,ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A,ad rectam B; Item proportio ſoli di C,ad ſolidum D,triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D, erunt proportiones ſolidi A,ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ ſunt proportionum æqualium,nempe rectæ A,ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe ut ſolidum A,ad ſolidum B ita ſolidum C,ad ſolidum D. Dico eſſe quoque ut rectam A,ad rectam B,ita rectam C,ad rectam D. d 33. undecimi. d Cum enim ſit proportio ſolidi , ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A,ad rectam B. Item proportio ſolidi C,ad ſolidum D. triplicata proportionis rectæ C ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C,ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ,nimirum ſolidi A,ad ſolidum B: & ſolidi C ad ſolidum D,æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

## SCHOLIVM.

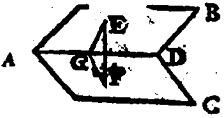
EODEM modo,ſi fuerint tres rectæ proportionales,erunt& parallelepipeda ſimilia ſimiliterq; deſcripta ex eis,proportionalia,&c. Si enim media linea,ejuſq; ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor

tuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, ut demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ: perſpicuum eſt, quod proponitur.

TOTA vero hæc propoſitio convenit etiam priſmatis, quorum duo plana adverſa æqualia ſunt triangula, ut Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. *a* Cum igitur, priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur. a 15. quinti

## THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



*Planum enim* AB, *rectum ſit ad planum* AC, *ſitq́; eorũ communis ſectio recta* AD. *Et ab* E, *puncto plani* AB, *ad planum* AC, *perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem* AD. *Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum* F, *b & ab* F, *in plano* AC, *ducatur ad rectam* AD, *perpendicularis* FG: *connectaturq́; recta* EG, *in plano* AB. *Quoniam igitur* FG, *perpendicularis eſt ad communem ſectionem* AD, *erit quoq; perpendicularis ad planum* AB, *ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam* GE, *per 3. defin. hujus lib. Eſt autem &* EF, *recta ad* FG, *per eandem 3. defin. Igitur in triangulo* EFG, *duo anguli* EFG, EGF, *recti ſunt, quod eſt abſurdum, c cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex* E, *demiſſa ad planum* AC, *non extra communem ſectionem* AD, *cadet, ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.* h 12. primi. c 17. primi.

### SCHOLIVM.

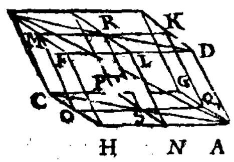
HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionem, *d* ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4 defin. hujus lib. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, ut in ſcholio propoſ. 13. hujus lib. demonſtravimus. d 12. primi.

## THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI ſolidi parallelepipedi eorum; quæ ex adverſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſoli- XXXX.

di parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

*SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extenſa ſint duo plana IN, KO, quorum ſectio communis ſit recta RS. Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC: conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus CO, OS, triangu-*



*li CQS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG,*
a 34. primi. *CH, a & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint*
*parallelogramma AS, HS,) b & angulus AQS, æqualis alterno angulo*
b 29. primi. *COS: c Erunt & baſes AS, CS, æquales: & anguli ASQ,*
*CSO, æquales; d Atqui anguli ASQ, ASO, æquales ſunt*
c 4. primi. *duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, æquales ſunt duobus rectis:*
d 13. primi. *e Ac propterea AS, CS, unam rectam lineam conſtituent. Eodem*
e 14. primi. *modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & unam ex eis componi*
f 9. undecimi. *lineam rectam. Rurſus quia utraq; AD, BC, parallela eſt, & æqualis*
*rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, f ipſa quoque inter ſe*
g 31. primi. *parallelæ erunt & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extrema*
h 7. undecimi. *conjungentes, parallelæ ſunt & æquales: Ac proinde ipſarum*
*dimidia AS, BR, æquales ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt*
i 29. & 15. primi. *h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo ſecabunt,*
*in puncto videlicet T. i Cum autem duo anguli AST, ATS,*
k 26. primi. *trianguli AST, æquales ſint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT, & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia: Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant bifariam in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum quæ ex adverſo, &c. Quod erat oſtendendum.*

## COROLLARIVM.

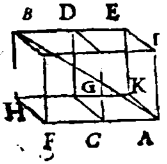
(HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam dividunt, ut hic demonſtratum eſt rectam RS.)

## SCHOLIVM.

HVIC throremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtravimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum

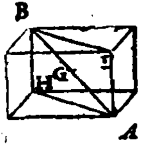
trum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.



SECETVR parallelepipedum A B, plano C D, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri A B, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sic enim primo planū C *D*, oppoſitis planis *A* E, *B* F, parallelum. *a* Et quia plana parallela B F, D *C*, E A ſecant rectas quaſcunque proportionaliter; ſecatur autem B A, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera adverſorum planorum A H, B I, atque quo& baſes A H, B I, bifariam. *b* Cum igitur ſit ut baſis KC, ad baſim C H, ita ſolidum A D, ad ſolidum C B, erit parallelepipedum A B, ſectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.

a 17. *undec.*

b 25. *undecimi.*

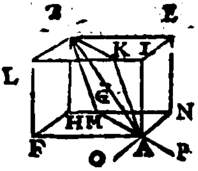


TRANSEAT ſecundo planum ſecans *A* I, B H, per diametros *B* I, A H, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, imo per totam diametrum A *B*, *c* cum A B, in plano ſit parallelarum A H, *B* I. *d* Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.

c 7. *undecimi.*

d 25. *undecimi.*

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit adverſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, *B* I ſecantur plano A K *B* M: *e* erunt communes ſectiones A M, *B* K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum A L, BN, factæ à plano A KBM. Quare parallelogrammum eſt *A* K, *B*M: *f* ideoq; tam rectæ tam A K, B M, quam rectæ AM, *B*K, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera B K, *B* L, trianguli B KL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN: & angulus KBL, angulo M *A* N, æqualis. (Productis enim N A, M *A*, ad O, P, erunt AO, A P, rectis B L, B K, parallelæ: *g* ac proinde æquales anguli erunt O A P, L *B* K. *h* Cum igitur O A P, æqualis ſit angulo MAN æquales quoque erunt anguli K B L, M AN) *i* Erunt baſes KL, MN, inter ſe, & anguli *BKL*, *BLK*, angulis *A* MN, *A*NM, æquales, & triangulum triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triangula BKL, *AMN*, *k* cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta K L, rectæ M N: & angulus *B*KL, angulo A M N: & angulus K *B* L, angulo M A N, eſt æqualis, ut oſtendimus: erit & reliqua I K, reliquæ H *M*: & reliquus angulus BK I



e 16. *undecimi.*

f 34. *pri.*

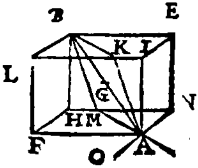
g 10. *undecimi.*

h 15. *primi*

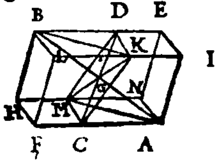
i 4. *primi.*

k 4. *ſex.*

reliquo AMH: & reliquus KBE. reliquo MAF, æqualis. (Eſt enim tota LI, toti NH. æqualis, & tam anguli BKL. BKI, quam anguli AMN, AMH. duobus rectis æquales: & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera *B* E, E I, lateribus A F. F H, æqualia: & anguli B EI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum B KIE, & æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero *A* M H F; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula BHM, AIK: & quadrilatera AKLF, BMN*E*: cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis AKLF, FHMA, *A*KBM. MHB, BKL, LBHF, æquale erit ſolido contento planis B M N E, K I K B, B M *A* K, KI. 4. AMN, NAIE, per 10 defin. hujus libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, ut demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo AB, ſectum eſt plano AKBM, per centrum G, bifariam.



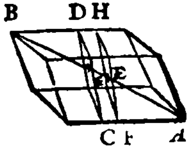
POSTREMO planum ſecans CD, neque adverſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neq; per ullos angulos eorum ductum: ſed utrumq; ſecet plana oppoſita A H, B I. Oſtendemus autem, ut prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM. DK eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM: connectanturque rectæ
a 9. *undec.* *A*M, B K. Quoniam igitur A F, B E, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma A L, L E.
b 7. *undecimi.* *a* inter ſe ſunt parallelæ: *b* Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano: ac propterea ſe
c 29. *primi* mutuo ſecabunt in centro G. In ſolo enim centro G, recta A B, per hypotheſim, ſecat planum C D, in quo exi-
d 15. *primi.* ſtit recta C *D*. *c* Et quoniam angulus BD*C*, angulo alterno ACD, æqualis eſt: *d* Eſt autem & angulus *B*GD, angulo A G C. ad verticem
e 26. *primi* æqualis: & latus BG, lateri *A*G, æquale, quod AB, bifariam ſecetur in G, centro; *e* Erit & latus D *G*, lateri *C* G, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtendimus, diametri C D, KM, ſe mutuo bifariam ſecent, tranſibit K M, per punctum G, ibique diametrum A B, ſecabit. Quia ergo latera B G, G D, trianguli *B*GD. æqua-
f 15. *primi.* lia ſunt lateribus AG, GD, trianguli AGC: *f* & angulus BGD. æqua-
g 4. *primi.* lis angulo AGC: *g* Erit & baſis *B*D, æqualis baſi *A* C. Eodem argumento æquales erunt rectæ *B* K, A M. Quocirca cum tria latera *B*D, *D*K, KB, trianguli *BD*K, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli *A*CM; Erunt, per ea, quę ad propoſ 8. lib. 1. docuimus



mus, anguli illius angulis hujus æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & baſis KL, baſi MN: & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, ęquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum: Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conveniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt ęqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, ęqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquę CF, æqualis erit: Ac propterea quadrilaterum DEIK, ęquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & ęquiangulum; cum anguli DEI, EIK, ęquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH: & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, ęquales, quod ęquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, ęqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, ęqualia eſſe & ſimilia & quadrilatera ACKI, BDMH: Item DENM, GFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conveniant, ut perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. hujus lib. ęquale eſt ſolido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN: cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia: Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.

a 4. *primi.*

SED ſecetur jam patallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum CB, dividere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non dividitur bifariam, dividatur bifariam in E, ut ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum ſecabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano GD: Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe ęqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo aliud punctum, pręter G, dividet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi. Quod demonſtrandum erat.



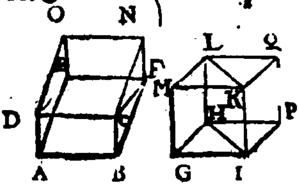
THEOR.

XLI.

## THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

*SINT duo priſmata æqualis altitudinis* ABCDEF, GHIKLM *quorum illud baſim habeat parallelogrammum* BCD, *hoc vero triangulum* GHI: *ſitque parallelogrammum* AC, *trianguli* GHI, *duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda* AN, GQ. *Quod quidem fiet, ſi plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma* BN, AO; GP, MQ. *Si enim connectantur rectæ* NO, PQ. *conſtituta erunt duo parallelepipeda* AN, GQ. *ejuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. hujus lib.* a *Quoniam igitur parallelogrammum* GP. *duplum eſt trianguli* GHI; *Ponitur autem & parallelogrammum* AC, *ejuſdem trianguli* GHI, *duplum*: *Æqualia erunt parallelogramma* AC, GP. *Quare parallelepipeda* AN, GQ. *ejuſdem altitudinis, ſuper æquales baſes* AC, GP, *inter ſe ſunt æqualia*; *Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata* ABCDEF, GHIKLM. (c *Nam parallelepipeda* AN, GQ. *per diametros* CF, DE, HI, LK, *planorum adverſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata*) *æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaq; ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.*



a 34. primi

b 31. undecimi.

c 32. undecimi.

## SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita: cum imperet parallelepipeda compleri: quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim jam parallelepipedum completum.

## FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

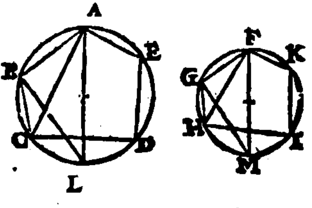
# EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMUM.

## Et ſolidorum ſecundum.

### THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

**QVÆ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, ut à diametris quadrata.**

S*INT duo polygona ſimilia* ABCDE, FGHIK, *deſcripta in circulis, quorum diametri* AL, FM. *Dico ita eſſe polygonum* ABCDE, *ad polygonum* FGHIK, *ut quadratum diametri* AL, *ad quadratum diametri* FM. *Subtendantur enim angulis æqualibus* ABC, FGH, *rectæ* AC, FH, *& connectantur rectæ* BL, GM. *Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, ut* AB, *ad* BC, *ita* FG, *ad* GH:



a *erunt triangula* ABC, FGH, *æquiangula, cum circa angulos æqua-* a 6. ſexti.
*les* ABC, FGH, *habeant late-*
*ra proportionalia:* b *Eſt autem* b 21. tertii.
*angulus* ALB, *angulo* ACB:
*& angulus* FMG, *angulo*
FHG, *æqualis. Igitur & angu-*
*li* ALB, FMG, *æquales erunt.*
*Cum ergo & anguli* ABL,
FGM, *æquales ſint,* c *nempe re-* c 31. tertii.
*cti in ſemicirculis exiſtentes:* d *erunt & reliqui* BAL, GFM, *a-* d 32. primi.
*quales.* e *Quare erit ut* AL, *ad* AB; *ita* FN, *ad* FG: *& permutan-* e 4. ſex.
*do, ut* AL, *ad* FM, *ita* AB, *ad* FG. f *Igitur eſt ut quadratum ex* f 22. ſexti.
AL, *ad quadratum ex* FM, *ita polygonum* ABCDE, *ſuper* AB, *ad*
*poly-*

polygonum FGHIK, ſuper FG: cum tam quadrata, quam polygona ſint figurę ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ. Quæ itaq; in circulis polygona ſimilia inter ſe ſunt, ut diametris quadrata, quod erat demonſtrandum.

ii. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

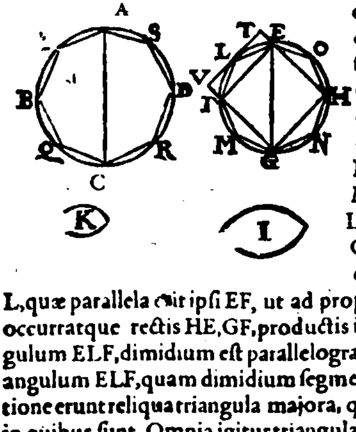
Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quę vel minor erit vel major circulo EFGK. Si enim eſſet ęqualis *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo FFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, ut ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, majus erit, quã dimidium circuli EFGH Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturq; rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH OH, O E Ducatur per L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF, dimidium eſt parallelogrammi TEFV; majus erit triangulum ELF, quam dimidium ſegmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul majora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c. ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt ſimul quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero. ſi à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis ſegmentis plusquam dimidium, nempe triangula ELF, FMG &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor ma-

gni-

*a* 7. *quinti.*

*b* 14. *pri.*

*c* 11. *dec.*



gnitudo, quam K, exceſſus inter circulum EF, GH, & magnitudinem I. Sint jam circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ major eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS ſimile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D, & rurſus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diviſa ſit circumferentia ABCD, in quod diſtributa eſt circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, ut patet. *a* Quoniam igitur eſt polygonum APB. QCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc eſt, per hypotheſim, ut circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonum APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. *b* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & majus. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

a 1. *duodecimi.*

b 14. *quinti.*

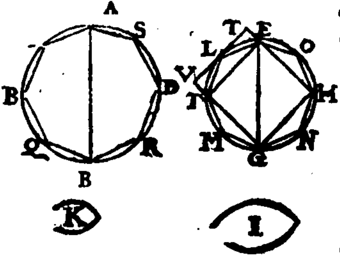
QVAMQVAM autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC, Ita ut generaliter & univerſè demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionē, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſive prior circulus major ſit poſteriore, ſive minor.

SIT deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, *c* major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratrum diametri AG, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum magnitudinem circulo minorem; ſive prior circulus major ſit poſteriore,

c 14. *quinti.*

ſive minor. Quamvis autem circulus A B C D, major eſt, & E F G H, minor; eadem tamen ratione oſtendemus quadratum diametri circuli E F G H, ad quadratum diametri circuli A B C D, non poſſe habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, majorem; quia eodem modo probabimus, (ſi illud concedatur) quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem, quod falſum eſſe jam in priori parte generaliter demonſtratum eſt: Ita ut generaliter & univerſæ quoque demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo majorem: ſive prior circulus major ſit poſteriore, ſive minor. Non ergo major eſt magnitudo I, circulo EF GH: Sed neque minor eſt oſtenſa, æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I: [a] ſit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulũ E F G H, qui æqualis eſt magnitudini I: Erit quoque ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, ſive circulus A B C D, circulo E F G H, major ſit, ſive minor. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

a 7. quinti.



## COROLLARIVM.

(HINC fit, ita eſſe circulum ad circulum, ut polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonſtratum eſt.)

III.

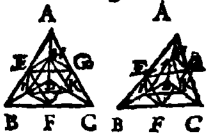
## THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim, dividitur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata majora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT *pyramis, cujus baſis triangulum* A B C, *vertex* D. *Secentur omnia ejus latera biſariam in* E, F, G, H, I, K, *connectanturq; re-*

*ctæ*

rectæ EF,FG,GE, HI,IK, KH,HE,EI,IF. Diviſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH,HIKD,quarum baſes triangula AEG,HIK, & vertices H,D : nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK,quę mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammum EBFG, & triangula oppoſita EHG,BIF: hujus vero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum FIH; habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI: & cum duabus illis pyramidibus componunt totum pyramidem, ut conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D,in ſublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe,& ſimiles toti : Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia,& majora dimidio ,totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD,trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter : *a* erunt HI,



a 2. *ſexti*

AB,parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC : & HK, AC : & EG, BC : & EF, AC : & FG, AB ; & EH, BD : & EI,AD: & IF, DC : & HG,DC. *b* Sunt autem & rectæ FG,HI,cum parallelæ ſint ipſi AB,inter ſe parallelæ: Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH,FI, cum ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH,HEBI, IDHE,EBFG,GHKC,CKIF,FGHI. Quoniam verò rectæ HE,HG,rectis DB,DC, ſunt parallelæ : *c* erunt anguli EHG,BDC,æquales ; Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG,DBC : & HGE, DCB, *d* proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG,lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos : ac proinde ſimile eſt triangulum HEG,triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE,HAG,AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH,pyramidi ABCD, ſimilis eſt,per defin. 9. lib. 11. Rurſus quia rectæ HI,HK, rectis AB, AC,ſunt parallelæ : *e* erunt anguli IHK,BAC,æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI,ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia : ac propterea triangulum HIK,triangulo ABC, ſimile eſt : Sunt autem & triangula DHI,DIK,DKH , triangulis DAB, DBC , DCA , ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib.6. Pyramis ergo HIKD , ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD , per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, ut oſtenſum eſt ex coroll. propoſ.4. lib.6. *g* ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD,conſtituta : ipſa erunt æqualia, per lemma propoſ. 22, lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK , cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo

b 9. *undecimi.*

c 10. *undecimi.*

d 4. *ſexti*

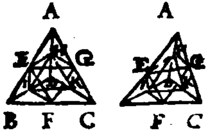
e 10. *undecimi.*

f 4. *ſexti*

g 21. *ſexti.*

A B C, & conſtituta ſuper æquales rectas A H, H D. Pari ratione
æqualia, & ſimilia erunt triangula A E G, H I K, cum ſimilia ſint o-
a 34. pri. ſtenſa triangulo A B C, & ſuper rectas poſita A E, H I, *a* quæ æqua-
les ſunt, ob parallelogrammum A E I H. Non ſecus æqualia erunt
& ſimili triangula E H G, I D K, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo
b 34. pri. B D C, & habeant rectas H E, D I, *b* quæ æquales ſunt, ob parallelo-
grammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales ſunt
& ſimiles, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula u-
nius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, ut demon-
ſtratum eſt.

RVRSVS, *c* quia rectæ E H, H G, G E, æquales ſunt, & parallelæ
c 34. pri. rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, C F G E; *E-*
runt triangula E H G, B I F, æquiangula inter ſe, & æquiangula, per



coroll. propoſ. 8. lib. 1. *Ac* propterea
d 15. undecimi. & ſimilia: *d* Sunt autem & parallela,
cum E H, H G, per quas ducitur planum
E H G, parallelæ ſint rectis B I, I F, per
quas planum B I F, ducitur. Igitur ſoli-
dum B I F G H E, contentum duobus
triangulis E H G, B I F, ex adverſo æqualibus & ſimilibns, & paralle-
li, & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, priſma eſt, ex
defin. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum C F G H I K.
*e* Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales ſint, & parallelæ rectis
e 34. pri. I K, K H, H I, ob parallelogramma C F I K, C G H K, F G H I; erunt tri-
angula G F G, H I K, æquiangula, & æquiangula inter ſe, ac propte-
f1. rea ſimilia: *f* Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per
quas ducitur planum C F G, parallelæ ſint rectis K I, K H, per quas
planum K I H, ducitur. Igitur ſolidum C F G H I K, contentum du-
obus triangulis C F G, K I H, ex adverſo æqualibus & ſimilibus, &
parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H,
priſma eſt. Quoniam vero priſmata E B F G H I, C F G H I K, ſunt e-
juſdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K: &
parallelogrammum E B F G, baſis illius, duplum eſt trianguli C F G,
baſis hujus, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. *g* Ipſa inter ſe æqualia
g 14. undecimi. erunt.

DENIQVE quia priſma E B F G H I, majus eſt pyramide E B-
F I, totum parte; Eſt autem pyramis E B F I, æqualis & ſimilis py-
ramidi A E G H, nec non pyramidi H I K D, ut perſpicuum eſt ex æ-
qualitate & ſimilitudine triangulorũ: Majora erunt priſmata E B F-
G H I, C F G H I K, pyramidibus A E G H, H I K D. Ac proinde *illa*
quidem dimidium pyramidis A B C D, excedent, hæ verò à dimi-
dio ejuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæ-
quales ſecatur, major dimidium ejus ſuperat, minor vero à dimi-
dio

dio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

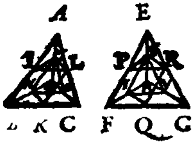
## THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

SI fuerint duæ pyramides ejuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum utraq; diviſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diviſa ſit utraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diviſione natæ ſunt, idq; ſemper fiat; erit ut unius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in una pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

*SINT ſuper baſes triangulares* ABC, EFG, *duæ pyramides* ABCD, EFGH, *ejuſdem altitudinis, quarum latera biſariam dividantur in punctis* I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, *connectanturque rectæ* IL, IK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, *ita ut pyramis utraq; ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in* AILM, MNOD, EPRS, STVH, *& in bina priſmata æqualia* IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; *ut vult propoſitio præcedens*: Eodemque modo intelligatur *eſſe diviſæ pyramides factæ* AILM, MNOD; EPRS, STVH: *& ſic deinceps.* Dico *ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide* ABCD, *ad omnia priſmata generata in pyramide* EFGH, *illis multitudine æqualia, ut eſt baſis* ABC, *ad baſin* EFG. Cum *enim ſit ut* BC, *ad* CK, *ita* FG, *ad* GQ, *eo quod utraque linea diviſa eſt biſariam; ſint autem triangula* ABC, LKC, *ſimilia ſimiliterq; poſita; Item triangula* EFG, RQG, *ex coroll propoſ. 4 lib. 6* a *erit quoque ut triangulum* ABC, *ad triangulum* LKC, *ita triangulum* EFG, *ad triangulum* RQG. *Et permutando, ut* ABC, *ad* EFG, *ita* LKC, *ad* RQG *Vt autem* LKC, *ad* RQG, *ita eſt priſma* CKLMNO, *ad priſma* GQRSTV, *ut mox oſtendemus, atque adeo ita priſma* IBKLMN, *ad priſma* PFQRST, *cum hæc illis ſint æqualia: Et ut unum priſma, videlicet* IBKLMN, *ad unum priſma* PFQRST b *ita ſunt duo priſmata* IBKLMN, CKLMNO, *ad duo priſmata* PFQRST, GQRSTV. *Igitur erunt quoq; ut baſis* ABC, *ad baſin* EFG, *ita duo priſmata in pyramide* ABCD, *ad duo priſmata in pyramide* EFGH. *Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus* AILM, MNOD, *factis*

a 12 *ſexti.*

b 12. *quinti.*



*factis in pyramide* ABCD, *ad bina priſmata in pyramidibus* EPRS STVH, *factis in pyramide* EFGH, *ut ſunt baſes* AIL, MNO, *illarum pyramidum ad baſes* EPR, STV, *harum pyramidum, & ſic deinceps eadem ſemper facta diviſione. Sed ut illa baſes ad has, ita eſt* L K, *baſis qua illis eſt aqualis & ſimilis, ad baſin* RQG, *qua his eſt aqualis, & ſimilis, ut in pracedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis* ABC, *ad baſin* EFG. *Igitur erunt quoq;, ut baſis* ABC, *ad baſin* EFG, *ita priſmata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* ABCD, *ad priſmata cujuslibet pyramidis facta in pyramide* EFGH. *Ac propterea erunt quoq; ut priſmata pyramidis* ABCD, *ad priſmata pyramidis* EFGH. *ita priſmata tam pyramidis* AILM, *ad priſmata pyramidis* EPRS, *quam priſmata pyramidis* MNOD. *ad priſmata pyramidis* STVH: *& ita deinceps. Quare cum ſint, ut duo priſmata pyramidis* ABCD. *ad duo priſmata pyramidis* EFGH, a *ita omnia priſmata in pyramidibus* ABCD, AILM, a 12. *quinti.* MNOD, *&c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus* EFGH, EPRS, STVH, *&c, ſimul, ſi hac illis multitudine ſint aqualia: Erunt quoq;, ut baſis* ABC, *ad baſin* EFG, *ita omnia priſmata in pyramide* ABCD, *ad omnia priſmata in pyramide* EFGH. *Quocirca ſi fuerint dua pyramides ejuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.*

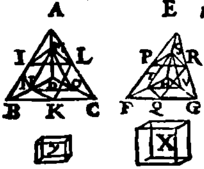
## LEMMA.

QVOD autem ſit LKC, & RQG; ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſis ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur planæ parallelæ ABC, MNO, *b* ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicula- b 17. *undecimi.* rem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, biſariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa biſariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa biſariam ſecabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV. cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, ut baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtravimus.

*THEOR.*

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, ut baſes.



*SINT pyramides ejuſdem altitudinis A*BCD, EFGH, *quarum baſes triangula* ABC, EFG. *Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur ut baſis A*BC, *ad baſin* EFG, *ita pyramis A*BCD, *ad ſolidum* X: *quod vel minus erit, vel majus pyramide* EFGH. *Sit primo minus, magnitudine Y.* Di*vidatur pyramis* EFGH, *in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, juxta propoſ. 3. hujus lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide* EFGH, *in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide* EFGH, *auferatur plusquam dimidium, nempe duo priſmata* PFQRST, GQRSTV; a *quæ majora ſunt dimidio pyramidis* EFGH: *Item à reliquis pyramidibus* EPRS, STVH, *plusquam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps*: b *relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis* EFGH, *ſupra ſolidum* X. *Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis* EFGH, *æqualis ponatur ſolidis X, Y: erunt reliqua priſmata in pyramide* EFGH, *majora ſolido*X. *Dividatur pyramis A*BCD, *in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides* AILM, MNOD, *in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide* EFGH. c *Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide* ABCD, *ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide* EFGH, *ut baſis A*BC, *ad baſin* EFG, *hoc eſt, ut pyramis A*BCD, *ad ſolidum* X. *Sunt autem omnia priſmata in pyramide* ABCD, *minora, quam tota pyramis ABCD*: d*erunt quoque omnia priſmata in pyramide* EFGH, *minora quam ſolidum* X. *Oſtenſa vero ſunt & majora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum* X, *pyramide* EFGH.

a 3. *duodecimi.*

b 1. *dec.*

c 4. *duodecimi.*

d 14. *quinti.*

SIT *deinde ſolidum* X, *pyramide* EFGH, *majus. Quoniam igitur ponitur pyramis* ABCD, *ad ſolidum* X, *ut baſis* ABC, *ad baſin* EFG: *Erit convertendo ſolidum* X, *ad pyramidem* ABCD, *ut baſis* EFG, *ad baſin A*BC. *Ponatur, ut ſolidum* X, *ad pyramidem A*BCD, *ita pyramis* EFGH, *ad ſolidum Y. Et quia ſolidum* Y, *majus ponitur pyramide* EFGH: e *erit & pyramis* ABCD, *major ſolido Y. Quare erit ut baſis* EFG, *ad baſin ABC, ita pyramis* EFGH, *ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide* ABCD. *Quod eſt abſurdum.*

e 14. *quinti.*

*Oſtenſum enim eſt jam, non poſſe eſſe, ut eſt baſis ad baſin, ita pyra̅midē ad ſolidum pyramide minus. Non ergo majus eſt ſolidum X. pyramide* EFGH, *ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur ut baſis* ABC, *ad baſin* EFG, *ita pyramis* ABCD, *ad ſolidum* X: a *ſit autem pyramis* ABCD, *ad ſolidum X, ut ad pyramidem* EFGH, *ſolido* X, *æqualem : Erit quoque ut baſis* ABC, *ad baſin* EFH, *ita pyramis* ABCD, *ad pyramidem* EFGH. *Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.* *a 9. quinti.*

## SCHOLIVM.

CONVERSO modo ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, ut baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim unius altitudo major credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritque ut baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad totam pyramidem. *b* Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum. b 9. *quinti*

## COROLLARIVM.

(HINC fit, pyramidis ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

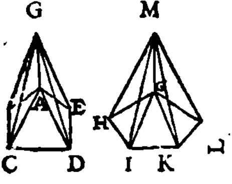
ITEM ſequitur è converſo, pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento oſtendemus, quo in converſo propoſ. 3 (& 31. lib. 11. demonſtrando uſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

vi.

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes inter ſe ſunt, ut baſes.

*SINT pyramides* ABCDEF, GHIKLM, *quarum baſes polygona* ABCDE, GHIKL, *latera multitudine æqualia habentes.* Dico *ita eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia: erit qualibet pyramis in totidem pyramides triangulares diviſa* c *Quia vero eſt, ut baſis* ABC, *ad baſin* ACD, *ita pyramis* ABCF, *ad pyramidem* ACDF: *erit componendo ut baſis* ABCD, *ad baſin,* c 5. *duodecimi.*



ACD

*ACD, ita pyramis* ABCDF, *ad pyramidem* ACDF: a *Sed rurſus eſt ut baſis* ACD, *ad baſin* ADE, *ita pyramis* ACDF, *ad pyramidem* ADEF. *Igitur ex æquo ut baſis* ABCD, *ad baſin* ADE, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* ADEF. *Componendo ergo erit ut baſis* ABCDE, *ad baſin* ADE, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* ADEF. *Simili argumento erit ut baſis* GHIKL, *ad baſim* GKL, *ita pyramis* GHIKL, *ad pyramidem* GKLM: *& convertendo ut baſis* GKL, *ad baſin* GHIKL, *ita pyramis* GKLM, *ad pyramidem* GHIKLM. b *Rurſus quoniam eſt, ut baſis* ADE, *ad baſin* GKL, *ita pyramis* ADEF, *ad pyramidem* GKLM: *Erunt quatuor baſes* ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, *in eiſdem proportionib. cum quatuor pyramidibus* ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, *ut in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit ut baſis* ABCDE, *ad baſin* GHIKL, *ita pyramis* ABCDEF, *ad pyramidem* GHIKLM: *Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.*

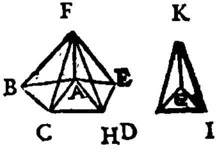
a 5. *duodecimi.*

b 5. *duodecimi.*

| | |
|---|---|
| ABCDE | ABG DEF |
| DE | A DEF |
| GKL | GKLM |
| GHIKL | GHIKLM |

## SCHOLIVM.

QVAMVIS hujus propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus ejuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quarum baſes polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus ejuſdem altitudinis, quarum unius baſis plura continet latera quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides ejuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, hujus vero triangularis. *D*ico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diviſa. *c* Quoniam vero eſt, ut baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem,, ita pyramis, *ABCF*, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: & eodem modo, ut baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis AC*DF*, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: d Erit ut baſis ABC*D*, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quantam quantitatem. Rurſus quia eſt, ut baſis *A*BCD, prima quantitas, ad ba-



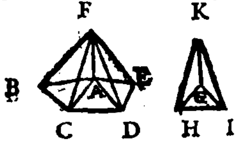
c 5. *duodec.*

d 24. *quinti.*

ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo eſt oſtenſum: *a* & ut baſis ADE, quinta quantitas ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: *b* Erit etiam baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, ut demonſtratum eſt, ſit ut baſis polygona ABCDE, ad baſin, triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK: Erit quoque convertendo, ut baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum unius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, undecunque incipias. Quamvis enim demonſtratio incipiat à polygono, ejuſque pyramide, ut ex demonſtratione conſtat, tamen convertendo licebit initium quoque ſumere à triangulo, ejuſque pyramide, ut dictum eſt.

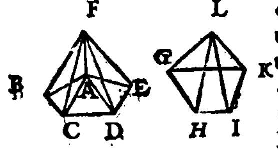
*a 5. duodecimi.*

*b 24. quinti.*



SED jam ſint duæ pyramides ejuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygonæ, ſintque plura latera in una baſe quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono A B C DE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis ejus in totidem diviſa pyramides. quia vero, ut jam eſt demonſtratum, eſt ut baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: & ut baſes ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem: *c* Erit etiam ut baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, ut baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, ut baſis ADE, quinta quantitas, ad baſinGHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, ut ante eſt

*c 24. quin.*



eſt oſtenſum; *a* Erit etiam ut baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.

a 24. *quinti.*

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, convertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, ut baſes: eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea quæ in ſcholio propoſ. 5. hujus lib. diximus, oſtenſa ſunt.

### COROLLARIVM.

(PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides ejuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandem conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandem habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, ut in coroll. 5. hujus lib. diximus.)

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

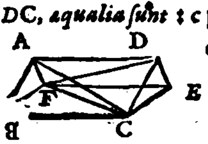
vi.

OMNE priſma triangularem habens baſim, dividitur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

*SIT priſma* ABCDEF, *cujus duo triangula oppoſita æqualia ac ſimilia* ABF, DCE. *Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe* AC, *in* ABCD: CF, *in* BCEF: FD, *in* ADEF. b *Quoniam igitur triangula* ABC, ADC, *æqualia ſunt*; c *eſtque ut baſis* ABC, *ad baſin* ADC, *ita pyramis* ABCF, *ad pyramidem* ADCF, *cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex* F, *vertice ad planum* ABCD, *demiſſam*: *Erunt & pyramides* ABCF, ADCF, *inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides* ADFC, EFDC, *ſuper æquales baſes* ADF, EFD, *conſtitutæ, & ſub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice* C, *ad planum* ADEF, *demiſſa. Eſt autem pyramis* ADCF, *eadem pyramidi* ADFC, *cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi* ADC, *& triangulis* ADF, ACF, DCF: *hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi* ADF, *& triangulis* ADC, ACF, DCF.

b 34. *pri.*

c 5. *duodec.*

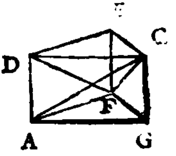


*Igitur tres pyramides* ABCF, ADCF, EFDC, *ſeu* CDEF, (*quæ eadem eſt pyramidi* EFDC, *cum tam* EFDD, *quam* CDEF, *contineatur planis* CDE, EFD, DCF, FCE,) *totum priſma componentes, ut perſpicuum eſt, æquales ſunt inter ſe: Ac propterea priſma* ABCDEF, *in tres pyramides æquales eſt diviſum* Q. *Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Sive priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

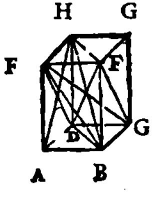
SIT enim primū pyramis BFC, triangularē habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABE. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Nam



ſi ducatur recta DF, erit priſma diviſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, *a* ut demonſtratum eſt: Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, imo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. hujus lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem & altitudinem; ac propterea priſma è contrario eſſe pyramidis triplum.

*a* 7. *duodecimi.*

SIT deinde pyramis ABCDE, cujus baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe



priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diviſum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB: *b* Ac propterea ut una pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma

*b* 12. *quinti.*

ſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſuper eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſuper eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunq; alteri pyramidi ſub eadem altitudine & ſuper eandem baſin ABCD, conſtitutæ, per coroll. propoſ. 5. hujus lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diviſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

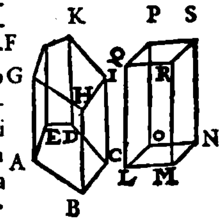
EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam ejuſmodi pyramis, æqualis eſt pyramidi illi, quæ eandem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. hujus lib. Quam quidem tam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

## SCHOLIVM.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

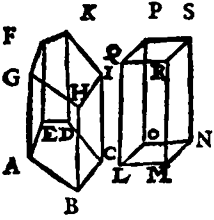
**SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcunq; habeant baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.**

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec non de parallelepipedis, quę nomine priſmatum contineri diximus; Nunc tamen idipſum demonſtrabimus univerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana adverſa, ſive baſes, ſunt polygona, quamvis plura latera, ſeu anguli in unius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur priſmata ejuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes



ſint figuræ multilateræ. Dico ut eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis utriuſque baſis ad unum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum hujus propoſ. quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. a Quã ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, ut baſis ad baſin, ut oſtenſum eſt, propoſ. 6. ejuſque ſcholio. Igitur erit quoq; ut baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.

a 15. quinti.



CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunq; baſium inter ſe ſint, ut baſes ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

## COROLLARIVM II.

(VNDE priſmata ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine: Et priſmata æqualia ejuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac converſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.)

## SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelligantur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, ut in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in hujuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis unum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis ejuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia pars ipſius priſmatis, ut in corollario 1. demonſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, ut in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis concipiatur unum parallelogrammorum, ita ut in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia ejus pars, ſed duæ tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur

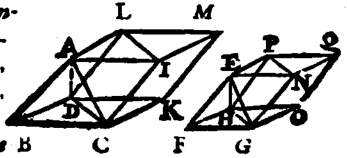
aliud

aliud æquale & ſimile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma ejuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis ejuſdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ut vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, ejuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, ut modo demonſtravimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

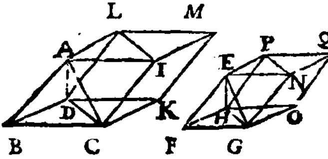
## THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

*SINT pyramides ſimiles triangulares* ABCD, EFGH, *ita ut baſes* ABC, EFG, *ſint ſimiles, & reliqua triangula unius ſimilia reliquis triangulis alterius.* Dico *proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa nempe* BC, FG. *Extendantur enim plana triangulorum* ABC, CBD, DAB, *perficianturque parallelogramma* BI, BK, BL. D*einde ducantur* LM, IM, *rectis* AI, AL, *parallela convenientes in* M. *connectaturque recta* KM. E*rit igitur completum parallelepipedum* BM, *ejuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi* BM, *ſint parallela, ut facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum* FQ. *Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani* ABC, EFG, *ſunt æquales, atque ut* AB, *ad* BC, *ita* EF, *ad* FG; *erunt parallelogramma* BI, FN, *ſimilia. Eodem modo cum anguli* ABD, EFH, *ſint æquales, ſitque ut* AB, *ad* BD, *ita* EF, *ad* FH: *Item anguli* DBC, HFG, *æquales, & ut* DB, *ad* BC, *ita* HF, *ad* FG: *erunt & parallelogramma* AL, BK, *parallelogrammis* FP, FO, *ſimi-*



a24.undec. *ſimilia.* a *Sed tam tria* BI,BK,BL, *parallelepipedi* B *M*, *reliquis*
*tribus oppoſitis* DM, AM,CM, *quam tria* FN,FO,FP, *parallelepipe-*
b24.undec. *di* F*Q. reliquis oppoſitis tribus* H*Q*. E*Q*. GQ, b *ſunt æqualia, & ſi-*
*milia. Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum* B M, *ſimilia ſunt*
*ſex planis ſolidum* FQ, *ambi-*
*entibus: Ac propterea ex deſin.*
*9. lib. 11. ſimilia ſunt parallele-*
*pipeda* B M, FQ. *Quoniam*
*vero ductis rectis* L *I*, F *N*, c
*priſmata* DBCILA, HFGNPE,
c15.quinti. *habent eandem proportionem,*
*quam parallelepipeda* B *M*, E *Q*, *eorum dupla; & pyramides A* B-
CD,EFGH, *eandem, quam priſmata dicta, earum tripla:* d *habe-*
d11.quin. *bunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipe-*
e32.undec *peda.* e *Cum igitur proportio parallelepipedi* BM, *ad parallelepipe-*
*dum* F *Q. ſit triplicata proportionis homologorum laterum* BC, FG;
*erit quoque proportio pyramidis* ABCD, *ad pyramidem* EFC*H*, *pro-*
*portionis* BC, *ad* FG, *triplicata. Similes itaque pyramides, quæ*
*triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.*



## COROLLARIVM.

(Ex hoc quoque eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quàm tria continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia plurium laterum ABCDE, GHIKL. *D*ico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A *B*, GH. Nam ſi ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppoſitos rectæ
f20.ſexti. E*B*, EC, LH, LI, *f* diviſæ erunt baſes ſimiles in triangula numero æqualia, & ſimilia: nimirum triangula ABE, *E*BC, CDE, ſimilia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula A*E*F, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG æqualis; erit ut FE, ad EA, ita M*L*, ad *L*G: Vt autem E A, ad EB, ita LC, ad LH, propter ſimilitudinē triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita *M*L, ad L H. Rurſus quia eſt ut E B, ad *B*A, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et ut *B*A, ad B F, ita H G, ad *H*M, cum ob pyramidum ſimilitudinem ſimilia ſint triangula AB*F*, GHM; Erit quoque ex æquo, ut *E*B, ad BE, ita LH, ad HM: Ac propterea cum ſit, ut FE, ad EB, ita M L, ad LH, & ut EB, ad *B*F, ita L*H*,
.ſexti. ad H*M*, erit etiam ex æquo ut *F*E, ad FB, ita ML, ad M*H*. *g* Quare æquan-

quiangula, atque adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. *a* Quapropter, ut demonſtratum eſt, ut pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingulæ ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL, habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam ſcilicet illius; *b* Atque idcirco erit ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quamobrem, *c* cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH: habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

a 8. *duodec*

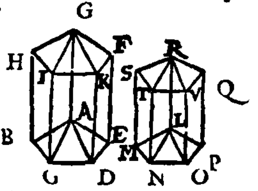
b 12. *quinti,*

c 12. *duod.*

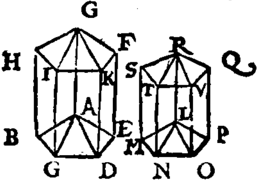
## SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem eſſe triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam ſi ex angulis *A*, & L, ducantur rectæ AC, *A*D: LN, LO, *d* erunt, ut de pyramidibus dictum eſt, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, ſimilia. Similiter, ſi ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK: RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, ſimilia, cum omnia plana priſmatum oppoſita ſimilia exiſtant, per definitionem priſmatis. Quoniam vero ob ſimilitudinem priſmatum, parallelogramma *CH*, NS, ſimilia ſunt, erit ut IC, ad CB, ita TN, ad NM, Vt autem *C*B, ad CA: ita quoque eſt NM, ad NL, ob ſimilitudinem triangulorum BC*A*, MNL. Igitur ex æquo erit ut IC, ad *C*A, ita T*N*, ad NL. Rurſus quoniam angulus ſolidus N, æqualis eſt ſolido angulo C, ob ſimilitudinem priſmatum: ſi ille huic ſuperponatur, omnia inter ſe convenient, nimirū angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: *C*onvenit a. & recta N*L*, rectæ CA, eo ꝙ anguli MNL, BCA, ſunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, ęquales ſūt, Ac ꝓpterea cū latera circa ipſos oſtēſa ſint eſſe proportionalia,

d 12. *ſexti.*



nalia, erunt parallelogramma CG, NR, ſimilia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, ſimilia ſunt. Igitur priſmata ABCIGH, LMNTRS, ſimilia ſunt, ex defin. ſolidorum ſimilium. Non aliter oſtendentur eſſe ſimilia priſmata CDAGIK, NOLRTV, nec non priſmata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter priſmata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad priſmata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea; quæ demonſtravimus ad propoſ. 34 lib. 11. triplicatam habent proportionem ſingula ad ſingula, laterum homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, ſingulorum ad ſingula. Ac propterea eodem modo demonſtrabimus, priſmata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante uſi ſumus ad idem demonſtrandum in pyramidibus multangulis.



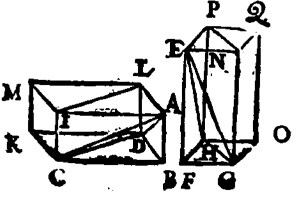
EX quibus omnibus colligitur; pyramides multangulas ſimiles dividi in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifeſtum eſt ex demonſtratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, priſmata multangula ſimilia dividi in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex hujus ſcholii demonſtratione.

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

ÆQUALIUM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines; illæ ſunt æquales.

SINT *æquales pyramides triangulares* ABCD, EFGH. *Dico earum baſes* ABC, EFG, *&* *altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut* ABC, *ad* EFG, *ita altitudinem pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD. *Si enim perficiantur, ut in præcedenti propoſ. dictum eſt, parallelepipeda* BM, FQ, *earundem altitudinum cũ pyramidibus, connectanturque rectæ* LI, PN: *erunt priſmata* DBCILA, HFGNPE, *cũ ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde Parallelepipeda* BM, FQ, *cum ſint*



*ſint priſmatum dupla, æqualia quoq; erunt.* a *Quare baſes eorum* a 34 undec.
*& altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit ut baſis* B I, *ad baſin* F N,
*ita altitudo ſolidi* F Q, *ad altitudinem ſolidi* B M: b *Ut autem baſis* b 15. quinti.
B I, *ad baſim* F N, *ita eſt triangulum* A B C, *ad triangulum* E F G.
*Igitur erit quoque ut baſis* ABC, *ad baſin* E F G, *ita altitudo pyramidis* EFGH, *ad altitudinem pyramidis* ABCD, *cum altitudines pyramidum eadem ſint, quæ parallelepipedorum: Ac propterea baſes & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.*

*Sint jam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, ut prius;* c *cum ſit ut* A B C, *ad*
EFG, *ita parallelogrammum* B I, *ad parallelogrammum* F N: *ſintq;* c 14 quinti.
*eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum: erunt*
*quoq; baſes parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ:* d *Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda* B M, F Q. d 34 undecimi.
*Quare & priſmata* DBCILA, HFGNPE, *eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Eadem ratione Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides

æquales, quarum quidem A B C D, baſin habeat triangularem; at vero E F G H I, non triangularem. Fiat baſi non triangulari E F G H, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera revocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonſtravimus ad propoſ. 42. lib. 1 Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, ejuſdem altitudinis cum pyramide EFGHI: Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem, ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. hujus lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABC D. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; e erit ut baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur autem hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B CD. Ac proinde pyrami-

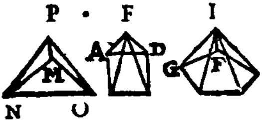
e 6. huius.

dum ABCD,EFGHI , æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

Sed reciprocentur jam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo cum baſis KLM,æqualis ſit baſi EFGH; & altitudo pyramidis KKMN,eadem,quæ pyramidis EFGHI, ponatur autem eſſe ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD,altitudinem : erit quoque ut baſis ABC,ad baſin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN,ad altitudinem pyramidis ABCD. Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD,KLMN. Cum ergo pyramis KLMN,æqualis ſit pyramidi EFGHI,per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ.6.hujus lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI,æqualis.Quod eſt propoſitum.

*a 9.duodecimi.*

Sint deinde pyramides æquales ABCDE,FGHIKL, quarum baſes ſint multangulæ. Fiat rurſus triangulum MNO , æquale baſi ABCD,& pyramis MNOP,ejuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Eritque ex ſcholio propoſ. 6. hujus lib. pyramis MNOP,æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP , æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare,ut nunc demonſtravimus , erit ut baſis MNO, hoc eſt baſis ABCD , ſibi æqualis, ad baſim FGHIK,ita altitudo pyramis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE;(ponuntur hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE , FGHIKL , baſes & altitudines reciprocantur.



Sed reciprocentur jam harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura , cum baſis MNO,æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem ut ABCD, ad FGHIK,ita altitudo pyramidis FGHIKL , ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque ut MNO.ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL,ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare ut ante oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP,FGHIKL. Eſt autem pyramis MNOP,pyramidi ABCDE,æqualis in propoſ.6. hujus lib. Igitur & pyramis ABCDE,pyramidi FGHIKL,æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

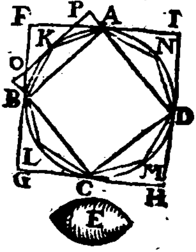
Omnia hæc facile quoque demonſtrabuntur convenire priſmatis quibuſcunq;. Nam ſi priſmata fuerint æqualia,erunt & eorum pyramiramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. hujus lib. Vel certe duæ tertiæ ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, ut in ſcholio ejuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare ut modo demonſtravimus, baſes harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum, reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atq; altitudines.

Rurſus, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, ut demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſquialtera, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 10. PROPOS. 10. ix.

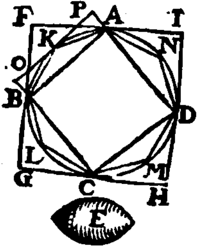
**Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.**

Habeant conus & cylindrus baſin eandem circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FG, HI, ut ad propoſ. 9. lib 4. oſtendimus: a eſtq; ut baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum ejuſdem altitudinis: Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidium parallelepipedi baſis FG HI; Ac proinde parallelepipedum baſis A B C D, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus baſis circulus ABCD, Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC; MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad prop. 27. lib. 3. oſtendimus occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB,



dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, ut baſis ad baſim, quemadmodum ad propo. 7. hujus lib. demonſtravimus; Ac propterea priſma baſis AKB, majus erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cujus baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul majora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata ejuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ majora erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cylindro, cujus baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; *a* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint jam ſegmenta cylindri relicta baſium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni, una cum magnitudine E, ipſa magnitudo E quæ major eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulæ AKBL, CMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum; Non igitur major eſt cylindrus triplo coni.

a 2. *dec.*



Sit deinde cylindrus minor tripli coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudini E, ita ut conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI, intelliganturque ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, ut ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtravimus, *b* eſtque ut baſis

b 6. *duodecimi.*

baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem ejuſdem altitudinis; erit quoque pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin *ABCD*, major erit dimidio coni, cujus baſis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, biſariam in K, L, M, N, adjunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. *a* Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin *ABOP*, *b* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, major erit dimidio ſegmenti coni, cujus baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul majores ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, *MD*, DNA, ſecentur biſariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cono, cuius baſis circulus *A*BC*D*, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; *c* relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponantur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum *AKB*LCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum priſma eandem habens baſim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, ut ſupra in corollario propoſitionis ſeptimæ huius libri à nobis eſt demon-

a 41. *pri.*

b 6. *duodec.*

c 1. *dec.*

monſtratum, erit hujuſcemodi priſma majus cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus, minor eſt triplo coni: Sed neque major triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, proptereaque conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

Quamvis propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis convenit, ut perſpicuum eſt ejus demonſtrationem diligenter intuenti. Itaque propoſitio univerſe ita proponi poterit.

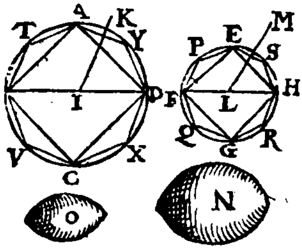
Omnis conus ſive rectus, ſive ſcalenus, tertia pars eſt cujuslibet cylindri ſive recti, ſive ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis licet non ſit idem axis coni & cylindri.

## xi. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes.

Sint ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico ut eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit ut baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad M, quæ vel major erit, vel minor cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea eſſet conus ad conum ut baſis ad baſin: quod non conceditur.

a 7. quinti



Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, dividanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P Q R S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ. &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, ejuſdem altitudinis,

nis, & à reliquis ſegmentis auferantur pyramides ejuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur , ut in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt: *a* relinquetur tandem minor magnitudo ,quam O, exceſſus coni EFGHM , ſuper N. Sunt ergo jam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis major eſt : erit reliqua pyramis, cujus baſis polygonum EPFQCRHS, ejuſdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVGXDY , ſimile polygono EPFQGRHS, ut in propoſ. 2. hujus lib. docuimus , ducanturque circulorum diametri BD , FH. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 2. hujus lib. eſt ut circulus ABCD , ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY , ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EPGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, *b* & ut polygonum , ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem ejuſdem altitudinis cum conis: Erit quoque ut pyramis ATBVCXYDK, ad pyramidem EPFFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, *c* erit & pyramis EPFQGRHSM , minor quam N. Oſtenſa autem fuit & major. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

a 1. *dec.*

b 6. *duodecimi.*

c 14. *quinti.*

Sit ſecundo N, major cono EFGHM. Cum igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N: Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM, major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono , ut eſt baſis illius coni ad baſin hujus coni. Non ergo major eſt N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque major eſt oſtenſa : Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur , ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N : *d* Sit autem ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

d 7. *quinti.*

e 15. *quint.*

*e* Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, qui triplus eſt coni ABCDG,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni FEGHM.) Erit quoque ut baſis ALCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo uſi ſumus in conis, ſi loco conorum & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, in ſe ſunt, ut baſes. Quod demonſtrandum erat.

## SCHOLIVM.

Perſpicuum quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, ut eius demonſtratio manifeſte iudicat, ita ut propoſitio univerſe proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſive ambo recti ſint, ſive ſcaleni, ſive unus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

Convertetur hæc propoſitio hoc modo.

Si coni & cylindri inter ſe ſint, ut baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonſtrabis eo modo, quo converſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

## COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſemper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſive ambo ſint recti vel ſcaleni, ſive unus, rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel una & eadem.

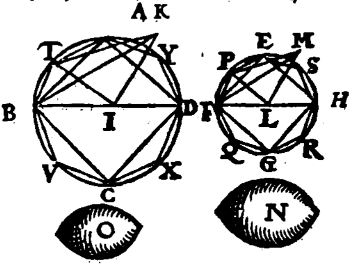
Item ſequitur, conos & cylindros æquales, ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac converſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

## X. THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

*Sint coni & cylindri, quorum baſes circuli* ABCD, EF, GH, *axes vero* LK, LM, *& diametri baſium* BD, FH. *Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus* ABCDK, *ad aliquam magnitudinem* N, *proportionem tri-*

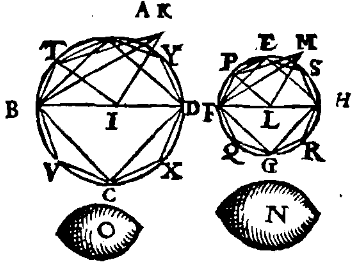
triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim eſſet aqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; a 27. Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, eſſet quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figura, qua in pracedenti propoſitione, ita ut rurſus pyramis EPFQGRHSM, major oſtendatur, quam N. Ducantur deinde recta KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo trianguli BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur recta TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur; erit ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH, b ac propterea ut ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; b 15. quinti Ac permutando, ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti ſint ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum baſes; c Erunt triangula BIK, FLM, aquiangula; c 6. ſexti. d Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Ut autem BI, d 4. ſext. ad BT, ita FL, ad EP, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP, (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint aquales, ut in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtenſum eſt: ſitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob aqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP, & erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex aquo, ut e 5. ſex. KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus quia latera KI, IB, trianguli KIB, aqualia ſunt lateribus KI, IT, trianguli KIT; & anguli dictis lateribus comprehenſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, f erunt baſes KB, KT, aquales. Eodem modo aquales erunt recta MF, MP: f 4. pri. Ac propterea recta KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique ſit proportio aqualitatis. g Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT; ad eandem BT: Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: g 7. quinti. Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT: ita MP, ad FP: Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum ſit ut TK, ad KB, ita PN, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt: habebunt triangula BKT, EMP, latera proportionalia, h ideoque aquiangula erunt: h 6. ſexti.



runt: Ac proindè ſimilia, ex definitione. Non alitèr oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cũ ſint multitudine æqualia, erunt dicta pyramides ſimiles ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. Vt autem BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP: [a] E ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & major. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt magnitudo N, cono EFGHM.

a11. quinti.

b14. quin.



Sit deinde N, major cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH, Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime oſtendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK; ad pyramidem EPFQGRHSM: & convertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PE, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD: habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ACBDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, major ponitur quam conus EFGHK: [c] erit quoque conus ABCDK, major quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conum ad magnitudinem alie-

c14. quinti.

*alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent baſium diametri.* Non ergo major *eſt magnitudo* N, *cono* EFGH. *Sed neque minor eſt oſtenſa. Æqualis igitur eſt;* a *ac proinde conus* ABCDK, *eandem habet proportionem ad conum* EFGHM, *& ad* N. *Cum ergo ponatur conus* ABCDK, *ad* N, *in triplicata proportione diametrorum* BD, *&* FH; *erit quoq; conus* ABCDK, *ad conum* EFGHM, *in earundem diametrorum proportione triplicata.*

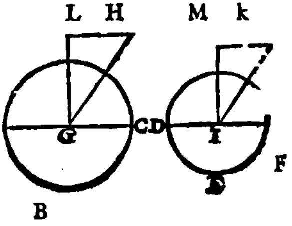
a 7. *quinti.*

b *Quoniam vero, quam Proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli, habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo uſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atq; priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.*

b 15. *quinti.*

## SCHOLIVM.

QVOD ſi major conus, & cylindrus cum minore conferatur perſpicuum eſt, in ſecunda parte hujus propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. hujus lib. minorem pyramidem ad majorem habere proportionem laterum homologorum triplicatã. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere majorem quantitatẽ ad minorem, ut habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



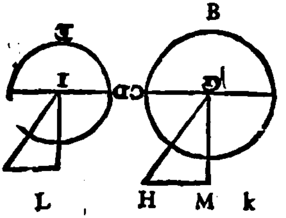
Hæc porro propoſitio, quamvis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilib⁹ conis & cylindris ſcalenis. Sunt ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABCDEF, axes vero GH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatã. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM, *D*ucanturque per rectas GH, GL: Item per IK, I*M*, plana ſecantia baſes lineis rectis *A*C, *D*F, quæ diametri baſium erunt. Quoniã igitur axes G*L*, I*M*, recti ſunt baſibus ABC, DEF, *c* erunt & plana per GH, G*L*: & per IK, IM, ad eaſdem recta. *d* Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, D*E*, cõmunes ſectiones: & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter

c 18. *undecimi.*

d 38. *undecimi.*

ſe

ſe erunt, cum coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt auten a32. primi. & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. *a* Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe ejuſdem altitudinis; erit recta HL, per b19. primi axium vertices ducta ipſi AC, parallela; *b* ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK, Triangula igitur c4. ſexti. GHL, IKM, æquiangula ſunt; *c* atque idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad I *M*; & permutando, ut GH ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita eſt AC. diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſimiles erunt ex definitione. d12. duodec. *d* Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, ut conſtat ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.



xi.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano ſecetur adverſis planis parallelo: Erit ut cylirdrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

*Secetur cylindrus* ABCD, *plano* GH, *parallelo adverſis planis* AB, CD, *quod quidem ſecet axem* EF, *in* I. *Dico ut eſt cylindrus* ABHG, *ad cylindrum* GHCD, *ita eſſe axem* EI, *ad axem* IF. *Intelligatur enim cylindrus* ABCD, *in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo* EC, *ad cujus revolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantum libet*: *Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ* EK, KL, *æquales ipſi* EI. *Item quotcunque rectæ* FM, MN, NO, *æquales ipſi* FI. *Deinde per puncta* I, K, L, M, N, O, *ducantur rectæ* IH, KP, LQ, MT, NV, OX, *parallelæ, & æquales rectis* EB, FC; *quæ quidem ad revolutionem rectanguli* EC, *deſcribent circulos* GH, PQ, QS, Ta, ZV, VZXY, *parallelos æquales* cir-

*circulis* AB, CD, *ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt* S P, P A, *A H*, HD, DT, TZ, *Z* X, *ex definitione, componentes totum cylindrum* SQXY. *Quoniam vero tam cylindri* S P, *P A*, AH, *ſuper baſes æquales* QS, PRBA, *& ſub altitudinibus æqualibus* K *L*, EK, IE, *æquales ſunt, quam cylindri* XZ, *Z* T, *TD*, D *H*, *ſuper æquales baſes* X*Y*, *VZ*, T*a*, CD, *& ſub altitudinibus æqualibus* NO, MN, F M, *I E*, *ex coroll. propoſ.* 11. *hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus* S H, *cylindri* A *H*, *quam multiplex eſt axis I*L, *ipſius axis I*E; *Item tam multiplex cylindrus* XG, *cylindri* CG, *quam multiplex eſt axis* IO, *ipſius axis* IF, *Quoniam autem ſi axis* IL, (*multiplex* I E, *primæ magnitudinis*) *æqualis eſt axi I* O, (*multiplici axis* IF, *ſecundæ magnitudinis*) *æqualis quoque eſt cylindrus* S *H*, (*multiplex cylindri* A *H*, *tertiæ magnitudinis*,) *cylindro* XG, (*multiplici cylindri* C G, *quartæ magnitudinis*,) *ut ex propoſ.* 11. *hujus lib. liquet. Si vero axis major eſt axe, cylindrus quoque cylindro major eſt. Et ſi minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin.* 6. *lib.* 5 *ita axis I* E, *prima magnitudo ad axem* IF, *ſecundam magnitudinem, ut cylindrus AH*, *tertia magnitudo ad cylindrum* CG, *quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur adverſis planis parallelo erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

Etſi hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat, tamen ejus demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri L S, K R, E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta SY, ſemidiametros conjungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, ut conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

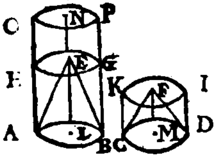
## THEOR. 14. PROPOS. 14. xj.

**Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, ut altitudines.**

*Sint*

a 7. quinti
b 13 duodec.

*Sint ſuper baſes æquales* AB, CD, *duo coni* ABE, CDF, *& duo cylindri* ABGH, CDIK, *quorum axes, ſeu altitudines* (*Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines*) LE, MF. *Dico eſſe conum* ABE, *ad conum* CDF, *& cylindrum* ABGH, *ad cylindrum* CDIK, *ut eſt altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Extendatur enim cylindrus* ABGH, *ad partes* GH, *una cum ejus axe* LE, *& rectangulo* AG; *abſcindaturque axis* EN, *æqualis axi* MF, *& circa centrum* N, *intelligatur circulus* OP, *æqualis & parallelus circulo* GH, *ut fiat cylindrus* GHOP, *ejuſdem altitudinis cum cylindro* CDIK. *Quoniam igitur cylindri* HP, CI, *cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ.* 11. *hujus lib.* a *cylindrus* AG, *ad ipſos eandem habebit proportionem.* b *Eſt autem cylindrus* AG, *ad cylindrum* HP, *ut axis ſeu altitudo* LE, *ad axem ſeu altitudinem* EN, *hoc eſt, ad altitudinem* MF, *ſibi æqualem. Igitur & cylindrus* AG, *ad cylindrum* CI, *erit quoque, ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF.

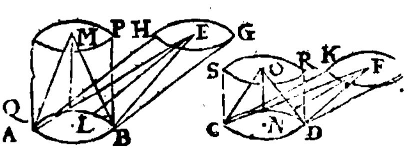


c 10. duodec.
d 15. quinti.

c *Quia vero coni* ABE, CDF, *ſunt tertiæ partes cylindrorum* AG, CI; d *ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus* ABE, *ad conum* CDF, *ut altitudo* LE, *ad altitudinem* MF. *Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat.*

## SCHOLIVM.

Hoc idem convenire conis ſcalenis hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper æquales AB, C*D*, coni *A*BE, CD*F*, & cylindri ABGH, C*D*IK, ſcaleni, quorum altitudines LMNO. Dico conum *A*BE, ad conum C*D*F, & cylindrum *A*BGH, ad cylindrum C*D*IK, eſſe, ut eſt altitudo LM, ad altitudinem NO.



e 14. duodecimi.

Super baſin enim *A*B, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM, Item ſuper baſin C*D*, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO. *e* Quoniam igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Eſt autem cylindro *A*BPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus C*D*IK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

f 10. duodec.

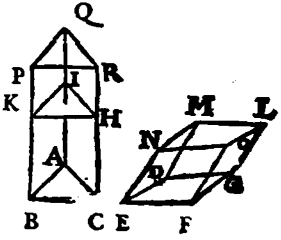
Quoniam autem coni, *f* cum ſint tertiæ partes cylindrorum, ean-

ut eandem habeant proportionem, quam cylindri; Erit quoq; conus a 15. quinti.
A B E, ad conum CDF, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo uſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, ut perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes A B, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinem cum cylindris A B PQ CDRS.

Idem concluditur quamvis unus conorum, & cylindrorum, nēpe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus; alter vero, nimirum conus GDO, & cylindrus, CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ, ſit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO, ut Euclides demonſtravit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

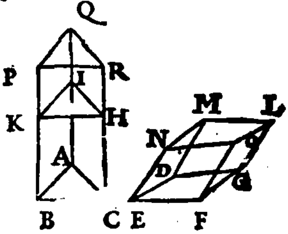
b Quoniam vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, c cum illi horum ſint tertiæ partes, Erit etiam conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, ut altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua uſi ſumus in cylindris, ut manifeſtum eſt. b 15. quinti c 10. duodec.

Eadem quoque hæc propoſitio convenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG; priſmata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinib. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, ut eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, B K, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendiculares, ita ut BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK: Productis autem rectis AI. CH, BK, ſumantur IQ. HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL: & ductis rectis PQ. QR. RP, complentur priſma HIKPQR, ejuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIK. PQR EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia ex coroll. 2. propoſ. 7. hujus lib. d Ac propterea priſma ABCHIK, ad utrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, eſt ut planum BI, ad planum KQ. e Et ut planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma, EL, ut BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL. Quod propoſitum. d 7. quinti e 1. ſexti.



Quod ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, non ſint perpendiculares ad baſin ABC, conſtituendum erit ſuper baſin ABC, aliud priſma cu-

cujus inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK; Nam cum ex 2. coroll. propoſ. 7. hujus lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitque priſma conſtitutum ad priſma E L, ut illius altitudo ad hujus altitudinem, erit & priſma ABCHIK, ad priſma EL, ut altitudo illius, ad altitudinem hujus.



a 15. *quinti.* *a* Quoniam vero pyramides eandem proportionem cum priſmatis, *b* quod illæ ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt altitudo ad altitudinem.

b 10. *quinti.*

Eadem prorſus ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, ut dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

Hæc omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

Omnia quoque hæc facile converti poſſunt hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines baſes habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, ut in converſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

xij.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

*Sint æquales coni* ABCD, DEF, *&* *æquales cylindri* ABGH, DEIK, *quorum baſes* AB, DE; *axes, altitudinesve* LC, MF. *Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut* AB. *ad* DE, *ita* MF. *ad* LC. *In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines* LC, MF, *ſint æquales; cum cylindri ponantur quoque æquales, erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Quare erit ut baſis* AB, *ad baſin æqualem* DE, *ita altitudo* MF, *ad altitudinem æqualem* LC. *Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.*

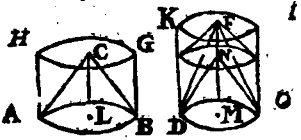
Quod

QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, major, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis: & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, ut in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK: a erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Eſt autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: c Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, imo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC: Ac propterea reciproca ſunt baſes & altitudines.

a 7. quinti.

b 11. duodec.

c 14. duodec.



IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales: erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. d cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare ut oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas: Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo uſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, ut in figura.

d 10. duod.

SED jam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC: erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, ſit conſtructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN: e Eſt autem ut baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: f Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO: g Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

e 11. duod.

f 14. duod.

g 9. quinti

AT vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quamobrem, ut oſten-

*oſtenſum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorũ tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c.* Quod erat *demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

NON difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoq; recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Quare ut oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, ut demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; *A*c propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. inter ſe quoque erunt æquales.

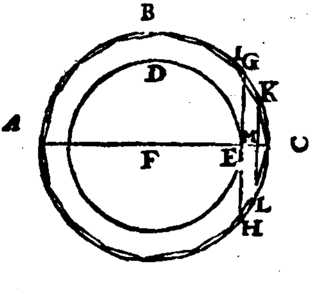
IDEM facile concluderur, licet unus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, ut perſpicuum eſt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. hujus lib. docuimus.

xiii.

## PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

*SINT duo circuli* ABC, DE, *circa idem centrum* F, *oporteatque in majori* ABC, *inſcribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem* D E. *Extendatur per centrum* F, *recta* AC, *ſecans circulum* DE, *in* E, *puncto & per* E, *ducatur* GH, *ad* AC, *perpendicularis, quæ tanget circulum* DE, *in* E, *ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus* AGC, *major eſt arcu* GC, *ſi ex* AGC, *auferatur dimidium* AB, *& ex reſiduo* BC, *dimidium* BI, *& ex reſiduo* IC, *dimidium* IK, *& ſic deinceps;* a *relinquetur tandem*



*1. decimi.* *minor arcus quam* CG. *Sit igitur jam arcus* CK, *arcu* CG, *minor, & ſubtendatur recta* CK. *Dico rectam* CK, *eſſe unum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus* BI, *dividatur in partes numero & magni-*

*magnitudine æquales partibus arcus CI, & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot diviſus eſt quadrans BC; nec non ſemicirculus AHC; in totidem partes, quot continet ſemicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, [a] quæ æquales quidem erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti ſunt: [b] erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DF, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipſum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri CK, [c] ideoque æqualiter cum CK, à centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo, &c. quod erat faciendum.*

a 29. tertii.

b 29. tertii.

c 14. tertii.

## COROLLARIUM.

(HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed tota extra ipſum cadere. Hujuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum *DE*. g)

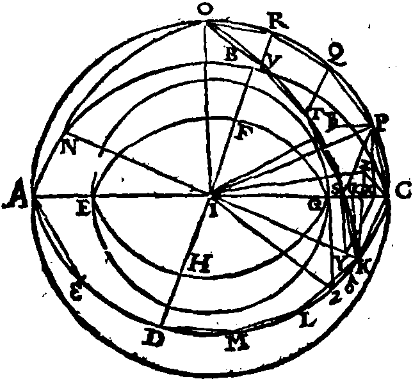
## PROBL. PROPOS. 17.

XIV.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphæræ AB*CD*, EFG*H*, circa idem centrum I, oporteatque in majori *A*BCD, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram EFG*H*. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintque communes ſectiones factæ in ſphæris plana A*B*CD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumvolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus A*B*CD, *E*FGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cum ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem;

erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his
circulis diametri AC, BC, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos re-
a 16. duod. ctos, ut ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. a Deinde in majori
circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem cir-
culum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonſtrentur, in
hunc modum efficiatur. Ex C, ad EG, ducatur perpendicularis G
γ, ad circumferentiam uſque circuli ABCD, quæ circulum EFGH,
b 1. quarti. tangit in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ Gγ, b applicetur
c 19. primi. in circulo ABCD, recta æqualis A ε. Quia vero ſi arcui C γ, in-
telligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum GCγ, c latus C γ, op-
poſitum majori angulo, nempe recto, majus eſt latere G γ, quod
minori angulo opponitur, nimirum acuto: erit quoque recta C γ, major recta A ε; ac proinde arcus Cγ, arcui A ε, major erit, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 28 lib. 3. Abſcindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo
d 1. decimi. CL, dimidium LK, & ſic deinceps; d relinquetur tandem arcus
minor arcu C δ, ſeu arcu A ε. Sit ergo jam arcus CK, minor; Erit-
que recta CK, ſubtenſa minor quam recta A ε, hoc eſt, quam Gγ, ex
ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, eſſe unum latus
polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens ar-
cum C δ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH; ut ex de-
monſtratione præcedentis propoſ. patet: multo minus recta CK,
ſubtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget.
e 12. undec. Rurſus ducta diametro KN, e erigatur ex centro I, ad plana circulo-
rum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæ-
ræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur,
f 18. undec. f quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes ſe-
ctiones, circulos, ut jam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint AOC,
g ſchol. 21. tert. NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. g
quadrantes erunt OC, OK: atque adeo cum circuli ABCD, DOC,
NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſpheræ majoris
diametri, quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur
arcus

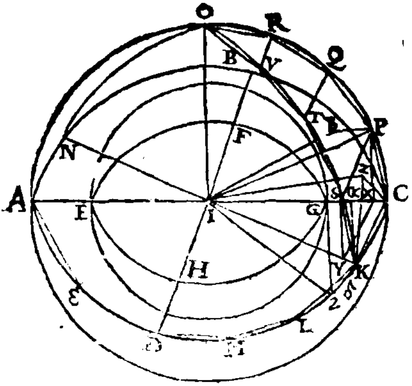


arcus D L, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diviſus fuit
arcus C L: & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitu-
dine æquales arcubus quadrantis C D: *a* Erunt rectæ his omnibus a 29. tert.
arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD: CP, PQ,
QR, RO, KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS,
QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendi- b 38. undecimi.
culares PX, SY *b* quæ in communes ſectiones AC, NK, cadent; *c* E-
runtque inter ſe parallelæ. c 6. undecimi.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKI, anguli PXc, SIK, d 27. tertii
recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *d* & anguli PcX, SKY, æquales, quod
& æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus inſiſtunt: (Nam ſi
ex ſemicirculis AOc, NOK, æqualibus demantur arcus æqua-
les cP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) E-
runt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angu-
lis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis
angulis oppoſita, æqualia. *e* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis e 62. pri.
lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æqua-
les ſint & parallelæ: ſi connectatur recta XY; *f* æquales quoque e- f 31. primi.
runt & parallelæ PS, XY, inter ſeſe. *g* At quia & rectæ CK, XY, pa- g 2. ſex.
rallelæ ſunt, quod latera I c, I K, proportionaliter ſecta ſint. (Si e-
nim ex ſemidiametris I c, I K, æqualibus demantur æquales rectæ
cX, K Y, relinquentur & IX, IY, æquales: A C proinde erit, ut IX, ad
Xc, ita IY, ad I K) *h* Erunt parallelæ quoque P S, cK, inter ſe, cum h 15. duodec.
utraque parallela ſit ipſi XY, *i* ideoque eas conjungentes rectæ c P,
k S; in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totum igitur quadrilate- i 7. undec.
rum c k, S P, in uno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur
ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ
Qc, T k, oſtendemus ſimiliter c k, QT, eſſe parallelas: atque ad-
eo ipſas PS, QT, inter ſe parallelas eſſe, cum eidem c k, ſint paral-
lelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in uno eſſe plano. Eadem
ratione in uno erit plano quadrilaterum QTVR. *k* Eſt autem & k 2. undec.
triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem conſtructio exhibea-
tur ſuper reliqua latera k L, L M, M D, ductis ſcilicet quadrantibus
OL, OM, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemi-
ſphærio, ut tota ſphæra major repleatur quadrilateris, & triangulis,
quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes o c, o k, ſuper latus c k,
conſtructis, inſcriptum erit in ſphæra majori ſolidum polyedrum
circumſcriptum dictis quadrilateris atque triangulis. *Hoc* ergo
dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

DVCATVR enim ex I, ad planum c k s p, perpendicularis I Z,
connectanturque rectæ ZC, Z k. Cadere autem perpendicularem
I k, intra quadrilaterum C k S P, in ſcholio ſequenti oſtendemus.

Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; a a 47. pri. erit quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum I Z, Z K, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, quadratis rectarum I Z, Z K, æqualia: Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipſæ rectę ZC, ZK, æquales. Similiter oſtendemus rectas, quę ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, K, S, P, tranſibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVD, circulos deſcribi poſſe: demonſtrabimus. Quoniam vero, ut poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt: b b 12. ſec. erit quadratum rectæ CK, majus quadratis rectarum Z C, Z K; ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, majus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ Z C.



DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis K, α, Cum igitur AC, dupla ipſius AI, & A α. major ſit, quam AI, erit AC, minor duplo ipſius A α. Quam ob rem, cum ſit, c c 1. ſexti. ut A C, ad A α, ita rectangulum ſub AC, α C, ad rectangulum ſub A α, α C, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, A α, & eadem altitudo α C: erit quoque rectangulum ſub AC, α C, minus duplo rectanguli ſub A α, α C. d d 17. ſex. Eſt autem rectangulum ſub AC, α C, æquale quadrato rectæ C K, & rectangulum ſub A α, α C, æquale quadrato rectæ K α: quod recta CK, inter A C, α C, ſit media proportionalis, & recta K α, inter A α, α C, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ K α. Ac propterea cum quadratum C K, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ Z C, erit quadratum rectæ K α, majus quadrato rectæ Z C. e e 47. pri. Quoniam vero quadratum rectæ I C, æquale eſt quadratis rectarum IZ, Z C, & quadratum rectæ I K, quadratis rectarum I α, α K,

Sunt-

Suntque ęqualia quadrata rectarum æqualium I C, I K. Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarum I α, αK. Si ergo ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, majus quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z major quam recta I α Quapropter cum punctum α, non tangat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta K α, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH , quam punctum Z, ut mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH,

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figurę oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam C K, minorem eſſe recta C γ. a Eſt autem CK, ma- a 19. primi. jor quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, ut mox demonſtrabitur; Multo major erit G γ, quam Z C: Ac propterea quadratum rectæ G γ, majus quadrato rectæ Z C. b Quia vero quadratum rectæ I γ, æquale eſt quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum re- b 47. pri. ctæ I C quadratis rectarum I Z, Z C; ſunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, ęqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectę G γ, & hinc quadrato rectę Z C; relinquetur quadratum rectę I G, minus quadrato rectę I Z; Ac propterea recta I G, minor quam I Z. Quamobrem, cum IG, ſit Sphærę minoris EFGH, ſemidiameter, exiſtet punctum Z, extra eandem ſphęram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, ſphęram EFGH, nequaquam continget.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, ut demonſtratum eſt; Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus ſit, e 47. pri. ex 3. defin. lib. 11. e erit quadratum rectæ I P, ęquale quadratis rectarum I ϐ, β P. Quia vero & quadratum rectæ I C, (quod ęquale eſt quadrato rectę I P, ob ęqualitatem rectarum I C, I P,) ęquale eſt quadratis rectarum I Z, Z C; erunt quadrata rectarum I β, β P, quadratis rectarum, I Z, Z C, ęqualia; Eſt autem quadratum rectę Z C, majus quadrato rectæ β P, quod & linea Z C, major ſit, quam linea β P, ut poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectę I β, reliquo quadrato rectę I Z, majus erit; ideoque & linea, I β, major quam linea I Z. Ac proinde multo magis punctū β, extra ſphęram EFGH, exiſtet, q̃ punctum Z: proptereaq; multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphęram majorē EFGH, Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſſint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus majori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

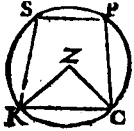
## COROLLARIVM.

(EX iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quavis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro proportionem polyedri in una ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam ejus, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum: ut conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra majorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium: Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulę pyramides in una ſphęra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorũ ſphærarum: ut conſtat ex coroll. propoſ. 8, hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum unius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeo diametrorum ſphęrarum,
a 15. quinti *a* cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.)

## SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, ut vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata: idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonſtranda.

PRIMVM itaque oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod ut commodius fiat, deſcribatur circa dictum qua-

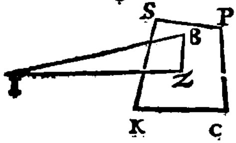


drilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) *Eſt* autem IK, major quam IY: *b* erit & KC, major quam YX.
b 14. quin. *C*um igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſis P, erit quoque KC, major quam SP. Ac propterea in hac figura, arcus CK,
c 24. tertii major erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. *c* Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ: (ſubtenduntur enim arcubus circulo-

rum

rum æqualibus, ut ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S. majores: Atque idcirco quilibet arcum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K, S P, excedet: atque à ſemicirculo ſuperabitur: ac proinde multo magis ſegmentum S P, minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum C K S P. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad planam aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt Kβ, cadere intra quadrilatera: nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum O R V, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus C K, quadrante major eſt: angulus C Z K, obtuſus erit, nempe recto major, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, ut perſpicuum eſt in ſcholio prop. 27 lib. 3.

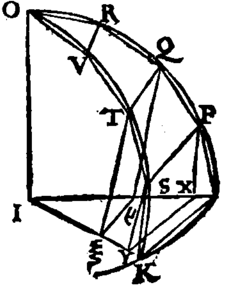
SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius à centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim



quodcunq; aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adjungantur rectæ I θ, Z θ, Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppoſitum Iθ, majus latere I Z, quod minori angulo IθZ: nimirum acuto, opponitur: Ac propterea punctum θ, longius à centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.

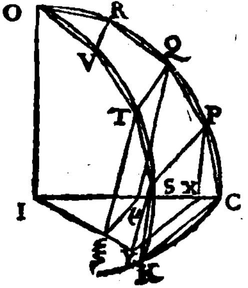
a19.pri.

TERTIO, ac ultimo probandum eſt, rectam Z C, majorem eſſe recta 6 P. Quod ut aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam P S, majorem eſſe recta Q T. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris I C, I K, I O, & quadrantibus O C, &c. Demittantur deinde ex O Q, & T, ad planum circuli A B C D, in quo eſt triangulum I C K, perpendiculares Qμ, Tξ, b quæ in communes ſectiones I C, I K, cadent, c eruntq; inter ſeſe parallelæ, ut de rectis P X, S Y, dictum eſt. Quod ſi adjungatur recta μξ: erunt Q T, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe æquales S P, X Y. d Quia vero μξ, ipſi C K, parallela eſt quod latera I C, I K, proportionaliter ſint ſecta in μ, & ξ, veluti diximus de recta X Y: e erunt quoque μξ, X Y, parallelæ. Quare erit ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ut I Y, ad Y X, ita I ξ, ad ξμ: Eſt autem I Y, major quam I ξ. f Igitur & Y X, major erit quam ξμ: Ac proinde & P S, quæ æqualis eſt ipſi X Y, major erit, quam Q T, quæ æqualis eſt ipſi ξμ.



b 38. und.
c 6. undec
d 2. ſex.
e 30. pri.
f 14. quin.

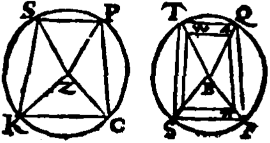
HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli egredianturque è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP: βP, βS, βT, βQ. *Si igitur Z C, non credatur major* quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera Z K, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & baſis KC, major



a 25. primi. eſt baſe P S; a erit angulus KZC, major angulo SβP: Eadem ratione major erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus S T, PQ. ſunt æquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, majores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta ZC, rectæ β P.

b 8. pri.

SIT deinde ZC, minor quam βP, & abſcindantur βπ, βϱ, βω, βφ, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ, πϱ, ϱω, ωφ, φπ, c quæ parallelæ erunt rectis P S, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris ſecta ſunt proportionaliter; ac proinde ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit ut βS, ad S P, ita βϱ, ad ϱπ. Cum ergo βS, major ſit quam βϱ, d erit & SP, major quam ϱ π. Eademque ratione majores erunt ST, TQ, QP rectis ϱω, βφ, φπ: Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πϱ, ϱω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βϱ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint æquales: d erunt anguli ad Z, majores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam β P; Sed neque æqualis eſt oſtenſa: Major igitur eſt. Quod erat oſtendendum.



c 6. ſexti.

d 14. quin.

e 25. pri.

XV.

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

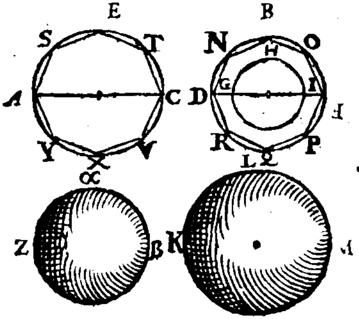
SINT *duæ ſphæræ* ABC, DEF, *quarum diametri* A C, DF. *Dico ſphæram* ABC, *ad ſphæram* DEF, *habere proportionem triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DF. *Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra* ABC, *ad aliam ſphæram* GHI, *minorem, vel* KLM, *majorem, quam* DEF, *triplicatam proportionem diametri* AC, *ad dia-*

me-

metrum AC, ad diametrum DF. Habeat primum ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæra DEF, f Inſcribatur in ſphæra majori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI: Atq; huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, major ſit polyedro ASBTCVXY, a erit & ſphæra GHI, major polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

f 17. duodec.

a 14. quin.



HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et convertendo, ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſ. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionē triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, major ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, major, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, *minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem non habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, ut demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt triplicata ratione ſuorum diametrorum. Quod erat oſtendendum,*

## COROLLARIVM.

(HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, ut polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ſimile habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonſtratum eſt.)

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

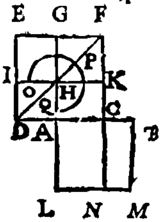
# EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMUM.

## Et ſolidorum tertium.

### THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

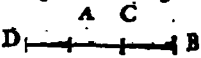
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; majus ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

*Secetur recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitq; majus ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducto diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela, ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N, eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. a Quia ergo eſt ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum CM, ſub AB, GB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC.* a 3. def. ſexti. *Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD,* b 17. ſexti. *ſitque AL, ipſi AB: & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: c Eſt autem ut AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum.* c 1. ſexti. *Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale;* d 34. prim. *erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KO; erit quadratum AM, gnomoni OPQ. æqua-*



*æquale. Quare cum quadratum* AM, *quadruplum ſit quadrati* AI, *ex ſcholio propoſ.* 4. *lib.* 2. *quod linea* AB, *dupla ponatur lineæ* AD, *erit & gnomon* OPQ, *ejuſdem quadrati* AI, *quadruplus.; Ac propterea, ſi gnomoni* OPQ, *addatur ipſum quadratum* AI, *quintuplum efficietur quadratum* CE, *quadrati* AI.

ALITER. *Ex ſcholio propoſ.* 4. *lib.* 2. *quadratum rectæ* AB, *quadruplum eſt quadrati rectæ* AD, *quod linea* AB, *dupla lineæ* AD, *ponatur.* a *Eſt autem quadratum rectæ* AB, *æquale rectangulis* a 2. *ſecund.* *ſub* AB, AC, *& ſub* AB, BC, *comprehenſis; Et rurſus, quod ſub* AB, AC, *æquale eſt ei, quod ſub* AD, AC, *bis; (ſicut enim* AB, AD, b 1. *ſexti.* *eſt dupla,* b *ita quoq; erit rectangulum ſub* AB, AC, *rectanguli ſub* AD, AC, *duplum ipſius cum utriusque rectanguli eadem ſit altitudo* AC, *Ac propterea rectangulum ſub* AD, AC, *bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub* AB, AC.) c *Quod vero ſub* AB. BC, *æquale eſt* c 17 *ſex.* *quadrato rectæ* AC, *cum ſit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Igitur quadratum rectæ* AC, *una cum rectangulo ſub* AD, AC, *bis quadruplum quoq; erit quadrati rectæ* AD; *Ac proinde quadrata rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo ſub* AD, AC, *bis, quintupla erunt quadrati ejuſdem rectæ* AD. d 4. *ſec.* d *Quocirca cum quadratum rectæ* CD, *æquale ſit quadratis rectarum* AC, AD, *una cum rectangulo ſub* AD, AC, *bis; Erit & quadratum rectæ* CD, *quadrati rectæ* AD, *quintuplum. Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.*



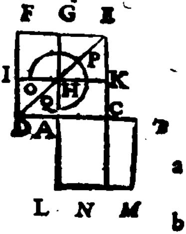
## THEOR. 2. PROPOS. 2.

11. SI recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, majus ſegmentum reliqua pars eſt ejus, quæ à principio, rectæ.

*DIVISA* ſit recta AB, *in C*; poſſitque quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autem ipſius AC, dupla *CD*, quæ, ut poſt oſtendemus, major erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi C*D*, ſecetur extrema ac media ratione, majus ſegmentum eſſe CB, reliquam partem prioris lineæ. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex *C*, ducatur ipſi AF, parallela CG, ſecans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipſi AB; Producta deinde GC, perficiatur quadratum C*M*, protrahaturque EB, ad N. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum poni-

tur

tur quadrati C I: Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon OPQ, ejuſdem quadrati C I, quadruplus: Eſt autem & quadratum C M, quadruplum quadrati C I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla ſit rectæ A C, Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam C D, ponitur ipſius A C, dupla; eſtque L C, ipſi C D: & C H, ipſi A C, æqualis: erit & L C, ipſius C H, dupla. a Cum igitur ſit ut L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum C K: erit quoque illud hujus duplum: b Eſt autem C K, ipſi H F, æquale. Æquale igitur eſt L B, ipſis C K, H F: Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ C D, C B, B D: eſtque rectangulum B M, ſub C D, B D, comprehenſum æquale ipſi K G, quadrato rectæ C B. c Erit ut C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque majus ſegmentum C B.

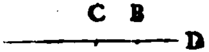


a 1. ſexti.

b 43. pri.

c 17. ſexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C: d eſtque quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis: Erunt & quadrata rectarum C B, A C, una cũ rectangulo ſub A C: C B, bis quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub A C, C B, bis, quadruplum ejuſdem quadrati rectæ A C: Eſt autem & quadratum rectæ C D, ejuſdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Æquale igitur eſt quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis, ęquale ſit rectangulo ſub C D, C B: (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, e ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub A C, C B: cum utriusque rectanguli eadem ſit altitudo C B: Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, ęquale erit rectangulo ſub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectę C B, & rectangulum ſub C D, C B, quadrato rectę C D, ęquale: f At quadratum rectę C D, ęquale eſt rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D. Igitur quadratum rectę C B, & rectangulum ſub C D, C B, ęquale erit rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D. Ac proinde dempto communi rectangulo ſub C D, C B, relinquetur quadratum rectę C B, ęquale rectangulo ſub C D, B D: g ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B, ad D B. Quare ex defin. recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum majus C B. Si igitur recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



d 4. ſecun.

e 1. ſexti.

f 2. ſecun.

g 17. ſexti.

LEM-

## LEMMA.

QVOD autem recta CD, major ſit neceſſario quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla ejuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, majus quadratis rectarum AC, C D, *a* cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo ſub AC, CD, bis. a 14. ſecun. Igitur quadratum rectæ A D, majus quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea majus quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur ejuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, major erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, major erit reliqua CD, quam reliqua C *B*. Quod eſt propoſitum.

## iii. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam majoris ſegmenti, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia majoris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

*S*ECETVR *recta AB, in* C, *extrema ac media ratione, cujus majus ſegmentum* AC, *bifariam dividatur in* D. *Dico quadratum rectæ BD, quadruplum eſſe quadrati rectæ* C D. *Deſcribatur enim ſuper* A B, *quadratum* A E, *in quo diameter* B *F*. *Deinde ex* C, D, *ducantur ipſis* AF, BE, *parallelæ CG, D H, ſecantes diametrum in* I, K, *punctis, per quæ agantur ipſis* AB, EF, *parallelæ* LM, *NO, quæ ſecent rectas* C *G*, DH, *in P*, Q. *Eruntque ex coroll. propoſ* 4. *lib.* 2. *L G*, *P Q*, *D* O, *quadrata rectarum* AC, CD, BD. *Quoniam igitur recta* A G, *dupla eſt rectæ* CD, *erit ex ſcholio ejuſdem propoſ. quadratum* LG, *quadruplum quadrati PQ*, *Eſt autem rectangulum* CE, *æquale quadrato* LG. (*Nam cum ſit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB, b *erit rectangulum ſub AB*, C*B nempe*CE, *æquale quadrato rectæ*AC, *nimirum ipſi LG*.) *Igitur &* CE, *quadruplum erit quadrati* PQ. *Quia vero æqualia ſunt quadrata* NH, *PQ*; *ob æqualitatem rectarum* AD, CD: *erunt earum latera* HK, *IQ*, *æqualia*: c *ac proinde rectæ*EO, O *M*, *ipſis oppoſita æquales erunt*. d *Quare rectangula* IO, *QE*, *æqualia erunt*. e *Eſt autem* IO, *ipſi* I D, *æquale*. *Ergo & QE*, *eidem* I D. *æquale erit*,

b 17. ſexti.
c 34. primi
d 36. pri.
e 43. primi

*erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO, totus gnomon RST, rectangulo CE, erit aqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati PQ: erit etiam gnomon RST, ejuſdem quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD*

*ALITER.* *Cum AC, diviſa ſit bifariam in D, & ei addita CB, a erit rectangulum ſub AB, BC, una cum quadrato recta CD, aquale quadrato recta BD.* a 6.ſecun. *At rectangulum ſub AC CB, quadruplum eſt quadrati recta CD; (Nam cum ſit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; b erit rectangulum ſub AB, AC, aquale quadrato recta AC: quod cum ex ſcholio propoſ. 4. l. 2. quadruplum ſit quadrati recta CD: erit & rectangulum ſub AB, BC, quadruplum ejuſdem quadrati recta CD.) Ac propterea rectangulum ſub AB, BC, una cum quadrato recta CD, quintuplum quadrati recta CD. Igitur & quadratum recta BD, quintuplum erit quadrati recta CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam majoris ſegmenti, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia majoris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.* b 17.ſex.

## SCHOLIVM.

CONVERSVM hujus theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur; & minus ſegmentum aſſumens dimidium majoris ſegmenti quintuplum poſſit ejus, quod à dimidia majoris ſegmenti deſcribitur quadrati. Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diviſa inæqualiter in C, cujus majus ſegmentum AC, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diviſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore hujus propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon RST, ejuſdem quadrati PQ, quadruplus, (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ,) ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, ejuſdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG. At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, ut ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum: c Ac proinde erit, ut AB, ad AC, ita AC, c 17.ſext.

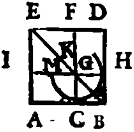
ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

a 6. ſecundi. ALITER. Cum AC, diviſa ſit bifariam in D, & ei addita GB, a erit rectangulum ſub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD: Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, deſcripti; erit & rectangulum ſub rectis lineis AB. BC, deſcriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum ejuſdem quadrati rectæ CD, Quare ablato quadrato rectæ CD: rectangulum ſub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Eſt autem ejuſdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. Igitur quadrato rectę AC, æquale eſt rectangulum ſub AB, BC. b Quamobrem erit, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione. b 17. ſexti.

## V. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul utraque quadrata, tripla ſunt ejus, quod à majore ſegmento deſcribitur, quadrati.

*SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque ſegmentum majus AC, & minus CB, Dico quadrata rectarum AB, BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipſi BD, parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC ex coroll propoſ. 4. lib 2. Quoniam igitur eſt, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: c erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale ſit ipſi CD: erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF: Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, ejuſdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.* c 17. ſexti. d 17. ſex.



*ALITER. Quoniam eſt, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: d erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum ſub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. e Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, ſimul æqualia quadrati rectæ AC, una cum rectangulo ſub AB, BC. bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC. Quocirca ſi recta ſecundum extremam & me-* e 7. ſecun.

*mediam rationem ſecetur; Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul utraq; quadrata, tripla ſunt ejus, quod à majori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.*

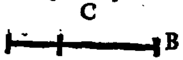
## SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam hujus verum eſt, videlicet.

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, una cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex majore ſegmento deſcripti; Recta illa extrema ac media ratione ſecabitur.

SECTA ſit recta A B, inæqualiter in C, ita ut quadratum totius A B, & quadratum minoris ſegmenti B C, utraque ſimul tripla ſint quadrati majoris ſegmenti A C. Dico rectam A B, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, ut prius; cum quadrata A D, C H, tripla ſint quadrati I F, dempto quadrato I F, erit gnomon K L, una cum quadrato C H, duplus ejuſdem quadrati I F: *E*ſt autem gnomon K L M, una cum quadrato C H, æqualis duobus rectangulis A H, C D; Igitur & rectangula A H, C D, dupla ſunt quadrati I F: *A*c proinde cum æqualia ſint A H, & C D, erit A H, ipſi I F, æquale. Quapropter cum rectangulum A H, ſub A B, B C, æquale ſit quadrato I F, rectæ A C: *a* erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: Ac propterea A B, diviſa erit in C. extremà ac media ratione. a 17. *ſexti.*

ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla ſint quadrati rectæ A C; *b* Sint vero quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo ſub AB, BC, bis: erit & quadratum rectæ A C, una cũ rectangulo ſub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. b 7. *ſecũdi.*



*D*empto ergo quadrato rectæ AC; relinquetur rectangulum ſub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum ſub AB, BC ſemel, æquale quadrato rectæ AC. *c* Quare ut prius erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, ſecta erit extrema ac media ratione. c 17. *ſexti.*

EX Franciſco Maurolyco demonſtrabimus quoque theorema, quod ſequitur.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt ejus, quod à majori ſegmento deſcribitur quadrati: Et ſi recta linea inæqualiter ſecetur, totaque aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum ejus, quod à majori ſegmento deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt.

SIT primum recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum eſſe quadrati ex AC, majore ſegmento. a Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater contento, una cum quadrato ex AC: b Rectangulum autem ſub AB, BC, æquale eſt quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, ſint continue proportionales) erit rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, AC, quater una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC quater, una cum quadrato ex AC,) ejuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.

a 8. ſecundi.
b 17. ſexti

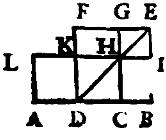
SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitque quadratum ex AD, quadrati ex AC, majori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectam eſſe extrema ac media ratione. c Quoniam enim quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC; quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC. d Igitur erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.

c 8. ſecundi
d 17 ſexti.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis majori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & majus ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

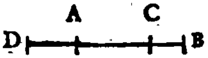
*SECETVR rectâ AB, in C, extrema ac media ratione; ſitque majus ſegmentum* AC, *& adjiciatur ei in rectum AD, æqualis majori ſegmento* AC. *Dico rectam* BD, *ſecari in* A, *extrema ac media ratione, eſſeq; majus ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum* BF, *in quo ducta diametro* AE, *ducatur ex* C, *ipſi* BE, *parallela* CG, *ſecans diametrum in* H, *puncto, per quod agatur ipſi* BD, *parallela* IK, *& ex D, ducatur ipſi*



*ipſi AF, parallela DL, occurrens ipſi IK, producta in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur eſt ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; a Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. b Eſt autem CK, ipſi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi AL: additoq́ communi BK, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB: c Ac proinde erit ut BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtq́ majus ſegmentum AB.*

a 17. *ſexti.*
b 36. *primi*
c 17. *ſexti.*

ALITER. *Quoniam eſt ut AB, ad AC, hoc eſt, ad AD, ita AC, ad CB: Erit convertendo ut DA, ad AB, ita BC, ad DA: & componendo ut DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt BD, in A, extrema ac media ratione Itaque*



*ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, opponaturque ei æqualis majori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIUM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex majori ſegmento ſegmentum minus; erit majus ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cujus majus ſegmentum AB, minus autem ſegmentum AD, & ex majori ſegmento AB, detrahatur recta AC. æqualis minori ſegmento AD. Dico majus ſegmentum AB, diviſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & majus ſegmentum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit ut BD, ad AB, ita AB, ad AD, *d* erit rectangulum BL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB: & ablato communi BK, erit AL, æquale ipſi IF: *e* Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC: *f* Ac proinde erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, cujus ſegmentum majus eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum

d 17. *ſexti.*
e 36. *primi.*
f 17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt ut tota BD, ad totam AB, ita AB. detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; *g* erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, ut tota DB, ad totam AB, hoc eſt, ut AB, ad AC: Ac propterea

g 19. *quinti.*

diviſa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia majoris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diviſa extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit dimidium majoris ſegmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, ſitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium majoris ſegmenti AC. Dico DE, in F, ſecari extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum eſſe DF. Cum enim ſit ut AB, tota ad *D*E, totam, ita *A*C, ablata ad D F, ablatam, cum utrobique ſit proportio dupla: *a* erit quoque reliqua C B, ad reliquam *F*E, ut tota ad totam: *A*c proinde & CB, dupla erit ipſius FE. *b* Quoniam vero eſt, ut AB, ad *A*C, ita *D*E, dimidia illius, ad FE, dimidiam hujus; *E*ſt autem ex defin. lineæ ſectæ extrema ac media ratione, *A*B, ad *A*C, ut *A*C: ad CB: erit quoque DE, ad DF, ut D F, ad F*E*: *A*c proinde ex eadem defin. DE, ſecta erit in *F*, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

a 19. *quinti.*

b 15. *quinti.*

vi.

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

*SECETVR recta* Rationalis AB, *in* C, *extrema & media ratione.* Dico *utrumque ſegmentum A*C, C B, *eſſe lineam Irrationalem, qua Apotome dicitur. Addatur enim majori ſegmento* AC, *recta* AD, *æqualis dimidia totius AB.* c *Quoniam igitur quadratum recta* CD, *quintuplum eſt quadrati recta* AD: *habebit quadratum recta CD, ad quadratum recta* AD, *proportionem, quam numerus ad numerum.* d *Quare commenſurabilia erunt quadrata rectarum* CD, AD: *proptereaque ipſa recta* CD, AD, *commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem* AD, *Rationalis, cum ſit dimidia linea Rationalis* AB. *Igitur &* CD, *Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum* CD, AD, *non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.)* e *erunt recta* CD, AD, *longitudine in-*

c 1. *tertii dec.*

d 6. *dec.*

e 9. *dec.*

*commenſurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis; a erit reliqua AO, Irrationalis,* a 74. deci. *quæ appellatur Apotome.*

*RVRSVS applicata ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB: cum ſit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB,* b 17. ſexti *b erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, c facit alterum latus BE, hoc eſt rectam* c 98. deci. *CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque majus ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

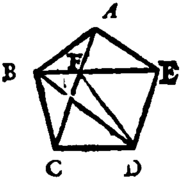
SIT recta AB, extrema ac media ratione diviſa in C, ſitq; majus ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diviſa enim AC, bifariam in D: erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis, cum ſit ipſi AC, commenſurabilis. *d* Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati d 3. tertii dec. rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum: *e* ac propterea commenſurabilia exiſtent. Quare & ipſæ rectæ ED, CD, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. e 6. decim. Cum igitur CD, ſit Rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum (ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles: Ac proinde ſi à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commenſurabilis; *f* erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur f 74. dec. Apotome.

## THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſive qui deinceps, ſive qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT *in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps ſint, æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe* æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD: & ex puncto F, ubi ſe interſecant rectæ BF, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD, & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; a erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; b Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD: Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: c Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; d erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera AF, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli FCD: & baſis communis FD; e erunt & anguli dictis lateribus contenti GED FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE: erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

a 4. pri.
b 5. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 8. pri.



SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD: & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi: f Erunt & baſes BE, BD. & anguli AEB, CDB, æquales: g Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE: erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D: Ac proinde, ut jam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

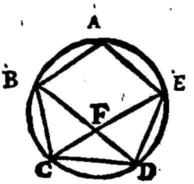
f 4. primi.
g 5. primi.

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

xi.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæc extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & majora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuo



*mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, majoraq; earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni.* a *Deſcripto enim circulo circa pentagonum;* b *erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, CB, trianguli DCB: & anguli quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi:* c *Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales: ac proinde cum in triangulo CDE, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales.* d *& ipſis æqualis ſit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE:* e *Eſt autem & angulus BCE, ejuſdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt:* f *Ideoq; recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis.* g *Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes æquales ſunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD.* h *Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD.* i *Quare erit ut BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualem ipſi DC, ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque majus ſegmentum DF, lateri pentagoni æquale, ut oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, majusq; illius ſegmentum EF, æquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.*

a 14. *quarti.*
b 28. *tertii.*
c 4. *primi.*
d 32. *pri.*
e 33. *ſexti.*
f 6. *primi*
g 27. *tert.*
h 32. *Primi*
i 4. *ſext.*

## SCHOLIVM.

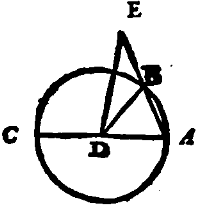
FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe oppoſito lateri: hoc eſt, BD. parallelam eſſe lateri AE, & CE, lateri AE. Deſcripto enim circulo circa pentagonum. k Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & ABC, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus ſint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: *l* ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

k 22. *tertii*
l 28. *primi.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur; Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & majus ejus ſegmentum eſt hexagoni latus.

*In circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectum addatur*



*BE, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti.* Dico EA, *rectam ſectam eſſe in* B, *extrema ac media ratione, majuſq; ſegmentum eſſe* EB, *latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum* D, *diametra A* C. *conjunganturq; rectæ* DB, DE. *Quoniam igitur* AB, *arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus ſemicirculi arcum* AB, *quinquies: Ac proinde arcus* B C, *quadruplus erit arcus* AB. a *Quare & angulus* BDC, *anguli* ADB, *quadruplus e-*
a 33. ſex. *rit. Rurſus quia latera* BD, BE, *ſunt æqualia, nempe latera hexagoni: (eſt enim* BE, *latus hexagoni ſemidiametro* BD, *æquale, ex coroll. propoſ.15. lib.4.)* b *erunt & anguli* BDE, BED, *æquales:* c *quibus*
b 5. pri. *cum æqualis ſit externus* ABD: *erit angulus ABD, duplus anguli*
c 32. pri. BED: d *Eſt autem angulo* ABD, *æqualis angulus* BAD, *ob æquali-*
d 5. primi. *tatem laterum DA, DB. Igitur & angulus* BAD, *duplus erit anguli* BED: *ac proinde duo anguli* DAB, DBA, *ſimul quadrupli e-*
e 32. Primi *runt anguli* BED e *Cum ergo angulis* DAB, DBA, *æqualis ſit externus* BDC, *erit angulus* BDC, *quadruplus ejuſdem anguli* BED: *Atqui idem angulus* BDC, *oſtenſum fuit quadruplus anguli* ADB. *Igitur æquales ſunt anguli* AED, ADB. *Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli* ADE, *æquales ſint duobus angulis* ADB,
f 32. primi. BAD, *trianguli ABD,* f *erunt triangula* ADE, ABD, *æquiangula.*
g 4. ſex. g *Igitur erit ut EA, ad* AD, *hoc eſt, ad* EB, *ipſi* AD, *æqualem, ita AD hoc eſt,* EB, *ſibi æqualis ad* BA: *Atque idcirco recta* EA, *ſecta eſt in* B, *extrema & media ratione, eſtque majus ſegmentum* EB, *latus hexagoni.* Itaq; *ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & majus ejus ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.*

## SCHOLIVM.

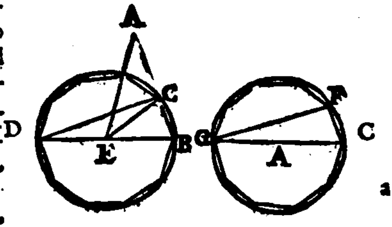
QVIA verò demonſtravimus ad propoſ.5. hujus lib. ſi minus ſegmentum lineæ diviſæ extrema ac media ratione ex majori ſegmento detrahatur, majus ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, ejuſq; ſegmentum majus eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, majus illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt majus ſegmentum, diviſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, ut ad propoſ.5. hujus lib. oſtendimus. *Hoc* tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ.4.

CONVERSVM quoq; hujus theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus Videlicet.

SI

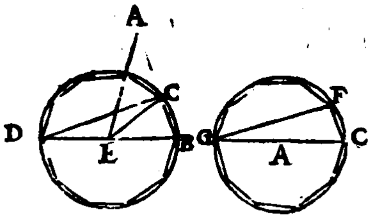
**SI linea diviſa extrema ac media ratione majus ſegmentum fuerit latus hexagoni alicujus circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni ejuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicujus circuli; Erit majus ſegmentum latus hexagoni ejuſdem circuli.**

SIT enim AB, diviſa in C, extrema & media ratione, ſitque primum A C, latus hexagoni circuli B C D. Dico minus ſegmentum C B, eſſe ejuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim B C, in circulo, ita ut C A, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro B E D, connectantur rectæ E A, E C. Quia ergo eſt, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B: & eſt A C, latus hexagoni æquale ſemidiametro E B, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoq; ut A B, ad B E ita E B, ad B C, *a* ideoque triangula A B E, E B C, æquiangula erunt, cum habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo B E C, æqualis. Rurſus quia latera C A, C E, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; *b* erunt anguli C A E, C E A, æquales; quibus cúm æqualis ſit externus E C B, erit E C B, duplus anguli A: *d* Eſt autem angulo E C B, angulus C B E, ob æqualitatem laterum E B, E C, æqualis. Igitur & C B E, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli B C E, C B E, ſimul quadrupli erunt ejuſdem anguli A. *e* Cùm ergo angulis B C E, C B E, æqualis ſit externus C E D; erit quoque angulus C E D, ejuſdem anguli A, & propterea anguli B E C, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus. *f* Quare & arcus C D, quadruplus erit arcus B C; Ac proinde arcus ſemicirculi B C D, ejuſdem arcus B C, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arc⁹ B C. Quapropter recta B C, latus eſt decagoni.



a 6. *ſex.*
b 5. *primi.*
c 32. *primi.*
d. 5 *primi.*
e 32. *pri.*
f 33. *ſexti.*

SIT deinde C B, minus ſegmentum, latus decagoni circuli B C D, Dico majus ſegmentum A C, eſſe ejuſdẽ circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus B C, in circulo B C D: ducaturq; diameter B E D. Deinde intervallo A C, deſcribatur circulus C F H, *cujus diameter* C A G; eritq, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. A C, latus hexagoni circuli C F. Quoniam igitur A B, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtque majus ſegmentum A C, latus hexagoni circuli C F G: erit ut jam oſtenſum eſt, minus ſegmentum C B, latus decagoni ejuſdem circuli C F G. Deſcribatur ergo in circulo C F G, decagonum æquilaterum, & æquiangulum C F G: Item in circulo B C D: decagonum æquilaterum, & æquiangulum B C D: eruntque latera B C, C F, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi con-



ſi connectantur rectæ C B, F G, anguli C D B, F G C, ſunt æquales, ut in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilib' B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoq; anguli B C D, C F G, in ſemicirculis æquales, *a* nimirum recti; *b* Erunt quoque latera B D, C G inter ſe æqualia. Quamobrẽ cum diametri B D, C G, ſint ęquales, æquales quoque erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde cum recta A C, ſit latus hexagoni circuli C F G, erit quoque eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod eſt propoſitum.

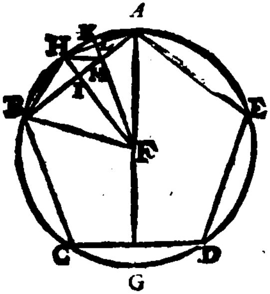
*a 31. tertii.*
*b 36. pri.*

x.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

In circulo A B C D E, cujus centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni ejuſdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diviſo deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, ſecans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & E F, latus hexagoni. Rurſus diviſo arcu *A*H, bifariam in K, adjungatur recta F K, ſecans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales ſunt; *c* erunt & anguli ipſis inſiſtentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia ſint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipſi contenti æquales quoque; *d* erunt & baſes A I, B I, æquales & anguli A I F, B I E, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus A B, D G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter ſeſe æquales, ideoque erit arcus C G, dimidium arcus C D Eſt autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales ſint: erunt quoque eorum dimidii arcus C O, A H, æqua-



*c 27. tertii*
*d 4. primi.*

qua-æquales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus ſit arcus HK, erit & arcus CG, duplus ejuſdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales ſunt, & eſt arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, ejuſdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquè multiplices ſunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; *a* Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, *b* & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: *c* Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus eſt quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM, FAB, æquales; *d* Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. *e* Quocirca erit ut AB, ad BF, ita BF, ad BM; *f* ideoque rectangulum ſub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. *quinti.*
b 33. *ſexti.*
c 20. *tert.*
d 32. *pri.*
e 4. *ſex.*
f 17. *ſex.*

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia ſunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti; *g* erunt & baſes AM. HM, & anguli LAM, LHM, æquales: *h* Eſt autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia ſint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; *i* Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. *k* Quamobrem erit ut AB, ad AH, ita AH, ad HM; *l* ideoque rectangulum ſub AB, AM, æquale erit quadrato rectę AH: Oſtenſum eſt a. & rectangulũ ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, ſimul ęqualia ſunt quadratis rectarum BF, AH. *m* At vero rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, æqualia ſunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. *primi*
h 5. *primi.*
i 32. *primi.*
k 4 *ſex.*
l 17. *ſex.*
m 2. *ſecundi.*

## COROLLARIVM I.

(HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro dividit arcum quempiam bifariam, dividere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quod arcum AB, dividit bifariam, dividere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris eſt demonſtratio.

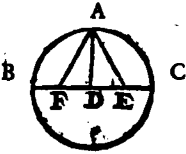
## COROLLARIVM II.

(PERSPICVVM quoque eſt, diametrum circuli ex angulo quovis pentagoni ductum dividere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos: Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam divipere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum,

trum, ſecabit quoque latus CD, biſariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuit impar, ut conſtat.

## SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxin quandam ex Ptolomeo tradidimus, qua una eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum deſcribitur, ejuſq; demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cujus centrum D. Ducta autem diametro BG, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diviſa ſemidiametro CD, biſariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adjungaturq; recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, ſecta ſit biſariam in E, eique addita DF, *a* erit rectangulū ſub CF, DF, una cum quadrato rectæ DE; æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis. *b* Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum ſub CF, DF, una cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE: Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE; relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD. *c* Quamobrem erit ut GF, ad CD, ita CD, ad DF, proptereaque recta CF, diviſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur majus ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni ejuſdem circuli, ut demonſtravimus ad propo. 9. hujus lib. *d* Rurſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, una cum quadrato lateris decagoni DF, æquale eſt quadratum lateris pentagoni ejuſdem circuli; *e* Eſt autem ejuſdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF: erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF: ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.



*a* 6. *ſecundi.*

*b* 47. *primi*

*c* 17 *ſexti.*

*d* 10. *tertiidec.*

*e* 47. *pri.*

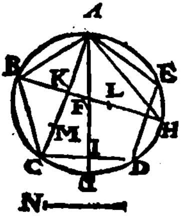
xi.

## THEOR. II. PROPOS. II.

SI in circulo Rationalem habent diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem: deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico ejus latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AG, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K, Ab-ſcin-

ſcindatur quoque ex ſemediametro FH, quarta ejus pars FL: Item ex recta AC, quarta ejus pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis: erunt quoque FL, BF, illi commenſurabiles: cum ſint ejus partes aliquotæ, Rationales: Atque idcirco & tota BL, compoſita, *a* cum ſit commenſurabilis utrique FL, BF, Rationalis erit.



a 16. *dec.*

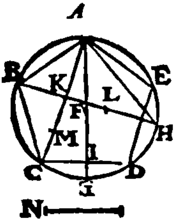
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat arcum AC, bifariam in B: ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L. & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. ejuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, *b* æquiangula inter ſe erunt. *c* Quamobrem erit, ut CI, ad CA, ita FK, ad FA: & permutando ut CI, ad FK, ita CA, ad FA, ſive ad FH, ipſi FA, æqualem. *d* Vt autem CA, ad FH, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad FL, quartam partem ipſius FH. Erit igitur ut CI, ad FK, ita CM, ad FL: & permutando, ut CI, ad CM, hoc eſt, ut CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad FL: Atque componendo, ut CD, CK, ſimul ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL: *e* Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia verò ſi AG, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) *f* majus ejus ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi CD: *g* Erit quadratum rectæ compoſitæ ex CD, majori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, *h* ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL: Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. *primi*
c 3. *ſext.*
d 15. *quinti.*
e 22. *ſexti.*
f 8. *tertii dec.*
g 1. *tertij dec.*
h 6. *dec.*

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL: ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1 eſt quadratum rectæ FL, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. *i* habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. eſt quadratum rectæ FL, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. eſt quadratum rectæ BL, talium 5. eſt quadratum rectæ KL: ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadra-

i 20. *ſexti.*

dra-



*dratum,(ut patet ex coroll. propoſ.24. lib.8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad*
a9.dec. *1.)* a *Erunt rectæ* BL, K L, *longitudine incommenſurabiles : ideoque cum oſtenſæ ſint, Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali* BL, *dematur Rationalis* KL, *potentia tantum commenſurabilis.* b *erit reliqua* BK, *Irrationa-*
b 74. dec. *lis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit* KL.

*I* A *M vero recta* BL, *poſſit plus, quam recta* KL, *quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ* B L, *æquale eſt quadratis rectarum* KL, *&* N*: Qualium autem partium 5. fuit quadratum rectæ* BL, *talium I, fuit quadratum rectæ* KL. *Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ* BL; *Ac propterea quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem*
*habebunt, quam numerus ad numerum.* c *Quare commenſura-*
c 6.dec. *bilia erunt : propterea rectæ ipſæ* BL, *& N, commenſurabiles, ſaltem potentia : Eſt autem* BL, *oſtenſa* Rationalis. *Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum* BL, *&* N, *proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (ut perſpicuum eſt ex coroll. propoſ 24 lib. 8. quod proportio eorum*
d9.dec. *ſit, quæ 5. ad 4.)* d *Erunt rectæ* BL, *& N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta* BL, *Rationalis longitudine ſit commenſurabilis Rationali* BH*: (Qualium enim partium 8. eſt* BH, *talium 5 eſt* BL.*) poſſitque plus, quam congruens* K *L, quadrato rectæ N. ſibi longitudine incommenſurabilis, ut oſtenſum eſt : Erit* B K, *Apotome quarta, ex definitione.*

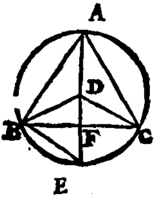
POSTREMO *quia recta* AB, *eſt media proportionalis inter* B H,
e31. tert. B K, *ex coroll propoſ.8. lib 6. (quod triangulum A* B H, e *habeat*
f17. ſexti. *angulum* BA*H, rectum, à quo ducta eſt* AK, *ad baſin perpendicularis.)* f *erit quadratum rectæ* AB, *æquale rectangulo ſub* B H, B K.
*Quocirca cum ſuperficiem contentam ſub rationali* B *H, & Apotoma*
g95.dec. *quarta* BK, *poſſit recta linea* A B: g *Erit* AB, *linea minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

*IN cir-*

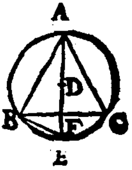
*IN circulo ABC, cujus centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe, quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10. hujus lib. arcum BC, biſariam in E, & rectam BC, biſariam quoq;, & ad angulos rectos in puncto F, cum arcus BC, ſit tertia pars totius peripheriæ: erit arcus BE, ejuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoq; conjuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit ejuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt ejuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. a Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, b quod angulus ABE, in ſemicirculo rectus ſit: Eſt autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE: erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati ejuſdem rectæ BE: Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1 erit quadratum rectæ BE: & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.*



a 47. pri.
b 31. tertii.

### COROLLARIVM I.

(SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus AB, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD, poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſ. 4. li. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.



ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib 6. ut eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex uno angulo ad baſin demiſſæ potentia ſeſquitertium. quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide 14. propoſ. 12.)

### COROLLARIVM II.

(HINC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum DE, biſariam ſecari in F, à latere trianguli BC Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BE; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12, erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. c Eſt autem

c 47. pri.

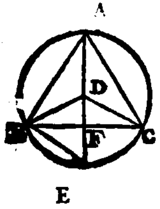
quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ BF (quod quadratum rectę AB, quadruplum ſit quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt enim AB, dupla ipſius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE: Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc eſt, quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Igitur ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta DE dupla erit ipſius FE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F)

## SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex uno angulo ducta dividet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

IN circulo ABC, cujus centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum BAC, & latus BC, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque DE, ſecari à latere BC, bifariam. & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD, CD, BE; cum latera AB, AD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & baſes BD, CD, æquales quoque: *a* Erunt anguli BAD, CAD, æquales Quod eſt primum.



a 8. pri.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia ſint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: *b* Erunt & baſes BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.

b 4. pri.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonſtrati ſint eſſe æquales; *c* erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus ſit tertia pars circumferentię, erit BE, ſexta pars ejuſdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. *d* Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales ſunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; *e* Erunt & latera DF, EF, æqualia, Quod eſt tertium.

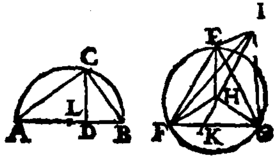
c 26. tert.
d 5. pri.
e 26. pri.

XIII.

## PROBL. I. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

SIT data ſphæræ diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut ſit AD, ipſius DB, dupla; at vero AB, ejuſdem DB, tripla; & ipſius AD, ſeſquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad intervallum rectæ HE, quæ æqualis ſit ipſi DC, deſcribatur circulus EFG, cujus centrum H, in quo triangulum æquilaterum inſcribatur EFG, adjunganturque rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE, ad cujus intervallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEG; IEF, IFG, IEG, eſſe Pyramidem, ſive Tetraedrum. Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipſis contenti, recti ex hypotheſi, & 3. deſin. 11. a erit baſis AC, baſi IE, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam AC, æqualem eſſe rectis IF, IG. a 4. pri. Rurſus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales ſunt ex coroll propoſ. 8. lib. 6. erit ex coroll propoſ 20. lib. 6. ut AD, ad DC, ita quadratum rectæ AD, ad quadratum rectæ DC; & componendo, ut AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, ſimul ad quadratum rectæ DC: b b 47. pri. Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectæ AC. Igitur erit quoque ut AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC: Ac proinde cum AB ſit ipſius DB, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, c 12. tertii. æqualis ſit ipſi DC: c Atqui & quadratum rectæ EF, triplum quoque eſt ejuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ AC, quadrato rectæ EF, æquale erit: & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG: erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur jam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cujus baſis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cujus diameter AB: & diametrum ſphæræ AB, potentia ſeſquialteram eſſe lateris EF, vel AC.



EXTENDATUR perpendicularis IH, uſque ad K, ut ſit HK, ipſi DB: & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, HE, HK: erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, ſit ad IK, perpendicularis & media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa IK, deſcriptus in plano rectarum IK, HE, tranſibit per E, ut mox oſtendetur: Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam IK, deſcri-

*ptus in plano rectarum* IK,HF, *tranſibit per* F, *quam ſemicirculus circa eandem* IK, *deſcriptus in plano rectarum* IK, HG, *per* G. *Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos* E, F, G, I, *incedat. Cum ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter* IK, *æqualis ponatur diametro* AB, *comprehendetur idem Tetraëdrum ſphæra data.*

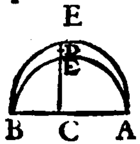
*QVONIAM verò tres rectæ* AB, AC, AD, *proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit ut* AB, *ad* AD, *ita quadratum rectæ* AB, *ad quadratum rectæ* AC, *ex coroll. propoſ 20. lib. 6. Eſt autem recta* AB, *ſeſquialtera rectæ* AD, *quod qualium partium 3. eſt* AB, *talium 2. ſit* AD. *Igitur & quadratum rectæ* AB, *ſeſquialterum erit quadrati rectæ* AC: *Ac propterea cum* AB, *ſit diameter ſphæræ & AC, recta lateri Pyramidis* EF, *æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris* Tetraedri, *ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.*

## LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat circa D, vel ultra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, ᵃ æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.



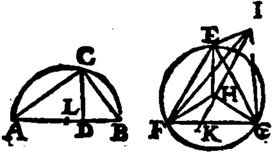
a 17. ſexti.

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura

gura deſcriptum circa I K, in plano rectarum I K, H E, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

### COROLLARIVM I.

(HINC facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſin pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratum rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratũ rectæ HE, a quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE: Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit quę 9. ad 2.



a 12. tertii dec.

### COROLLARIVM II.

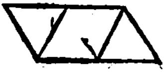
RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis: cum AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB: Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quę fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL. quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER altitudine pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. ut hic apparet 9. 6. 4.)

### SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, ut hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſo-



liditatem. Hanc verò praxin, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quavis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto *Durero* non ignobili ſcriptore.

## XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris iſtius octaedri.

*SIT ſphæra, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D,*
*ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC,*
a 4. pri. *BC, a quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta jam recta EF, quæ æqualis*
*ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratum EFGH, in*
*quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque*
*rectæ IE, IF, IG, IH, æquales; cum ſint ſemidiametri circuli circa*
*quadratum deſcripti, ut in 4. lib demonſtratum eſt.* Deinde *ex I,*
*in utramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis*
*KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et deniq; ex K, & L, deducantur*
*ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE,*
*LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG,*
*KGH, KEH: LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur.*
*Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus*
*FI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, recti; (ipſe*
*quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, b eo quod ſit æqualis*
*angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI,*
b 8. primi. *IH, & baſium EH, GH,) c Erit & baſis EK, baſi BH, æqualis: Eodemque*
*modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum*
c 4. pri. *erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua*
*triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum*
*illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis.*
*Conſtitutum igitur jam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris*
*& æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra*
*diametri AB, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur,*
*& diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF,*
*vel AC.*

QVONIAM *enim IE, perpendicularis eſt ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL: (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL. IE, deſcriptus tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propoſitionis. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G, H. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus,*

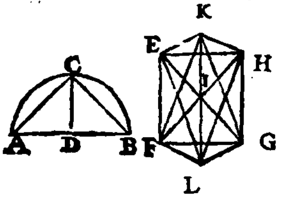
*ctus, manente fixa diametro* K L, *deſcribet ſphæram, quæ complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cujus diameter* AB; (*Nam cum rectæ* AC, *EF, æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia: Sit autem tam quadratum rectæ* AC, *duplum quadrati rectæ A* D, *quam quadratum rectæ* EF, *quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ* AD, *EI, hoc eſt,* KI, *ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri* AB, KL, *æquales erunt: ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent*) *comprehendetur idem octaedrum data ſphæra.*

*Q*V I A *vero quadratum rectæ* AB, a *æquale eſt quadratis rectarum AC,* BC, *quæ æqualia ſunt: erit quadratum rectæ* A B, *duplum quadrati rectæ* AC. *Quamobrem cum A B, ſit diameter ſphæræ, &* AC, *recta æqualis lateri octaedri* EF: *manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaq; octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, quâ & pyramidem. Quod erat faciendum.*

a 47. *primi*

## COROLLARIVM I.

(EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum IK, recta ſit ad lineas *E*G, HF: *b* recta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductum: *c* Ideoque ad plana KE*L*H, E*L*GK, per KI, ducta, recta erunt ad planum *E*FGH. Imò eadem ratione, ut paucis rem complectar, erit tria plana EFGH, KELH, E*L*GK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt: Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantq; angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, ut oſtendimus) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterum octaedri FK, KH. *d* Ita enim efficitur, ut angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



b 4. *undec*
c 8. *undecimi.*
d 48. *pri.*

## COROLLARIVM. II.

OCTAEDRV*M* dividitur in duas pyramides ſimiles & æquales: quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cujuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. *N*am plana unius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, ut conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, ut eſt demonſtratum.

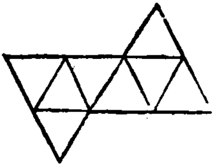
### COROLLARIVM III.

(SI tetraedrum,& octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim a13.*tertii dec.* quadratum diametri ſphæræ diviſum in ſex partes. *a* Quoniam igitur diameter ſphærę eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium σ. eſt quadratum diametri ſphærę. b *14. tertiidec.* *b* Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3, qualium 6. quadratum diametri ſphæræ Igitur cum talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3 eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri)

### COROLLARIVM. IV.

(DENIQVE, quia in quadrato *EFGH*, recta *EH*, parallela eſt rectæ F G; c *15 undec* & in quadrato ELGK, recta *E*K, rectæ GL: *c E*rit planum EHK, per *E*H, *E*K, ductum plano FG*L*, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.)

### SCHOLIVM.

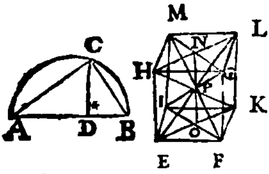


QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturq; ut hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ut ait Albertus *D*urerus.

## PROBL. 3. PROPOS. 15.

XIV. CVBVM conſtituere: & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

*SIT ſphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter* AB, *circa quam ſemicirculus deſcribatur* ACB: *&* ex AB, *auferatur tertia pars* BD, *ut ſit* AB, *ipſius* BD, *tripla. Deinde ducta* DC, *perpendiculari ad* AB, *connectantur rectæ* AC, BC. *Super rectam* EF, *quæ rectæ* BC, *ſit æqualis, quadratum*



*conſtituatur* EFGH, *ſuper quod erigantur perpendiculares EI*, FK, GL, H*M*, *æquales quoq; ipſi* BC, *quarum extrema conjungantur rectis I*K, KL, LM, M*I*. *Quoniam ergo rectæ EI*, FK, *ad planum* EF, GH, *rectæ ſunt*; d *erunt rectæ* EI, EK, *parallelæ. Sunt autem &*

d 6.*undec.* *æqua-*

æquales, quod utraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. a Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt EFKI: In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: b Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, c cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, d quod ejus plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML; diametri EK, FI, GM, HI, per quas ducantur plana EKLH, FIMG. e Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubum bifariam ſecat; utrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. ejuſdem propoſ. ſe mutuo quoq; bifariam divident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cum enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; f perpendicularis quoq; erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, nec non & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera unius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 24. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 33. primi
b 34. pri.
c 24. undec
d 15. undecimi.
e 28. undecimi.
f 4. undec.

CVM quadratum rectæ EK, g æquale ſit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt, quadrati rectæ KL; Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. h Eſt autem quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, ſit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc eſt, quadrati rectæ BC: At vero ejuſdem quadrati rectæ BC, triplum eſt quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut eſt AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipſius

g 47. pri.
h 47. pri.

*BD, ſit tripla; erit quoque quadratum recta AB, quadrati recta* BC, *triplum.* Igitur *quadrata rectarum* EL, AB, *æqualia ſunt: ac propterea ipſa recta* EL, AB *diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæra æquales exiſtunt.*

QVIA *vero oſtenſum eſt quadratum diametri* EL, *triplum eſſe quadrati lateris cubi* KL, *manifeſtum eſt, diametrum ſphæra potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.*

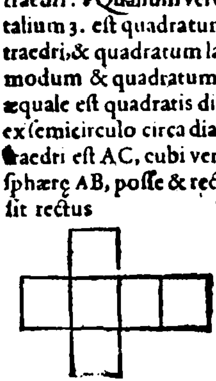
## COROLLARIVM I.

(EX demonſtratione hujus problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppoſitorum conjungunt, bifariam dividi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, *H*K, *F*M, GI, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, conjungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML: *E*FKL in eodem centro P, bifariam dividatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP æquales ſunt duobus angulis NMP, NP*M*, trianguli NMP: (*a* Nam angulus O*FP*, 
*a 29. primi* æqualis eſt alterno N*M*P, inter lineas FI, G M, *b* quæ parallelæ ſunt, 
*b 16. unde.* cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum EFKI, *G*HML, 
*c 15. pri.* *c* & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NP*M*) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adjacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis conjungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

## COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt poten
*d 13. tertii dec.* tiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. *d* Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6 eſt quadratum lateris te
*e 15. tertii dec.* traedri: *e* Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrum ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero *BG*, *f* Perſpicuum autem eſt, diametrum 
*f 47. pri.* ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus

## SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturq; ut hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur intra inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cujuſpiam, ut conſtat.

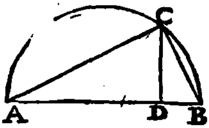
## PROBL. 4. PROPOS. 16.

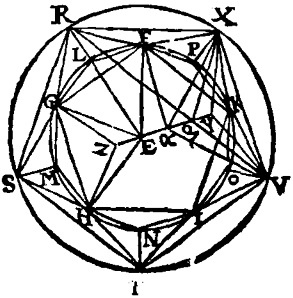
ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB; Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, ut AB, ipſius BD, ſit quintupla; & ipſius AD, ſeſquiquarta: At vero AD, ipſius BD, quadrupla Deinde ducta CD, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC, *d* intervallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E: a 11. *quar.* *a* in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diviſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, FG, GM, MH &c nempe latera decagoni: Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur ſemidiametro, EF, ſeu rectæ BC. Eruntque omnes inter ſe æquales: *b* ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas conjungunt, nempe EL, QR, EM, QS: EN, QT: EO, QV: EP, b 6. *undecimi.* QX. (quas tamen omnes, ut vitaremus confuſionem, non duximus) *c* binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, c 33. *pri.* EM, &c. ſemidiametro EF: æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC, *d* Quia vero d 15. *undec* planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto, eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem EGHIK, per rectas EM, EN, ducto, convenit autem planum pee rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana unum planum per ea, quæ ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum: nec non planum per QV, QX, & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano: Ac proinde ſi ex Q, ad intervallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V; X, tranſibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Conjungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. *e* e 6. *undec.* Quia igitur LR, PX, æquales, & parallelæ: ſi concipiatur duci re- f 33. *pri.* cta LP: *f* erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; *g* Ac proinde g 28. *tertii* in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufer autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas

RS, ST,

R S, S T, T V, V X, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt R S T V X, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni F G H I K. Demittantur ex angulis pentagoni R S T V X, ad angulos pentagoni F G H I K, rectę R F, R G, S G, S H, T H, T I, V I, V K, X K, X F. Quia igitur perpendicularis L R, æqualis ponitur ſemidiametro E F, hoc eſt lateri hexagoni circuli F G H I K, & a 10. tertii dec. eſt L F, latus decagoni; *a* erit quadratum lateris pentagoni ejuſdem circuli æquale quadratis rectarum L R, L F: b 47. pri. *b* Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ F R; quod angulus F L R, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ F R, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta F R, lateri pentagoni L P, ſeu F G, hoc eſt, ipſi R X, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquę lineæ R G, S G, S H, &c. reliquis lateribus utriuſque pentagoni æquales; ac propterea decem triangula R F X, R F G, R G S, S G H, S H T, T H I, T I V, V I X, V K X, X K F, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri. Poſthæc perpendicularis E Q, in utramque partem extendatur, ſintque rectæ Q Y, E Z, æquales ſingulæ lateri decagoni circuli F G H I K, vel R S T V X; & connectantur rectæ V Q, V Y, X Q, X Y, G E, G Z, H E, H Z. Quoniam ergo Q X, ſemidiameter eſt circuli R S T V X; hoc eſt, latus hexagoni, & Q Y latus eſt decagoni ejuſdem circuli: *c* erit quadratum lateris pentagoni X V, æquale quadratis re- c 10. tertii dec. ctarum Q X, Q Y; *d* Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum d 47. pri. rectæ X Y, quod angulus X Q Y, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela ſint oſtenſa, ſitque E Q, ad *illius* planum recta, ex conſtructione, erit quoque E Q, ad hujus planum recta ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale eſt quadrato rectæ X V, proptereaque recta X Y, rectæ X V, ęqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis oſtendetur V Y, Ac proinde triangulum V Y X, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectę R Y, S Y, T Y, (quas tamen, ut vitaremus confuſionem linearum, non diximus) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, ęquilatera eſſe, & æqualia triangulo V Y X,

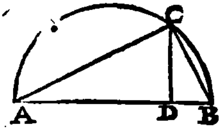


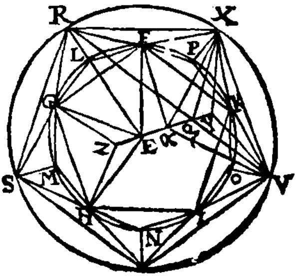


VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pateremus confuſionem, non duximus,) quæ omnia priorib. quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico comprehendi ſphęrá diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ α, F, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX. cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & baſes αV, αX, æquales. a 4.pri. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diviſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11. b 4 pri. b Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemque modo ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI, αK, ęquales ipſi αX; Ac proinde decem lineę ductę ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, ęquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK: & EZ, latus decagoni ejuſdem circuli: c erit QZ, diviſa in E, extrema ac media ratione, majuſque c 9. tertii dec. ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium majoris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, d quintuplum po- d 3. tertii dec. teſt ejus, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum ejuſdem quadrati rectę Eα. (Nam cum quadratum rectę EF, quadruplum ſit quadrati rectę αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα: Erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſimul quintupla quadrati rectæ Eα. e Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, ęquale ſit quadratum rectę AF; e 47. pri. erit quoque quadratum rectę αF, quintuplum quadrati rectę Eα.) Igitur ęqualia ſunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectę ipſę αZ, αF, ęquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam ſecetur in α, (propterea quod ſi ęqualibus αE, αQ, ęquales rectę addantur EZ, QY, totę Zα, Yα, ęquales fiunt,) Erunt omnes rectę ductę ex α, ad omnes angulos Icoſaedri ęquales, Quocirca ſphęra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α per omnes angulos Icoſaedri driconſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphęræ diametri A B.

a 15. quinti *a* Cum enim ſit ut α Z. ad α E. ita YZ, dupla ipſius α Z, ad QE,
b 22. ſexti. duplam ipſius α *E*; *b* Ac propterea ut quadratum rectæ α *Z*, ad quadratum rectæ α E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ Q*E*; ſit autem quadratum rectæ α *Z*, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ α *E*; erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ Q*E*, hoc eſt, quadrati rectæ *B*C; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro E F, hoc eſt. rectæ BC; Eſt autem & ejuſdem quadrati rectæ *B*C, quintuplum quadratum rectę *A*B; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib 6. ſit ut AB, ad BC, ita BC, ad B*D*; erit ut *A*B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propoſ 20. lib. 6. Ac proinde exiſtente *AB*, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ *A*B, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, *AB*, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; *A*c propterea & ſphæræ circa ipſas, æquales erunt:





QVONIAM denique diameter ſphærę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) poteſtque quintuplum quadrati rectæ *B*C, hoc eſt, rectę illi ęqualis *EF*; erit quoque ſemidiameter EF, circuli FG*H*IK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum *A*B. EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum,
c 6. decimi nempe quam 5. ad 1 vel 10 ad 2. *c* erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ *A*B, *E*F, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & *E*F, Rationalis) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea F.G, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, *d* Irrationalis erit linea, quę vo-
d 11. tertiidec. catur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphęra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; demonſtravimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quę vocatur *Minor*. Quod erat faciendum.

COROL-

## COROLLARIVM I.

(EX dictis infertur, ſphęrę diametrum eſſe potentia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutum eſt, & qui per quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum enim eſt quadratum diametri *AB*, quintuplum eſſe quadrati rectę BC, hoc eſt, ſemidiametri *EF*.)

## COROLLARIVM II.

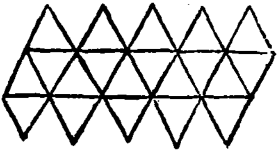
(ITEM manifeſtum eſt, ſphęrę diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni ejuſdem circuli: Nam YZ diameter ſphęrę componitur ex ZQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.)

## COROLLARIVM III.

(CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nam recta RX, oſtenſa eſt parallela rectę, quę ex L, in P, duceretur. *C*um igitur eidem rectę *L*P, ſit quoque parallela recta HI, ut in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtravimus; (eo quod ęquales ſunt arcus H*L*, IP: continet enim uterque tres decimas partes totius circumferentię,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas; Eademque eſt ratio de cęteris lateribus oppoſitis.)

## SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula ęquilatera inter ſe ęqualia, diſponanturque, ut hęc figura indicat, componetur Icoſaedrum, ſecundum totam ſoliditatem ſi rite inter ſeſe aptentur.



## PROBL. 5. PROPOS. 17.

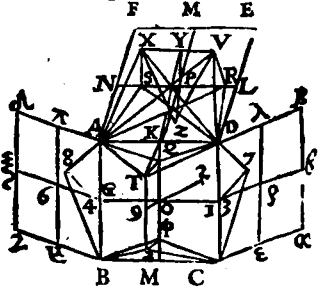
XVI.

DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotõe.

*SIT una baſis cubi data ſphara comprehenſi, quadratum* ABCD, *cui inſiſtat aliud aquale ad rectos angulos* ADEF, *ut ſit communis horum ſectio recta* AD, *(Inſiſtunt enim omnes, baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in pracedentibus, ut cubus conſtitueretur, erecta ſunt ex angulis baſis* EFGH, *quatuor linea* E*I*, FK, GL, H*M*, *ipſi baſi*, EFGH, *perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. hujus lib.* a *Quare & baſes cubi per ipſas ducta, recta erunt ad eandem baſin* EFGH.) *Diviſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis* G, H, *I*, K, *L*, M, N, *qua rectis connectantur ſecantibus ſeſe in* O, P, *centris quadratorum, ut conſtat ex demonſtratione octavi proble-*

a 18. undec.

*Problematis lib. 4. Secentur* OK, PL, PN, *extrema ac media ra-*
*tione in punctis* Q, R, S, *ex quibus ad plana quadratorum educan-*
*tur extra cubum perpendiculares* QT, *VR*, SX, *æquales ſegmentis*
*majoribus* OQ, *PR, PS.* *Conjunctis deinde rectis A*T, AX, DT,
D*V*, *V*X: *Dico* AT*D V*X, *eſſe unum ex duodecim pentagonis æqui-*
*lateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pen-*
*tagonum* ATD*V*X, *ſit in*
*uno plano, ita oſtendetur,*
*Cum RV, S*X, *ſint ad qua-*
a 6. *undecimi.* *dratum* ADEF, *rectæ* a *ipſæ*
*erunt parallelæ: Ac proinde,*
*cum ſint æquales, (quia ſe-*
*gmenta majora* PR, PS, *qui-*
*bus æquales ſunt poſita, æ-*
*qualia ſunt, cum & lineæ*
*ſectæ* PL, PN, *æquales ſint.* b)
b 33. *pri.* *erunt quoque contingentes*
*rectæ RS, V*X, *æquales & parallelæ:* c *Eſt autem & A*D, *eidem*
c 33. *pri.* RS, *ſive* LN, *parallela, eo quod* AM, DL, *parallela ſunt & æquales.*
d 9. *undec.* d *Igitur &* AD, *V*X, *parallelæ ſunt:* e *Ac propterea rectæ conjun-*
e 7. *undec.* *gentes* AX, D*V*, *in eodem cum ipſis erunt plano, ideoq; trapezium*
*A*DVX, *in uno exiſtet plano:* E*ſt autem triangulum* ATD, *in uno*
*plano:* D*ico quod & in eodem plano cum trapezio* AD*V*X. *Ex P,*
*namque ducatur* PY, *parallela ipſi RV,* f *quæ erit recta ad quadra-*
f 8. *undec.* *tum* ADEF, *quod ad idem recta ſit* RV: *Et connectantur rectæ* KT,
KY. *Quoniam igitur eſt ut* OK, *ad* OQ, *ita* OQ, *ad* QK, *ob ſecti-*
*onem rectæ* OK: *Eſt autem* KP, *ipſi* OK, *æqualis; (ſunt enim dimi-*
*dia latera cubi,) & PY, ipſi* OQ, *(cum æqualis ſit ipſi RV, quæ poſita*
*fuit æqualis ipſi* OQ, *majori ſegmento;) Erit quoque ut* KP, *ad* PY,
*ita* OQ, *hoc eſt,* QT, *illi æqualis, ad* QK. Q*uare cum triangula*
PKY, QTK, *duo latera habeant duobus lateribus proportionalia,*
*ſintque ad unum angulum* K, *compoſita,* g *ita ut homologa latera*
g 6. *undec.* *ſint parallela, nempe* PK, *&* QT, *inter ſe, quod utrumque rectum ſit*
*ad quadratũ* ABCD; *&* PY, QK, *inter ſe, quod utrumque rectum*
*ſit ad quadratum* ADEF: h *Erunt reliqua latera* KY, KT, *in rectam*
h 32. *ſexti.* *lineam collocata,* i *Ac propterea recta TY, in uno erit plano; ideoque*
i 1. *undec.* *planum* AT*D, & planum* ADVX, *unum planum conſtituent per re-*
*ctas TY, AD, ductum.* Q*uocirca pentagonum* AT*D V*X, *in uno exi-*
*ſtit plano.*



Q*VO*D *vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera* A *N,* *NS, trianguli* ANS, *æqualia ſint lateribus* AK, KQ, *trianguli* AKQ (*Sunt enim* A*N*, AK. *dimidia latera cubi, &* NS, KQ. *ſegmenta minora rectarum æqualium ſectarum*) *& anguli* ANS,

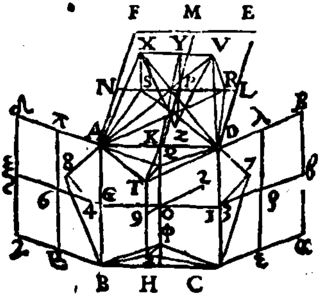
AKQ

AKQ, recti; ſi ducatur recta AQ. a erunt baſes AS, AQ æquales: a 4.pri.
Rurſus cum latera AS, SX, trianguli ASX, ſint æqualia lateribus
AQ, QT, trianguli AQT (Nam rectæ AS, AQ, oſtenſæ ſunt æquales,
& SX, QT, ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum)
& anguli ASX, AQT, recti ex defin. 3. lib. 11. b Erunt quoque baſes b 4.pri.
AX, AT, æquales. Quod ſi ducatur recta DQ, oſtendemus eodem argumento,
rectam DT, rectæ AT; ſi vero ducatur recta DR, rectam
DV, rectæ DT, eſſe æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera
XA, AT, TD, DV, æqualia: quibus etiam æquale oſtendemus reliquum
VX, hac ratione. c Quadrata rectarum PN, NS, ſimul tripla c 4. tertij dec.
ſunt quadrati rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectæ SX: Eſt autem
quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata
rectarum AN, NS, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ SX.
d Cum ergo quadratis rectarum AN, NS, æquale ſit quadratum d 47.pri.
rectæ AS; erit quoque quadratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ
SX, Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, ſimul, quadrupla eiuſdem
quadrati rectæ SX. e Eſt autem quadratis rectarum AS,
SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum e 47.pri.
quoque erit quadrati rectæ SX, hoc eſt, quadrati rectæ PS;
hoc eſt, quadrati rectæ XY; f Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum
igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati f 34. pri.
rectæ XY, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt
quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipſæ æquales.
Quare cum & XA, AT, TD, DV, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum
eſt pentagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis
rectis AR, AV; cum PN, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique
addita PR, æqualis maiori ſegmento PS; g erit quoque NR; ſecta g 5. tertij dec.
in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit NP.
h Quadrata igitur rectarum NR, RP, ſimul tripla ſunt quadrati h 4. tertij dec.
NP, hoc eſt, quadrati rectæ AN: Eſt autem quadratum rectæ RV,
æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV,
tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR,
RV, AN, quadrupla ſunt eiuſdem quadrati rectæ AN. i Sunt autem i 47.pri.
quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur &
quadrata rectarum RV, AR, quadrupla ſunt quadrati rectæ AN.
k Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale ſit quadratum k 47.pri.
rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiuſdem quadrati rectæ
AN, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN, quadruplum
eſt quadratum rectæ AD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod
AD, dupla ſit ipſius AN. Æqualia igitur ſunt quadrata rectarum
AV, AD, ideoque & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento,
ductis rectis DS, DX, oſtendemus DX, DA, æquales eſſe: ac propterea
tres rectas AD, AV, DX, inter ſe eſſe æquales. Quoniam igitur latera

*TA, TD, trianguli TAD, æqualia ſunt lateribus DV, VX, trianguli*
a 8. pri. *DXV: & baſes AD, DX, æquales quoque:* a *Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non ſecus oſtendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV,* b *ipſum erit æquiangulum.*
b 7. tertij dec.

*QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ι, θ, λ, l, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorum centris ϱ, σ. Secentur deinde OH, OK, ϱI, σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales segmẽtis maioribus φO, QO, 3, ϱ, 4σ, coniunganturq́; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iam ſunt tria pentagona tãgentia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; conſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonſtrabimus.*



*INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſecari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, ductis. &c.*
c 19. undecimi. *Quoniam igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, quod parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD;* c *Erunt & communes eorum ſectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum YP, recta ſit ad planum ADEF, ipſa producta verſus Z, erit communis ſectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto ſi ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9Oz; erit*
a 39. undecimi. *ipſa communis ſectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur.* a *Quia vero dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe mutuo bifariam*

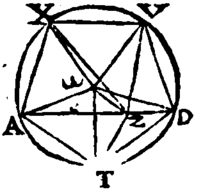
ſariam ſecant: ſecent ſe mutuo biſariam in Z: Secant autem ſeſe diametri cubi biſariam in centro ſphæræ cubum complectentis, ex coroll. 2. propoſ. 15. huius lib. Punctum igitur Z. centrum erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ: Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque eſſe omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuum, ducta recta ZX. b Quoniam parallelæ ſunt KP, OZ, quod vtraque recta ſit ad planum ABCD: Item parallelæ ſunt OK, ZP, quod vtraque recta ſit ad planum ADEF: erit PKOZ, (debent enim duo pũcta Z, intelligi eſſe coniuncta) parallelogrammum, ac propterea PZ, æqualis erit ipſi KO, hoc eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autem & PY, ipſi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. c Quare cum quadrata rectarum NR, PR, ſimul tripla ſint quadrati rectæ NP, quod NR, in P. ſecta ſit extrema & media ratione: erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc eſt, quadrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati rectæ PZ: (Eſt enim XY, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PZ:) d Eſt autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum eſt quoq; quadratum ſemidiametri ſphæræ cubum comprehendentis: (e Nam vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris: f Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratũ ſemidiametri ad quadratum dimidij lateris. g Cum ergo quadratũ diametri triplum ſit quadrati lateris, erit quoq; quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimidii lateris.) Æquale igitur eſt quadratũ rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphæræ, ſeu cubi: Ac propterea ZX, æqualis ſemidiametro: Eadem ratione erit ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia ſint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, ſit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi parallelam VX, perpendicularis.) h Erunt baſes ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales, vt dictum eſt. Sunt ergo tam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T. ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, cẽtro ſphæræ perpẽdicularis demittatur Zω, cõnectãturq; rectæ ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. a Quoniã igitur quadratum rectæ ZA, æquale eſt quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autẽ quadrata rectarũ ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, oſtẽſa ſint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Zω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia;

b 6. undecimi.
c 4. tertij dec.
d 47. pri.
e 15. quinti.
f 22. ſexti.
g 15. tertij dec.
h 4. pri.
a 47. pri.

*Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ ipſa ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter oſtendentur rectæ ωV, ωD, & inter ſe, & ipſis ωA, ωX, æquales, quod & recta ZV, ZD. æquales ſint oſtenſa rectis ZA, zX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures recta lineæ æquales, quam duæ,* b *punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis: ideoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT* c *Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum recta ZA: his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; proptereaque & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare ſphæra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.*

b 9. *ter.*

c 47. *pri.*



d 15. *quinti.*

e 6. *tertij dec.*

*POSTREMO cum ſit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN:* d *erit quoque vt NL, dupla ipſius NP, ad RS, duplam ipſius PS, ita RS, dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit SR; Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commenſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius)* e *Igitur maius ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome. Quod erat faciendum.*

## COROLLARIVM. I.

Cum ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadam ſphæra deſcripti.

## COROLLARIVM. II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis AV, DX, ſubtendentibus angulos X, & V, eiuſdem pentagoni.

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, *a* facit maius ſegmentum latus pentagoni: *b* ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri ſimiliter diuiditur, facitq; minus ſegmentum latus dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

a 8. *tertij dec.*

b 5 *tertij dec.*

## COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, TZ, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB: aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos à lineis rectis, quæ centra baſium cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9 Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi, & YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales: Eadẽq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogramma KOZP, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

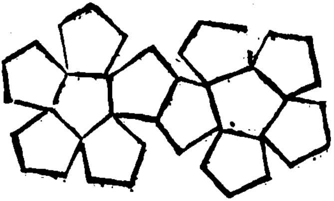
## COROLLARIVM IV.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadratata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint, quadrati rectæ PZ: erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: *c* ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplam ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ

c 15 *quinti.*

## SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona



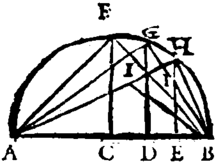
æquilatera & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

xviij.

## PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

SIT ſphæra diameter AB, quæ in C, ſecetur bifariam; In D, vero ita vt BD, ſit ipſius pars tertia: In E, denique ita vt BE, ſit quinta para eiuſdem. Deſcripto deinde circa AB, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C.D,E, ipſi AB, perpendiculares CF, DG, EH: connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Poſt hæc ex HA, abſcindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti cuius ſemidiameter, ſeu latus Haxagoni eſt BH, connectaturq; recta BI. Poſtremo BC, ſecetur extrema ac media ratione in K, ſitque maius ſegmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarum. Dico AG, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri: AF, latus Octaedri: BG, latus cubi: BI, latus Icoſaedri: BK, denique latus Dodecaedri Quoniam enim AG, media proportionalis eſt inter BA: AD, ex coroll propoſ.8.lib.6. Erit ex coroll. propoſ.20. eiuſdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG. Eſt autem BA, ipſius AD, ſeſquialtera: cum talium partium 2. ſit AD, qualium 3. eſt BA. Igitur & quadratum rectæ BA, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ AG: a Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri: erit AG, latus Tetraedri.

a 13. tertij dec.

RVRSVS quoniam AF, eſt media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. prop.8.lib.6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propoſ. 20. libr 6. Eſt autem BA, ipſius AC, dupla: Erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AF. b Quare cum diameter ſphæ-

b 14. tertij dec.

ræ po-ræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius ED, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. *a* Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. a 15. *tertij dec.*

PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, BH, eſt media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH. Eſt autem ex conſtructione AB, ipſius BE quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis ex coroll. 1. prop. 16. huius lib. Erit BH, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem HI, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. *b* Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; b 10. *tertij dec.* Ac proinde *c* cum quadratum rectæ BI, æquale ſit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. *d* Quamobrem BI, latus eſt Icoſaedri. c 47. *pri.* d 16. *tertij dec.*

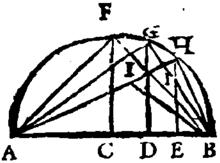
DENIQVE cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema ac media ratione, erit BK, maius ſegmentum latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex corollario 1. propoſ. 17. huius libri. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

6 QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri: talium vero 3. quadratum lateris Octaedri: & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertiũ lateris Octaedri potentia vero duplum lateris cubi Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quam numerus ad numerum. *e* Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ ſunt commenſurabiles: atque adeo cum diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt e 6. *decimi.*

| | |
|---|---|
| *Diamet.* | 6. |
| *Tetraed.* | 4. |
| *Octaed.* | 3. |
| *Cub.* | 2. |

a 9. dec. conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. *a* Erunt huiuſmodi lineæ nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum comenſurabiles.

AT vero latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonſtratum eſt nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cũ latera priorum ſunt diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum; oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.



SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome, *b* erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor, *c* erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam *Minorem*, ex eo, *d* quod latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

b 104. decimi.
c 106. decimi.
d 16. tertij dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum gularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe & diametro ſphæræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 38. lib. 3.

EODEM modo non oſtendemus, latus Octaedri majus eſſe lateri cubi. Nam BF, latus Octaedri majorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG; majus eſſe latere Icoſaedri *B*I, hac arte demonſtrabimus. Quoniam A*B*, tripla ponitur ipſius BD, *a* & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ A*B*, talium 3. eſt quadratum rectæ *BG*; *b* quod illud hujus triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9 ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; *c* erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectæ GD, majus eſt quadrato rectæ *B*H, ideoque recta GD, major quam recta *B*H. Rurſus quia diameter ſphæræ, AB, componitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, ejuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. hujus lib. conſtat latus decagoni HI, majus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI. recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ A*B*, noncuplum quadrati rectæ *B*H. Quod eſt abſurdum quintuplum enim eſt demonſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB: Sed neque major tertia parte. Si enim recta HI, dicatur major tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipſius HI, major quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BH. Quod magis abſurdum. Non igitur major eſt HI, tertia parte ipſius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, ut oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, majores ſint rectis *B*H, HI, ut demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum majora: *d* Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis recta-

a 20. *ſexti.*

b 15. *tertii. dec.*

c 10. *quinti*

d 47. *quinti.*

rum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, majus quoq; erit quadrato rectæ BI, Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, major erit quam recta BI, latus ſcilicet Icoſaedri.

MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diviſæ extrema ac media ratione, majus ſegmentum ſit BK, & minus GK; erit rectangulum ſub BG, BK, majus rectangulo ſub BG, GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul majora duplo rectanguli ſub BG, GK: a Eſt autem rectangulis ſub BG, BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis ſub BG, GK, æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cum ſit, ut BG, ad BK, ita BK, ad GK; b erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo, ſub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, GK.) Majus igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco majora erunt tria quadrata rectæ BG, ſex quadratis rectæ BK. Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quam quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, majora erunt ſex quadratis rectæ BK; Ac proinde unum quadratum rectæ BH, majus erit uno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus: forent quinque quadrata rectæ BH, minora ſex quadratis rectæ BK. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex majora ſint demonſtrata.) Quam obrem & recta BH, major erit quam recta BK: Ac propterea cum BI, major ſit quam BH, multo major erit BI, latus videlicet Icoſaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum expoſuimus, & inter ſe comparavimus. Quod erat faciendum.

a 2. ſec.

b 17. ſexti.

## SCHOLIVM.

*INTERPRETES hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter ſe æqualibus, hac fere ratione.*

*EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.*

*EX tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.*

*EX quatuor; Octaedri angulus*

EX

EX quinque, angulus Icoſaedri:

EX ſex autem hujuſmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri nõ poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. prop 32. lib. 1. Erunt ejuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc eſt, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus cõſtituetur. a Nã ſolidus omnis angulus minoribus quã quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex eimi planis ejuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. a 20. unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor ejuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, ut oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea quintam partem unius recti continebunt tres ejuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes unius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipſis angulus ſolidus conſtituetur. Sed ex quatuor hujuſmodi angulis nullus ſolidus angulus confici poteſt. Cum enim unus, ut dictum eſt, major ſit recto, eo quod continet unum rectis, & inſuper recti quintam partem: erunt quatuor majores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis cõſtituetur: Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus cõſtabit. Nec ſane ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis cõſtitui poterit angulus ſolidus. Nã cũ ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, ut ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum: ac proinde unus angulus contineat unum rectum, ac præterea duas partes ſextas unius recti: continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo componetur angulus ſolidus: Atque idcirco multo minus ex pluribus ejuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur: neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres majores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in unum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor ejuſmodi triangula conveniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandũ

angu-

*angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti triangulis ejuſmodi contentam.*

*QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in unum punctum, ut conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.*

*POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conveniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Duodecaedrum duodecim ejuſmodi pentagona continens.*

*HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle, Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cujuſlibet figuræ regularis habeatur.*

*SI enim quis interrogaverit, quotnã latera quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in unius baſis latera, ut habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in unum conveniunt, ad conſtitutionem unius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, ut numerus laterum Regularis ſolidi appareat.*

*EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſive Tetraedri multiplicentur in numerum laterum unius trianguli, ut in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in unius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum unius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum unius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.*

*QVOD ſi quis rurſus interrogaverit, quotnam angulos ſolidos quodvis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in unius baſis angulos, ut habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in unum conveniunt, ad conſtitutionem unius anguli ſolidi, dividendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, ut numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.*

*EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi dividantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt unum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerũ angulorum unius quadrati,*

*fiunt*

*fiunt 24. anguli, qui diviſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt unum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diviſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplecentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 60. anguli qui diviſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum unius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diviſi in 3. (Tot enim anguli conveniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.*

DENIQVE *conſideratione etiam dignum eſt, cubum & Octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quod baſes in uno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos: octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solidos Tetraedrum (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes, totidemque ſolidos angulos.*

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI

EVCLI-

# EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM DECIMVM.

## Et ſolidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: ut alii vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

### LIBER PRIMUS.

### PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum colligere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; ut qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geome-

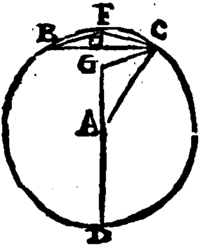
Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, ut proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi adſcribuntur: Duo vero ſubſequentes à pleriſque Hypſicli Alexandrino & recte, meo judicio, tribui ſolent: in quorũ quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundũ ſuperficies, quam ſoliditates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam: ut hi duo libri ſint inſtar appendicis cujusdã elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non injucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporũ regularium, eorumque mutuas inſcriptiones unius in alio: quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in univerſũ diſſerere proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adjumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulã in hoc negotio collocavit, non negamus. Hic enim non ſolum inſequentes duos libros quam plurimis theorematibus problematibusque locupletavit: verum etiam integrum librum, qui ordine decimus ſextus eſt, adjunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterũ præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facile intelligi poteſt ex ejus proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

QVONIAM verò in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoque & à nobis deſcrepant: annotavimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur: Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

**Qvæ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriusque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.**



Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni ejusdem circuli. Extenſa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur *a 3. tertii.* rectæ AC, CG, CF, BF. *a* Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, *BEF*, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, *b 4. primi.* nempe recti; *b* erunt baſes CF, BF, æquales; *c 28. tertii* *c* ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu *B*C, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, ejusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus C*E*, EG, trianguli CEG, ſuntq; anguli contenti recti; *d 4. primi* *d* erunt & baſes CF, CG, & anguli CF*G*, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit *e 33. ſexti.* arcus CF. *e* Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli *f 20. tertii.* CAF: *f* Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & hujus ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF, *g 32. primi* duplus erit anguli *C*AF: *g* Atqui angulus CGF, externus æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, ut oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium ejusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt *h 6. primi.* anguli GAC, GCA; *h* ac proinde & latera A*G*, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus G*E*, *E*F, fiet AE, æqualis duabus *E*F, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul A*F*, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM. I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad B C, dividere arcum B C, bifariam in F.

### COROLLARIVM. II.

HINC quoquo fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem eſſe utrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

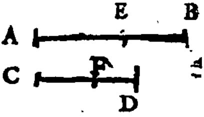
## THEOR 2. PROPOS. 2.

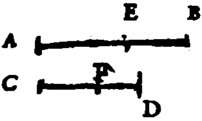
IV.
ij.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E. & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe ut AB, ad CD, ita A E, ad CF, & E B, ad FD; Item ut A E, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim ſit, ut A B, ad A E, ita A E, ad EB, & ut CD, ad CF, ita C F, ad F D; *a* erit rectangulum ſub AB, E B, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum ſub C D, FD, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum ſub A B, EB, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum ſub C D, F D, ad quadratum rectæ CF, (eſt enim utrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtravimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 5. ut quadruplum rectanguli ſub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: & componendo, ut quadruplum rectanguli ſub A B, EB, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ CF. *b* Sed quod quater continetur ſub A B, E B, una cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex A B, E B; Et quod quater continetur ſub C D, F D, una cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex C D, FD. Igitur erit quoque ut quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadra-

*a* 17. ſexti.
*b* 8. ſec.





tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex CD, FD; ad quadratum rectæ CF, a 2. ſec. *a* Ac proinde, ut recta compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD; ad rectam CF: Et componendo ut compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt, dupla ipſius AB, ad rectam AF, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutando, ut du- b 15. quinti. plaipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita eſt AB, ad CD. Erit ergo ut AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum ſit ut tota c 19. quinti. AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem ſit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit ut AE, ad EB, ſic CF, ad FD, & ſic denique juxta omnes modos arguendi & proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIVM.

*FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.*

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

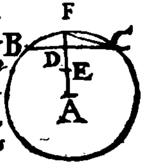
d 9. tertii-decimi. *QVONIAM enim* d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam;* e *& recta ſubten-* e 8. tertii-decimi. *dens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit majus ſegmentum, latus ipſum pentagoni:* f *fit ut eadem ſit proportio late-* f 2. quarti decimi. *ris hexagoni ad latus decagoni; majoris ſegmenti ad majus, quæ majoris ſegmenti recta angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, ut majus ſegmentnm ad minus, ita tota ad majus ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, ut recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni, quod eſt propoſitum.*

*EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.*

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

*EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico majus ſegmentum AE, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri ejusdem circuli ducta: minus vero ſegmentum ED, æquale eſſe dimidio lateris decagoni ejusdem circuli. Extenſa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. hujus lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam ſecetur in F, a Ac proinde recta compoſita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cujus majus ſegmentum AF, latus hexagoni minus vero ſegmentum FC, latus decagoni. Quare ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit ut tota AD, diviſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex AF, FC, ſimiliter diviſam, ita AE, majus ſegmentum ad AF, majus ſegmentum: & ED, minus ſegmentum ad FC, minus ſegmentum: b Eſt autem tota AD, dimidium totius compoſitæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipſius AF, ſemidiametri & ED, ipſius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propoſitionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri: perſpicuum eſt, majus ſegmentum AE, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod eſt propoſitum.*



a 9. *tertii dec.*

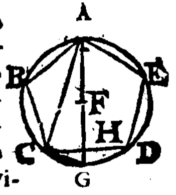
b *quarti. decimi.*

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

ij. iiij.

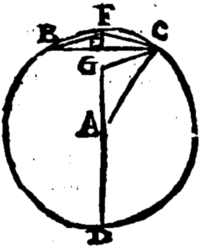
SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraque ſimul quadrata, quintupla ſunt ejus, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATUR in circulo ABCDE, cujus centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per Coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. dividat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta ſubtenſa CG,



## THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriusque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.



Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni ejusdem circuli. Extenſa enim AE, in utramque partem, ut perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur *a 3. tertii.* rectæ AC, CG, CF, BF. *a* Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli, BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, *b 4. primi.* nempe recti; *b* erunt baſes CF, BF, æquales; *c 28. tertii* *c* ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, ejusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntq; anguli contenti recti; *d 4. primi* *d* erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit *e 33. ſexti.* arcus CF. *e* Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli *f 20. tertii.* CAF: *f* Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & hujus ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF, *g 32. primi* duplus erit anguli CAF: *g* Atqui angulus CGF, externus æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, ut oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium ejusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt *h 6. primi.* anguli GAC, GCA; *h* ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atque idcirco è contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam

in penin pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad B C, dividere arcum B C, bifariam in F.

## COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem eſſe utrique lineæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul: Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

## THEOR 2. PROPOS. 2.

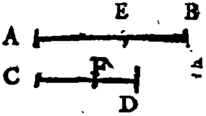
IV. ij.

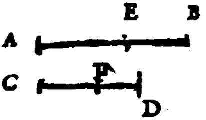
SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECENTUR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E. & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe ut AB, ad CD, ita A E, ad CF, & E B, ad FD; Item ut A E, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim ſit, ut A B, ad A E, ita A E, ad EB, & ut CD, ad CF, ita C F, ad F D; a erit rectangulum ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum ſub C D, FD, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum ſub A B, EB, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum ſub C D, FD, ad quadratum rectæ CF, (eſt enim utrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtravimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 5. ut quadruplum rectanguli ſub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: & componendo, ut quadruplum rectanguli ſub A B, EB, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ CF. b Sed quod quater continetur ſub A B, E B, una cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex A B, E B; Et quod quater continetur ſub C D, F D, una cum quadrato rectæ CF, æquale eſt quadrato lineæ compoſitæ ex C D, FD. Igitur erit quoque ut quadratum lineæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadra-

a 17. ſexti.

b 8. ſec.





tum rectæ AE, ita quadratum lineæ compoſitæ ex CD, FD; ad quadratum rectæ CF, *a* Ac proinde, ut recta compoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta compoſita ex CD, FD; ad rectam CF: Et componendo ut compoſita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc eſt, dupla ipſius AB, ad rectam AF, ita recta compoſita ex CD, FD, & recta CF, id eſt, dupla ipſius CD, ad rectam CF; Et permutando, ut dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita AE, ad CF; *b* Vt autem dupla ipſius AB, ad duplam ipſius CD, ita eſt AB, ad CD. Erit ergo ut AB, ad CD, ita AE, ad CF, Ac propterea, cum ſit ut tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata ad CF, ablatam; *c* erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, ut tota ad totam. Quare ut AE, ad CF, ita erit EB, ad FD, cum utraque proportio eadem ſit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit ut AE, ad EB, ſic CF, ad FD, & ſic denique juxta omnes modos arguendi & proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 2. *ſec.*

b 15. *quinti.*

c 19. *quinti.*

## SCHOLIVM.

*FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.*

LATUS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

*QVONIAM enim* d *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam;* e *& recta ſubtendens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit majus ſegmentum, latus ipſum pentagoni:* f *ſit ut eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni; majoris ſegmenti ad majus, qua majoris ſegmenti rectæ angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, ut majus ſegmentum ad minus, ita tota ad majus ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, ut recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni, quod eſt propoſitum.*

d 9. *tertii-decimi.*

e 8. *tertii-decimi.*

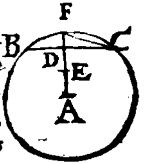
f 2. *quarti decimi.*

*EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.*

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri

lateri ductæ, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

*EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico majus ſegmentum AE, eſſe aquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli aquilateri ejusdem circuli ducta: minus vero ſegmentum ED, aquale eſſe dimidio lateris decagoni ejusdem circuli. Extenſa namque recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. hujus lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentia, biſariam ſecetur in F, a Ac proinde recta compoſita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cujus majus ſegmentum AF, latus hexagoni minus vero ſegmentum FC, latus decagoni. Quare ut in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit ut tota AD, diviſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex AF, FC, ſimiliter diviſam, ita AE, majus ſegmentum ad AF, majus ſegmentum: & ED, minus ſegmentum ad FC, minus ſegmentum: b Eſt autem tota AD, dimidium totius compoſita ex A F, FC. Igitur & AE, ipſius AF, ſemidiametri & ED, ipſius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollarium propoſitionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli aquilateri ducta, aqualis ſit dimidio ſemidiametri: perſpicuum eſt, majus ſegmentum AE, aquale eſſe dicta perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod eſt propoſitum.*



a 9. tertii dec.

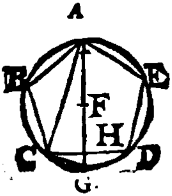
b quarti decimi.

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

ij. iiij.

S I in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraque ſimul quadrata, quintupla ſunt ejus, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cujus centrum F, pentagonum A B C DE, ſubtendatque recta AC, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A; per centrum recta A F G, quæ per Coroll 2. propoſ. 10. lib. 13. dividat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta ſubtenſa CG,



latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG: erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati ejusdem rectæ FG: b Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraque quadrata, quintupla ſunt ejus, quod ex ſemidiametro deſcribitur quadrati. Quod erat demonſtrandum.

*a 47. primi*

*b 10. tertii dec.*

## COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, utraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum unum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti: eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. c Perſpicuum eſt autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

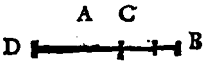
*c 3. quartidecimi.*

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

o. iij.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicujus circuli extrema ac media ratione in C, ſitque majus ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni ejusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni ejusdem circuli, adjungaturque in rectum ipſi AB, d eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diviſa in A, extrema ac media ratione, cujus majus ſegmentum BA; Ponitur



*d 9. tertii decimi.*

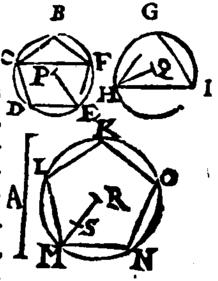
tur autem & A B, ſecta in C, ſimiliter. *a* Igitur erit ut B D, tota ad majus ſui ſegmentum A B, ita A B, tota ad majus ſui ſegmentum A C: Sed eſt quoque ut B D, tota ad majus ſui ſegmentum A B, ita A B, majus ſegmentum ad A D, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut A B, ad A C, ita eadem A B, ad A D; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo A D, ponatur latus decagoni illius circuli, cujus latus hexagoni eſt A B; erit & A C, ejusdem circuli latus decagoni. a 2. qua *decimi.*

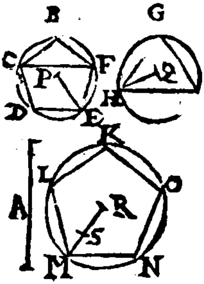
**Aliter.** Adjungatur ipſi A B, in rectum recta A D, æqualis majori ſegmento A C; *b* eritque tota recta BD, diviſa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, majus ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicujus circuli, erit per ea, quæ demonſtravimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum ejusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi A D, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cujus A B, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicujus circuli, &c. Quod erat oſtendendum. b 5. *tertiidecimi.*

## THEOR. 5. PROPOS. 5. ij. v.

**Idem** circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

In ſphæra, cujus diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cujus unum pentagonum B C D E F, & Icoſaedrum, cujus unum triangulum G H I. Dico eundem circulum circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos B C D E F, G H I, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, *c* ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita ut quinque latera hujus pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoq; quodlibet ipſorum æquale cuivis lateri trianguli G H I. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; *d* eritque majus ſegmentum R S, latus Decagoni in circulo K L M N O, in quo R M, eſt latus hexagoni. Subtendat quoque recta C F, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. ejusdem propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt majus ſegmentum lateris c 13. *tertiidecimi.* d 4. *quartidecimi.*





a 2. quartidecimi.
b 22. ſexti.

cubi C F, ſecti extrema ac media ratione, a erit ut tota C F, ad totam R M, ita BF, majus ſegmentum ad R S, majus ſegmentum; Ac propterea ut quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ R M, ita quadratum rectæ B F, ad quadratum rectæ R S; Atque adeo per ea; quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. ut triplum quadrati rectæ C F, ad quintuplum quadrati rectæ R M, ita triplum quadrati rectæ B F, ad quintuplum quadrati rectæ R S: Eſt autem triplum quadrati rectæ C F, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ B F, æquale

c 10. tertiidec. erit quintuplo quadrati rectæ RS: c Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris R M, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ M N, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ R S. Igitur & quinque quadrata rectæ M N, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ C F, (cum hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ R M.) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ R S. Sed

d 3. quartidecimi. quoniam, d (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri P E, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ C F, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ P E; & quinque quadrata rectæ M N, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH,

e 12. tertiidecimi. lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; e ſit autem quadratum ipſius G H, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ G H, hoc eſt, rectæ M N, æqualia quindecim quadratis rectæ QH,) erunt quoque quindecim quadrata rectæ P E, æqualia quindecim quadratis rectæ Q H; ac propterea unum quadratum rectæ P E, uni quadrato rectæ QH, & idcirco ſemidiameter BE, ſemidiametro Q H, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonſtrandum.

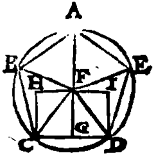
iii.
vi.

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari com-

**ri comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.**

Ex centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum ſub FG, & C *D*, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque unius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi C D, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum ſub HC, hoc eſt ſub FG, & CD. *a* Quoniam vero rectangulum CI, duplum eſt trianguli FCD, atque adeo cujuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies ſumptum, æquale decem hujuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint uni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli CI, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum CI, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum. a *41. primi.*



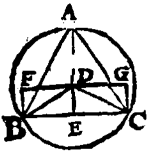
ALITER Facta eadem figuræ conſtructione, *b* cum rectangulum CI, duplum ſit trianguli FCD, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptum æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Docecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque hujuſmodi triangulis conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta hujuſmodi triangulis. Atque idcirco triangulum FCD, ſumptum ſexagies æquale erit ſuperficiei Dodecaedri. b *41. primi*

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

iij.
vij.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli: Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſupe rficiei æquale.

Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis unius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. a Quoniam vero rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC, atque adeo cujuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex hujusmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint uni triangulo Icoſaedri; Atque adeo idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.



a 41. primi

b 41. primi

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, b cum rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta hujusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

## COROLLARIVM.

ITAQVE ſuperficies, (repetita figura proxime antecedenti) cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuscunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulũ contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus. c Cum enim ſuperficies Dodecaedri æqualis ſit illi rectangulo trigeſies ſumpto; d Item ſuperficies Icoſaedri æqualis huic rectangulo trigeſies quoq; ſumpto: Erit tam illud rectangulum trigeſima pars ſuperficiei Dodecaedri, quã hoc rectangulum, ſuperficiei Icoſaedri. e Quare erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, ut rectangulum illud, trigeſima videlicet pars. Dodecaedri, ad rectangulũ hoc, trigeſimam ſcilicet partem Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

c 6. quartidecimi.

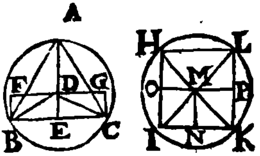
d 7. quartidecimi.

e 15. quinti.

## SCHOLIVM.

*NON diſſimili argumento indagabimus ſuperficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam ſi ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpendicularis ducatur ad vnũ aliquod eorum latus; Erit, quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumſcriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri. a Quoniã enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totam ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triãgula æquilatera ipſi ABC æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.*

a 41. pri.



*SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. b Cũ enim rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale viginti quatuor huiuſmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperfiicei Octaedri.*

b 41. pri.

*SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. c Quoniam enim rectangulum IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale viginti quatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula conſtituant ſex quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum con-*

c 41. pri.

*ſciant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.*

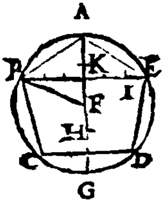
*ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL, (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, ſit dimidiũ lateris HI, nẽpe æqualis ipſi MN.) conſtituẽt duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.*

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

IV. viij.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſint quintupla ipſius IE. Dico rectangulum comprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. *lib.* 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres ſextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas: Ac proinde & KB ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita



a 16. *ſexti.* KB, ad KI; *a* atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub medijs AF, KB.

b 41. *pri.* *b* Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eandem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH,

c 1. *ſexti.* KI, duplum erit eiuſdem trianguli ABF. *c* Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim *KI*, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis è centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt

d 1. *ſexti.* rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis E, eademque

demque ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum *A*BCDE, & rectangulum ſub AH, *B*I, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti (*a* comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

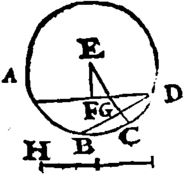
a 5. *quarti dec.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

IV. viij.

IN circulo *A*BCD, *b* circumſcribente & pentagonum Dodecaedri & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni *B*D, & trianguli *A*D: & ex centro E; ducantur *A*D, BD, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe, vt H, latus cubi, ad *A*D, latus Icoſaedri: ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt *B*D, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. *c* Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; *d* Ac proinde rectangulum ſub extremis *H*, E F; æquale erit rectangulo ſub medijs *B*D, EG. *e* Quia vero eſt, vt H, ad *A*D, ita rectangulum ſub H. EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cum baſes ſint H, AD, altitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF, ) ad idem rectangulum ſub *A*D, EF. Quare cum ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub *B*D, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque vt H, latus cubi, ad *A*D, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque



b 5. *quarti dec.*

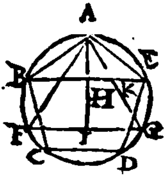
e 2. *quarti dec.*

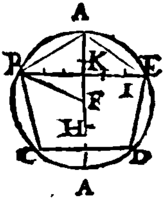
d 16 *ſexti.*

e 1. *ſexti.*

Itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri.&c. Quod oſtendendum erat.

a 5. quarti dec. ALITER. *a* Circumſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, biſariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextas partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim rectangulum ſub AI, BK, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, æquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: erit vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: b 1. ſexti. *b* Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item ſecundum & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. c ſchol. 22. quinti. *c* erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſumpta ad rectam IF, vigeſies ſumptam: Atqui recta BK, duodecies ſumpta æquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinque ſextas partes ipſius BE, continebit eadem BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE,) Recta vero IF, vigeſies ſumpta æqualis eſt lateri Icoſaedri FG, decies ſumpto; (eo quod FG, eſt ipſius IF, dupla) Erit igitur ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi BE, decies ſumptum ad latus Icoſaedri FG, decies ſumptum; d 15. quinti. Ac propterea, *d* cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.





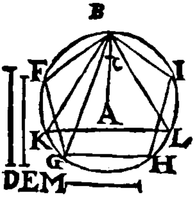
THEOR.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

IV.
IX.

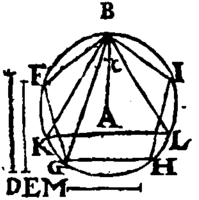
SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, a quod à tota, & id quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icoſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex A, centro ad interuallum AB, circulus deſcribatur, in quo conſtituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL: Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam vero AC, maius ſegmentum ſemidiametri AB, ſectæ extrema ac media ratione, a eſt latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; b poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſſit iam & recta M, totam AB, & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. c Quoniam enim quadratum . lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: d Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M. ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ; e Erit vt tota AB, ad maius ſegmentum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentum BF; f Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF,) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad qua-



a 4. quarti dec.
b 10. tertij dec.
c 12. tertij dec.
d 4. tertij dec.
e 2. quarti dec.
f 22. ſexti.

quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ *M*: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ a 22. ſexti. BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ *M*; *a* Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam *BK*, ita recta *BF*, potens totam *AB*, & maius ſegmentum *A*C, ad rectam *M*, potentem totam *A*B, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, *BK*, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta *BF*, potens totam AB, & maius ſegmentum *A*G, ad rectam *M*, potentem totam AB, & minus ſegmentum *B*C, ita ſe habere propoſitum cubi latus D, ad Icoſaedri propoſitum latus E. Si recta itaque linea ſecetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

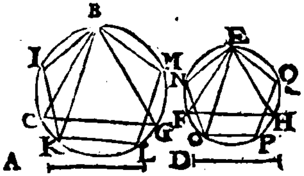


## SCHOLIVM.

*QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.*

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

*SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ. Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque* b 5. quarti dec. *rectæ BK, CK, EO, FO. b Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti: Ac propterea, ex coroll. 2 propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circumferentiæ) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.)*



*hendit) Erant tam anguli BCK, EFO, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quam anguli BKC, EOF, inter ſe, cum tam illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde ex coroll. 1 propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. a Quare erit vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.* a 4 ſexti.

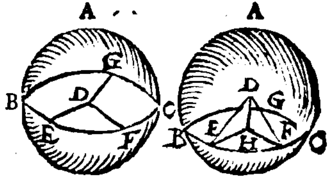
*PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E. latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.*

*Ex hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.*

## LEMMA I.

SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

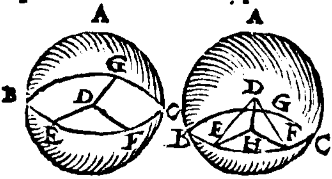
SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphęræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ, quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiuſque centrum D, idem cum centro ſphæræ.



TRANSEAT ſecundo planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vſque communis

nis ſectionis; & cõnectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt; a erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiuſque centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod eſt propoſitum.

a 47. pri.



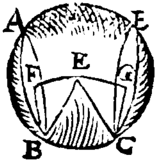
## COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra. Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, vt perſpicuum eſt.

## LEMMA II.

CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant à centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, ſunt circuli æquales AB, DC. Dico ipſos æqualiter à centro E, diſtare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollar. præcedentis lemmmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circũferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti ſunt, ex deexpefioit.3.lib.11. *b* Erit tam quadratum cum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro ſphęræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ E F, reliquo quadrato rectæ E G, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter diſtant à centro E.

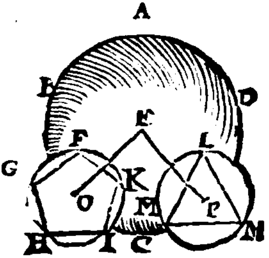


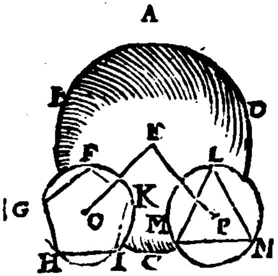
SED iam æqualiter diſtent circuli AB, DC, à centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Cōſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodẽ modo, quadrata rectarũ EF, FB, æqualia eſſe qnadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, dẽptis quadratis æqualibus rectarum æqualiũ EF, EG, cũ circuli æqualiter ponantur diſtare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit: atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, ſemidiametri ſcilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum IV.
ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cui latus ad latus Icoſaedri: X.
in vna eademque ſphæra.

*IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum EGHIK: Item Icoſaedrum, cuius unum triangulum LMN. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra, ſiue hac eadem ſit, quæ ſphæra ABCD, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæra*





tangunt: ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in ſphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum: æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN: Ac propterea per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabunt, ideoque perpendicularis ex E, in plana circulorum deducta, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1 cadentes, quales ſunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri: & ad omnia triangula Icoſaedri deducta æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ: reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum: Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erunt inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. b Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo: Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modo diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE, erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri, c Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæra: atque adeo ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 5. quarti dec.

b 6. duodecimi.

c 9. quartidec.

d 9. quartidec.

## COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, d ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra. e Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemque ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcun-

e 10. quartidecimi.

que

que extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: a Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra: Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri: & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunq; ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

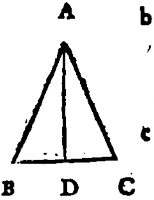
a 11. *quartidecimi.*

## PROBL. 12. PROPOS. 12.

a. xj.

**LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.**

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſiti in BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum A*B*, AC, *b* anguli B, & C, æquales ſunt: & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli AD*B*, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC: habent autem & latus A*D*, commune, vel AB, AC, æqualia. *c* Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt: ac propterea latus *B*C, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ *B*D; & idcirco quadratum lateris A*B*, quadruplum quadrati rectæ *B*D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. *d* Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum AD, ED; erunt quoque quadrata rectarum A*D*, *B*D, quadrupla quadrati rectæ B*D*: Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, B*D*, talium 1. erit quadratum rectæ B*D*, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A*D*. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



b 5. *primi.*

c 26. *pri.*

d 47. *primi.*

## COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis, *e* Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC. bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

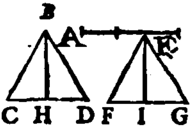
e 8. *primi.*

o.
xiiij.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

*SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, &* EFG, *Octaedri illius ſphæræ, ducãturq; ex angulis* B, *&* E, *ad latera oppoſita* CD, FG, *perpendiculares* BH, EI. a *Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri* BC, b *& duplum quadrati lateris Octaedri* EF; *habebunt quadrata rectarum A,*BC, EF, *proportionem, quam numeri* 6.4.3. c *ideoque commenſurbilia erunt: Quare lineæ ipſæ* A,BC, EF, *commenſurabiles exiſtent ſalem potentia; Atque adeo, cum* A, *ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales* BC,EF, *& idcirco & earum dimidia Rationales erunt* CH, FI.



a 13. *tertij. dec.*
b 14. *tertij dec.*
c 6. *decimi.*

*RVRSVS,* d *quia tam quadratum rectæ* BC, *quadrati rectæ* BH, *quam quadrati rectæ* EF, *quadrati rectæ* EI, *ſeſquitertium eſt: habebunt tam quadrata rectarum* BC,BH, *quam quadrata rectarum* EF,EI, *proportionem inter ſe, quam numeri* 4. 3. e *Ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ* BC,BH, *quam lineæ* EF,EI, *commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi* BC, *quam FI, ipſi* EF, *dimidia videlilet toti, commenſurabilis.* f *Igitur & tam* BH,CH, *quam* EI,FI, *commenſurabiles inter ſe erunt*: Ac *proinde cum* CH, *&* FI, *oſtenſæ ſint Rationales, erunt queq;* BH,EI, *Rationales.* g *Quoniam vero tam* CH,BH, *quam FI,*EI, *longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: (vt conſtat ex coroll prop. 24 lib. 8. Habent enim proportionem, quam* 1. *ad* 3. h *cum oſtenſum ſit talium partium* 1. *eſſe tam quadratum* CH, *quam quadratum FI, qualium* 3. *eſt tam quadratum* BH, *quam quadratum* EI,) *Erunt tam* CH,BH, *quam FI,* EI, *Rationales potentia tantum commenſurabiles;* i *Ac proinde tam rectangulum ſub* CH, BH, *Rationalibus potentia tantum comenſurabilibus, quam rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula* BCD,EFG, *æqualia, rectangulis ſub* CH,BH, *& ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum* CD, FG. *dupla ſint baſium rectangulorum* CH,F I. *Igitur & triangula* BCD,EFG, *Mediæ erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo* BCD,

d 12. *quartidec.*
e 6. *dec.*
f 12. *dec.*
g 9. *decimi.*
h 12. *quar-dec.*
i 22 *decimi.*

*BCD, ſit commẽſurabilis: (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis: (Eſt enim triangulum EFG, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque ex coroll. propoſ. 24 lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Media. Si igitur ſphæra diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum,*

## COROLLARIVM.

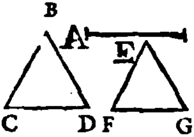
SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulũ æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles: Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

## THEOR. 14. PROPOS. 14.

o: xiv.

SIT etraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulum BCD; Octaedri vero baſis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. *a* Quoniam enim quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; *b* duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; ſit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. ſit quadratum lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG: Vt autem quadrarum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triangulum BCD, ad triangulum EFG, (*c* quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.) Igitur & triangulum BCD, ſeſquitertium eſt trianguli EFG.



a 13 *tertij dec.*

b 14. *tertij dec.*

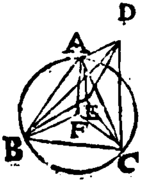
c 20. & 19. *ſexti.*

RVRSVS, quoniam oſtẽſum eſt triangulum BCD. ſeſquitertium eſſe trianguli EFG: Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. eſſe triangulum EFG: Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24. At triangulum BCD, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quamobrem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod erat oſtendendum.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitę, eſtque perpendicularis ad dictam baſin.

*SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E: ducaturque ex angulo D, per E, centrum ſphæræ recta DEF, incidens in baſin ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & DF, perpendicularem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC, FA, FB, FC: quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED: Sunt autem & baſes AD, CD, æquales, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium.* a 8. primi. *a Igitur anguli AED, CED, æquales erunt: Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt,* b 13. pri. *b eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales:* c 4. pri. *c Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales;* d 9. ter. *d erit F, centrũ baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.*

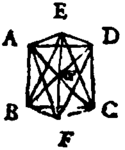


*QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa in centrum circuli cadit: efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli haberet vnus idemque circulus duo centra, quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.*

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

o. xvj.

**OCTAEDRVM** in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.



SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductus enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet à centro ad ſuperficiem ſphæræ: *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplũ eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1 quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cum ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG: erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG: *b* Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. *c* Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ: *d* atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent plano: *e* Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum ACD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet conſtet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſunt & ſimilia & baſi communi ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin ABCD, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG: *f* Ac propterea angulus, AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, *g* ipſa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum, nemp.

a 14. *tertij dec.*

b 48 *pri.*

c 14. *pri.*

d 2. *vndecimi.*

e 7. *vndecimi.*

f 48. *pri.*

g 4. *vndecimi.*

ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo FG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphæræ: *a* erit eius quadratum duplũ quadrati lateris AD: Ac proptera æquale duobus quadratis laterum AD, DC. *b* Quare angulus ADC, rectus eſt; Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere Octaedri AB: *c* conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

a 14. *tertij dec.*

b 48. *pri.*

c 12. *tertij dec.*

## S C H O L I V M.

*MVLTO breuius hanc propoſitionem demonſtrauimus in coroll. 2: propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur à Campano, non habita ratione conſtructionis Octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.*

o. xvij.

## THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrũ eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.

*VEL, vt Campanus loquitur.*

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrũ in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphæræ.

SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrum E F G H IK. in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphæræ DM, incidens in baſin A B C, ad punctum N. *d* Erit igitur N, centrum baſis A B C, & D N, perpendicu-

d 15. *quartidec.*

laris ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ, & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. per centrum L, planum OPQ: parallelum plano ABC: a Eruntque rectæ QO, OP, PQ. Parallelæ rectis AB, BC, CA: Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, b cum anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At ABC, eſt æquiangulum ex coroll. propoſ. 5. lib. 5. Igitur & QOP, æquiangulum erit: Ac popterea & æquilaterum, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. ideoq; ſimile ipſi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris ſimilia, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, ſimiles ſunt ex defin. 9. lib. 11. c Rurſus quia plana parallela ABC, QOP, ſecant rectas DN, DC, proportionaliter: erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum oſtenſum ſit DN, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt D,L) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, d cum pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt conſtat in his numeris 64. 48. 36 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4. ad 3. vt conſtat ex propoſ. 2. lib 8. Rurſus e quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP. vt 64. ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.

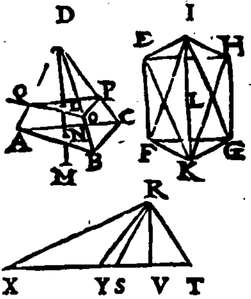
a 16. *vndecimi.*

b 10. *vndecimi.*

c 17. *vndecimi.*

d 8. *duodecimi.*

e 20. *ſexti.*



SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP: demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. f Eritque latus RT, hoc eſt DP, illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, eſt potens vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

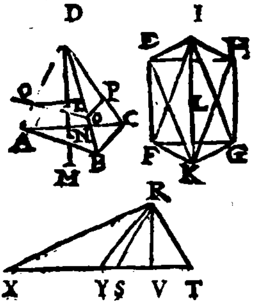
f 12. *quartidecimi.*

Rurſus extenſa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP; erat. vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt

]

ſeſquitertia) ac propterea qualium TY, eſt 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, (quæ poteſt vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC,) & ſub recta TY, (quę continet octo nonas partes eiuſdem lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

*a 1. ſexti.* CVM enim ductis rectis RX, RY, *a* triangulum RTX, duplum *b 41. pri.* ſit trianguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: *b* Eſt autem & rectangulū ſub RV, TY, duplū eiuſdem trianguli RTY; Erit tri- *c 7. quinti.* angulum RTX æquale rectangulo ſub RV, TY. *c* Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum, RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum *d 1. ſexti.* RST: *d* Eſt autem triangulum RTX ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis *ABCD*, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK, (Nam cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoque erit ad planum QOP, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque ſphærę ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: *e* Octaedrum au- *e 16. quartidecimi.* tem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidem EFGHI; Ac propterea per ea quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5 oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratū diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrum EFGHIK) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis ſeu tetraedrum



ABCD,

ABCD, ad octaedrum EFGHIK, Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum; &c. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

*QVONIAM vero DC, talium partium 4 fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a cũ recta RT ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32, qualium 27. ST, ſeu DP: (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque Tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

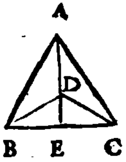
a 12. quarti dec.

## PROBL. 18. PROPOS. 18.

o. xvij.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamq; bifariã diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (è centro enim ducuntur) ſit autem & baſis AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC. CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BDC, dupla ſit baſis BE, vtriuſque rectanguli; Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: *b* Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB, ita baſis AE, ad baſin DE: Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.



b 1. *ſexti.*

COROL.

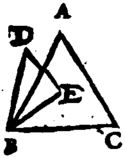
## COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliqua rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2, continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE. duplam eſſe.

## THEOR 19. PROPOS. 19.

o. xvij. SI octaedrum ſphæræ inſcribatur: erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.



SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum *D*, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis dimittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10 huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC, circumſribit, cadat, erit E, centrum trianguli. a 14. *tertij dec.* Ducta igitur recta *BE*; *a* quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri *AB*; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ D*B*, ex ſcholio propoſ. 4. lib. *2*. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris b *12. tertij dec.* AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ D*B*, *3*. *b* Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet *BE*; Erit quadratum rectæ *BE*, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c 47. *pri.* *c* cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum *BE*, DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. *A*c proinde quadratum rectæ D*B*, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur Octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

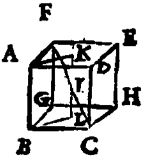
## THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. xviij. DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquã baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

IT cubus *AB*CDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex

I,ex quo IK,perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK,æqualem eſſe dimidio lateris cubi. *a* Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi,hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi,id eſt, toti ſuperficiei cubi.

a *tertij dec.*



PRODVCTA autem KI, ad baſin oppoſitam BCHG,vſque in punctum L; cum KL,recta ſit ad planum AE,recta quoque erit ad planum BH,illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14.lib.11.Rurſus,*b* quia AB,KL,parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE,ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE,BH, communes ſectiones, lineas rectas AK,BL, *c* quæ parallelæ quoq; erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammū erit ABLK, atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perpẽdicularis KL,è centro ſphæræ I, cadit in baſes AE,BH,ad puncta K, & L,erunt K,& L centra circulorum dictas baſes ambientium in ſphæra, per coroll. lemmatis 1.propoſ. 50.huius lib.Quare KL,in centro I, bifariam ſecabitur à dicta diametro CF,vt in coroll.1.prop.15.l.13.oſtendimus;Ac propterea cum KK,oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK,dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti,&c.Quod oſtendendum erat.

b *6. undecimi.*

c *16. undecimi.*

## COROLLARIVM I.

EX dictis colligitur,ſolidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis,æquale eſſe cubo. *d* Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi,erunt duo quadrata AE,BH ,duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ: *e* Perſpicuum autem eſt ſolidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ,eo quod dicta ſolida habeant & baſes,& altitudines æquales. Itaque cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt,id, quod fit ex dimidio lateris cubi,in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

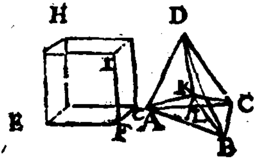
d *15. tertij dec.*

e *31. undecimi.*

ALITER proponi poteſt hoc corollarium,vt dicamus,ſolidum,quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe cubo. Nam cubus BE,producitur ex BA,latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

## SCHOLIVM.

*VNIVERSE autem ſolidum, quod fit ex perpendiculari ex* *centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſin ductâ in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD. ſolidum autem EFGH, contentum ſub EI, tertia pars ſuperficiei corporis ABCD. & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidum EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nã ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint, ipſi æqualiter à centro diſtabunt, per lemma 2. propoſitionis huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplum eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 6. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum: Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.*



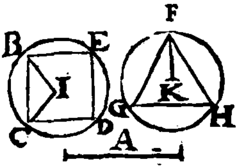
o. xj.

## THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & triangulum FGH, hoc eſt, circulos *BGDE*, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint enim rectæ ex centris I*B*, KF. *a* Quia igitur quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris cubi *BC*, & quadratum lateris *B*C, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadratum; *b* Ac proinde quadratum rectæ BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC.

*a* 15. tertii dec.



*b* 47. pri.

Quare

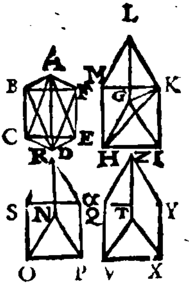
Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ *BC*, quadrati rectæ *BI*,) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectæ BI. Rurſus *a* quia quadra- a 24. *tertij dec*
tum diametri A. duplum eſt quadrati lateris octaedri *FG*: *b* & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ: b 12. *tertij dec.*
qualium partium 6. ponetur quadratum diametri *A*, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ *BI*: æqualia erunt quadrata rectarum B',FK: Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM.

HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. *c* qui cum ſint æquales oſtenſi, æqualiter c 21. *quarti dec.*
diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.

## THEOR. 22. PROPOS. 22.

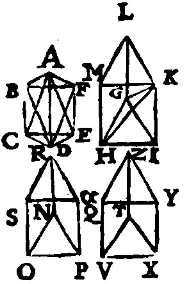
SI Octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.



I*N* eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter *AD*, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius baſis BCD: in BDFA: cuius baſis BDF: in CDEA, cuius baſis CDE: & in DEFA: cuius baſis DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum B C E F, exiſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyrami-

dum

dum coſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, a 8. pri. & reliqua latera ipſius octaedri latera exiſtunt, *a* inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cōſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. b 14. quartidec. *b* Quoniam igitur GHI, hoc eſt TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS. ſeſquitertium; ( Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrum. Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio prop, 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autem altitudo octaedri, nempe perqendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perperpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadrátum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 5. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum latetis tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrū ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

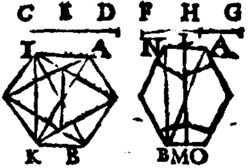


## COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram. a 18. tertii dec.

## THEOR. 23. PROPOS. 23.

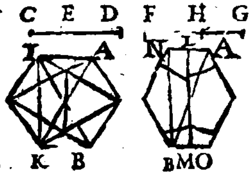
SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & majus ejus ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus ejus ſegmentum: Erit majus ſegmentum prioris latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri ejus ſphæræ, cujus recta linea propoſita diameter exiſtit.



*POSSIT recta* AB, *rectam* CD, *& ejus ſegmentum majus* CE; *Item rectam* FG; *& ejus ſegmentum minus* HG. *Dico* CE, *eſſe latus* Icoſaedri, *&* HG, *latus* Dodecaedri, *ejus ſphæra, cujus* AB, *diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cujus diameter* AB, *deſcriptum* Icoſaedrum AIBK, *&* Dodecaedrum ANBO, Latera *deinde Icoſaedri oppoſita* AI, BK, *connectantur recta* IB, *quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, ut conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta* ZF, *erit* RSHZF, *pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia* GR, GS, GH, GZ, GF, *cadentia in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta* RH, *latera oppoſita* RX, HI, *conjungens angulum* RSH, *ſubtendit (clariuſq; patebit ex constructione* Icoſaedri, *quam ad finem lib. 16. ex* Pappo *afferemus. quod etiam videre licet in aliquo* Icoſaedro *materiali. Quia vero* AI, BK, *latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13* b *erunt anguli* AIB, IBK, *æquales duobus rectis; Ac proinde, cum ſint inter ſe æquales.* (*Ducta enim alia diametro* IK; *cum latera* AI, IB, *trianguli* AIB, *æqualia ſint lateribus* KB, BI; *& baſes quoque* AB, IK, *æquales;* c *Erunt anguli* AIB, IBK, *æquales) recti erunt;* d *ideoque quadratum rectæ propoſitæ* AB, *æquale erit quadratis rectarum* AI, IB; *Erat autem idem quadratum rectæ* AB, *æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum* CD, CE: *Igitur quadrata rectarum* IB, IA, *æqualia ſunt quadratis rectarum* CD, CE; *Ac pro-*

b 29. primi
c 8. pri.
d 47. pri.

*pterea cum* CE, *ſit majus ſegmentum ipſius* CD, *diviſæ extrema*
*ac media ratione: Item* I*A*, *majus ſegmentum ipſius* IB, *ſimiliter diviſæ*;
*(Nam* IB, *ſubtendit angulum pentagoni, cujus latus eſt* IA,
*latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni,*
a 8. tertii decimi. *ſi ſecetur extrema ac media ratione,* a *majus ſegmentum eſſe*
*æquale lateri ejuſdem pentagoni) æquale erit* CE, *majus ſegmentum*
b 2. quartidecimi. *ipſi* IA, *lateri Icoſaedri.* b *Cum enim ſit ut* CD, *ad* CE, *ita* IB,
c 22. ſexti *ad* IA; c *erit quoque ut quadratum rectæ* CD, *ad quadratum rectæ*
CE, *ita quadratum rectæ* IB, *ad*



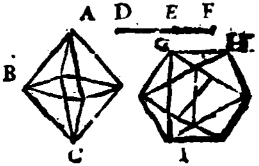
*quadratum rectæ* IA: *At componendo, ut quadrata rectarum* CD, CE,
*ad quadratum rectæ* CE, *ita quadrata rectarum* IB, IA *ad quadratum*
*rectæ* I*A*: *Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum* CD, CE, *æqualia quadrata rectarum* IB, I*A*: d *Igitur &*
d 14. quinti. *quadrato rectæ* CE, *æquale eſt quadratum rectæ* I*A*; *ideoque rectæ*
CE, I*A*, *æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.*

RVRSVS *latera Dodecaedri oppoſita* AN, BO, *ſecentur bifariam*
*in* L, & M, *punctis, quæ recta* LM, & *ipſa latera recta* NB, *conjungantur.*
*Quoniam igitur* NL, BM, *æquales parallelæ ſunt, per*
*coroll. 3. propoſ 17. lib. 13.* e *erunt quoque* LM, NB, *æquales & parallelæ*:
e 33. pri. *Eſt autem recta* LM, *ſecans latera oppoſita biſariam, perpendicularis*
*ad ipſa latera oppoſita per idem coroll. Igitur &* NB,
f 47. pri. *ad eadem perpendicularis erit,* f *Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ* AB, *æquale erit quadratis rectarum* NB, *N*A: *Quare cum*
*idem quadratum rectæ* AB, *æquale ſit poſitum quadratis rectarum*
FG, HG. *æqualia erunt quadrata rectarum* NB, NA, *quadratis*
*rectarum* FG, *H*G. *Ac propterea, cum* HG, *ſit minus ſegmentum*
*ipſius* FG, *ſectæ extrema ac media ratione: Item* NA, *minus ſegmentum*
*ipſius* NB, *hoc eſt, ipſius* LM, *ſimiliter diviſæ, per coroll.*
*4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit* HG, *minus ſegmentum ipſi* N*A*, *lateri*
*Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra*
*demonſtravimus,* CE, *majus ſegmentum æquale eſſe ipſi* IA, *lateri*
*Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam*
*lineam ſectam extrema ac media ratione, & majus ejus ſegmentum*:
*Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus ejus ſegmentum*:
*Erit majus ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri: minus*
*autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri ejus ſphæræ, cujus*
*recta linea propoſita diameter exiſtit. Quod erat oſtendendum.*

## THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit majus & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus A B, octaedri A B C, & majus ſegmentum D E, & minus E F, rectæ D F, ſectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem ſphæræ inſcriptum Icoſaedrum GHI, cujus latus GH, & ſubtendens angulum pentagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter *H* I. Dico quadratum lateris G*H*, duplum eſſe quadrati minoris ſegmenti E F. Cum enim GH, ſit latus pentagoni, cujus unum angulum ſubtendit recta GI; *a* erit G H, majus ſegmentum ipſius G I, diviſæ extrema ac media ratione: *b* Ac proinde compoſita recta ex GI, GH; ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratione. *c* Quia vero quadratum diametri *H* I, æquale eſt quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IG*H*, rectus ſit, ut in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum D*E*, *E*F: *d* Eſt autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla ſunt quadratorum rectarum D*E*, EF. Atqui ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, *E*F, ita eſt quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nam *e* cum ſit ut G I, ad G H; ita D*E*, ad EF. *f* Erit quoque ut quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ *D*E, ad quadratum rectæ E F; & componendo, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ *E*F: Et permutando, ut quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum *D*E, *E*F, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ *E*F.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque eſt quadrati rectæ E F. Quare ſi latus Octaedri potuerit majus, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.



a 8. *tertii dec.*

b 5. *tertii dec.*

c 47. *pri.*

d 14. *tertii dec.*

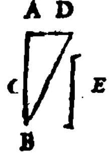
e 2. *quartidecimi.*

f 22. *ſexti.*

## THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diviſa extrema ac media ratione cum minori e ſegmento angulum rectũ conſtituat; cui recta ſubtendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri ejus ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA *recta* AB, *ſecta in* C, *extrema ac media ratione conſtituat cum recta* AD, *quæ æqualis ſit minori ſegmento* AC, *angulum rectum* A, *cui recta ſubtendatur* BD, *ſitque recta* E, *potentia ſubdupla ipſius* BD. *Dico* E, *latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua* AD, *vel* AC, *latus eſt* Dodecaedri. *Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib 13. majus ſegmentum* BC, *latus ſit cubi illius ſphæræ, cujus minus ſegmentum* AC, *vel* AD, *latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphæræ potentia tri, la majoris ſegmenti* BC, *nempe lateris cubi:* a *Sunt autem & quadrata rectarum* AB, AD, *nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla ejuſdem quadrati majoris ſegmenti* BC. *Quadratum igitur diametri ſphæræ æquale erit quadratis rectarum* AB. AD, *hoc eſt, quadrato rectæ* BD; *At proinde recta* BD, *diameter eſt ſphæræ:* b *Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſſit autem recta* BD, *duplum rectæ* E, *quod recta* E, *ponatur potentia ſubdupla ipſius* BD: *Erit* E, *latus Octaedri ejuſdem ſphæræ, cujus* AD, *latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diviſa, &c. Quod erat demonſtrandum.*



a 4. tertii dec.

b 14. tertii dec.

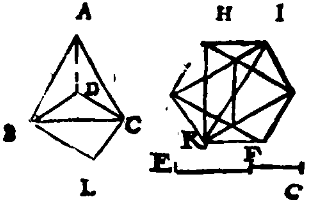
### COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cujus majus ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, ut conſtat ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit majus ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diviſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quævis recta (nimirum BC) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E, potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD) eſſe latus Dodecaedri ejuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

c 18. tertii dec.

## THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit majus & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ, latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.



POSSIT *Tetraedri* ABCD, *latus* BC, *majus ſegmentum* EF, *& minus* FG, *recta* EG, *diviſa extrema ac media ratione: Sit quoque* HI, *latus Icoſaedri* HIK, *ejuſdem ſphæræ. Dico* HI, *rectam otentia eſſe* tendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri ejus ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA *recta* AB, *ſecta in* C, *extrema ac media ratione conſtituat cum recta* AD, *quæ æqualis ſit minori ſegmento* AC, *angulum rectum* A, *cui recta ſubtendatur* BD, *ſitque recta* E, *potentia ſubdupla ipſius* BD. *Dico* E, *latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua* AD, *vel* AC, *latus eſt* Dodecaedri. *Cum enim per coroll. 2. propoſ 17. lib 13. majus ſegmentum* BC, *latus ſit cubi illius ſphæræ, cujus minus ſegmentum* AC, *vel* AD, *latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphæræ potentia tripla majoris ſegmenti* BC, *nempe lateris cubi:* a *Sunt autem & quadrata rectarum* AB, AD, *nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla ejuſdem quadrati majoris ſegmenti* BC. *Quadratum igitur diametri ſphæræ æquale erit quadratis rectarum* AB, AD, *hoc eſt, quadrato rectæ* BD; *At proinde recta* BD, *diameter eſt ſphæræ:* b *Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris* Octaedri; *Poſſit autem recta* BD, *duplum rectæ* E, *quod recta* E, *ponatur potentia ſubdupla ipſius* BD: *Erit* E, *latus* Octaedri *ejuſdem ſphæræ, cujus* AD, *latus* Dodecaedri *ponatur. Si igitur recta linea diviſa, &c. Quod erat demonſtrandum.*

*a 14. tertiidec.*

b 14. *tertii dec.*

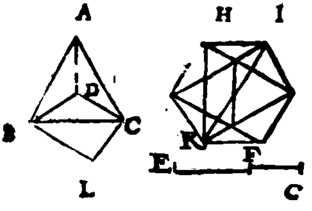
## COROLLARIVM.

c QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cujus majus ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, ut conſtat ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit majus ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diviſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quævis recta (nimirum BC) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E, potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD) eſſe latus Dodecaedri ejuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

c 18. *tertiidec.*

## THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit majus & minus ſegmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione ſectæ, latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.



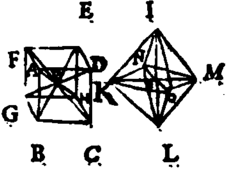
POSSIT *Tetraedri* ABCD, *latus* BC, *majus ſegmentum* EF, *& minus* FG, *recta* EG, *diviſa extrema ac media ratione: Sit quoque* HI, *latus Icoſaedri* HIK, *ejuſdem ſphæra. Dico* HI, *rectam otentiâ eſſe*

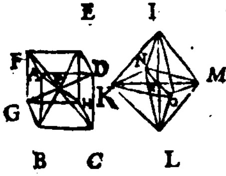
*eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti* FG. *Subtendat enim recta*
HK, *unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, con-*
*nectaturque recta* IK, *diameter.* a *Quia igitur* HI, *eſt majus ſegmen-* a 8. *tertii*
*tum recta* HK, *diviſa extrema ac media ratione:* b Erit *quoque com-* *dec.*
*poſita* KHI, *diviſa eodem modo in* H, *majuſque ſegmentum* HK, & b 5. *tertii*
*minus* HI. c *Fiat ex rectis* BC, EF, FG, *triangulum* BCK, *ita ut* *dec.*
BL, *recta ipſi* EF, & CL, *ipſi* FG, *ſit æqualis,* d *Eritque angulus* L, c 22. *pri.*
*rectus, quod recta* BC, *ponatur poſſe rectas* BL, CL, *hoc eſt, rectas* d 48. *pri.*
EF, FG: *Eſt autem & angulus* IHK, *rectus, ut propoſ.* 23 *hujus lib.*
*oſtendimus:* Eſtque *ut* BL, *ad* LC, *ita* KH, *ad* HI. f *Igitur triangu-* e 2. *quar-*
*la* BLC, KHI, *æquiangula ſunt.* g *Ac propterea, ut* KI, *ad* IH, *ita* *tidecimi.*
BC, *ad* CL: & *permutando, ut* KI, *ad* BC, *ita* HI, *ad* CL. h *Atqui* f 6. *ſexti.*
IK, *diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri* BC. Ergo & g 4. *ſexti.*
HI, *latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius* CL, *hoc eſt, mi-* h 13. *tertii*
*noris ſegmenti* FH. *Si latus itaque* T*etraedri poſſit majus, & minus* *dec.*
*ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.*

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, ut ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item ut latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

SINT in eadem ſphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri: nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſolvetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines. (Cum enim circuli deſcripti circa pyramidum, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter à centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides
æquales, eandem ob cauſam. i Quoniam autem idem circulus i 21. *quar-*
complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum: æquali- *tidecimi.*
ter diſtabunt baſes pyramidum cubi, & octaedri à centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad ba-





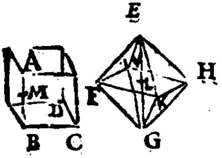
ſin pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ.6. lib.12. Ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſ.22.lib.5. demonſtravimus, ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſin pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus ex eodem ſcholio, ut cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus A B C D, & octaedrum E F G H I K, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex ſemidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam vero quadratum I F K H, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus *propoſ.16. hujus lib.* *a* ſeſquialterum eſt quadrati B D, lateris cubi B C: Eſt autem & recta A B, rectæ B M, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes I F K H, B D, & altitudines A B, B M: *b* Ac propterea parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo ſuper baſin B D, & ſub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rurſus quia recta E L rectæ E N tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E L, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſin, & ſub altitudine E N, ut in ſcholio propoſ.14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E L, triplum eſt pyramidis I F K H E, ex coroll.1.propoſ.7. lib.12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine E N: Atqui hujus parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, ex ſcholio propoſ.14. lib.12. quod & altitudo L N, dupla ſit altitudinis E N. *c* Item Octaedrum E F G H I K, duplum eſt pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſin I F K H, & ſub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterum, quia parallelepipedum ſuperbaſin I F K H, & ſub altitudine B M, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib.12. Vt autem B M, ad L N, ita eſt A B, ad E L. (Cum enim ſit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum

a 18. *tertiidec.*

b 34. *undecimi.*

c 16. *quartidecimi.*

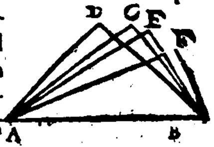


ſuper

ſuper baſin IEKH, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſũ cubo ABCD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine L N, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque ut cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſa ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIVM.

a 13. tertii dec. QVOD demonſtratum eſt, a diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus hujuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; majoris quadrati latus eſſe latus Tetraedri Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur AB, ex cujus quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, æqualia, ita ut quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC: erit recta AC, latus Tetraedri.



b 14. tertii dec. RVRSVS b cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri: Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri AC: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis ſecundum doctrinam ſcholii propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.

c 14. tertii dec. DEINDE, c quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi: Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB: Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita ut quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC, juxta doctrinam ejuſdem ſcholii prop 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratũ lateris cubi BC: Quemadmodum è contrario, ſi ex quadrato diametri *A*B, tollatur quadratum lateris cubi *B*C, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & majus ipſius ſegmentum: *a* Majus ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cujus diameter eſt recta prior linea: Conſtat ſi quadrato diametri AB, exhibeantur, juxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quævis extrema ac media ratione diviſæ ad majus ſegmentum: Rectam minorem BE, eſſe Icoſaedri latus.

*a 23. quartidecimi.*

POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diviſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum: *b* Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri ejus ſphæræ, cujus diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri A B, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum *A*F, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diviſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam B F, latus eſſe Dodecaedri.

*b 23. quartidecimi.*

HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt. Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adjiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemque comparationem ſpectant.

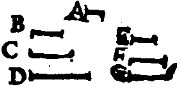
## THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, itaut ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT *quatuor rectæ* A, B, C, D, *continue proportionales, nec non quatuor* A, E, F, G, *ita ut* A, *recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem* C, *ad* F, *tertiæ ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis* B, *ad* E, *ſecundæ ad ſecundam, & proportionem* D, *ad* G, *quartæ ad quartam eſſe triplicatam ejuſdem proportionis* B, *ad* E, *ſecundæ ad ſecundam. Cum enim recta* C, *ad rectam* A, *ex defin.* 10 *lib.* 5. *proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* B, *ad rectam* A: c *habeat autem & quadratum rectæ* B, *ad quadratum rectæ* A, *du-*

*c 20. ſexti.*

*duplicatam proportionem ejuſdem proportionis recta B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum recta B, ad quadratum recta A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum recta E, ad quadratum recta A; Et convertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum recta A, ad quadratum recta E. Quoniam igitur eſt quadratum recta B, ad quadratum recta A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum recta A, ad quadratum recta E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex aquo quadratum recta B, ad quadratum recta E; ut recta C, ad rectam F:* a *Eſt autem proportio quadrati recta B, ad quadratum recta E, duplicata proportionis recta B, ad rectam E. Igitur & proportio recta C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis recta B, ad rectam E. Quod eſt primum.*



| | | | |
|---|---|---|---|
| quadr. | B. | Recta | C. |
| quadr. | *A.* | Recta | A. |
| quadr. | E, | Recta | F. |

a 20. *ſexti*

RVRSVS *cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis recta B, ad rectam A:* b *habeat autem & cubus recta B, ad cubum recta A, triplicatam proportionem ejuſdem proportionis recta B, ad rectam A: Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus recta B, ad cubum recta A. Eadem ratione erit, ut recta G, ad rectam A, ita cubus recta E, ad cubum recta A: Et convertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus recta A, ad cubum recta E. Quia ergo eſt cubus recta B, ad cubum recta A, ut recta D, ad rectam A: & cubus recta A, ad cubum recta E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex aquo, cubus recta B, ad cubum recta E, ut recta D, ad rectam G;* c *Eſt autem proportio cubi recta B, ad cubum recta E, triplicata proportionis recta B, ad rectam E. Igitur & proportio recta D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis recta B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ recta, &c. Quod demonſtrandum erat.*

b 33. *undec*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cubus | B. | Recta | D. |
| Cubus | A. | Recta | A. |
| Cubus | E. | Recta | G. |

c 33. *undec*

## SCHOLIVM.

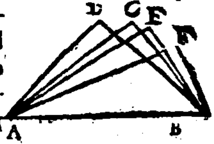
HOC idem demonſtravimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

## THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco pro-ſuper baſin IEKH, & ſub altitudine *z n*, æquale eſt oſtenſũ cubo AB-CD: Et parallelepipedum ſuper eandem baſin, & ſub altitudine *l n*, æquale eſt Octaedro EFGHIK. *Igitur erit quoque ut* cubus ABCD, ad Octaedrum EFGH*IK*, ita A*B*, latus cubi ad E*L*, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſa ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

## SCHOLIVM.

QVOD demonſtratum eſt, *a* diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus hujuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia: quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; majoris quadrati latus eſſe latus Tetraedri Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A*B*, ex cujus quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri A*B*, æqualia, ita ut quadratum rectæ AC, duplum ſit quadrati rectæ BC: erit recta A C, latus Tetraedri.



a 13. tertii-dec.

RVRSVS *b* cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri: Fit, ſi ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium ſit quadrati diametri A C: Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum AD, B D, quadrato diametri AB, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis ſecundum doctrinam ſcholii propoſ. 33. lib. 6. rectam AD, latus eſſe Octaedri.

b 14. tertii dec.

DEINDE, *c* quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi: Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars ſit quadrati diametri AB: Vel ſi quadrato diametri AB, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum AC, BC, ita ut quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ BC, juxta doctrinam ejuſdem ſcholii prop 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter AB, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratũ lateris cubi BC: Quemadmodum

c 14. tertii dec.

dum è contrario, ſi ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC.

PRÆTEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & majus ipſius ſegmentùm: *a* Majus ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cujus di- *a 23. quartidecimi.* ameter eſt recta prior linea: Conſtat ſi quadrato diametri AB, exhibeantur, juxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quævis extrema ac media ratione diviſæ ad majus ſegmentum: Rectam minorem BE, eſſe Icoſaedri latus.

POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diviſam extrema ac media ratione, & minus illius *b 23. quartidecimi.* ſegmentum: *b* Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri ejus ſphæræ, cujus diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri AB, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diviſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam BF, latus eſſe Dodecaedri.

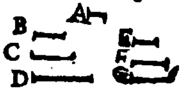
HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt. Sequentes autem quinque propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adjiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemque comparationem ſpectant.

## THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

SINT *quatuor rectæ* A, B, C, D, *continue proportionales, nec non quatuor* A, E, F, G, *ita ut* A, *recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem* C, *ad* F, *tertiæ ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis* B, *ad* E, *ſecundæ ad ſecundam, & proportionem* D, *ad* G, *quartæ ad quartam eſſe triplicatam ejuſdem proportionis* B, *ad* E, *ſecundæ ad ſecundam. Cum enim recta* C, *ad rectam* A, *ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* B, *ad rectam* A: *c 20. ſexti.* c *habeat autem & quadratum rectæ* B, *ad quadratum rectæ* A, *du-*

duplicatam proportionem ejuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et convertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E; ut recta C, ad rectam F: a Eſt autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt primum.



| | | | |
|---|---|---|---|
| quadr. | B. | Recta | C. |
| quadr. | A. | Recta | A. |
| quadr. | E. | Recta | F. |

a 20. ſexti

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex deſin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: b habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem ejuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit, ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A: Et convertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo eſt cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, ut recta D, ad rectam A: & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, ut recta D, ad rectam G; c Eſt autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cubus | B. | Recta | D. |
| Cubus | A. | Recta | A. |
| Cubus | E. | Recta | G. |

b 33. undec

c 33. undec

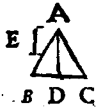
## SCHOLIVM.

HOC idem demonſtravimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab uno aliquo, eodemque numero incipientium.

## THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris,

*IN triangulo æquilatero* ABC, *ducatur ex angulo* A, *ad latus oppoſitum* BC, *recta perpendicularis* AD, *quæ bifariam ſecabit latus* BC, *ut in corollar. propoſ.* 12. *hujus lib. demonſtratum eſt; Ac propterea* BD, *dimidium eſt eſt lateris* A B. a *Inveniatur ergo recta* E,
a 13. *ſexti.*



*media proportionalis inter* A D, *&* B D. *Dico quadratum lateris* AB, *ad triangulum* ABC, *habere proportionem duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E. *Cum enim rectangulo ſub* AD, BD, *æquale ſit triangulum* ABC, *ut perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ* 41. *lib* 1. b *Sit autem eidem rectangulo ſub* AB, BD, *æquale quadratum rectæ* E: *Æqualia erunt triangulum* A B C, *& quadratum rectæ* E. c *Quoniam vero quadratum lateris* A B, *ad quadratum rectæ* E, *proportionem habet duplicatam lateris* AB, *ad rectam* E: *Conſtat, quadratum lateris* AB, *ad triangulum* A B C, *proportionem habere quoque duplicatam lateris* A B, *ad rectam* E. *Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.*

b 17. *ſexti.*
c 20. *ſexti*

### COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppoſitum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris: æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

## THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

*SIT quadratum cubi cujuſvis* ABCD, *& Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum* EFG, *in quo perpendicularis* EH, *ex angulo* E, *ad latus oppoſitum* FG, *deducta dividens* FG, *latus bifariam, ex coroll propoſ.* 12. *hujus lib.* Dico, *eſſe quadratum* AC, *ad triangulum* EFG, *ut latus trianguli* EF, *ad perpendicularem* E H. *Poſita enim inter* EH, FH, *media proportionali* IK: d *cum quadratum lateris Tetraedri* EF, *duplum ſit quadrati lateris cubi* AB: e *ſit autem & duplum rectanguli ſub latere* EF, *& dimidio ejus* FG, *eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe* EF: *Erit rectan-*

d 28. *tertii dec.*
e 1. *ſexti.*

*ctangulum ſub* EF, FH, *æquale quadrato lateris* AB; a *Ac propterea* AB, *media proportionalis erit inter* EF, FH, *hoc eſt, tres rectæ* FH, AB, EF, *continuè erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ* FH, IK, EH, *continuè proportionales, ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit* FH, b *erit proportio rectæ* EF, *ad rectam* EH, *tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK, *ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum* AC, *rectæ* AB, *ad quadratum rectæ* IK, *hoc eſt, ad triangulum* EFG (*eſt enim ex coroll. propoſ.* 29. *hujus lib. quadratum rectæ* IK, *æquale triangulo* EFG) c *proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ* AB, *ad rectam* IK; *Erit quadratum cubi* AC, *ad triangulum Tetraedri* EFG, *ut latus* EF, *ad perpendicularem* EH *Quocirca ſi cubus Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

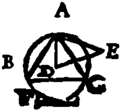
FH.
AB. IK.
EF. EH.

a 17. *ſexti.*
b 28. *quartidecimi.*
c 20. *ſexti.*

## THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſive altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latusq; cubi ejuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: *A*xem vero DE, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum *d* deſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis *D*E, ut conſtat ex propoſ. 15. hujus lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris *AE*, hoc eſt, lateris A*B*, *e* æquale eſt quadratis rectarum AD, DE, *f* & triplum quadrati ſemidiametri AD; Fit, ut poſito quadrato lateris *AB*, ſeu AE, partium 6. quadratum rectæ *A*D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.



d 5. *quarti*
e 47. *prim.*
f 12. *tertiidec.*

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, *g* potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris AB; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis *D*E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi *F*. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

g 18. *tertiidec.*

## COROLLARIVM I.

*a 13. tertii decimi.*

*b 20. ſexti*

QVIA vero, poſito quadrato lateris AB, partium 6, quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9. *a* quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE: perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, *b* cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialtera enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13.

## COROLLARIVM II.

*c 12. quartidecimi.*

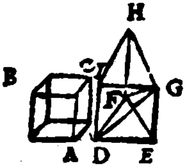
CONSTAT quoque ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eædem ſphæræ inſcripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet, *c* tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex uno angulo ad latus oppoſitum deductæ, quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.

## THEOR. 32. PROPOS. 32.

### CUBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.

*d 30. quartidecimi.*

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. *d* Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quovis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. hujus libr. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi ſeu priſmatis ABC: Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGHI, ut hujus altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ 9. libr. 12. demonſtravimus, æqualia erunt priſmata ABC, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propoſ. 7. libr. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit ejuſdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.



## COROLLARIVM.

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

## FINIS ELEMENTI DECIMI QVARTI.

# EVCLIDIS ELEMENTUM QVINTVM DECIMUM.

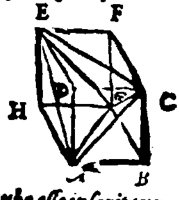
## ET SOLIDORVM QVINTVM, VT nonnulli putant. Vt vero alii, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

## *LIBER SECVNDVS.*

### PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

**IN** dato cubo pyramidem deſcribere.

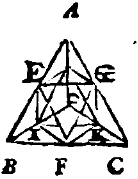
IN *cubo dato* ABCDEFGH, *oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab uno ejus angulo, nempe ab* E, *ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri* EA, EG, EC, *ex quarum extremitatibus* A, G, C, *ſimiliter diametri ducantur* AG, GC, CA, *in reliquis tribus baſibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potentia dupla ſint laterum æqualium quadratorum, ut in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtravimus, perſpicuum eſt, quatuor triangula* ACE, GAC, GAE, GCE, *ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia: ac propterea pyramidem, ſeu Tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifeſtum eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.*



## PROBL. 2. PROPOS. 2.

ij. **IN data pyramide octaedrum deſcribere.**

*SIT in pyramide, ſeu tetraedro* ABCD. *deſcribendum octaedrum.* D*iviſis omnibus lateribus bifariam in* B, F, G, H, I, K, *& ductis duodecim rectis* EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, *conſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor* EHI, IHK, KHG, GHE, *ſupra planum* EIKG; *quatuor autem* IFE, EFG, HFK, KFI, *infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera* AE, AH, *trianguli* AEH, *æqualia ſunt lateribus* AG, AH, *trianguli* AGH, *quod ſint dimidia rectarum æqualium* AB, AD, AC; *item & anguli contenti* EAH, GAH, *æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum* ABD, ACD; a *æquales erunt baſes* EH, GH. *Eademque ratione æquales erunt rectæ* EH, HI, *& reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt & æqualia inter ſe; ideoq; octaedrum componunt* EIKGHF; *quod quidem ex defin.* 31. *lib.* 11. *intra tetraedrum deſcriptum eſt, cum omnes ejus anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.*



a 8. duodec.

### COROLLARIVM.

QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecantia, ut in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. demonſtravimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam dividit in pyramidem HIKD. & priſma HIKGAE: nec non in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: b Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, dividunt bifariam eandem pyramidem ABCD) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari tribus quadratis æqualibus quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.

b 8. duodec.

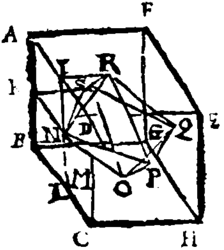
## iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

**IN dato cubo octaedrum deſcribere.**

DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato AH. *D*ividantur latera baſis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, puncto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, ut conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inveniantur reliquarum baſium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta baſium, cujuſmodi ſunt NI, RI, NL, SK &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, ut perſpi-

cuum

[illegible] eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra conjungantur duodecim rectis N O, O P. P Q, Q R, RS, SN, NP, P R, R N, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NOP, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KN S, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales, propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis B A, A F; *a* angulus NIR, æqualis eſt recto angulo K A F, in quadrato A G; eademque ratione angulus NKS, angulo recto I A F, in quadrato A E; *b* Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe: ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas N I, R I, ductas eſſe ad I, dimidium lateris A D, quod commune eſt quadratis A C, A E, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duę rectæ, NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis A C, A G, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe: ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP: Quod quidem ex defin. 31. lib. 11, intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes ejus ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



a 10. undec.
b 29. primi

ALITER. *c* In cubo dato inſcribatur pyramis: *d* In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. hujus lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera verò pyramidis ex demonſtratione propoſ. 1. hujus lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi, atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

c 1. quintidec.
d 2. quintidec.

## COROLLARIUM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti N Q, R O (ſi ducerentur) ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13.

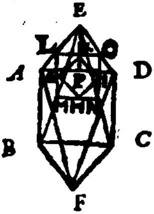
quas

quæ quidem conjungunt centra baſium cubi oppoſitarum: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſeſe mutuo bifariam, ut docuimus coroll. 1. propoſ. 15. libr. 15. ſed etiam ad angulos rectos, ut hic oſtendimus, dividere.

## IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

### IN dato Octaedro cubum inſcribere.

DATVM Octaedrum ſit ABCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in Octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum conſtituunt; ſit una earum pyramis ABCDE, cujus baſis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CFD, DEA, ſintque horum triangulorum centra GHIK, per quæ ducantur rectę LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris ABE, EBC: CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. libr. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habent communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Conveniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, ut mox oſtendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter ſe æquales ſunt. a Quia vero ducta recta EKP,



a 18. quartidecimi. tripla eſt rectæ KP. b Eſt autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED,
b 2. ſex. triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, convenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumque conſtituent LMNO. Rurſus quia LO, LM, parallelæ ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum
c 10. undec. ipſis exiſtentibus plano; c ęqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, ut oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam vero tam
d 15. undec planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, d parallelum
e 15. undec eſt plano ABCD, e ipſa, cum conveniant in punctis, M & O, unum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia ſint lateribus

EO,

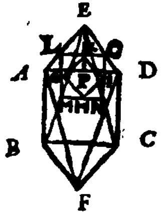
quæ quidem conjungunt centra baſium cubi oppoſitarum: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſeſe mutuo bifariam, ut docuimus coroll.1. propoſ.15. libr.13. ſed etiam ad angulos rectos, ut hic oſtendimus, dividere.

IV.

## PROBL. 4. PROPOS. 4.

### IN dato Octaedro cubum inſcribere.

DATVM Octaedrum ſit ABCDEF, in quo oportet deſcribere cubum. Quoniam in Octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum conſtituunt; ſit una earum pyramis ABCDE, cujus baſis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CFD, DEA, ſintque horum triangulorum centra GHIK, per quæ ducantur rectę LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triangulis æquilateris ABE, EBC: CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. libr. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habent communia. Eſt enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc vero ipſi NEO; & hoc ipſi OEL, æquale eſſe. Conveniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, ut mox oſtendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter ſe æquales ſunt. a Quia vero ducta recta EKP, *a 18. quartidecimi.* tripla eſt rectæ KP. b Eſt autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, *b 2. ſex.* triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, convenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumque conſtituent LMNO. Rurſus quia LO, LM, parallelæ ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum *c 10. undec.* ipſis exiſtentibus plano; c ęqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt. cum ABCD, quadratum ſit, ut oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. libr. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos eſſe. Quoniam vero tam *d 15. undec* planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, d parallelum *e 15. undec* eſt plano ABCD; e ipſa, cum conveniant in punctis, M & O, unum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia ſint lateribus



EO,

EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipſis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta biſariam ſecet angulum AED, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. *a* Erunt & baſes KL, KO, æquales, hoc eſt, recta LO, biſariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, biſariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt: Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, *b* æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, anguloſque comprehendunt rectos: (*c* cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI: Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum, rectis conjungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex hujuſmodi quadrata cubum component; qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo ejus anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. pri.

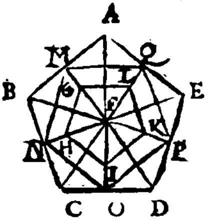
b 4. pri.

c 13. primi

## PROBL. 5. PROPOS. 5.

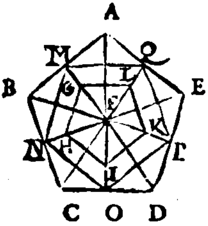
V. VI.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, una pyramis ABCDEF, cujus baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, EP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. libr. 13. biſariam ſecabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q: ita ut decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, *d* æquales quoque erunt rectæ MN, NO, OP,

d 4. pri.



a8.pri. PQ,QM, puncta M,N,O,P,Q, connectentes: *a* Ac proinde & anguli MFN,NFO,OFP,PFQ,QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN,FO,FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. *D*um enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia ſint, contineantque angulos æquales, b4.primi. nempe triangulorum æquilaterorum; *b* erunt baſes F*M*, *F* N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, *F*K, FL, nimirum ſemidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æ- c4.primi. quales, ut demonſtratum eſt; *c* Erunt d13.pri. & rectæ GH,HI,IK,KL,LG, æquales. *d* Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN,N*M*B, quam anguli BNM,MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. *e* e4.primi. Sunt autem anguli AMQ,NMB, angulis BNM,ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN,MN*O*, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ,PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum *M*NOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Denique cum rectæ F*M*,FN,FO,FP,FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H,I.K,L, quod & FG, F*H*, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG FH, *F*I, F K, F L, duplæ ſunt ipſarum G M, HN, IO, KP, *L*Q, ex coroll. propoſ. *18*. lib. 14. f2.sext. *f* parallelæ erunt G*H*, *H*I,IK,KL, LG, ipſis MN,NO, *O*P, PQ,Q*M*; g10.undec *g* Ac propterea anguli LGH, GHI,HIK,IK*L*, KLG, angulis æquali- h15.undec bus QMN,*M*NO,NOP,OPQ.PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. *h* Quia vero plana per rectas G*H*,HI,& per HI, IK, ducta parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas *M*N, NO, *O*P, ducto conveniuntque in recta HI, ipſa unum planum efficient, ex ſcholio propoſ. *16*. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, nec non per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, *HI*, IK, ducto. Quocirca GHIKL, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula; quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim hujuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 3*1*. lib. 1*1*. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti

baſi-

baſium Icoſaedri, conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

### COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales: ( Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentiũ, atq; adeo eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri: æquales erunt inter ſe, ex lem. 2. ejuſdem propoſ. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

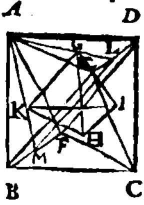
## PROBL. 6. PROPOS. 6.

O.

V.

IN dato octaedro pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in Octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex adverſo ſibi reſpondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex adverſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB, quæ quidem centra conjungantur ſex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſ. 12. lib. 3. conjungaturque recta LM, a quæ ipſi BE, vel FD, æqualis & parallela a 33. primi. erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint & parallelæ, nimirum dimidia laterum DE, BF, oppoſitorum in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ ſint ipſarum GL, KM, ex coroll propoſ. 18. lib. 14. b Erunt GK, b 2. ſexti. LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. c 4. ſext. lib. 6 triangula ALM, AGK, ſimilia. c Quare erit ut AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK. Eſt autem AL, ipſius AG, ſeſquialtera; d quod GL, ſit tertia pars d 18. quartidecimi. ipſius AL, ideoq; AG, ejuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt, ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius GK. Hac eadem arte oſtendemus & reliquarum linearum centra G, H, I, K, conjungentiũ ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter ſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici, ideoq; Tetraedrum conſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro e 4. quartidecimi. pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



ALITER. e In octaedro dato inſcribatur cubus, f & in cubo f 1. quintidec. pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium Octaedri, & in angulis cubi *collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.*

## COROLLARIVM I.

QVIA vero oſtenſum eſt, utramque GK, DF, parallelam eſſe ipſi LM, *a* ac propterea & GK, ipſi DF, atque adeo ipſi BE, parallelam eſſe: *b* Atque eadem ratione KH, ipſius FC; EA, parallelum eſſe: Atque idcirco, planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, nec non & plano BEA, per BE, EA. Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula; Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas videlicet binis oppoſitis.

a 9.*undec.*
b 15.*undec*

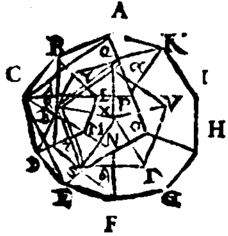
## COROLLARIVM. II.

PRÆTEREA cum octaedrum circumſcribat & cubum & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & hujus anguli in centris baſium octaedri conſtituantur: Atque adeo recta conjungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, ut conſtat ex 4. propoſ. hujus libr. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum conjungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſim oppoſitam deductæ.

O.
vij.

## PROBL. 7. PROPOS. 7.

### IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, *LMN*OP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis jungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: *E*t ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam divident latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, convenient: *D*ividunt autem & rectæ eædem YK, Y*D*, rectas AP, C*M*, bifariam, & ad angulos rectos in *α β*, ex 1. coroll. ejuſdem propoſitionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam dividant (*c* conſtat enim rectas AK, PK; Item *CD*, MD, arcus ſubtendere æquales.) *d* Igitur A *α*, C *β*, parallelæ ſunt rectæ BY, *e* atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimi-

c 28.*tertii.*
d 28.*pri.*
e 9.*undec.*

dimidia rectarum *A*P, CM, *a* quæ æquales ſunt, cum latera KA, a 4. *pri.*
KP, lateribus DC, D*M*, æqualia ſint, anguloſque contineant æqua-
les. *b* Rectæ ergo ipſas connectentes AC, α β, æquales erunt & pa- b 33. *primi.*
rallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubten-
dant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, conne-
ctanturque rectæ CE, γ δ, æquales eſſe ipſas CE, γ δ: *c* Sunt au- c 4. *primi.*
tem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æ-
qualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB,
BC, quam C*D*, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, ut
conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non ver-
gunt verſus X, ut figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, ut ex e-
odem materiali Dodecaedro patet) Igitur & α β, γ δ, æquales erunt.
Quapropter cum & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales ſint (Nam
YQ, YR, ZR, Y *S*, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium recta-
rum BL, *DM*, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum
pentagona æqualia circumſcribunt, *d* atque adeo æquales. Item d 14. *tertii*
Q α, R β, R γ, S δ, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL,
EN, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque ęquales: e 14 *tertii.*
*A*c proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Y δ, æquales erunt.) *f* Erunt quo- f 8. *primi.*
que anguli α Y β, γ Z δ, æquales: Ac propterea, cum & rectæ YQ, g 4. *primi.*
YR, ZR, ZS, æquales ſint; *g* æquales quoque erunt rectæ QR, RS,
centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demon-
ſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare
triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis
Dodecaedri, L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt & æqualia.
Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dode-
caedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrum
viginti angulos ſolidos) quę quidem latera habent communia, de-
ſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim an-
guli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodeca-
edri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod
faciendum erat.

## PROBL. 8. PROPOS. 8.

o.
viij.

IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.

*PROPONANTUR quatuor pentagona* Dodecaedri, *cui inſcribendus ſit cubus* ABCDE, *E*FGHA, AH*I*K*B*, BKL*MC*, *convenientia ad latus* AB: *duo quidem* ABCDE, *A*BKIH. *ſecundum latus idem commune* AB: *alia autem duo* AEFGH, BCMLK, *ſecundum angulos* EAH, CBK. *In his vero pentagonis ſubtendantur angulis* A, B, *D*, *I*, *recta* EH, CK, CE, *H*K, *quadrilaterum* dimidia rectarum AP, CM, *a* quæ æquales ſunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. *b* Rectæ ergo ipſas connectentes AC, $\alpha\beta$, æquales erunt & parallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, $\gamma\delta$, æquales eſſe ipſas CE, $\gamma\delta$: *c* Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, ut conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, ut figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, ut ex eodem materiali Dodecaedro patet) Igitur & $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Y$\alpha$, Y$\beta$, Z$\gamma$, Z$\delta$, æquales ſint (Nam YQ, YR, ZR, YS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, *d* atque adeo æquales. Item Q$\alpha$, R$\beta$, R$\gamma$, S$\delta$, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, *e* ideoque æquales: Ac proinde & totæ Y$\alpha$, Y$\beta$, Z$\gamma$, Y$\delta$, æquales erunt.) *f* Erunt quoque anguli $\alpha$Y$\beta$, $\gamma$Z$\delta$, æquales: Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; *g* æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri, L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos ſolidos) quę quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4. *pri.*
b 33. *primi.*
c 4. *primi.*
d 14. *tertii*
e 14 *tertii.*
f 8. *primi.*
g 4. *primi.*

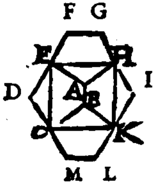
## PROBL. 8. PROPOS. 8.

O. viij.

IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.

*PROPONANTUR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus* ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, *convenientia ad latus* AB: *duo quidem* ABCDE, ABKIH, *ſecundum latus idem commune* AB: *alia autem duo* AEFGH, BCMLK, *ſecundum angulos* EAH, CBK. *In his vero pentagonis ſubtendantur angulis* A, B, D, I, *rectæ* EH, CK, CE, HK, *quadrilate-*

rum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, anguloſq;
a 4. pri. contineant æquales, ex hypotheſi: a æquales erunt baſes EH, HK,
b 28. tert. KC, CE b Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumſcribente arcus æquales; Erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK c Quare & EC, HK, inter ſe pa-
c 9. undecimi. rallelæ erunt: d Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipſas connectunt:
d 33. primi
c 7. undec.
parallelæ erunt, c in eodemq; cum ipſis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod oſtendimus eſſe æquilaterum. Quia vero planum ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſitionis 10. lib. 14. circa quadrilaterum
f 22. tertii. EK, deſcriptum: f Erunt tam anguli oppoſiti
g 34. pri. E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; g Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, nec non & oppoſiti C, & H: erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit: collocans ſuos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & lateta in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis ſimiliter octo angulis octo aliæ rectæ ſubtendantur eodem ordine: conſtitutum erit ſolidum ſex quadratis
h 4. pri. contentum; quæ cum ſint æqualia, h eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehenſos ſubtendentia æqualia ſunt, cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quod duodecim ejus latera jacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, ejuſq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



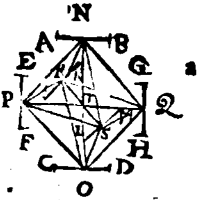
## COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ ſubtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, CB, ipſi AB, eſſe parallelam.

## o. jx. PROBL. 9. PROPOS. 9.

### IN dato Dodecaedro octaedrum deſcribere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit Octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13 nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum conjungentes æquales erunt, ſeque mutuo in T, centro ſphæræ bifariam, & angulos rectos devident, per coroll. 3. propoſ.



*poſ. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes* NT, OT, *P*T, QT, *R*T, S*T.* a Quocirca *duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos* N*T*P, PT O, OT Q, Q*T*N, N T R, *R*TP, PTS, ST*Q*, Q*TR, RTO*, OTS, *S*T*N*, *quales ſunt* NP, *P* O. OQ, QN, *NR, RP, PS, S*Q, QR, *RO, OS*, S *N*, *æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula* NR*P, PRO, OR*Q, QR*N, OSP, PSN, OS*Q, Q*S*O, *æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque octaedrum intra* Dodecaedrum *deſcriptum, cum ſex anguli octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur* Do*decaedro octaedrum deſcripſimus.* Quod *faciendum erat.*

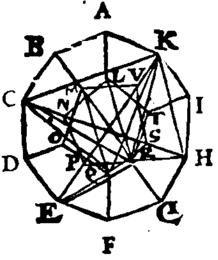
a 4. *pri.*

## PROBL. 10. PROPOS. 10.

o.
x.

IN dato dodecaedro pyramidem deſcribere.

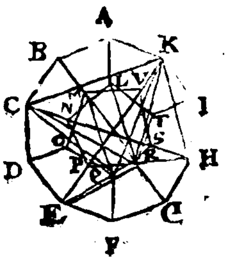
SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, *CD*EPN, EFGRP, G*H*ITR, IKALT: MOQSV; BCDO*M*, *DE*F*QO*, FGHSQ, HIKVS, K*A*BMV, *L*NPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſive tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, *L*AKIT, T*L*NPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri *A*L, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri L V, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, Lateri L N, communi pentagonis R*L*N, LN*B*) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut ſit pyramis conſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, R*E*, QE, Q*M*, Q H; *b* quoniam dodecaedrum in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis ejus ſectio cum ſphæra circulus per lemma 1. propoſ. 10 lib 14. *c Ac* propterea angulus CKH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus, rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQ*H*. *d* Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, R*M*, æqualia: Æqualia erunt quadtata rectarum CK, KH, quadratis rectarum C R, RH, & qua-



b 17. *tertii dec.*

c 31. *tertii.*

d 47. *pri.*



& quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH, (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonum æquales æqualibus rectis comprehenſos, a æquales ſunt) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ: Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrium.

a 4. pri.

b 8. quintidecimi.

c 1. quintidecimi.

ALITER. b In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur: c & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant: perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus, Quod faciendum erat.

O. xj.

## PROBL. 11. PROPOS. 11.

### IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

d 5. quintidecimi.

e 8. quintidecimi.

d *DESCRIBATVR in dato Icoſaedro* Dodecaedrum *: e & in hoc* Dodecaedro *cubus, factumque erit, quod proponitur*. Cum *enim anguli cubi reſideant in angulis* Dodecaedri *: anguli vero Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur : tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quamobrem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.*

O. xij.

## PROBL. 12. PROPOS. 12.

### IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

f 11. quintidecimi.

g 1. quintidecimi.

h 11. quintidecimi.

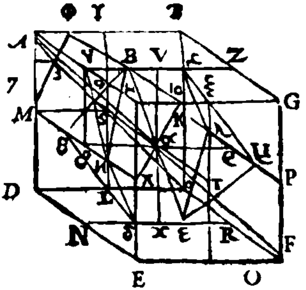
i 1. quintid

*IN dato Icoſaedro f cubus deſcribatur, g & in hoc cubo pyramis: factumque erit, quod proponitur.* h *Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri: & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam.* i *In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.*

PROBL.

## PROBL. 13. PROPOS. 13.

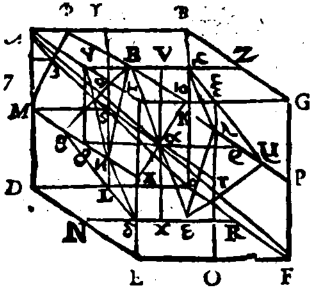
## IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.



Ducatur in figura recta HαC

SIT in cubo propoſito AF. deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, $\pi$, ξ, Z, Y, conjunctis rectis IL, YZ, ξ O, M$\pi$, KP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus, ita ut ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed una duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, $\rho$, Q, X, cõnexis rectis ST, VX, $\rho$Q, quæ ſe mutuo in centro $\alpha$, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, ut in coroll. propoſ. 3. hujus lib. docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, $M\pi$, ſecentur extrema ac media ratione in $\beta, \gamma, \theta, \kappa$, ut ſint majora ſegmenta, $Y\beta$, $Z\gamma$, $M\theta$, $\pi\kappa$, ductis rectis $Y\rho$ $Y\kappa$, $\beta\theta$ $\beta\kappa$. Quoniam ergo $Y\rho$, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & $\rho\kappa$, $\beta$V, ſegmenta minora rectarum æqualinm YV, $\rho\pi$, æqualia quoque: a a 4. tertiidec.
Sunt autem quadrata rectarum YV, $\beta$V, tripla quadrati rectæ $Y\beta$;
Erunt & quadrata rectarum $Y\rho$, $\rho\kappa$, tripla ejuſdem quadrati rectæ b 47. pri.
$Y\beta$. Quare, b cum quadratis rectarum $Y\rho$, $\rho\kappa$, æquale ſit quadra- c 29. pri.
tum rectæ $Y\kappa$, c quod angulus $Y\rho\kappa$, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ $Y\kappa$, triplum quadrati rectæ $Y\beta$. Rurſus, quia VY, perpen- d 4. undec.
dicularis ad AY, $Y\rho$, d recta eſt ad planum AE, per rectas AY, $Y\rho$, ductum, rectus erit angulus $\beta Y\kappa$, ex defin. 3. lib. 11. e Ac pro-
pterea quadratum rectæ $\beta\kappa$, æquale quadratis rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, e 47. pri.
exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ $X\beta$ (quia nimirum quadrata rectarum $Y\kappa$, $Y\beta$, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ $Y\beta$, cũ quadratum rectæ $Y\kappa$, triplum ſit oſtenſum quadrati rectæ $Y\beta$,) f 20 ſex.
Ideoque f cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta $\beta\kappa$, rectæ $Y\varsigma$. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet. Eſt autem & $\theta\kappa$, dupla ipſius $\rho\kappa$, quod minora ſegmenta $\theta\rho$, $\kappa\rho$, rectarum æqualium $M\rho$, $\pi\rho$, æqualia ſint. g Erit igitur ut $Y\beta$, ad $\rho\kappa$, g 15 quinti.
ita $\beta\kappa$, dupla ipſius $Y\beta$, ad $\theta\kappa$, duplam ipſius $\rho\kappa$: Eſt autem $Y\varsigma$, majus ſegmentum ad $\rho\kappa$, rectam minori ſegmento $\beta$V, æqualem, ut tota ad majus ſegmentum. Ergo & $\beta\kappa$, ad $\theta\kappa$, erit ut tota ad majus ſegmentum; Ac proinde $\theta\kappa$, erit majus ſegmentum rectæ $\beta\kappa$, ſectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus $\theta\kappa$, majus eſſe ſegmentum rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione ſectæ, ſi nimi-

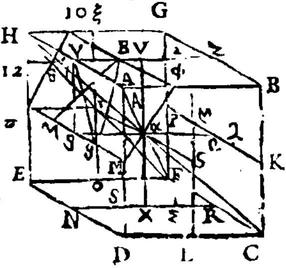
nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erunt βθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles βθκ, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. ut poſtea demonſtrabimus: Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumſcribente deſcripti, ut perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib 4.



INTELLIGATVR jam
planum trianguli βθκ, exten-
di, (ducta per β, recta βφ, ipſi
Mϖ, parallela,) per parallelas
M, φ 10. ut ſit planum exten-
ſum φϖ, occurrens diametro
AB, quadrati ABCD, in pun-
cto 3. cubi vero diametro AF,
in puncto 4. & per 3. ducatur
37. recta ipſi Aφ, parallela,
connectaturque MS. a quæ
a 33.primi. parallela eſt utrique Aφ, 73.
Quoniam igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 6, triangulum A 73. ſi-
b 4.ſex. mile eſt triangulo AMS; b ac proinde ut AM, ad MS, ita eſt A7. ad 73.
Sunt autẽ AM, MS, æquales, nẽpe dimidia cubi latera; Erunt quoq;
A, 7. 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA, ad Aφ, ita M7, ad 73.
Eſt autem Aφ, majus ſegmentum rectæ MA, diviſæ extrema ac me-
dia ratione (c quod æquales ſint Aφ, Yβ, nec non & MA, YV, dimidia
a 34. pri. cubi latera) Igitur & 73. hoc eſt 7A, majus ſegmentum erit rectæ
M7. extrema ac media ratione ſectæ; d Ac propterea tota MA, di-
d 5. tertii viſa erit extrema ac media ratione in 7. majuſq; ſegmentum erit M7.
decimi. e Atqui ut M7 ad 7. A, ita eſt S. 3. ad 3. A. Secta eſt ergo & SA, extrema
e 2. ſexti. ac media ratione in 3. majuſque ſegmentum eſt S. 3. f Quia vero Sα
f 33. primi. T, parallela eſt ipſi Mϖ: quod & recta ducta ϖT, æqualis & paral-
g 17. undec lela ſit ipſi MS: ſi per SαT, planum ducatur parallelum plano φϖ,
ducto per Mϖ, g ſecabuntur rectæ AS, Aα, in eaſdem rationes, in
punctis 3. & 4. cum planum φϖ, rectas AS, Aα, ſecet in 3. & 4. at
planum per SαT, ductum plano φϖ, parallelum eaſdem ſecet in S, &
α. Atque idcirco, cum AS, ſecta ſit in 3. extrema ac media ratione, ſe-
cta erit eodem modo Aα, ſemidiameter cubi, in 4. majuſque ſe-
gmentum erit α4.

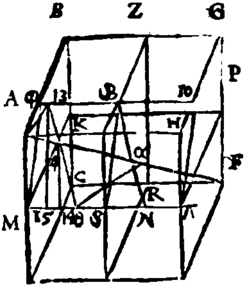
IISDEM argumentis oſtendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, ſemidiametrum cubi ſecari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φϖ, ut perſpicuum eſt, ſi cubus invertatur, ut in hac figura ſecunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino ſimilia lineamentis prioris figurę, licet baſes cubi ſedes mutaverint, ita ut quadratum AC, locum quadrati HF: & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac ſecunda figura.

Quod tamen in prima figura, ſine hac inverſione probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura: (Hæc deeſt in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quam planum φϖ, ſecet in 9. prope punctum H: intelligaturque per rectam AH, planum plano φϖ, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α; conveniunt, ſecanturq; planis parallelis in punctis *A*, H, & 4, 9: (Nam planum φϖ, eas ſecat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φϖ, parallelum eaſdem ſecat in *A*, & H) a erit ut α 4, ad 4 A, ita α 9. ad 9 H. Cum ergo α*A*, ſecta ſit in 4. extrema & media ratione, erit quoque α H, ſimiliter ſecta quæ a 15. undec quidem demonſtratio locum etiam habet in hac cub. inverſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectę jungantur θ 4, β 4, β 9, κ 9, rectilineum β 4, θ κ 9, in plano φ ϖ, exiſtens, pentagonum eſſe ęquilaterum, & ęquiangulum.

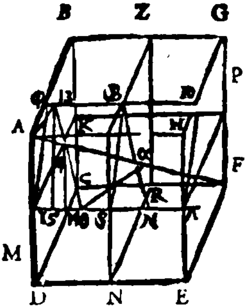


INVERTATVR rurſum cubus, ut quadrata *A*DEH [illegible] ABGH, quę nimirum continent triangulum β, θ κ, ſive planum φϖ, hunc ſitum habeant, quem mõſtrat tertia hæc figura. Deinde in plano φϖ, recta conjuncta θ 4. extendatur uſque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta K P, & junctis rectis MK, ϖ P, b planum *M* P, parallelum eſt plano A G, (quod & rectę PK, KM, parallelę ſint rectis G*B*, B*A*) c ſecatque cubum bifariam: ideoque per centrum α tranſit, per ea quę in ſcholio propoſ. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt: ſi per rectas α 4 A, θ 4. 13. planum extendatur, d fient α θ, A 13. communes ſectiones planorum MP, AG, parallelę: Ac proinde triangula α θ 4. 1. α 34. ęquiangula erunt; e Eritque ut α 4. ad 4. A, ita θ 4. ad 413. Quare cum α A, in 4, ſecta ſit extrema ac media ratione, ut oſtendimus: eodem modo erit ſecta θ 13, in 4. Rurſus plano NZ, per centrum α, tranſeunti parallelum ducatur planum per punctum 4 ex ſchol propoſ. 15. lib 11 ſecans φϖ, recta 4.14. f Eſt autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. g Rectę igitur α A, ρ *M*, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minuſque erit ſegmentum 14 *M*, ideoque ęquale minori ρ θ, ipſius Mρ.

b 15. undec
c 32. unde.
d 16. und.
e 4. ſext.
f 15. undec.
g 17. undec



Qua-



Quare cum ex ρ 14. majori ſegmento ipſius ρ M, auferatur ρ θ, minus ſegmentum; Erit, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. ς 14. diviſa in θ, extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit ρ θ. Poſtremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, a ſecabuntur rectæ θ 13. θ 15. proportionaliter; Ac proinde & θ 15 ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit θ 14. b Quapropter erit ut ρ θ. majus ſegmentum ad θ 14 minus ita θ 14. majus ad 14. 15. minus; Vt autem θ 14. ad 14. 15. ita eſt tota θ 15. ad θ 14. majus ſegmentum. Igitur erit ut ρ θ, ad θ 14. ita θ 15. ad eandem θ 14. Ac propterea rectæ ρ θ, vel ρ κ, & θ 15. æquales erunt. Quoniam vero planum N Z, & planum illi parallelum per 4 14. ductum, ſecantur plano φ π, c erunt communes ſectiones β ρ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13 15. β ρ, parallelæ erunt, d anguluſque externus β ρ κ, interno 13 15. θ. æqualis. Cum igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13. 15. 15. θ, ſint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ β κ. 13 θ. Ac proinde & earum ſegmenta majora θ κ, θ 4. (Oſtenſum enim eſt θ κ, eſſe majus ſegmentum ipſius β κ) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipſi β γ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſin β γ, cujus vertex conſiſtat in puncto, quod rectam I S. dividit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem θ κ, β γ æquales erunt κ 9 β 9. Æquilaterum ergo eſt pentagonum β 4. θ κ 9. quandoquidem β γ, θ κ, rectæ æquales ſunt, cum componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, π ρ, M ρ. Sed & æquiangulum, ut mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas M π, YZ, NR, IL, ξ O, K P; bina ipſi β θ κ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (ita enim ad M π, duo hujuſmodi triangula vides β θ κ, δ θ κ) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β 4. θ κ 9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cujus duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O. K P, bini nimirum in ſingulis, octo vero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione dividunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo hujuſmodi Dodecaedrum, quamvis non proprie, cum non omnes ejus anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero

a 2. ſexti.

b 2. quartidecimi.

c 16. undecimi.

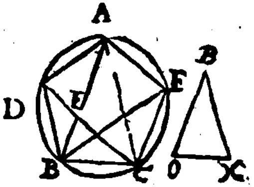
d 29. primi

e 4. primi.

vero in punctis, quę octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

## LEMMA.

QVOD autem triangulum βθκ, cujus baſis θκ, majus ſegmentum exiſtat utriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diviſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diviſiſque angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, ut propoſ. 11. lib. 4. tradidimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. *a* Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, majuſque ejus ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC: *b* Erit ut AB, tota ad majus ſuum ſegmentum BC, ita βθ, tota ad majus ſuum ſegmentum θκ; Eodemque modo, ut tota AC, ad majus ſegmentum CB, ita βκ, tota ad majus ſegmentum κθ: Eſt autem quoque ut AB, ad AC, ita βθ, ad βκ, utrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualeſque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; proptereaque uterque angulorum θκ, duplus erit angulus β; & triangula βθκ, ABC, ſimilia.



a 8. *tertii. decimi.*
b 2. *quartidecimi.*

PENTAGONVM vero β4θκ9. æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum βθκ, circulus βAθκB, qui ſi tranſeat per puncta 4. & 9. perſpicuum eſt ex iis, quæ ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4. & 9. Deſcribatur in circulo dicto, juxta doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum βAθκB.

Quo-

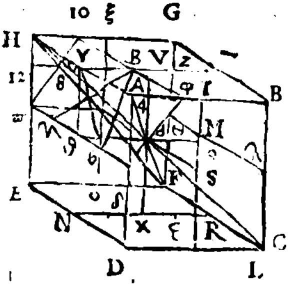
Quoniam igitur tam rectæ Α θ, Α ϛ. quam rectæ 4 θ, 4 ϛ, æquales ſunt rectæ θ κ, cum & ϛ 4 θ κ 9, & ϛ Α θ κ Β, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ θ Α, θ 4, quam duæ ϛ Α, 4 ϛ, æquales quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo ϛ θ κ, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum ϛ 4 θ κ 9, æquiangulum eſt.

## SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

### I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.



DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecadri β ε, intelligaturque conjuncta recta γ ε, a æqualis exiſtens & parallela lateri cubi V X, quod & V γ, X ε, æquales ſint & parallelæ. Quoniam igitur angulus ϛ V X, rectus eſt: b rectus quoque erit angulus β γ ε, ad γ, conſtitutus: c Ac proinde quadratum diametri β ε, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ε, nempe Dodecaedri, & cubi.

a 33. pri.
b 29. pri.
c 47. pri.

### II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Majus vero ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.

d 15. quinti IN eadem enim prima figura, d cum ſit ut YX, ad β V, ita YZ, dupla ipſius Y V, ad β γ, duplam ipſius β V: Sit autem β V, minus ſegmentum ipſius Y V, ſectæ extrema ac media ratione Erit & β γ, minus ſegmentum lateris cubi Y Z, ſecti extrema ac media ratione: compoſita vero ex Y β, γ Z, hoc eſt, recta β κ (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius Y β. ideoque compoſitæ ex Y β, γ Z, æqualis) majus ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione β γ, eſſe latus Dodecaedri e & β κ, ſeu β θ, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 θ.

e 8 quintidec.

### III.

LATVS cubi æquale eſt duobus laateribus; Dodecaecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaëdri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri $\beta\gamma$, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Y $\beta$, $\gamma$ Z, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim Y Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, ut perſpicuum eſt ex 8. propoſ. hujus lib. a Sit autem latus illius pentagoni majus ſegmentum lateris Y Z, ſectl extrema ac media ratione: Erit $\beta\theta$, exiſtens quoque majus ſegmentum ejuſdem lateris Y Z, & æqualis duabus Y $\beta$. $\gamma$ Z, ſimul, ut jam demonſtravimus, latus Dodecaedri cubo lateris Y Z, circumſcripti. a 8. tertiidec.

## IV.

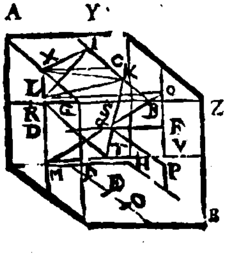
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta $\beta$, $\delta$, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri $\theta$ $\kappa$, oppoſiti, b æqualis eſt rectæ VX (quod & $\beta$V, $\delta$X, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur. b 33. pri.

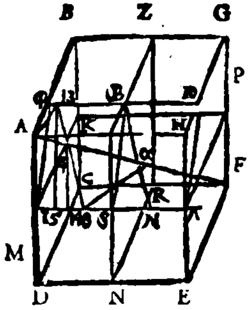
## PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

CVBVS *datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit* A B, *per cujus baſium centra* C, D, E, F, G, H, *lateribus cubi recta linea parallela agantur nuſquam inter ſe convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita ut majora ſegmenta prope centra ſint in punctis* I, K : L, M : N, O : P, Q : R, S : T, Y : *quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, ut* L, *cum* I, K, T, & R : R *cum* L, M, I, & N, &c *ut conſtituantur viginti triangula* IKL, IKQ. LMR. LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ. K T L, K Q V, O PV, OTM, NSP, NMR : *quorum priora duodecim ſubtenduntur. duodecim cubi lateribus, poſteriora vero octo ejuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur.* Connectantur *jam recta* XC, XI, X K. *Quoniam igitur latera* X C, C I, *trianguli* X C I, *aqualia ſunt lateribus* XC, CK, *trianguli* X C K : c *& anguli contenti, recti, quod* XC, c 29. pri.



pa-



Quare cum ex ρ 14. majori ſegmento ipſius ρ M, auferatur ρ θ, minus ſegmentum; Erit, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ 14. diviſa in θ, extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit ρ θ. Poſtremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, a ſecabuntur rectæ θ 13. θ 15. proportionaliter; Ac proinde & θ 15 ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit θ 14. b Quapropter erit ut ρ θ, majus ſegmentum ad θ 14 minus ita θ 14. majus ad 14. 15. minus; Vt autem θ 14. ad 14. 15. ita eſt tota θ 15. ad θ 14. majus ſegmentum. Igitur erit ut ρ θ, ad θ 14. ita θ 15. ad eandem θ 14. Ac propterea rectæ ρ θ, vel ρ κ, & θ 15. æquales erunt. Quoniam vero planum N Z, & planum illi parallelum per 4 14. ductum, ſecantur plano φ π, c erunt communes ſectiones β ρ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13 15. β ρ, parallelæ erunt, d anguluſque externus β ρ κ, interno 13 15. θ. æqualis. Cum igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13. 15. 15. θ, ſint æqualia, e æquales erunt quoque rectæ β κ. 13 θ. Ac proinde & earum ſegmenta majora θ κ, θ 4. (Oſtenſum enim eſt θ κ, eſſe majus ſegmentum ipſius β κ) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipſi β γ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſin β γ, cujus vertex conſiſtat in puncto, quod rectam I S. dividit extrema ac media ratione. Eodemque modo eiſdem θ κ, β γ æquales erunt κ 9 β 9. Æquilaterum ergo eſt pentagonum β 4. θ κ 9. quandoquidem β γ, θ κ, rectæ æquales ſunt, cum componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, π ρ, M ρ. Sed & æquiangulum, ut mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas M π, YZ, NR, IL, ξ O, K P; bina ipſi β θ κ, ſimilia, & æqualia conſtruantur; (ita enim ad M π, duo hujuſmodi triangula vides β θ κ, δ θ κ) & ipſorum beneficio duodecim pentagona ipſi β 4. θ κ 9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cujus duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O. K P, bini nimirum in ſingulis, octo vero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quæ ipſas extrema ac media ratione dividunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dicetur cubo hujuſmodi Dodecaedrum, quamvis non proprie, cum non omnes ejus anguli vel in angulis, vel lateribus, vel denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo

vero

a 2. ſext.

b 2. quartidecimi.

c 16. undecimi.

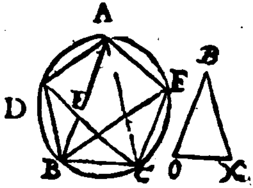
d 29. primi

e 4. primi.

vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

## LEMMA.

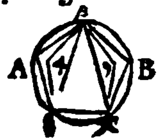
QVOD autem triangulum βθκ, cujus baſis θκ, majus ſegmentum exiſtat utriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diviſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diviſiſque angulis ABC, ACB, biſariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, ut propoſ. 11. lib. 4. tradidimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. *a* Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, majuſque ejus ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC: *b* Erit ut AB, tota ad majus ſuum ſegmentum *B*C, ita βθ, tota ad majus ſuum ſegmentum θκ; Eodemque modo, ut tota AC, ad majus ſegmentum CB, ita βκ, tota ad majus ſegmentum κθ: Eſt autem quoque ut AB, ad AC, ita βθ, ad βκ, utrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualeſque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; proptereaque uterque angulorum θκ, duplus erit angulus β; & triangula βθκ, ABC, ſimilia.



a 8. *tertii. dec.*

b 2. *quartidecimi.*

PENTAGONVM vero β4θκ9. æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum βθκ, circulus βAθκ*B*, qui ſi transeat per puncta 4. & 9. perſpicuum eſt ex iis, quæ ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4. & 9. Deſcribatur in circulo dicto, juxta doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum βAθκB.



Quo-

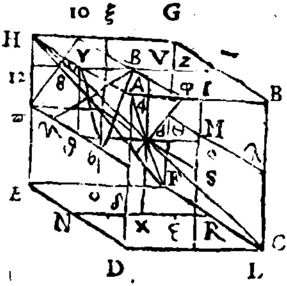
Quoniam igitur tam rectæ $A\theta$, $A\zeta$, quam rectæ $4\theta$, $4\zeta$, æquales ſunt rectæ $\theta\kappa$, cum & $\zeta 4\theta\kappa 9$, & $\zeta A\theta\kappa B$, pentagonum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ $\theta A$, $\theta 4$, quam duæ $\zeta A$, $4\zeta$, æquales quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo $\zeta\theta\kappa$, circumſcriptus per puncta $4$, & $9$. Ac proinde pentagonum $\zeta 4\theta\kappa 9$, æquiangulum eſt.

## SCHOLIVM.

EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

### I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.



a 33. pri.

b 29. pri.

c 47. pri.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri $\beta\varepsilon$, intelligaturque conjuncta recta $\gamma\varepsilon$, *a* æqualis exiſtens & parallela lateri cubi $VX$, quod & $V\gamma$, $X\varepsilon$, æquales ſint & parallelæ. Quoniam igitur angulus $\zeta VX$, rectus eſt: *b* rectus quoque erit angulus $\beta\gamma\varepsilon$, ad $\gamma$, conſtitutus: *c* Ac proinde quadratum diametri $\beta\varepsilon$, æquale erit quadratis laterum $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$, nempe Dodecaedri, & cubi.

### II.

SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Majus vero ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.

d 15. quinti

e 8 quintidec.

IN eadem enim prima figura, *d* cum ſit ut $YX$, ad $\beta V$, ita $YZ$, dupla ipſius $YV$, ad $\beta\gamma$, duplam ipſius $\beta V$: Sit autem $\beta V$, minus ſegmentum ipſius $YV$, ſectæ extrema ac media ratione Erit & $\beta\gamma$, minus ſegmentum lateris cubi $YZ$, ſecti extrema ac media ratione: compoſita vero ex $Y\beta$, $\gamma Z$, hoc eſt, recta $\beta\kappa$ (quæ dupla fuit oſtenſa ipſius $Y\beta$, ideoque compoſitæ ex $Y\beta$, $\gamma Z$, æqualis) majus ſegmentum. Conſtat autem ex conſtructione $\beta\gamma$, eſſe latus Dodecaedri *e* & $\beta\kappa$, ſeu $\beta\theta$, eſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat angulum pentagoni $\beta 9\kappa$, vel $\beta 4\theta$.

### III.

LATVS cubi æquale eſt duobus laateribus; Dodecaecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaëdri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri $\beta\gamma$, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Y $\beta$, $\gamma$ Z, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim Y Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, ut perſpicuum eſt ex 8. propoſ. hujus lib. a Sit autem latus illius pentagoni majus ſegmentum lateris Y Z, ſecti extrema ac media ratione: Erit $\beta\theta$, exiſtens quoque majus ſegmentum ejuſdem lateris Y Z, & æqualis duabus Y $\beta$. $\gamma$ Z, ſimul, ut jam demonſtravimus, latus Dodecaedri cubo lateris Y Z, circumſcripti.

a 8. *tertii. dec.*

## IV.

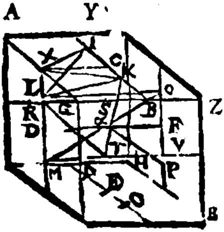
RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta $\beta$, $\delta$, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri $\theta\kappa$, oppoſiti, *b* æqualis eſt rectæ V X (quod & $\beta$V, $\delta$X, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.

b 33. *pri.*

## PROBL. 14. PROPOS. 14.

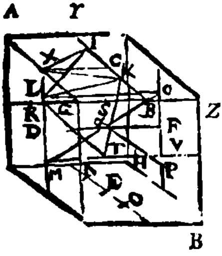
IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.



CVBVS *datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit* A B, *per cujus baſium centra* C, D, E, F, G, H, *lateribus cubi recta lineæ parallelæ agantur nuſquam inter ſe convenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita ut majora ſegmenta prope centra ſint in punctis I,* K : L, M : *N, O : P, Q : R, S :* T, Y : *quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, ut* L, *cum I, K, T, & R : R cum* L, M, *I, & N, &c ut conſtituantur viginti triangula* IKL, IKQ, L*MR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK*, TVO, *ILR, ISQ*, K T *L*, K *QV*, O *PV*, O*TM*, *NSP*, NM*R* : *quorum priora duodecim ſubtenduntur. duodecim cubi lateribus, poſteriora vero octo ejuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur.* Connectantur *jam recta* XC, XI, XK. *Quoniam igitur latera* X C, C I, *trianguli* X C *I, æqualia ſunt lateribus* XC, C K, *trianguli* X C K : c *& anguli contenti, recti, quod* X C, pa-

c 29. *pri.*

a 4. pri. parallela ſit ipſi A Y: a Erunt & baſes XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta eſt ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas XI, XK. Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia ſint lateribus LX, XK, trianguli LXK, &
b 4. primi. anguli contenti, recti; b æquales erunt baſes LI, LK. Rurſus c quo-
c 7. pri. niam quadratum rectæ LI, æquale eſt quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, eſt æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria
d 4. tertii decimi. quadrata quadrupla ſunt quadrati rectæ CI. (d Cum enim quadrata rectarum CY, IY. totius, & minoris ſegmenti, tripla ſint quadrati rectæ CI, majoris ſegmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla ejuſdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum eſt quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cum ejuſdem quadrati rectæ CI, quadruplum ſit quadratum rectæ KL, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipſæ æquales. Æquilaterum igitur eſt triangulum IKL, lateri cubi AG, ſubſtratum.



NON aliter oſtendemus, reliqua undecim triangula, undecim reliquis lateribus cubi ſuppoſita, eſſe æquilatera; Atque adeo inter ſe æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia ſint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi ſuppoſitorum, communia ſunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo KTL, latus KL, commune eſt triangulo IKL, & latus KT, triangulo TVK, & latus TL, triangulo LMT; perſpicuum eſt, ea quoque eſſe æqualia & inter ſe, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti hujuſmodi triangula Icoſaedrum component cubo inſcriptum, cum ejus anguli omnes duodecim in ſex cubi baſibus conſiſtant, bini nimirum in ſingulis. Itaque in dato cubo Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propoſitiones ſequentes.

## I.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & cubi Icoſaedrum ambientis.

*DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales: b manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt, c cum angulus MLQ, ſit rectus, quod & LDF, ſit rectus.*

a 33. primi.
b 47. primi
c 29. primi

## II.

BIFARIÆ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

*NAM hujuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cum conjungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll. propoſ. 3. hujus lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, dividunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, æqualia ſunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri.*

d 4. primi.

## III.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

*CVM enim CI, ſit majus ſegmentum rectæ CY: e ſitque ut CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY: f erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum majus lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, eſſet majus ſegmentum rectæ βY, eſſet βY, ad illam rectam, ut CY, ad CI, hoc eſt, ut βY, ad KI, diverſum ab illa recta. quod eſt abſurdum.*

e 15. quinti.
f 2. quarti.

## IV.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

*SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulosque alternos habentia æquales ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conveniunt. Quare quælibet latera oppoſita parallela erunt: g Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallelis ducta, inter ſe erunt parallela.*

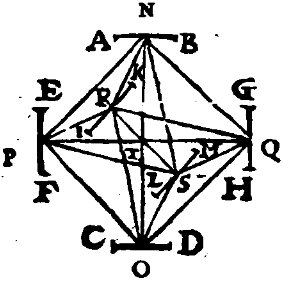
g 15. undecimi.

## PROBL. 15. PROPOS. 15.

### In dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

Exponantur dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum biſarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, jungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſeſe in centro T, biſariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ præcedentis oſtenſa ſunt: ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ: OP, OR, OS, OQ PR; PS: QR, QS, conſtituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN: RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualinm dimidia) angulosque contineant, rectos, ut dictum eſt: a Æquales erunt baſes NS. NP: Eodemque modo reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt & inter ſe æqualia: Ideoque Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum ejus anguli reſideant in biſariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaque Icoſaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 4 primi.



## COROLLARIVM.

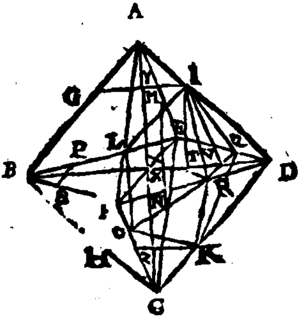
Seqvitvr hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, ubi ſe interſecant, centrum quoque eſt Octaedri.

## PROBL. 16. PROPOS. 16.

### In dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

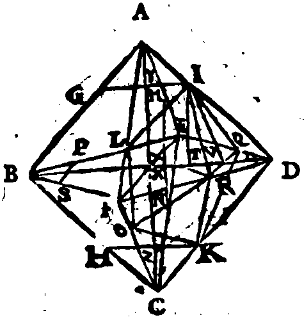
Datvm octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF. Cum à quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi è regione reſpondentia, hoc eſt quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina juxta angulos oppoſitos ejuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC: DA, DC, juxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD: AF, AE: CE, CF, juxta angulos oppoſitos A, G, quadrati AECF: Nam à quolibet angulo ſumenda ſunt tantum duo latera: at vero latera AB, AD: CB, CD, quadrati ABCD; juxta eoſdem angulos A, C, jam ſumpta fuere, EB, ED: FD, FB, juxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EB, FD, (Nam latera

latera EA, EC; FC, FA; quadrati A E C F, juxta eoſdem angulos E, F; jam accepta ſunt) quæ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, ut majora ſegmenta ſint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à ſingulis ad quinq; proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG; & ſic de cæteris, quamvis non omnes ductæ ſint in figura; ad evitandam linearum confuſionem Quæ autem ſint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum eſt, pyramidem conſtituunt; alia autem duo ſunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum eſt. Vt quia punctum acceptum eſt R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem cõſtituit in vertice D, eſt commune triangulis Octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinq; laterum ductæ ſint lineæ rectæ, & ſic de cæteris. Poſt hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, ſeſe in centro X, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quarum AC, BD, ſecant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipſi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia ſunt lateribus DR, DI, trianguli DRI; (Sunt enim DQ, DR, minora ſegmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri ADE, ADF; *a* erunt baſes IQ, IR, æquales. Deinde cum ſit, *b* ut *BG*, ad GA, ita D*I*, ad I*A*; *c* erit G*I*, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR. ipſi EF, parallela; *d* Ac proinde ut D*I*, ad *IA*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, ſecta erit in Y, extrema ac media ratione Rurſus quia eſt ut AX, ad XD, ita AY, ad Y*I*, (quod triangulum AYI, ſimile ſit triangulo AXD, per coroll. propoſ 4. lib. 6) Eſt autem AX, ipſi XD, æqualis; Erit & AY, ipſi Y*I*, æqualis. Quare Y*I*, minus ſegmentum eſt rectæ XA. Non aliter oſtendemus AY. ipſi YG, eſſe æqualem; ideoq; G*I*, rectam bifariam in Y, ſimiliterq; QR, in V, ſecari. Cum vero latera AG, A*I*, trianguli *A* G*I*, æqualia ſint lateribus DQ, DR, trianguli DQR. (nimirum minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum) anguloſq; comprehendat rectos, nempe quadratorum A B C D, DEBF; *e* æquales erunt



a *4. primi.*
b *2. quartidecimi.*
c *2. ſexti.*
d *4. ſexti.*
e *4. primi.*

baſes G I, QR. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ H K, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturque duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, majus eſt ſegmentum majoris ſegmenti X Y, diviſi extrema ac media ratione, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. Eſt autem X Y, rectæ XV, æqualis (cum ambæ ſint majora ſegmenta æqualium rectarum X A, XD) *a* & YI, rectæ XT: erit XT, majus ſegmentum ipſius XV, & idcirco T V, ſegmentum minus, ejusdem XV. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc eſt, ipſius, I T (*b* cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & T V, minoris ſegmenti, *c* tripla ſunt quadrati rectæ X T, majoris ſegmenti: Atque adeo quadratum rectæ IV, *d* æquale exiſtens quadratis rectarum IT, T V, triplum eſt ejusdem quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ R V, quæ æqualis eſt ipſi X T, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato rectæ R V, ipſi quadrato rectæ I V: erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: *e* At quadratis rectarum IV, VR; æquale eſt quadratum rectæ IR, *f* quod anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, V R: I V, V Q, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR: Ac propterea cum ejusdem quadrati rectæ V R, quadruplum quoque ſit per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR: Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem I Q, ipſi I R, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt I QR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR, GIL, GIM: GPS, HPS: NHK, OHK: RLO, SLO: PMN, QMN, atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe, quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum unum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum octaedri: duo vero reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos ſingulos duobus ſegmentis laterum Octaedri, majore & minore; Erunt latera



a 34 primi

b 34. primi

c 4 tertiidec.

d 47. primi.

e 47. primi

f 8. primi.

latera unius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, ſubtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehenſos minoribus ſegmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia ſunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, majore & minore; hic vero ſegmentis AL, AI, majore & minore quoque. Non ſecus latera IR, GL, æqualia erunt. Æqualia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per corollarium propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidẽ duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur, reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet GMP, in AEB, HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterum Octaedri conveniunt ad cõſtitutionem anguli ſolidi (ut vides in quinq; RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum octaedri poſſideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

## COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita ut unius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, majus ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AL, [a] cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI.

a 47. primi

## COROLLARIVM. II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis octaedri, & Icoſaedri. ſuſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED. ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ. (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) anguloſq; comprehendunt æquales, nemp dimidios angulorum trianguli æquilateri, ut in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtendimus: Erunt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

## COROLLARIVM III.

NON difficile eſt deniq; ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunq; duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O, cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus XF. FO, trianguli XFO. (Nam XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) anguloſq; complectantur æquales, ſemirectos videlicet (cum AC, EF, diametri ſint quadratorum ABCE, EAFC: ac proinde per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) a Aequales erunt & baſes XG, XO. Eodemq; argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.

a 4. primi.

## PROBL. 17. PROPOS. 17.

### IN Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

b 16. quintidecimi.
c 5. quintidecimi.

b INSCRIBATVR dato octaedro Icoſaedrum; c & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod jubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concentricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2, propoſ 16. hujus lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem centris octo baſium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quanquam non proprie, ut ex defin. 31. lib. 11 apparere poteſt: Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

## PROBL. 18. PROPOS. 18.

### IN data pyramide cubum deſcribere.

d 15. quartidecimi

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus jubetur deſcribi; ſitq; eius centrum E, per quod ex quatuor angulis pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, d quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H. I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S. Secentur quoq; rectæ ex ſolidis angulis per centrum E demiſſæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (cen-

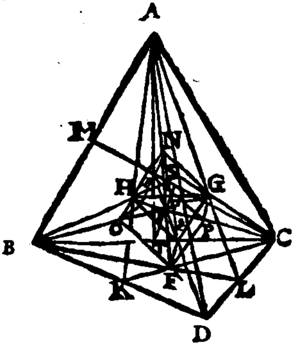
tris,

tris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circum ſtantium, ita ut relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit) rectis lineis conjunguntur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, *I*; P, cum F, G, I; & Q, cum F, *G*, H. Dico ſolidum NF, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, FG, F H, F I, cubum eſſe. Cum enim latera AF, FK, trianguli A F K, æqualia ſint lateribus A F, FL, trianguli A F L, (quod FK, FL, cum perpendiculares ſint ad *B* D, C D, ex centro F, ductæ oſtendant æquales diſtantias rectarum æqualium *B*D, C D, à centro F,) anguloſq, contineant rectos, ex 3. defin. *l*ib 11. *a* Æquales erunt & baſes A K, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus quia latera A N, A H, trianguli A N H, æqualia ſunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (ſunt enim A H, A G, ſemidiametri triangulorum æqualium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt æquales, ut demonſtravimus; *b* Æquales erunt baſes NH, N G. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ Q G; Q H, ſi rectæ ducantur D G, D H, necnon & reliquæ, cum omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; ut perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, F T, æqualia ſint lateribus AF, FK. (Sunt namq; F T, F K; diſtantiæ rectarum æqualium B C, B D, à centro) & anguli contenti recti, ex defin, 3. lib. 11. Æquales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cùm latera A N, A I, æqualia ſint lateribus A N, A H; (Sunt enim AI, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD,) anguloſq; contineant æquales: *c* Æquales erunt baſes N *I*, NH, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus jam, ipſa plana eſſe atque rectangula, ut tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeo componere cubum N F.

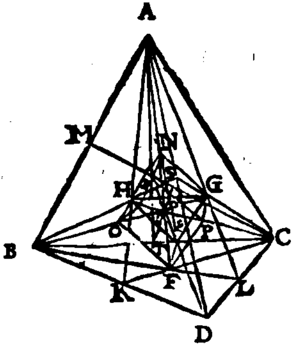
a 4. *prim. i.*

b 4. *primi*

c 4. *primi.*



ASSUMATUR quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera BC, A D, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, conjungantur recta S T, erit ea diameter Octaedri in pyramide deſcripti, ut conſtat ex figura propoſitionis 2. hujus lib. Nam punctum S, hujus figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſive non coeuntia B C, A D. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, ut mox demonſtrabimus, tra[illegible]



ST, per E, centrum pyramidis, æqualeſq; erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. *a* erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium *B*S, CS. Quare latera BS, CS, trianguli *B*SC, proportionaliter ſecantur, *b* atque idcirco, HG, parallela eſt lateri *B*C, ſecatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC) proportionaliter; ideoq; & RS, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus *c* quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13 hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4. recta DI, ideoq; ejus dimidium DQ, earundem partium 2. Quamobrem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, *d* recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitq; latera *E*S, ED, triangnli D*E*S (quod quidem pars eſt trianguli A*E*D) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac prõinde SR, duæ tertiæ partes eiuſdem SE. Quoniam igitur utraq; HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, à rectis HG, NQ; Atq; idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. *e* Quare in eodem ſunt plano, proptereaq; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ: Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

*a 18. quarti decimi.*
*b 2. ſexti.*
*c 15. quartidecimi.*
*d 2. ſexti.*
*e 2. undecimi.*

Cvm oſtenſa ſit HG, ipſi *B*C, parallela, atq; adeo triangulum SHG, ſimile triangulo S*B*C, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. *f* Erit ut SH, ad HG, ita S*B*, ad BC; & permutando, ut SH, ad SB, ita HG, ad *B*C: Eſt autem SH, tertia pars ipſius S*B*: Igitur & HG, tertia pars erit lateris B C, Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera *B*C, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG, NH, QH; *g* Æquales erunt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cum ipſi ſint quatuor rectis æquales, ut oſten-

*f 2. ſexti.*
*g 8. primi.*

vt oſtendimus ad propoſ.32.lib.1.recti erunt, ideoque quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent; qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus,licet improprie,quod quatuor eius anguli F,G,H,I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N,O, P,Q.in bifarijs ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant,vt conſtat.

ALITER. In data pyramide deſcribatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus,factumque erit,quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in centris octo baſium Octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis,vt conſtat ex propoſ.2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis,quemadmodum etiam in priori demonſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes Octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib.(*a* cum enim rectæ EG,EH,parallelæ ſint rectis BC,BD; *b* erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela,& ſic de cæteris)fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas quatuor reliquas baſes Octaedri perpendiculares,ex ſcholio propoſ. 14. lib.11. Quare cum prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti,cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. *c* Et quia dictæ quatuor baſes Octaedri diuidunt illas perdendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariam; efficitur: vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in medijs punctis quatuor perpendicularium,veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 2. *ſexti.*
b 15. *vndecimi.*
c 17. *vndecimi.*

## COROLLARIVM I.

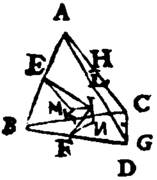
CONSTAT ex his,idem eſſe, centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF,OG,PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum, per E, centrum pyramidis tranſeunt.

## COROLLARIVM. II.

INFERTVR quoque rectam,quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis. tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat: Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S.& T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

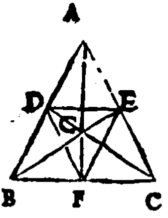
## LEMMA.

IDEM autem eſſe centrum Pyramidis,& Octaedri in ea deſcripti,idemque centrum baſis pyramidis,& baſis Octaedri in ea deſcripti,ita demonſtrabimus. Sit primum



pyramis ABCD,cuius omnia ſex latera bifariam ſecentur in E,F,G,H,I.K;& ex L,cētro pyramidis in baſes ABD,BCD, perpendiculares dimittantur LM,LN,quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribētium cadent,ex coroll. lemmatis 1. prop. 10.lib.14. Coniunctis autem rectis LE,EM,LF, FN ; quoniam latera LM,ME,trianguli LME,æqualia ſunt lateribus LN,NF,trianguli LNF,(cum enim circuli baſes ABD,BCD, circumſcribentes,ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi à centro L,per lemma 2. propoſ.10. lib.14. Ac propterea eorum diſtantiæ LM,LN,æquales erunt. Sic quoq; æquales erunt ME,NF,diſtantiæ rectarum æqualium AB, BD, à centris M,& N,circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin.3. lib.11. *a* Æquales erunt rectæ LE,LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt,& inter ſe rectæ LG,LH,LI,LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H. I, K, vt ex 2,propoſ. huius lib. conſtat: Erit L,centrum Octaedri,cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea deſcripti.

a 4. *primi.*



SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis Octaedri DEF, quæ ſecabit illius latera bifariam, vt patet ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, à quo ad angulos vtriuſq; baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia ſunt, angulosque continent æquales, nimirum ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri; *b* erunt & baſes GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli DEF, quod eſt propoſitum.

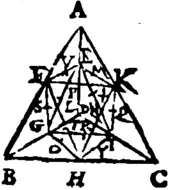
b 2 *ſexti.*

PROBL.

## PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATÆ Pyramidi ABCD, *a* inſcribatur Octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum Octaedri cadentia, vt in prop. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK, HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in pūctis L, M, *N*, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. *N*am ſi quilibet horum punctorum cū quinque proximis coniunxermus lineis rectis, vt *M*, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto Octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterum Octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſium pyramidis coſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna lateta octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nam in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG: In ADC, deniq; latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 2. *quarti dec.*

## PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

PYRAMIDI datæ *b* inſcribatur Icoſaedrum, *c* & in hoc Dodecaedrum habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: conſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll propoſ. 16. huius lib. Deinde *d* quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat; Item cubus

b 19. *quintidec.*
c 5. *quinti dec.*
d 8. *quinti dec.*

pyra-a 18. quinti dec. pyramidi inſcriptus, a quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictum eſt quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conueniẽtes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarũ: ſuperſunt autẽ duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum deſcriptum eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiamſi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

xiij.

## PROBL. 21. PROPOS. 21.

### IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphærę datum ſolidum complectentis an ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quę ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

## SCHOLIVM.

*ITAQVE, cum quolibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, Octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 19. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.*

b 16. quintidec. c 5. quinti dec. *CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta: b In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde c Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex pro-*

*poſ 17.*

*poſ.17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro* d *deſcribitur cubus, cubus octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium Octaedri poſſident: ac propterea & cubus ipſe in Octaedro deſcriptus eſt.* a *Deniq; in cubo pyramis includitur, quæ ideo in Octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium Octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

d 8. *quinti dec.*

a 1. *quinti dec.*

NEQVE *vero prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibique inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi.* b *Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant,* c *conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri: liquido conſtat ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoque cubum atq; pyramidem, cum ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

b 1. *quinti dec.*

c 8. *quinti dec.*

P*ARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſiũ centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: in centris quidem, baſium Icoſaedri prepoſ. 5.11. & 12. In centris vero baſium Octaedri propoſ.17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ.20. & 18. huius lib.*

*VIGINTI porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionesue quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ.2.18.19. 20. In Octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ.6.4.16.17. In cubo deinde pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ.1.3.14.13. In Icoſaedro autem pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ.12.15.11.5. In Dodecaedro deniq;, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10.9.8.7. deſcripſimus. At vero poſteriori vnica propoſitione qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur docuimus.*

## FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

# ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus.

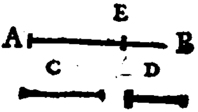
## LIBER TERTIUS.

*QVEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quamplurima figutatum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimus ſextus non adiungatur.*

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

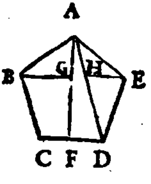
LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C. deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris *AB*, deſcripti ſit D: diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad E*B*, minus. Cum enim, vt in ſcholio vltimæ prop. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſque in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra: Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit E*B*, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri *D*, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentũ ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris G, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



## THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum GD. perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G: extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H; quoniam *B*E, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, *a* ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: *b* Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



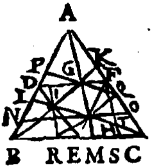
a 2. *ſexti.*
b 18. *tertij dec.*

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppo-

oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

*TRIANGVLVM pyramidis ſit ABC, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, conſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 13. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri GHI, hoc eſt rectam BK, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectæ FH, maiori ſegmento rectæ FE, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqua-*



a 4. pri. *lium laterum eiuſdem trianguli comprehenſos;* a *ideoque æqualia*
b 34. pri. *ſint.)* b *Eſt autem & NH; æqualis toti DF, in parallelogrammo*
c 2. ſexti. *DH,* c *propterea quod FH, DF, parallelæ ſunt rectis AB; BC, ſeu NO.*
d 5. tertii- *Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento.* d
decimi. *ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde cum tres parallelæ BC, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta GH. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB: Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.*

*AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius*
e 5. tertij- *ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO,*
decimi. *maius ſegmentum rectæ AF:* e *ac proinde tota AO, ſecta in F,*
f 2. ſexti. *extrema ac media ratione:* f *Eſt autem vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob*

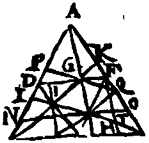
*GH, ob triangulum AHO; & ut AH, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque majora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmenta majora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero eſt a ut AQ, majus ſegmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, majus ſegmentum: Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, rectæ æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, majuſque reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione: atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum majore & minore ſegmento ſingulos, b æqualia inter ſe ſunt: erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cujus quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL: ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex iis, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtravimus: Dividitur autem CL, bifariam in H, ob triangulum ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, c ſecans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam ſecatur in G. Eademq; eſt ratio de reliquis QR, RP) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cujus anguli dividunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.*

a 2. quartidecimi.

b 4. primi.

c 2. ſexti.

## COROLLARIVM.



EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, majus eſſe ſegmentum rectæ diviſæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, ut conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cujus baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale recta FS, parallela rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. d Cum igitur MC, bifariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; e ſitque MS, ipſi GF, æqualis, ob parallelogrammum GS: Erit & SC, æqualis eidem GF; minori ſegmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales ſint: erit quoq; reliqua ES, reliquæ DG, majori ſegmento æqualis: Ideoque EC, in S, ſecta erit extrema ac

d 2. ſex.

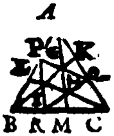
e 34. pri.

a 2.ſexti. media ratione. Deinde *a* quia FE, FS, ſimiliter ſecantur: ſecatur autem F E, extrema ac media ratione, ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, majuſque ſegmentum erit FT, recta *b* æqualis exiſtens lateri Icoſa- b 34.pri edri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti majus eſt ſegmentum rectæ FS, quæ dividit *E* C, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

BASIS Pyramidis ſit *A*BC, cujus latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, *A*M, producentibus GHI, baſin Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcripeam triangulo æquilatero PQR, cujus anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, bifariam dividantur in G, H, I, ut in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI. Cum enim PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1 propoſ 16, lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI; ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.



### COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apo-
c 13. tertii-dec. tomen. *c* Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis: ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationa-
d 6. tertii-decimi. le, *d* cum diametro potentia ſit commenſurabile. *e* Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit:
e 6. tertii-dec. Atque adeo *f* cum minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri) Erit & latus Icoſaedri ex ſcholio pro-
f 6. dec. poſ. 104. lib. 10. *A*potome.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

CVM

*CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcripta diameter ſit baſis cubi, ut conſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit autem quadratum hujus diametri, duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcripta.*

*RVRSVS, quia recta conjungentes biſarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, ut liquet ex propoſ. 2. lib. 15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum recta conjungentis biſarias ejus ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, ut conſtat ex coroll. propoſ. 4. lib. 6.* a *Nam cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.*

a 2. ſexti.

DENIQVE b *quia diameter ſphæra, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri conjungat centra baſium oppoſitarum, ut in coroll. propoſ. 3 lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia eſſe duplum lateris octaedri in eo deſcripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.*

b 14. tertii decimi.

## PROBL. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri majus ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris Pyramidis ſibi inſcriptæ.

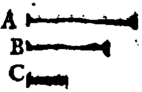
*CVM enim Pyramis inſcripta cubo, deſcripta ſit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inſcribitur, ut docuimus propoſ. 10. libr. 15. Sit autem latus dodecaedri majus ſegmentum, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo deſcribitur;* c *exiſtat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis ſibi inſcripta: Aperte colligitur, latus Dodecaedri majus ſegmentum recta eſſe, qua potentia dimidia eſt lateris Pyramidis ſibi inſcripta. Quod erat demonſtrandum.*

c 5. ſexti dec.

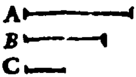
## THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icoſaedri in eo deſcripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo deſcripti C. Dico B, latus Icoſaedri medio loco eſſe proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propoſ. 14. libr. 15. demonſtra-



ſtra-



ſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri majus ſegmentum ſit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ.13. ejuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit ejuſdem lateris cubi: Planum fit, ita eſſe A, totam ad *B*, majus ſegmentum, ut B, majus ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

*CVM enim per ea, quæ in propoſ.18. lib. 5. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti (oſtenſum enim eſt ibi, G H, diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis B C)* a *Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cum noncupla proportio ſit tripla duplicata, ut in his numeris 1.3 9. apparet. Quare cum quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ.47. lib 1. fit, ut ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum ejuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.*

a 20. *ſexti.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cujus majus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM *enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus, quoque ſit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inſcribitur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ult. lib.15.* b *Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, & Dodecaedro inſcripti: Hujus autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti majus ſegmentum eſt, ex coroll.1.propoſ.17.lib.13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, cujus majus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti Quod demonſtrandum erat.*

b 8. *ſextidec.*

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Ico-

**Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diviſi.**

*VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta conjungens duas ſectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta (qualis fuit ibi recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare a cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia, duplum poterit unius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 47. *pri.*

## THEOR. II. PROPOS. II.

**LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.**

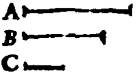
SIT una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cujus baſis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, *LM*, MN, NK, rectis AB, BC, CD, *D*A, parallelæ. Quod ſi conjungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FG*H*I, quadratum cubi in octaedro deſcripti, ut demonſtravimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur *E*O, talium 1. erit EH: *b* Atqui ut EO, ad E*H*, ita eſt EB, ad E*L*. Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit E *L*, ſeu L M, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. demonſtravimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, deſcriptum; *c* cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam *9. 2.* Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.

b 2. *ſexti.*

c 33. *pri.*

## COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diviſum efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur , per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 15. inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum ejus rectæ extrema



ſtrata ſunt, B, latus Icoſaedri majus ſegmentum ſit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in ſcholio propoſ.*13*. ejuſdem lib. oſtendimus, minus ſegmentum ſit ejuſdem lateris cubi: Planum fit, ita eſſe A, totam ad *B*, majus ſegmentum, ut B, majus ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

## THEOR.8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

a 20. *ſexti.*

*CVM enim per ea, quæ in propoſ.18. lib. 5. ſunt demonſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti (oſtenſum enim eſt ibi,* G H, *diametrum baſis cubi inſcripti tertiam eſſe partem lateris Pyramidis* B C) a *Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cum noncupla proportio ſit tripla duplicata, ut in his numeris 1.3.9. apparet. Quare cum quadratum diametri baſis cubi duplum ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ.47. lib 1. fit, ut ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratum lateris cubi 1. quadratum ejuſdem baſis diametri ſit 2. quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus* Pyramidis *potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cujus majus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

b 8. *ſextidec.*

CVM *enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus, quoque ſit* Pyramidi, *cui illud* Dodecaedrum *inſcribitur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ult. lib.15.* b *Erit latus pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi ſibi, &* Dodecaedro *inſcripti: Hujus autem lateris cubi extrema ac media ratione ſecti majus ſegmentum eſt, ex coroll.1.propoſ.17.lib.13. latus* Dodecaedri *in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, cujus majus ſegmentum latus eſt* Dodecaedri *in pyramide deſcripti Quod demonſtrandum erat.*

## THEOR.10. PROPOS.10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Ico-

Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diviſi.

*VT enim conſtat ex propoſ.16. lib. 15. recta conjungens duas ſectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta (qualis fuit ibi recta* GI, *ſubtendens angulum rectum* GAI, *minoribus ſegmentis* AG, AI, *comprehenſum) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare* a *cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit duo illa minora ſegmenta æqualia, duplum poterit unius minoris ſegmenti.* a 47. *pri.* *Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cujus baſis quadratum ABCD, triangula vero ad E, verticem, ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, *LM*, MN, NK, rectis AB, BC, CD, *D*A, parallelæ. Quod ſi conjungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FG*H*I, quadratum cubi in octaedro deſcripti, ut demonſtravimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur *E*O, talium 1. erit EH: *b* Atqui ut EO, ad E*H*, ita eſt EB, ad E*L*. b 2. *ſexti.* Igitur qualium partium 3. continet EB, talium 2. erit E*L*, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KL, MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. demonſtravimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, deſcriptum; *c* cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri LM. c 33. *pri.* Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam *9. 2.* Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diviſum efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur , per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 15. inſcribunturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. perſpicuum ſit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum ejus rectæ extrema ac media ratione diviſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem Octaedro inſcripti: eius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus Octaedri.

## THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri majus ſegmentum eſt ejus rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

*QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum biſariam ſectiones conjungunt tres rectæ lateri cubi æquales, ut conſtat ex propoſ 14. lib. 15. ejuſque ſcholio: Et in biſariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. ejuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. libr. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit majus ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diviſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri majus ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. a Atqui diameter ſphæræ ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri majus ſegmentum ejus rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.*

a 14. tertii dec.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam ejus, quam habet majus ſegmentum ad minus rectæ lineæ diviſæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quem minus ſegmentum ad majus ejuſdem rectæ lineæ.

*OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. libr. 15. minus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diviſa ad minus ſegmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad majus ſegmentum, vel majoris ſegmenti ad minus (quod tota linea, majus ſegmentum, atq; minus, ſint tres rectæ continuò proportionales) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis majoris ſegmenti ad minus duplicatam.*

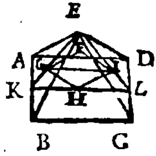
PRÆ-

*PRÆTEREA, cum conſtet ex coroll. 1 propoſ. 17. lib. 13. majus ſegmentum lateris cubi extrema ac media ratione diviſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtum eſt eſſe ut latus Dodecaedri, hoc eſt, majus ſegmentum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad majus. Cum enim ſit, ut tota linea ad majus ſegmentum, ita majus ſegmentum ad minus; Erit quoque convertendo, ut majus ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad majus. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 14. PROPOS. 14.

### LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

SIT una ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cujus baſis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis jungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro deſcripti conſtituentibus, ut docuimus in propoſ. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in ſcholio propoſ. ultimæ lib. 15. expoſuimus. Eſtque latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi, ut conſtat ex propoſ. 1, lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, ſeſquialterum eſſe lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis EGK, EIL, dividentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 15, ipſæque EK, EL, ſeſquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propoſ. 18, libr. 14. a Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit ut EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, ut EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. b Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialterum lateris pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.



a 2. ſexti.

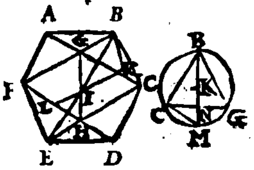
b 33. primi.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

### SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

SIT Icoſaedrum ABCDEFGH, cujus diameter BE, &

centrum I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis I K, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per ſcholium propoſ. 14. libr. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icoſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, ut conſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per L centrum I, centrum Icoſaedri Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I tranſeant, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque IK, IL, ſemidiametri æquales: Conjuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis; erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. *a* Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum BK, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, ut in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris B K, K I, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL (*b* quod triplum eſt quadrati lateris cubi) ex quadrato diametri Icoſaedri B *E*, remanet, quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri B C. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG. circulus, extenſaque B K, uſque ad M, quæ ſecet *C G*, in N, ducatur quoque recta C *M*. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad C G, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. *c* erit recta *B* C, potentia ſeſquitertia rectæ B N; Vt autem B C, ad B N, ita eſt *B* M, ad B C, quod B C, ſit media proportionalis inter B M & B N, ex coroll. propoſ. 8. lib 6. *d* cum angulus *B*CM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens, Recta igitur *B* M, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B *M*, ſeſquitertium eſt quadrati lateris *B C*. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 74. *pri.*

b 15. *tertii-dec.*

c 12. *quartidecimi.*

d 31. *tertii*

## COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambienbientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri *B E*, æquale eſſe quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diviſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

*QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, a duplum potens lateris Octaedri, conjungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, ut manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 5. Eſt autem recta dictas ſectiones conjungentis diviſa extrema ac media ratione minus ſegmentum latus* Dodecaedri, *ex coroll. 4. propoſ. 17. libr. 13. Liquet, latus dodecaedri minus ſegmentum eſſe ejus rectæ extrema ac media ratione diviſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum hujuſmodi recta conjungat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cujus quidem minus ſegmentum eſt latus* Dodecaedri, *ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt recta linea extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.*

*a 14. tertii dec.*

## THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

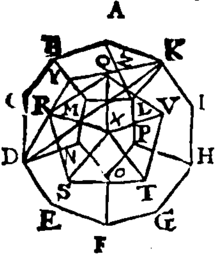
*CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem* Icoſaedro *deſcribantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultima libr. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circumdantis:* b Poteſt *autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, &* Icoſaedro *deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſin Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. hujus lib. demonſtravimus. Igitur diameter* Icoſaedri *potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circumdantis, ex coroll. propoſ. 15. hujus lib. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſin* Icoſaedri *deſcripti, & lateris* Pyramidis *in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.*

b *13. tertii-decimi.*

## THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diviſæ, ad partem ejuſdem lineæ inter centrum pentagoni & latus ejuſdem poſitæ.

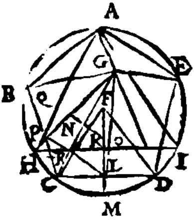
*SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNQP, quorum centra Q,R,S,T,V,X (qualibet videlicet duo proxima) jungantur rectis QR,RS,ST,TV,VQ. QX,RX,SX,TX,VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ.7.libr.15. A duobus angulis pentagonorum D,K, in communem baſium BM, per centra R,Q. rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſitionis 10.lib.13 convenient in puncto Y. Quodſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur a perpendicularis* a 2. ſextidec. *KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri LM, ad Latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, ut KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q. & latus BM. interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodem ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; nec non & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) b parallela erit QR, ipſi* b 2. ſexti. *DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. libr. 6. c Quamobrem erit, ut DK, ad KY, ita QR, ad QY.* c 4. ſex. *d Vt autem DK, tota ad totam KY, ita eſt LM, minus ſegmentum ad* d 2. quartidecimi. *minus KZ. Vt igitur LM, ad KY, ita erit QR, ad QY; Et permutando, ut LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q. & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus &c. Quod erat demonſtrandum.*



## THEOR. 19. PROPOS.19.

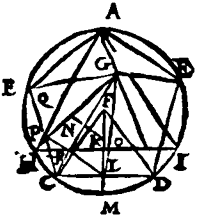
SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque ejus ſegmentum à toto latere Icoſaedri ſublatum; à reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum AB CDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cujus centrum F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex iis quæ in propoſ.16. lib.13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, nec non & duo arcus ABH, AEI, cum ſint tertiæ partes ejuſdem circumferentiæ, erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea que rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib.3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, a ſecans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; conjungaturque rectæ FC, FD. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, dividentes, per ſcholium propoſ 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta *GO*, in punctum L, in quo diviſa eſt CD, bifariam, cadet. Iunguntur autem centra N, O, recta N, O, quæ, ut conſtat ex demonſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icoſaedro ſcripti. Denique BP, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri *HI*, ſecetur in K, extrema ac media ratione (quod FL, hac ratione ſecta faciat majus ſegmentum æquale perpendiculari FK, per coroll. propoſ. 2. lib. 14.) ſit autem majori ſegmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demonſtravimus ad propoſ. 5. libr. 15. majus ſegmentum KM, ſectum quoque in L, à minori ſegmento K*L*, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ ſui ipſius ſegmento LM. Quoniam vero juncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, deſcri-



a 3. tertii.

deſcripti, idemque centrum *F*, habentis, ex ſcholio ultimo lib. 4. ideoque ſimilis illi: erunt triangula FCD, FPL (ſi recta duceretur FP) ſimilia, per ſcholium propoſ. 20. lib. 6. Quare ut FG, ad *CD*, ita erit *FL*, ad *LP*; & permutando, ut FC, ad FL, ita CD ad *LP*; Atqui F*C*, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore ſegmento dimidii ipſius *FM*, nempe minore ſegmento rectæ K M, ut oſtendimus. Recta igitur CD, vel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmento dimidii ipſius BC, nimirum minore ſegmento rectæ B P, quod fuit P Q; ideoque reliqua C Q, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia GP, GL, proportionaliter ſecantur in centris N O (quod G *N*, GO, duplæ ſint ipſarum NP, OL, per coroll. propoſ. 18. lib. 14)

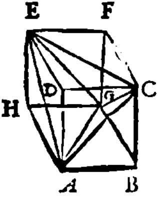


a 2. *ſexti.* *a* parallelæ erunt PL, N O; ac proinde triangulum GNO, triangulo GP*L*, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. *6*. *b* Igitur erit ut G P, ad
b 4. *ſexti.* PL, ita GN, ad NO; & permutando, ut GP, ad GN, ita P L. ad NO: Eſt autem GP, ipſius G N, ſeſquialtera, per coroll. propoſ 18. lib 14. Quare & P L, hoc eſt ſibi æqualis C Q, ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum *C*Q, ſeſquialtera quoque ſit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. eſt *C* Q, talium 1. eſt QR, per conſtructionem; Ac propterea earundem 2. Q R, æqualis erit QR, ipſi N O, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

## THEOR. 20. PROPOS. 20.

### CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

*IN cubo* AF, *deſcripta ſit pyramis* ACE G. *Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem aquilateram circumſtent quatuor pyramides fundata ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident quatuor anguli pyramidis aquilatera inſcripta; (Nam ſuper baſin* ACE, *fundatur pyramis* ACED, *ſuper baſin* AEG, *pyramis* AEGH; *ſuper baſin* CEG, *pyramis* AEGF; *& ſuper baſin* ACG, *pyramis* ACGB: *qua quidem quatuor pyramides aquales ſunt, ex* 10. *definitione libri undecimi, cum contineantur planis ſimilibus aqualibusq; & multitudine & magnitudine. Qualibet enim conſtat tribus aqualibus & ſimilibus*



*bentis triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptæ) Sit autem cubus cujuſlibet harum pyramidum ſextuplus (Nam exempli cauſa, pyramis ABCG, baſin habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 1. propoſ. 17. lib. 12. priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis. a Cum igitur cubus duplus ſit ejuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtum eſt pyramidem ABCG, ſextam partem eſſe cubi. propterea cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; At proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inſcriptam ejuſdem cubi tertiam eſſe partem. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.*

a 32. undec

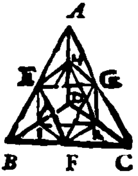
ALITER. *Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultima lib. 15. b Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcripta, ut demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubum triplum eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, quandoquidem hæc in eadem ſphæra, in qua cubus, continetur.*

b 32. quartidecimi.

## THEOR. 21. PROPOS. 21.

### PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF: Dico pyramidem octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, ut propoſ. 3 lib 15. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſque numero & magnitudine quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD, per corollar. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium ejuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione prop. 2. lib. 15.) c Habeant autē pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatā; Erit pyramis ABCD, octupla cujuslibet illarum quatuor pyramidū octaedro circumpoſitarum (cum octupla proportio ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyrami-



dum

dum pars erit octava pyramidis ABCD : Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octavas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars ejuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcriptio octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

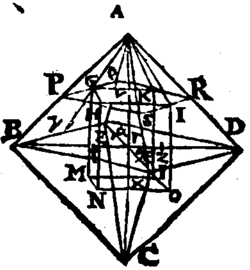
## THEOR. 2. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

*QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum : octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, ut conſtat ex* a 20. ſextidec. *ſecunda demonſtratione propoſ.3. lib. 15.* a *Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcripta triplus,* b 21. ſextidec. b *& pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla : Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum : atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.*

## THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.



IN Octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum conſtituentes PQRS, ut in propoſ.4.lib.15. eſt demonſtratum : c15. undec. c quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll.1. Propoſ. 4. lib.13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Eſt d17. und. autem V, centrum quadrati PQRS ; *d* (cum enim plana BEDF, e 47. pri. PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter : erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. *e* Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum

rum æqualium AP,AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP, AV,VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,VQ, proptereaque & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce,& inter ſe æquales eſſe rectas VR,VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſchol ultimum lib. 4. Secantur enim latera PQ,QR,RS,SP, bifariam in G,K,I,H, ut conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. libr. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y,Z,α,β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta jam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. a Cum ergo plana PR,BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT,CT, ſimiliter ſecentur in V,& X; æquales erunt AV, CX: nec non VT,XT. Recta igitur VX, conjungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum per coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſeſe bifariam ſecent in centro. Iam vero quoniam VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla autem fuit & AV, ejuſdem VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. propoſ. 7. libr. 12. cum utriuſque eadem ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX: b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK: illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA. PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula hujus ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius) c proportionem habent laterum homologorum triplicatam: Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterum, quod & recta Aγ, d proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8.12.18.27. conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. eſſe cubum GO, jam demonſtratum eſt. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur Octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem

a 17. undec.
b 6. undec.
c 8. duod.
d 2. ſexti.

habet

habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. Oſtendimus enim T, utriuſque eſſe centrum.

## COROLLARIVM II.

a 11. *ſextidec.* PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habēt. a Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram, quam videlicet demonſtravimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum.

## THEOR. 24. PROPOS. 24.

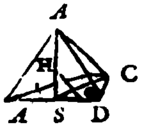
### OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

b 23 *ſextidec.* c 20. *ſextidec.* *QVONIAM ut oſtendimus ad finem lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur;* b *Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis* c *triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.*

## PROBL. 25. PROPOS. 25.

### PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

*IN pyramide* ABCD, *cubus intelligatur deſcriptus.* Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. *Aſſumantur enim* G H, *centra duarum baſium* A C D, ABD, *commune latus* A D, *habentium, per quæ ex angulis* C, B, *ad latus commune oppoſitum* A D, *recta ducantur* CGS, BHS; *dividentes latus* A D, *biſariam, & ad angulos rectos. per ſcholium prop. 12. lib. 13. ac propterea convenientes in medio puncto* S. *Connexa vero recta* G H, *cum* B H, C G, *dupla ſint rectarum* H S, G S, *ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur*



d 2 *ſex.* e 4. *ſex.* BS, C S, d *parallelæ erunt* B C, H G, & *per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum* H G S, *triangulo* B C S, *ſimile.* e *Erit ergo ut* B C, *ad* C S, *ita* H G, *ad* G S; & *permutando, ut* B C, *ad* H G, *ita* C S, *ad*

CS, ad GS: a Eſt autem CS, ipſius GS, tripla. Igitur & BC. tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcripta in cubo diameter eſt baſis cubi, ut in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt: Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, ut perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, jungens centra G, H, baſium ACD, ABD, commune latus AD, habentium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABCD, circumſcribentis: GH, vero diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera. (Eſt enim ut diameter unius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio utraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel ſic. Quadratum diametri unius quadrati ad ipſum quadratum eſt, ut quadratum diametri alterius quadrati ad ipſum quadratum, cum utrobiq; ſit proportio dupla. b Igitur erit quoque diameter ad latus, ut diameter ad latus. Ergo permutando, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, ut oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, c proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt tripla proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, d cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis AB-DC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 18. quartidecimi.

b 22. ſexti.

c 33. undec

d 20. ſexti. dec.

### COROLLARIUM.

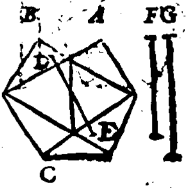
IGITUR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demonſtratione hujus propoſitionis.

## THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRUM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN Octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico Octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, ut ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim, ut ex demonſtratis in propoſ. 16. libr. 15. liquet. octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur: ſint duæ baſes Icoſaedri GHI, KLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri ADE, BCF; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim utriuſque eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 10. libr. 15.) ad baſin ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, trianguli ADE, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll, 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita ADE, BCF, parallela ſint, ex coroll 4. propoſ. 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſ 14. lib. 11. ad planum BCF, in ejuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales dividitur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrũ in 20. pyramides æquales ejuſdẽ altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſin, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cujus baſis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cujus eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON, duplum eſt priſmatis, cujus baſis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cujus baſis ADE, & altitudo OP, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri. Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit & tertia pars priſmatis ſuper baſin ADE, & ſub altitudine OP, conſtituti: priſma videlicet cujus baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem ADE, & ſub altitudine OP, cum per ea, quæ docuimus ad propoſ. 7 lib. 12 priſmata ejuſdem altitudinis inter ſe ſint, ut baſes. Quare duo priſmata, quorum unius baſis ADE, & altitudo OP, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſunt octaedro A B C DEF. Non ſecus demonſtrabimus priſma cujus baſis GHI, altitudo vero OP, æquales eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: proptereaque triplum hujus priſmatis, nempe priſma, cujus baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadem OP, æquales eſſe 18 pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiam partem ſex pyramidum ejuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet,

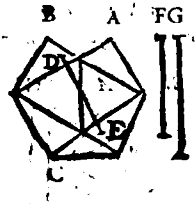
*licet, cujus baſis tertia pars eſt trianguli* GHI, *altitudo vero eadem* OP; *Atque idcirco duo priſmata, quorum unius baſis tripla ſit trianguli* GHI, *altitudo autem* OP, *alterius vero baſis tertia pars baſis* GHI, *& altitudo eadem* OP, *æqualia erunt Icoſaedro in dicto octaedro deſcripto.* Iam *vero, cum duo illa priſmata, octaedro æqualia, ad duo hæc priſmata, Icoſaedro æqualia ſint, per ea, quæ oſtendimus ad propoſ. 7. libr.* 12. *ut baſes priſmatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli* ADE, *continentes (cum unius baſis ſit* ADE, *nempe tres tertiæ partes ipſius* ADE, *complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius* ADE) *ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium decem tertias partes trianguli* GHI, *comprehendentes (cum unius baſis tripla ſit trianguli* GHI *nimirum novem tertias partes ipſius* GHI, *continens, alterius vero baſis tertia pars ipſius* GHI.) *Sint autem ut quatuor tertiæ partes trianguli* ADE, *ad decem partes tertias trianguli* GHI, *aita duæ tertiæ partes ipſius* ADE, *nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipſius* GHI, *hoc eſt, ad dimidium decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipſius* ADE, *ad quinque tertias partes ipſius* GHI, *ita quoque ſint, per ea, quæ demonſtravimus in ſcholio propoſ.* 22. *libr.* 5. *ſex tertiæ partes ipſius* ADE *(hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarum tertiarum unius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant) ad quindecim tertias partes ipſius* GHI *(id eſt, ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum unius baſis complectentes, cum quindecim tertias complectantur.)* Erunt *quoque duo illa priſmata, octaedro æqualia, hoc eſt, ipſummet octaedrum, ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia, nempe ad ipſummet Icoſaedrum, ut duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.* Quo*circa octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.* Quod *erat demonſtrandum.*



215.quinti

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum in Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum conjungentem.



EXHIBEATVR *Icoſaedrum* ABC, *in quo recta* DE, *conjungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem ejus ſit* AC; & F, *ſit latus Icoſaedri,* & G, *latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti.* Dico *proportionem Icoſaedri* ABC, *ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione* F, *lateris Icoſaedri ad* G, *latus cubi,* & *ex proportione triplicata diametri* AC, *ad rectam* DE. *Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit* DE, *diameter Dodecaedri in Icoſaedro* ABC, *deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in* D, & E, *centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis jam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet* ABC: *Dodecaedro diametri* AC, *hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum* ABC, *deſcripto, cum utriusque eadem ſit diameter;* & *Dodecaedro diametri* DE, *intra Icoſaedrum videlicet* ABC, *constructo: Proportio primæ magnitudinis nempe Icoſaedri* ABC, *ad tertiam videlicet ad Dodecaedrum diametri* DE, *ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam,* & *ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib 6. à nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum,* & *Dodecaedri ejuſdem diametri* AC, *ad Dodecaedrum diametri* DE, *in Icoſaedro* ABC, *deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *eadem ſphæra comprehenſum, ſit ut* F, *latus Icoſaedri ad* G, *latus cubi* (a *Nam Dodecaedrum diametri* AC, *ad Icoſaedrum* ABC, *ejuſdem diametri eſt, ut* G, *latus cubi ad* F, *latus Icoſaedri. Convertendo igitur erit Icoſaedrum* ABC, *ad Dodecaedrum diametri* AC, *ut* F, *latus Icoſaedri ad* G, *latus cubi.*) *At vero Dodecaedrum ejuſdem diametri* AC, *ad Dodecaedrum diametri* DE, *in Icoſaedro videlicet* ABC, *deſcriptum, proportionem habeat triplicatam diametri* AC, *ad diametrum* DE, *id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum conjungentem, ex coroll. propoſ. 7. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri* ABC, *ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri* DE, *componi quoque ex proportione* F, *lateris Icoſaedri, ad* G, *latus cubi,* & *ex proportione triplicata proportionis diametri* AC, *ad rectam* D E. *Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam,* &c. *Quod erat demonſtrandum.*

a 11. *quartidecimi.*

THE-

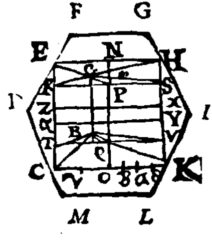
## THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cujus quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſive latere cubi, minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad unum latus convenientium; ſint hujuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, convenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK: His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, a triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona ABCDE, ABK, LI, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, b æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia, per 10. defin. libr. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex hujuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cujus quidem baſis deficit à CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaque parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N O, junctaque recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, &

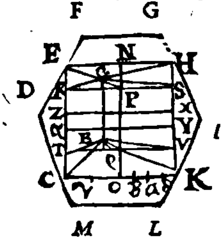
a 4. pri.

b 4. primi.



in

in quam cadunt perpendiculares AP,BQ, demiſſæ in planum EK, ut conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO,AB, AP, BQ, hujus figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit utraque recta AB, PQ, majus ſegmentum lateris cubi NO, vel HK, & utraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu majoris ſegmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propoſ. 17. libr. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque RT, SV, majora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ Pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. a Quoniam autem AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum conjungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, b parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. libr. 1. cum latera unius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus adverſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.



a 33. pri.
b 15. undecimi.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum utriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZYα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; c utriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, d quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH: Æqualis erit pyramis TVXZB, utrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cujus baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, ut demonſtravimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item ejuſdem priſmatis, cujus baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes continet priſma, cujus baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. a quod & baſis TY, duas partes tertias complectatur ba-

c 6 duod.
d 1 ſexti.

ſis TX. Igitur & priſma, cujus baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc priſma oppoſitum priſmati ABTVSR, efficiet priſma æquale ſolido CBKHAE, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX, comprehendẽte, & ex VS, majore ſegmento, ideoque à baſe cubi deficientem rectangulo αX, contento ſub latere cubi αY, & ſub XY, tertia parte minoris ſegmenti VX. Non diſſimili ratione inveſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur hujuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum ejuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine QB, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu majoris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes à baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi: Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurgens parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cujus baſis à baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi, altitudo vero ęqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio majoris ſegmenti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit Dividatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, majus ſegmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abſcindatur βι, æqualis ipſi βγ, ſeu Cγ, ita ut Cγ, vel γβ, vel βι, dimidia pars minoris ſegmenti Cβ, æqualis ſit ipſi QB; & Cι, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento βK, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio majoris ſegmenti; quia βK, major eſt, quam dimidium majoris ſegmenti Cβ. Cum enim ſit, ut CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; ſit autem CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius majus ſegmentum; erit quoque Cβ, minor, quam dupla ipſius βK, hoc eſt, erit βK, major, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniam igitur eſt, ut tota CK, ad majus ſegmentum Cβ, ita majus ſegmentum Cβ, ad minus βK; *b* erit quoque ut CO, dimidia ipſius CL, ad Cγ, vel βι, dimidiam ipſius Cβ, ita Cγ, vel βι, ad βδ, dimidiam ipſius βK; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac

b 15 *quinti*

media ratione, erit majus illius ſegmentum $C\gamma$, vel $\beta\varepsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus ſegmentum ſecabit $\beta\varepsilon$, majus ſegmentum extrema ac media ratione, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritque majus ſegmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\varepsilon$; Ac propterea rurſus $\delta\varepsilon$, minus ſegmentum ſecabit rectam $\delta K$, majori ſegmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit $\varepsilon K$. Deficit igitur $C\varepsilon$, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi $CK$, minore ſegmento $\varepsilon K$, rectæ $\delta K$, vel ſibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſive lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cujus & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens quam cubus. altitudo vero à latere cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto jam parallelepipedo adjungatur poſterius parallelepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, imo vero alter cubus, ut demonſtratum eſt.

## THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

*IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta conjungens centra baſium oppoſitarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cujus diameter DE, in eadem ſphæra cũ Icoſaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis jam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE: & Icoſaedro ejuſdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5. libr. 6. à nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, deſcripti ſecundæ magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. [a] Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum ejuſdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cujus ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F. lateris cubi ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.*

*[a] 11. quartidecimi.*

media ratione, erit majus illius ſegmentum $C\gamma$, vel $\beta\varepsilon$, & minus $\beta\delta$. Quare & $\beta\delta$, minus ſegmentum ſecabit $\beta\varepsilon$, majus ſegmentum extrema ac media ratione, ut demonſtravimus ad propoſ. 5. lib. 13. eritque majus ſegmentum $\beta\delta$, minus autem $\delta\varepsilon$; Ac propterea rurſus $\delta\varepsilon$, minus ſegmentum ſecabit rectam $\delta K$, majori ſegmento $\beta\delta$, æqualem, extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit $\varepsilon K$. Deficit igitur $C\varepsilon$, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi $CK$, minore ſegmento $\varepsilon K$, rectæ $\delta K$, vel ſibi æqualis rectæ $\beta\delta$, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmentum minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum cubum, à baſe cubi deficere rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi; altitudinem vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit. Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſive lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallolepipedo, quo cubum à Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cujus & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens quam cubus. altitudo vero à latere cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto jam parallelepipedo adjungatur poſterius parallelepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, imo vero alter cubus, ut demonſtratum eſt.

## THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam cen-

centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

*IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta conjungens centra baſium oppoſitarum DE; At vero F. latus cubi, & G. latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in centris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cujus diameter DE, in eadem ſphæra cũ Icoſaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato deſcribetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis jam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE: & Icoſaedro ejuſdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem; componetur per ea, quæ ad defin. 5. libr. 6. à nobis ſunt demonſtrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, deſcripti ſecundæ magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC, deſcriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icoſaedrum ejuſdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cujus ſcilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F. lateris cubi ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 11. *quartidecimi.*

## THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris ejuſdem cubi, altitudo denique à latere ejuſdem cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quę dimidiati lateris cubi ejuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejuſdem ſegmentū minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſive lateri ejuſdem cubi ſint æquales.

QVONIAM in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadem pyramide eſt deſcriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua deſcribitur, nona pars eſt, a cum pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. hujus lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta eſt in verbis propoſitionis hujus; non obſcurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

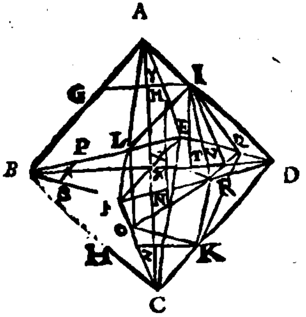
*a 25. ſextidec.*

## THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cujus baſis eſt quadratum lateris Icoſadri, altitudo vero majus ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

*OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrum, ſit* A B CDEF, *repetita figura propoſ. 16. libr. 15. ubi demonſtratum eſt, viginti triangula* Icoſaedrum *inſcriptum componentia eſſe IOR*, KQR, GIL,

GIL, GIM, GPS, HPS, OHK, NHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ. IMQ. GLS. HOS, KOR, ILR, *quorum octo poſtrema octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet omnia ejus latera extrema ac media ratione; Item rectam* IT, *perpendicularem ad* BD, *æqualem eſſe majori ſegmento XY, ſemidiametri AX.* Dico *octaedrum* ABC, DEF, *ſuperare Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cujus baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri* QR, *altitudo vero* IT, *majus ſegmentum ſemidiametri* AX. *Cum enim in quatuor baſibus Octaedri* DEA, DFA, DEC, DFC, *angulum ſolidum Octaedri* D, *conſtituentibus poſita ſint quatuor baſes Icoſaedri* IMQ, ILR, KNQ, KOR, *remanebunt juxta angulum ſolidum* D, *in eiſdem quatuor baſibus Octaedri quatuor triangula* IQD, IRD, KQD, KRD, *quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri* QIR, KQR, *& commune triangulum* DQR, *conſtituentur duæ pyramides ſuper communem baſem* DQR, *nempe* IDQR, KDQR, *inter ſe æquales, per coroll. propoſ. 5. lib. 12. cum earum altitudo ſit recta eadem* IT, *majus videlicet ſegmentum ſemidiametri Octaedri.* (*Nam quemadmodum* AX, *ſecta eſt à recta* GI, *in* Y, *extrema ac media ratione, ita quoque ſecta eſt* CX, *à recta* HK, *in* Z. *Quare ſi ex* K, *ad* BD, *perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis* KDQR, a *erit ea æqualis rectæ* ZX, *majori ſegmento ſemidiametri* CX, *hoc eſt, ipſi* IT) *Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptum conſiſtunt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinque angulos octaedri conſtituentur bina pyramides & inter ſe, & dictis duabus æquales extra Icoſaedrum prædictum: ita ut Octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum* DQR, *dimidium eſt quadrati lateris* DQ (*Cum* DQ, DR, *rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum*) *erit recta* QR, *diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius* QR, *duplum erit quadrati lateris* DQ: *ideoque quadruplum trianguli* DQR. *Priſma igitur, ſive parallelepipedum, cujus baſis quadratum rectæ* QR, *& altitudo* IT, *quadruplum quoq; erit priſmatis, cujus baſis triangulum* DQR, *& altitudo eadē* IT, *per ea, quæ demonſtravimus ad propoſ. 7. libr. 12. Priſma autem, cujus baſis* DQR, *& altitudo* IT, *triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 1. pyramidis*



a 34. pri.

IDQR,

*ID QR, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedum, cujus baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadrupla ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrum ambientes; Æquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cujus baſis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo IT, majus ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cujus baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.*

### COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cujus baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri conjungens. Cum enim ex demonſtratis propoſ. 19. libr. 15. conſtet, ſi Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icoſaedrum imponatur, Icoſaedrum eidem Pyramidi eſſe inſcriptum: a Octaedrum autem ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cujus baſis quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo vero majus ſegmentum ſemidiametri Octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, ut Octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis; cui inſcribitur (b quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti Octaedri) ſuperet duplum Icoſaedri in Octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cujus baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, conjungens biſarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata à nobis in ſcholio propoſ. 14. libr. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cujus baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramidis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

a 31. *ſexti.*

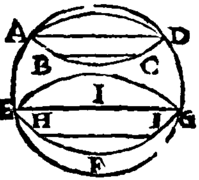
b 21. *ſextidec.*

## DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIUM deſcriptione in data ſphæra ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem à ſphæra comprehendi, nova demonſtratione confirmavit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cum ejus ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lẽmata nonnulla præmittenda ſunt, quorũ aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſii demonſtrantur, nõ tamen mẽ propterea ordinem Euclidis pervertere cenſeri poſſumus: quippe cũ propoſitiones ſphæricorũ elementorum, q b. hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant: ut commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. Incitandis autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

## L E M M A. I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataque in uno eorum linea recta; ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam.



IN ſphæra ſint duo circuli paralleli ABCD, EFG: ſitque primum
in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter pa-
rallela. Ducatur ut in ſcholio propoſ. 18. libr. 11. docuimus per di-
ametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, a faciens in ſphę- a 1. 1. *Theo.*
ræ ſuperficie circulum AEGD. Quoniam igi-
tur circulus AEGD, circulum ABCD, bifari-
am, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus
AEGD, maximus, tranſibitque per polos cir-
culi ABCD, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 1.
Theod. ac proinde & per polos circuli EFG.
b cum paralleli eoſdem polos habeant: c id- b 1. 2. *Theo.*
eoque cum bifariam ſecabit. Communis ergo ſectio EG, eius dia- c 15. 1. *The.*
meter erit: d quæ cum ſit ipſi AD, parallela, patet propoſitum. d *16. unde.*

*DEINDE in circulo* ABCD, *data recta BC, non ſit eius dia-* e 31. *pri.*
meter, cui ducenda ſit diameter parallela in circulo EFG. e Ducatur ipſi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD: cui in circulo EFG ducatur diameter parallela EG, ut proxime oſtendimus. Quoniam igitur utraque BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex
conſtructione, f ipſę quoque BC, EG, inter ſe parallelæ erunt. Quod
eſt propoſitum. f 9. unde-
EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallelæ *dec.*
HI, à diametro EG, diverſa quæ ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, major non ſit diametro EG. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BG, parallela HI, & æqualis, ut propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod jubetur.

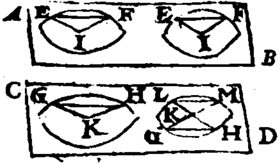
## L E M M A II.

SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abſcindant arcus ſimiles:

erunt

**erunt duæ rectæ conjungentes extrema unius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro conjungunt.**

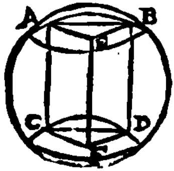
IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus ſimiles *EF, GH*, ac tandem jungantur ad centra rectæ EI, FI, G*K*, *H*K. D*ico* tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas eſſe. Quoniam enim arcus EF, GH, ſimiles ſunt, erunt anguli IK, æquales, ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. *a* Igitur reliqui
a 32. *primi* anguli *E*, F, reliquis angulis G, H,
b 5. *primi.* æquales erunt. *b* Cum ergo tam illi, quam hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ *E*F, GH, parallelæ ſunt, & rectæ EI, GK, ad eaſdem partes plani per EF, GH, ducti efficiunt cum ipſis æquales angulos *E*, G; erunt ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 11. demonſtravimus, *E*I, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.



DEINDE ſint EF, GH parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum I, K. *D*ico tam EI, H*K*, quam FI, G*K*, eſſe parallelas. Productis enim GK, HK, jungatur recta *LM*. *E*t quia latera GK, HK, lateribus
c 14. *pri.* LK, MK, ſunt æqualia *c* anguloſque ad verticem K, æquales con-
d 4. *primi.* tinent: *d* erunt & baſes GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli
e 28. *tertii* G, *M*. *e* Igitur arcus GH, LM, æquales ſunt, *f* & rectæ GH, LM, inter
f 27. *pri.* ſe parallelæ: Ac proinde cum utraque EF, LM, ipſi GH, ſit paralle-
g 9. *undecimi.* la, *g* erunt & EF, LM, parallelæ inter ſe. Quia igitur EF, LM, parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles *E*F, *LM*. (Nam cum arcus GH, ſit arcui *EF*, ſimilis, erit quoque arcus LM. Nam cum arcus GH, ſit arcui *EF*, ſimilis, erit quoque arcus L*M*, qui arcui G*H*, æqualis eſt, eidem arcui EF, ſimilis) erunt tam EI, LK, hoc eſt, EI, HK, quam FI, MK, hoc eſt, FI, GK, parallelæ. Quod eſt propoſitum.

## LEMMA III.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes conjungentes, æqualesquoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.



IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ AB,CD, ad eaſdem partes centrorum, quarum extrema jungantur ad eaſdem partes rectis AC,BD. Dico rectas AC,BD, æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB,CD, parallelæ ſunt: *a* erunt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. a 7. *undec.* Quare cum *AB* C*D*, ſint etiam æquales: *b* æquales quoque erunt ac parallelæ AC,BD, quod eſt primum. b 33. *pri.*

EX centris deinde E,F, ductis rectis EA,EB,FC,FD, junctaque recta EF: erunt iam *AE*, CF, quam *BE*, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. *c* Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. c 33. *primi.* *d* Quoniam vero circuli AB,CD, paralleli circa eoſdem polos ſunt, d 1. 2. *Theo* *e* recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorundem recta erit. e 10. 1. *The* Quocirca recta *EF*, eorum centra conjungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta per eorum polos extenſa, quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune EF. f 10. 1. T*he.* *f* Igitur EF, ad plana circulorum AB,CD, recta eſt: *g* Ac propterea & utraque AC,BD, ipſi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum. g 8. *undec.*

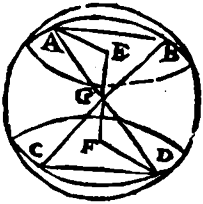
HÆC demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, ſunt circulorum diametri, ſed tunc EA,EB,FC,FD, erunt partes diametrorum, ut patet.

## LEMMA IV.

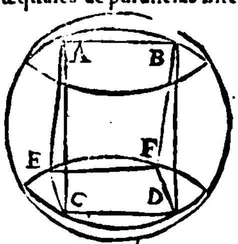
SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes conjungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales; Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

*IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB,CD, & in iis* ductæ rectæ parallelæ & æquales AB, CD, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes jungantur rectis AD,BC. Dico rectas A*D*,BC, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quo-

*a 7. undec.* Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt: *a* erunt AD, BC, in eodem
cum ipſis plano: ac proinde ſe mutuo interſecabunt, ut in puncto
H: quod dico eſſe centrum ſphæræ. Connectantur enim circulo-
rum centra E, F, rectis EA, EG: FD, FG.
*b 15. primi* *b* Et quia anguli AGB, CGD, ad verti-
*c 29. pri.* cem æquales ſunt: *c* Item tam alterni
anguli BAD, CDA: quam alterni ABC,
*d 4. primi.* DCB: æquiangula erunt triangula ABG,
CDG. *d* Igitur erit ut AB, ad BG, ita DC,
ad CG. Item ut AB, ad AG, ita DC, ad
*e 14. quinti.* DG. Cum ergo AB, CD, ponantur æ-
quales, *e* erunt quoque tam BG, CG,
quam AG, DG, inter ſe æquales. Rurſus
*f 29. pri.* quia AE, DF, ſemidiametri circulorum æqualium æquales: ſunt
autem ex 2. lemmate & parallelæ, *f* ideoque anguli alterni EAD,
*g 4. primi.* FDA, æquales: erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD
*h 7. undecimi.* DG, æqualia anguloſque comprehendent æquales. *g* Igitur &
baſes EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales ſunt. *h* Et quia AD,
*i2. undecimi.* in eodem plano eſt, in quo parallela AE, DF: *i* & EG, FG, in eodem
plano, in quo AD, AE, DF: erunt EF, FE, in rectum & continuum
conſtitutæ propter æquales angulos AGE, DGF, ut ex Proclo ad
propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta conjungens centra
*k 10. 1. Theod.* circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, ut in præ-
cedenti lemmate demonſtravimus, *k* perpendicularisque ad eorum
*l 6. 1. The.* plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales ſint oſtenſæ, erit F, centrum
ſphæræ, *l* propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter à cen-
tro ſphæræ abſunt: inæqualiter vero abeſſent, ſi centrum ſphæræ
in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC,
diametri ſphæræ ſūt, & inter ſe propterea æquales quod eſt primū.



SED jam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad
eaſdem partes jungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, &
æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BCD,
DCA, eſſe rectos. Quod enim ſint pa-
*m 33. pri.* rallelæ & æquales, *m* manifeſtum eſt,
cum extrema puncta parallelarum æ-
qualium conjungant. Quod autem ad
AB, CD, ſint perpendiculares, ita oſten-
detur in circulo CD, ad rectam CD, ex-
citentur perpendiculares CE, DF, jun-
ganturque EF, AE, BF. Quia igitur an-
guli ECD, FDC, recti ſunt, erunt ex
ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi, ac proinde
*n 31. tertii.* & reliqui arcus, EFD, CEF, ſemicirculi erunt, *n* & anguli EFD, CEF,
recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, æ-
qua-



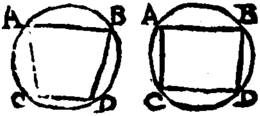
quales ſunt, *a* ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate *A*E, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad utramque EG, EA, & ad utramque F*D*, FB; ut oſtendimus, *b* perpendciularis erit & ad planum trianguli *A*EC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: *c* ac propterea & CD, *A*B, ipſi E*F*, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt: ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, A*B*D, BDC, DC*A*, recti erunt. Quod eſt ſecundum.

a 9. *undec.*
b 4. *undec.*
c 8. *undec.*

## L E M M A. V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes conjungentes, æquales inter ſe erunt: Et ſi parallelæ fuerint æquales, conjungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosque cum ipſis angulos conficient.

*SINT in ſphæra duæ parallelæ A*B, CD, *quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis* AC, B*D*, *Dico* AC, BD, *æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt* A B, CD, d *erunt* AC, BD, *in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, e fiat in ſphæra circulus* ABDC, *in quo cum parallelæ ſint* AB, CD: *erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus* AC, BD, *æquales:* f *ideoque & rectæ* AC, BD, *æquales erunt. Quod ſi parallelæ* AB, CD, *fuerint æquales, ita ut quadrilaterum* AB*D*C, *in circulo habeat duo oppoſita latera A*B, CD, *parallela, & æqualia: erit ex ſcholio propoſ. 31. lib 3.* ABDC: *parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli* A, B, *D*, *C*, *recti erunt. Quod eſt propoſitum.*



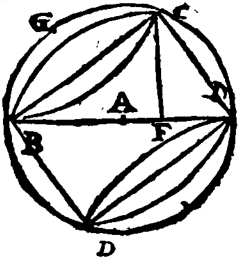
d 7. *undec.*
e 1. 1. *Theo.*
f 29. *tertii.*

## LEMMA VI.

IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita ut diameter ſphæræ ſit utriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT ſphæræ centrum *A*, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCD*E*, cujus diameter BD, ex coroll. 1. propoſ. 1. libr. 1. Theod. Secta autem *BD*, in F, ut BF, ipſius FD, dupla ſit: erit BD, talium partium 3. qualium 2. eſt B *F*: ac proinde B D, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque F*C*, ad B D, perpendiculari, jungantur rectæ BC, DC, ductaque DE, ipſi BC, parallela, connectatur

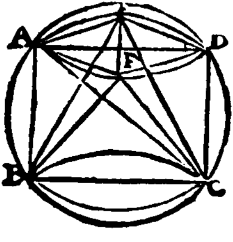
recta BB. *a* Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quam duo
a 29. *pri.* BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt: *b* eſtque tam BCD, quam
b 31. *tertii.* BED, rectus: erit quoque & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio propoſ.34.lib.*1*. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum eſt:
c 34. *primi* *c* ideoque rectæ BC, DE, æquales ſunt. Diviſo jam arcu BC, biſariam in G, erit quoq; arcus EGD, diviſus biſariam in G, quod ex ſcholio propoſ.27.lib.3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & intervallis GB, GE, circuli in ſuperficie ſphęrę deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam ar-
d 2.2 *Theo.* cuum GB GC, quam GE, GD: *d* qui
e 15.1. *Theo* paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos. *e* Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED, biſariam: erunt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cum ęquales ſint oſtenſæ; erunt & circuli BC, ED, ęquales. Dico diametrum ſphæræ BD, ad utramque diametrum BE, ED, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8 lib.6. tres rectę DB, BC, BF, continue proportionales ſunt: erit ex coroll. propoſ.20.lib.6. ut BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Eſt autẽ BD, ipſius BF, ſeſquialtera, ut oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD; quadrati ex BC; atque adeo & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ BD, utriuſque diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt, quod eſt propoſitum.



HIS demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

## PROBL. 1. PROPOS. 1.

### IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.



DESCRIBANTVR *in data ſphæra, ex lemmate 6 duo circuli* AD, BC,
*æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ; & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD,
f 15.1. The. *f qui eos ad angulos rectos, ac biſariam ſecabit, ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *ſecans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, *FB, FC.* *Dico* EBCF, *eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula*

*gula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA, erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, ut conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli: ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC, a æquale ſit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex DC, DF: b quibus cum æquale ſit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit: erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea que quadrati ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis. ideoq; BCF, triangulum eſt æquilaterum.*

a 47. pri.

b 47. primi

*RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum: eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: c quibus cum æquale ſit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit: duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, propterea q; recta CE, rectæ AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atque adeo & rectæ CF, quæ ipſi BC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin. 20. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cum ejus anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant quod eſt propoſitum.*

c 44. pri.

## COROLLARIVM.

HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Nam latus pyramidis eſt æquale diametro AD, ut oſtendimus, & ex conſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diametri AD.

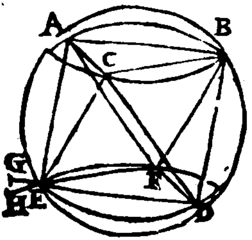
## PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo cira 2. quarti

b 47. pri.

culi æquales & paralleli ABC,DEF, ita ut ſphærę diameter diametri cujuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera. a Deſcripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur per primum lemma, rectæ AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diverſas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt ſingula ejus latera ſingulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex ſcholio propoſ.16.lib.11. Cum enim parallelæ ſint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G,H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ ſint AB, GE, & BC, EH, ad eaſdem partes plani per AB, GE, ducti; erunt quoque BC, HE, hoc eſt, BC, EF, parallelę, ex illo ſcholio propoſ.16.lib.11. Eadem ratione parallela erit DF, ipſi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, ut in figura. Dico AD, octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ AB, DE, æquales ſunt & parallelæ ad diverſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ junctæ AD, BE (quas tamen confuſionis vitandæ gratia non duximus) diametri ſphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipſas AB, DE. b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Poſito autem quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. quadratum ex DE. eſt 3. (Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli DEF: poſito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF 4. At poſito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, eſt 3. quod ex corollar.1. propoſ.12.libr.13 diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri) Igitur & quadratum ex BD, eſt 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia ſunt, & rectæ ipſæ DE, BD, æquales. Eſt autē DE, ipſi AB, per conſtructionem, & BD, ipſi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, conſtituentque quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti ſint ex eodem 4. lemmate.



RVRSVS quia BC, EF, parallelæ ſunt & æquales ad diverſas partes centrorum: erunt quoque junctę rectæ BE, CF, non ad eaſdem partes diametri ſphærę, ex 4. lemmate, & rectæ BE, CE, æquales

les inter ſe, atque ad *B*C, EF, perpendiculares, eritque rurſus, ut prius, quadratum BCEF. Non aliter oſtendemus ACDF, quadratum eſſe: cum junctæ rectæ AD, CF, ſint quoque ſphęrę diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, B*E*, CF, conſtructa ſint ſuper latera æqualia A*B*, BC, CA, nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cum AB, latus ſit quadrati AD; & BC, quadrati B*E*; & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, C*A*E, BCD, D CB, BF*A*, AF*E*, EFD, DFB, æquilatera, & inter ſe æqualia Octaedrum ergo eſt AD, ex defin. 27. libr. 11. & in data ſphæra deſcriptum, cum ejus anguli ſolidi A, B, D, E, C, F, ſphęrę ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.

### COROLLARIVM.

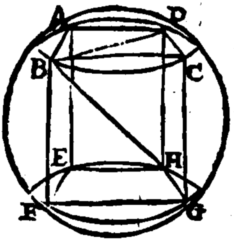
COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplum eſſe lateris Octaedri in ea ſphæra deſcripti Demonſtratum enim eſt, quadratum ex BE, diametro ſphæræ duplum eſſe qu*b*drati ex DE, latere Octaedri.

## PROBL. 3. PROPOS. 3.

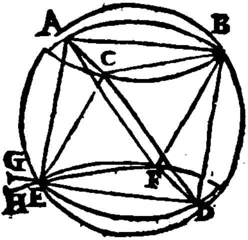
### IN data ſphæra cubum deſcribere.

DESCRIBANTVR *ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac paralleli A*BC*D*, EFG*H*, *quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ.* a Deſcripto *autem quadrato* ABCD, *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lemma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFG*H*, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt ſingula ejus latera ſingulis lateribus quadrati A*BCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum A* D, E*H*, *æqualitatem: parallela vero, ex ſcholio propoſ.* 16. *lib.* 11. Nam *quia parallelæ ſunt A*D, E H, *ſuntq; anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per A*D, EH, *ducti, & ſic de cæteris. Iungantur deniq; ad eaſdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma* 3. *ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico* AG, *eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera A*B*CD*, *E*FG*H*, *A*DH*E*, BCGF, AB*FE*.*C*D*H*G, *eſſe quadrata, & æqualia,* D*uctis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate* 4. BH, *diameter ſphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABC*D*, *quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex* BH, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* B *D*; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex ſcholio propoſ.* 47. *libr.* 1. *ſi ſtatuatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadratum ex* BD, 2. *& quadratum*

a 6.*quarti*



*dratum ex* DC, 1. *atque adeo quadratum ex* BH. *quadrati ex* DC. a 47. pri. *triplum erit. Rurſus quia quadratum ex* BH, *eſt* 3. *& quadratum ex* BD, 2. a *eſtque quadratum ex* BH, *æquale quadratis ex* BD, DH, *quod angulus* BDH, *ex defin. 3 lib. 11. rectus ſit, erit quadratum ex* DH, 1. *Quadratum igitur ex* BH, *triplum eſt quadrati ex* DH. *Fuit autem idem quadratum ex* BH, *triplum quadrati ex* DC. *Æqualia ergo ſunt quadrata ex* DC, DH. *ac proinde rectæ* DC, DH, *æquales. Cum ergo oppoſitis lateribus* GH, CG, *æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo* CH. *Cum igitur & anguli recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit* CH. *Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata oſtendentur: Sed & AC, EC, quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt AG, ex defin. 25 lib. 11. & in data ſphæra deſcriptus cum ejus anguli ſolidi,* A, B, C, D, E, F, G, H, *ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.*



## COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ BH, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum; quia videlicet circulus ABCD, hujus figuræ æqualis eſt circulo ABC, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 21.

## PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

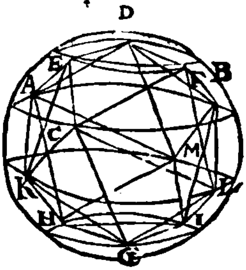
b 12. ſex. REPERIATVR b *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ data, ut pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti:* Fiatq; *ex coroll. propoſ. 6. lib. 10. ut numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius cujuſdam lineæ, ad cujus intervallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur.* Hoc *autem facili negotio ita fiet.* c 1. quinti *Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,* c *accommodetur in eo recta, quæ inventæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ ſive illius circuli maximi, ut infra probabitur.* Nam *ſi per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maxi-* d 1.1. Theo. *mum,* d *faciet id circulum* ABC, *in ſphæra, cujus ſemidiameter, ex con-*

*conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inventæ. Deinde inveniatur* a *rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæræ diameter, ut pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti*; *Fiatque ut* 3. *ad* 1. *ita per coroll. propoſ.* 6. *lib.* 10. *quadratum rectæ inventæ ad quadratum alterius lineæ, ad cujus intervallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo* ABC, *parallelus: quo fiet ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inventæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propoſ.* 1. *lib.* 4. *demonſtravimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ.* 18 *lib.* 11. *Nam per idem ſcholium planum hoc erit circulo* ABC, *parallelum,* b *facietq; in ſphæra circulum* DEF, *cujus ſemidiameter ſemidiametro inventæ æqualis eſt.* His *duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alii duo æquales ac paralleli deſcribantur* GHI, KLM, *quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.* c Deſcripto *autem in circulo* DEF, *triangulo æquilatero* DEF, *ducatur lateri* EF, *in parallelo circulo* ABC, *ex lemmate primo, recta linea* AB, *ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit uni lateri trianguli æquilateri in circulo* ABC, *deſcripti:* Item *huic* AB, *agatur ex altera parte centri, parallela* KL, *in circulo* KLM, *& æqualis:* Ac *denique huic* KL, *in circulo* GHI, *ducatur ex altera parte centri, parallela* HI, *& æqualis ipſi* EF, *hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo* GHI, *deſcripti.* Completis *ergo triangulis æquilateris* ABC, KLM, GHI, *erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli* DEF, *parallela; nimirum* AC, ML, GH, *ipſi* DE; *at* BC, MK, GI, *ipſi* DE, *quod probabitur ex ſcholio propoſ* 16. *libr* 11 *ut in problemate ſecundo oſtenſimus parallelas eſſe* BC, EF, *ad diverſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis* ABC, KLM, *ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notavimus. Poſtremo ex quolibet* 12. *punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto* D, *rectæ* DE, DA, DM, DB, DF; *ex* G, *rectæ* GH, GK, GC, GL, GI, *&c. ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis.* Dico DG, *eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula* DEF, DEA, D*A*M, DMB, DFB, *&c. eſſe æquilatera, & æqualia.* Quod *ut demonſtretur, oſtendendum prius eſt,* Icoſaedrum *in ſphæra deſcriptum* (*poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum,* Euclides *docuit propoſ.* 16.

a 12. *ſexti.*

b 1. 1. *Theo.*

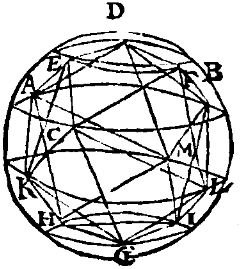
c 2. *quart.*



*lib.13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulis in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notavimus.*

SIT *igitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum* DG, 12. *angulos ſtatuens in punctis* D, E, *A*, K, *H*, G, I, *L*, B, F, M, C. *Et quia 5. recta* DE, *DA*, D*M*, DB, *DF*, *æquales ſunt, cum ſint latera triangulorum æquilaterorũ æqualium; ſi ex polo* D, *per* E, *in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta* A, *M*, B, F *: ac propterea pentagonum* E*A*M*B F*, *in uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo ejus latera ſint æqualia, utpote latera* Icoſaedri, *erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit* AK, CFD, *ob quinq; rectas æquales* EA, EK, EC, EF, ED *: Et* KHMD*E*, *ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia* *A*K, *A H*, *A M*, AD, AE *: Et* HGCEA, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* K*H*, KG, KC, KE, KA *: Et* GIMAK, *ob latera quinque* Icoſaedri *æqualia* *H*G, HI, *H*M, HA, HK *: Et* ILCKH, *ob quinque rectas æquales* *GI*, GL, GC, GK, GH *: Et* LB*M*HG, *ob rectas quinque æquales* I*L*, *I*B, IM, IH, *IG* *: Et* BFCGI, *ob quinque rectas æquales* L*B*, LF, LC, L*G*, LI *: Et* FD*MIL*, *ob quinque rectas æquales* BF, *BD*, B*M*, *BI*, *BL* *: Et* DECLB, *ob rectas quinque æquales* FD, FE, FC, FL, FB; *Et* DAHIB, *ob quinque latera Icoſaedri æqualia* MD, MA, MH, *MI*, *MB*. *Ac tandem* GLFEK, *ob quinque Icoſaedri latera æqualia* CG, CL, CF, CE, CK, *ita ut 12. pentagona æquilatera, æquiangulaq; inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, ut in ſcholio propoſ. 8. libr. 13. demonſtravimus; erit juncta recta* AB, *ipſi* EF, *parallela in pentagono* EAMBF*: &* AC, *juncta ipſi* *DF*, *parallela in pentagono* AKCFD*: Et* BC, *juncta parallela ipſi* DE,
a 15. undec. *in pentagono* DECLB. a *Plana ergo per rectas* DE, EF, *&* CB, B*A*,
b 1.1. Theo. *ducta parallela ſunt*, b *faciuntque circulos parallelos in ſphæra* DEF, ABC. *Eodem modo erit juncta* KE, *ipſi* HI, *parallela in pentagono* ILCK*H* *: Et juncta* KM, *ipſi* GI, *in pentagono* GI*MA*K *: Et* LM, *juncta ipſi* GH, *in pentagono* I*B*MGH *: Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt* GH*I*, K*L*M. *Non aliter erit* AB *juncta ipſi* HI, *parallela in pentagono* DAHIB *: Et juncta* KL, *ipſi* EF, *in pentagono* GLFEK.
c 9. und. c *Igitur* EF, *H*I, *cum ſint eidem junctæ* AB, *vel* KL, *parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt, Eademq; ratione* DE, GI, *cum ſint eidem junctæ* BC, *vel* KM, *parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea que plana cir-*

*cu.*



*culorum* DEF, GHI, *per rectas* DE, EF, *&* HI, GI, *ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra* DEF, ABC, KLM, GHI, *paralleli inter ſe ſunt: & tam circuli* DEF, GHI, *inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia, quam circuli* ABC, KLM, *inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex junctis* AB, BC, CA; *&* KL, LM, MK, *conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.*

*QUIA vero juncta recta* KB, *quæ connectit non ad eaſdem partes extrema* K, B, *parallelarum* KL, AB, *in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus* BAK *rectus ex* 4. *lemmate, quod* KA, *connectat ad eaſdem partes extrema* K, A, *earundem parallelarum;* a *erit quadratum diametri* KB, *æquale duobus quadratis ex* AB, AK. *Rurſus quia in* a 47. *pri.*
*pentagono* EAMBF, *recta juncta* AB, *angulum* AMB, *ſubtendit: Ut autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis* 2. *lib.* 14. *erit* AB, *juncta ad* EF, *vel* AK, *ipſi* EE, *æqualem, ut hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco* b b 10. *tertii*
*cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in* *dec.*
*eodem circulo deſcriptorum: erit diameter ſphæræ* KB (*quæ ambas* AB, AK, *poteſt, ut oſtendimus*) *latus pentagoni in eo circulo, in quo* AB, *latus eſt hexagoni, &* AK, *vel* EF, *latus decagoni. Quare ſphæræ diameter* KB, *ad junctam* AB, *proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad* EF, *eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni.* c *Ac proinde cum tam* AB, *latus trianguli* c 12. *tertii*
*æquilateri in circulo* DEF, *potentia triplum ſit ſemidiametri ſui cir-* *dec.*
*culi; erunt circuli* DEF, ABC, *ac proinde &* GHI, KLM, *qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inventa, minorem eſſe diametro ſphæræ, ut ſupra diximus.*

*HIS demonſtratis facili negotio includemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam* DG, *eſſe Icoſaedrum, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cujus baſis triangulum* DEF, *omnes ejus anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.*

## COROLLARIUM I.

CONSTAT ex his ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeo ut ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro D G, in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphæræ KB, ad EF, latus Icoſaedri, ut latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icoſaedri majus eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni majus eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum uno latere pentagoni triangulum Iſoſceles conſtituant. a 22. primi *a* ac propterea duo latera decagoni majora ſint latere pentagoni, ideoque unum latus decagoni majus dimidio lateris pentagoni.

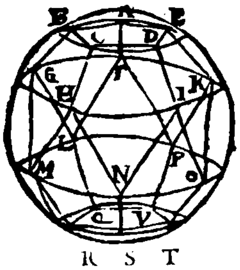
## COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti. Quoniam enim eſt, ut latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, deſcriptorum, ita diameter ſphæræ KB, ad junctam AB, ex conſtructione: erit permutando, ut latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad junctum AB. b 12. *tertii dec.* *b* Eſt autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc eſt, ſemidiameter) potentia ſubtriplum rectæ junctæ AB, quod AB, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo ABC, deſcripti.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

### IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.

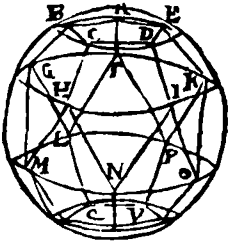
DESCRIBANTVR in data ſphæra quatuor circuli *paralleli, ut* in antecedenti propoſitione ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita ut ſemidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, ſint potentia ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, ut pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri vero circulorũ FGHIK, LMNOP, potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, ut pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur ejus lateri CD, ad eaſdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni ejuſdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem HI, ad diverſas partes centrorum agatur eodẽ modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad eaſdem centrorũ partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autẽ pentagonis in hiſce tribus circulis (quorum tamen latera, ut confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantum extrema puncta notavimus) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni



ABC-

ABCDE, parallela,eo ordine,quo lateri CD, parallelæ ductæ ſunt; quod demonſtrabitur, ut in problemate ſecundo oſtendimus, parallelas eſſe BC,EF,nimirum HG,PO,TV, latera juncta,parallela erunt ipſi BC,&c. Poſtremo ex quolibet viginti punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ,ut in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe,hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE,DEKOI,OINST,STVQR,QRMGL,GLFAB,AFPKE,KPVTO,RSNHM,FLQVP,CDINH,BCHMG, æquilatera eſſe æquiangula,& æqualia. Quod ut oſtendatur, demonſtrandum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum ( poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi,docuit Euclides propoſitione 17. lib.13.) ſuos viginti angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis,quos deſcripſimus,quinos videlicet in ſingulis circulis, atq; in eo ſitu,quo eadem viginti puncta notavimus.

SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuens in punctis A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R, S, T,V. Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat,ut in ſcholio propoſ.8. libr.13.demonſtravimus,erit juncta GH,lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & juncta HI,lateri CD,in pentagono CDINH; & IK,lateri DE,in pentagono DEKOI; & KF,ipſi AE, in pentagono AEKPF: & FG,ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB,AE,rectis FG,FK, parallelæ ſunt; a erit & planum per FG,FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, a 15. *undec*
AE,ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG,GH,ductum, quod hæ rectæ rectis AB,BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſitionis 16.lib.11. plana per FG,FK,& per FG, GH, ducta,inter ſe parallela ſunt,cum eidem plano pentagoni ABCDE,ſint parallelæ; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conveniant in recta FG,unum planum efficient. Non aliter oſtendemus,planum quoque per FK,FI, & planum per KI,IH,& planum per IH,HG,cum plano per FK, FG, ducto unum planum efficere. Plana igitur per puncta A,B,C,D,E, & per puncta b 1.1. *Theo.*
F,G,H,I,K, ducta in ſphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE,FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q,R,S, T,V, & per puncta L,M,N,O,P,ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE,QRSTV,quam duo FGHIK,LMNOP,inter ſe æquales,ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV,& ob rectas FG,GH,HI,IK,KF: LM,MN,NO,OP,PL. c c 4. *primi.*
quæ omnes æquales ſunt, cum ſubtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.



DEINDE quia ex ſcholio propoſ.8.lib.13.rectæ junctæ N D, M B
a9. undec. lateri C H, parallelæ ſunt in pentagonis, C H N I D, B G M H C; a erunt
quoque ipſæ junctæ N D, M B, parallelæ: Sunt autem & æquales
b33. primi. quod æquales angulos in pentagonis
æqualibus ſubtendant. b Igitur &
junctæ N M, B D, æquales erunt ac parallelæ.
Eodem modo æquales erunt
& parallelæ, junctæ N O, C E, cum cō-
nectant duas N O, E O, æquales ac parallelas,
quod utraq; lateri D I, ſit parallela.
c Circulus igitur L M N O P, circulo
c15. undec. culo A B C D E, parallelus eſt, cum ille
ducatur per rectas N M, N O, hic vero
per rectas B D, C E, quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus
oſtendentur paralleli circuli Q R S T V, F G H I K. Omnes ergo quatuor
circuli paralleli ſint.

RVRSVS quoniam junctæ rectæ E F, O V, cum ex ſcholio propoſ.8.
libr.13. lateri P K, in pentagonis A E K P F, T V K P O, æquidiſtent,
d9. undec. d parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quod angulos
e33. primi. æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant, e erunt & rectæ junctę
f7. undec. E O, F V, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo E F V O, in uno
g1.1. Theo. plano eſt, f cum E F, O V, in eodem ſint plano cum parallelis E O,
F V. Eſt autem & in circulo, g proptereaquod planum in quo exiſtit,
in ſphęra circulum efficit. Igitur ex iis, quæ ad propoſ.31. lib.
3. demonſtravimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia
ſint, quadrilaterum rectangulum eſt E F V O; ac proinde cum omnia
latera ęqualia ſint, ſubtendentia angulos æquales in pentagonis
æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo ejus diameter F O, duplum
poteſt lateris F E, ex ſcholio propoſ.47.libr.1 hoc eſt, rectæ
junctæ F G, quod æquales ſint F G, F E, ſubtendentes angulos pentagonorum
ęqualium: ideoque qualium partium 1 ſtatuetur quadratum
rectæ F G, talium 2. erit quadratum rectæ F O, & ambo quadrata
h47. primi drata ſimul earundem partium 3. Quibus h cum ęquale ſit quadratum
junctę rectæ O G, quę diameter ſphærę eſt (Nam cum æquales
ſint junctæ F G, O N, ſubtendentes ęquales angulos pentagonorum,
& inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis A B, S T, parallelæ ſint, ex
ſcholio propoſ.8.lib.13. erit ex lemmate 4. juncta recta O F, ad F G,
i12. tertii perpendicularis, & O G, diameter ſphęrę) erit quoque quadratum
dec. diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectę F G, hoc eſt,
quadratum diametri ſphęrę quadrati rectę F G, triplum erit. i Eſt
autem & quadratum lateris trianguli ęquilateri triplum quadrati
ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, ut quadratum
diametri ſphęrę ad quadratum rectæ F G, ita quadratum lateris trianguli
k22 ſex. anguli ad quadratum lateris hexagoni; k atque adeo ut diameter
ſphę-

ſphęrę ad rectam FG, ita latus trianguli ęquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ejuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex ęqualitate perturbata erit, ut diameter ſphęrę ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, ut in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque ut diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad junctam rectam AB. in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit uterque circulus ABC, KLM, illius figuræ utrique circulo FGHIK, LMNOP, hujus figurę æqualis.

| | |
|---|---|
| *Diam. ſphæra* | *Latus pentag.* |
| *Recta* FG. | *Lat. triang.* |
| *Lat. triang.* | *Lat. hexag.* |

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, ut juncta recta FG, ſubtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et ut FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE: erit quoque ut latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphęræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut proxime demonſtratum eſt. Igitur ex ęquo erit, ut diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo ABGDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, ut in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, ut diameter ſphęrę ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit uterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propoſ. utrique circulo ABCDE, QRSTV, hujus figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

| | |
|---|---|
| *Diam. ſphæra.* | *Lat. pentagoni.* |
| *Lat. triang. in circulo* FGHIK. | *Lat. hexagoni.* |
| *Lat. triang. in circulo* ABCDE. | *Lat. decagoni.* |

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram AS, à nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphęra deſcripto, cujus baſis pentagonum ABCDE, omnes ejus anguli ſolidi cadant in quinta puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

## COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere

& triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo ABCDE, figuræ hujus propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

MANIFESTUM quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

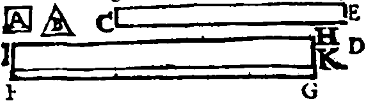
## SCHOLIVM.

*EX his, quæ hoc loco, & libr. 13. & 14. demonſtravimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in una eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe* Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum *majus reliquis tribus: Tertio cubum majorem reliquis duobus: Octaedrum denique* Tetraedro *eſſe majus.* Ex *quo conſtabit,* Euclidem *recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cum poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit.* Ita *enim ſemper à minoribus ad majora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.*

## I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul majora, quam octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe majora. Sit enim rectangulum CE, cujus unum latus CD, octuplum ſit lateris



quadrati A, & latus DE, lateri ejuſdem quadrati æquale. Eritque rectangulum CE, octuplum quadrati A, *a* cum ſit, ut CD, ad latus quadrati *A*, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cujus unum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus *G*H, æquale perpendiculari ex uno angulo trianguli ad ejus baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. *E*t quoniam triangulum rectangulum, cujus unum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli, B, *b* vigecuplum eſt trianguli B: Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. libr. 1. rectangulum FH, quippe cum baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum F*H*, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt rectangulum FH, majus eſſe rectangulo CE. *c* Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertium eſt ejus perpendi

*a* 1. *ſexti.*

*b* 1. *ſext.*

*c* 12. *quartidecimi.*

cularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod FG, ſit 10. & CD, 8. hoc eſt FG, 5. & CD, 4. Erit major proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Eſt enim major proportio 25. ad 16. ſuper noncupartiens ſextasdecimas, quam 4. ad 3. ſeſquitertia, quod major ſit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. *a* Fiat ut FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque major quoque proportio *DE*, ad HK, quam ad GH: *b* ac proinde major erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit ut IK, ipſi FG, æqualis ad C*D*, ita DE, ad HK. *c* Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque *E* H, majus, quam CE. Quod eſt propoſitum.

a 12. *ſexti.*
b 10. *quin.*
c 14. *vel* 16 *ſexti.*

## II.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

*d QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt*: Duo *vero eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ 4 libr. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi ejuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.*

d 10. *quartidecimi.*

## III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis è centro ſphæræ ad unam baſin Icoſaedri ducta, major perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad unam baſin octaedri, & cubi ducta.

*NAM* e *quia latus octaedri majus eſt latere* Icoſaedri *in eadem ſphæra: erit unum triangulum octaedri majus quoque uno triangulo Icoſaedri. Quare ſi utrumque ſolidum ita intra ſphæram conſtituatur, ut triangulum unius triangulo alterius ſit parallelum, longius à centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri: cum utrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro ſphæræ ad baſin* Icoſaedri *deducta major erit perpendiculari ex eodem centro ad baſin Octaedri.* Cum *ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi: f quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoq́ æqualiter à centro diſtent: erit quoq́ perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi major. Quod eſt propoſitum.*

e 18. *tertiidec.*
f 21. *quartidecimi.*

SI

### IV.

SI cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi major eſt.

*QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ majora ſunt octo quadratis ex eadem ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, ut theoremate 1. demonſtravimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri majora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ majus ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multo majora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2 paulo ante demonſtrato: erit quoque Icoſaedri ſuperficies major ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.*

## DE COMPARATIONE SOLIDITAtum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus jam, Dodecaedrum majus eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum majus cubo: Cubum majorem Octaedro: Octaedrum deniq; majus Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

### I.

### DODECAEDRVM Icoſaedro majus eſt.

a 11. *quartidecimi.* QVONIAM eſt, *a* ut cubi latus ad latus Dodecaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum: *b* eſt autem latus cubi latere Icoſaedri
b 18. *tertiidec.* majus: majus quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.

### II.

### ICOSAEDRVM cubo majus eſt.

QVONIAM perpendicularis ex centro ſphæræ in unam baſin I
coſaedri cadens, major eſt perpendiculari ex eodem centro in una
baſin cubi demiſſa, ut in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Itē
4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi major quoq; e
Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphęrę in un
baſin Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri content
majus ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphęrę i
unā baſin cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetu
Cùm ergo, ut in ſcholio prop. 20. lib. 14, demonſtravimus, illud ſoli
du

*dum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; majus quoque erit Icoſaedrum, quam cubus. Quod eſt propoſitum.*

## III.

## Cubus Octaedro maior eſt.

*Quoniam eſt, a ut latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ majus (Nam b cum latus cubi majus ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, majus ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multo majus ſemidiametro ſphæræ) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.*

a 27. quartidecimi.

b 18. tertiidec.

## IV.

## Octaedrum Tetraedro maius eſt.

*Quoniam baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri, c quod baſis Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad unam baſin Octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad unam baſin Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. oſtendemus, perpendicularem in Icoſaedro majorem eſſe perpendiculari in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficie octaedri ſuperficie Tetraedri major, d cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in unam baſin Octaedri cadente, & tertia parte ſuperficie octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in unam baſin Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum ex ſcholio propoſ. 20. libr. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc vero Tetraedro: erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

c 14. quartidecimi.

d 14. quartidecimi.

*Aliter. Quoniam eſt, e ut latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, ut latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri. (Nam f quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertium eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, ideoque multo minorem tripla; g ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

e 22. quartidecimi.

f 18. tertiidecimi.

g 10. quinti.

*Aliter. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet* ut rectangulum ſub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphara; Eſt autē rectangulum illud minus quadrato diametri ſphara, quod ejus latera minora ſint ſphara diametro; quippe qua ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.

a 32. quartidecim.
b 27. quartidecimi.

Aliter. a Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam b cubus ad octaedrum eſt, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphara; & latus cubi minus eſt, quam triplum ſemidiametri ſphara, quod & tota diameter, qua cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quam triplam) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.

Eodem prorſus ordine ſe mutuo ſuperant conuexa ſuperficies eorundem corporum regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri: Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Conuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri denique ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

c 27. quartidecimi.
d 18. tertiidecimi.

Quoniam enim c eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri: Eſt autem cubi latus Icoſaedri maius, d vt ſupra demonſtratum eſt: Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.

Superficiem vero Icoſaedri minorem eſſe ſuperficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate 4. ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

e 27 quartidecimi.

Deinde e quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphara: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphara maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoque ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri major.

f 14. quartidecimi.

Deniq; f quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem majorem eſſe Tetraedri ſuperficie.

g 18. tertiidecimi.

Vides igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita ut quo majus fuerit corpus, eo majorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam g ut ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, ut hic demonſtravimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, ejus vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadem ſphara deſcripta

*cripta ſint latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, a ut ſupra oſtenſum eſt, ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexa, atq; ſoliditates ſe mutuo ſuperant, ut hoc loco demonſtravimus.*

a 18. *tertii, decimi.*

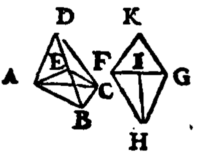
*Cæterum prætereundum non eſt hoc loco id, quod à Pappo demonſtratum eſt lib. 4. Mathematicarum collectionum: ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra constructa, longe aliter ſe habere, quàm à nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita ut Icoſaedrum ſuperet* Dodecaedrum, *Dodecaedrum maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius ſit.*

## *INVENTIO ANGULI INCLINATIONIS duarum baſium cujuscunque ſolidi regularis, unius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.*

### I.

### Angulum inclinationis duarum Pyramidis baſium, unius ad alteram, invenire.

Sit pyramis A *B* C D, cujus latere *B* D, bifariam ſecto in E, ex augulis A, & C, lateri *B* D, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum ABD, CBD, in quibus exiſtunt ( *b* Sunt enim in triangulis A *E* B, A *E* D, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis *A*EC, baſium A *B* D, C *B* D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur F G H: triangulum æquilaterum ſuper rectam F G, lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunq; pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum ABD, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad FG, conſtituatur ſuper F G, triangulum *F* G K, habens utrumque latus FK, GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, utrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, A E, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem eſſe angulo inclinationis *A*EC, baſium A B D, C *B* D. Cum enim latera K F, K G, æqualia ſint laterlbus *E* A, E C: & baſis F G, baſi AC: *c* Aequales erunt anguli FKG, A *E* C. Dico inſuper angulum inclinationis A C E, acutum eſſe. *d* Cum enim latus A D, vel illi



b 8. *primi.*

c 8. *primi.*

d 12. *quarti.*

æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia utriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum utriuſque rectæ AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtravimus.

## COROLLARIVM.

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque à lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia ſint æqualia.

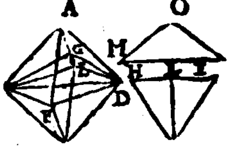
## II.

### Angulum inclinationis duarum octaedri baſium, unius ad alteram, reperire.

Exhibeatur octaedrum ABCDEF, cujus diameter BD. Ex angulis, B, & D, ad latus AE. triangulis ABE, ADE, commune. biſariamq; ſectum in G, rectæ ducantur BG. DG. quæ cum perpendiculares ſint ad AE, communem ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtunt *a* (quod in triangulis BGA, BGE. anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum *BGD*, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale in quo ducta KL, perpendiculari ad HI. conſtituatur ſuper recta MN, *quæ æqualis* ſit diametro octaedri *B* D, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulum OMN. habens utrumque latus MO. NO. perpendiculari KL. æquale, hoc eſt, utriq; perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON. æqualia ſint lateribus GB, GD, & baſis *M* N. baſi B D: *b* Æquales erunt anguli MON, BGD. Dico propterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum

a 6. *primi.*

b 8. *primi.*



a Cum

a Cum enim diameter octaedri BD, dupla ſit potentia lateris AB: b latus vero AB, potentia ſeſquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemq; 3. quadratum rectæ BG; ideoq; ambo ſimul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, majus eſt quadratis ſimul laterum GB, GD; Ac propterea angulus GBD, obtuſus erit, ut in ſcholio propoſ. 12. lib. 2 oſtendimus. a 14. tertii. dec. b 12. quarti decimi.

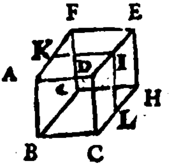
## COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium Octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineãtur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, DG, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cujusmodi eſt BD; omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent æquales ſint, necnon & diametri octaedri eosdem ſubtendentes ſint æquales. c 8. primi.

## III.

### ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, unius ad alteram, invenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo ſecetur latus DE, bifariam in I, nec non & latera illi oppoſita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis k, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; d quæ cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter ſe, necnon & IE, LH, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ) ideoq; e angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt KIL, angulum inclinationis baſium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ exiſtentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, f angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare ut angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, conſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonſtravimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi. d 3. primi. e 29. primi. f 10. undecimi.



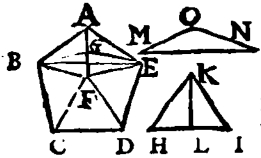
## COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſsit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum: perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

## IV.

### ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, unius ad alteram, invenire.

ESTO pyramis ABCD EF, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cujus baſis pentagonum ABCDE, ex quinq; Icoſaedri lateribus compoſitum, vertex autem F. Diviſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppoſitis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonſtratis in probl. 2. hujus ſcholij, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducũtur, comprehendent BGE, angulum inclinationis baſium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quovis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, ſuper rectam HI, lateri Icoſaedri æqualem fabricatum, hoc eſt, cujus triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum OMN, habens utrumq; latus MO, NO, perpendiculari KL; æquale, hoc eſt, utriq; perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus ſint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis baſium ABF, AEF, æqualem eſſe. Cum enim latera OM; ON, æqualia ſint lateribus GB, GE, & baſis MN, baſi BE; a Aequales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, eſſe obtuſum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB, b erit recta AB, major quam recta BG; ad eundemq; modum AE, major erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, majores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, poſitæ ſint æquales. Si itaque recta BE, ſuper rectam ſibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita ut rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorſus includant. c Angulus ergo O, major erit angulo BAE: At hic obtuſus eſt (cum enim quinque anguli pentagoni ſex rectis ſint æquales; per ea, quæ à nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper unius recti partem quintam. Obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior) Multo igitur magis obtuſus erit angulus MON, hoc eſt, ſibi æqualis BGE.



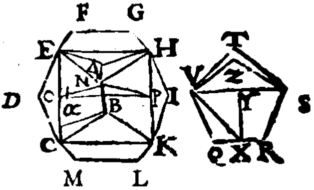
## COROLLARIVM.

Non obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, FG, ſubtendanturq; à rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiusmodi eſt BE: omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & rectæ: illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis comprehenſos, æquales erunt.

## V.

### Angulum inclinationis duarum baſium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

Cum per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad unum latus coeuntium; ſint hujuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, convenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His porro pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cujus quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diviſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorũ ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoq; rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKLH. Cui æqualem in quovis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuivis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cujus angulo T, recta ſubtendatur VS, æqualis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, anguloſq; contineant æquales. Diviſa deinde recta QR, bifariã in X, ducatur à pũcto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpẽdicularis ad VS, cũ VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens utrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis, NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, anguloſq; comprehendant æquales; Aequales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideo, que & reſidui ex rectis: anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP: necnon & angulis VXY, VYX, trianguli VXY, (ſunt enim EON, HPN, VYX, oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; Aequalia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus PH: Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exi-



ſtentes

ſtentes ipſi XY, rectis NO, N P, æquales erunt. Iam vero, quia OE, PH, æquales ſunt, ac parallelæ; erit quoque recta conjuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoque æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus N O, N P, æqualia ſint; baſis item VS, baſi O P; æqualis erit angulus V Z S, angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, eſſe obtruſum. Nam ducta recta B α. ipſi N O, parallela: cum ſit quoque NB, ipſi O α. parallela, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 15. Parallelogrammū erit N O, α B, ideoque recta B α. ipſi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppoſitum angulo C α B, qui rectus eſt (æqualis *nimirum interno* C O N) *majus* eſt latere B α. hoc eſt, recta NO, vel utraq; ZV, ZS. quæ ipſi N O, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ T V. T S. *majores duabus* rectis Z V. Z S. Cadit igitur punctū Z. intra triangulū TVS. ita ut rectæ TV. TS. rectas ZV, ZS, includant omnino: Atq; proinde angulus VZS. *ideoq; illi* æqualis ONP. maior eſt angulo pentagoni T: Hic vero, cum ſit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt major recto. Multo igitur major recto erit angulus inclinationis O N P. ideoque obtuſus.

## COROLLARIVM.

Patet igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum, contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis: quales ſunt N O, N P, ſubtendanturque à rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certe, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiusmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni E A H, ſubtendit, æqualis: Erunt omnes inter ſe æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint: necnon & rectæ illæ omnes, quæ eosdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.

*Elementi decimiſexti Finis.*