Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Bibliothèque nationale de France

LES QUINZE LIVRES
DES ELEMENS
GEOMETRIQUES
D'EUCLIDE.

Traduits & commentez par D. HENRION
Mathematicien.

DERNIERE EDITION.

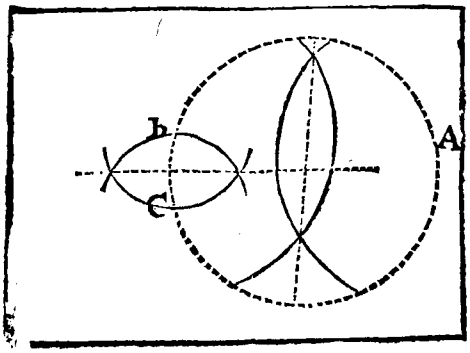
Reveuë & augmentée de plusieurs figures,
& du Livre des DONNEZ
du même Auteur.

BIBL. DU PALAIS
DES S.

TOME SECOND.

A Roüen, & se vend,

BIBLIOTHEQUE ROYALE



A PARIS,

Chez LAURENT D'HOURY, ruë saint Jacques,
prés les Mathurins, au saint Esprit.

M. DC. LXXXIII.
Avec Privilege.

AVERTISSEMENT.

D'AUTANT que Commandin, Stevin, & Dibuadius, ont eſtimé que le dixiéme Livre d'Euclide ſeroit rendu beaucoup plus clair & intelligible, ſi on y joignoit les nombres, je les ay ajoûtez aux endroits les plus difficiles & obſcurs, me ſervant quelquefois du travail de ces Autheurs. Et voyant que chacun n'entend pas les operations des nombres radicaux & des nombres ſourds, leſquelles neanmoins ſont neceſſaires pour l'intelligence de ces applications de nombres, j'ay ajoûté icy un ſommaire & abbregé de

AVERTISSEMENT.

l'Algebre, auquel ſont enſeignez non ſeulement les Algorithmes, & autres operations des nombres radicaux & nombres ſourds, mais auſſi toutes les autres regles & operations Algebraïques. Si quelqu'un en deſire voir les démonſtrations, il les trouvera au ſecond traitté de nôtre Collection Mathematique.

SOMMAIRE

SOMMAIRE DE L'ALGEBRE.

Que c'eſt qu'Algebre, qui en eſt l'inventeur, de quelles figures & caracteres on ſe ſert en icelle, & leur ſignification.

CHAPITRE I.

ALGEBRE eſt une Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement, c'eſt une ſcience par laquelle on peut rendre manifeſte & connuë en nombre une quantité inconnuë.

Quant à l'inventeur de cette ſcience, il eſt incertain : car les uns l'attribuent à Geber Arabe, les autres à un Mahomet fils de Moyſe Arabe : & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle ſcience, outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a pluſieurs autres figures & caracteres, dont on ſe ſert en cette ſcience, leſquels ſont figurez, &

nommez diverſement par les Autheurs qui ont écrit d'icelle ſcience : mais entre cette diverſité de caracteres, nous avons choiſi les ſuivans, les jugeant plus propres & aiſez à repreſenter ce qu'ils ſignifient qu'aucuns autres.

N. ℟. *q*. *c*. *qq*. *ſs*. *qc*. *bſs*. *qqq*. *cc*. *qſs*. *cſs*. *qqc*. *dſs*. *qbſs*. &c.

Le premier caractere N, a l'apellation du nombre abſolu & ſimple : tellement que le nombre auquel ledit caractere ſera aposé, eſt abſolu & ſimple : comme 4 N, ne ſignifie autre choſe que 4 unitez ſimples ; toutefois ce caractere N defaut le plus ſouvent aux nombres ſimples ; c'eſt pourquoy les nombres auſquels eſt aposé ledit caractere N, ou bien auſquels il n'y a aucun ſigne, doivent être pris pour ſimples & abſolus.

Le ſecond caractere ℟, s'apelle racine : tellement que le nombre auquel eſt aposé ledit caractere, ſera denommé par racine, comme 7. ℟, ſignifient 7 racines.

Le troiſiéme caractere *q*, repreſente quarré; tellement que 5 *q*, ſignifient cinq quarrez.

Le quatriéme caractere *c*, ſignifie cube ; comme 7 *c*, ſignifient ſept cubes.

Le cinquiéme caractere *qq*, ſignifient quarré de quarré, comme 8 *qq*, s'apellent huit quarrez de quarré.

Le ſixiéme *ſs*, denotte ſurſolide ; tellement que 4 *ſs*, ſignifient quatre ſurſolides.

Le ſeptiéme caractere *qc*, denotte quarré de cube, comme 7 *qc*, ſignifient ſept quarrez de cube.

Le huitiéme *bſs*, s'apelle ſecond ſurſolide; tellement que 4 *bſs*, ſignifient quatre ſecond ſurſolide.

Le neufiéme caractere *qqq*, denotte quarré quarré de quarré : comme 3 *qqq*, ſignifient trois quarrez de quarré de quarré.

Le dixiéme *cc*, ſignifie cube de cube ; tellement que 8 *cc*, ſignifient huit cubes de cube. Et ainſi faut-il entendre des autres caracteres en l'ordre cy deſſus, tous leſquels ſont apelez ſignes ou caracteres coſſiques.

Il y a encore ce caractere $\mathcal{V}$, par lequel ſont nottez certains nombres qu'on apelle radicaux, irradicaux, ou ſourds, dont ſera parlé cy apres : comme auſſi de quelques autres ſignes ou caracteres.

Des nombres coſſiques, ou denommez.

CHAP. II.

LEs nombres uſitez en l'Algebre ſont de trois genres : Ceux du premier, ſont nommez nombres coſſiques, ou denommez : ceux du ſecond, ſont appelez nombres radicaux, ou irrationnaux : & les troiſiémes ſont nommez nombres radicaux coſſiques. Quant aux nombres coſſiques, ou denommez, ce ſont tous nombres de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'unité : pour l'intelligence deſquels doivent être diligemment conſiderées les deux progreſſions ſuivantes, au milieu deſquelles ſont poſez les caracteres coſſiques cy-deſſus declarez.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. &c.
N. R. *q. c. qq. ſs. qc. bſs. qqq. cc. qſs. cſs. qqc.* &c.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. &c.

Le premier ordre eſt la progreſſion naturelle

des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans, tant des signes cossiques décrits au dessous, que des termes de la progression Geometrique commençant à l'unité : tellement que le premier terme de ladite progression naturelle, qui est 0, au dessous duquel est N & 1, est exposant du nombre simple & absolu : Le second terme 1, au dessous duquel est R & 2, montre le second terme de la progression Geometrique, être la premiere denomination és nombres cossiques, & s'apelle racine : Le tiers terme 2, expose que le tiers nombre de la progression Geometr. est la seconde denomination, & s'apelle quarré : ainsi pareillement 6, demontre la sixiéme denomination être le nombre quarré de cube, & ainsi des autres.

Puis apres, les mêmes nombres exposans de la progression naturelle des nombres, enseignent combien il y a de raisons entre chacun nombre de la progr. Geometr. & l'unité, comme 1, qui est au dessus de R & 2, signifie qu'entre 2, ou bien la racine de la progr. Geometr. & l'unité, il y a la seule raison de 2 à 1 : & 2, qui est au dessus de *q* & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré & l'unité, doivent être 2 raisons, comme 4 à 2, & 2 à 1 : de même 3, qui est au dessus de *c* & 8, montre qu'entre le cube, ou 8 & l'unité, sont les trois raisons 8 à 4; 4 à 2; & 2 à 1, & ainsi des autres.

Davantage, chaque deux nombres exposans multipliez entr'eux, produisent l'exposant du caractere cossique qui sera composé des caracteres desdits deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 étant multiplié par 3 fait 6, exposant du caractere *q c.* qui est composé de *q* & de *c.* De mê-

me, 4 étant multiplié par 3 fait 12, exposant du caractere *qqc*, qui est composé de *qq*, & de *c*; & ainsi des autres.

Pareillement étant divisé quelque nombre exposant par un autre moindre, le quotient montrera (s'il est nombre entier) l'exposant du caractere cossique qui restera, si du caractere du nombre exposant divisé, est ôté le caractere du nombre exposant par lequel est faite la division : comme si 6, exposant du caractere *qc*, est divisé par 2, exposant du caractere *q*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, qui restera, si du caractere *qc*, exposant de 6, est ôté le caractere *q* de l'exposant 2. De même, si 12, nombre exposant du caractere *qqc*, est divisé par 4, exposant du caractere *qq*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, lequel restera, si de *qqc*, est ôté *qq*; & ainsi des autres.

Derechef, cette figure 2, qui est posée sur 4 & *q* enseigne que le quarré, ou bien la 2e. denomination est produite de la multiplication de la racine deux fois posée : car si la racine 2 est posée deux fois, en cette maniere 2, 2, & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procreé le quarré 4; en la même maniere cette figure 3, qui est posée sur 8 & *c*, signifie que le cube, ou bien la 3e. denomination est produite de la racine, trois fois posée & multipliée : Car si la racine 2 est posée trois fois, comme icy 2. 2. 2. & soit fait la multiplication de 2 par 2, & du nombre produit d'iceux par 2, viendra le cube 8; & y a même raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est de-

mandé que c'eſt qu'un nombre ſecond ſurſolide, nous dirons étre un nombre, lequel eſt engendré par quelque nombre ſept ſois posé & multiplié; comme 128, eſt engendré de la multiplic. de cette racine 2, posée ſept fois en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Semblablement le quarré de quarré ſera un nombre, lequel eſt engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié; comme 16 eſt procreé de la multiplication de la racine 2, quatre ſois posée ainſi 2. 2. 2. 2. & ainſi des autres. Mais toûjours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par ſa multiplication, eſt dit racine du nombre produit, comme 2 étant posé ſix fois en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplié, fait ce nombre 64, qui eſt *qc.* partant 2. eſt dit racine quarrée cubique de ce nombre 64; & ainſi faut-il entendre des autres.

Or non ſeulement ſont quelquesfois produits les nombres de la progreſſion Geometrique, poſez par la multiplication de la racine, comme eſt cy-deſſus dit, mais auſſi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainſi que les ſignes coſſiques d'iceux demontrent: comme ce nombre quarré de ſurſolide 1024, eſt procreé de la racine dix fois posée en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. ainſi que montre ſon expoſant 10: toutesfois pource que ſon ſigne coſſique *qſſ* eſt composé de ces deux ſignes coſſiques *q* & *ſſ*, les expoſans deſquels ſont 2 & 5, ſi la même racine 2 eſt deux fois posée en cette maniere 2, 2, à cauſe de 2 expoſant du ſigne *q*, & puis ſoit multipliée, afin que 4 ſoit produit, & ce produit cinq fois posé en cette maniere 4. 4. 4. 4. 4. (à cauſe de 5, expo-

ſant du ſigne *ſs*,) ſoit multiplié, ſera procreé le même nombre 1024. Par la même maniere, ſi la racine 2. eſt posée cinq fois, à cauſe du ſigne *ſs*, & pareillement multipliée, & le nombre 32 produit, ſoit posé deux fois, à cauſe du ſigne *q*, ſera encore procreé le même nombre : Car la racine ainſi posée 2, 2, 2, 2, 2, & puis multipliée fait 32: mais ce nombre cy 32 posé deux fois ainſi 32, 32, & multiplié procrée 1024. Le même doit être dit des autres, dont les ſignes coſſiques ſont composez de pluſieurs ſignes coſſiques.

Pareillement és ſuperieures progreſſions, eſt bien conſiderable que l'adition des nombres de la progreſſion Arithmetique répond à la multiplication des nombres de la progreſſion Geometrique, & la ſubſtraction à la diviſion. Car pour exemple, ainſi que 2 & 5.(qui ſont expoſans de *q* & *ſs*.)ajoûtez enſemble font 7,ainſi auſſi leurs correſpondans 4 & 32, étans multipliez entr'eux produiſent 128, c'eſt à dire *b ß*, l'expoſant duquel eſt 7. Item ainſi que 3 & 9. ajoûtez enſemble font 12, ainſi auſſi *c* & *cc*, c'eſt à ſçavoir 8 & 512, les expoſans deſquels ſont 3 & 9, multipliez entr'eux produiſent 4096, c'eſt à dire *qqc*, duquel l'expoſant eſt 12, & ainſi des autres.

Derechef, tout ainſi qu'en ſouſtrayant 5 de 7 reſte 2, ainſi en diviſant *bß*,c'eſt à ſçavoir 128,duquel 7 eſt expoſant, par *ß*, c'eſt à dire par 32, duquel l'expoſant eſt 5. provient 4, c'eſt à ſçavoir *q* duquel l'expoſant eſt 2 : Semblablement, ainſi qu'en ſouſtrayant 3 de 12 reſtent 9, ainſi auſſi en diviſant *qqc*, c'eſt à dire 4096, duquel l'expoſant eſt 12. par *c*, c'eſt à dire par 8, duquel l'expoſant eſt 3, pro-

vient *c*; c'eſt à ſçavoir 512, duquel l'expoſant eſt 9, & ainſi des autres.

Or ce qui a été dit juſques à preſent de la progreſſion Geometrique en raiſon double qui commence à l'unité, le même doit être entendu en quelqu'autre progreſſion Geometrique que ce ſoit, le commencement de laquelle eſt l'unité.

Reſte à montrer par quelle raiſon tous les nombres propoſez de quelconque progreſſion Geometrique, commençant à l'unité, doivent être denommez, ou (ce qui eſt le même) quels ſignes coſſiques doivent être attribuez & inſcrits auſdits nombres: ce que nous montrerons facilement, ſi premierement nous denommons les nombres, deſquels les expoſans ſont nombres premiers, de laquelle ſorte ſont les ſuivans, avec leurs caracteres coſſiques.

2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59. &c.
q.c.ß.bß.cß.dß.eß.fß.gß.hß.iß.kß.lß.mß.nß.oß.pß. &c.

Or les lettres de l'alphabet aposées aux caracteres de *ß* ſont au lieu de chiffres, comme *bß* ſignifie 2*ß*; *cß*, *cß*; *dß*, 4*ß*, &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres aporteroient de la confuſion.

Sçachant donc ainſi que deſſus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouverons les caracteres des autres nombres coſſiques, deſquels les expoſans ne ſont nombres premiers, ains compoſez, en reſoluant l'expoſant du nombre composé; dont la denomination & caractere eſt deſirée en ſes parties aliquotes incomposées, leſquelles étans multipliées par ordre entr'elles, conſtituent & produiſent iceluy: ce que vous ferez en cette maniere.

Diviſez premierement le nombre composé donné par le moindre nõbre premier, par lequel il ſe peut

diviſer, ſemblablement le quotient, s'il eſt nombre compoſé ; & derechef ſoit diviſé ce quotient par le moindre nombre, & ainſi conſequemment ſoit faite continuellement la diviſion, iuſques à ce que le quotient ſoit nombre premier, c'eſt à ſçavoir n'ayant aucune partie aliquotte ; & tous les diviſeurs, enſemble le dernier quotient, ſeront parties aliquottes incompoſées, leſquelles étans multipliées par ordres entr'elles produiront le nombre compoſé donné, & les caracteres de toutes leſdites parties aliquottes ioints enſemble, feront le caractere dudit nombre compoſé donné. Comme pour exemple, ſi vous voulez trouver le caractere de ce nombre compoſé 24, vous diviſerez iceluy par 2, qui eſt le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diviſerez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diviſerez encore derechef par 2, & viendra 3, au quotient, qui eſt nombre premier : tellement que vous aurez pour les parties incompoſées de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3, dont les caracteres ſont *q. q. q. c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre compoſé 24 ſera *qqqc.* Et c'eſt expoſant 30 (duquel les parties incompoſées ſont 2, 3, 5,) fera ce ſigne *q c ſs*, & ainſi des autres.

On fera encore la même choſe, prenant deux quelconques nombres qui multipliez entr'eux, produiſent le nombre expoſant propoſé : Car les ſignes coſſiques d'iceux, compoſent le ſigne coſſique dudit nombre expoſant propoſé. Comme 3 & 4, deſquels les ſignes coſſiques ſont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produiſent 12, dont le ſigne coſſique ſera *qqc*,

Or le contraire de ce que deſſus, ſe fera rendant à chaque caractere imcompoſé ſon expoſant ; puis multipliant iceux expoſãs enſemble. Comme pour exemple, ſi nous voulons avoir l'expoſant de *q q c.* nous rendrons à chaque caractere ſon expoſant particulier, c'eſt à ſçavoir, 2, 2, 3, leſquels multipliez enſemble ſont 12, qui ſera l'expoſant dudit ſigne coſſiques *q q c.* & ainſi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres coſſiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres coſſiques eſt facile, les choſes cy-devant dites êtans bien entenduës: Car quand ils ſont poſez ſeuls, comme 5 ℞, ou 8 *q.* ou 20 *c.* &c. ils s'expriment ainſi, 5 racines, ou 8 quarrez, ou 20 cubes, &c ; mais quand ils ſont propoſez conioints entr'eux par ce ſigne + au milieu, ou par celui-cy — ; comme 5 ℞ + 8 *q* ; ou 8 *q* — 5 ℞ ; ou 20 *c* + 8 *q* — 5 ; leſquels deux ſignes + & — ont leur ſignification contraire : car cettui-cy +, eſt dit ſigne d'adioûter, & ſignifie plus ; mais celui-cy —, eſt appellé ſigne de ſouſtraire, & denote moins : & les nombres auſquels eſt interpoſé le ſigne +, ſont dits compoſez : mais ceux auſquels intervient le ſigne —, ſont nommez diminuez : & finablement ceux auſquels l'un & l'autre ſigne eſt interpoſé, ſont appellez mixtes : iaçoit que tous pourroient être dits compoſez : Partant donc ce compoſé 5 ℞ + 8 *q.* s'exprime 5 racines plus 8 quarrez ; mais ce diminué 8 *q* — 5 ℞ ; 8 quarrez moins 5 racines : & ce mixte-cy 20 *c* + 8 *q* — 5, 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 unitez ; car comme il a été dit,

le nombre qui n'a point de caractere coſſique apres ſoy, ſignifie un nombre abſolu compoſé d'unitez.

Or ces ſignes + & — ſont toûjours referez aux nombres qui les ſuivent, & le nombre qui precede n'eſt à l'un n'y à l'autre deſdits ſignes. Or le ſens des nombres compoſez, diminuez, ou mixtes eſt facile : car quand nous diſons 5ℛ + 8q, nous entendons 5 racines enſemble avec 8 quarrez, c'eſt à dire 42 unitez, ſi la racine eſt 2, & le quarré 4: ainſi auſſi quand nous diſons 8q — 5ℛ, nous entendons que de 8 quarrez ſont ôtez 5 racines ; c'eſt à dire que le nombre propoſé eſt 22 unitez, ſi la racine eſt 2, & le quarré 4 ; & le même faut-il dire des autres.

De l'addition, & ſouſtraction des nombres coſſiques.

CHAP. IV.

QUand il faut ajoûter un nombre coſſique à un nombre coſſique d'autre denomination ou caractere, l'addition ſe fait mettant ce ſigne + au milieu, & vient un nombre compoſé : comme ces deux nombres 6ℛ & 8, ajoûtez enſemble font 6ℛ + 8 : de même 6ℛ & 8c, font 6ℛ + 8c. &c.

Mais quand il faut ajoûter un nombre coſſique à un autre nombre coſſique de même appellation ou caractere, les nombres ſe doivent ajoûter, & à la ſomme apoſer le même caractere coſſique: comme ces nombres 4q & 9q ajoûtez enſemble, font 13q, de même 5ℛ & 4ℛ, font 9ℛ, &c.

Par même raiſon, quand il faut ſouſtraire un nombre coſſique d'un nombre coſſique d'autre denomination, la ſouſtration ſe fait mettant ce

ſigne — au milieu, & fait un nombre diminué: comme pour exemple, ce nombre 6ℛ ôté de 8q, reſte 8q — 6ℛ; de même 12 de 6ℛ, reſtent 6ℛ — 12. &c.

Mais quand il faut ſouſtraire un nombre coſſique d'un autre nombre coſſique de même caractere, on doit ſouſtraire le nombre du nombre, & au reſte apoſer le même caractere: comme 4ℛ de 9ℛ, reſtent 5ℛ: & 9c de 20c, reſtent 11c.

Mais quand il faut ajoûter des nombres coſſiques cõpoſez, diminuez & mixtes, ou ôter l'un de l'autre il les faut poſer l'un au deſſous de l'autre, tellement que les nombres de même apellation ſe répondent entr'eux. Que ſi en l'un ou l'autre d'iceux n'eſt trouvé un nombre répondant à quelqu'un, au lieu de ſa figure ſera poſé o avec le ſigne + & étans ainſi conſtituez, ſeront ajoûtez les nombres de même apellation, ou ôtez l'un de l'autre, & les ſommes, ou nombres reſtez, ſouſcrits en leurs propres lieux, avec les mêmes ſignes + ou —, qui ſeront trouvez és nombres ajoûtez, ou ſouſtraits.

Exemples de l'adition.

ℛ. N.	q. ℛ N.	c. N. q.
6 + 8.	7 + 8 — 5.	7 + 8 — 3
7 + 10.	3 + 9 — 8.	4 + 11 — 5
13 + 18.	10 + 17 — 13.	11 + 19 — 8

c. q. ℛ N.	ſs. qq. ℛ. N. q.
4 + 11. + 0 — 6	7 + 0 + 8 — 5 + 4.
3 + 0 + 8 — 4.	4 + 9 + 6 — 9 + 0.
7 + 11 + 8 — 10.	11 + 9 + 14 — 14 + 4.

Exemples de la ſouſtraction.

c.	*q.*	℞.	N.
7	+11	+8	−10.
3	+0	+8	−4.
4	+11	+0	−6.

c.	N.	*q.*
11	+19	−8.
4	+11	−5.
7	+8	−3.

ſs.	*qq.*	℞.	N.	*q.*
11	+9	+14	−14	+4.
7	+0	+8	−5	+4.
4	+9	+6	−9	+0.

q.	℞.	N.
10	+17	−13.
7	+8	−5.
3	+9	−8.

Quand il reſte + 0, ou − 0, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple, où il reſte 4*c* +11*q* +0 ℞ − 6N, ſe. a ſeulement 4*c* +11*q* − 6.

Que ſi en l'addition ou ſouſtration, l'un des nombres avoit le ſigne +, & l'autre −, il faudroit changer d'eſpece: c'eſt à dire qu'en l'addition, il faut ſouſtraire le moindre du plus grand, & au nombre reſtant donner le ſigne du plus grand nombre duquel a été faite la ſouſtration.

Exemples.

q.	℞.
6	+8.
2	−10.
8	−2.

qc.	*ſs.*	*qq.*	*c.*	℞.	N.
7	+0	+8	+0	−4	+8,
7	+5	−11	−11	+0	+0.
14	+5	−3	−11	−4	+8.

Mais s'il faloit ajoûter ces deux nombres 12 *c*

$6q - 8\mathcal{R} + 7$. & $12\mathcal{R} - 5c - 3q - 9$, il les faudroit poſer comme enſuit.

c.	q.	ℛ.	N.
+12	+ 6	— 8	+ 7.
— 5	— 3	+ 12	— 9.
7	+ 3	+ 4	— 2.

Mais en la ſouſtration, il faut ajoûter les nombres enſemble, & donner à la ſomme le ſigne du nombre ſuperieur, duquel doit être faite la ſouſtraction.

Exemples.

q. ℛ.	qc. ß.	qq. c.	ℛ. N.
8 — 2.	14 + 5	— 3 — 11	— 4 + 8.
6 + 8.	7 + 0	+ 8 + 0	+ 4 + 8.
2 — 10.	7 + 5	— 11 — 11	— 0 + 0.

Que s'il avenoit qu'aux deux nombres de la ſouſtration fuſſent même ſigne, & que le nombre à ſouſtraire fût plus grand que celuy duquel il faut ſouſtraire, il faudroit ôter le moindre nombre du plus grand, & au reſte donner le ſigne contraire, comme il apert és exemples ſuivans.

q. ℛ.	q. ℛ. N.	c q. N.
6 + 8.	9 + 4 — 5.	6 + 5 + 3.
2 + 10.	4 + 7 — 8.	7 — 9 + 10.
4 — 2.	5 — 3 + 3.	— 1 + 4 — 7.

Et d'autant que le ſigne — n'eſt pas bien diſpoſé au premier nombre, le reſte du dernier exemple doit être poſé ainſi 4q — 10 — 7.

Or tous les preceptes de l'adition & ſouſtration enſeignez cy-deſſus, au regard des ſignes + & —, peuvent être retenus en memoire par les deux reigles ſuivantes.

1 *A mêmes ſignes on doit poſer le même ſigne, ſinon en la ſouſtraction, quand les nombres ſont poſez à rebours : car alors le ſuperieur eſt ſouſtrait de l'inferieur, & de + eſt fait —: mais de — eſt fait +*

2 *Les ſignes divers changent l'eſpece de l'operation : & en l'adition eſt poſé le ſigne du plus grand nombre : mais en la ſouſtraction eſt poſé le ſigne du nombre ſuperieur.*

Quand à la preuve de l'adition & ſouſtraction, elle ſe fait en deux manieres : Pour la premiere, l'adition preuve la ſouſtraction, & la ſouſtraction l'adition, tout ainſi qu'on fait és nombres abſolus.

Exemples de la preuve des trois dernieres additions & ſouſtractions.

q.	*R.*		*qc.*	*ſ.*	*qq.*	*c.*	*R.*	N.	*c.*	*q.*	*R.*	N.
8	— 2.		14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8.	7	+ 3	+ 4	— 2.
2	— 10.		7	+ 5	— 11	— 11	+ 0.	+ 0.	— 5	— 3	+ 12	— 9.
6	+ 8.		7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.	12	+ 6	— 8	+ 7.

Preuve de la ſouſtraction.

c.	*R.*	*q.*	*R.*	N.	*c.*	*q.*	N.
4	— 2.	5	— 3	+ 3.	— 1	+ 4	— 7.

2 + 10	4 + 7 — 8.	+ 7. — 9. + 10
6 + 8.	9 + 4 — 5.	6 — 5 + 3.

Pour faire autrement ladite preuve, il faut conſtruire une table avec quelques progreſſions Geometriques, commençant à l'unité, comme il apert cy-deſſous.

N	ℛ	q.	c.	qq.	ſs.	qc.	bſs.	qqq.	cc.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

Par apres, il faut reſoudre les nombres coſſiques à adioûter ſelon aucunes d'icelles progreſſions en nombres abſolus, puis les adioûter enſemble, ou ſouſtraire l'un de l'autre, ſelon les ſignes + ou —, & puis apres ſoient ſemblablement reſouls les nombres coſſiques de la ſomme recueillie ; & ſi l'addition a été bien faite, leſdits nombres reſouls de la ſomme recueillie ſeront egaux aux nombres reſouls propoſez à adioûter ; comme pour exemple, nous avons trouvé cy-devant que 6q + 8ℛ adioûtez avec 2q — 10ℛ font 8q — 2ℛ : pour en faire donc la preuve, nous reſoudrons en nombres

abſolus

absolus les deux nombres à ajoûter, sçavoir est 6 q + 8 ℞, & 2 q — 10 ℞; & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, 6 q font 24, & 8 ℞ font 16, lesquels 24 & 16 joints ensemble, à cause du signe + font 40 : de même 2 q font 8, qui ajoûtez à 40 (car le signe + est toûjours entendu être au nombre qui n'a nul signe aposé) font 48, & 10 ℞ font 20, qui soustraits de 48, à cause du signe —, reste pour la somme de l'adition 28 : & resoluant 8 q — 2 ℞, qui est la somme recueillie de l'adition, viendront aussi 28 : & partant l'adition a été bien faite.

Quant à la preuve de la soustraction, elle se fait en la même maniere : car les nombres cossiques d'icelle étans reduits en nombres absolus, & les nombres à soustraire étans ajoûtez aux restans, doivent être égaux aux nombres dont la soustraction a été faite : comme pour exemple, nous avons cy-devant trouvé que 7 c — 9 q + 10 N, soustraits de 6 c — 5 q + 3 N, laissent 4 q — 1 c — 7 N : donc 7 c — 9 q + 10 N, resouls en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3, font 118 ; & 4 q — 1 c — 7, font 2, qui ajoûtez à 118, font 120 ; & 6 c — 5 q + 3 N font aussi 120 : & partant la soustraction a été bien faite.

De la multiplication & division des nombres cossiques.

CHAP. V.

QUand un nombre cossique est multiplié, ou divisé par un nombre absolu, le produit a

même denomination coſſique; comme pour exemple 4 ℞ ou 8 *q* étans multipliez par 3, proviennent 12 ℞, ou 24 *q*, &c. Item 12 *q*, ou 24 ℞ étans diviſez par 4, viennent 3 *q*, ou 6 ℞.

Mais quand le nombre coſſique eſt multiplié, ou diviſé par un nombre coſſique, le produit eſt d'autre denomination, ſçavoir eſt de celle qui ſe fait des expoſans joints enſemble, quant à la multiplication : comme pour exemple 4 ℞ multipliez par 7 ℞ font 28 *q*, car l'unité qui eſt expoſant de ce caractere coſſique ℞, étant ajoûtée à l'unité, fait 2, expoſant de ce caractere *q*. Pareillement 4 ℞ multipliez par 5 *q* font 20 *c*: car 1 eſt expoſant de ℞, & 2 de *q*, leſquels ajoûtez enſemble, ſont 3 expoſans de *c*. Et quant à la diviſion, le quotient à la denomination du nombre reſtant, l'expoſant du diviſeur étant ôté de l'expoſant du diviſé : Comme pour exemple, 36 *qc*, diviſé par 4 *qq*, le quotient eſt 9 *q* : car 4 expoſant de *qq* étant ôté de 6 expoſant de *qc*, reſte 2 expoſant de *q*; ainſi auſſi 18 *qq* étans diviſez par 3 *c*, vient 6 ℞; & 8 *q* par 8 *q*, vient 1 N, &c.

Quand le nombre coſſique compoſé, ou diminué eſt multiplié ou diviſé par un nombre abſolu ou coſſique, tant ſimple que compoſé ou diminué, outre ce qui eſt dit cy-deſſus, il faut ſur tout avoir égard aux ſignes + & — : Car quand les nombres ſe multiplians ou diviſans ont un même ſigne, il faut apoſer au produit le ſigne + : mais quand l'un d'iceux eſt +, & l'autre —, il faut donner au produit le ſigne — : ce qui eſt aiſé à retenir en memoire par la regle ſuivante.

Aux ſignes ſemblables faut poſer +; mais aux

dissemblables faut poser —.

Exemples de la multiplication.

7q — 4R.	7q + 4R	7q — 4R.
9.	9 N.	9R.
63q — 36R.	63q + 36R.	63c — 36q.

8q + 9.	8q — 9.
8q + 9.	8q — 9.
72q + 81.	— 72q + 81.
64qq + 72q	64qq — 72q
64qq + 144q + 81.	64qq — 144q + 81

6q + 8R — 6N.	
2q — 4N.	9q + 8N — 3R.
— 24q — 32R + 24N.	7c — 49q — 8q.
12qq + 16c — 12q.	— 72qq — 64q + 24c.
	— 36qc — 32qq + 12ss
12qq + 16c — 36q — 32R + 24N.	63ss + 56c — 21qq.
	— 36qc + 75ss — 125qq + 80c — 64q.

Et d'autant que comme il a déja été dit, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit de ce dernier exemple, ainsi qu'il ensuit.
75ss — 36qc — 125qq + 80c — 64q.

Exemples de la division.

Diviser 36R + 24 [9R + 6.
par, 4 4

Item $45c + 36q + 27B2$ [$5q + 4B2 + 3N$.
par $9B2 \quad 9B2 \quad 9B2$

Item $45c + 36q - 27B2$ [$5\frac{5}{8}q + 4\frac{1}{2}B2 - 3\frac{3}{8}N$.
par $8B2 \quad 8B2 \quad 8B2$

Diuiſer encore -40
$30q - 58B2 + 24$ [$6B2 - 8N$.
par $8B2 - 3N$.
$5B2 - 3N$.

Item 12
$12qq + 16c - 36q - 32B2 + 24N$ [$6q + 8B2 - 6N$
par $2q + 0 + - 4N$
$2q + 0B2 - 4N$.
$2q + 0B2 - 4N$.

Diuiſer encore $-1 + 1$
$1c + 0q + 0B2 + 1$ [$1q - 1B2 + 1$.
par $1B2 + 1$
$1B2 + 1$
$1B2 + 1$

Et conuient noter qu'en toutes diuiſions des nombres coſſiques, les denominations doiuent être continuées d'ordre : & partant quand il y a quelque denomination de manque, il faut poſer o au lieu d'icelle, comme il apert és deux precedentes exemples, la derniere deſquelles j'ay fait en cette maniere. Premierement j'ay posé le diuiſeur $1B2 + 1$ au deſſous du dividande $1c + 0q$, & trouve que $1B2$ eſt en $1c$; $1q$ que je poſe au quo-

tient, & multiplie ledit 1 q par mon diviſeur, & vient, 1 c + 1 q, que j'ôte de 1 c + 0 q, & reſte de tout le nombre à diviſer — 1 q + 0 ℛ + 1 : puis apres j'avance mon diviſeur ſous — 1 q + 0 ℛ, & trouve qu'il y eſt — 1 ℛ, que je poſe au quotient, & multiplie ladite 1 ℛ par ledit diviſeur, & vient — 1 q — 1 ℛ, que je ſouſtraits de — 1 q + 0 ℛ, & reſte de tout le nombre à diviſer 1 ℛ + 1, ſous lequel je poſe le diviſeur, & trouve qu'il y eſt 1 N precisément.

Or quand le diviſeur eſt nombre compoſé ou diminué, & qu'il ne peut diviſer precisément, alors il il faut ſeulement interpoſer une ligne entre-deux, ainſi qu'és fractions, cõme és deux exẽples ſuivans. 8 ſs diviſez par 2 q + 4 N. 8 q — 9 ℛ diviſez par 4 ℛ + 3 N

Les quotiens ſont

$$\frac{8\,ss}{2q+4\,N.} \qquad \frac{8q-9\,\mathcal{R}.}{4\,\mathcal{R}+3\,N.}$$

Il faut faire en la même maniere, quand un nombre coſſique, ſimple ou compoſé doit être diviſé par un nombre coſſique ſimple de plus grande denomination: comme 8 q diviſez par 2 qc conſtituent cette fraction $\frac{8q}{2qc}$. De même 9 q + 4 étans diviſez par 3 c, font $\frac{9q+4}{3c}$ &c.

Reſte à enſeigner à faire la preuve de la multiplication & diviſion, laquelle ſe fait en deux manieres. Premierement la diviſion preuve la multiplication; & la diviſion ſe preuve par la multiplication, tout ainſi qu'en l'Arithmetique vulgaire.

L'autre ſorte de preuve ſe fait par la reſolution des nombres coſſiques, ſelon quelque racine des progreſſions Geometriques contenuës au chapitre

precedent. Car les nombres coſſiques reſouls, étans multipliez entr'eux, doivent produire un même nombre que le produit des nombres coſſiques auſſi reſoult ſelon la méme racine: & le nombre coſſique qu'il faut diviſer reſoult, doit produire autant divisé par le diviſeur reſoult, que le quotient auſſi reſoult. Comme pour exemple, nous avons trouvé ci-devãt que $6\,q + 8\,\mathcal{R} - 6N$ multipliez par $2\,q - 4\,N$, produiſent $12qq + 16c - 36q - 32\mathcal{R} + 24\,N$. Pour donc en faire la preuve, nous reſoudrons les deux nombres coſſiques en nombres abſolus, & viendront (ſelon la progreſſion dont 2 eſt racine) 34, & 4, qui multipliez entr'eux produiſent 136: mais la reſolution du produit $12qq + 16c - 36\,q - 32\mathcal{R} + 24\,N$, eſt auſſi 136: & partant la multiplication a été bien faite. Nous avons auſſi trouvé que $1c + 1$, diviſez par $1\mathcal{R} + 1$, le quotient eſt $1q - 1\mathcal{R} + 1$, lequel quotient donne 3 par la reſolution de la progreſſion, dont la racine eſt 2: mais les deux nombres coſſiques reſolus par la même progreſſion, ſont 9 & 3; & 3 diviſant 9, le quotient eſt auſſi 3: & partant la diviſion a été bien faite.

Des fractions des nombres coſſiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions coſſiques, les operations ſont preſque ſemblables qu'és fractions vulgaires: il n'y a qu'à ajoûter ce qui concerne les caracteres coſſiques, & les ſignes + & —. Et premierement quant à la numeration, cette

fraction $\frac{3}{8\mathcal{R}}$ signifie 3 unitez être divisées par 8 $\mathcal{R}$; & $\frac{7q}{9}$ denote 7 quarrez être diviſez par 9 unitez: Item $\frac{9qq+8q}{5c}$ ſignifie que ce nombre $9qq+8q$, eſt diviſé par $6c$, &c.

Quant à l'abreviation elle ſe fait en deux manieres: Car ou les nombres ſeront abreviez, comme és fractions vulgaires, ſans toucher aux caracteres coſſiques; ou bien ſeront auſſi abreviez leſdits caracteres coſſiques: comme cette fraction; $\frac{15}{5\mathcal{R}}$; quant aux nombres, elle ſera reduite à cette-cy $\frac{3}{1\mathcal{R}}$: car la plus grande commune meſure des nombres d'icelle fraction eſt 5. Semblablement cette autre fraction $\frac{9q+36}{81}$ ſera reduite à cette-cy $\frac{1q+4}{9}$ pource que la plus grande commune meſure eſt 9: Item $\frac{35\mathcal{R}+28}{7+14}$ ſera reduite à $\frac{5\mathcal{R}+4}{1q+2}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{\mathcal{R}+3q}$ ſera reduite à $\frac{6q-3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}+1q}$, &c.

Et quant à l'abreviation des caracteres coſſiques, elle eſt faite ſouſtrayant l'expoſant du moindre caractere, des expoſans des autres caracteres; car ſi aux nombres reſtans ſont apoſez les propres caracteres, l'abreviation ſera achevée, quant aux caracteres. Comme cette fraction $\frac{8q}{2qc}$ quant aux caracteres, ſera reduite en celle-cy $\frac{8}{2qq}$; car l'expoſant du moindre caractere q, eſt 2, qui ôté de 6, expoſant de l'autre caractere qc, reſte le nombre abſolu 8 au numerateur, & 4 pour l'expoſant du denominateur, qui partant ſera qq: puis apres quant aux nombres, elle ſera reduite à cette-cy $\frac{1}{1}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{6\mathcal{R}+3q}$ quant aux nombres & caracte-

res, sera reduite à $\frac{6\mathcal{R}-3}{2+1\mathcal{R}}$, &c.

Quant à la reduction des fractions cossiques à un même denominateur elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux, tout ainsi qu'és fractions vulgaires: comme ces fractions $\frac{2\mathcal{R}}{4q}$ & $\frac{4c}{5qc}$ étans reduites en même denomination, feront $\frac{15b\beta}{20qqq}$ & $\frac{16\beta}{20qqq}$, &c.

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & une fraction à même denomination; il faudra supposer l'unité estre denominateur du nombre entier, & poursuivre ainsi que dessus. Comme 6 & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$, seront posez ainsi $\frac{6}{1}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$, puis étans reduites comme dessus, elles seront $\frac{42q}{7q}$ & $\frac{4\mathcal{R}}{7q}$: Item $\frac{5q}{1}$ & $\frac{4c}{3q}$ seront reduites à $\frac{15qq}{3q}$ & $\frac{4c}{3q}$, &c.

Mais si aux entiers est jointe quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction; ce qui se fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction, & ajoûtant au produit le numerateur. Comme si nous voulons reduire $4q + \frac{2\mathcal{R}}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$ à une même denomination, nous multiplierons premierement $4q$ par $1c$, afin que nous ayons ces deux fractions $\frac{4\beta+2\mathcal{R}}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$, lesquelles nous reduirons à ces deux-cy $\frac{4qc+2qc}{1qqq}$ & $\frac{3\beta}{1qqq}$; & ainsi des autres.

Quant aux autres quatre operations des fractions cossiques, sçavoir est, adition, soustraction, multiplication & division, elles ne different à cel-

les que nous avons enſeignées és fractions de nôtre Arithmetique, ſinon à raiſon des caracteres coſſiques, & des ſignes + & —. parquoy nous mettrons ſeulement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Ajoûtant $\frac{3\mathcal{R}}{5q}$ avec $\frac{7c}{5q}$, viendront $\frac{3\mathcal{R}+7c}{5q}$ car pour ce que les denominateurs sõt ſemblables il n'y-a qu'à ajoûter les numerateurs entr'eux, & à la ſomme d'iceux ſouſcrire le même dominateur. Item ſi on ajoûte $\frac{3\mathcal{R}}{2N}$ avec $\frac{4q}{3c}$ viendront pour leur sõme $\frac{9q+8q}{6\mathcal{R}}$. c'eſt à dire $\frac{9q+8}{6\mathcal{R}}$: Item $\frac{48}{7q}$ ajoûtez avec $\frac{48}{12\mathcal{R}-3q}$ font $\frac{192q+576\mathcal{R}}{84c-21qq}$, qui étans reduits tant au regard des nombres que des ſignes, font $\frac{64\mathcal{R}+192}{28q-7c}$. Item $\frac{9\mathcal{R}+2q}{36c}$ ajoûtez avec $\frac{21qq-8q}{36c}$ font $\frac{21qq-6q+9\mathcal{R}}{36c}$ qui reduits comme deſſus font $\frac{7c-2q+3}{12q}$: Item $\frac{5q-3\mathcal{R}}{7c-2}$ ajoûtez avec $\frac{3c+1}{2qq+4\mathcal{R}}$ font $\frac{35qc-6\beta+21c-129}{146\beta+24qq-8\mathcal{R}}$

Exemples de la ſouſtraction.

Oſtant $\frac{3N}{2q}$ de $\frac{5c}{2q}$, reſteront $\frac{5c-3}{2q}$: car d'autant que les dominateurs ſont ſemblables, il n'y a qu'à ſouſtraire le numerateur 3. du numerateur $5c$, & au reſte $5c-3$, apoſer le même denominateur mais ſi on ôte $\frac{3\mathcal{R}}{2N}$ de $\frac{9q+8q}{6c}$ reſteront $\frac{16q}{12c}$, c'eſt à dire $\frac{4N}{3\mathcal{R}}$ Item $\frac{1}{2q}$ de $\frac{3\mathcal{R}}{4N}$, reſteront $\frac{6c-4}{8q}$: Item $\frac{2\mathcal{R}-3}{4N}$ de $\frac{4}{2\mathcal{R}+3}$, reſteront $\frac{25-4q}{8\mathcal{R}+12}$: Item $\frac{9q+\mathcal{R}2}{2c-6N}$ de $\frac{11c+16q+8}{2c-6N}$,

reſteront $\frac{11c+79}{2c-6N}$.

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4R}$ par $\frac{1}{2R}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$ par $\frac{1R}{4}$ vient $\frac{1R}{8q}$: Item $\frac{3R}{4q}$ par $\frac{1q}{2c}$, viendront $\frac{3c}{8\beta}$: Item $\frac{2R}{3}$ par $1R-5$, viendront $\frac{2q-10R}{3}$: Item $\frac{3+R^2}{2R-4}$ par $\frac{4q-1R}{7q+8R}$ viendront $\frac{6q-8R-8}{1q+\infty}$: Item $\frac{5c-11}{4R-8N}$, viendront $\frac{499-1c+12q-3R}{32q-280qq-292c}$

$$25\beta-55q$$

Exemples de la diviſion.

Diviſant $\frac{3}{8q}$ par $\frac{1}{2R}$, viendront $\frac{6R}{8q}$, ou $\frac{3}{4R}$: Item, $\frac{1R}{8q}$ par $\frac{1}{4R}$, viendront $\frac{4q}{8q}$, ou $\frac{1}{2}$: Item, $\frac{5c}{8\beta}$ par $\frac{3R}{4q}$ viendront $\frac{12\beta}{24qc}$, ou $\frac{1}{2R}$: Item $\frac{2q-10R}{3}$ par $\frac{2R}{3}$, viendront $1R-5$: Item $\frac{6q-8R-3}{499-1c+12q-3R}$ par $\frac{2R}{1q+4}$ viendront $\frac{3R+2}{+9-1R}$.

Quant à la preuve de ces quatre operations, elle ſe fait en la même maniere que celle des entiers.

De la reîgle d'Algebre.

CHAP. VII.

Eſtant propoſée quelque queſtion, ſoit poſé pour le nombre inconnu 1R, *(on peut auſſi quelquesfois poſer pluſieurs racines, comme deux, ou trois, ou davantage pour la commodité de la queſtion propoſée) laquelle*

ſoit examinée ſelon la teneur de la queſtion, iuſques à ce qu'on ait trouvé quelque equation : Soit icelle reduite, s'il en eſt beſoin ; puis apres, par le nombre du plus grand caractere coſſique ſoit diviſé l'autre nombre de l'equation : Car ou le quotient ſera le nombre qui eſtoit cherch , ſcavoir eſt la valeur de la racine poſée au commencement, ou bien quelque racine du quotient rendra connu le nombre cherché. Or le diviſeur demontrera par ſon caractere coſsique , quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.

Or il apert que cette regle a quatre parties, dont la premiere eſt l'invention d'une Equation ; la ſeconde, la reduction de l'Equation trouvée ; la troiſiéme, la diviſion d'un nombre de l'Equation par le nombre du plus grand caractere coſſique ; & la derniere, l'extraction de quelque racine du quotient de ladite diviſion. Mais de ces quatre parties il y en a ſeulemẽt deux du tout neceſſaires : ſçavoir eſt la premiere & troiſiéme : & quant aux deux autres, il n'en eſt pas touſiours beſoin. Et avant que de traiter particulierement de chacune d'icelles, nous les expoſerons icy, propoſant ce probleme.

Trouver un nombre , duquel la tierce & quarte partie eſtans oſtez , le nombre reſtant ſoit 10.

Je poſe le nombre inconnu être 1℞ ; c'eſt à dire que ie poſe 1℞ être egale au nombre inconnu que nous cherchons. J'examine donc 1℞ ſelon la teneur de la queſtion, c'eſt à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ſçavoir eſt $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, qui ſont enſemble $\frac{7}{12}$ ℞, que i'oſte de 1 ℞, & reſtent $\frac{5}{12}$ ℞. Maintenant ie ratiocine ainſi : puiſque 1 ℞ eſt poſée egale à tout le nombre inconnu ; $\frac{1}{3}$ ℞ ſera egal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ ℞ egal au quart du même ; & puiſque

la tierce & quarte partie du nombre total êtant ſouſtraite, le nombre reſtant eſt 10, il s'enſuit que $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, c'eſt à dire $\frac{7}{12}$ ℞ êtans ôtez de 1 ℞, le nóbre reſtant $\frac{5}{12}$ ℞ être egal au nombre reſtant 10, pource que ſi de choſes egales ſont ôtées choſes egales, les reſtes ſont egaux. Eſt donc trouvée equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}$ ℞, & ce nombre 10 : car equation n'eſt autre choſe qu'une egalité de valeur entre deux quantitez, ou choſes diverſement dénommées : & voila quant à la premiere partie de la regle cy-deſſus. Et pour le regard de la ſeconde partie, qui eſt la reduction, il n'en eſt beſoin en l'equation de nôtre exemple : mais nous montrerons cy-apres, quand & comment l'equation ſe doit reduire. Et pour le regard de la diviſion, qui eſt la 3ᵉ partie de la reigle ; en nôtre equation trouvée entre $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 N, le plus grand caractere coſſique eſt ℞ : c'eſt à dire que ℞ a plus grand expoſant que N : parquoy ie diviſe ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reſte du caractere ℞, & vient au quotient 24, qui eſt le nombre cherché. Parquoy la 4ᵉ partie de la regle d'Algebre n'a lieu en nôtre exemple : mais quand, & quelle racine du quotient manifeſtera le nombre inconnu, il ſera enſeigné cy apres. Maintenant ſi du nombre trouvé 24 on prend $\frac{1}{3}$, ſçavoir eſt 8 : puis $\frac{1}{4}$, ſçavoir eſt 6 : icelles deux parties font enſemble 14, qui ôtez des 24, reſte le nombre 10, ainſi qu'il êtoit requis en la propoſition.

De la reduction d'Equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligence de la reduction des equations, eſt à noter, que ſi on ajoûte ou ſouſtrait choſes égales de châque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou diviſe par un même nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produits. Comme pour exemple, s'il y a equation entre 12 ℛ, & 72; ôtant 4 ℛ de châque terme, reſtera encore equation entre 8 ℛ, & 72 — 4 ℛ: car puiſque 12 ℛ ſont égales à 72, 1 ℛ ſera égale à 6; & partant 8 ℛ ſeront égales à 48, & 4 ℛ à 24, qui ôtez de 72, reſtera auſſi 48. Item ſi à châque terme de l'equation d'entre 8 ℛ, 72 — 4 ℛ, on ajoûte 10, viendra equation entre 8 ℛ + 10, & 82 — 4 ℛ. Car il eſt manifeſte que chaque terme vaut 58. Item s'il y a equation entre 3 ℛ + 12, & 72 — 7 ℛ; multipliant châque terme par 2, viendra auſſi equation entre 6 ℛ + 24, & 144 — 14 ℛ: car l'un & l'autre terme fait 60. Ainſi auſſi ſi nous diviſons par 6 châque terme de cette derniere equation, ſera produit equation entre 1 ℛ + 4, & 24 — 2 $\frac{1}{3}$ ℛ: car l'un & l'autre terme fait 10.

Maintenant quand en la ſolution de quelque queſtiõ on eſt parvenu à l'equation; ſi le plus grand caractere coſſique, par le nombre duquel (ſelon la reigle d'Algebre) on doit diviſer l'autre terme de l'equation n'eſt poſé ſeul en l'un & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'étant ſeul en l'un il ne le ſoit en l'autre, alors la diviſion ne ſe peut faire.

Comme pour exemple, si l'equation est trouvée entre 9℟ + 12, & 78 — 2℟, la division ne se peut faire, pource qu'en chaque terme est trouvé ce caractere ℟, & certui-cy N : Semblablement si l'equation est trouvée entre 9℟ — 12, & 42 : tu vois que la division ne se peut aussi faire par 9 nombre du plus grand caractere cossique ℟, pource que 9℟ ne sont pas posées seules, ains 9℟ — 12.

Ainsi aussi, si l'equation est trouvée entre 9 ℟, & 72 — 3 ℟ : Item entre 1q — 3 ℟, & 108 : Item entre 1q — 48, & 8 ℟ : Item entre 108 + 8 ℟, & 2q — 12 ℟ + 60 &c. en toutes lesquelles il est manifeste que la division ne se peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy advenant semblables equations, elles doivent être reduites en autres, esquelles le plus grand caractere cossique soit seul en un terme de l'equation, & ne soit repeté en l'autre, & esquelles aucun caractere cossique ne soit posé deux fois. Or cette reduction se fera ainsi qu'il ensuit.

Si une particule de l'equation a le signe —, il la faut transposer, c'est à dire adioûter à l'autre terme: comme si une equation est trouvée entre 9℟ — 12, & 42, nous ajoûterons 12 à châque terme, & nous aurons l'equation entre 9℟, & 54: Item une equation étant trouvée entre 9℟ & 72 — 3℟; ajoûtant 3℟ à chaque terme, nous aurons l'equation entre 12 ℟, & 72 : Item une equation étant trouvée entre 2q — 3 ℟, & 104; ajoûtant 3 ℟ à chaque terme, l'equation se a entre 2q, & 3℟ + 104 : Item une equation étant entre 5 q — 40, & 10℟; ajoûtant 40, nous aurons une equation entre 5q & 10℟ + 40. Mais quand une particule a

le signe +, il la faut soustraire : comme si l'equation est trouvée entre 11ℛ +12, & 78, nous soustrairons +12, & restera l'equation entre 11ℛ, & 66 : Item l'equation étant trouvée entre 3ℛ + 6, & 24 ; ôtant +6, restera l'equation entre 1ℛ, & 18: Item si une equation est trouvée entre 5 q +20, & 100, nous ôterons + 20, & restera l'equation entre 5q & 80: Item une equation étant entre 3q + 2ℛ, & 56 ; ôtant + 2ℛ, l'equation restera entre 3q, & 56 — 2ℛ. Que si l'un & l'autre signe +& — sont en une equation, il faut ajoûter la particule du signe —, mais soustraire celle du signe +: comme si une equation est trouvée entre 9ℛ +12, & 78 — 2ℛ, nous ajoûterons premierement — 2ℛ, & l'equation sera entre 11ℛ +12, & 78 : puis soûtrayant d'icelle +12, restera l'equation entre 11ℛ, & 66: Item si une equation est entre 5q — 3ℛ, & 3q + 20, nous ajoûterons 3ℛ, & l'equation sera entre 5q, & 3q + 3ℛ + 20: & ôtant de cette-cy 3q, restera l'equation entre 2q, & 3ℛ + 20: Item si une equation est trouvée entre 108 + 8ℛ, & 2q — 12ℛ + 60 : nous adioûterons premierement 12ℛ, & l'equation viendra entre 108 + 20ℛ, & 2q — 60 : & d'icelle étans ôtez 60, restera l'equation entre 2q, & 20ℛ + 48. Que s'il advient quelque equation, comme entre 6ℛ — 10, & 10ℛ — 34, en laquelle les nombres 10,& 34 ont même signe —, il faut ôter 10 de chaque terme,& restera l'equation entre 6ℛ,& 10ℛ — 24: & d'autant qu'en icelle les nombres 6ℛ & 10ℛ ont aussi un même signe +, il faut ôter le moindre nombre 6ℛ du plus grand 10ℛ, & restera l'equa-

tion entre 0ℛ, & 4ℛ — 24 : & ajoûtant 24 à chaque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24, & 4ℛ. Soit derechef equation entre 54 + 4ℛ, & 1 q — 6ℛ + 30 : Premierement pource que + 4ℛ, & — 6ℛ ont signes divers, il faut ajoûter 4ℛ à 6ℛ, & viendront — 10ℛ ; & sera equation entre 54, & 1q — 10ℛ + 30 : puis apres, d'autant que 54 & 30 ont un même signe, il faut soustraire 30 de 54, & restera equation entre 24 & 1q — 10ℛ : Tiercement je transpose — 10ℛ, afin que l'equation soit entre 1q, & 10ℛ + 24 : & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equations qui sont trouvées en fractions, elle se fait la reduisant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme si une equation est trouvée entre $\frac{3ℛ + 12}{5}$ & $\frac{36q - 192ℛ}{3ℛ}$: multipliant ces fractions en croix, sçavoir est le numerateur de la premiere par le denominateur de la seconde, mais le numerateur de la deuxiéme par le denominateur de la premiere, sera fait equation entre 9q + 36ℛ & 180q — 990ℛ, c'est à dire entre 1ℛ + 4, & 20ℛ — 110, qui étant reduite, comme dit est cy-dessus l'equation sera entre 19ℛ, & 114 : Item une equation étant trouvée entre $\frac{4ℛ + 18}{1ℛ}$, & $\frac{12ℛ - 58}{2}$: étant reduite par la multiplication en croix, viendra equation entre 8ℛ + 36, & 12q — 58ℛ, qui reduite par transposition sera entre 66ℛ + 36, & 12q.

Que si une equation est trouvée entre une fraction, & quelqu'autre chose, comme entre $\frac{5}{4 + 1ℛ}$ & un escu, ou un degré, ou une heure, ou une minute.

minute, &c. Il faut poſer une unité pour cette choſe ainſi $\frac{1}{1}$, afin que l'equation ſoit entre $\frac{5}{4+1\,\mathcal{R}}$ & $\frac{1}{1}$, laquelle par la multiplication en croix, ſera reduite à l'equation d'entre 5 & $4+1\mathcal{R}$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres coſſiques irrationaux, & un nombre abſolu, nous l'enſeignerons à la fin du chapitre 22.

S'il ſe rencontre auſſi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre abſolu, il faudra abrevier les caracteres coſſiques : Comme pour exemple, l'equation d'entre 2 q, & 12 $\mathcal{R}$ ſera reduite à l'equation d'entre 2 $\mathcal{R}$ & 12 : Item l'equation d'entre 1 qc, & $1\beta+2qq$ ſera reduite à l'equation d'entre 1 q, & $1\,\mathcal{R}+2$, &c. Mais cette reduction n'eſt du tout neceſſaire devant l'extraction des racines des nombres coſſiques ſimples, comme nous dirons au chap. 10.

De la diviſion que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction étant faite, la regle d'Algebre dit que par le nombre du plus grand caractere coſſique (laiſſant iceluy caractere) on diviſe l'autre nombre de l'equation: comme ſi l'equation eſt trouvée entre 7 $\mathcal{R}$ & 42; diviſant 42 par 7, nombre du caractere coſſique $\mathcal{R}$, viendra au quotient 6, qui ſera la valeur d'une racine : Item une equation étant trouvée entre 12 q, & $66\,\mathcal{R}+36$: diviſant $66\,\mathcal{R}+36$ par 12, le quotient donnera $5\frac{1}{2}$ & $+3$, pour la valeur d'un quarré : Item ſi une equation eſt entre $\frac{1}{3}q$, & ſi $\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$, nous diviſerons $6\,\mathcal{R}+13\frac{1}{3}$

par $\frac{1}{5}$, & le quotient donnera 18 ℛ + 40, pour la valeur d'un quarré : Item une equation étant entre 3 qc, & $9c$ + 120, nous diviserons $9c$ + 120 par 3, & le quotient donnera $3c$ + 40 pour la valeur d'un quarré de cube, &c.

De l'extraction des racines dont est fait mention en la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant fait la reduction des caracteres cossiques, si le plus grand caractere cossique est ℛ ; le quotient de la division mentionnée cy-cessus manifestera le nombre que vaut une seule racine, comme il a été dit au chapitre precedent : ou bien toutes & quantesfois qu'un nombre cossique de grande denominatiou sera egal à un nombre cossique de la prochaine moindre denomination; étant divisé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'une seule racine, encore que l'abreviation des caracteres ne soit faite. Comme si 5 ℛ sont egaux à 30qq;30 étans divisez par 5, le quotient 6 sera la valeur d'une seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, étant seul d'une part de l'equation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit un nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractete signifie : comme si le caractere est q, il faudra extraire la racine quarrée; si c, la cubique; si qq, la quarrée de quarrée, &c. laquelle sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, Si une equation est entre 5 q, &

$\frac{9}{16}$; ayant fait la diviſion, il faudra cercher la racine quarrée du quotient 144: Item ſi 10 *c* ſont egaux à 270, il faudra ayant fait la diviſion extraire la racine cubique du quotient 27: Semblablement ſi 8 *qq* ſont egaux à 128, il faudra trouver la racine quarrée de quarré du quotient. Et afin qu'on ſçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres coſſiques non collateraux ſont egaux entr'eux, deſquels l'un ny l'autre n'eſt nombre abſolu, il faut abrevier les caracteres, afin que l'equation ſe faſſe entre N, & nombre coſſique; comme ſi une equation eſt entre 10 *qc* & 80 *q*, ſoit reduite icelle à l'equation d'entre 10 *c*, & 80: la diviſion étant donc faite, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8, & ainſi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nõbres abſolus eſt ſuffiſamment enſeignée en nôtre Practique d'Arithmetique; c'eſt pourquoy nous enſeignerons ſeulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres coſſiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'un nõbre coſſique ſimple ſoit priſe la racine d'iceluy nombre, delaiſſant le caractere, l'expoſant duquel ſoit diviſé par l'expoſant du caractere qui denomme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'expoſant du caractere, par lequel ſera denommé la racine cerchée. Comme s'il faut trouver la racine quarrée de ce nombre 144 *q*; ayant pris la racine quarrée d'iceluy nombre 144, qui eſt 12, ſoit diviſé l'expoſant de ce caractere *q*, par l'expoſant du caractere *q*, ſçavoir eſt 2 par 2, & viendra 1, qui eſt expoſant du caractere R: 12 R eſt donc racine quarrée du nombre 144 *q*. Car ſi ce nombre 12 R eſt mul-

tiplié en ſoy, ſera produit le nõbre proposé 144 *q*.

Derechef, qu'il faille trouver la racine quarrée de 144*qc*; ayant pris la racine quarrée d'iceluy, qui eſt 12, ſoit diviſé l'expoſant de ce caractere *qc*, ſçavoir eſt 6, par l'expoſant de racine quarrée, qui eſt 2, & viendra 3, expoſant du caractere *c*: donc 12 *c* eſt racine quarrée du nombre 144*qc*. Ainſi auſſi la racine cubique de ce nombre 64*c*, ſera 4ℛ. Car la racine cubique du nombre 64 eſt 4, & l'expoſant du caractere cube, ſçavoir eſt 3, étant diviſé par 3, produit l'unité, expoſant de ℛ. Item la racine quarrée de ce nombre 25*qq*, ſera 5 *q*. Et la racine quarrée de quarrée de ce nombre 16*qqq*, ſera 2*q*. Semblablement la racine ſurſolide de ce nombre 32*qß*, ſera 2*q*. Mais la racine quarrée de quarrée de ce nombre 81 *qq*, ſera 3ℛ, &c.

Que ſi un nombre n'a la racine cherchée, ou que par la diviſion des expoſans ne ſoit pas produit un nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſirée. Comme par exemple, ce nombre 16*c*, n'a pas de racine quarrée ou cubique, car encore que le nombre 16 ait racine quarrée, ſçavoir 4, ſi eſt-ce neanmoins qu'icelle racine ne ſe peut prendre, à cauſe que diviſant 3, expoſant du caractere *c*, par 2 expoſant de la racine quarrée, provient $1\frac{1}{2}$, qui ne correſpond à aucun caractere coſſique. Derechef, encore ne diviſant 3, expoſant de ce caractere *c*, par 3, expoſant de la racine cubique, provienne 1, expoſant de ce caractere ℛ, toutefois icelle racine cubique ne ſe peut prendre, parce que le nombre 16 n'eſt nombre cube, &c.

Quant à l'extraction des racines des nombres coſſiques compoſez & diminuez, il eſt à noter qu'on

n'a point encore trouvé (au moins que ie ſçache) de maniere certaine & univerſelle pour ce faire, ſinon que les expoſans des trois nombres coſſiques de l'equation ayent un même excez entr'eux, c'eſt à dire qu'ils ſoient en proportion Arithmetique; & telles ſont les equations ſuivantes.

1q. 6 ℟ +72.	les expoſans ſont 2.1.0.
1q. 72 — 6 ℟.	les expoſans ſont 2.0.1.
1q. 14 ℟ — 48.	les expoſans ſont 2.1.0.
1qq. 18q +648.	les expoſans ſont 4.2.0.
1qq. 725 — 4q	les expoſans ſont 4.0.2.
1qq. 4339 — 41616.	les expoſans ſont 4.2.0.
1qc. 200c +3456.	les expoſans ſont 6.3.0.
1qc 5120 — 16c.	les expoſans ſont 6.0.3.
1qc. 800c — 156751.	les expoſans ſont 6.3.0.
1qqq. 200qq +185076881.	les expoſans ſont 8.4.0.
1qqq. 21465170 1 — 209q.	les expoſans ſont 8.0.4.
1qqq. 2000qq — 78461119.	les expoſans ſont 8.4.0.
1qſſ. 80ſſ +39609.	les expoſans ſont 10.5.0.
1qſſ. 7424 — 200ſſ.	les expoſans ſont 10.0.5.
1qſſ. 2030ſſ — 999424.	les expoſans ſont 10.5.0.
&c.	

Quand les expoſans gardant la progreſſion Arithmetique ſont tous plus grands que 0, il les faut abrevier par la ſouſtration du moindre nombre expoſant; comme les ſuivantes équations.

1cſſ. 725bſſ — 4cc.	les expoſans ſont 11.7.9.
1cſſ. 200qqq +3456ſſ.	les expoſans ſont 11.8.5.
1qſſ. 200qc +14336q.	les expoſans ſont 10.6.2.

Seront reduites à celles-cy.

1qq. 725—4q.	les expoſans ſont	4. 0. 2.
1qc. 200c +3456.	les expoſans ſont	6. 3. 0.
1qqq. 200qq +14336.	les expoſans ſont	8. 4 0.

Et ainſi faut-il faire de toutes autres, afin de connoître qu'elle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarrée des nombres coſſiques dont les expoſans ſont 2, 1, 0, ou bien 2, 0, 1, vous ferez ainſi qu'il enſuit.

Premierement, prenez la moitié du nombre des racines, puis au quarré d'icelle moitié, ajoûtez-y le nombre abſolu, s'il a le ſigne +, ou l'ôtez s'il a le ſigne —: & finalement a la racine quarrée de ce produit, ajoûtez la moitié du nombre des racines, ſi elles ont le ſigne +, ou l'ôtez ſi elles ont le ſigne —: & ce qui viendra donnera l'eſtimation & valeur d'une ſeule racine quarrée.

Comme pour exemple, une équation êtant trouvée entre 1q, & 72— 6R; la diviſion êtant faite de 72— 6R, par 1: comme veut la regle d'Algebre, vient le même nombre pour la valeur d'un quarré, duquel il faut trouver la racine. Premierement donc ie prens la moitié du nombre des racines, ſçavoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, ſçavoir eſt à 9, i'ajoûte le nombre abſolu 72., à cauſe du ſigne +, & viennent 81; dont ie prend la racine quarrée, qui eſt 9; & d'icelle j'ôte 3, moitié du nombre des racines, & reſte le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchée.

Soit derechef une équation trouvée entre 1q, &

6 ℛ + 72 : & il faut trouver la racine quarrée de ce nombre 6 ℛ + 72. Je prends premierement la moitié du nombre des racines, ſçavoir eſt 3 : puis au quarré d'icelle moitié, qui eſt 9, j'adjoûte 72, à cauſe du ſigne +, & ſont 81, dont la racine quarrée eſt 9, à laquelle j'adjoûte 3 moitié du nombre des racines, & ſont 12, qui eſt la valeur d'une racine.

Soit encore une equation entre 1 *q*, & 18 ℛ — 72 : & il faut trouver la racine d'iceluy nombre 18 ℛ — 72. Je prends donc la moitié des racines, ſçavoir eſt 9 ; puis du quarré d'icelle moitié, qui eſt 81, ie ſouſtrais 72, à cauſe du ſigne —, & reſtent 9, dont la racine quarrée eſt 3, à laquelle j'adjoûte la moitié des racines, ſçavoir eſt 9, à cauſe du ſigne +, & ſont 12 pour la valeur d'une racine.

Mais il eſt à noter que tels nombres coſſiques diminuez, eſquels le nombre abſolu à le ſigne —, ont double racine, ſçavoir eſt, l'une grande & l'autre petite ; la grande eſt trouvée comme dit eſt cy-deſſus : mais on aura la moindre, ſi la racine quarrée du reſte de la ſouſtraction eſt ôtée de la moitié du nombre des racines : comme au dernier exemple propoſé, ſi 3, racine quarrée du reſte 9, eſt ôté de 9, moitié du nombre des racines, reſteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre coſſique 18 ℛ — 72. Et faut noter que l'une & l'autre racine n'eſt pas toûjours propre à la ſolution d'un probleme, ains ſeulement l'une ou l'autre : c'eſt pourquoy advenant tels nombres, ſi l'examen fait par l'une d'icelles racines ne répond à la queſtion, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore une autre maniere d'extraire la

racine quarrée de tels nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair, ou rompu, laquelle extraction se fait ainsi:

Au quarré du nombre des racines, adjoûtez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez s'il a le signe —: puis à la racine quarrée de ce produit adjoûtez ou soustrayez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarrée, parquoy la moitié sera la valeur d'une seule racine.

Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique 72 — 6 ℞: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, j'adjoûte 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarrée est 8, de laquelle j'ôte le nombre des racines, sçavoir est 6, & restent 12 pour la valeur de deux racines, & partant une racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nõbres cossiques, qui constituënt equation, ayans les exposans constituez en telle progression Arithmetique que ceux-cy, 4, 2, 0: ou 4, 0, 2: ou 6, 3, 0: ou 6, 0, 3: ou 8, 4, 0; ou 8, 0, 4: ou 10, 5, 0: ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractere est toûjours composé de *q*, & d'un autre caractere cossique: il faut premierement extraire la racine quarrée, à cause du caractere *q*, selon qu'il est enseigné cy-dessus, accommodant au nombre qui est affecté au caractere cossique, en cette partie là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous avons dit du nombre des racines, comme si l'equation êtoit entre trois nombres cossiques af-

ſectez aux caractetes *q*. ℞. & N. puis apres de cette racine quarrée trouvée, ſoit qu'elle ſoit rationelle ou irrationelle, il en faut tirer une autre racine, ſelon l'autre partie du plus grand caractere coſſique, ce caractere *q* êtant ôté. Comme pour exemple, ſi une equation eſt trouvée entre 1 *qq*, & 18 *q* — 648 : Il faudra extraire la racine quarrée de ce nombre 18 *q* — 648, à cauſe de la premiere partie du ſigne coſſique *q*, tout ainſi que ſi l'equation êtoit trouvée entre 1 *q*, & 18 ℞ — 648, laquelle racine quarrée ſera 36 : & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarrée qui ſera 6 : parquoy 6 ſera la racine du nombre coſſique propoſé.

En la même maniere, ſi une equation eſt entre 1 *qc*, & 5120 — 16 *c* : il faudra prendre la racine quarrée du nombre 5120 — 16 *c*, & de cette-cy prendre la racine cubique. Ainſi auſſi ſi l'equation eſt entre 1 *qqq*, & 20000 *qq* — 78461119, il faudra premierement prendre la racine quarrée : & puis apres de cette-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainſi des autres.

Or afin de tant plus faciliter l'intelligence des regles & preceptes iuſques icy enſeignez, nous leur adjoindrons les 12. queſtions ſuivantes.

1. *Trouver deux nombres, deſquels la difference ſoit donnée, & en raiſon donnée.*

Qu'il faille trouver deux nombres, dont la difference ſoit 20, & leur raiſon quintuple. Soit poſé le moindre nombre être 1 ℞. Donc le plus grand ſera 5 ℞, ſçavoir eſt le quintuple d'iceluy : l'excez d'iceux eſt 4 ℞. Il y a donc equation entre 4 ℞ & 20 : & diviſant 20 par 4, viendra 5 pour 1 ℞. Parquoy le moindre nombre requis ſera 5, & le plus

grand 25, qui eſt quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Trouver trois nombres continuellement proportionnaux en une raiſon donnée, deſquels les quarrez enſemble faſſent un nombre donné.*

Qu'il faille trouver trois nombres continuellement proportionnaux en raiſon ſeſquitierce, deſquels les quarrez faſſent 4329. Soient poſez les nombres cherchez être 9 ℞, 12 ℞, 16 ℞, qui ſont en proportion ſeſquitierce. Les quarrez d'iceux, ſçavoir 81 *q*, 144 *q*, 256 *q*, ſont enſemble 481 *q*, egaux à 4329. Diviſant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1 *q*, & par conſequent 1 ℞ ſera 3. Donc le premier nombre poſé 9 ℞, ſera 27: le ſecond 36, & le tiers 48, deſquels les quarrez 729, 1296, 2304 ſont enſemble 4329.

3. *Trouver deux nombres en raiſon donnée, & qui multipliez entr'eux faſſent un nombre ayant raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouver deux nombres en raiſon ſeſquialtere, tels que leur produit ſoit dodecuple de la ſomme d'iceux. Soient poſez les deux nombres être 2 ℞, & 3 ℞, qui eſt raiſon ſeſquialtere. Eſtans multipliez entr'eux ils font 6 *q*, & leur ſomme eſt 5 ℞. Afin donc que 6 *q* ayent raiſon dodecuple à 5 ℞, l'equation ſera entre 6 *q* & 60 ℞. Diviſant donc 60 par 6, viendrõt 10 pour la valeur de 1 ℞, pource que les denominations coſſiques *q*. & ℞. ſont collaterales. Veu donc que le premier nombre a été poſé 2 ℞, & le ſecõd 3 ℞, celuy-là ſera 20, & cettui-cy 30: & iceux multipliez entr'eux ſont 600, qui eſt dodecuple de 50, ſomme d'iceux.

4. *Trouver deux nombres en raiſon donnée, tels*

que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, produiſe un nombre donné.

Qu'il faille trouver deux nombres en raiſon ſeſquiquinte, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand faſſe le nombre 4860. Poſons que les nõbres cherchez ſojent, 5 ℛ & 6 ℛ, leſquels ſont en raiſon ſeſquiquinte. Or le moindre 5 ℛ étant multiplié par le quarré du plus grãd, ſçavoir eſt par 36 *q* fait 180 *c*, qui partant ſont egaux au nombre donné 4860. Diviſant donc 4860 par 180, viendront 27 pour 1 *c*, & prenant la racine cubique dudit nombre 27, à cauſe du caractere *c*, icelle racine ſera 3. Parquoy le moindre nombre que nous avons poſé être 5 ℛ ſera 15: & le plus grand 6 ℛ, ſera 18. Or le quarré d'iceluy, qui eſt 324, étant multiplié par le moindre nombre 15, produit le nombre quarré 4860.

5. *Eſtans donnez deux nombres inegaux, en trouver deux autres en raiſon donnée, tels que le plus grand oſté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les reſtes ſoient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 & 60: & il en faut trouver deux autres, en raiſon ſeptuple, & que le plus grand ôté de 100, & le moindre de 60, les reſtes ſoient egaux.

Soient poſez pour les nõbres en raiſon ſeptuple 1 ℛ & 7 ℛ. Les nombres egaux reſtans ſeront 100 — 7 ℛ. & 60 — 1 ℛ. Ajoûtant donc 7 ℛ à chacun, l'equation ſera entre 100, & 60 + 6 ℛ: & ôtãt 60 de chacun, elle ſera entre 40, & 6 ℛ. Et diviſant 40 par 6, viendra pour 1 ℛ, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand ſeptuple de cettui-cy ſera $46\frac{2}{3}$. Et ôtant celuy-là de 60, & celui-cy de 100, les nombres re-

ſtans ſeront egaux, ſçavoir $53\frac{1}{3}$.

6. *Eſtant donnez deux nombres, en trouver un autre, auquel étant ajoûté l'un des donnez, & ſouſtrait l'autre, la ſomme ſoit au reſte en raiſon donnée.*

Les nombres donnez ſoient 100 & 20: & il faut premierement trouver un nombre, auquel ſi on ajoûte 100, & du même on ôte 20, la ſomme ſoit triple du reſte. Soit poſé ce nombre-là être 1 ℛ; la ſomme ſera 1 ℛ + 100, & le reſte 1 ℛ — 20. Afin donc que cette ſomme-là ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1 ℛ + 100, & 3 ℛ — 60. Et ajoûtant à chacun 60, elle ſera entre 1 ℛ + 160, & 3 ℛ: & ôtant 1 ℛ, icelle equation ſera entre 160 & 2 ℛ. Diviſant donc 160 par 2, ſera trouvé 80 pour 1 ℛ, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on ajoûte 100, on aura 180: mais ſi on en ôte 20, reſteront 60: & 180 eſt à 60 en raiſon triple.

Qu'il faille maintenant trouver un nombre, auquel ſi on ajoûte 20, & du même on ſouſtrait 100, cette ſomme-là ſoit triple de ce reſte-cy. Soit poſé ce nombre-là être 1 ℛ, & ſera fait la ſomme 1 ℛ + 20, & reſtera 1 ℛ — 100. Afin donc que cette ſomme ſoit triple de ce reſte, l'equation ſera entre 1 ℛ + 20, & 3 ℛ — 300. Et ajoûtant 300 à chacun, elle ſera entre 1 ℛ + 320, & 3 ℛ: & ôtant 1 ℛ de chacun, l'equation ſera entre 320, & 2 ℛ. Diviſant donc 320 par 2 viendra 60 pour 1 ℛ, qui eſt le nombre cherché. Car ſi à iceluy on ajoûte 20, on aura 180; & ſi on en ôte 100, reſteront 60: & iceux deux nombres 180, & 60, ſont entr'eux en raiſon triple.

7. *Trouver deux nombres en raiſon donnée, & que le quarré du plus grand ſoit au moindre auſſi en raiſon donnée.*

Que les nombres cherchez ayent raiſon triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raiſon ſextuple. Soit poſé le moindre 1 ℞, & le plus grand 3 ℞. Le quarré du plus grand, ſçavoir 9q, doit avoir raiſon ſextuple au moindre 1 ℞: Donc l'equation ſera entre 9q, & 6 ℞. Et diviſant 6 par 9, viendra $\frac{2}{3}$ pour 1 ℞. pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Les nombres cherchez ſont donc $\frac{2}{3}$ & 2, ayans raiſon triple, & le quarré du plus grand, ſçavoir 4, eſt en raiſon ſextuple au moindre, ſçavoir à $\frac{2}{3}$.

8. *Etant donné un nombre compoſé de deux quarrez, le diviſer en deux autres quarrez.*

Soit le nombre donné 34, compoſé des deux quatrez 9 & 25, qu'il faut diviſer en deux autres quarrez. Les côtez des quarrez donnez ſont 3 & 5: ſoit poſé le côté du premier quarré cherché être 1℞ +3, ſçavoir une racine plus que le côté du premier quarré donné: mais le côté du ſecond quarré cherché, ſoit poſé quelconque nombre de racines moindre que le côté du ſecõd quarré dõne, ſçavoir 2℞—5. Les quarrez d'iceux côtez ſeront 1q + 6 ℞ +9, & 4q— 20℞ +25, qui ajoûtez enſemble, ſont 5q +34 14℞ egal au nombre donné 34: ajoûtant dõc 14℞ à chacun, l'equation ſera entre 5q +34, & 14℞ +34. & ôtant 34 de chacun, reſtera l'equation entre 5q, & 14℞. Diviſant donc 14 par 5 viendront $\frac{14}{5}$, pour 1℞, pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Donc le côté du premier quarré, lequel nous avons poſé être 1℞ + 3. ſera $\frac{29}{5}$: & le côté du ſecond quarré, lequel a été poſé de 2℞ — 5, ſera $\frac{20}{5}$ — 5, c'eſt à dre $\frac{3}{5}$

Les quarrez d'iceux côtez trouvez ſont $\frac{841}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui ſont enſemble $\frac{850}{25}$, c'eſt à dire 34 nombre donné.

9. *Eſtans donnez deux nombres, en trouver un autre qui ajoûté à l'un d'iceux; & la ſomme multipliée par iceluy trouvé, produiſe le quarré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouver un autre, qui ajoûté au premier 10, faſſe un nombre, qui multiplié par iceluy ajoûté, produiſe le quarré de l'autre nombre 12, ſçavoir 144. Soit poſé le nombre cherché 1 ℛ, l'ajoûtant à 10, viendra 1 ℛ + 10, qui multiplié par 1 ℛ, fait 1 *q* + 10 ℛ, lequel doit être egal à 144. Oſtant donc 10 ℛ de chacun, l'equation ſera entre 1 *q* & 144 — 10 ℛ, laquelle ſe reſoudra ainſi: La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel ajoûtant 144, vient 169, dont la racine quarrée eſt 13, de laquelle ſoit ôtée la ſuſdite moitié 5, à cauſe du ſigne —, & reſtera la valeur de 1 ℛ, ſçavoir 8, nombre cherché. Car iceluy étant ajoûté à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produit eſt 144, quarré de l'autre nombre 12.

10. *Trouver un nombre, duquel le cube joint avec un nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy.*

Soit donné un nombre 702; & il en faut trouver un autre, duquel le cube étant ajoûté à iceluy nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy nombre trouvé. Poſons que le nombre cherché ſoit 1 ℛ: le cube d'iceluy ſera donc 1 *c*, & le quarré de cube 1 *qc*; qui partant ſera egal à 1 *c* + 702. Parquoy il faut prendre la racine cenſicubique de ce nombre compoſé 1 *c* + 702, en cette ſorte. La

moitié du nombre affecté au caractere c, eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$; qui étant ajouté au nombre 702, à cauſe du ſigne —, vient 702 $\frac{1}{4}$ dont la racine quarrée eſt $\frac{53}{2}$ à laquelle ſoit ajoûtée la ſuſdite moitié du nombre affecté au caractere c, & viendront $\frac{54}{2}$; c'eſt à dire 27 : qui ſera la racine quarrée dudit nombre 1 c + 702, priſe à cauſe du caractere q, qui eſt joint au plus grand caractere coſſique qc. Maintenant de cette racine quarrée 27, ſoit priſe la cubique à cauſe de l'autre caractere c, & icelle ſera 3 : qui eſt le nombre requis : Car le cube d'iceluy, ſçavoir 27, étant ajoûté au nombre donné 702, fait 729, qui eſt le quarré de cube dudit nombre 3.

11. *Trouver deux nombres tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux, eſtant diviſé par leur difference, le quotient ſoit égal à un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres, tels que leur produit étant diviſé par leur difference, le quotient ſoit 30. Soit poſé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, ſçavoir eſt 20, & ſoit poſé le plus grand entre 20 + 1 ℛ, afin que la difference d'iceux, ſoit 1 ℛ : de 20 en 20 + 1 ℛ, ſera fait le nombre 400 + 20 ℛ, lequel diviſé par 1 ℛ difference d'iceux, le quotient eſt $\frac{400 + 20\text{ ℛ}}{1\text{ ℛ}}$, égal au nombre propoſé 30. Cette equation ſera reduite par la multiplication en croix, à l'egalité d'entre 30 ℛ, & 400 + 20 ℛ, étant donc 20 ℛ de chacun, l'equation ſera entre 10 ℛ & 400 : & 400 étans diviſez par 10, viendront 40 pour la valeur de 1 ℛ, difference des nombres cherchez. Vû donc que le moindre eſt

20, le plus grand ſera 60, c'eſt à ſçavoir 20 + 1 ℞. Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diviſez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient eſt 30.

12. *Diviſer un nombre donné en deux parties, telles que la plus grande divisée par la moindre, & la moindre par la plus grande, la ſomme des quotiens ſoit donnée.*

Qu'il faille donc diviſer le nombre 10, en deux telles parties que chacune d'icelles diviſée par l'autre, les deux quotiens faſſent enſemble $4\frac{1}{4}$. Poſons que l'une des parties ſoit 1 ℞: dõc l'autre ſera 10 — 1 ℞: cette-cy étãt divisée par celle-là, le quotient ſera $\frac{10 - 1℞}{1℞}$; & celle-là diviſée par cette-cy, le quotient eſt $\frac{1℞}{10 - 1℞}$. La ſomme de ces deux quotiens ſera donc $\frac{2q + 100 - 20℞}{16℞ - 1q}$ qui doit être egale à $4\frac{1}{4}$: laquelle equation ſera reduite par multiplication croiſée à cette autre 8 *q* + 400 — 80 ℞, & 170 ℞ — 17 *q*; tellement qu'ajoûtant de part & d'autre 17 *q*, & 80 ℞; l'equation viendra entre 25 *q* + 400, & 250 ℞; mais ôtant 400, l'equation demeurera entre 25 *q*, & 250 ℞ — 400; & chaque nombre étant diviſé par le nombre 25 affecté au caractere *q*, l'egalité ſera entre 1 *q* & 10 ℞ — 16; Parquoy la racine quarrée en ſera priſe ainſi. La moitié du nombre des racines eſt 5, & le quarré 25, duquel ôtant le nombre 16, à cauſe du ſigne —, reſteront 9, dont la racine quarrée eſt 3, à laquelle ſoit ajoutée la ſuſdite moitié des racines, ſçavoir 5, & viendront 8, pour la valeur de 1 ℞, qui eſt la plus grande partie cherchée, & partant l'autre ſera 2.

ra 2. Ce qui eſt evident; car chaque partie diviſant l'autre, les deux quotiens ſont 4 & $\frac{1}{4}$, qui font enſemble le nombre donné $4\frac{1}{4}$.

Or és 12 queſtions cy-deſſus expliquées les nombres ſont abſtraits de la matiere, mais à la fin de ce traité nous en joindrons quelques autres ou les nombres ſeront joints & apliquez aux choſes materielles.

Des ſecondes racines.

CHAP. XI.

D'Autant qu'en pluſieurs operations ſont cherchez deux, ou trois, ou davantage de nombres ſous une proportion incertaine, il eſt neceſſaire pour eviter confuſion, qu'ayant poſé 1 ℞ pour le premier nombre, on ne poſe derechef 1 ℞ pour le ſecond, & encore 1 ℞ pour le 3e. C'eſt pourquoy on a excogité les ſecondes racines, leſquelles ſont nommées & figurées diverſement par les Autheurs: mais ſuivant Stifel, Pelletier & Clavius, nous retiendrons le nom de ſecondes racines, & les notterons ainſi: 1 A, ſignifie 1 ℞ ſeconde; 1 B, denotte 1 ℞ tierce; 1 C, ſignifie 1 ℞ quarte, &c. Et quand un nombre a deux ſignes, il faut entendre que le nombre avec le premier ſigne a été multiplié par l'unité du ſigne poſterieur. Comme 1 ℞ A, ſignifie 1 ℞ multipliée par 1 A; & 3 ℞ A, ſignifie 3 ℞ multipliées par 1 A: ainſi 1 *q* A *q*, montre que 1 *q* a été multiplié en 1 A *q*, &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, auſſi bien que les premieres racines. Et premiere-

ment quant à l'addition, elle eſt aiſée : car ſi elles ſont de même genre, il faut ſeulement ajoûter les nombres entr'eux, & au produit apoſer le même caractere d'icelles raçines. Comme 3 A, & 4 A, font enſemble 7 A : Item 5 B, & 3 B, font 8 B. Mais quand icelles racines ne ſont de même genre, l'addition ſe fait par le ſigne + : comme 3 A, & 4 B, font 3 A + 4 B : Item 3 ℞, & 4 A, font 3 ℞ + 4 A.

La ſouſtraction eſt auſſi aiſée : Car quand les racines ſont de même genre il n'y a qu'à ſouſtraire un nombre de l'autre, & apoſer au reſte le même caractere. Comme 3 A ôtez de 5 A, reſtent 2 A : Item 2 B ôtez de 5 B, reſtent 3 B. Mais quand icelles ſont de genres differens, la ſouſtraction ſe fait par le ſigne — : comme 3 A ôtez de 4 B, reſtent 4 B — 3 A.

Pour le regard de la multiplication, elle ſe fait ainſi : Si un nombre de racine premiere, doit être multiplié par un nombre de racine ſeconde, ayant ſeulement la lettre A ou B, &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & apoſer au produit les mêmes ſignes. Comme 2 ℞ multipliées par 2 A, font 4 ℞ A, c'eſt à dire 4 ℞ multipliées par 1 A : Item 2 A par 2 ℞, font 4 A ℞ ; c'eſt à dire 4 A multipliez par 1 ℞ : Item 3 *q* multipliez par 4 B, font 12 *q* B ; c'eſt à dire 12 *q* multipliez par 1 B.

Mais quand un nombre abſolu eſt multiplié avec un nombre de ſeconde racine, il faut apoſer au produit le ſigne de la ſeconde racine. Comme 6 multipliant 4 B, le produit eſt 24 B : Item 5 C multipliant 7, le produit eſt 35 C.

Que ſi un nombre de ſeconde racine doit

être multiplié par un nombre de seconde racine de même lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apoſer la même lettre avec le caractere *q*. Comme 3 A multipliez par 4 A, feront 12 A *q*.

Quand un nombre de seconde racine eſt multiplié en ſoy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut apoſer au produit la même lettre avec le caractere *q*, ou *c*, &c. Comme 2 A multipliez en ſoy quarrément, le produit eſt 4 A *q*; mais cubiquement eſt produit 8 A *c* : Item 2 ℞ A par 2 ℞ A, font 4 *q* A *q*; c'eſt à dire 4 *q* de premiere racine multipliez par 1 *q* de ſeconde racine.

Mais quand un nombre de ſeconde racine eſt multiplié en un autre de la même racine ſeconde, qui a auſſi un caractere coſſique ; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le ſigne coſſique ℞. Comme 1 A multiplié par 1 A *q*, le produit eſt 1 A *c* ; Item 3 B par 4 B *c*, font 12 B *qq*.

Que ſi un nombre coſſique ſimple ſans lettre de ſeconde racine doit être multiplié avec un nõbre marqué de lettre & ſigne coſſique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit apoſer les mêmes ſignes. Comme 2 *c* multipliez par 4 A *q*, feront 8 *c* A *q* ; c'eſt à dire 8 *c* multipliez en 1 A *q* : Item 1 *c* multiplié par 1 ℞ A *q*, fait 1 *qq* A *q*; c'eſt à dire 1 *qq* multiplié par 1 A *q* : Autant fait auſſi 1 *q* A multiplié en ſoy : Car 1 *q* multiplié en ſoy fait 1 *qq* ; & 1 A en ſoy fait 1 A *q*.

Quand un nombre ayant apres la lettre de ſe-

conde racine un ſigne coſſique eſt multiplié par un nombre qui a pareillement apres la lettre de ſeconde racine un ſigne coſſique, le produit doit avoir outre la lettre, ou les lettres de ſeconde racine, le caractere coſſique que donnent les expoſans des caracteres. Comme 2 A *q*, en 5 A *c*, produiſent 10 A *ß* : Item 3 A *q* multipliez par 4 B *c*, feront 12 A B *ß*.

Mais ſi un nombre ayant un caractere coſſique apres la lettre de ſeconde racine, eſt multiplié par un nombre, qui apres le caractere coſſique a auſſi la lettre de ſeconde racine, il faut apoſer au produit le dernier caractere coſſique, ſuivy par la lettre de ſeconde racine, puis auſſi du caractere coſſique produit du premier caractere coſſique multiplié par la lettre de ſeconde racine, comme ſi elle avoit ce ſigne ℞. Comme 1 A *e* multiplié par 1 *q* A, fera 1 *q* A *qq*. qui ſera auſſi produit de 1 ℞ A *q* multipliée en ſoy : Item 3 A *q* multipliez par 4 *c* A, feront 12 *c* A *c*, c'eſt à dire 12 *c* multipliez par 1 A *c*.

Quant à la diviſion des ſecondes racines : ſoit fait premierement reduction des ſignes coſſiques par la ſouſtraction des ſignes ſemblables. Comme pour diviſer 8 *c* A *q* par 4 A *q* : Je ſouſtrais les ſignes ſemblables A *q*, & reſtent 8 *c*, & 4 : puis je diviſe 8 *c* par 4, & viennent 2 *c*, pour le quotient de 8 *c* A *q* diviſez par 4 A *q* : ainſi 8 *c* A *q* diviſez par 4 *c*, le quotient eſt 2 A *q*.

Mais diviſant un nombre ℞ par un nombre de ſecondes racines, le quotient ſera nombre rompu. Comme 2 ℞ diviſées par 4 A, le quotient eſt $\frac{2\text{ ℞}}{4\text{ A}}$.

Quant à l'extraction des ſecondes racines il faut

tirer la racine du nombre, s'il y en a, & apoſer à icelle la lettre de ſeconde racine, rejetant le caractere coſſique. Comme la racine quarrée du nombre 25 A., eſt 5 A : Item la racine cubique du nombre 27 Ac, eſt 3 A ; & la racine quarrée du nombre 1c Dqq, eſt 2 D.

Mais ſi le nombre n'a telle racine, ou que le caractere ne ſoit de même apellation que la racine qu'il faut extraire : il faut ſeulement apoſer à iceluy nombre, lettre & caractere, le ſigne radical. Comme la racine cubique du nombre 3 Aq, eſt $\mathcal{V}c$ 3 Aq. Item la racine quarrée du nombre 4 Ac eſt $\mathcal{V}$ 4 Ac.

Quant à la preuve des operations de cet Algorithme des ſecondes racines, elles ſe fera tout ainſi qu'és premieres racines ; ſçavoir eſt, que l'addition & ſouſtraction ſe prouveront l'une l'autre : comme auſſi la multiplication & diviſion; ou bien plus intelligiblement par les progreſſions Geometriques commençant à l'unité, miſe à la page 16, prenant celle de la raiſon double pour les premieres racines : mais celles de la raiſon triple pour les ſecondes racines : tellement que 1R vale 2 : mais 1A, 3; 1q, 4; 1Aq, 9; 1Ac, 27; 1R A, 6; 1R Aq, 8, &c.

Or comme au chapitre precedent nous avons ajoûté pluſieurs queſtions pour faciliter par leur ſolution l'intelligence des regles & preceptes auparavant enſeignés, auſſi en ajoûterons-nous icy quelques unes apartenans aux ſecondes racines, afin de faire voir par leur ſolution le moyen de ſe ſervir & mettre en pratique les choſes enſeignées en ce chapitre.

1. *Diviſer un nombre donné en trois parties, telles*

que les deux moindres, ſoient enſemble egales à l'autre, & les deux plus grandes quintuples de la moindre.

Qu'il faille donc diviſer le nombre 24, en trois parties, telles que les deux moindres enſemble faſſent la plus grande, mais les deux plus grandes ſoient enſemble quintuple de la moindre. Poſons que la moindre partie ſoit 1℟, & la moyenne 1A: donc la plus grande ſera 1℟ +1A, & partant la ſomme de ces deux-cy ſera 1℟ + 2A, qui doit être quintuple de la moindre partie; parquoy 1℟ + 2A ſeront egales à 5℟: ôtons de part & d'autre 1℟, & reſteront 2A egales à 4℟, & conſequemment 2℟ egales à 1A. Donc la moyenne partie ſera double de la plus petite qui a été poſée 1℟, & la plus grande triple. Parquoy il n'y-a qu'à couper le nombre donné 24, ſelon cette proportion 1, 2, 3, cuoy faiſant la plus grande partie ſera 12, la moyenne 8, & la plus petite 4.

2. *Il y-a trois nombres, tels que les deux derniers ajoutez avec* 100, *le produit eſt double du premier nombre, mais le premier & dernier ajoutez avec le même nõbre* 100, *ſont triples du ſecond: & le premier & deuxiéme auſſi avec* 100 *ſont quadruple du troiſiéme; à ſcavoir quels ſont ces trois nombres-là?*

Poſons 1℟ pour le premier nombre, & 1A pour les deux autres enſemble. Or puis que les deux derniers avec 100 doivẽt être double du premier il y aura equation entre 2℟ & 1A +100: & ôtant 100 de part & d'autre reſtera 1A egal à 2℟ — 100: partant la ſomme du ſecond & troiſiéme nombre, qui faiſoit 1A ſera 2℟ — 100; & ſi on y ajoûte le premier nombre, ſçavoir 1℟, la ſomme de tous

les trois nombres ſera 3 ℛ — 100. Maintenant poſons 1 B pour le ſecond nombre : donc le premier & troiſiéme feront 3 ℛ — 100 — 1 B, puis que tous les trois faiſoient enſemble 3 ℛ — 100. Et puis que la ſomme du premier & troiſiéme avec 100 fait le triple du ſecond, il y aura equation entre 3 ℛ — 1 B, & 3 B : adjoûtons 1B de part & d'autre, l'equation viendra entre 3 ℛ & 4B: donc auſſi entre $\frac{3}{4}$ ℛ, & 1B. Parquoy le ſecond nombre que nous avons poſé être 1B, ſera $\frac{3}{4}$ ℛ. Finalement pour le troiſiéme nombre ſoit poſé 1 C: Donc puis que tous les trois font enſemble 3 ℛ — 100, la ſomme des deux premiers ſera 3 ℛ — 100 — 1 C, qui avec 100, doit faire le quadruple du troiſiéme. Il y aura donc equation entre 4C, & 3 ℛ — 1 C: Ajoûtons 1 C de part & d'autre, & viendront 3 ℛ egales à 5C ; partant auſſi $\frac{3}{5}$ ℛ à 1C. Parquoy le troiſiéme nombre ſera $\frac{3}{5}$ ℛ. Et puis que le premier nombre eſt 1 ℛ, le ſecond $\frac{3}{4}$ ℛ, & le troiſiéme $\frac{3}{5}$ ℛ, la ſomme de tous les trois ſera $\frac{47}{20}$ ℛ : Mais nous avons trouvé cy-deſſus qu'ils faiſoient auſſi 3 ℛ — 100. Il y a donc equation entre 3 ℛ — 100, & $\frac{47}{20}$ ℛ: Ajoûtant 100 de part & d'autre ; nous aurons 3 ℛ egales à $\frac{47}{20}$ ℛ + 100 : ôtons-en $\frac{47}{20}$ ℛ, & reſteront $\frac{13}{20}$ ℛ egales à 100. Diviſant donc 100 par $\frac{13}{20}$ viendront 153 $\frac{11}{13}$, pour la valeur de 1 ℛ, qui eſt le premier nombre, mais le ſecond ſera 115 $\frac{5}{13}$, & le troiſiéme 92 $\frac{4}{13}$.

3. *Il y a deux nombres, dont la ſomme des quarrez eſt* 208, *& multipliez entr'eux leur produit eſt les* $\frac{4}{5}$ *du plus grand quarré ; à ſçavoir quels ſont ces deux nombres-là ?*

Poſons que le plus grand nombre ſoit 1 ℛ, & le

moindre 1 A : leurs quarrez ſeront 1 q, & 1 A q, qui doivent faire enſemble 208; & partant 1 q ſera 208 — 1 A q; & 1 A q ſera 208 — 1 q. Mais les deux nombres 1 ℞ & 1 A multipliez entr'eux font 1 ℞ A, qui eſt egal à $\frac{4}{9}$ q, c'eſt à dire à $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré, qui eſt 1 q. Si donc il y a equation entre 1 ℞ A & $\frac{4}{9}$ q, il y aura auſſi equation entre les quarrez d'iceux nombres, c'eſt à ſçavoir entre 1 q A q, & $\frac{16}{36}$ qq, laquelle equation ſera reduite par multiplication en croix à 36 q A q, & 16 qq, & par depreſſion du ſigne q de la premiere racine, l'equation viendra entre 36 A q, & 16 q : & par regle de trois ſi 16 q, valent 36 A q, 1 q vaudra $\frac{36 \text{ A } q}{16}$, (pource qu'il faut laiſſer le ſigne q des premier & troiſieme termes de la regle.) Et d'autant que cy-deſſus 1 A q êtoit egal à 208 — 1 q, il y aura auſſi equation entre 1 A q, & 208 — $\frac{36 \text{ A } q}{16}$, puis que 1 q eſt egal à $\frac{36 \text{ A } q}{16}$. Ajoûtons donc à chacun $\frac{36 \text{ A } q}{16}$, & l'equation viendra entre 1 A q + $\frac{36 \text{ A } q}{16}$ & 208. Or veu que 1 A q fait $\frac{16}{16}$ A q, ladite equation ſera entre $\frac{52 \text{ A } q}{16}$ & 208. Parquoy diviſant 208 par $\frac{52}{16}$, viendront 64, pour la valeur de 1 A q, la racine duquel nombre 64, qui eſt 8, ſera le moindre nombre cherché, lequel nous avons poſé être 1 A ; & pource que le quarré du plus grand êtoit 208 — 1 A q, ſi de 208, on ôte la valeur de 1 A q, ſçavoir 64, reſteront 144, pour le quarré d'iceluy plus grand nombre, qui par conſequent ſera 12.

4. *Il y a deux nombres, la ſomme deſquels êtant oſtée de la ſomme de leurs quarrez, reſtent* 8, *mais*

ajoustée au nõbre produit de leur multiplication fait 11. *A ſçavoir quels ſont ces deux nombres-là.*

Poſons que le moindre nombre ſoit 1 ℛ, & le plus grand 1 A : mais pour la ſomme d'iceux nombres poſons 1 B. Or puis que la ſomme des deux nombres cherchez êtant ôtée de la ſomme de leurs quarrez, reſtent 8, iceux quarrez ſeront 8 + 1B. (Car ſi d'iceux on ôte 1B, reſteront 8.) Mais le quarré de 1ℛ, qui eſt le moindre nombre, eſt 1 *q* : donc le quarré de 1 A, qui eſt l'autre nombre ſera 8 + 1B — 1*q*. Et d'autant que la ſomme deſdits nombres cherchez, c'eſt à ſçavoir 1B, êtant adjoûtée au produit de leur multiplication fait 11 ; iceluy produit ſera 11 — 1B. Et pource que 1 B eſt coupé en deux parties, ſçavoir 1ℛ & 1A, le quarré de 1B, c'eſt à dire 1B *q*, ſera egal aux deux quarrez de 1 ℛ, & 1 A, ſçavoir 8 + 1B, avec deux fois le produit d'iceux, ſçavoir 22 — 2B. Parquoy il y aura equation entre 1B *q*, & 30 — 1B. Or la racine de ce nombre 30 — 1B, ſe trouvera tout ainſi que de 30 — 1 ℛ ; car 1 B tient icy lieu de ℛ : & partant nous ajoûterons le quarré des racines, ſçavoir 1, au quadruple du nombre 30, ſçavoir 120, & viendront 121, dont la racine quarrée eſt 11, de laquelle ôtons 1, à cauſe du ſigne —, & reſteront 10, dont la moitié 5, eſt la valeur de 1B, c'eſt à dire la ſomme des deux nombres cherchez : & partant la ſomme de leurs quarrez que nous avons trouvé être 8 + 1B ſera 13. Il faut donc maintenant diviſer 5 en deux telles parties que la ſomme de leurs quarrez faſſe 13 ; ce que nous ferons ainſi qu'il enſuit.

Poſons que l'un des nombres ſoit 1 ℛ : donc l'au-

tre ſera 5 — 1 ℛ, & leurs quarrez ſeront 1 q, & 1 q + 25 — 10 ℛ, tellement que leur ſomme, qui eſt 2 q + 25 — 10 ℛ ſera egale à 13. Ajoûtons 10 ℛ de part & d'autre, & l'equation viendra entre 2 q + 25, & 13 + 10 ℛ; ôtons-en 25, & l'equation reſtera entre 2 q, & 10 ℛ — 12, & conſequemment entre 1 q, & 5 ℛ — 6. Parquoy de 25, quarré des racines ôtons 24 quadruple du nombre 6, & reſtera 1, dont la racine quarrée eſt 1, à laquelle ſoit ajoûté 5, nombre des racines, à cauſe de leur ſigne +, & viendront 6, dont la moitié 3 eſt la valeur de 1 ℛ, qui eſt l'un des nombres cherchez, & partant l'autre ſera 2.

Or j'eſtime que ces quatre queſtions avec celles que nous ajoûterons encore à la fin de ce Livre, ſuffiront pour l'intelligence des ſecondes racines; c'eſt pourquoy nous viendrons maintenant à traiter

Des nombres irrationnaux, ou ſourds.

CHAP. XII.

NOmbres irrationnaux ou ſourds, ſont les racines des nombres, leſquelles ne ſe peuvent exprimer par nombres; tellement que pour expliquer telles racines on ſe ſert de ces ſignes $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}c$, $\mathcal{V}\mathcal{V}$, $\mathcal{V}ſs$, $\mathcal{V}qc$, &c. Comme la racine quarrée de 5, eſt dite ſourde ou irrationnelle, pource qu'on ne peut trouver aucun nombre qui multiplié en ſoy produiſe 5; tellement que cette racine quarrée de 5, ſera marquée ainſi $\mathcal{V}5$, ou ainſi $\mathcal{V}q5$. Item la racine cubique de 7, ſera marquée ainſi $\mathcal{V}c7$. Item la racine quarrée de quarrée de 12, ainſi $\mathcal{V}\mathcal{V}12$,

ou ainſi $\surd qq\,12$; & ainſi des autres.

Eſt toutesfois à noter que tout nombre qui a le ſigne $\surd$ n'eſt pas pourtant irrationnel ; car quelquefois pour la commodité de l'operation, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appoſe ſeulement le ſigne de la racine requiſe.

Or il y a deux genres de racines ſourdes : car les unes ſont ſimples, comme $\surd q$ de quelque nombre non quarré : $\surd c$ de quelque nombre non cube, &c. & ces racines ſimples ſont auſſi appellées par quelqu'uns nombres mediaux. Les autres racines ſourdes ſont compoſées par l'interpoſition des ſignes + & — : & icelles ſont appellées par aucuns multinomies radicales ; & par d'autres, nombres irrationnaux compoſez, ou diminuez ; compoſez, quand les nombres ſont liez par le ſigne +, comme $\surd 7 + \surd 10$: mais diminuez, quand les nombres ſont liez par le ſigne —, comme $\surd 5 - \surd 13$, ou $\surd 10 - \surd c7$.

De la reduction des ſimples racines ſourdes, à une meſme denomination.

CHAP. XIII.

AFin que les ſimples racines ſourdes ſe puiſſent multiplier & diviſer entr'elles, il eſt neceſſaire qu'elles ſoient reduites en une même denomination, ſi elles ſont diverſes, laquelle reduction ſe fait preſque en la même maniere que la reduction des fractions de diverſes denominations à une même : Car ayant poſé les ſignes radicaux, chacun ſous leur nombre, il faut multiplier un chacun

nombre en ſoy, ſelon le ſigne radical de l'autre: puis apres multiplier les expoſans des ſignes entr'eux, afin d'avoir l'expoſant du ſigne commun. Comme pour exemple, ſoient les deux racines $\surd 7$, & $\surd c\ 5$, qu'il faut reduire en racines de même eſpece. Ayant poſé ces deux racines ainſi qu'il apert icy, ie multiplie 7 cubiquement à cauſe du ſigne c, & viennent 343 au lieu de 7; puis ie multiplie 5 quarrément à cauſe du ſigne $\surd$ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5 : & finalement ie multiplie les expoſans des ſignes $\surd$ & $\surd c$ entr'eux : ſçavoir eſt 2 par 3, & viennent 6, qui eſt expoſant du caractere qc : tellement que $\surd 7$, & $\surd c\ 5$ ſeront reduites à $\surd qc\ 343$, & $\surd qc\ 25$. Ainſi auſſi $\surd c\ 2$, & $\surd\surd\ 3$ êtans reduites à même eſpece ou denomination, ſeront $16\,qqc$ & $27\,qqc$, comme il apert en cette figure.

343		25
7	X	5
$\surd$		$\surd c$
2		3
	6	

16		27
2	X	3
$\surd c$		$\surd\surd$
3		4
	12	

Il y a quelques abreviations en cette operation, comme quand il faut reduire un nombre abſolu, & un radical en même eſpece : car alors il n'y a qu'à multiplier en ſoy quarrément ou cubiquement, &c. le nombre abſolu, & au produit appoſe le ſigne radical de la racine. Comme 6, & $\surd 5$, êtans reduits à même eſpece ſeront $\surd 36$, & $\surd 5$.

Item 2 & $\mathcal{V}c\,4$, feront $\mathcal{V}c\,8$, & $\mathcal{V}c\,4$.

Item voulant reduire ces deux racines $\mathcal{V}c\,8$, & $\mathcal{V}\mathcal{V}25$. Je prends de 8 la racine cubique 2 : puis apres la racine quarrée de 25, qui eſt 5, à laquelle j'apoſe le ſigne radical reſtant $\mathcal{V}$, ainſi $\mathcal{V}\,5$. J'ay donc maintenant pour les deux racines propoſées un nombre abſolu 2, & un nombre radical $\mathcal{V}5$, qui reduits comme dit eſt cy-deſſus, font $\mathcal{V}4$ & $\mathcal{V}5$.

Item, voulant reduire ces deux racines $\mathcal{V}c\,2$ & $\mathcal{V}qc\,6$ en même eſpece, ie multiplie 2 en ſoy quarrément, à cauſe du ſigne q, qui eſt en l'autre racine, outre le ſigne c, & fait 4, auquel j'apoſe le ſigne q, & ſera faite la reduction à $\mathcal{V}qc\,4$, & $\mathcal{V}qc\,6$.

Item, voulant reduire $\mathcal{V}\mathcal{V}19$, & $\mathcal{V}3$ en même denomination, ie multiplie le nombre de la moindre denomination, ſçavoir eſt 3, en ſoy quarrément, à cauſe du ſigne $\mathcal{V}$, qui eſt en la plus grande denomination, outre $\mathcal{V}$, & viennent $\mathcal{V}\mathcal{V}19$, & $\mathcal{V}\mathcal{V}9$ pour la reduction en même eſpece des deux racines propoſées. Ainſi $\mathcal{V}qc\,8$, & $\mathcal{V}9$ ſeront reduites à $\mathcal{V}qc\,8$, & $\mathcal{V}qc\,729$, multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en ſoy cubiquement, à cauſe du caractere c, qui outre q, eſt en la plus grande denomination.

Or auparavant que venir à l'Agorithme d'icelles racines ſourdes, il eſt neceſſaire que nous enſeignions le probleme ſuivant.

Connoiſtre ſi deux racines ſourdes ſont commenſurables ou incommenſurables, & qu'elle raiſon elles ont entr'elles.

Soit diviſé le nombre de la plus grande racine,

par celuy de la moindre, (icelles êtans reduites en même eſpece, ſi elles n'y ſont) & ſi au quotient vient un nombre qui ait la racine denotée par le ſigne radical d'icelles racines propoſées, elles ſeront commenſurables entr'elles, autrement non: & auront telle raiſon l'une à l'autre, que le quotient à l'unité: ou ſi le quotient eſt une fraction, elles ſeront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, ſont commenſurables entr'elles: Car 12 étans diviſez par 3, le quotient eſt 4, dont la racine quarrée eſt 2, & ſeront l'une à l'autre comme 2 à 1. Item $\sqrt{c}\,320$ & $\sqrt{c}\,135$ ſont commenſurables; car 320 étans diviſez par 135, le quotient eſt $2\frac{10}{27}$, ou $\sqrt{c}\,6\frac{4}{27}$, c'eſt à dire $\frac{4}{3}$: & leur raiſon eſt comme 4 à 3. Item $\sqrt{qc}\,64$ & $\sqrt{c}\,27$ ſont commenſurables, & leur raiſon eſt comme 3 à 2: car icelles êtans reduites en même eſpece, ſerõt $\sqrt{qc}\,64$ & $\sqrt{qc}\,729$, & la diviſiõ faite, le quotient ſera $\sqrt{qc}\,11\frac{25}{64}$, ou $\sqrt{qc}\,7\frac{29}{64}$, c'eſt à dire $\frac{3}{2}$.

Mais $\sqrt{5}$ & $\sqrt{30}$ ſont incommenſurables: car 30 êtans diviſez par 5, le quotient eſt 6, qui eſt nõbre irrationel, pource qu'il n'a pas de racine quarrée; toutesfois ils ont même raiſon que $\sqrt{6}$ à 1. Item $\sqrt{c}\,32$ & $\sqrt{c}\,24$, ſeront auſſi incommenſurables: car diviſant 32 par 24, le quotient ſera $1\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, qui n'a point de racine cube; & toutesfois ils ſeront entr'eux comme $\sqrt{c}\,4$ à $\sqrt{c}\,3$, ou comme $\sqrt{c}\,\frac{4}{3}$ à 1.

De la mutiplication & diviſion des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XIV.

COmbien que l'adition & ſouſtraction precedent ordinairement la multiplication & la

diuisiõ, si est-ce toutesfois qu'aux racines sourdes, on commence par la multiplication & diuision, à cause que l'adition & soustraction ne se peuvent parachever sans la multiplication. Quand donc deux racines de même genre doivent être multipliées, ou diuisées entr'elles, il faut multiplier ou diuiser les nombres entr'eux, & apoſer au nombre produit le même signe radical. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{7}$, par $\sqrt{10}$, ie multiplie 7 par 10, & viennent 70, ausquels j'apoſe le signe radical, & sont $\sqrt{70}$. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produit $\sqrt{36}$, c'est à dire 6. Ainsi $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{18}$. Ainsi $\sqrt{c\,3}$ par $\sqrt{c\,7}$, viennent $\sqrt{c\,21}$. Ainsi $\sqrt{\sqrt{4}}$, par $\sqrt{\sqrt{8}}$, viennent $\sqrt{\sqrt{32}}$. Mais pour diuiser $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$, ie diuise 70 par 10, & viennent 7, ausquels j'apoſe le signe radical, & sont $\sqrt{7}$. Ainsi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, le quotient sera $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{c\,21}$ par $\sqrt{c\,3}$, le quotient sera $\sqrt{c\,7}$.

Mais quand les deux racines propoſées sont de differente eſpece, il les faut reduire à une même, puis apres faire la multiplication, ou diuision comme deſſus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4, je reduits le nombre abſolu 4, & sont $\sqrt{16}$, puis ie les multiplie comme deſſus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainsi $\sqrt{5}$ multipliée par $\sqrt{c\,10}$, le produit sera $\sqrt{qc\,12500}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{5}}}$, produit $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{12}}}$, ou $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{6}}}$. Mais diuisant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient sera $\sqrt{3}$. Ainsi $\sqrt{qc\,12500}$, diuisée par $\sqrt{c\,10}$, le quotient sera $\sqrt{5}$.

Mais si quelque racine doit être multipliée en soy quarrément, ou cubiquement, &c. selon le signe radical qui luy sera apposé, il faut seulement

prendre le même nombre pour le produit, delaiſſant le ſigne radical. Comme $\sqrt{3}$ étant multipliée quarrément, produira 3 : & $\sqrt{c}\ 5$ multipliée en ſoy cubiquement, ſera 5.

Et s'il faloit multiplier quelque racine en ſoy ſelon l'exigéce d'un autre ſigne radical, il faudroit multiplier le nombre en ſoy ſelon que le requerroit cet autre ſigne radical, & apoſer au produit le ſigne radical du nombre multiplié. Ainſi de $\sqrt{6}$ multipliée en ſoy cubiquement eſt fait $\sqrt{216}$; d'où advient que la racine cubique de ce produit ſera $\sqrt{6}$. Item de $\sqrt{c}$ multiplié en ſoy quarrément eſt fait $\sqrt{c}\ 64$, c'eſt à dire 4; d'où advient que la racine quarrée de ce nombre $\sqrt{c}\ 64$, eſt $\sqrt{c}\ 8$, c'eſt à dire 2. Semblablement de $\sqrt{qc}\ 6$ en ſoy quarrément eſt fait $\sqrt{qc}\ 36$, c'eſt à dire $\sqrt{c}\ 6$. &c.

De l'adition des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XV.

PRemierement, ſi deux ou pluſieurs racines egales doivent être ajoûtées enſemble, il n'y a qu'à les multiplier par 2, ou par 3, ou par 4, &c. ſelon le nombre d'icelles racines à ajoûter : comme par exemple, voulant ajoûter $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$; ie double $\sqrt{6}$, & font $\sqrt{24}$, pour la ſomme d'icelles deux racines. Item $\sqrt{c}\ 6$, $\sqrt{c}\ 6$ & $\sqrt{c}\ 6$, font enſemble $\sqrt{c}\ 162$, car $\sqrt{c}\ 6$, triplée, c'eſt à dire multipliée par 3, qui ſont $\sqrt{c}\ 27$, fait ledit nombre $\sqrt{c}\ 162$. Semblablement $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$, ajoûtées enſemble font $\sqrt{80}$, car le quarré de 4, eſt 16, qui multipliant 5, font 80, &c.

Mais

Mais quand deux racines inegales doivent être ajoûtées enſemble, icelles ſoient premierement reduites à même eſpece, ſi elles n'y ſont; puis ſoit aviſé, ſi elles ſont commenſurables ou incommenſurables : Que ſi leſdites racines ſont commenſurables, ayant diviſé la plus grande par la moindre, ſoit ajouté une unité au quotient rationel, & la ſomme étant multipliée par la moindre racine, ſera donnée la ſomme de l'adition des deux racines proposées. Comme pour exemple, ſoient proposées ajoûter γ 18 & γ 8 : diviſant la plus grande par la moindre, le quotient eſt γ 2 $\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $\frac{9}{4}$, & ajoûtant 1, c'eſt $\frac{5}{4}$, qui multipliez par γ 8, le produit eſt γ 50, pour la ſomme des deux racines proposées. Ainſi γ 12 ajoûtée à γ 3, la ſomme eſt γ 27 : Item γ c 320, ajoûtée à γ c 135, fait la ſomme γ c 1715 : Item γ 4 ajoûtée à γ c 8, fait 4: Item γ $\frac{1}{2}$ ajoûtée à γ $\frac{8}{9}$, fait γ $\frac{49}{18}$.

Que ſi les racines proposées ſont incommenſurables, il faut ſeulement interpoſer entre-deux le ſigne +; comme γ 6 ajoûtée à γ 11, fait γ 6 + γ 11.

Or il y a encore pluſieurs autres manieres d'ajoûter les racines commenſurables, deſquelles la ſuivante me ſemble aiſée. Ayant trouvé la raiſon des racines proposées, ſoit posé au premier terme d'une regle de trois, l'un des nombres d'icelle raiſon; au ſecond terme, la ſomme d'iceux nombres de la raiſon; & au troiſiéme, la racine correſpondante au terme de la raiſon, posé au premier terme; & faiſant la regle comme il apartient, le quatriéme nombre qui viendra ſera la ſomme des racines proposées. Comme au premier exem-

ple cy-dessus, la raison des racines a été trouvée comme 3 à 2; posant donc 3 ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au second, & V 18, ou V 8 au troisiéme, le quatriéme sera V 50; & se fait la regle de trois, ainsi qu'il apert cy-dessous.

Si 3 donnent 5, que donneront V 18? ou bien si 2 donnent 5, combien V 8?

V 9. V 25. 25 — 90 — 36 — 450

V 4 V 25 — 8 — 200 — 200 [V 50. — 44

0

450 [V 50, *Somme des racines V 18 & V 8 proposées* [*à ajoûter.*
99.

De la soustraction des simples racines sourdes.

CHAP. XVI.

SI les racines sont incommensurables, il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme V 3 ôtée de V 10, restera V 10 — V 3. Item V c 20, ôtée de V c 50, restera V c 50 — V c 20.

Mais quand les racines sont commensurables, ayant divisé la plus grande par la moindre, soit ôté du quotient rationnel une unité; puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produit

ſera le reſte deſiré. Comme pour exemple, qu'il faille ſouſtraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Je diviſe donc 50 par 8, le quotient eſt $6\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée eſt $2\frac{1}{2}$, de laquelle j'ôte un entier, & reſte $\frac{1}{2}$, que je multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reſte deſiré. Item, qui de $\sqrt{27}$ ôte $\sqrt{3}$, reſte $\sqrt{12}$. Semblablement qui de $\sqrt{c\,1715}$ ôte $\sqrt{c\,320}$, reſte $\sqrt{c\,135}$. Ainſi auſſi qui de $\sqrt{\frac{49}{128}}$, ôte $\sqrt{\frac{1}{2}}$ reſte $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Cette operation ſe fait auſſi par la regle de trois, mettant au premier & troiſiéme terme les nombres ſpecifiez au chapitre precedent; mais au deuxiéme la difference des termes de la raiſon, comme il apert cy-deſſous.

Si 5 *don.* 3, *que donne.* $\sqrt{50}$? *ou ſi* 2 *don.* 3. *eõbien* $\sqrt{8}$?

$\sqrt{25}$. $\sqrt{9}$ 9 $\sqrt{4}$. $\sqrt{9}$. 9

450 72

4
20
450[$\sqrt{18}$ 3 72[$\sqrt{18}$ *reſte;* $\sqrt{8}$ *étant ôté de* $\sqrt{50}$.
225 44
2

De l'adition des nombres irrationaux compoſez & diminuez.

CHAP. XVII.

POur ajoûter nombres irrationnaux compoſez & diminuez, il les faut diſpoſer l'un au deſſous de l'autre, puis ajoûter chaques racines ſimples,

comme il a été dit en l'Algorithme precedent, observant les regles de + & —, que nous avons enseignez au chapitre 4 ; c'eſt à ſçavoir *qu'aux ſignes ſemblables, il faut ajoûter ſans changer le ſigne ; mais qu'aux diſſemblables, il faut ſouſtraire, & poſer le ſigne du plus grand nombre.*

Or d'autant qu'il ne ſe fait rien en cette operation, qui n'ait déja été enſeigné cy-devant, la choſe ſera aſſez manifeſte par exemples ſans davantage de diſcours.

$6 + \sqrt{18}$	$\sqrt{27} + \sqrt{8}$	$\sqrt{162} - 2$	$\sqrt{50} + 3$
$4 + \sqrt{8}$	$\sqrt{12} + \sqrt{2}$	$\sqrt{200} - 3$	$\sqrt{32} - 5$
$10 + \sqrt{50}$	$\sqrt{75} + \sqrt{18}$	$\sqrt{722} - 5$	$\sqrt{162} - 2$

$\sqrt{50} - 3$	$8 - \sqrt{50}$	$\sqrt{50} + 6$
$\sqrt{32} + 5$	$\sqrt{242} - 12$	$24 - \sqrt{242}$
$\sqrt{162} + 2$	$\sqrt{72} - 4$	$30 + \sqrt{72}$

$\sqrt{c216} - \sqrt{\sqrt{405}}$	$\sqrt{\sqrt{256}} - \sqrt{c27}$
$\sqrt{c64} - \sqrt{\sqrt{80}}$	$\sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{c8}$
$10 - \sqrt{\sqrt{3125}}$	$7 - \sqrt{}$

Et eſt à noter pour briéveté que les deux particules d'un nombre composé ſe rencontrans totalement egales aux deux particules d'un nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'un d'iceux nombres. Comme pour ajoûter $15 + \sqrt{8}$ à $15 - \sqrt{8}$: Je double ſeulement 15 & ſont 30 pour la ſomme de l'adition. Item $\sqrt{20} + 6$

ajoûtez à $\sqrt{20-6}$ font $\sqrt{80}$, & ce d'autant que les dernieres particules se détruisent l'une l'autre, à cause des signes + & —.

De la soustraction des nombres irrationaux composez & diminuez.

CHAP. XVIII.

POur soustraire tels nombres, il les faut disposer l'un au dessus de l'autre puis soustraire chaques racines, comme il a été dit au chap. 16. observant les regles des signes + & — enseignées au chap. 4. sçavoir est *qu'aux signes semblables, il faut soustraire (si faire se peut) sans changer le signe: mais si on ne peut soustraire, il faudra ôter le superieur de l'inferieur, & changer le signe. Mais aux signes dissemblables, il faut ajoûter, & aposer le signe superieur.*

Cette operation peut être facilement entenduë par les exemples suivans, sans autres preceptes.

$\sqrt{50-5}$	$\sqrt{\sqrt{1875}+\sqrt{\sqrt{1250}}$.	$\sqrt{50+2}$.	$\sqrt{50-2}$.
$\sqrt{8-2}$	$\sqrt{\sqrt{243}+\sqrt{\sqrt{162}}$.	$\sqrt{18}.+4$.	$\sqrt{18-4}$.
$\sqrt{18-3}$	$\sqrt{\sqrt{48}+\sqrt{\sqrt{32}}$.	$\sqrt{8-2}$.	$\sqrt{8+2}$.

$\sqrt{162+2}$.	$\sqrt{162-2}$.	$\sqrt{72-4}$.	$30-\sqrt{72}$.	$\sqrt{0+16}$.
$\sqrt{50-3}$.	$\sqrt{50+3}$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50+6}$.	$\sqrt{320-8}$.
$\sqrt{32+5}$.	$\sqrt{52-5}$.	$\sqrt{242-12}$.	$24-\sqrt{242}$.	$24-\sqrt{320}$

℞℞2401 — ℞c1.	℞c1000 + ℞℞3125	℞180 + ●
℞℞256 — ℞c27.	℞c 216 - ℞℞ 405.	℞320 - 8
℞℞ 81 + ℞c8	4 + ℞℞20480.	8 ℞20.

Et eſt à noter pour briéveté, que les deux particules d'un nombre composé ſe rencontrans du tout egales à deux particules d'un nombre diminué, il faut ſeulement doubler la derniere particule de l'un des nombres. Comme pour ſouſtraire ℞ 12 — 5, de ℞ 12 + 5; je double la derniere particule 5., & vient le nombre 10, pour reſte de la ſouſtraction. Ainſi 10 — ℞ 4, ôtez de 10 + ℞ 4, reſteront ℞ 16, c'eſt à dire 4: Item ℞ 12 — ℞ 5 ôtée de ℞ 12 + ℞ 5, reſtent ℞ 20. Et ce d'autant que + détruit +; mais + & — ſe doivent ajoûter.

De la multiplication des nombres irrationnaux compoſez & diminuez.

CHAP. XIX.

POur faire cette operation, & auſſi la ſuivante, il faut retenir la regle de + & — enſeignée au chap. 5. ſçavoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables faut poſer* +, *mais aux diſſemblables* —. Ayant donc posé l'un des deux nombres aux deſſous de l'autre, ſoit faite la multiplication comme és nombres abſolus, obſervant toutesfois ce que nous avons dit au chap. 14. de la multiplication des racines ſimples, & au chap. 15. de l'adition & ſouſtraction des mêmes racines. Ce qui ſera enſeigné és exem-

ples décrits cy-dessous. Comme en l'exemple suivant, — ℣ 45 en — ℣ 20, fait + ℣ 900, c'est à dire + 30, & — ℣ 45 par + 6, c'est à dire en + ℣ 36, fait — ℣ 1620, & — ℣ 20 par + 8, c'est à dire par + ℣ 64, fait — ℣ 1280. Et finalement + 8 en + 6, fait + 48 : Et partant tout le nombre produit sera 48 — ℣ 1280 — ℣ 1620 + 30 ; qui reduit par adition de + 48 à 30 ; & de — ℣ 1280 à — ℣ 1620 : sera 78 — ℣ 5780.

Multiplicande 6 — ℣ 20.
Multiplicateur 8 — ℣ 45.
Pr. 48. — ℣ 1280 — ℣ 1620 + 30
qui par reduction sera 78 — ℣ 5780.

En cet autre exemple, je multiplie — ℣℣ 648 par — ℣℣ 162, & vient + ℣℣ 104976, c'est à dire + 18 : & + ℣℣ 288 par — ℣℣ 162, fait — ℣℣ 46656, c'est à dire — ℣ 216 : & — ℣℣ 648 par + ℣ 128, fait — ℣℣ 82944, c'est à dire — ℣ 288 : & finalement — ℣℣ 288 par + ℣℣ 128 fait + ℣℣ 36864, c'est à dire + ℣ 192 ; & partant tout le nombre produit de la multiplication sera ℣ 192 — ℣ 288 — ℣ 216 + 18, ou bien 18 + ℣ 192 — ℣ 288 — ℣ 216.

Multiplicande ℣℣ 288 — ℣℣ 648
Multiplicateur ℣℣ 128 — ℣℣ 162.
Produit ℣ 192 — ℣ 288 — ℣ 216 + 18
ou 18 + ℣ 192 — ℣ 288 — ℣ 216.

En ce troisiéme exemple nous reduirons premierement ℣ ß 6, & ℣ 3 en une même denomination, c'est à sçavoir à ℣ qß 36, & ℣ qß 243, & ces deux

nombres multipliez entr'eux, le produit eſt + V q ß 8748:

puis apres nous reduirons V c 7, & V 3 à qc 49, & V q c 27. de même eſpece, & ces deux-cy étans multipliez entr'eux, le produit eſt V qc 1323.

Multiplicande V c 7 + V ß 6.
Multiplicateur V 3.
Produit V q c 1323 + V q ß 8748.

Au premier de ces deux exemples eſt multiplié un nombre composé en ſoy, dont le produit eſt

7 + V 5	7 — V 5.
7 + V 5	7 — V 5
49 + V 245 + V 245 + 5.	49 — V 245 — V 245 + 5.

49 + V 245. + V 245 + 5, c'eſt à dire 54 + V 980, pource que 49 & + 5, font 54, & V 245 avec V 245, c'eſt à dire le double de V 245, fait V 980. Mais au 2e exemple eſt multiplié un nombre diminué en ſoy, dont le produit eſt 49 — V 245 — V 245 + 5, c'eſt à dire 54 — V 980. Or pour briévement faire telle multiplication, c'eſt à dire multiplier un nombre composé de racines quarrées en ſoy, ou par un autre egal, il ne faut qu'ajoûter enſemble les quarrez des particules, puis à cette ſomme ajoûter le double du produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-deſſus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-deſſus, les quarrez des particules font 54, & le produit d'une particule en l'autre eſt V 245, ou — V

245, dont le double eſt $\sqrt{980}$, ou $= \sqrt{980}$. Tout le produit eſt donc $54 + \sqrt{980}$, ou $54 - \sqrt{980}$.

Mais multipliant un nombre compoſé ou diminué de racines quarrées, comme $6 + \sqrt{8}$ par ſon reſpondant contraire, c'eſt à dire par $6 - \sqrt{8}$, viendra au produit un ſimple nombre 28, comme il apert en l'operation. Car $+\sqrt{288}$ ruine $-\sqrt{288}$; & partant reſte $36 - 8$, qui ſont 28. Ce produit ſera encore trouvé plus facilement & promptement: car 8, quarré de la derniere particule $\sqrt{8}$, étant ôté de 36 quarré de la premiere particule 6, reſtera le méme produit 28.

$6 + \sqrt{8}$
$6 - \sqrt{8}$
$36 + \sqrt{288} - \sqrt{288} - 8.$

Ainſi auſſi $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ étant multiplié par ſon reſpondant contraire $\sqrt{10} - \sqrt{2}$, le produit ſera $10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2$, c'eſt à dire 8: lequel nombre 8 eſt auſſi produit en ôtant 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

$\sqrt{10} + \sqrt{2}$
$\sqrt{10} - \sqrt{2}$
$10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2.$

Et ſi le nombre de la derniere particule eſt le plus grand, ſera produit un nombre diminué, comme apert en cet exemple,

$2 + \sqrt{16}$
$2 - \sqrt{16}$
$4 - 16$

où eſt multiplié $2 + \sqrt{16}$ par ſon reſpondant contraire $2 - \sqrt{16}$, & eſt produit $4 - 16$.

Mais ſi on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$, par ſon reſpondant $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$, où tu vois que le ſigne + de la derniere particule eſt changé en —, le produit ſera $4 + \sqrt{24}$: lequel produit étant derechef multiplié par ſon reſpondant contraire $-4 + \sqrt{24}$, viendra un ſimple nombre 8. Ce dernier produit ſera encore trouvé plus facilement & promptement comme enſuit. Soient multipliées les deux premieres particules $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ entr'elles, & viendra $\sqrt{6}$, qui doublée ſera $\sqrt{24}$; puis de la ſomme des deux nombres d'icelles particules, ſçavoir eſt 5, ſoit ôté le nombre de la derniere particule, & reſtera 4, dont le quarré 16 ſoit ôté du nombre 24, & reſterons 8 comme deſſus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1. \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1. \\ \hline -\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \\ +\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2} \\ 3 + \sqrt{6} + \sqrt{3} \\ \hline \textit{produit}\ 4 + \sqrt{24}. \\ -4 + \sqrt{24}. \\ \hline -16 - \sqrt{384} + \sqrt{384} + 24 \end{array}$$

Ainſi auſſi, ſi on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ par ſon répondant $\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, ſera produit $\sqrt{60} + 2$, qui multipliez par $\sqrt{60} - 2$, le produit ſera ſimple nombre 56; lequel produit on aura auſſi avec la même briéveté que deſſus.

Et par cette maniere peuvent être reduits tous tels nombres compoſez ou diminuez en ſimple nom: ſçavoir eſt multipliant toûjours par le reſ-

pondant contraire, ainſi que dit eſt cy-deſſus, juſques à ce que l'on ſoit parvenu à un ſimple nombre.

De la diviſion des nombres irrationnaux compoſez & diminuez.

CHAP. XX.

POur diviſer un nombre irrationnel composé par un ſimple nombre radical, il faut diviſer chaque particule par ledit ſimple nombre radical, obſervant la regle de + & de —,

$$\frac{\sqrt{24} + \sqrt{9}}{\sqrt{6}} \left[\sqrt{4} + \sqrt{1\tfrac{1}{2}} \right]$$

Comme pour diviſer $\sqrt{24} + \sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, je diviſe chaque particule du dividande par le diviſeur $\sqrt{6}$, & le quotient eſt $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, comme il apert en cette formule.

Ainſi auſſi diviſant $\sqrt{2c8} + \sqrt{c20}$, par $\sqrt{c4}$, vient au quotient $\sqrt{c7} + \sqrt{c5}$.

Que s'il faut diviſer un nombre irratronnel composé par un nombre ſimple & abſolu. Comme pour exemple, $\sqrt{20} - \sqrt{c10}$ par le nombre abſolu 3; il faut premierement reduire iceluy nombre 3 en l'eſpece de la premiere particule $\sqrt{20}$, & ſeront $\sqrt{9}$; par leſquels étant diviſée ladite particule, viendra au quotient $\sqrt{2\frac{1}{5}}$: en apres il faudra auſſi reduire ledit diviſeur 3 en l'eſpece de la racine de la ſeconde particule $\sqrt{c10}$; & ſeront $\sqrt{c27}$, qui diviſant icelle particule, le quotient ſera $\sqrt{c\frac{10}{27}}$: tellement que tout le quotient de la diviſion

ſera $\mathcal{V}2\frac{2}{9} - \mathcal{V}c\frac{10}{27}$. Ainſi auſſi pour diviſer $\mathcal{V}\mathcal{V}8 + \mathcal{V}1$ $ſſ3$ par $\mathcal{V}2$, il faut reduire iceluy diviſeur en la même denomination que chaque particule du dividande, & on trouvera pour le quotient de la diviſion $\mathcal{V}\mathcal{V}$ $24 - \mathcal{V}\,q\,ſ\,\frac{2}{3\,2}$: Car $\mathcal{V}\mathcal{V}8$ & $\mathcal{V}2$ étant reduites à même denomination, ſeront $\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{V}$ 64, & $\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{V}$ 16 : & celle-là diviſée par cette-cy donne $\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{V}$ 4, c'eſt à dire $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 2. Et pour la ſeconde particule ſeront reduits $\mathcal{V}ſ2$ & $\mathcal{V}2$, à $\mathcal{V}\,q\,ſ9\mathcal{V}$ & $q\,ſ32$; & celle-là étant diviſée par cette-cy, le quotient eſt $\mathcal{V}\,q\,ſ\,\frac{9}{3\,2}$.

Mais pour diviſer un ſimple nombre par un compoſé ou diminué de racines quarrées, ou cenſicenſiques; comme pour exemple, 42 par $\mathcal{V}$ 25 + $\mathcal{V}$ 4, c'eſt à dire 7; il faut multiplier l'un & l'autre nombre par $\mathcal{V}$ 25 — $\mathcal{V}$ 4, le correſpondant contraire du diviſeur, & viendront $\mathcal{V}$ 44100 — $\mathcal{V}$ 7056, & 21, ou $\mathcal{V}$ 441 : puis apres ſoit diviſé $\mathcal{V}$ 44100 — $\mathcal{V}$ 7056 par $\mathcal{V}$ 441, & viendront $\mathcal{V}$ 100 — $\mathcal{V}$ 16, c'eſt à dire 6, qui ſera le quotient de 42 diviſé par $\mathcal{V}$ 25 + $\mathcal{V}$ 4. Qu'il faille encore diviſer 54 par 2 + $\mathcal{V}$ 16, c'eſt à dire par 6 : ſoit donc multiplié le diviſeur 2 + $\mathcal{V}$ 16, par 2 — $\mathcal{V}$ 16, & ſera produit le nombre diminué 4 — 16; pource que la derniere particule eſt plus grande que la premiere : parquoy ſoient tranſposées les particules dudit diviſeur en cette maniere $\mathcal{V}$ 16 + 2, afin qu'étant multiplié par ſon répondant contraire $\mathcal{V}$ 16 — 2, ſoit fait un nombre ſimple 12. En apres ſoit auſſi multiplié le nombre dividandé 54 par le même nombre $\mathcal{V}$ 16 — 2, & viendra pour nouveau dividande $\mathcal{V}$ 46656 — 108, qui diviſé par le nouveau diviſeur 12, le quotient ſera $\mathcal{V}$ 324 — 9, c'eſt à dire 18 — 9, qui ſont 9. Voulant encore diviſer 20 par $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 16 +

$\mathcal{V}\mathcal{V}$ 81, c'eſt à dire par 5 : ſeront premierement tranſposées les particules d'iceluy diviſeur, afin que la plus grande ſoit la premiere: puis ſera trouvé un nouveau diviſeur & dividande, qui ſera 5, & $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 12960000 — $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 2560000, & la diviſion faite, le quotient ſera $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 20736 — $\mathcal{V}\mathcal{V}$ 4096, c'eſt à dire 12 — 8, c'eſt à ſçavoir 4.

Que ſi tant le dividande que le diviſeur, ſont nombres compoſez, ou diminuez des racines quarrées, il faut reduire le diviſeur en ſimple nombre, comme il a été dit au chap. precedent : puis multiplier le dividande par les mêmes nombres par leſquels on aura multiplié le diviſeur pour le convertir à ſimple nombre, & ce qui viendra ſoit diviſé par le ſimple nombre trouvé, comme dit eſt cy-deſſus, & ainſi qu'il apert aux exemples ſuivans.

Eſtant proposé à diviſer 18 + $\mathcal{V}$ 36, qui ſont 24, par 7 — $\mathcal{V}$16, (c'eſt à dire par 3.) Il faut premierement multiplier le diviſeur 7 — $\mathcal{V}$16 par ſon répondant contraire 7 + $\mathcal{V}$ 16, & viendront 33 pour un nouveau diviſeur : puis par le même nombre 7 + $\mathcal{V}$ 16 ſoit auſſi multiplié le dividande 18 + $\mathcal{V}$ 36, & viendront 198 + $\mathcal{V}$ 4356, pour le nouveau dividande, qui diviſé par les 33 trouvez, viendront au quotient 6 + $\mathcal{V}$ 4, c'eſt à dire 8.

Soit encore proposé à diviſer $\mathcal{V}$ 41 + $\mathcal{V}$ 3 — $\mathcal{V}$ 2, par $\mathcal{V}$ 5 + $\mathcal{V}$ 2. Il faut donc premierement multiplier le diviſeur $\mathcal{V}$5 + $\mathcal{V}$2 par ſon répondant contraire $\mathcal{V}$ 5 — $\mathcal{V}$ 2, & viendra un ſimple nombre 3 pour nouveau diviſeur : en apres ſoit multiplié le nombre dividande $\mathcal{V}$ 41 + $\mathcal{V}$ 3 — $\mathcal{V}$ 2 par le même nombre $\mathcal{V}$ 5 — 1, afin d'avoir un nouveau dividande, & le produit ſera $\mathcal{V}$205 + $\mathcal{V}$ 15 — $\mathcal{V}$

10 — ℽ 82 — ℽ 6 + ℽ 4. Lequel il faut diviſer par 3, c'eſt à dire par ℽ 9, & le quotient ſera ℽ 22 $\frac{7}{9}$ + ℽ 1 $\frac{6}{9}$ — ℽ 1 $\frac{1}{9}$ — ℽ 9 $\frac{1}{9}$ — ℽ $\frac{6}{9}$ + $\frac{2}{3}$, ou bien ℽ $\frac{10}{9}$ + ℽ $\frac{10}{9}$ — ℽ $\frac{10}{9}$ — ℽ $\frac{82}{9}$ — ℽ $\frac{5}{9}$ + ℽ $\frac{4}{9}$.

Que ſi le diviſeur avoit deux parcelles de racines cubiques, il faudroit auſſi trouver un diviſeur ſimple, comme ſera dit en cet exemple. Qu'il faille diviſer 10 par ℽ c 5 + ℽ c 3. Premierement il faut trouver ſuivant ce qui eſt enſeigné en la 2. prop. 8. trois nombres continuellement proportionaux (à cauſe de 3 expoſant du cube) en la raiſon des particules du diviſeur, c'eſt à ſçavoir de ℽ c 5 à ℽ c 3, & ce comme il enſuit. Premierement ſoit multiplié ℽ c 5 en ſoy, & viendra ℽ c 25 pour le premier nombre; puis apres ſoit multiplié ℽ c 5 en ℽ c 3, & viendront ℽ c 15 pour le ſecond nombre; tiercement ſoit multiplié ℽ c 3 en ſoy, & ſera produit ℽ c 9 pour l'autre nombre: & par ainſi nous aurons ces trois nombres ℽ c 25, ℽ c 15, & ℽ c 9, continuellement proportionnaux, en la raiſon de ℽ c 5 à ℽ c 3, comme il eſt demontré en la ſuſdite 2. p. 8. Or étant aposé le ſigne + aux deux nombres extrémes, & le ſigne — à celuy du milieu, en cette ſorte ℽ c 25 — ℽ c 15 + ℽ c 9 ſoit multiplié par ce nombre, tant le dividande proposé 10, que le diviſeur ℽ c 5 + ℽ c 3, & viendra ℽ c 25000 — ℽ c 15000 + ℽ c 9000 pour le nouveau dividande; mais pour nouveau diviſeur ℽ c 125 + ℽ c 27, c'eſt à dire 8; lequel ſimple diviſeur on obtiendra auſſi en ajoûtant ſeulement les nombres des parcelles du diviſeur 5 & 3.

Il faut proceder en la même maniere lors que le diviſeur eſt composé de deux racines cenſicenſi-

ques, ſurſolides, quarrées cubiques, &c. trouvant autant de nombres continuellement proportionnaux, en la raiſon des parcelles du diviſeur qu'il y a d'unitez en l'expoſant du ſigne coſſique *qq*, *ß*, *qc*. &c. c'eſt à ſçavoir quatre au diviſeur des racines cenſicenſiques; cinq pour le diviſeur des ſurſolides, &c. Leſquels nombres étans trouvez, ſoit aposé le ſigne + au premier, & le ſigne — au ſecond: mais au troiſiéme derechef +, au quatriéme encore —, & ainſi alternativement juſques au dernier; tellement que tous les nombres des lieux impairs

$$\mathcal{VV}5 + \mathcal{VV}3$$
$$\mathcal{VV}25 - \mathcal{VV}15 - \mathcal{VV}9$$
$$\mathcal{VV}125 - \mathcal{VV}75 + \mathcal{VV}45 - \mathcal{VV}27$$

ſoient notez du ſigne +, & ceux des lieux pairs, du ſigne —. Nous poſerons pour exemple qu'il faille diviſer 10 par $\mathcal{VV}5 + \mathcal{VV}3$. D'autant que l'expoſant de *qq* eſt 4, il faut trouver quatre nombres continuellement proportionnaux en la raiſon de $\mathcal{VV}5$ à $\mathcal{VV}3$, en la ſorte cy-deſſus.

Maintenant, ſi par ce nombre de quatre particules on multiplie tant le dividande 10, que le diviſeur $\mathcal{VV}5 + \mathcal{VV}3$, on trouveta pour nouveau dividande $\mathcal{VV}1250000 - \mathcal{VV}750000 + \mathcal{VV}450000 - \mathcal{VV}270000$: & pour nouveau diviſeur $\mathcal{VV}625 - \mathcal{VV}81$, c'eſt à dire 2: lequel diviſeur 2 on obtiendra auſſi ſans multiplication, en ſouſtrayant ſeulement le nombre de la moindre particule du diviſeur de la plus grande, c'eſt à ſçavoir 3 de 5. Car les Algebraiſtes enſeignent que quand le nombre expoſant des racines eſt pair, comme *q*, *qq*, &c. le ſimple diviſeur eſt donné en ôtant le nombre de

la moindre particule de celuy de la grande: mais on les ajoûtant enſemble lors que ledit expoſant eſt impair, comme c, e, &c.

Mais il eſt à noter que les particules du diviſeur étans denommées de diverſes racines, il les faut reduire à une même denomination auparavant que proceder à l'operation.

Eſt pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diviſion en fraction, faiſant numerateur le nombre dividande: & denominateur le nombre diviſeur. Comme le quotient de $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$, divisé par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, ſe peuvent donner ainſi $\frac{\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. Semblablement s'il faut diviſer $\sqrt{28} + \sqrt{63}$ par $\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}$, le quotient ſera cette fraction $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{63}}{\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il eſt quelquefois neceſſaire de connoître quel de deux nombres irrationnaux compoſez eſt le plus grand, nous enſeignerons icy la maniere de ce faire, lors que la choſe ſera douteuſe. Soit pour exemple les deux nombres compoſez $3 + \sqrt{8}$, & $8 - \sqrt{5}$, le plus grand deſquels je deſire ſçavoir. Je ſouſtrais 3 de chaque nombre, & reſtent $\sqrt{8}$, & $5 - \sqrt{5}$, deſquels je prend les quarrez, ce ſont 8 & $30 - \sqrt{500}$, de chacun deſquels j'ôte 8, & reſtent 0: & $22 - \sqrt{500}$: & à chacun d'iceux j'ajoûte $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$, & 22, c'eſt à dire $\sqrt{484}$, qui ſont moindre que $\sqrt{500}$: & partant je dis que $3 + \sqrt{8}$ eſt plus grand que $8 - \sqrt{5}$.

CHAP.

Des fractions des nombres irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA numeration d'icelles fractions eſt facile: Car quand le ſigne radical, eſt posé devant le milieu de la fraction, iceluy ſigne eſt referé à l'un & à l'autre terme, c'eſt à ſçavoir, tant au numerateur qu'au denominateur. Comme cette fraction $\sqrt{\frac{9}{16}}$, ſignifie $\sqrt{9}$ être divisée par $\sqrt{16}$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainſi $\sqrt{c\ \frac{8}{27}}$ ſignifie $\sqrt{c\ 8}$ être divisée par $\sqrt{c\ 27}$: & icelle equivalle à $\frac{2}{3}$. Ainſi auſſi $\sqrt{\frac{6}{8}}$ denote $\sqrt{6}$ être divisée par $\sqrt{8}$.

Mais quand le ſigne radical eſt posé devant un nombre entier avec la fraction, il faut reduire tout le nombre à une ſeule fraction, afin de pouvoir exprimer ſa valeur. Comme $\sqrt{c\ 1\ \frac{67}{125}}$ ſera reduit à $\sqrt{c\ \frac{192}{125}}$, & ſignifie $\sqrt{c\ 192}$ être divisée par $\sqrt{c\ 125}$, c'eſt à dire par 5; & peut être repreſentée ainſi $\frac{\sqrt{c\ 192}}{5}$, tellement qu'il ſignifie $\sqrt{c\ 192}$ être diviſée par 5. Que ſi les termes de cette fraction $\sqrt{c\ \frac{192}{125}}$ ſont multipliez par un même nombre, c'eſt à ſçavoir par $\sqrt{c\ 192}$, ſera produit la fraction $\sqrt{c\ \frac{36864}{24000}}$ equivallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et ſi derechef les termes produits de la fraction ſont multipliez par la même $\sqrt{c\ 192}$, ſera produit la fraction $\sqrt{c\ \frac{7077888}{4608000}}$ c'eſt à dire $\frac{192}{\sqrt{14608000}}$, & ſignifie le cube 192 (qui eſt produit de $\sqrt{c\ 192}$ multipliée en ſoy cubiquement) être divisé par $\sqrt{c\ 4608000}$; pource que la racine

cubique du numerateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\sqrt{\frac{16}{64}}$, signifie $\sqrt{16}$, c'est à sçavoir 4, être divisée par $\sqrt{64}$, c'est à dire par 8; & est equivalente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{\sqrt{16}}{64}$ signifie $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 être divisé par 64; & est equivalente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainsi $\frac{16}{\sqrt{64}}$, signifie que le nombre 16 est divisé par $\sqrt{64}$, c'est à dire par 8: & est equivalente au nombre 2.

Quand la raison des numerateurs aux denominateurs est une même; les fractions sont egales, tout ainsi qu'és fractions vulgaires: Parquoy toutes ces fractions $\frac{\sqrt{64}}{4}$, $\frac{\sqrt{64}}{2}$, $\frac{64}{\sqrt{256}}$ sont de même valeur: pource qu'en toutes, le numerateur est quadruple du denominateur.

Les fractions irrationnelles se reduisent à minimes termes (quand elles peuvent être reduites,) tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Comme cette fraction $\sqrt{qc\frac{4}{8}}$ se reduira à cette-cy $\sqrt{qc\frac{1}{2}}$: & $\sqrt{\frac{36}{144}}$ à $\sqrt{\frac{1}{4}}$: Elles peuvent aussi être quelquesfois reduites à moindres signes radicaux: Comme $\sqrt{qc\frac{4}{8}}$ se reduit à $\frac{\sqrt{c.2.}}{\sqrt{2}}$. Pource que le numerateur 4 a racine quarrée 2, mais il n'a pas racine cubique: Et le denominateur 8 a racine cubique 2, mais il n'a pas la quarrée.

Quant à l'adition & soustraction, elles se font en cette maniere. Si le denominateur est un même, soient ajoutez les numerateurs, comme il a été dit cy-devant, ou soit soustrait l'un de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit aposé le denominateur commun, ainsi qu'il apert és exemples suivans.

Addition.	*Soustraction.*
$\frac{\sqrt{4}}{7}$ ajoûtez à $\frac{\sqrt{9}}{7}$	$\frac{\sqrt{4}}{7}$ ôtée de $\frac{\sqrt{9}}{7}$
font $\frac{\sqrt{25}}{7}$ ou $\frac{5}{7}$	reste $\frac{\sqrt{1}}{7}$ ou $\frac{1}{7}$

Mais quand les denominateurs sont divers, soit faite la reduction à un même denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires : puis soit fait ainsi que cy-dessus, & comme il apert en ces formules.

Reduction.	*Addition.*	*Soustraction.*
$\sqrt{144}\sqrt{196}$	$\sqrt{\frac{144}{441}}$ & $\sqrt{\frac{196}{441}}$	$\sqrt{\frac{144}{441}}$ de $\sqrt{\frac{196}{441}}$
$\sqrt{\frac{16}{49}}$ & $\sqrt{\frac{4}{9}}$.	font $\sqrt{\frac{676}{441}}$, ou $1\frac{5}{441}$	reste $\sqrt{\frac{4}{441}}$, ou $\frac{2}{25}$
$\sqrt{441}$.		

En la même maniere s'il faut ajoûter $\frac{\sqrt{501}-\sqrt{24}}{5}$ à $\frac{\sqrt{24}+1}{2}$; on reduira premierement icelles fractions à même denomination, c'est à sçavoir à $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{192}}{10}$ & $\frac{\sqrt{3000}-\sqrt{200}}{10}$; puis apres ajoûtant les numerateurs, on aura $\frac{\sqrt{800}+\sqrt{8232}}{10}$: Mais si on soustrait la moindre d'icelles fractions de la plus grande, restera $\frac{\sqrt{648}}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'adition d'iceux se fait par l'interposition du signe +, mais la soustraction par l'interjection du signe —. Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{5}{8}}$ est $\sqrt{\frac{7}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ôtée de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reste $\frac{7}{8}\sqrt{} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & division des fractions

irrationnelles, il faut seulement les reduire à même signe radical, & achever comme és fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\frac{v3}{}$ par ^{v6} viendra ^{v18}. Et ^{v36} divisée par ^{vc27} fera $\frac{4}{3}$: & aussi ^{v3} divisée par $\frac{v6}{}$, viendra $\mathcal{V}\,1\,\frac{2}{7}$, c'est à dire $\mathcal{V}\,1\,\frac{4}{7}$.

Quant à la preuve de chacune de ces operations, elle se fait par sa contraire, c'est à dire que l'adition se preuve par la soustraction : & la soustraction par l'adition, &c.

Or voila quant à ce qui concerne l'Algorithme des nombres sourds, reste que pour en montrer quelque usage nous ajoutions icy quelques questions en la solution desquelles on se sert desdits nombres sourds & irrationnels.

1. *Trouver deux nombres en une raison donnée, tels que l'un multiplié par l'autre produise un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres en raison sesquialtere, tels que le produit de leur multiplication soit 40. Posons qu'iceux nombres soient 2 ℞ & 3 ℞ : leur produit sera 6 *q*, qui doit être egal à 40. Divisant donc 40 par 6, viendront $\frac{40}{6}$ ou $\frac{20}{3}$ pour la valeur de 1 *q*, & consequemment 1 ℞, sera $\mathcal{V}\,\frac{20}{3}$: Et pour ce que le premier nombre a été posé 2 ℞, & le second 3 ℞, iceux nombres seront $\mathcal{V}\,\frac{80}{3}$ & $\mathcal{V}\,180$, lesquels multipliez entr'eux produisent $\mathcal{V}\,\frac{14400}{9}$, c'est à dire $\frac{120}{3}$ ou 40, ainsi qu'il étoit requis.

2. *Trouver deux nombres en raison donnée, tels que le plus grand étant divisé par le moindre, le quotient*

& le quarré d'iceluy moindre, ſoient auſſi en raiſon donnée.

Qu'il faille trouver deux nombres en raiſon quadruple, tels que le quarré du moindre aye raiſon double au quotient du plus grand diviſé par iceluy moindre. Poſons qu'iceux nombres ſoient 1 R & 4 R : Or le plus grand étant diviſé par le moindre, le quotient ſera 4, & le quarré du moindre eſt 1 q : & puis que ce quarré doit avoir raiſon double au quotient 4 : il y aura equation entre 1 q, & 8 : parquoy 1 R ſera √ 8, qui eſt le moindre nombre, & par conſequent le plus grand qui eſt en raiſon quadruple ſera √ 128 : & diviſant iceluy par le moindre √ 8, le quotient eſt √ 16, c'eſt à dire 4, auquel 8 quarré dudit moindre nombre à raiſon double.

3. *Trouver trois nombres en progreſſion arithmetique, tels qu'étans multipliez entr'eux, le produit ait une raiſon donnée à la ſomme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouver trois nombres conſtituans une progreſſion arithmetique, tels que l nombre produit de la multiplicatiou d'iceux ſoit triple de leur ſomme. Poſons que les trois nombres cherchez ſoient 1 R, 2 R & 3 R ayans un même excez 1 R. De la multiplication d'iceux eſt fait le nombre 6 c, lequel doit être triple de leur ſomme 6 R; & partant egal à 18 R. Diviſant donc 18 par 6, viendra 3 pour 1 q; (car d'autant que le caractere q, eſt au milieu de c & R, il vient le même qu'en deprimant les ſignes. (Partant 1 R ſera √ 3, & par conſequent les trois nombres cherchez ſeront √ 3, √ 12, & √ 27, qui ont même excez √ 3, & multi-

pliez entr'eux font $\surd$ 972, qui eſt le triple de la ſomme des mêmes, c'eſt à ſçavoir du nombre $\surd$ 108.

Notez que quand le denominateur de la raiſon que doit avoir le produit de la multiplication à la ſomme, eſt nombre quarré : la queſtion ſe reſout en nombres rationnaux. Comme les mêmes choſes que deſſus étans posées, ſi le nombre produit devoit avoir à la ſomme la raiſon quadruple, l'equation viendroit entre 6 c & 24 ℛ : parquoy diviſant 24 par 6, viendroit 4 pour 1 q, & conſequemment 1 ℛ ſeroit 2, & les trois nombres cherchez ſeroient 2, 4, & 6, leſquels multipliez entr'eux produiſent 48, qui eſt le quadruple de leur ſomme 12.

4. *Trouver trois nombres continuellement proportionnaux en une raiſon donnée, tels que la ſomme de leurs quarrez faſſe un nombre donné.*

Qu'il faille donc trouver trois nombres continuellement proport. en raiſon double, deſquels la ſomme de leurs quarrez faſſe 600. Poſons que les trois nombres ſoient 1 ℛ, 2 ℛ, & 4 ℛ, qui ſont en raiſon double : leurs quarrez ſeront 1 q, 4 q, & 16 q. Mais la ſomme d'iceux quarrez ſera 21 q, qui eſt egale à 600. Diviſant donc 600 par 21 viendront $\frac{200}{7}$ pour un quarré, & partant 1 ℛ ſera $\surd \frac{200}{7}$, qui eſt le premier nombre chorché, & le ſecond double d'iceluy ſera $\surd \frac{800}{7}$: mais le troiſiéme auſſi double de cettui-cy ſera $\surd \frac{3200}{7}$, & leurs quarrez font enſemble $\frac{4200}{7}$, c'eſt à dire 600.

5. *Trouver un nombre, qui avec un nombre donné faſſe ſon quarré.*

Le nombre donné ſoit 50, & il faut trouver un autre nombre qui ajoûté avec 50, faſſe ſon quarré. Poſons que le nombre cherché ſoit 1 ℛ : donc ſon quarré ſera 1 q, qui doit être egal à 1 ℛ + 50. Or le quadruple de 50 étant ajoûté au quarré des racines, fait 201, dont la racine quarrée eſt $\surd$ 201 : à icelle ſoient ajoûtées les racines, & viendront $\surd$ 201 + 1, dont la moitié qui eſt $\surd \frac{201}{4} + \frac{1}{2}$, eſt la valeur de 1 ℛ, & conſequemment le nombre cherché : tellement que ſi à iceluy nombre on ajoûte le donné 50, le nombre qui en proviendra, ſçavoir $\surd \frac{201}{4} + 50\frac{1}{2}$, ſera le quarré du même nombre $\surd \frac{201}{4} + \frac{1}{2}$, ainſi qu'il étoit requis.

6. Diviſer un nombre donné ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Le nombre donné ſoit 12, lequel il faut couper en deux parties telles que la moindre, la plus grande, & ledit nombre 12, ſoient continuellement proportionnaux, c'eſt à dire que le quarré de la plus grande partie ſoit egal au produit de tout le nombre 12 multiplié par la moindre partie. Poſons que la plus grande partie ſoit 1 ℛ : donc la moindre ſera 12 — 1 ℛ, & partant ces trois nombres 12 — 1 ℛ, 1 ℛ, & 12 ſeront proport. tellement que le quarré du moyen, ſçavoir 1 q, ſera egal au produit des deux extremes qui eſt 144 — 12 ℛ. Or la moitié du nombre des racines eſt 6, & ſon quarré 36, auquel ajoûtant le nombre 144 viendront 180, dont la racine quarrée eſt $\surd$ 180, de laquelle étant ôtée la ſuſdite moitié des racines, à cauſe du ſigne —, le reſte ſera $\surd$ 180 — 6, qui eſt la plus grande

partie cherchée, laquelle ôtée du nombre donné 12, resteront 18 — V 180 pour la moindre partie.

Or d'autant que nous raporterons à la fin de ce livre beaucoup d'autres questions esquelles les nombres seront joints & apliquez aux choses materielles, afin qu'au moyen d'icelles on voye mieux l'usage & pratique de tous les preceptes & documens enseignez en ce traité, nous ne nous arrêterons davantage sur semblables questions abstraites de la matiere.

Des nombres cossiques & irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

TOut ainsi que les nombres absolus se font irrationnaux, étans precedez de signes radicaux: comme de 5, se fait V c 5 : Ainsi aussi les nombres cossiques se font irrationnaux, quand on leur propose quelqu'un d'iceux signes radicaux. Comme de 20 ℞, se fait V 20 ℞, nombre cossique irrationnel, qui se prononce, la racine quarrée de 20 racines : Item de 6 c, se fait V 6 c : qui signifie la racine quarrée de 6 c. Item de 9 ℞, se fait VV 9 ℞, &c. Or tels nombres peuvent être quelquefois rationnaux, & quelquefois irrationnaux selon la valeur d'une racine. Car si 1 ℞ vaut 5, 20 ℞ vaudront 100, duquel la racine quarrée est 10 : partant V 20 ℞ est un nombre rationel equivallant 10 : Et V c 20 ℞ sera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il est donc evident qu'on ne peut juger si tels nombres sont rationnaux ou irrationnaux,

jusques à ce que l'estimation & valeur d'une seule racine apparoisse.

Or l'addition & soustraction d'iceux nombres se fait par l'interposition des signes + & —. Comme $\surd$ 36 ℟ ajoutée à $\surd$ 12 *q*, fait $\surd$ 36 ℟ + $\surd$ 12 *q*, ou $\surd$ 12 *q* + $\surd$ 36 ℟. Et 36 étans ôtez de $\surd$ 36 ℟, restera $\surd$ 36 ℟ — 36 : & ainsi des autres.

Que si les signes cossiques sont semblables, & les nombres irrationnaux (considerez sans leurs signes cossiques) commensurables; l'addition & soustraction se fera en la même maniere que des simples racines sourdes, aposant apres l'operation le même signe cossique. Ainsi $\surd$ 8 ℟ ajoûtée à $\surd$ 18 ℟, fera $\surd$ 50 ℟. Mais ôtant $\surd$ 8 ℟ de $\surd$ 18 ℟, restera $\surd$ 2 ℟.

La preuve sera facile & evidente, si on pose la valeur d'une seule racine être quelque nombre, comme 2. Car 8 ℟ seront 16, dont la racine quarrée est 4 : & 18 ℟ seront 36, dont la racine quarrée est 6 : Or 4 & 6 font 10 : comme aussi $\surd$ 50 ℟, puis que 50 ℟ sont 100, dont la racine est 10. Mais 4 ôtez de 6, restent 2, valeur de $\surd$ 2 ℟, puis que 2 ℟ font 4, dont la racine est 2.

Mais afin que les nombres cossiques irrationaux soient multipliez entr'eux, ou divisez, ils doivent être premierement reduits à même signe radical par multiplication en croix, comme nous avons enseigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier $\surd$ 6 4 ℟ par $\surd$ 8 ℟ : icel-

$\surd$ *q* *c* 16 *q*. $\surd$ *q* *c* 512 *c*.

4 ℟. 8 ℟.
$\surd$ *c*. X $\surd$ *q*.

3. 2.

6

les étans reduites à même signe radical, seront $\mathcal{V}\ qc\ 16\ q$, & $\mathcal{V}\ qc\ 512\ c$, ainsi qu'il apert en cette formule : lesquels deux nombres multipliez entr'eux produisent $\mathcal{V}\ qc\ 8192\ \beta$: mais $\mathcal{V}\ qc\ 512\ c$ divisée par $\mathcal{V}\ q\ c\ 16\ q$, le quotient sera $\mathcal{V}\ qc\ 32$ ℞. Item le nombre $\mathcal{V}\ qc\ 131072\ b\beta$ étant divisé par $\mathcal{V}\ qc\ 512\ c$, le quotient sera $\mathcal{V}\ q\ c\ 256\ qq$.

Semblablement pour multiplier 1 ℞ par $\mathcal{V}\ 4$, il n'y a qu'à quarrer 1 ℞, & à son quarré prepoſer le signe radical, afin d'avoir $\mathcal{V}\ 1\ q$: puis le multiplier par $\mathcal{V}\ 4$, & viendra pour le produit $\mathcal{V}\ 4\ q$. Par même moyen 3 ℞ multipliées par $\mathcal{V}\ 16$, le produit sera $\mathcal{V}\ 144\ q$: c'est à dire la racine quarrée de 144 q, qui sera 24, la racine étant 12. Et tels produits $\mathcal{V}\ 4\ q$, & $\mathcal{V}\ 144\ q$ sont apellez par Clavius Nombres des Racines, ainsi qu'il apert és 12 & 23 questions du 32. chap. de son Algebre.

Or la preuve de toutes ces operations se fera, posant la valeur d'une racine, comme dit est cy-dessus : ou bien chaque operation par sa contraire.

Quant aux fractions de ces nombres cossiques irrationnaux, il n'est besoin d'en traiter particulierement, pource qu'elles suivent l'Algorithme de leurs entiers, joint à celuy des nombres communs.

Or est icy à noter qu'une equation se rencontrant entre un nombre cossique irrationel, & un nombre absolu, il la faudra reduire en cette maniere. Soit pour exemple une equation entre $\mathcal{V}\ 24$ ℞ & 12. Il y aura pareillement equation entre leurs quarrez, sçavoir 24 ℞ & 144 : soit donc divisé 144 par 24, & viendront 6 au quotient pour la valeur d'une racine. Item, s'il y a equation entre $\mathcal{V}\ 10\ q$

& 20; il y aura auſſi equation entre 10 *q* & 400: diviſant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'une racine. Finalement ſi une equation eſt trouvée entre ℽ *c* 12 *q*, & 30 : il y aura auſſi equation entre 12 *q* & 27000, les cubes d'iceux: parquoy diviſant 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'une ſeule racine.

Que ſi quelqu'un propoſoit une equation entre ℽ *c* 8 & 3, il y auroit auſſi equation entre leurs cubes 8 & 27 : Ce qui eſt impoſſible. Parquoy en ces equations il eſt neceſſaire que le nombre abſolu ſoit la racine du nombre avec lequel eſt le ſigne radical : telle qu'eſt l'equation d'entre ℽ *c* 8 & 2. Item entre ℽ *c* 64 & 4 : Item entre ℽ 81 & 9, &c. Autrement l'equation ſera impoſſible.

Des racines univerſelles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

LA racine d'un nombre compoſé ou diminué eſt apellée racine univerſelle : Comme la racine quarrée de ce nombre compoſé ℽ 9 + 22, eſt dite racine univerſelle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle ſera 5; car ℽ 9, qui eſt 3, étant ajoûtée à 22 fait 25, dont la racine quarrée eſt 5. Ainſi auſſi par la racine univerſelle de cet autre nombre compoſé 10 + ℽ 7, il faut entendre que la racine quarrée du nombre 7, ſi elle ſe peut avoir, étant ajoûtée à 10, on doit prendre la racine de tout le nombre.

Or ces racines ſont notées diverſement par les

Autheurs : mais nous les figurerons apoſant le ſigne radical $\surd$, ou $\surd c$ au devant du nombre dont la racine devra être extraite, & enfermant tout ledit nombre entre deux parentheſes, en cette maniere, $\surd(\surd 9 + 22)$, ou ainſi $\surd(22 + \surd 9$, qui eſt le même. Item $\surd c(10 + \surd 7)$. Item $\surd(4\,9 + 1\,\text{R})$. Item $\surd(10 + \surd 16 + 3 + \surd 64)$. Item $\surd c(\surd 25 - \surd 4 + 24)$. Item $\surd(10 + \surd 36)$ $+ \surd(70 + \surd 121)$, laquelle vaut 13.

Or tout ainſi que le quarré d'une ſimple racine quarrée ſourde eſt le même nombre, delaiſſant ſeulement le ſigne radical $\surd$, tellement que le quarré de $\surd 5$ eſt 5, & celuy de $\surd 12$ eſt 12 : mais le cube d'une racine cubique ſimple eſt le même nombre, delaiſſant le ſigne radical $\surd c$, tellement que le cube de $\surd c\,9$ eſt 9, & le cube de $\surd c\,12$ eſt 12 : Ainſi auſſi, le quarré de la racine quarrée de quelque nombre compoſé, eſt le même nombre, étant delaiſſé le ſigne radical $\surd$. Comme le quarré de $\surd(11 + \surd 9 + \surd 4)$ eſt $11 + \surd 9 + \surd 4$, c'eſt à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\surd(\surd c\,216 + \surd c\,27)$ eſt $\surd c\,216 + \surd c\,27$, c'eſt à dire 9, dont la racine eſt 3. Le quarré de $\surd(\surd c\,216 - \surd c\,27)$ eſt $\surd c\,216 - \surd c\,27$, c'eſt à dire 3, & la valeur de ſa racine eſt $\surd 3$. Et ſemblablement le cube de la racine cubique d'un nombre compoſé eſt le même nombre, étant ôté le ſigne radical $\surd c$, comme le cube de $\surd c(\surd 25 + \surd 9)$ eſt $\surd 25 + \surd 9$, c'eſt à dire 8, tellement que cette racine-là valoit 2. Le cube de $\surd c(\surd 25 - \surd 9)$ eſt $\surd 25 - \surd 9$, c'eſt à dire 2, & la racine d'iceluy eſt $\surd c\,2$. Le cube de $\surd c(\surd c\,64 + \surd c\,27)$ eſt $\surd c\,64 + \surd c\,27$, c'eſt à dire 7, dont la

racine eſt $\mathcal{V}\,c\,7$. Et faut entendre le même de quarré de quarrez, & ſurſolides, &c. En cette maniere on multiplie la racine de quelconque nombre composé en ſoy, c'eſt à dire qu'on a le produit de ſon quarré, ou cube, &c.

Mais pour multiplier la racine d'un nombre composé, par une racine ſimple, ou par un nombre ſimple, ou composé, ou finalement par une autre racine de nombre composé : il faut reduire l'un & l'autre nombre à quarré, ou cube : puis faire la multiplication comme dit eſt cy-deſſus. Comme pour exemple, ſoit $\mathcal{V}\,(7+\mathcal{V}\,3)$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarrez ſont $7+\mathcal{V}\,3$, & 4. Multipliant donc 7 par 4. viendront 28 ; mais $\mathcal{V}\,3$ par 4, c'eſt à dire par $\mathcal{V}\,16$ viendront $\mathcal{V}\,48$. Donc tout le nombre produit eſt $\mathcal{V}\,(28+\mathcal{V}\,48.)$

$$\begin{array}{r} 7+\mathcal{V}\,3. \\ 4. \\ \hline 28+\mathcal{V}\,48. \end{array}$$

Item $\mathcal{V}\,c\,(\mathcal{V}\,c\,64+\mathcal{V}\,c\,27)$ multipliée par 2, le produit eſt $\mathcal{V}\,c\,(\mathcal{V}\,c\,32768+\mathcal{V}\,c\,13824)$, ou $\mathcal{V}\,c\,(32+24)$ c'eſt à dire $\mathcal{V}\,c\,56$.

$$\begin{array}{r} \mathcal{V}\,c\,64+\mathcal{V}\,c\,27. \\ 8. \\ \hline \mathcal{V}\,c\,32768+\mathcal{V}\,c\,13824 \end{array}$$

Item ſoit $\mathcal{V}\,(7+\mathcal{V}\,4$ (qu'il faut multiplier par $\mathcal{V}\,9$. Les quarrez des nombres ſont $7+\mathcal{V}\,4$ & 9.

$$\begin{array}{r} 7+\mathcal{V}\,4 \\ 9 \\ \hline 63+\mathcal{V}\,324 \end{array}$$

Je multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'eſt à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$: puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit ſera $\sqrt{(63+\sqrt{324})}$, c'eſt à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

Soit auſſi $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$ qu'il faut multiplier par le nombre compoſé $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Le quarré du premier nombre eſt $6+\sqrt{9}$; & du poſterieur $20+\sqrt{256}$: étant donc faite la multiplication, comme il ſe void icy, le produit ſera $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, c'eſt à dire $\sqrt{324}$ ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{9} \\ 20+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120. \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13+\sqrt{9})}$ par $\sqrt{(5+\sqrt{16})}$, c'eſt à dire 4 par 3. Les quarrez des nombres ſont $13+\sqrt{9}$, & $5+\sqrt{16}$: & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, eſt fait $\sqrt{144}$; & 13, c'eſt à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 5, c'eſt à dire par $\sqrt{25}$, eſt fait $\sqrt{225}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc tout le nombre produit eſt $\sqrt{(\sqrt{2704}+\sqrt{225}+77)}$, c'eſt à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ eſt 52, & celle de $\sqrt{225}$ eſt 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 ajoûtez enſemble font 144, dont la racine quarrée eſt 12.

$$\begin{array}{r} 13+\sqrt{9} \\ 5+\sqrt{16} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{144} \\ 65+\sqrt{225} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{225}+77 \end{array}$$

Qu'il faille encore multiplier $\sqrt{(\sqrt{18000}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ par $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$

Ayant posé ces nombres comme tu vois icy, multiplie premierement $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en soy, & viendra son quarré $\sqrt{450}+15$, auquel il faut prepoſer le ſigne — à cauſe que de + en — eſt fait —. En apres, de $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}$ en $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ ſera fait $\sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450$;

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{1800}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \sqrt{(\sqrt{450}+15)}+\sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \hline \sqrt{4050000}+450-\sqrt{450}+15 \\ \sqrt{810000}+\sqrt{4050000} \\ \hline \sqrt{810000}+\sqrt{16200000}+450 \end{array}$$

(c'eſt à ſçavoir en multipliant leurs quarrez entr'eux (c'eſt à dire $1350+\sqrt{1620000}$, pource que $\sqrt{810000}$ vaut autant que 900, lequel nombre ajoûté à 450, fait 1350, & prepoſant le ſigne $\sqrt{}$, le produit ſera le nombre $\sqrt{(1350+\sqrt{1620000})}$: Mais la racine de ce nombre ſera $\sqrt{900}+\sqrt{450}$, comme il aparoitra au chapitre ſuivant) c'eſt à dire $30+\sqrt{450}$; duquel nombre étant ôté le premier produit $-\sqrt{450}+15$, fait de $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, reſtera ſeulement 15 pour tout le produit de la multiplication proposée.

Et afin de rendre cecy plus manifeſte, nous ajoûterons encore un exemple en nombres rationaux. Soit propoſé à multiplier $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ par $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ c'eſt à dire 1 par 3, & viendront 3. Car de $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt fait ſon quarré $\sqrt{9}+6$ avec le ſigne —, qui luy doit être preposé : puis apres, de $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt fait $\sqrt{144}$, c'eſt à dire 12 : Car $\sqrt{36}$ eſt 6, & $\sqrt{144}$ eſt 12, & $\sqrt{1764}$ eſt 42 ; tous

lesquels nombres avec 84 font icéluy nombre 144, & luy prepoſant le ſigne $\surd$, ſera le produit $\surd 144$, c'eſt à ſçavoir 12, duquel nombre étant ôté l'autre produit $\surd 9+6$, ſçavoir 9, reſtera 3 pour tout le nombre produit ainſi qu'il devoit être.

$$\surd(\surd 4+14)-\surd(\surd 9+6)$$
$$\surd(\surd 9+6)+\surd(\surd 9+6)$$
$$\surd 144+84-\surd 9+6$$
$$\surd 36+\surd 1764$$
$$\surd 144-9$$

Or quand il faut multiplier la racine quarrée d'un nombre composé enſemble avec la racine quarrée d'un nombre diminué ſemblable, en ſoy-même, comme $\surd(12+\surd 6)+(12-\surd 6)$; ſoit poſé le nombre deux fois, ainſi qu'il apert icy, & ſoient pris les quarrez des parties, leſquels ſeront $12+\surd 6$, & $12-\surd 6$, qui font enſemble 24: [car $+\surd 6$ ruine $-\surd 6$] Et ſoit multipliée une partie par l'autre, & ſera fait $\surd 138$, [pource que 6, quarré de $\surd 6$, ôté de 144, quarré du nombre 12, reſte 138, auquel faut apoſer le ſigne $\surd$] dont le double eſt $\surd 552$: & $24+\surd 552$ ſera le nombre produit cherché. Or la racine de ce produit eſt auſſi la ſomme des deux racines $\surd[12+\surd 6]$

$$\surd(12+\surd 6)+\surd[12-\surd 6]$$
$$12+\surd 6+12-\surd 6.$$
$$\surd 138.$$
$$\surd 138.$$
$$\surd 552.$$
$$24+\surd 552.$$

&

& $\sqrt{}$ (12—$\sqrt{}$ 6) recueillie en une seule somme. Car quand la somme de deux nombres est multipliée en soy, la racine quarrée du nombre produit est la somme des mêmes deux nombres : & partant puis que les deux racines proposées ensemble, multipliées en soy, font 24 +$\sqrt{}$552, la racine de ce produit, sçavoir est $\sqrt{}$ (24 +$\sqrt{}$ 552) sera la somme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeste par un autre exemple en nombres rationnaux. Soit $\sqrt{}$ (10 + 36) + $\sqrt{}$ (10 — $\sqrt{}$ 36) c'est à dire 6, qu'il faut multiplier en soy. Il est évident que le nombre qui sera produit doit être 36.

Soient donc trouvez les quarrez des parties, lesquels seront 10 + $\sqrt{}$ 36, & 10 — $\sqrt{}$ 36, qui ajoutés enséble font 20: & soit multipliée une partie en l'autre, & viédra $\sqrt{}$64, dont le double sera $\sqrt{}$256, c'est à dire 16 & partant le nõbre produit est 20 +,16 c'est à dire 36: & la racine de ce nombre, sçavoir 6, est pareillement la somme de l'addition de ces deux racines-là proposées, comme il est manifeste.

$\sqrt{}$(10 +$\sqrt{}$36) +$\sqrt{}$(10—$\sqrt{}$36)
$\sqrt{}$(10 +$\sqrt{}$36) +$\sqrt{}$(10—$\sqrt{}$36)

10 +$\sqrt{}$36 +10 —$\sqrt{}$36.
$\sqrt{}$64
$\sqrt{}$64

$\sqrt{}$256
20 +$\sqrt{}$256.

Or quand il faut multiplier un nombre composé de racine simple, & de racine universelle, par un nombre diminué semblable ; a aussi lieu le compendium que nous avons enseigné au chapitre 19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le nombre $\sqrt{}$20 +$\sqrt{}$(20—$\sqrt{}$5) par le nombre $\sqrt{}$20 —

$\sqrt{(20-\sqrt{5})}$: Il n'y a qu'à ſouſtraire $20-\sqrt{5}$, quarré de la derniere particule du nombre compoſé ou diminué, de 20 quarré de la premiere particule, & le reſte $\sqrt{5}$, ſera le produit de la multiplication.

Mais s'il falloit multiplier $\sqrt{(2q+8)}+5$ en ſoy, il n'y auroit qu'à quarrer chaque particule, & viendroient $2q+8$, & 25 : puis multiplier l'une par l'autre, & le double du produit étât ajoûté avec les ſuſdits deux quarrez des particules, donneroit $2q+33+\sqrt{(200q+800)}$ pour tout le produit de la multiplication.

Si on vouloit encor multiplier $\sqrt{(5q-4\text{R}}(+8$ en ſoy, il ne faudroit auſſi que prendre les quarrez de chaque particule, qui ſeroient $5q-4\text{R}$, & 64, puis les ajoûter au double du produit d'une particule en l'autre, & viendroient $5q-4\text{R}+\sqrt{(1280q-1024\text{R})}$ pour tout le produit de la multiplication.

Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq+1q)}$ par $\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq-1q)}$: Il n'y a qu'à ſouſtraire le quarré de la derniere particule, du quarré de la premiere particule, ſçavoir eſt $\frac{1}{4}qq+1q$, de $\frac{1}{4}qq$, & le reſte $-1q$, ſera le produit de la multiplication.

Pour faire la diviſion des racines univerſelles, ſoit reduit à quarré, tant le nombre dividande que diviſeur : puis apres ſoit faite la diviſion comme il a été enſeigné cy-devant, & la racine du nombre produit ſera le quotient. Comme pour exemple, ſoit $\sqrt{(13+\sqrt{7})}$ qu'il faut diviſer par $\sqrt{5}$. Les quarrez des nombres, ſont $13+\sqrt{7}$, & 5. Je diviſe donc 13 par 5, & vient $2\frac{3}{5}$, & $\sqrt{7}$ par 5, c'eſt à dire par $\sqrt{25}$.

$$13+\sqrt{7}\ \left[\ 2\tfrac{3}{5}+\sqrt{\tfrac{7}{25}}\right.$$
$$5\quad\sqrt{25}$$

& vient $\sqrt{\frac{7}{25}}$: tellement que tout le quotient eſt $\sqrt{(2\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{7}{25}})}$.

Item ſoit $\sqrt{(432+\sqrt{7776})}$ qu'il faut diviſer par 6. Les quarrez des nombres ſont $432+\sqrt{7776}$, & 36 : le nombre 432 étant diviſé par 36, viennent 12 ; & $\sqrt{7776}$ étant diviſée par 36, c'eſt à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & partant tout le quotient ſera $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$.

	1	
	17	153
	432+√7776	[12+√6
	36	1296
	3	

Item ſoit $\sqrt{15}$, qu'il faut diviſer par $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$. Afin de trouver un nouveau diviſeur nous multiplierons $\sqrt{(3+\sqrt{5})}$ par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$ & viendra un nouveau diviſeur $\sqrt{4}$. Que ſi le dividande $\sqrt{15}$, eſt auſſi multiplié par $\sqrt{(3-\sqrt{5})}$, nous aurons un nouveau dividande $\sqrt{(45-\sqrt{1125})}$: le quarré d'iceluy ſera $45-\sqrt{1125}$, & le quarré du nouveau diviſeur ſera 4. Si donc on diviſe 45 par 4, le quotient ſera $11\frac{1}{4}$: ſi nous diviſons $-\sqrt{1125}$ par 4, c'eſt à dire par $\sqrt{16}$, le quotient ſera $-\sqrt{70\frac{5}{16}}$. Donc tout le quotient eſt $\sqrt{(11\frac{1}{4}-\sqrt{70\frac{5}{16}})}$.

Item ſoit diviſé 20 par $\sqrt{(10-\sqrt{5})}$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $\sqrt{(10+\sqrt{5})}$, afin d'avoir un nouveau dividande $\sqrt{[4000+\sqrt{800000}]}$, & un nouveau diviſeur $\sqrt{95}$: les quarrez d'iceux nombres ſont $4000+\sqrt{800000}$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, ſeront donnez $42\frac{2}{19}$: & de la diviſion de $\sqrt{800000}$ par 95, c'eſt à dire par $\sqrt{9025}$, ſera produit $\sqrt{88\frac{32}{361}}$. Donc tout le quotient de la diviſion eſt $\sqrt{42\frac{2}{19}+\sqrt{88\frac{32}{361}}}$.

Item ſoit diviſée $\sqrt{c}$ [$\sqrt{c32768}+\sqrt{c13824}$] par 2

Les cubes de ces nombres ſont $\mathcal{V}c32768 + \mathcal{V}c13824$ & 8. Je diviſe donc $\mathcal{V}c32768$ par 8, c'eſt à dire par $\mathcal{V}c512$, & vient au quotient $\mathcal{V}c64$: & de la diviſion de $\mathcal{V}c13824$ par 8, c'eſt à dire par $\mathcal{V}c512$, vient $\mathcal{V}c27$. Tout le quotient eſt donc $\mathcal{V}c[\mathcal{V}c64 + \mathcal{V}c27]$, c'eſt à dire $\mathcal{V}c7$.

Item ſoit $\mathcal{V}[588 + \mathcal{V}34848]$, qu'il faut diviſer par $\mathcal{V}[12 + \mathcal{V}8]$. Les quarrez des nombres ſont $588 + \mathcal{V}34848$, & $12 + \mathcal{V}8$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $12 - \mathcal{V}8$, afin d'avoir nouveau nombre dividande, & diviſeur : le dividande ſera $\mathcal{V}[7056 + \mathcal{V}5018112 - \mathcal{V}2765952 - \mathcal{V}278784]$, ou plûtoſt par reduction $\mathcal{V}[6528 + \mathcal{V}332928]$, & le diviſeur ſera 136. Si donc on diviſe 6528 par 136, viendront 48 : & $\mathcal{V}$ 332928 par 136, c'eſt à dire par $\mathcal{V}$ 18496, viendront $\mathcal{V}$ 18 : & partant tout le quotient ſera $\mathcal{V}[48 + \mathcal{V}18]$.

Nous avons dit cy-deſſus comment il faut ajoûter une racine univerſelle à une ſemblable ayant le ſigne contraire : comme $\mathcal{V}[2 + \mathcal{V}3]$ avec $\mathcal{V}[2 - \mathcal{V}3]$ dont la ſomme eſt $\mathcal{V}6$. Mais telles racines ſe peuvent encore ajoûter enſemble comme enſuit.

Le quarré de la derniere particule de l'une ou l'autre d'icelles racines ſoit ôté du quarré de la premiere particule, & à la racine quarrée du reſte ſoit ajoûtée la premiere particule ; puis ſoit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double là, ſera la ſomme de l'addition. Comme en l'exemple cy-deſſus, le quarré de la derniere particule eſt 3, lequel j'ôte de 4, quarré de la premiere particule, & reſte 1, que j'ajoûte à icelle premiere particule, & ſont 3, dont le double eſt 6, & la racine de 6, eſt $\mathcal{V}6$, & autant eſt la ſomme de l'addition des deux racines propoſées.

Mais quand les deux racines qu'il faut ajoûter ſont diſſemblables, il faut diviſer la plus grande par la moindre, & au quotient ajoûter 1, [ſinon que leſdites racines fuſſent incommenſurables: car alors l'adition d'icelles ſe fera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —] puis par le produit ſoit multipliée la plus petite racine; & le produit de la multiplication ſera la ſomme de l'adition. Comme pour exemple: ſoit $\mathcal{V}$ [8 +$\mathcal{V}$48] à laquelle il faut ajoûter $\mathcal{V}$2 +$\mathcal{V}$3). Je diviſe celle-là par cette-cy, & vient au quotient $\mathcal{V}$4, c'eſt à dire 2, auquel j'ajoûte 1, & ſont 3, par leſquels je multiplie $\mathcal{V}$ [2 +$\mathcal{V}$3], & vient $\mathcal{V}$ [18 +$\mathcal{V}$243] pour la ſomme des deux racines propoſées à ajoûter.

Item ſoit $\mathcal{V}$ [10 +$\mathcal{V}$36], qu'il faut ajoûter à $\mathcal{V}$(11 +$\mathcal{V}$25): Je diviſe cette-cy par celle-là, & vient 1 au quotient, auquel j'ajoûte une unité, & ſont 2, par leſquels ie multiplie $\mathcal{V}$(10 +$\mathcal{V}$36), & vient $\mathcal{V}$ 64, c'eſt à dire 8, pour la ſomme de l'addition des deux racines propoſées.

Maintenant ſi d'une racine univerſelle de nombre composé, il en faut ſouſtraire une autre ſemblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule ſoit ôté du quarré de la premiere, & la racine du reſte ſoit ôtée d'icelle premiere particule, puis ſoit doublé ce dernier reſidu, & la racine de ce double ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\mathcal{V}$ (12 —$\mathcal{V}$6). Le quarré de la premiere particule eſt 144, duquel j'ôte 6, quarré de la derniere particule, & reſte 138, dont la racine eſt $\mathcal{V}$138, que le ſouſtraits de la premiere particule 12, & reſte 12 —$\mathcal{V}$138, que ie double, & viennent 24 — $\mathcal{V}$552, dont la racine eſt $\mathcal{V}$ (24 —$\mathcal{V}$552), qui eſt le reſte requis.

Mais si les racines sont dissemblables : pour faire la soustraction, il faut diviser la plus grande par la moindre, & du quotient ôter 1 ; [sinon que les racines proposées fussent incommensurables. Car alors la soustraction se fera plus commodément par l'interposition du signe —). Puis par le reste soit multipliée la moindre racine, & le produit sera le requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{(2+\sqrt{3}\,]}$ qu'il faut soustraire de $\sqrt{[8+\sqrt{48}]}$. Je divise cette-cy par celle-là, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, dont j'ote une unité, & reste 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\sqrt{[2+\sqrt{3}\,]}$, & vient la même $\sqrt{[2+\sqrt{3}\,]}$ pour le reste de la soustraction.

Item soit $\sqrt{[486-\sqrt{162}\,]}$, de laquelle faut soustraire $\sqrt{[\sqrt{6}-\sqrt{2}\,]}$: je divise celle-là par celle-cy, & vient au quotient $\sqrt{9}$, c'est à dire 3, dont j'ôte 1, & reste 2, par lesquels ie multiplie la moindre racine $\sqrt{[\sqrt{6}-\sqrt{2}\,]}$, & vient au produit $\sqrt{[\sqrt{96}-\sqrt{32}\,]}$ pour le reste de la soustraction requis.

De l'extraction des racines de binomes, & residus.

CHAP. XXIIII.

QUand deux quelconques nombres sont conjoints par le signe +, ils sont ordinairement nommez Binome: comme $\sqrt{12}+\sqrt{3}$: & $\sqrt{18}+\sqrt{8}$. Mais étans accouplez par le signe —, ils sont apellez Apoteme ou Residu : Comme $\sqrt{12}-\sqrt{3}$: & $\sqrt{18}-\sqrt{8}$. Et plus de deux nombres ainsi acouplez, sont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\sqrt{17}+\sqrt{10}-\sqrt{3}$: ou $\sqrt{17}-\sqrt{10}+\sqrt{3}$, sont dits Trinome : & $\sqrt{17}+\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ou $\sqrt{17}-\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$, sont apellez Quatrinome, &c.

Mais Euclide au 10. livre, prop. 37 & 74 apelle ſeulement Binome, ou reſidu, quand les deux nombres conjoints par le ſigne + ou —, ſont rationnels commenſurables en puiſſance ſeulement: il conſtituë de ſix ſortes de Binome, & autant de reſidu; chacun deſquels il definit, & enſeigne à trouver au même livre. Or pour extraire la racine quarrée d'iceux Binomes & reſidus, il y a diverſes manieres, deux deſquelles nous enſeignerons icy, & au prealable le probleme ſuivant.

Couper un nõbre donné en deux parties, telles que le nombre produit d'icelles ſoit egal à un nombre donné, qui ne ſoit plus grand que le quarré de la moitié d'iceluy nombre propoſé à diviſer, ou [qui eſt le même] que la quatriéme partie du quarré dudit nombre.

Qu'il faille couper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliées entr'elles, leur produit ſoit 75, qui eſt moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nombre propoſé 20. Soit ôté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, & reſteront 25, dont ſoit pris la racine quarrée, laquelle ſera 5, & ſoit icelle ajoûtée à 10, moitié du nombre propoſé à diviſer, & viendra 15, qui ſera le plus grand nombre cherché, mais icelle racine 5 étant ôtée d'icelle moitié 10, reſteront 5, qui ſera le moindre nombre requis: tellement donc que les deux nombres 15 & 5, ſont parties du nombre 20, telles que multipliées entr'elles, elles produiſent 75, ainſi qu'il étoit requis.

Maintenant ſoit le binome $38+\sqrt{288}$, duquel il faut extraire la racine quarrée. Soit coupé le plus grand nom. 38 en deux parties, telles que leur produit ſoit le nombre 72, quatriéme partie du quarré

du moindre nom. ſcavoir de 288, leſquelles parties ſeront trouvées par le prob. cy-deſſus, être 36 & 2: d'iceux deux nombres ſoient priſes les racines quarrées, & icelles ſeront 6 & $\sqrt{2}$, qui conjointes par le ſigne + feront $6+\sqrt{2}$ qui ſera la racine quarrée du binome proposé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$, êtans acquplées par le ſigne — feront $6-\sqrt{2}$ qui ſera la racine quarrée du reſidu $38-\sqrt{288}$. Item la racine quarrée du binome $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, ſera trouvée en la même maniere être $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{2}}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom d'iceluy binome étant coupé en deux parties, telles que leur produit ſoit 6, quatriéme partie de 24, quarré du moindre nom: icelles parties ſerõt trouvées être $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les racines conjointes par le ſigne +, ſont $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{2}}$.

Pour autrement extraire la racine quarrée du binome $38+\sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, ôter le quarré du moindre nom, & reſteront 1156, deſquels ſoit pris le quart, qui ſera 289, duquel ſoit pris la racine quarrée, laquelle ſera 17, qu'il faut ajoûter, & ſouſtraire de la moitié du plus grand nom, ſçavoir de 19, viendront 6, & 2 deſquels deux nombres ſoient priſes les racines quarrées, & ſeront 6, & $\sqrt{2}$, qui acouplées par le ſigne +, feront $6+\sqrt{2}$ pour la racine quarrée du binome $38+\sqrt{288}$. comme devant. Par la même maniere la racine quarrée du reſidu $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, ſera trouvée être $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{12})}-\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{12})}$.

Quant à la preuve, elle ſe fait comme en l'extraction des nombres abſolus, ſçavoir eſt, multipliant la racine trouvée par ſoy-même.

Or voila ſommairement les operations plus ordinaires & viſitées en l'Algebre numeralle: Et afin

de donner aux apprentifs & peu verſez en cette ſcience, tant plus de connoiſſance de ſa pratique, nous finirons ce traité par quelques problémes ou queſtions, avec leurs ſolutions, au moyen deſquelles & des preceptes cy-devant enſeignez on en pourra ſouldre infinis autres.

Diverſes queſtions & problemes, avec leurs ſolutions.

CHAP. XXV.

1. *EN une armée de 24000 hommes, il y a de trois nations, ſcavoir, François, Suiſſes & Allemans: mais le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt ſextuple du nombre des Allemans: & le nombre des François joint a celuy des Allemans eſt quintuple des Suiſſes: On demande quel eſt le nombre de chaque nation?*

Premierement poſons 1 ℛ, pour le nombre des Allemans: donc le nombre des François & des Suiſſes enſemble ſera 24000 — 1 ℛ; & partant 7 ℛ ſeront egales à 24000 — 1 ℛ. Ajoûtons donc 1 ℛ de part & d'autre, & nous aurons 8 ℛ egales à 24000; par conſequent 1 ℛ, qui eſt le nombre des Allemans ſera 3000: parquoy le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt 21000. Or poſons 1 ℛ pour les Suiſſes: & les François ſeront 21000 — 1 ℛ: Et puis que le nombre des François & des Allemans enſemble, eſt quintuple de celuy des Suiſſes, 24000 — 1 ℛ ſeront egales à 5 ℛ: ajoûtons de part & d'autre 1 ℛ, & viendront 6 ℛ egales à 24000: partant 1 ℛ vaudra 4000, qui eſt le nombre des Suiſſes: & par conſequent il y a 17000 François.

2. *Il y a une armée compoſée des François, Allemans & Anglois: les François ſont* 25000: *les Al-*

lemans ſont moitié des François & Anglois, & les Anglois ſont huitiéme partie des François & Allemans: il faut trouver le nombre tant des Allemans que des Anglois, & cõbien il y a d'hommes en toute l'armée.

Soit poſé 1 ℛ pour les Allemans: donc les François & les Anglois enſemble ſeront 2 ℛ, & toute l'armée ſera 3 ℛ. Et puis que les Anglois ſont la huitiéme partie des François & des Allemans enſemble; & que les Allemans & François ſont enſemble 1 ℛ + 25000: les Anglois ſeront $\frac{1}{8}$ ℛ + 3125. Parquoy veu que les François ſont 25000, les Allemans 1 ℛ, & les Anglois $\frac{1}{8}$ ℛ + 3125, toute l'armée ſera $1\frac{1}{8}$ ℛ + 28125 egale à 3 ℛ. Otant dõc $1\frac{1}{8}$ ℛ de part & d'autre, l'equation ſera entre 28125, & $1\frac{7}{8}$ ℛ: parquoy diviſant 28125 par $1\frac{7}{8}$, viendra le nombre 15000, pour la valeur de 1 ℛ, qui eſt le nombre des Allemans; & partant les François & Allemans ſeront enſemble 40000. dont la huitiéme partie eſt 5000 pour le nombre des Anglois: & par conſequent toute l'armée ſera de 45000 hommes.

3. *Il y-a une colomne quadrangulaire rectangle de laquelle la baſe a les coſtez en raiſon ſeſquitierce, & ſa hauteur eſt au plus grand coſté de la baſe en raiſon double ſuperbipartiente tierce, & la ſolidité d'icelle colomne contient 93312 toiſes: il faut trouver chacune des dimenſions ſuſdites.*

Le moindre côté de la baſe ſoit poſé 3 ℛ, & le plus grand 4 ℛ: mais la hauteur $10\frac{2}{5}$ ℛ afin qu'elle ſoit au plus grand côté 4 ℛ, en raiſon double ſuperbipartiente tierce, & le plus grand côté au moindre en raiſon ſeſquitierce: Ces trois nõbres multipliez entr'eux produiſent 128 c, egaux à 93312 ſolidité de la colomne. Diviſant donc 93312 par 128, vien-

nent 729 pour 1c, & 9 pour 1ℛ: donc le moindre côté de la baſe, lequel nous avons posé être 3ℛ, ſera 27: & le plus grand 4ℛ, ſera 36; & la hauteur $10\frac{2}{3}$ ℛ ſera 96. Et ces trois nombres 27, 36, 96 multipliez entr'eux produiſent la ſolidité proposée 93312.

4. *Il y-a un rectangle, duquel l'aire eſt 30, & les côtez d'iceluy ſont en raiſon ſeſquialtere: il faut trouver iceux coſtez, & le diametre.*

Soit posé le moindre côté 2ℛ, & partant le plus grand qui doit être ſeſquialtere à iceluy ſera 3ℛ: de la multiplication des côtez entr'eux, ſera produit 6q egaux à 30, aire donné. Diviſant donc 30 par 6, viendront 5 pour 1q; & partant 1ℛ, ſera √5. Et pource que nous avons posé le moindre côté être 2ℛ, iceluy ſera √20, nombre double de √5; & le plus grand côté 3ℛ ſera √45, nombre triple de √5. Et pource que les quarrez des côtez 20 & 45 ſont enſemble égaux au quarré du diametre, le quarré d'iceluy diametre ſera 65, & iceluy diam. √65.

5. *Il y a un rectangle dont la difference des coſtez eſt √32, & leur raiſon triple: trouver tant iceux coſtez, que l'aire d'iceluy rectangle.*

Poſons que le moindre côté ſoit 1ℛ: Donc l'autre ſera 3ℛ, puis qu'ils ſont en raiſon triple: Mais puis que leur difference eſt 2ℛ, & la donnée eſt √32: icelles 2ℛ ſeront egales à √32; & conſequemment 1ℛ vaudra √8, qui eſt le moindre côté, & partant le plus grand qui luy eſt triple ſera √72: Et puis que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant un côté par l'autre, ſi on multiplie √72 par √8, viendront √576, c'eſt à dire 24 pour l'aire du rectangle proposé.

6. *Il y a un rectangle duquel les coſtez ſont en rai-*

ſon ſeptuple, & les quarrez d'iceux pris enſemble, ont raiſon centuple à la ſomme d'iceux coſtez: Trouver les coſtez, l'aire, & le diam. dudit rectangle.

Soit poſé le moindre côté être 1℟, & le plus grand 7℟: donc la ſomme d'iceux côtez ſera 8℟, & leurs quarrez ſçavoir 1q & 49q, ajoûtez enſemble feront 50q, centuple de 8℟. Il y a donc equation entre 50q & 800℟. Et diviſant 800 par 50, viendront 16 pour 1℟, moindre côté: le plus grãd qui eſt en raiſon ſeptuple ſera donc 112, & l'aire ſera 1792, car c'eſt le produit d'un côté multiplié par l'autre: Mais le diametre ſera √12800. Car les quarrez des côtez ſont 256, & 12544, la ſomme deſquels eſt 12800, centuple de 128, qui eſt la ſomme d'iceux côtez, & partant le quarré du diametre ſera 12800, dont la racine quarrée, ſçavoir √12800 ſera ledit diametre.

7. *Il y a un rectangle, duquel l'aire eſt 80, & la difference des coſtez eſt 2; trouver le diametre, & les coſtez d'iceluy rectangle.*

Soit poſé le moindre côté de 1℟; & partant le plus gand ſera 1℟ + 2. Ces côtez multipliez entr'eux donnent pour l'aire 1q + 2℟, lequel eſt egal à l'aire donné 80. Otant donc 1℟ de chacun, l'equation ſera entre 1q, & 80 − 2℟. La moitié du nombre des racines eſt 1, dont le quarré eſt 1, qui ajoûté à 80, ſera 81, dont la racine quarrée eſt 9, de laquelle ôtant la ſuſdite moitié 1 reſtera 8, eſtimation de 1℟, qui eſt pour le moindre côté: Donc le plus grand excedant iceluy de 2 ſera 10. Iceux côtez multipliez entr'eux produiſent 80 aire donné, & les deux quarrez des côtez ſont 64 & 100, egaux au quarré du diametre: & partant le quarré du diametre ſera 164, & iceluy diametre √164.

8. *Il y a un rectangle duquel le diametre eſt 30. & la ſomme des coſtez 42: trouver iceux coſtez & l'aire du rectangle.*

Soit posé un côté de 1 ℟, & partant l'autre ſera 42 — 1 ℟: dont leurs quarrez ſeront 1 ⓠ, & 1764 — 84 ℟ + 1 ⓠ qui ſont enſemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation ſera entte 2 ⓠ + 1764 — 84 ℟ & 900. Et ajoûtant 84 ℟ à chacun elle ſera entre 84 ℟ + 900 & 2 ⓠ + 1764. Et ôtant 900 de chacun reſtera equation entre 84 ℟, & 2 ⓠ + 864. Et derechef ôtant 864 de chacun, elle ſera entre 2 ⓠ, & 84 ℟ — 864. Parquoy diviſant tout par 2, l'equation viendra entre 1 ⓠ & 42 ℟ — 432. La moitié du nõbre des racines eſt 21, dont le quarré eſt 441, duquel ôtant 432, reſteront 9, dont la racine quarrée eſt 3, qui ajoûtée à la ſuſdite moitié 21, viendront 24 pour le plus grand côté: & partant reſteront 18 pour le moindre: & iceux côtez multipliez entr'eux, produiſent 432 pour l'aire du rectangle.

9. *Il y a un quarré duquel le diametre & le côté enſemble ſont 6: trouver iceux côté & diametre.*

Soit posé 1 ℟ pour le côté, & partant le diametre ſera 6 — 1 ℟. Et pource que le quarré du diametre eſt double du quarré du côté; & le quarré du côté eſt 1 ⓠ; & le quarré du diametre eſt 36 — 12 ℟ + 1 ⓠ: il y aura equation entre 2 ⓠ, & 36 — 12 ℟ + 1 ⓠ: parquoy ôtant 1 ⓠ de chacun, demeurera equation entre 1 ⓠ; & 36 — 12 ℟: maintenant la moitié du nombre des racines eſt 6, dont le quarré eſt 36, qui ajoûtez au nombre 36, viennent 72, dont la racine eſt √ 72, de laquelle étant ôtée la ſuſdite moitié 6, reſtera √ 72 — 6, pour la valeur de 1 ℟; & autant ſera le côté du quarré; lequel étant ôté de

6, resteront 12—V72 pour le diametre.

10. *Il y a un autre quarré duquel le diametre surpasse le côté de 3 : trouver lesdits côté, & diametre.*

Pour le côté soit posé 1 R, & partant le diametre sera 1R+3. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du côté; lequel le quarré du côté est 1q; le quarré du diametre sera 1q+6R+9: L'equation sera donc entre 2q, & 1q+6R+9; & ôtant 1q de chacun, restera l'equation entre 1q, & 6R+9. La moitié du nombre des racines est 3, dont le quarré est 9, qui ajoûté au nombre 9, fait 18, dont la racine est V18, à laquelle soit ajoûtée la susdite moitié 3, & sera fait V18+3, valeur de 1R, qui est pour le côté du quarré: & partant le diametre sera V18+6.

11. *Il y a un quarré duquel le costé multiplié par le diametre fait 10 : trouver lesdits costé, & diametre.*

Soit posé le côté de 1R : & puis qu'iceluy côté multipliant le diametre fait 10. par le contraire divisant 10, le quotient donnera ledit diametre, & par consequent iceluy diametre sera $\frac{10}{1R}$. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du côté, sçavoir est de 1q, & le quarré dudit diametre est $\frac{100}{1q}$; il y aura equation entre 2q, & $\frac{100}{1q}$, laquelle par la multiplication croisée sera reduite à celle d'entre 2qq, & 100. Divisant donc 100 par 2, viendront 50 pour la valeur de 1qq: & partant 1R sera VV50, & tel est le côté du quarré proposé. Parquoy si on divise 10 par VV50, viendront au quotient VV200 pour le diametre dudit quarré.

12. *Il y a un quarré duquel le costé multiplié par la difference d'entre iceluy costé, & le diametre fait 15:*

trouver le diametre, & le coſté dudit quarré.

Soit posé le côté être 1℟, & partant la difference d'entre le côté & le diametre ſera $\frac{15}{1℟}$, laquelle eſt trouvée diviſant 15 par 1℟, ſçavoir eſt afin que le quotient multiplié par le diviſeur 1℟, produiſe le nombre diviſé 15. Et pource que le diametre excede le côté de cette difference, le diametre ſera $1℟ + \frac{15}{1℟}$. Et d'autant que le quarré du diametre eſt double du quarté du coſté : & le quarré d'iceluy côté eſt 1*q*, & le quarré du diametre eſt $\frac{1qq+30q+225}{1q}$ il y aura equation entre 2*q*, & $\frac{1qq+30q+225}{1q}$, qui par multiplication en croix ſera reduite à l'equation d'entre 2*qq*, & 1*qq*+30*q*+225. Oſtant donc 1*qq* de chacun, l'equation ſera entre 1*qq* & 30*q*+225. La moitié du nombre des quarrez eſt 15, dont le quarré eſt 225, qui ajoûté à 225, viennent 450, dont la racine quarrée eſt $\sqrt{450}$. à laquelle ajoûtant la ſuſdite moitié 15, viendra $\sqrt{450}+15$ pour 1*q*; & partant 1℟ ſera $\sqrt{[\sqrt{450}+15]}$: & autant eſt le côté requis, dont le quarré $\sqrt{450}+15$ étant doublé donnera $\sqrt{1800}+30$, pour le quarré du diametre : & partant iceluy diametre ſera $\sqrt{[\sqrt{1800}+30]}$, duquel étant ſouſtrait le côté, reſtera la difference $\sqrt{[\sqrt{1800}+30]} - \sqrt{[\sqrt{450}+15]}$, qui multipliée par le côté $\sqrt{[\sqrt{450}+15]}$ ſera produit le nombre 15.

13. *Il y a un triangle duquel les ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire ſont* 16 *&* 5, *mais l'agregé des deux coſtez eſt* 33 : *On demande combien chacun deſdits coſtez, & conſequemment l'aire d'iceluy triangle ?*

Je pose que le moindre côté soit 1 ℵ : donc l'autre côté sera 33 − 1 ℵ, & partant les quarrez d'iceux côtez seront 1 𝔮, & 1 𝔮 − 66 ℵ + 1089 : du moindre d'iceux quarrez soit ôté le quarré du moindre segment, & restera 1 𝔮 − 25 pour le quarré de la perpendiculaire. Mais du quarré du plus grand côté soit aussi ôté le quarré du grand segment, & resteront encore 1 𝔮 − 66 ℵ + 833 pour le quarré de la perpend. Partant il y a equation entre 1 𝔮 − 25, & 1 𝔮 − 66 ℵ + 833. Parquoy ajoûtant & soustrayant de part & d'autre selon les preceptes des Equations, viendront 66 ℵ egales à 858. Donc la valeur de 1 ℵ sera 13, qui est le moindre côté requis, & partant l'autre sera 20, & la superficie 126.

14. *Il y a un triangle rectangle, duquel un costé de l'angle droit est* $\sqrt{18+3}$, *mais l'autre costé & l'hypotenuse font ensemble* $\sqrt{162+9}$: *on demande combien est chaque costé.*

Posons 1 ℵ pour le côté de l'angle droit requis ; & partant l'hypothenuse sera $\sqrt{162+9}$ − 1 ℵ : donc les quarrez des deux côtez dudit angle droit seront $27+\sqrt{648}$, & 1 𝔮, lesquels deux quarrez ensemble sont egaux au quarré de l'hypotenuse, c'est à sçavoir à 243 − 18 ℵ + 1 𝔮 + $\sqrt{52488}$ − $\sqrt{648}$ 𝔮 : Parquoy si on ôte de part & d'autre $\sqrt{648}$, viendra equation entre 1 𝔮 + 27, & 243 − 18 ℵ + 1 𝔮 + $\sqrt{41472}$ − $\sqrt{648}$ 𝔮 : car ôtant $\sqrt{648}$ de $\sqrt{52488}$, qui sont commensurables, restera $\sqrt{41472}$) & si de chaque terme d'icelle equation on ôte 1 𝔮, & 27, restera encore equation entre 0, & 216 − 18 ℵ + $\sqrt{41472}$ − $\sqrt{648}$ 𝔮 : mais ajoûtant de part & d'autre 18 ℵ, & $\sqrt{648}$ 𝔮, l'equation viendra entre $\sqrt{648}$ 𝔮 + 18 ℵ, & 216 + $\sqrt{41472}$. Or d'autant que le nombre $\sqrt{648}$ 𝔮

a été

été procreé multipliant deux fois $\sqrt{162}$ par 1℞ il doit être pris pour nombres de racines, ſuivant ce que nous avons dit en la page 91 : & partant tout ce nombre $\sqrt{6489}+18$℞ eſt le nombre des racines, & conſequemment il faut par iceluy nombre [delaiſſant les ſignes coſſiques q & ℞] diviſer l'autre nombre de l'equation $216+\sqrt{41472}$, afin d'avoir la valeur d'une racine : pour faire laquelle diviſion il faut, ſuivant ce qui eſt enſeigné au chap. 20. multiplier tant le diviſeur $\sqrt{648}+18$, que le dividande $216+\sqrt{41472}$, par $\sqrt{648}-18$: quoy faiſant viendront 324 pour nouveau diviſeur, & $\sqrt{3359232}+1296$ pour nouveau dividande ; & la diviſion faite, le quotient ſera $\sqrt{32}+4$, qui eſt la valeur de 1℞ : & autant eſt le côté cherché, que nous avons poſé être 1℞, lequel côté étant ſouſtrait de $\sqrt{162}+9$, reſtera $\sqrt{50}+5$ pour l'hypothenuſe, puis que l'aggregé d'iceluy côté, & de ladite hypothenuſe eſt $\sqrt{162}+9$.

15. *Il y a un jardin rectangulaire, dont la diagonale excede la longueur dudit jardin de 4 perches, & la largeur de 8. On demande combien eſt la longueur & la largeur dudit jardin, & conſequemment l'aire d'iceluy.*

Je poſe que la largeur dudit jardin ſoit 1℞: dõc la diagonale ſera 1℞+8, & ſon quarré $1q+16$℞$+64$, duquel étant ôté le quarré de la largeur, ſçavoir $1q$, reſtent 16℞ + 64 pour le quarré de la longueur dudit jardin, & partant icelle longueur ſera $\sqrt{[16}$℞$+64]$, qui ôtée de la diagon. reſteront 1℞ $+8-\sqrt{[16}$℞$+64]$, qui ſont egaux à l'excez donné 4 : ajoûtant donc & ſouſtrayant de part & d'autre ainſi qu'il apartient, viendra $1q$ egal à 8℞$+48$.

Parquoy la valeur de 1 ℞ ſera 12 : & autant eſt
largeur du jardin, & conſequemment la diagon
le d'iceluy ſera 20, la longueur 16, & la ſuperfic
192.

16. *Il y a un autre jardin rectangulaire, dont l
quatre coſtez avec la diagonale font enſemble* 38, *
la ſuperficie d'iceluy eſt* 48 *Aſſavoir combien eſt l
longueur & la largeur dudit jardin.*

Je poſe 1℞ pour la ſomme de la longueur & d
la largeur dudit jardin, & conſequemment le
quatre côtez ſeront 2℞, & la diagon. 38 2℞ par
tât ſon quarré eſt 144 — 152℞ + 4 : à iceluy quar-
ré ſoit ajoûté le double de la ſuperficie donnée
(pource que par la 4. p. 2. le quarré de l'agreg
des côtez comprenant l'angle droit d'un rectangle
eſt egal aux quarrez d'iceux côtez avec deux fois
leur rectangle) & viendront 1540 — 152℞ + 9, qui
ſont egaux au quarré de la ſomme de la longueur
& la geur, qui eſt 1℞. Ajoûtons & ſouſtrayons de
part & d'autre ainſi qu'il apartient, & viendra
egal à $50\frac{2}{3}$ ℞ — $513\frac{1}{3}$. Parquoy 1 ℞ vaut 14 : Et au-
tant eſt la ſomme de la longueur & de la largeur
du jardin propoſé. Parquoy les quatre côtez ſeront
enſemble 28, & la diagonale 10. Nous avons donc
maintenant l'agregé des deux côtez d'un rectan-
gle, ſçavoir 14, & la diagon. d'iceluy 10 : Partant
nous trouverons ſuivant ce qui eſt enſeigné cy-de-
vant en la 8. queſtion que la longueur du jardin
propoſé eſt 8, & ſa largeur 6.

17. *Il y a une piece de terre en forme de Rhombe
dont chaque coſté eſt de* 20 *perches, & la difference
des diagon.* 4 : *Aſſavoir combien eſt chacune deſdites
diag. & la ſuperficie de ladite piece.*

Je pose que la moitié de la moindre diagon. soit 1 ℛ : Donc la moitié de l'autre sera 1ℛ +2 : & partant les quarrez d'icelles moitiez seront 1q, & 1q +4ℛ +4, lesquels quarrez font ensemble 2q +4ℛ +4, & sont egaux au quarré du côté donné, qui est 400. Parquoy procedant à la reduction de cette equation ainsi qu'il apartient, sera trouvé 1q egal à 198 − 2ℛ, & partant la valeur de 1ℛ sera √199 −1, & par consequent la moindre diagon. requise sera √796 −2, & y ajoûtant la difference donnée, viendront √796 +2 pour la plus grande diagonale, laquelle multipliée par la susdite moitié √199 − 1, donne 396 pour la superficie de ladite piece de terre.

18. *Il y a une autre piece de terre en Rhombe, dont chaque costé est de 15 perches, & la superficie 216 : On demande combien est chaque diagonale de ladite piece.*

Je pose que la moitié de la petite diagonale soit 1ℛ : Donc son quarré est 1q, qui ôté de 225, quarré du côté donné 15, restent 225 − 1q pour le quarré de la moitié du grand diametre, qui partant est √(225 −1q), & icelle moitié étant multipliée par tout l'autre diam. sçavoir est par 2ℛ, viendront √(900q − 4qq) pour la superficie de la piece. Mais elle a été proposée de 216 : Il y a donc equation entre 216, & √(900q − 4qq) & consequemment entre leurs quarrez 46656, & 900q − 4qq. Donc aussi entre 1qq, & 225q − 11664 : partant 1ℛ vaut 9, & consequemment la moindre diagonale est 18, & la grande 24.

19. *Il y a encore un Rhombe, duquel la somme des quatre costez & des deux diagonales est 68, & la*

difference d'icelles diagonales 4 : On demande co bien eſt chaque coſté dudit Rhombe, chacune des di gonales, & la ſuperficie.

Je poſe que le côté dudit Rhombe ſoit 1ℛ: Do les quatre côtez enſemble ſeront 4ℛ, & les diago nales enſemble 68 — 4ℛ. Et puis que la differen ce d'icelles eſt proposée 4, la moindre deſdit diagonales ſera 32 — 2ℛ, & la plus grande 36 — 2 Parquoy leurs moitiez ſeront 16 — 1ℛ, & 18 — 1 dont les quarrez font enſemble 2ℚ — 68ℛ + 580, & ſont egaux au quarré du côté dudit Rhombe, c'e à dire à 1ℚ. Parquoy ajoûtant & ſouſtrayant de par & d'autre, ainſi qu il appartient, on trouvera 1 egal à 68ℛ — 580 : & partant la valeur de 1ℛ ſer 10, la moindre diagon. 12, & la plus grande 16 Mais multipliant l'une d'icelles diagonales par l moitié de l'autre viendront 96 pour la ſuperfici dudit Rhombe proposé.

20. *Trois marchands s'aſſocians enſemble le premier met* 140 *livres plus que le ſecond : mais le ſecond & le troiſiéme enſemble mettent* 336 *livres : Eſt avenu qu'ils ont gagné* 264 *livres, dont le troiſiéme en a eu* 84 *livres pour ſa part. On demande combien ils ont mis chacun, & combien le premier & le ſecond ont eu chacun du gain.*

Poſons que le ſecond ait mis en la ſocieté 1ℛ : donc la miſe du premier ſera 1ℛ + 140, & celle du troiſiéme 336 — 1ℛ ; conſequemment la miſe de tous les trois ſera 476 + 1ℛ. Et puis que le gain du 3. eſt 84 livres, & le gain total 264, poſez les ſuſdits nombres en ordre de regle de trois ainſi.

Si 476 + 1ℛ *donnent* 264, *combien donneront* 336 — 1ℛ ? 84.

Or d'autant que de quatre nombres proportionaux le produit du premier par le quatriéme doit être egal au produit du second par le tiers ; il y aura equation entre 39984 + 84 ℞ & 88704 — 264 ℞ : laquelle equation étant reduite ainsi qu'il appartient, viédra entre 348 ℞ & 48720, & par consequent 1 ℞ vaut 140 livres, qui est la mise du second : partant la mise du premier sera 280 livres, & celle du troisiéme 196 : tellement que toute la mise sera 616 livres. Parquoy nous trouverons le gain du premier disant par regle de trois.

Si 616 donnent 264, combien donneront 280 ?

Et viendront 120 livres pour le gain du premier : qui avec celuy du troisiéme fait 204 livres, & partant le gain du second sera 60 livres.

Deux Marchands s'estans associez ensemble ont gagné 100 livres, & le premier, tant pour le principal qui a demeuré trois mois en la societé, que pour son gain prend 100 livres. Et l'autre duquel le principal n'a demeuré que deux mois en ladite societé prend 125 livres. Assavoir combien ils avoient mis chacun.

Premierement, ajoûtons les deux sommes qui ont été prises, & viendront 225 : ôtons en tout le gain, & resteront 125 livres pour toute la mise. Posons 1 ℞ pour la mise du premier, & par consequent la mise de l'autre sera 125 — 1 ℞ : Chacune de ces mises soit multipliée par son temps : viendra au premier 3 ℞ & à l'autre 250 — 2 ℞ : mais l'agregé sera 250 + 1 ℞ : Disons donc par regle de trois, Si 250 + 1 ℞ donnent 100 de gain, que donneront les 3 ℞ du premier ? & la regle faite on aura pour son gain $\frac{300 ℞}{250 + 1 ℞}$ tellement que l'agregé de

ſa miſe & gain ſera 1ℛ + $\frac{300ℛ}{250 + 1ℛ}$, qui eſt egal à 1 0 : & par conſequent $\frac{300ℛ}{250 + 1ℛ}$ ſeront egaux à 1 — 1ℛ, qui reduits par multiplication croiſé viendront 30 ℛ egales à 25000 — 150 ℛ — 1 q : parquoy pr nant la racine quarrée dudit nombre 25000 — 450 on trouvera 50 pour la valeur de 1ℛ, qui eſt la mi ſe du premier, laquelle ôtée de 125 reſteront pour la miſe de l'autre.

Or eſt à noter que quand telles queſtions ſe fo de trois marchands, elles tombent aux equation cubiques : de quatre aux quarrez de quarré; & ain ſi de ſuite : deſquelles equations nous n'avon eſtimé être à propos de parler en ce ſommaire abregé d'Algebre, mais les avons reſervées pou être traitées amplement en un autre lieu.

22. *Vn marchand étant allé trafiquer à trois foires il a autant gagné à la premiere qu'il y avoit port d'argent, tellement qu'apres cette premiere negotiatio il avoit le double de ſon argent, à la ſeconde ſon gai étoit 6 livres davantage que la racine quarrée de c double ; mais à la troiſiéme ſon gain étoit 4 livre davantage que le quarré du gain fait à la ſecond foire : & apres toutes ces negociations, il trouve qu'i a gaigné à ces trois foires 1786 livres. On demand quelle ſomme d'argent ce marchand avoit au com mencement, & combien il a gagné à chaque foire.*

Suppoſons qu'à la ſeconde foire il aye gagné 1ℛ : donc puis que ce gain eſt 6 davantage que la racine quarrée du double de ce qu'il avoit porté ou gagné à la premiere foire ; ſi nous multiplions 1ℛ — 6 en ſoy, viendront 1q — 12ℛ + 36, pour ice luy double ; & pourtant le gain de la premiere

foire ſera $\frac{1}{2}q - 6\mathcal{R} + 18$: mais le gain de la troiſiéme eſt 4 davantage que le quarré du gain de la ſeconde que nous avons poſé être $1\mathcal{R}$: donc iceluy gain ſera $1q + 4$. Ajoûtons ces trois gains enſemble $1q + 4, 1\mathcal{R}$, & $\frac{1}{2}q - 6\mathcal{R} + 18$, & viendront $1\frac{1}{2}q - 5\mathcal{R} + 2$ pour tous leſdits gains, qui partant ſont egaux à 1786. Oſtons de part & d'autre 22, & l'equation viendra entre $1\frac{1}{2}q - 5\mathcal{R}$, & 1764 ; ajoûtons les $5\mathcal{R}$, & nous aurons l'equation entre $1\frac{1}{2}q$, & $5\mathcal{R} + 1764$. Puis à cauſe de la fraction, reduiſons & multiplions en croix, & l'equation viendra entre $3q$, & $10\mathcal{R} + 3528$: & diviſons tout par 3, viendra equation entre $1q$, & $3\frac{1}{3}\mathcal{R} + 1176$. Parquoy prenant la racine quarrée de ce nombre, nous trouverons 36 pour la valeur d'une racine : Et partant la ſomme du gain fait à la ſeconde foire ſera 36 livres ; & puis qu'elle vaut 6 livres davantage que la racine quarrée du double de la ſomme gaignée à la premiere foire, ôtons 6 livres, & reſteront 30 : dont le quarré 900, eſt le double de la ſomme, tant de l'argent porté à la premiere foire, que du gain fait à icelle, parquoy le marchand avoit porté 450 livres à ladite foire, & y gaigna autant. Mais puis que le gain fait à la troiſiéme foire eſt 4 livres davantage que le quarré de la ſomme du gain fait à la ſeconde, multiplions le gain 36 en ſoy, & viendront 1296, à quoy ajoûtons 4, & nous aurons 1300 livres pour le gain fait à ladite troiſiéme foire : & que cela ſoit, ajoûtons enſemble tous ces trois gains 450, 36 & 1300 livres ; viendront 1786 livres pour tout le gain fait aux trois foires ſuſdites, ainſi que veut la propoſition.

Que ſi on diſoit qu'ayant gagné à la troiſiéme foire 4 livres davantage que le quarré de toute la ſomme

qu'il avoit au precedent ; tout ſon argent eſt 877036
Nous poſerions qu'apres la ſeconde foire il eut 1R
Donc le gain de la troiſiéme foire ſeroit 1q+4 : &
partant tout ce qu'il auroit apres ces negotiations
ſeroit 1q+1R+4, egaux à 877036 : Oſtons donc
1R & 4 de part & d'autre, & reſtera 1q egal à
877032—1R. Or la moitié du nombre des racines
eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$, qui ajoûté à 877032
font 877032 $\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée eſt 936 $\frac{1}{2}$, de
laquelle ſoit ôtée la ſuſdite moitié du nombre des
racines, & reſteront 936 pour la valeur de 1R. Et
partant le marchand avoit autant d'argent apres
la ſeconde foire : Mais ôtons en 6 qu'il avoit ga-
gné plus que la racine de ce qu'il avoit apres la
premiere foire ; & pour ce gain poſons 1R : Donc
il avoit 1q apres ladite premiere foire : Parquoy
1q+1R ſeront egaux à 930 ; & ôtant 1R, l'equa-
tion ſe trouvera entre 1q, & 930—1R : & procedant à l'extraction, nous trouverons 30 pour la
valeur de 1R : partant 36 eſt le gain de la ſeconde
foire, qui ôté des 936, reſtent 900 pour ce qu'il
avoit apres la premiere foire, dont la moitié 450,
eſt ce qu'il y avoit aporté, ainſi que devant.

23 *Deux hommes mettant leur argent enſemble, la ſomme eſt* 200 *écus, mais diviſant l'argent du ſecond par celuy du premier, le quotient eſt* 1 $\frac{1}{2}$ *: Il faut trouver l'argent de chacun.*

Soit poſé 1R pour le premier, & pour le ſecond
1A : il faut donc reſoudre la ſeconde racine en pre-
miere ainſi. Pource que les deux enſemble ont 200
écus ; il y aura equation entre 1R+1A, & 200.
Oſtant 1R de chacun, reſtera l'equation entre 1A,
& 200—1R ; donc 1A ſera reduite en 200—1R.

Parquoy je pose derechef le nombre du premier être 1℞, & celuy du second 200 — 1℞, qui font ensemble 200 écus. Je divise maintenant le nombre du second par celuy du premier, & vient $\frac{200-1℞}{1℞}$ egal à $1\frac{1}{2}$, laquelle equation, par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 400 — 2℞, & 3℞. Et ajoûtant 2℞ à chacun, l'equation sera entre 400, & 5℞: divisant donc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier: & partant le second aura 120, qui divisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$.

24. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dit aux deux autres, que s'il avoit encore* 100 *écus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il avoit encore* 100 *écus il auroit le double de leur argent: pareillement le troisiéme dit aux deux autres, que s'il avoit encore* 100 *écus, il auroit le triple de leur argent: sçavoir combien a chacun.*

Soit posé l'argent du premier être 1℞, donc avec 100, il aura 1℞ + 100, & autant sera la somme du second & du troisiéme, & tous les trois auront 2℞ + 100. Or soit posé la somme du second être 1A: Donc avec 100, il aura 1A + 100, lequel nombre est double de la somme du premier & du tiers. laquelle est 2℞ + 100 — 1A: (Pource qu'ayans tous trois 2℞ + 100, si on ôte 1A, c'est à sçavoir l'argent du second, restera 2℞ + 100 — 1A pour la somme du premier & du troisiéme.) Partant il y aura equation entre 1A + 100, & 4℞ + 200 — 2A. Et ajoûtant 2A à chacun, l'equation sera entre 3A + 100, & 4℞ + 200: & ôtant 100 de chacun, demeurera l'equation entre 3A, & 4℞ + 100. Si donc les touts sont divisez par 3, l'equation vien-

dra entre 1A & $\frac{4}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$: & partant puis que le ſecond eſt posé avoir 1A, la ſomme d'iceluy ſera $\frac{4}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$. Finalement la ſomme du troiſiéme ſoit posée être 1B. Donc avec 100, il aura 1B + 100, qui eſt nombre triple de la ſomme du premier & du ſecond, laquelle eſt $\frac{7}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$, compoſée de 1℟ ſomme du premier, & de $\frac{4}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$ ſomme du ſecond : Il y aura donc equation entre 1B + 100, & $\frac{21}{3}$ ℟ + $\frac{300}{3}$; c'eſt à dire entre 1B + 100, & 7℟ + 100, & ôtant 100 de chacun, l'equation ſera entre 1B, & 7℟ : & partant la ſomme du tiers, qui a été posée 1B, ſera 7℟. Parquoy puis que le premier a 1℟, le ſecond $\frac{4}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$: & le tiers 7℟ : tous les trois enſemble auront $9\frac{1}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$. Mais tous les trois avoient auſſi 2℟ + 100 : Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$, & 2℟ + 100 : & ôtant 2℟ de chacun, reſtera equation entre $7\frac{1}{3}$ ℟ + $\frac{100}{3}$ & 100 : & ôtant derechef $\frac{100}{3}$, c'eſt à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3}$ ℟, & $66\frac{2}{3}$: diviſant donc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 1℟, ſomme du premier : & le ſecond ayant $1\frac{1}{3}$ ℟ + $33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{5}{11}$: & le tiers ayant 7℟, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainſi le premier avec 100, aura $109\frac{1}{11}$, egale à la ſomme du ſecond & tiers : & le ſecond avec 100, aura $145\frac{5}{11}$, qui eſt le double de la ſomme du premier & tiers : & finalement le tiers avec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui eſt le triple de la ſomme du premier & ſecond.

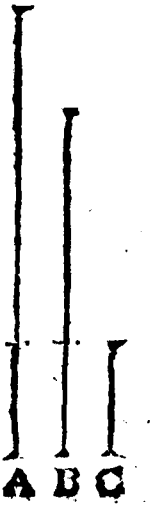
Fin du Sommaire de l'Algebre.

ELEMENT DIXIE'ME.

DEFINITIONS.

GRANDEVRS commenſurables, ſont celles-là qui ſont meſurées par une même meſure.

Ainſi les deux lignes droites A & B, eſtans meſurées par une meſme ligne C, ſeront dites commenſurables. Ainſi auſſi une ligne de 6 pieds eſt commenſurable à une autre ligne de 7 pieds, pource qu'elles ſont toutes deux meſurées tant par la ligne d'un pied, que par celle d'un demy pied, d'un tiers de pied, &c. Semblablement les ſuperficies, qui ſont meſurées par une meſme ſuperficie, ſont dites commenſurables: Item les corps



ou ſolides qui ſont meſurez par un meſme corps, ſont auſſi dits commenſurables.

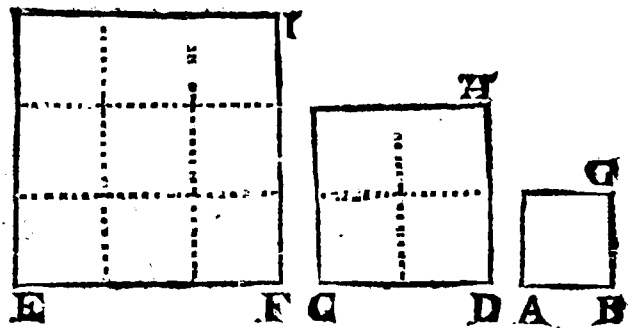
2. Mais les grandeurs incommenſurables, ſont celles-là qui n'ont aucune commune meſure.

Telles grandeurs ſont le diametre & le coſté de quelconque quarré: car icelles grandeurs n'ont aucune commune meſure, comme il ſera demontré à la derniere prop. de ce livre. Il y a encore pluſieurs autres lignes incommenſurables, ſçavoir eſt auſquelles on ne peut donner aucune commune meſure, beaucoup deſquelles ſeront expliquées en ce 10. livre; & enſeigné par quelles manieres elles peuvent eſtre trouvees: derechef, les ſuperficies ſont dites incommenſurables, & les ſolides incommenſurables, qui n'ont aucune commune meſure.

3. Les lignes droites commenſurables en puiſſance, ſont celles-là deſquelles les quarrez peuvent eſtre meſurez par une meſme ſuperficie.

Les lignes droites ſont conſiderées ou ſelon leur longueur, ou ſelon leur puiſſance; & en l'une & l'autre ſorte elles ſont dites commeſurables, & incommenſurables. Aux deux premieres definitions Euclide a expliqué quelles ſont les lignes commenſurables, & incommenſurables conſiderées ſelon leurs longitudes: mais en cette-cy, & en la ſuivante, il declare quelles ſont celles dites commenſurables, & incommenſurables en puiſſance. Il dit donc icy que les lignes droites

dont les quarrez peuvent estre mesurez par une mesme superficie sont commensurables en puissance: Ainsi les lignes droites AB & CD seront dites cõmensurables en puissance, d autant que leurs quarrez AG & CH peuvent estre mesurez par une mesme superficie AG: Item les lignes droites GD & EF, seront aussi dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez CH & EI peuvent estre mesurez par l'espace ou quarré AG. Semblablement, appliquant les nombres aux lignes; une ligne de 3 pieds sera dite commensurable en puissance à



une autre ligne de 6 pieds, parce que leurs quarrez 9 & 36 peuvent estre mesurez par une mesme superficie: Ainsi aussi une ligne ayant deux pieds en longueur, & une autre √8 seront dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par un mesme espace superficiel: derechef, une ligne estant √√20, & une autre √√125 seront pareillement dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez √20 & √125 sont mesurez par une mesme superficie √5: car elle est deux fois en √20, & 5 fois en √125.

Or est à noter que toutes lignes droites commensurables en longitude, le sont aussi en puissance; car les quarrez d icelles lignes sont mesurez par le quarré de

leur commune meſure, ainſi qu'il apert aux trois premiers exemples cy-deſſus.

4. Mais les lignes droites incommenſurables en puiſſance, ſont celles-là deſquelles les quatrez n'ont aucune commune ſuperficie qui les puiſſe meſurer.

Comme par exemple, une ligne eſtant de deux pieds, & une autre √√ 6, icelles deux lignes ſeront dites incommenſurables en puiſſance, pource qu'il n'y a aucune ſuperficie qui meſure leurs quarrez 4 & √ 6: de meſme √ 8 & √√ 12, ſeront auſſi dites incommenſurables en puiſſance, car nul eſpace ſuperficiel ne meſure leurs quarrez 8 & √ 12.

Or eſt icy à noter que toutes lignes (ou nombres) incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude, mais non pas au contraire. Ainſi une ligne de deux pieds ſera bien incommenſurable en longitude à une autre ligne de √ 8: mais non pas en puiſſance: & 2 qui eſt incommenſurable en puiſſance à √√ 8, l'eſt auſſi en longitude.

5. Cela eſtant ainſi, il evident qu'à toute ligne droite propoſée, on trouvera infinies lignes droites commenſurables, & infinies incommenſurables: les unes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or cette ligne droite propoſée, eſt appellée rationelle.

C'eſt à dire que quand on propoſe quelque ligne droite de grandeur connuë & determinée, icelle eſt

appellée rationelle, pource que c'eſt ſelon elle que nous ratiocinons: & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poſerons touſjours d'un de ces nombres abſolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

6. Et les lignes droites commenſurables à cette ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement ſont auſſi appellées rationelles.

7. Mais les lignes incommenſurables à cette ligne rationelle, ſont dites irrationelles.

Si comparant quelque ligne droite, à la ligne priſe pour rationelle, & ſur laquelle nous ratiocinons, elle eſt trouvée commenſurable à icelle rationelle, ſoit en langueur, & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement, telle ligne eſt auſſi rationelle; mais ſi elle eſt incommenſurable à icelle ligne rationelle propoſée, tant en longitude qu'en puiſſance, cettedite ligne eſt appellée irrationelle.

8. Le quarré décrit ſur une ligne rationelle propoſée, eſt appellé rationel.

Tout ainſi que cette ligne-là, laquelle eſt connuë & determinée de certaine quantité eſt dite rationelle: ainſi auſſi le quarré décrit ſur icelle ligne, eſt appellé rationel, pource qu'iceluy eſt certain & connû: & les ſuperficies comparées à iceluy quarré, ſont auſſi dites rationelles, ou bien irrationelles, ſelon qu'elles ſeront trouvées commenſurables ou incommenſurables à iceluy quarré rationel, ainſi qu'il eſt dit és deux definitions ſuivantes.

9 Les figures commenſurables à ce quarré rationel, ſont auſſi rationelles.

10 Mais celles qui luy ſont incommenſurables, ſont irrationelles & ſourdes.

11 Et les lignes droites qui peuvent icelles figures irrationelle, ſont irrationelles & ſourdes.

Or une ligne droite eſt ditte pouvoir une figure quand le quarré décrit ſur icelle eſt egal à icelle figure, d'autant que tout quarré eſt la puiſſance de ſa racine ou de ſon coſté. Ainſi il a été dit cy-deſſus que deux lignes ſont commenſurables en puiſſance; lorſque non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuvent être meſurez par une même ſuperficie.

Or à ces definitions nous ajouterons (apres Clavius) une demande, & quelques communes ſentences, dont l'uſage ſera trouvé en ce livre.

DEMANDE.

Qu'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois quel excede quelconque grandeur proposée de même genre.

COMMVNES SENTENCES.

1 Vne grandeur meſurant tant de grandeurs qu'on voudra, meſure auſſi la compoſée d'icelles.

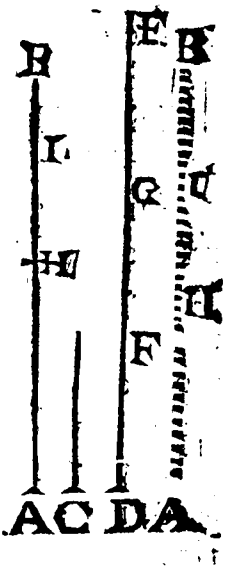
2 Vne

3. Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillement toute grandeur que celle-là mesure.

4. Vne grandeur qui mesure toute une grandeur, & une retranchée d'icelle, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

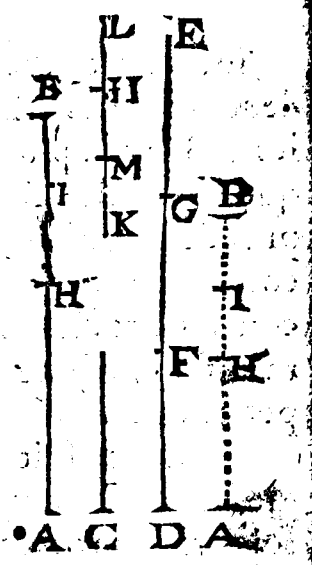
Estans proposées deux grandeurs inegales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & qu'en continuant cela se fasse toûjours ainsi: Il demeurera enfin une grandeur plus petite que la moindre des deux proposées.



Soient proposées deux grandeurs inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande: Je dis que si d'icelle AB on retranche plus de la moitié, & du reste encores plus de la moitié, & qu'on continuë toûjours ainsi, il restera enfin quelque grandeur plus petite que C.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliée tant de fois que le produit excede la plus grande AB, & la produite d'icelle multiplication soit DE, laquelle sera multipli-

ce de C, & plus grande que AB : qu'elle ſoit di
diviſée en parties egales à C, cõme en DF, FG, G
Item de AB ſoit retranché plus de la moitié, A
& du reſte HB encore plus de la moitié HI, & c
continuant toûjours cecy juſques à ce que AB ſo
ſée en autant de parties que DE, ſçavoir A
HI, & IB. D'autant que DE eſt plus grande qu
AB, & que le retranché DF n'eſt pas plus gran
que la moitié de DE : comme le retranché AH, e
plus grand que la moitié de AB, le reſte FE ſer
plus grand que le reſte HB : ſemblablement ſi d
plus grand reſte FE, on ôte FG qui n'eſt pas plu
que la moitié, & du plus petit reſte HB on ôte plu
de la moitié HI ; le reſte IB ſera plus petit que l
reſte GE egal à C : & par conſequent IB derniere
partie de AB, ſera plus petite que C. Etans donc
propoſée deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il
falloit demontrer.



On demontrera ſemblablement que le même adviendra ſi de AB, on ôte la moitié AH, & du reſte HB la moitié HI.

Autrement ayant fait la même conſtruction que deſſus, ſoit priſe KL autant multiple de IB que DE eſt multiple de C. Donc icelle KL étant diviſée en KM, MN, NL, parties egales chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE. Mais d'autant que AH eſt plus grande que HB, ou ega

le, si on a ôte seulement la moitié de AB) & icelle HB plus grande que IB : aussi AH sera plus grande que IB, c'est à dire que KM. Derechef, puis que HI est plus grande que IB, (ou egale à icelle) & que icelle IB, est egale à MN ; aussi HI sera plus grande que MN : (ou egale) & partant la toute AI sera plus grande que la toute KN. Ajoutant donc les egales IB, NL, la toute AB sera plus grande que la toute KL. Mais DE est encore plus grande que AB : Donc DE sera bien plus grande que KL. Et puis que comme DE est à C, ainsi KL est à IB; (car KL est prise autant multiple de IB, que DE de C) aussi C sera plus grande que IB par la 14. pr. 5. & partant le reste IB est moindre que C. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposées on retranche toûjours alternativement la plus petite de la plus grande, sans que le reste mesure la grandeur precedente: telles grandeurs seront incommensurables.

Soient proposées deux grandeurs inegales AB & CD, desquelles la moindre AB soit retranchée de la plus grande CD : puis le reste CD soit ôtée de AB, & qu'ainsi continuellement & alternativement la plus petite étant ôtée de la plus grande, le reste ne mesure jamais sa grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit reste ne mesure jamais le plus grand reste : Je dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement, il faudra qu'elles ſoient commu-
ſurables: & partant qu'elles ayent une commu-
meſure, laquelle ſoit E, s'il eſt poſſi-
ble. Maintenant, de la plus grande
CD ſoit retranchée CF egale à AB:
Et s'il ſe peut faire, ſoit continué ce
retranchement juſques à ce que le
reſte DF ſoit plus petit que AB. Donc
E commune meſure, meſurera la tou-
te CD & la retranchée CF, egale à
AB, ou multiplice d'icelle, par la 2.
com. ſent. & elle doit auſſi meſurer
le reſte DF par la 3. com. ſent. Item
ſoit tetranchée DF de AB tant de fois
que faire ſe pourra, juſques à ce que
le reſte GB ſoit plus petit que E, qui meſure FD
& par conſequent ſa multiplice AG, par la 2. com
ſent. donc auſſi le reſte GB, par la 3. comm. ſent. c
qui eſt abſurde. Partant AB & CD n'avoient poin
de commune meſure; & par conſequent ſont in
commenſurables. Parquoy ſi de deux grandeur
inegales proposées, &c. Ce qu'il faloit demontre



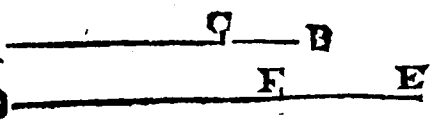
SCHOLIE.

Nous convertirons cette prop. ainſi.

Si de deux grandeurs incommenſurables propo-
sées l'on retranche toûjours alternativement l
plus petite de la plus grande, le reſte ne meſuren
jamais la grandeur precedente.

*Soient proposées deux grandeurs incommenſura-
bles AB, DE, dont la moindre AB ſoit oſtée d
DE, & le reſte ſoit FE: Item de AB ſoit oſté*

FE, & le reſte ſoit BC, & ainſi continuellement la plus petite de la plus grande : Ie dis que le reſte ne meſurera jamais la grandeur prec. Car ſi faire ſe peut que CB meſure la preced. FE Donc puis que CB meſure FE, & icelle FE meſure AC, auſſi CB meſurera AC par la 2. com. ſent. Mais elle meſure auſſi ſoy-même. Donc CB meſurera pareillement la toute AB par la 1. comm. ſent. Mais AB meſure DF: Donc par la 2. com. ſent. CB meſurera la même DF : Et puis qu'on a poſé qu'elle meſure auſſi FE, elle meſurera la toute DE par la 1. com. ſent. Mais il a été demontré qu'icelle CB meſure auſſi AB; elle meſure donc AB & DE ; ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ont eſté poſées incommenſurables.



A ce theor. Clavius ajoûte cettuy-cy.

Si de deux grandeurs commenſurables propoſées, on ôte toûjours alternativement la moindre de la plus grande, quelque grandeur reſtante meſurera la precedente.

Car ſi jamais le reſte ne meſuroit la grandeur precedente, les propoſées ſeroient incommenſurables par cette 2, prop. ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ſont poſées commenſurables.

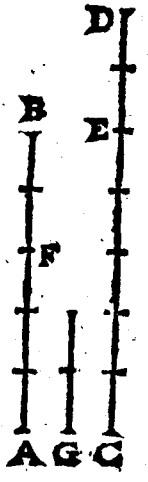
Parquoy il eſt facile de connoître, ſi deux quelconques grandeurs propoſées ſont commenſurables, ou non: Car retranchant alternativement la moindre de la plus grande, ſi quelque reſte meſure le precedent, les grandeurs propoſées ſeront commenſurables, comme il appert de la demonſtration du premier theor. de ce Scholie: Mais ſi le reſte ne meſure jamais la grã-

deur precedente, les grandeurs proposées seront commensurables, comme Euclide a demontré en ce 2. prop.

PROBL. 1. PROP. III.

Estans données deux grandeurs commensurables, trouver la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient données deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouver leur plus grand commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point. Si elle la mesure, il est evident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternativement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit advenir, d'autant que les grandeurs données sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Je dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son egale: & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune me-

ſure, qu'on en trouve une autre plus grande, ſçavoir G, (s'il eſt poſſible) donc par les communes ſentences G meſurera AB, CD, & le retranché CE egal à AB, & par conſequent le reſte ED, qui eſt plus petit; ce qui eſt impoſſible : donc une plus grande magnitude que ED, n'eſt commune meſure d'icelles AB, CD : Partant ED eſtoit la plus grande commune meſure. Eſtans donc données deux grandeurs commenſurables, nous avons trouvé leur plus grande commune meſure. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

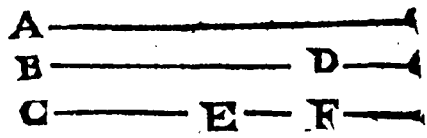
De cecy eſt manifeſte que ſi une grandeur meſure deux grandeurs, qu'elle meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demontré que ſi G meſure AB & CD, qu'elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure ED.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commenſurables eſtans données, trouver la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient données trois grandeurs commenſurables A, B, C, deſquelles il faut trouver la plus grande commune meſure. Soit premierement trouvée D plus grande commune meſure de A & B par la 3. propoſition 10. Or ſi D meſure auſſi C, il eſt manifeſte que D eſt la plus grande commune meſure de toutes les trois grandeurs A, B, C.

Car ſi une plus grande magnitude que D meſur
les grandeurs A, B, C, par le Corollaire de la pre
cedente prop. elle meſurera auſſi la plus grand
commune meſure d'icelles A & B, c'eſt à dire D
qui eſt moindre grandeur, ce qui eſt impoſſible
Que ſi D ne meſure pas C, au moins D, C, ſeron
commenſurables : car veu que les grandeurs A, B
C ſont commenſurables, quelque commune me
ſure d'icelles meſu-
rera, D plus grande
meſure d'icelles A &
B, par le Corol. de
la 3. prop. 10. mais
cette meſme meſure-
là meſurera auſſi C: donc D & C, ſeront commen-
ſurables. Soit donc trouvée par la ſuſdite 3. pro-
poſition 10. E plus grande commune meſure d'i-
celles D, C : & icelle E ſera la plus grande meſure
des grandeurs données A, B, C. Car d'autant que
E meſure D & C ; & D meſure A & B par la 2.
com. ſent. E meſurera auſſi icelles A & B. Mais
elle meſure auſſi C. Donc E eſt meſure commu-
ne d'icelles A, B, C. Que ſi on nie qu'elle ſoit la
plus grande commune meſure, qu'on en trouve
une autre plus grande, ſçavoir F, s'il eſt poſſible.
Donc puis que F meſure A & B, par le ſuſdit Co-
roll. de la 3. prop. 10. elle meſurera auſſi leur plus
grande commune meſure D. Mais elle meſure auſſi
C : donc F meſurant D & C, meſurera pareille-
ment E plus grande meſure d'icelles : ce qui eſt
abſurde. Donc une plus grande grandeur que E
ne meſure pas les grandeurs A, B, C : Et partant E
eſt la plus grande commune meſure d'icelles. Par-



quoy eſtans données trois grandeurs commenſurables, nous avons trouvé leur plus grande commune meſure. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt evident que ſi une grandeur meſure trois grandeurs, qu'elle meſure auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demontré que ſi F meſure A, B, C, qu'elle meſurera pareillement E plus grande commune meſure d'icelles.

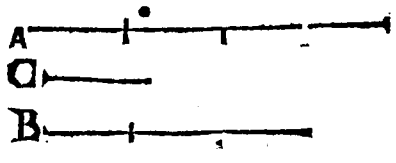
Par ſemblable maniere, eſtans données plus de trois grandeurs commenſurables, nous trouverons leur plus grande commune meſnre : & ce meſme Corollaire aura auſſi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commenſurables, ſont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B. Je dis qu'elles ſont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles ſont commenſurables, elles auront une commune meſure, laquelle ſoit C : & autant de fois que C meſure A, que l'unité F meſure le nombre D ; & autant de fois que C meſure B, que l'unité meſure auſſi le nombre E. Or puis que la grandeur C & l'unité F,



D. 4.
F. 1.
E. 3.

meſurent egalement la grandeur A & le nombre D ; la grandeur A contiendra la grandeur C autant de fois que le nombre D contient l'unité F ; & partant comme A eſt à C, ainſi le nombre D eſt à l'unité F. Mais puis que la grandeur C meſure la grandeur B, & l'unité F le nombre E, egalement ; comme C eſt à B, ainſi l'unité F eſt au nombre E. Donc en raiſon egale, A ſera à B, comme le nombre D eſt au nombre E par la 22. p. 5. Donc les grandeurs commenſurables ſont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre, elles ſeront commenſurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui ſoient l'une à l'autre comme le nombre C eſt au nombre D : Je dis qu'elles ſeront commenſurables.

Car la grandeur A ſoit entenduë être divisée en autant de parties egales qu'il y a d'unitez au nombre C, & l'une d'icelles parties ſoit egale à E: donc E eſt à A, ainſi que l'unité F eſt au nombre C, Mais par l'hypotheſe A eſt à B, comme le nombre C eſt au nombre D : donc en raiſon egale, E ſera à B, comme l'unité F eſt à D, par la 22. prop. 5. Mais l'unité F meſure le nombre D : donc auſſi E meſure B : mais E meſure pareillement A. Donc E eſt commune meſure de A & B : & partant par la premiere deff. de ce livre A & B ſont commenſurables. Parquoy ſi deux grandeurs ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

COROLLAIRE.

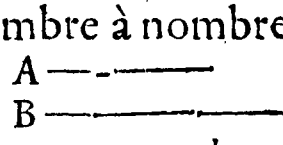
Par cecy eſt evident qu'eſtant propoſez deux nombres comme C & D, & une ligne droite comme A, qu'il ſera aiſé de trouver une autre ligne droite, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: Car diviſant A en autant de parties egales qu'il y a d'unitez au nõbre C, & on prend une ligne droite B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unitez au nombre D; alors A ſera à B, comme le nombre C au nombre D: ainſi qu'il eſt manifeſte, par ce qui a eſté dmeontré en cette prop.

De cecy apert dereehef, par quelle maniere on peut, étans donnez deux nombres, & une ligne droite, trouver une autre ligne droite, le quarré de laquelle ſoit au quarré de la donnée comme nombre à nombre. Car s'il faut trouver une ligne droite, au quarré de laquelle ſoit le quarré de la ligne A, comme le nombre C eſt au nombre D: Il faudra trouver ainſi que deſſus la ligne B, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: puis ſoit trouvée par la 13. prop. 6. la moyenne prop. entre icelles A & B: & le quarré de A ſera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A ſera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B: & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommenſurables, ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs incommenſurables A & B: Je dis qu'elles ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.



Ce qui eſt manifeſte : car ſi elles eſtoient entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeroient commenſurables par la 6. prop. 10. ce qui eſt contre l'hypoteſe, ayans eſté poſées incommenſurables. Parquoy les grãdeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeront incommenſurables.

Que les grandeurs A & B ne ſoient entr'elles comme nombre à nombre : Je dis qu'elles ſont incommenſurables.

A ———
B ——

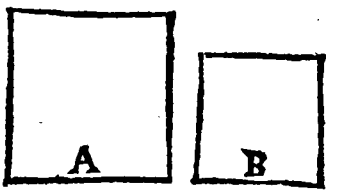
Ce qui eſt evident : car ſi elles eſtoient commenſurables, il faudroit qu'elles fuſſent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui eſt contre noſtre hypotheſe, puis qu'elles ont eſté poſées n'eſtre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy ſi deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez décrits ſur lignes droites commenſurables en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré ; Et les quarrez qui ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez décrits de

lignes droites incommenſurables en longitude, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les côtez incommenſurables en longitude.

Soient les lignes droites A & B commenſurables en longitude : Je dis que leurs quarrez ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.



C. 4. D 3.

E. 16. F 9.

Car puis que les lignes A & B ſont commenſurables en longitude, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D : & les quarrez d'iceux C & D ſoient E & F. Or les quarrez de A & B ſont en raiſon doublée de leurs coſtez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarrez E & F ſont auſſi en raiſon doublée de leurs coſtez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A eſt au quarré de B, comme le nombre quarré E eſt au nombre quarré F : C'eſt à ſçavoir en raiſon doublée des coſtez A & B, ou des nombres C & D, qui ſont en la meſme raiſon que les lignes A & B.

Pour la ſeconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F : Je dis que les lignes A & B ſeront

commensurables en longitude. Car par la 20. pr. & 11. prop. 8. la raison des quarrez aux quarrez, est la raison doublée de leurs côtez: & partant comme le côté A au côté B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublées sont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la troisiéme partie soient les lignes droites A & B incommensurables en longitude. Je dis que leurs quarrez ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrez de A & B êtoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longitude contre l'hypothese.

Finalement, les quarrez de A & B n'êtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Je dis qu'elles sont incommensurables en longitude. Car autrement leurs quarrez seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothese. Parquoy les quarrez décrits de lignes droites commensurables en longitude, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy-dessus demontrées, que les lignes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longitude. Que les incommensurables en longitude, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommensurables en puissance, le sont aussi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commens. en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à dire simplement com-

ne nombre à nombre : iceux quarrez ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commenſurables en longitude le ſont auſſi en puiſſance.

Puis apres, veu que les lignes dõt les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains ſeulement comme nombre à nombre, ſont commenſ. en puiſſance (car leurs quarrez ſont commenſurables par la 6. prop. 10.) & non en longitude, comme il a été demontré : il apert que les lignes commenſurables en puiſſance ne le ſont pas pourtant en longitude, ſinon que les quarrez d'icelles lignes ſoient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, puis que les lignes deſquelles les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre ſont incommenſurables en longitude, & commenſurables en puiſſance: il apert que les lignes incommenſurables en longitude ne le ſont pas toûjours en puiſſance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre à nombre, qui ſoient auſſi incommenſ. en puiſſance, veu que leurs quarrez ſont incommenſ. par la 8. prop. 10.

Finalement eſt manifeſte que les lignes incommenſ. en puiſſance, le ſont auſſi en longitude : car ſi elles eſtoient commenſ. en longit. elles le ſeroient auſſi en puiſſance ; comme apert par la premiere partie de ce corollaire : ce qui eſt contre l'hypotheſe.

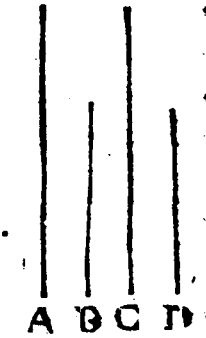
SCHOLIE.

Il eſt à noter qu'és deux premieres parties de cette propoſition s'entend auſſi des lignes inexpliquables par nombres, pourveu qu'elles ſoient commenſurables en longitude ; comme ſi les quarrez de A & B eſtoient 12 & 3, leurs coſtez ſeroient V12 & V3, qui ſont

inexplicables par nombres, toutesfois commenſ. Car par la 20. prop. 6, 12 ſeroit à 3 en raiſon doublée de V 12 à V 3. Mais 12 eſt quadruple de 3 : Ainſi le coſté A ſera double du coſté B, par la 10. def. 5. Car la double raiſon doublée eſt quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit commenſurable à la ſeconde, la troiſiéme, ſera auſſi commenſurable à la quatriéme. Que ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſiéme ſera auſſi incommenſ. à la quatriéme.



Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D : & ſoit A 1, commenſurable à B 2. Je dis que C 3e. ſera auſſi commenſ. à D 4.

Car A eſtant commenſurable à B, elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. pr. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D; Partant C eſt à D, comme nombre à nombre : & par conſequent commenſurable par la 6. prop. 10.

Que ſi A eſtoit incommenſ. à B. Je dis que C ſeroit auſſi incommenſurable à D : Car A & B ne ſeroient pas comme nombre à nombre par la 7. pr. 10. Mais comme A à B, ainſi C à D : donc C n'eſt pas à D comme nombre à nombre : & par conſequent incommenſurable par la 8. prop. 10.

Si

Si donc quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

LEMME.

Trouver deux nombres plans diſſemblables, c'eſt à dire, qui ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A, & un autre non quarré B. Ie dis qu'iceux nombres A & B ſont plans diſſemblables. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, ils ſeroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. pr. 8. & partant A eſtant nombre quarré, auſſi B ſeroit quarré par la 24. pr. 8. contre l'hipotheſe. Donc A & B, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

A 16. B 20.

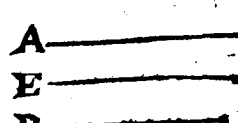
PROBL. 3. PROP. XI.

Trouver deux lignes droites incommenſurables à une ligne rationnelle propoſée, ſçavoir une en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soit la ligne rationelle propoſée A, à laquelle il faut trouver deux autres lignes incommenſurables, l'une ſeulement en longitude, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soient trouvez par le lemme precedent deux nombres B, & C, qui ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Item par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit trouvée la ligne D, de laquelle le quarré ſoit au quarré de la ligne A, comme le nombre C eſt au nombre B. Or d'autant qu'iceux quarrez de A & D ſont comme nombre à nombre, ils ſeront commenſurables entr'eux par

la 6. prop. 10. Mais n'étans pas comme nom
quarré à nombre quarré, ils
n'auront pas les côtez A & D
commenſ. en longitude, par
la 9. prop. 10. Donc les li-
gnes droites A & D ſont
commenſurables en puiſſance ſeulement : la ligne
D eſt donc la premiere requiſe.



Maintenant ſoit trouvée la ligne E moyenne p
entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E ſera
ſeconde ligne demandée : car puis que par le co
rol. de la 20. prop. 6. le quarré de A eſt au quar
de E comme A eſt à D, & icelles A & D ſont in
commenſurables en longitude, comme il a été d
montré : le quarré de A ſera auſſi incommenſ. a
quarré de E, par la 10. prop. 10. Parquoy les ligne
A & E ſont incommenſ. en puiſſance, & par
corol. de la 9. prop. 10. elles ſont auſſi incommen
en longitude. Nous avons donc trouvé deux ligne
droites incommenſurables, &c. Ce qu'il faloit fair

SCHOLIE.

La ligne A ſoit 5 : donc la ligne D ſera V 20. la
quelle il apert eſtre incommenſurable en longitude
A, mais commenſurable en puiſſance. Mais la ligne
E eſtant moyenne prop. entre A 5, & DV 20, elle
ſera VV 500, qui eſt incommenſ. tant en longit. qu'
puiſſance à A 5.

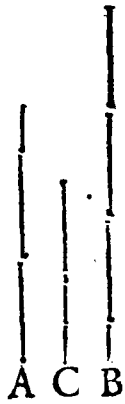
THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commenſurables à une autre, ſont auſſi commenſurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commenſu
rables chacune à la grandeur C : Je dis qu'elle

sont commensurables entr'elles.

Car puis que A & C sont commensur. icelles seront comme nombre à nombre par la 5. pr. 10. & soit comme le nõbre D au nombre E. Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres, H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G : tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I, & C à B, comme I à K; en raison egale, A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre : & partant A & B sont commens. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensurables à une autre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



D 10, E 8.
F 2, G 3.
H 5, I 4. K 6.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'une est commensurable à une troisiéme, & l'autre incommensurable, icelles grandeurs seront incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, desquelles A soit commens. à C; & incommens. à la même C. Je dis que A & B sont incommens. en-

A ——
C ——
B ————

tr'elles. Car si B êtoit commenſ. à A, lequel A
poſé auſſi commenſ. à C, par la 12 pr. 10. B &
ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A
B ne ſont commenſ. Parquoy ſi de deux grandeu
&c. Ce qu'il faloit drmontrer.

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'une
incommenſ. à une tierce grandeur, auſſi ſ
ra l'autre à la meſme.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B, & que A ſoit incommenſurable à la tierce C: Je dis que B & C ſont auſſi incommenſurables.

Autrement, ſi B eſt commenſurable à C, elle ſera auſſi commenſurable à A, par la 12. prop. 10. contre noſtre hypotheſe: donc B eſt incommenſurable à C: Parquo ſi de deux grandeurs commenſurables, &c. C qu'il faloit demontrer.

A B

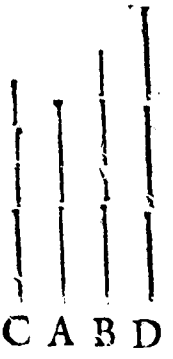
SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de cette prop le theoreme ſuivant, utile aux choſes demontrées e ce livre.

Les grandeurs commenſurables à des incom menſurables, ſont auſſi incommenſurables en tr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommenſurable auſquelles C & D ſoient commenſurables, ſçavoir C à A, & D à B. Ie dis que C & D ſont incommen ſurables entr'elles. Car puis que A & C ſont poſé commenſurables, & A incommenſurable à B, l'aut

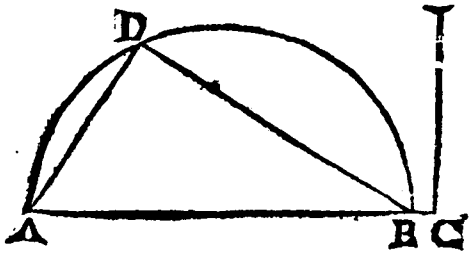
C ſera auſſi incommenſ. à A par la 14. *prop.* 10. *Derechef, puis que D & B ſont poſées commenſurables, & B a eſté démontrée incommenſurable à C ; D ſera auſsi incommenſurable à la meſme C par la* 14. *prop.* 10. *Ce qui eſtoit propoſé.*



LEMME.

Eſtans données deux lignes droites inegales, trouver combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient données les deux lignes droites AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande : & il faut trouver combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit décrit ſur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy ſoit accommodée AD egale à C, par la 1. *prop.* 4. *& ſoit menée DB. Ie dis que AB peut plus que C du quarré de BD. Car d autant que l'angle D eſt au demy cercle, il eſt droit par la* 31. *pr.* 3. *& par la* 47. *pr.* 1. *le quarré de AB, ſera egal aux quarrez de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'eſt à dire que C, du quarré de BD. Ce qui eſtoit propoſé.*



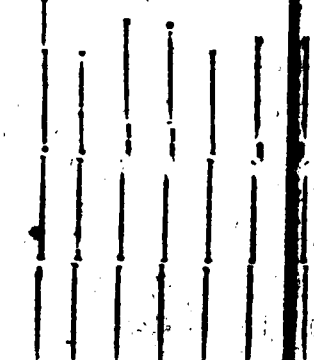
Semblablement eſtans données deux lignes droites, en trouver une autre pouvant icelles.

Soient données les deux lignes droites AD. BD: & il faut trouver une ligne droite qui puisse icelles. Soient posées icelles AD, BD à angle droit D, & tirée AB. Il est evident qu'icelles AB peut les deux AD & BD, puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB, est egal aux deux quarrez de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude : aussi la troisiéme pourra plus que la quatriéme du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longitude. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude : aussi la troisiéme pourra plus que la quatriéme du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longitude.

Soient 4. lignes droites proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E; & C plus que D du quarré de F. Je dis que comme A sera commensurable ou incommensurable en longitude à E, ainsi C sera commens. ou incommensurable en longitude à F.

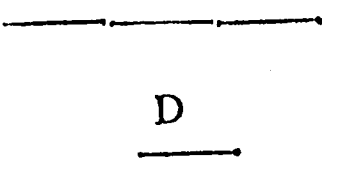


Car puis que A, B, C, D, ſont proportionnales, comme le quarré de A ſera au quarré de B, ainſi le quarré de C ſera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A eſt egal aux quarrez de B, E, par l'hypotheſe, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc auſſi les quarrez de B, E, ſeront au quarré de B, comme les quarrez de D, F, au quarré de D; & en diviſant, comme le quarré de E ſera au quarré de B, ainſi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. pr. 6. comme la ligne E ſera à la ligne B, ainſi la ligne F ſera à la ligne D; & en changeant, comme B à E, ainſi D à F. Donc puis que comme A à B, ainſi C à D, & comme B à E ainſi D à F; en raiſon egale, comme A ſera à E, ainſi C à F: Et par la 10. pr. 10. ſi A eſt commenſ. ou incommenſurable à E, auſſi C ſera commenſ. ou incommenſurable à F: Parquoy ſi quatre lignes droites ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commenſurables ſont conjointes, la compoſée ſera commenſurable à chacune de ſes parties: Et ſi la compoſée eſt commenſurable à une de ſes parties, icelles ſeront commenſurables entr'elles.

Soint jointes deux grandeurs commenſur. AB & BC; Je dis que la compoſée AC, eſt auſſi commenſ. à chacune d'icelles AB, & BC.



Car puis que AB & BC ſont commenſurables, elles auront une commune

meſure, laquelle ſoit D. Donc puis que D meſure AB & BC, elle meſurera auſſi la toute A C, par la 1. c. ſent. Partant la toute AC eſt commenſ. à ſes parties.

Pour la ſeconde partie. Que la toute AC ſoit commenſ. à une de ſes parties, ſçavoir à AB: Je dis qu'icelles parties AB, BC ſeront commenſurables entr'elles. Car puis que AC & AB ſont commenſurables, elles auront une commune meſure, comme D, laquelle meſurant la toute AC & la retranchée AB, elle meſurera auſſi le reſte BC par la 3. commune ſent. Partant AB & BC ſeront commenſurables entr'elles, puis qu'elles ont une commune meſure D. Parquoy ſi deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que ſi une grandeur compoſée de deux, eſt commenſurable à l'une d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC eſt commenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC: Car par la ſeconde partie de cette prop. AB, BC ſont commenſurables: donc par la premiere partie AC ſera commenſurable à chaque partie, AB, BC.

SCHOLIE.

Soit AB V 18, & BC V 8, leſquelles ſont commenſ. La compoſée AC ſera V 50, laquelle eſt commenſurant à V 18, que à V 8. Car V 50 eſt à V 18, comme 5 à 3: & à V 8 comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conjoint deux grandeurs incommenſurables, la compoſée ſera incommenſurable à chacune de ſes parties: Et ſi la compoſée eſt incommenſurable à l'une de ſes parties, icelles parties ſeront incommenſurables entr'elles.

Soient conjointes deux grandeurs incommenſ. AB & BC: Je dis que la toute AC eſt incommenſ. à une chacune de ſes parties AB & BC.

Autrement, ſi AC eſtoit commenſ. à AB, elle le ſeroit auſſi à BC: car la commune meſure qui meſureroit AC & le retranché AB, meſureroit auſſi le reſte BC, par la 3. c. ſent. Et partant AB & BC ſeroient commenſ. (ce qui eſt contre l'hypotheſe.) Donc AC & AB ſont incommenſ. Il s'enſuivra le meſme inconvenient ſi on nie que AC & BC ſoient incommenſurables.



Pour la ſeconde partie: Je dis que ſi AC & BC, ſont incommenſ. que AB & BC ſeront auſſi incommenſ. Autrement ſi elles eſtoient commenſurables: La toute AC, ſeroit auſſi commenſurable à ſa partie BC par la 16. propoſ. 10. contre noſtre hypotheſe. Donc AB & BC ſont incommenſurables. Par meſme argument nous demontrerons que ſi AC & AB ſont incommenſ. que AB & BC ſont auſſi incommenſ. Parquoy ſi on conjoint

deux grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE

Il reſulte de ces choſes, que ſi une grandeur compoſée de deux, eſt incommenſurable à l'une d'icelles, qu'elles le ſera auſſi al'autre. Comme ſi AC compoſée de AB & BC eſt incommenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC. Car ſi AC eſtoit commenſ. à icelle BC, elle le ſeroit auſſi à AB, par le coroll. de la precedente prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc AC & BC ne ſont commenſurables, mais incommenſurables.

SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC √ 28, leſquelles ſont incommenſurables. La compoſée AC ſera 8 + √ 28 incommenſurable à chacune d'icelles AB 8, & BC √ 28.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droites inegales, & à la plus grande on aplique un rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle diviſe icelle plus grãde ligne en partie cõmenſ. en longit. la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſera commenſurable en longitude: Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, étant apliqué un rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant

d'une figure quarrée ; le rectangle diviſera icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. prop. 6. ſur la plus grande AB ſoit apliqué un rectangle egal au quart du quarré de C, défaillant d'une figure quarrée, c'eſt à dire d'une ligne egale à ſon autre côté. Et ſoit iceluy rectangle contenu ſous AD & DB commenſurables en longitude. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB coupée en deux egalement en E, & ſoit faite EF egale à ED : Il eſt evident que AF ſera egale à DB, puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchées EF, ED. Maintenant, puis que AB eſt coupée en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. pr. 2. le rectãgle de AD & DB avec le quarré de ED, ſeront egaux au quarré de BE, lequel n'étant par l'hypotheſe que le quart du quarré de AB quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, ſont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD, & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AD & DB eſt le quart du quarré de C. Donc le quarré de AB eſt plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du ſeul de FD egal à iceux par le Schol. de la 4. pr. 2. puiſque FD eſt double de ED. Dauantage, puis

que AD & DB ſont poſées cõmenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi commenſ. en longitude à ſa partie DB par la 16.pr.10. Et partãt à ſon egale AF, & à toutes les deux jointes en une : & par conſequent au reſte de la ligne FD par la meſme 16. pr. 10. Donc la ligne droite AB peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt commenſ. en longitude.

Pour la ſeconde partie, que AB puiſſe plus que C du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, & qu'à icelle AB ſoit aplique un rectãgle egal au quart du quarré de C, & detaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle diviſe AB és parties AD,DB: Je dis qu'icelles parties AD & DB ſeront auſſi commenſ. en longitude. Car demeurãt la meſme conſtruction que deſſus, il ſera demontré comme là que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a eſté poſée pouvoir plus que C du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude : & partant AB ſera commenſ. en longitude à icelle FD. Et puis que AB compoſée de FD, AF, & DB comme d'une, eſt commenſurable en longitude à la partie FD ; la même AB ſera auſſi commenſurable en longitude à l'autre partie compoſée de AF, DB par le coroll. de la 16.pr. 10. Mais icelles compoſée de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longitude à DB, puis qu'elle eſt double d'icelle: donc puis que chacunes d'icelles AB, DB eſt commenſ. en longit. à la compoſée de AF,DB; auſſi AB, DB ſeront commenſ. entr'elles en longit. par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB compoſée de AD,DB eſt commenſ. en longit. à icelle DB ; auſſi, icelles AD, DB ſeront commenſ. en longit. entr'elles par la 16. pr. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droites inegales, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

L'aplication mentionnée au commencement de la demonſt. cy-deſſus ſe fera bien plus briefvement par le 60. de nos Problemes geometriques, poſant AB ſomme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

Quant à l'aplication des nombres ſoit AB 30, & C 24: donc les ſegmens AD & DB, ſeront 24: & 6, deſquels le produit, c'eſt à dire le rectangle, eſt 144, qui eſt egal au quart de 576, quarré de C 24, & defaillant du quarré de DB 6 c'eſt à dire 36: & ſont icelles parties AD 24. DB 6, commenſ. en longitude: car l'une eſt quadruple de l'autre. Ainſi FD, qui peut avec C le quarré de AB, ſera 18: car le quarré AB eſt 900, & celuy de C 576; & partant reſte pour le quarr de FD, 324, dont la racine quarree eſt 18, commenſurable en longitude à AB. L'autre partie ſera auſſi evidente par l'adaption des nombres cy-deſſus.

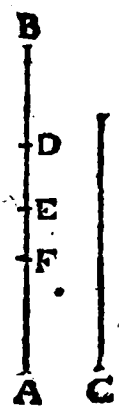
La propoſition ſuivante ſera auſſi facilement entenduë, ſi on poſe AB 12, & CV 96: car les ſegmens AD, DB, ſeront 6+V12. & 6−V12: & FD V48, qui eſt à 12 incommenſurable en longitude, &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y-a deux lignes droites inegales, & à la plus grande on aplique un rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, & qu'iceluy rectangle diviſe la plus grande ligne en parties incommenſ. en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſera incommenſurable en longitude.

Que ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, étant apliqué un rectangle ſur la plus grande ligne, egale au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'une figure quarrée, le rectangle diviſera la plus grande ligne en parties incommenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & ſur la plus grande AB ſoit apliqué (par la 28. prop. 6.) un rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'une figure quarrée: & ſoit iceluy rectangle contenu ſous AD, DB incommenſurables en longitude. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude. Car ayant conſtruit comme en la precedente prop. nous demontrerons ſemblablement que AB peut plus que C du quarré de FD. Il faut donc demontrer que AB & FD ſont incommenſ. en longit. D'autant que les lignes AD, DB ſont poſées incommenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi incommenſ. en lo[illegible] la p[illegible] DB par la 17. pr. 10. Mais DB eſt c[illegible]nſu[illegible] en longitude à la compoſée de AF, DB; veu que cette-cy eſt double de celle-là: donc puis que ces deux lignes commenſ. icelle DB eſt incommenſ. en longitude à AB; la compoſée de AF, DB ſera auſſi incommenſ. en



long. à la même AB par la 14. prop. 10. Et d'autant que AB composée de AF, DB comme une, & de F D, est incommens. en longit. à la composée de AF, DB; la même AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. pr. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommensurable en longitude.

Maintenant, si A B peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incom. en longitude, & sur icelle AB est apliqué un rectangle egal au quart du quarré de C & defaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle divise AB és parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long. Car nous demontrerons comme devant (les mêmes choses êtans construites) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles A B & F D sont incommensurables en longitude: & puis que AB est composée de FD, & de AF, DB jointes en une, icelle AB sera aussi incommens. en longitude à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. pr. de ce livre. Mais la composée de AF, DB est commensurable en longitude à icelle DB, puis que celle-là est double de cette-cy. Donc puis que AB est incommensurable en longit. à la composée de AF, DB, icelle A B sera aussi incommens. en long. à DB, par la 14. pr. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à D B: icelles AD, DB seront aussi incomm. en long. entr'elles par la 7. pr. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droites inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

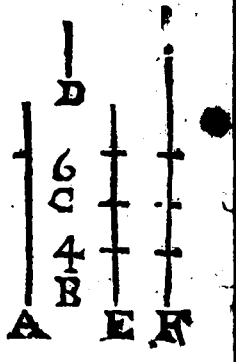
LEMME.

Puis qu'il a esté demontré que les lignes com-

menſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance: mais que celles commenſ. en puiſſance ne le ſont pas toûjours en longitude: il éſt manifeſte que s'il y a quelque ligne commenſurable en longitude à une propoſée rationnelle: elle doit être apellée rationnelle & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puiſſance: car les lignes commenſurables en longitude le ſont toûjours auſſi en puiſſance. S'il y a auſſi quelque ligne droite commenſurable en puiſſance & longitude à l'expoſée rationnele, elle ſera auſſi dite rationele commenſurable en longitude & puiſſance. Que ſi derechef il y-a quelque ligne commenſ. en puiſſance à icelle, mais incommenſurable en longitude, elle ſera auſſi ditte rationelle commenſurable à icelle en puiſſance ſeulement.

SCHOLIE.

Il apert par ce que deſſus, qu'il y a de trois ſortes de lignes rationeles commenſurables entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commenſurables entr'elles en longitude, ou l'une eſt egale à l'expoſee rationele; & partant l'une & l'autre commenſurable en longitude à la rationele, ou l'une ny l'autre n'eſt egale à l'expoſee rationele, & toutesfois commenſurable en longitude à icelle: ou finablement l'une & l'autre eſt commenſurable à l'expoſée rationele en puiſſance ſeulement. Or nous trouverons ces trois genres de lignes rationeles en cette maniere. Soit une rationele propoſées A diuiſée en quatre parties egales:



c'eſt

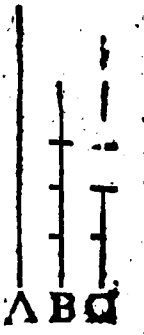
eſt à ſçavoir en autant qu'il y a d'unitez au nombre B : *puis apres eſtant pris quelque autre nombre* C, *la ligne* D *ſoit une partie de* A : *& qu'autant de fois que* D *meſure* A, *autant de fois elle meſure quelque ligne* E : *Item autant de fois que l'unité eſt en* C, *qu'autant de fois la même* D *meſure quelqu'autre ligne* F, *Donc puis que* A *&* E *ſont compoſées de parties egales en nombre, qui ſont egales à* D, *elles ſeront egales. Derechef, puis que* D *meſure toutes les trois lignes* A, E, F, *elles ſeront commenſ. en longitude : parquoy* E *&* F *ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele* A ; *mais elles ont été demontrées eſtre auſſi commenſ. entr'elles en longitude. Nous avons donc trouvé deux rationeles* E *&* F *com. en long. tant entr'elles qu'à la rationele exposée* A, *& deſquelles l'une ſçavoir* E *eſt egale à* A.

Or maintenant, que D *meſure deux lignes* C *&* E *par deux nombres* F *&* G *differens de* B, *tellement que l'une & l'autre ligne* C *&* E *ſoit inegale à* A. *Donc comme deſſus les trois lignes* A, C, E, *ayans* D *pour meſure commune, ſeront commenſurables en longitude : parquoy* C *&* E *ſont rationeles commenſurable en longitude à la rationele* A : *mais elles le ſont auſſi entr'elles. Nous avons donc trouvé deux rationeles* C *&* E *commenſurable en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele proposée* A :



l'une ny l'autre desquelles n'est egale à icelle A.

Finalement par la 11. prop. 10. à l'exposée rationele A soit trouvée la ligne B incommensurable en longitude seulement, laquelle soit coupée en tant de parties egales qu'on voudra, & soit prise C, composée de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C seront commensurable en longitude. Ie dis qu'elles sont aussi commensurable en puissance seulement à l'exposée rationele A. Car puis que A & B sont commensurable en puissance; le quarré de A sera com. au quarré de B, mais au même quarré de B est aussi commens. le quarré de C, pource que B, C estans com. en longitude, elles le seront aussi en puissance. Donc par la 12. prop. 10. les quarrez de A & C, sont pareillement commensurable entr'eux. Parquoy C est commensurable en puissance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commensurable en longitude, B est incommensurable en longitude à A: par la 14 prop. 10. G sera aussi incommensurable en longitude à la méme A. Donc C est commensurable à A seulement en puissance. Et pource que B & C, commensurables en puissance à l'exposée rationele A, sont rationeles; elles seront deux rationeles commensurable en longitude entr'elles, mais en puissance seulement à l'exposée rationele A: elles sont donc les deux lignes requises à trouver.



Que si quelqu'un desire trouver tant qu'on voudra de lignes rationeles commensurables en longitude entr'elles, cela se fera ainsi qu'il ensuit: Soit pris quelconque mesure D, (regardez la premiere figure de cette page) & soient composées autant qu'on voudra de

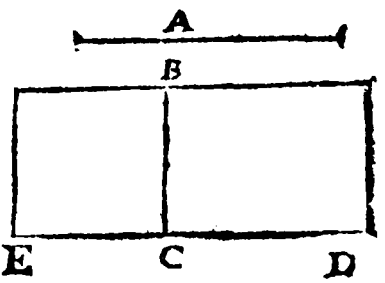
lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D; qu'il y a d'unitez en autant de nombres inegaux B, F, G: car les lignes A, C, E, ayans la commune mesure D, seront commensurables en longitude.

Or il est aussi evident que toutes lignes rationeles, sont commensurables non seulement à une exposée rationele, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles sont celles qui sont commensurables à l'exposée rationele, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement; & que par la 12. prop. 10. les commensurables à une méme, sont aussi commensurable entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationeles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commensurables en longitude selon quelqu'une des manieres cy-devant dites, est rationel.

Soit une exposée rationele A, & le rectangle BD compris sous BC, CD rationeles commensurables en longitude, selon quelqu'une des manieres cy-dessus dites: Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur l'une d'icelles BC, CD, sçavoir BC,

on fait le quarré BE, il ſera commenſurable au quarré de la rationele A par la 3. def. 10. puis que BC eſt rationele commenſurable à la rationele expoſée A, ou en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Et puis que BC, ou CE, CD ſont commenſurable en longitude; (car BC, CD ont été poſées rationeles commenſurables en longitude entr'elles) & par la 1. prop. 6. comme EC eſt à CD, ainſi EB à BD, par la 10. propoſition 10. EB, BD ſeront auſſi commenſurable, tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD ſont commenſurables au quarré EB; & partant commenſurable entr'eux par la 12. prop. 10. Mais le quarré de A A eſt rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10 le rectangle BD ſera auſſi rationel. Parquoy le rectangle compris de deux ligne rationeles, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

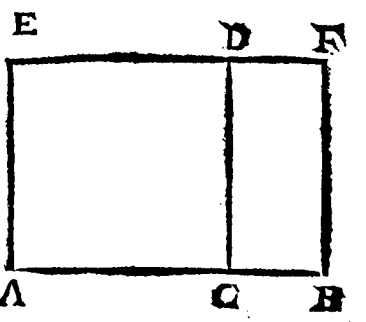
Soit BC 3 & CD 4 : donc le rectangle BD ſera 12 Derechef ſoit BC V 3 & CD V 12 : Le rect. BD ſera V 36, c'eſt à dire 6. Et derechef ſi BC eſt V 8, & CD V 18 : Le rectangle BD *ſera V 144, c'eſt à dire 12. Par ainſi iceluy rectangle eſt rationel.*

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si un rectangle rationel a l'un des côtez rationel, il y aura auſſi l'autre côté rationel: & iceux côtez ſeront entr'eux commenſurables en longitude.

Soit le rectangle rationel DB ayant le côté CD rationel: Je dis que BC ſera auſſi rationel commenſurables en longitude à CD.

Car sur DC, soit fait le quarré A D, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB est à CA par la 1. prop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commensurables.



Donc par la 10. prop. 10. CB & CA, ou C D son egale, seront rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si un rectangle rationel à l'un des côtez rationel, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD $\sqrt{3}$: BC sera donc $\sqrt{12}$, qui est commens. en longitude à $\sqrt{3}$: Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droite CD $\sqrt{8}$, l'autre costé BC sera $\sqrt{18}$, qui est commens. en longitude à CD $\sqrt{8}$. Car si on divise $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, proviendra $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ c'est à dire $\sqrt{\frac{9}{4}}$ qui est $\frac{3}{2}$: & partant $\sqrt{18}$ est à $\sqrt{8}$, comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longitude.

LEMME.

Trouver deux lignes droites rationeles commens. en puissance seulement.

Soit trouvée par la 11 p. 10. quelque ligne droite incom. en long. seulement à une ligne droite rationele proposée, & icelles seront les requises: car puis qu'elles sont com. en puissance seulement par la construction elles seront aussi rationeles par la 6. definition 10.

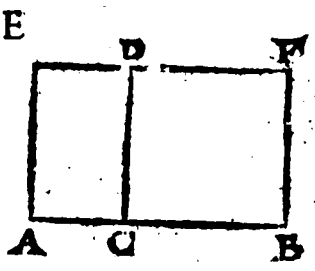
Que si à la ligne trouvée, on en trouve encore une au-

tre, moind. ou plus grande que la proposée rationelle, il eſt manifeſte par la 12. p. 10. que toutes les trois ſeront com. entr'elles en puiſſance ſeul. & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commenſurable en puiſſance ſeulement, eſt irrationel: & la ligne droite qui peut iceluy eſt irrationelle. Soit icelle apellée Mediale.

Soit le rectangle AD, compris de deux lignes rationeles DC & CA commenſurables en puiſſance ſeulement. Je dis que le rectangle eſt irrationel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit être apellé Mediale.



Car ſi ſur la rationelle CD on décrit le quarré D B, il ſera rationel, & ſera au rectangle AD, comme BC ou CD ſon egale, eſt à CA, par la 1. prop. 6. Mais DC & CA ſont incommenſurable en longitude: donc par la 10. p. 10. le quarré BD, & le ctangle AD ſeront incommenſurable. Or le quarré eſt rationel: donc par la 10 definition 10. le rectangle ſera irrationel; & par la 11. la ligne qui peut iceluy ſera auſſi irrationelle: & ſoit icelle ligne apellée Mediale, pource que le quarré d'icelle eſt egal au rectangle compris ſous les rationelles DC, CA commenſurables entr'elles en puiſſance ſeulement, & par conſequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. prop. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droites rationelles

commensurables, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne Mediale, nous dirons icelle estre une ligne irrationelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut un rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne Mediale, ou le rectangle irrationel qu'elle peut, est aussi nommé Medial, pour ce qu'il est moyen prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commensurable entr'elles en puissance seulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle Medial soit tousiours contenu sous deux lignes droites rationelles commensurables en puissance seulement, tel qu'est le Medial CF : car il en avient quelquesfois autrement, comme se verra cy apres.

La ligne DC soit 2, & BCV8. Le rectangle BD sera V 32, qui est irrationel; & sera dit Medial, mais la ligne pouvant iceluy est VV 32, laquelle on apelle Mediale.

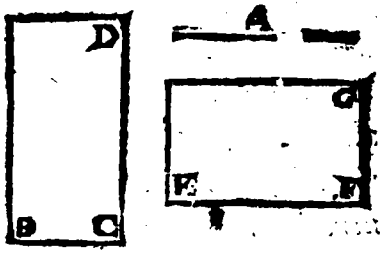
THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'une ligne mediale apliqué sur une ligne rationelle fait l'autre côté rationel commensurable en puissance seulement à la ligne à laquelle se fait l'aplication.

Auparavant que venir à ce qui eſt icy propoſé, eſt à noter que pour apliquer ſur une ligne rationele un rectangle egal au quarré d'une ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. pr 1. Il faut en premier lieu poſer quelconque ligne rationele, en ſecond lieu la mediale, & chercher la tierce proportionele, laquelle ſera l'autre coſté du rectangle: car par la 17. propoſition 6, le quarré de la moyenne eſt egal au rectangle des extrémes.

Venons maintenant à la demonſtration de la prop.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle ſoit appliqué ſur la ligne rationele BC, faiſant le rectangle BD; Je dis que BC & CD ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement.



Car A étant mediale, elle peut un rectangle compris de deux lignes rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, autrement elle ne ſeroit dite mediale: Soit donc iceluy rectangle E G, contenu ſous les rationeles EF, FG commenſurables en puiſſance ſeulement. Et pour ce que A, par l'hypotheſe peut auſſi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG ſeront egaux; & par la 14. prop. 6. ils auront les côtez reciproques, ſçavoir que comme BC à EF, ainſi FG à CD, & par la 22. pr. 6. les quarrez d'icelles lignes ſeront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle eſt commenſ. au quarré de EF, auſſi ligne rationele: donc par la 10. propoſition 10. le quarré de FG ſera auſſi commenſ. au quarré de CD; & partant les lignes FG,

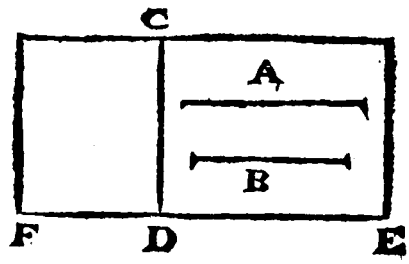
CD ſeront commenſurable au moins en puiſſance, & le quarré de FG eſtant rationel, le quarré de CD ſera auſſi rationel ; & par conſequent les lignes CB & CD ſeront rationelles. Or qu'icelles BC & CD ſoient commenſurables en puiſſance ſeulement, il eſt evident parce qui a été demontré à la 21. prop. 10. Car ſi elles étoient commenſurables en longitude, le rectangle BD ſeroit rational, & nous l'avons poſé medial, c'eſt à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD ſont incommenſurables en longitude. Parquoy le quarré d'une ligne mediale apliqué ſur une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit le quarré de A √40, mais BC ſoit 2. Si donc à BC on aplique √40, l'autre coſté CD ſera √10. qui eſt incommenſ. en longitude à BC, mais commenſ. en puiſſance. Que ſi BC eſt √5, CD ſera √8. auſſi com. en puiſſance ſeulement. Mais ſi la mediale A étoit √√35, & BC √5 : le quarré de A ſeroit √35 : & CD √7, commenſ. en puiſſance ſeulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Une ligne droite commenſurable à une ligne mediale, eſt auſſi mediale.



Soit la mediale A, à laquelle ſoit commenſ. la ligne droite B. Je dis qu'icelle B eſt auſſi mediale.

Car ſoit propoſée la rationele CD, & ſur icelle apliqué le rectangle CE egal au quarré de A : Item ſur la même rationele CD ſoit

apliqué le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, eſt aplique ſur la rationelle CD, l'autre côté DE eſt rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B êtans commenſurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) ſeront auſſi commenſurables. Mais par la 1. prop. 6. comme CE eſt à CF, ainſi la ligne droite ED eſt à la ligne droite DF: Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, ſeront commenſurable en longitude. Mais la ligne ED eſt rationelle, & incommenſurable en longitude à la ligne CD: donc auſſi DF eſt rationelle & incommenſurable en longitude à la même CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF ſont rationelles, elles ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 22. prop. 10. le rectangle CF compris ſous icelles CD, DF ſera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, ſera auſſi mediale: Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE

De cecy reſulte que toute figure commenſurable à une figure mediale, eſt auſſi mediale, d'autant que les quarrez egaux à icelles figures ſeront auſſi commenſurables, & par conſequent commenſurables les lignes qui les pourront à tout le moins en puiſſance, & l'une d'icelles eſtant mediale, l'autre qui luy ſera commenſurable ſera auſſi mediale par cette propoſition.

SCHOLIE.

Soit AVV 200, BVV 128, CD 4. Donc DE ſera V12 $\frac{1}{2}$ & DF V8, commenſurables entr'elles: car elles

ſont comme 5 : 4 ; *& DF eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à CD ; & par conſequent le rectangle CF, qui eſt* V128, *eſt medial & la ligne BV* V128, *qui peut iceluy, auſſi mediale.*

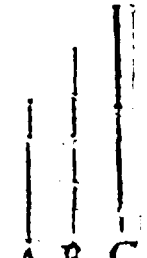
LEMME 1.

Or ce qui a eſté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. *propoſition de ce livre, nous le dirons auſſi des mediales : ſçavoir eſt que les lignes droites commenſurables en longitude à une mediale : eſt dite mediale, & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puiſſance. Car univerſellement les lignes droites commenſ. en longitude le ſont auſſi en puiſſance. Et s'il y a quelque ligne commenſurable en puiſſance & longitude à une mediale, elle ſera pareillement dite mediale, & à icelle commenſurable en longitude & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſurable en puiſſance à une mediale, mais incommenſurable en longitude, elle ſera auſſi dite mediale commenſurable à icelle en puiſſance ſeulement.*

LEMME 2.

Trouver deux lignes mediales commenſurables en longitude : Item deux commenſurables en puiſſance ſeulement.

Soient trouvées les deux lignes A & B commenſurable à la mediale C, c'eſt à ſçavoir A en longitude & B en puiſſance ſeulement : & chacunes d'icelles A & B ſeront auſſi mediales par la 24. *propoſition* 10. *Veu donc que A & C ſont commenſurable en longitude, & B, C en puiſſance ſeulement, eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.*

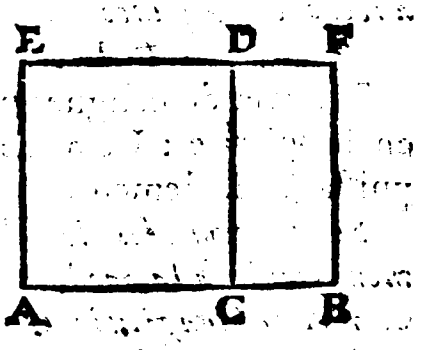


Or il eſt à noter qu'encore que toute ligne droite commenſurable à une mediale, ſoit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'eſt pas commenſurable à quelque mediale que ce ſoit. Car deux mediales ſe peuvent donner incommenſurables en longitude & puiſſance, comme aparoiſtra par la 36. propoſition de ce livre, où nous enſeignerons auſsi à trouver deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en longitude, eſt auſſi medial.

Soit le rectangle DB, compris de deux mediales commenſ. en longitude DC & BC: Je dis qu'il eſt medial.



Car ſi ſur la ligne DC on décrit le quarré DA, il ſera medial, étant décrit ſur une ligne mediale: & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi AD eſt à DB: mais CD, ou CA ſon egale, eſt commẽſurable en longitude à BC: Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, ſera commenſurable au rectangle DB: & par le corollaire de la 24. prop. 10. iceluy rectangle ſera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

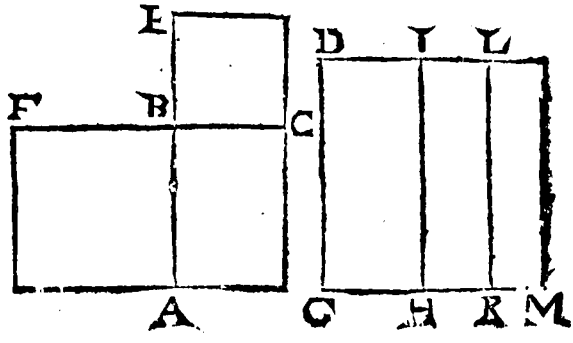
Si les mediales DC, CB commenſ. en longitude ſont VV2 & VV32: le rectangle d'icelles, ſçavoir DB ſera VV64, c'eſt à dire V8, qui eſt medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurabies en puiſſance ſeulement, eſt rationel, ou medial.

Soient les deux medialles commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Je dis qu'iceluy rectangle eſt rationel ou medial.

Qu'ainſi ne ſoit: Sur AB & BC ſoient décrits les quarrez AD & CE, leſquels étans faits ſur lignes mediales ſeront mediaux. Maintenant ſoit propoſée la ligne rationelle FG, & ſur icelle ſoient décrits les trois rectangles FH, IK, LM; egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. pr. 1. Et d'autant que les quarrez AD & CE ſont mediaux: leurs egaux rectãgles FH, LM ſeront mediaux: leſquels apliquez ſur la rationelle FG, leurs autres cõtez GH & KM, ſeront rationaux commenſ. en puiſſance ſeulement à FG par la 23. p. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE ſont commenſ. (étans faits ſur lignes com. en puiſſance) leurs egaux rectangles FH & LM ſeront auſſi com.



mais par la 1. pr. 6. comme FH eſt à LM, ainſi la ligne droite GH eſt à la ligne droite KM : donc par la 10. prop. 10. GH & KM ſeront commenſurable en longitude ; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH & KM ſera rationel. Et pource que AB, BD ſont egales, & BC, BE auſſi egales, comme DB eſt à BC, ainſi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainſi AD à AC par la 1. prop. 6. & comme AB eſt à BE, ainſi AC à CE : donc comme AD à AC, ainſi AC à CE : & partant AD, AC, CE ſont proportionnaux : & par conſequent leurs egaux FH, HL, LM ſeront auſſi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes HG, HK, KM ſont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles ſeront donc proportionelles : & par la 17. prop. 6. le rectangle de GH, KM, ſera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a été demontré rationel : donc auſſi le quarré de HK ſera rationel : & par conſequent la ligne HK ſera auſſi rationelle : & par la 6. 10. elle ſera pareillement commenſurable à la rationelle propoſée FG, ou à ſon egale HI, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement : Si en longitude, le rectangle HL contenu ſous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy eſt egal, ſera rationel par la 20 prop. 10. mais ſi HK eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC ſera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris deux lignes mediales commenſurables en puiſſance, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soient les mediales AB & BC, VV8, & VV2 (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables, car

elles ſont en raiſon double.) Le rectangle d'icelles AC ſera VV16, c'eſt à dire 2., qui eſt rationel. Mais ſi AB eſt VV12, & BCVV3, (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables eſtans en raiſon double.) Le rectangle AC ſera VV36, c'eſt à dire V6, qui eſt un medial.

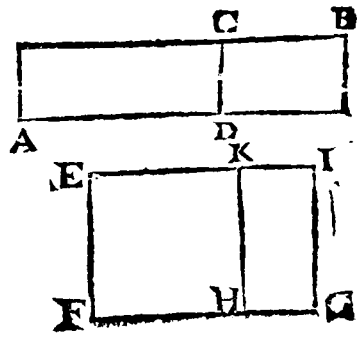
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale n'eſt pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationele.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial AC du rectangle DB: je dis que DB n'eſt pas figure rationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi: Sur une propoſée rationelle EF ſoient faits les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI ſera egal à DB: partant iceux rectangles EG, EH ſeront mediaux, leſquels eſtans appliquez ſur la rationelle EF, les autres côtez FG & FH ſeront lignes rationelles commenſurable en puiſſance ſeulement à EF par la 23. prop. 10.

Maintenant ſi on dit que HI eſt rationel; êtant apliqué ſur la rationelle KH, l'autre côté GH ſera rationel commenſ. en longitude à KH par la 21. prop. 10. mais FH eſt incommenſurable en longitude à KH, ou EF: donc



par la 14. pr. 10. FH & GH ſeront incom. en longitude : mais comme FH à GH, ainſi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils ſont de même hauteur.) Partant par la 10. prop. 10 le quarré de GH eſt incommēſ. au rectangle de FH & GH. Il ſera auſſi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. prop. 10. Or le même quarré de GH eſt commenſurable au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG êtans rationelles) & par la 16. pr. 10. les deux quarrez de FH & GH, enſemble ſeront commenſurables au ſeul quarré de de GH : mais iceluy quarré eſt incommenſurable à deux fois le rectangle de FH & GH : donc par la 13. prop. 10. les deux quarrez de FH & GH ſeront enſemble incommenſurable à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH & GH ſont egaux au quarré de FG par la 4. pr. 2. donc par la 17. prop. 10. le quarré de FG ſera incommenſurable aux deux quarrez de FH & GH enſemble : leſquels êtans rationaux, (car ils ſont faits ſur lignes rationelles) le quarré de FG ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne FG irrationelle : Ce qui eſt abſurde, car nous avons montré qu'elle eſt rationelle : donc le rectangle HI, ou ſon egal DB, n'étoit pas rationel. Parquoy une figure mediale n'eſt pas plus grande, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

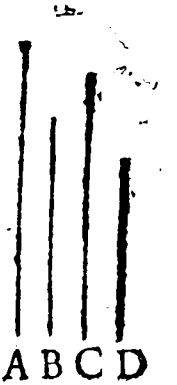
Soit le rectangle medial AB √50, & le rectangle AC √18, le rectangle reſtant DB ſera √8, qui eſt medial. Derechef AB eſtant √32 & AC √20 ; le reſtant DB *ſera √32 — √20, qui n'eſt pas rationel.*

PROBL.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouver deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel.

Soient deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement A & B, (trouvées par le lemme qui precede la 22. prop. de ce livre) entre lesquelles (par la 13. prop.) soit trouvée la moyenne proportionelle C; puis (par la 12. prop. 6.) aux trois A, B, C, soit trouvée la quatriéme proportionelle D: Je dis que C & D sont les deux mediales demandées.



Car puis que C est moyenne proportion entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. prop. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. prop. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale: Item, puis que comme A à B, ainsi C à D, & que A est commensurable en puissance seulement à B, aussi le sera C à D par la 10. prop. 10. Mais C est ligne mediale: donc D qui luy est commensurable en puissance seulement sera aussi ligne mediale par la 24. prop. 10. Je dis en outre que le rectangle contenu d'icelles mediales C & D est rationel. Car d'autant que comme A est à B, ainsi C à D, en permuttant, comme A à C, ainsi B à D: mais comme A est à C, ainsi C à B. Donc C sera aussi à B, comme B à D par la 11. pr. 5.

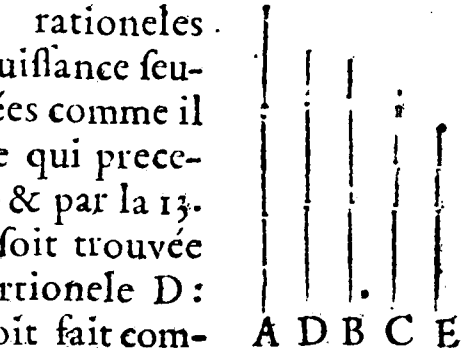
parquoy B eſt moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B ſera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B, ligne rationele, eſt rationel : donc le rectangle compris de C & D eſt auſſi rationel. Nous avons donc trouvé C & D mediales commenſ. en puiſſance ſeulement qui comprennent un rectangle rationel: Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Soit AV 20, *& BV* 12. *donc la moyenne prop. C ſera VV* 240. *& puis que comme A à B, ainſi C à D; D ſera VV* 86 $\frac{2}{5}$. *Or les puiſſances de VV* 240, *& VV* 86 $\frac{2}{5}$ *ſont commenſurab. car elles ſont comme* 5 *à* 3 : *& le rectangle contenu d'icelles eſt VV* 20736. *c'eſt à dire* 12, *egal au quarré de V* 12. *qui eſt auſſi* 12 : *& partant iceluy rectangle de C & D commenſ. en puiſſance ſeulement eſt rationel.*

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouver deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial.



Soient trois lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement A, B, C, trouvées comme il eſt enſeigné au lemme qui precede de la 22. prop. 10 & par la 13. prop. 6. entre A & B ſoit trouvée la moyenne proportionele D : puis par la 12. pr. 6. ſoit fait comme B à C, ainſi D à E : Je dis que D & E ſont les

deux mediales demandées.

Car en premier lieu, il eſt evident que D eſt mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. propoſition 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B : mais comme B à C, ainſi D à E, & B eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à C, auſſi par la 10 pr. 10. D ſera commenſurable en puiſſance ſeulement à E : Et par la 24.pr. 10. D étant mediale, E ſera auſſi mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à D.

Davantage, ie dis que le rectangle d'icelles deux mediales D & E eſt auſſi medial. Car puis que comme B à C, ainſi D à E, en permutant B ſera à D comme C à E : mais B eſt à D comme D à A; partant comme D eſt à A, ainſi C eſt à E : & par la 16. prop. 6. le rectangle des extrémes D & E ſera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſt medial par la 22. propoſ. 10. Donc par le Corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E ſera auſſi medial. Parquoy nous avons trouvé deux lignes mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Soit A 20, *B V* 200, *& C V* 80. *Donc la moyenne prop. D, ſera V V* 80000. *Et puis que comme* B *à C, ainſi D à E; icelle E ſera V V* 12800. *Or les puiſſances de D & E, ſont commenſurables, car elles ſont comme* 5 *à* 2. *& le rectangle d'icelles eſt V V* 1024000000, *c'eſt à dire V* 32000, *egal au rectangle de A & C; qui eſt V* 32000.

Or és choſes ſuivantes nous aurons beſoin de [illegible] *probleme cy.*

Trouver deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D. Mais A & B ſe multiplians entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multiplians faſſent F. Donc E & F ſeront nombres ſemblables, puis qu'ils ont les coſtez proportionnaux.

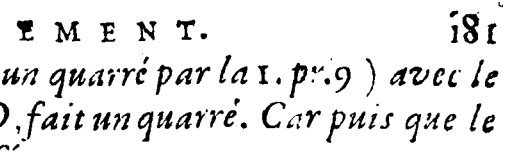
A 6.	C 12.
B 4.	D 8.
E 24.	F 96.

Or d'autant qu'il a eſté demontré ès 28 & 29 p. 9. que ſi on multiplie un nombre impair ou pair, par un pair, eſt produit un nombre pair: mais un impair, ſi on multiplie un impair par un impair: il apert par quelle maniere peuvent eſtre trouvez deux plans ſemblables l'un & l'autre deſquels ſoit pair ou impair; ou un ſeul pair, & l'autre impair: Car ſi les coſtez pris ſont nombres pairs, les plans d'iceux ſeront auſſi pairs; mais ſi les nombres ſont impairs, les plans d'iceux ſeront auſſi impairs. Que ſi les coſtez de l'un ſont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là ſera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans ſeront pairs, ſi chacun a un coſté nombre pair, & l'autre impair, &c. LEMME 1.

Trouver deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ſoit auſſi nombre quarré.

Soient trouvez par les choſes cy-deſſus dites deux plans ſemblables AB & C, chacun deſquels ſoit pair ou impair. Et d'autant que par les 24 & 26 prop. 9. ſi d'un nombre pair on en oſte un pair, ou bien un impair d'un impair, le reſte eſt pair: eſtant oſté BD egal à C de AB, le reſte AD ſera pair; & iceluy AD eſtant diviſé en deux egalement en E: Ie dis que le nombre fait

AB *en* BD (*qui eſt un quarré par la* 1. *pr.* 9) *avec le quarré du nombre* ED, *fait un quarré. Car puis que le nombre* AD *eſt diviſé en deux egalement en* E, *& à iceluy eſt adjoûté* DB; *le nombre qui eſt fait de* AB *en* BD, *avec le quarré du nombre* DE, *ſera egal au quarré du nombre* EB, *par le* 6. *theor. de ceux que nous avons demontré à la* 1 4 *p.* 9. *Parquoy les deux nombres quarrez, ſçavoir celuy fait de* AB *en* DB, *& celuy du nombre* DE *adjoûtez enſemble feront un quarré, ſçavoir celuy qui ſera produit de* BE. *Ce qui eſtoit propoſé.*



COROLLAIRE.

De ces choſes eſt manifeſte que quãd AB & C ſont ſemblables, eſtre trouvez en la méme maniere les deux nõbres quarrez des nõbres BE, ED, deſquels l'excez, ſçavoir le nõbre fait de AB en BD, eſt auſſi quarré. Que ſi les nombres AB & C ne ſont pris ſemblables, l'un & l'autre toutefois pair, ou impair ſerõt trouvez en la méme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçavoir le nõbre fait de AB en DB n'eſt quarré. Car s'il étoit quarré, par la 2. prop. 9. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB & C, ſeroient plans ſemblables Ce qui eſt abſurde, puis qu'ils ont eſté poſez diſſẽblables.

SCHOLIE 2

Parquoy s'il faut trouver deux nombres quarrez, deſquels l'excez ſoit auſſi nõbre quarré, nous prendrons comme cy-deſſus, deux plans ſemblables, l'un & l'autre deſquels ſoit pair, ou impair, ſçavoir AB *&* C, *& acheverons comme il eſt dit au precedent lemme.*

Que s'il faut trouver 2 *quarrez, deſquels l'excez ne ſoit quarré, il faudra prẽdre* 2 *nõbres plãs diſſẽblables,*

& parachever comme dessus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, divisant un nombre quarré en deux nombres, l'un desquels soit quarré, & l'autre non: Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainsi des autres.

LEMME 2.

Trouver deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux ne soit nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables AB, & C pairs, ou impairs, & soit fait mesme construction qu'au lemme precedant: tellement que le quarré fait de la multiplication des nombres semblables AB, DB entr'eux, avec le quarré de DE, soit egal au quarré de BE: en apres, de DE soit osté l'unité EF. Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE, à cause de l'inegalité des costez. Ie dis que le nombre composé des nombres quarrez, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il seroit plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF: Soit premierement plus grand, s'il est possible; donc le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF; partant egal, ou plus grand que le nombre BE: (car il ne sera moindre, parce qu'entre BE, BF, nombres differens de l'unité, ne tombe aucun milieu, & le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF, mais moindre que BE.) Si on dit qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE, soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB

A.H.I.E.F.G...D.....B
C.....

en BD, & du quarré de DF. puis qu'au même quarré de BE, a eſté demontré au lemme precedent eſtre egal le nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DE; auſſi celuy fait de AB en BD, avec le quarré de DF, ſera egal à celuy-là fait de AB en BD, avec le quarré de DE. Oſtant donc le commun quarré fait de AB en DB, le reſte quarré de DF, ſera egal au reſte quarré de DE; & partant le coſté DF auſſi egal au coſté DE, la partie au tout: ce qui eſt abſurde. Donc le coſté du quarré compoſé des quarrez, deſquels l'un eſt fait de AB én BD, & l'autre de DE en ſoy, n'eſt pas egal au nombre BE. Mais il n'eſt pas plus grand. Car ſi faire ſe peut, le coſté d'iceluy ſoit egal au nombre BI, qui eſt plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand coſté, eſt plus grand que le quarré de BE *moindre coſté: pareillement le compoſé des quarrez, deſquels l'un eſt fait de* AB *en* BD, *& l'autre de DF en ſoy, (puis que ce compoſé eſt poſé egal au quarré de* BI) *ſera plus grand que le quarré de* BE. *Mais au preced. lemme le quarré de* BE *a eſté demontré egal au nombre fait de* AB *en* BD, *avec le quarré de DE: oſtant donc le commun nombre fait de* AB *en* BD, *reſtera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE, & partant le coſté DF plus grand que le coſté DE, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le coſté du quarré compoſé des quarrez, deſquels l'un eſt fait de* AB *en* BD, *& l'autre de DE en ſoy, n'eſt pas plus grand que le coſté* BF: *mais il a eſté demontré qu'il n'eſt pas auſſi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré compoſé n'eſt pas plus grand que le quarré de* BF.

Soit maintenant, ſi faire ſe peut, le nõbre fait de AB *en* BD, *avec le quarré de DF, egal au quarré de* BF:

& soit posé AH double de l'unité EF. Donc puis que le tout AD est double du tout ED, (car AD a été divisé en deux egalement en E) & l'ôté AH double de l'ôté EF, aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. prop. 7. & partant HD est divisé en deux egalement en F: Parquoy par la 6. theor. de ceux que nous avons demontré sur la 14. prop. 9. le nombre fait de HB en BD, avec le quarré de DF, sera egal au quarré de BF: Mais au même quarré de BF, est posé egal le nombre fait de AB en BD avec le quarré de DF. Donc le nombre fait de HB en BD, avec le quarré du nombre DF, est egal à celuy fait de AB en DB, avec le quarré de DF. Otant donc le commun quarré de DF, restera le nombre fait de HB en BD, egal à celuy fait de AB *en* DB. *Parquoy puis que* HB, AB *multiplians le même* BD, *produisent nombres egaux, & que par la* 18. *prop.* 7. *les multiplians ont même raison que les produits:* HB *sera egal à* AB, *la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de* AB *en* DB *avec le quarré de DF, n'est pas egal au quarré de* BF.

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB *en* BD, *avec le quarré de DF, moindre que le quarré de* BF; *& partant le côté d'iceluy, moindre que le côté* BF, *lequel soit* BG, *tellement que le nombre fait de* AB *en* BD, *avec le quarré de DF, soit egal au quarré de* BG: *Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD est double du tout FD, & l'ôté AI double de l'ôté EG, par la 7. prop. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD; & partant ID est divisé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor demontré sur la* 14. *pr. 9. le nombre fait de* IB *en* BD *avec le quarré de DG, est egal au quarré de* BG.

Mais au meſme quarré de BG *a eſté poſé egal le nombre fait de* AB *en* BD, *avec le quarré de DF: Donc le nombre fait de* IB *en* BD, *avec le quarré de DG, eſt egal à celuy fait de* AB *en* BD, *avec le quarré de* DF. *Oſtant donc les quarrez de DG & DF, deſquels celuy de DG eſt moindre, reſtera le nombre fait de* IB *en* BD, *plus grand que celuy fait de* AB *en* BD, *la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le nombre fait de* AB *en* BD, *avec le quarré de DF, n'eſt pas moindre que le quarré de* BF: *mais il a eſté demontré qu'il n'eſt pas auſſi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de* AB *en* BD, *avec le quarré de DF, n'eſt pas quarré. Ce qui eſtoit propoſé à demontrer.*

SCHOLIE 3.

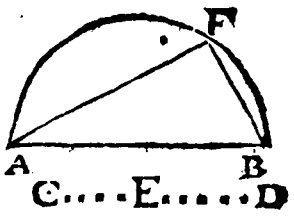
Par cecy nous trouverons facilement deux nombres, tels que le compoſé d'iceux ne ſoit à l'un ny à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi par le Lemme precedent on trouve deux quarrez, tels que le compoſé d'iceux ne ſoit quarré, ce compoſé non quarré ne ſera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le meſme, diviſant quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: Car ainſi le quarré total ne ſera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres eſquels il eſt diviſé, en raiſon de nombre quarré à nombre quarré.

PROBL. 6. PROP. XXX.

Trouver deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

Soit propoſée la rationele AB, & ſoient trouvées (cõme il a été enſeigné au 2. Scholie de la pr. pr.)

les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré : puis par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouvée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE ; & apres avoir décrit un demy cercle sur AB, en iceluy soit accommodée la ligne droite AF : & joint BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.



Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme le nombre CD est au nombre DE, ils seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF, au moins en puissance : mais AB est rationnele, & par consequent aussi rationele AF qui luy est commensurable : mais les quarrez de AB & AF n'étans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. pr. 10. les lignes AB & AF seront incommensurables en longitude : elles seront donc rationeles commensurables en puissance seulement.

Maintenant, veu que l'angle F au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarrez de AF & FB, c'est à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF du quatré de FB. Et d'autant que comme CD est à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conversion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB ; (car ainsi que CD excede DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB.) Parquoy les li-

gnes droites AB, FB ſont commenſurables en longitude par la 9. pr. 10. Nous avons donc trouvé deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy eſt commenſurable en longitude : Ce qu'il faloit faire.

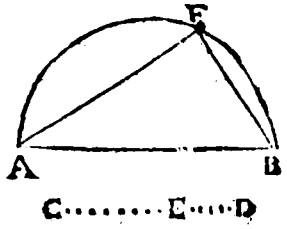
SCHOLIE.

La rationele AB *ſoit* 6 : *AF ſera* V 20 : *& partant* BF *ſera* 4, *commenſ. en longitude à* AB.

PROBL. 7. PROP. XXXI.

Trouver deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude.

Soit expoſée la rationele AB, & ſoient trouvez (comme il a eſté enſeigné au lemme 2. de la pr. 29. de ce livre) deux nombres quarrez tels que le compoſé d'iceux ne ſoit quarré, ou plûtoſt ſoit diviſé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarrez CE, ED, afin que le tout CD ne ſoit à l'un où à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré ; puis ſur AB ſoit décrit le demy cercle AFB ; & par le corollaire de la 6. pr. 10 ſoit trouvée la ligne droite AF, au quarré de laquelle ſoit



le quarré de AB, comme le nombre CD eſt au nombre CE : & finalement icelle AF êtant accommodée au cercle ſoit menée BF. Je dis que AB & AF ſont les deux lignes demandées.

Car on prouvera tout ainſi qu'à la precedente, que AB & AF ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, (car leurs quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré;) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD eſt à CE, ainſi le quarré de AB eſt au quarré de AF : par converſion de raiſon comme CD ſera à DE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de BF. Mais CD n'eſt pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré : donc auſſi le quarré de AB ne ſera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droites AB, BF ſeront incommenſurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous avons donc trouvé deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, telles que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy eſt incommenſurable en longitude ; Ce qu'il faloit faire.

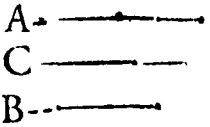
SCHOLIE.

Si la rationele AB *eſt* 3, *AF ſera* $\sqrt{6}$, *&* BF $\sqrt{3}$.

PROBL. 8. PROP. XXXII.

Trouver deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel; & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.

Soient trouvées par la 30. prop. de ce livre deux lignes rationeles A & B commensurables en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude: Item par la 13. prop. 6. soit trouvée C moyenne proportionele entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouvée la 4. proportionele D: Je dis que C & D sont les deux lignes demandées.



Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. prop. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel; & la ligne C pouvant iceluy par la 17. pr. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D, par la 10. proposition 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. proposition 10. D sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D: en permutãt comme A sera à C, ainsi B sera à D: mais par la construction comme A est à C, ainsi C est à B: pareillement donc comme C sera à B ainsi B sera à D: & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. pr. 6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectãgle cõpris sous C & D, qui luy est egal, sera aussi rationel. Et veu que comme A est à B, ainsi C D; & peut plus que B du quarré d'une lig. qui luy est com. en lõg. aussi par la 15. p. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne

qui luy ſera commenſurable en longitude. Nous avons donc trouvé deux mediales C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel, C pouvant plus que D du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude : Ce qu'il faloit faire.

Que ſi on vouloit que C pûſt plus que D du quarré d'une ligne qui luy fuſt incommenſurable en longitude, il ne faudroit que trouver A & B, telles qu'elles ſont requiſes par la precedente pr. au lieu que cy-deſſus elles ont eſté trouvées par la 30. pr. 10. & achever le tout comme deſſus.

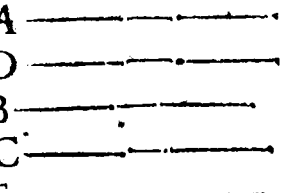
SCHOLIE.

Soit A 8, B V 28 : *le rectangle d'icelles ſera* V 1792, *& la ligne* C VV 1792, *qui eſt mediale. Et puis que comme A* 8, *eſt à* B V 28, *ainſi* C VV 1792 *eſt à D, icelle ſera* VV 343 : *donc C & D ſont deux mediales comm. en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent un rationel* 28, *& la plus grande C peut plus que la moindre D, d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude. Car ſi du quarré d'icelle C, on oſte le quarré de D, reſtera* V 567, *& ſeront commenſ. en longit. les deux mediales* VV 1792 *&* VV 567. *Car elles ſont comme* 4 *à* 3. *Derechef ſoit A* 8, *&* B V 20 : *le rectangle d'icelles ſera* V 1280, *& la ligne* C VV 1280, *& partant D ſera* VV 125, *donc C & D ſont mediales comprenant un rationel.* 20, *& C peut plus que D du quarrè d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.*

PROBL. 9. PROP. XXXIII.

Trouver deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un

rectangle medial, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude.



Soient trouvées trois lignes rationneles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude : (ce qu'on obtiendra trouvant premierement par la 30. pr. 10. les deux rationelles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longitude : puis à C & A soit trouvée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. pr. 10.) Item par la 13. pr. 6. soit trouvée D moyenne prop. entre A & B: puis par la 12. p. 6. soit fait comme D à B, ainsi C à E. Je dis que D & E sont les deux lignes demandées.

Car puis que D est moyenne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationel, & par consequent D, est mediale par la 22. pr. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulement : donc aussi D & E : & par la 24. p. 10. D estant mediale, E le sera aussi. Et derechef puis que comme D à B ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrémes D & E sera egal au rectangle des moyennes B & C.

Mais par la 22 prop. 10. le rectangle de B & C rationeles commens. en puissance seulement est medial. Donc par le corol. de la 24. pr. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finalement, puis que comme A à C, ainsi D à E; & A peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. prop. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude. Nous avons donc trouvé deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il faloit faire.

Que si on trouve A, B, C, rationeles comm. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, & on acheve de construire comme dessus; on demontrera semblablement que D & E sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

SCHOLIE.

Soit A 8, B$\sqrt{}$ 48, *&* C$\sqrt{}$ 28: *le rectangle compris de A & B sera donc* $\sqrt{}$ 3072, *& la ligne droite D* $\sqrt{\sqrt{}}$ 3072, *qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera* $\sqrt{\sqrt{}}$ 588. *donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un medial. & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'une ligne, qui luy est commens. en longitude. Car si du quarré d'icelle D, on ôte le quarré de E, le reste sera* $\sqrt{}$ 972, *qui luy est commen-*

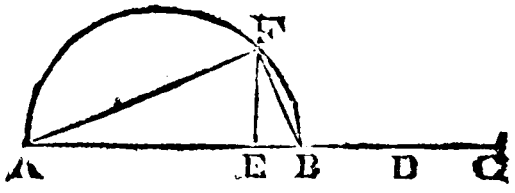
surable

surable en longitude à icelle DVV 3072. Derechef si AE est 8, BV 48, & CV 20; D sera encore VV 3072, mais E sera VV 300. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent un medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

PROBL. 10. PROP. XXXIV.

Trouver deux lignes droites incommensurables en puissance, qui faſſent le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite B C du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouvée comme il a été enseigné en la 31. prop. 10. & apres avoir coupé en deux egalement CB au point D, soit apliqué un rectangle sur BA egal au quarré de BD défaillant d'une figure quarrée par la 28 pr. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB; & apres avoir fait un demy cercle sur la ligne AB, & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA: Je dis qu'icelles lignes sont les requises.



Car puis que AB & BC sont inegales, & que la

plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB aplique ſur AB, & defaillant d'une figure quarrée, eſt egal au quart du quarré de BC, (c'eſt à dire au quarré de DB; car nous avons demontré au ſcholie de la 4. p. 2. que le quarré de BC eſt quadruple du quarré de BD) les deux lignes AE & EB ſeront incommenſ. en longitude par la 19. pr. 10. Mais par le ſcholie de la 13. pr. 6. EF eſt moyenne proport. entre icelles AE, & EB; & partant comme il a été demontré à la 11. pr. 10. elle ſera incommenſ. en puiſſance à EA. Mais comme FE à EA, ainſi BF à FA par la 4. pr. 6. (car iceux triangles ſont equiangles par la 8. pr. 6.) donc puis que FE, EA ſont incommenſurables en puiſſance, par la 10. pr. 10. BF & FA ſeront auſſi incomm. en puiſſance. Item le quarré de AB, eſt egal aux deux de BF & FA par la 47. pr. 1. lequel quarré de BA eſt rationel, êtant la ligne AB rationele; partant le composé des quarrez de BF & FA, ſera auſſi rationel. Et d'autant que par l'hypotheſe le rectangle de AE, EB, eſt egal au quarré de BD, & qu'il eſt auſſi egal au quarré de la moyenne prop. EF, par la 17 prop. 6. le quarré de EF ſera egal au quarré de BD: partant la ligne EF eſt egale à BD: & par la 16. pr. 6. le rectangle de BF & FA ſera egal au rectangle de BA & EF, ou BD ſon egale, (car par la 8. & 4. prop. 6. AB eſt à BF comme FA à EF.) Or par la 1. pr. 6. le rectangle de AB & DC eſt double du rectangle de AB & BD: (car la baſe BC eſt double de la baſe BD.) Mais le rectangle de AB & BC eſt medial par la 22. pr. 10. donc auſſi ſa moitié rectangle de AB & BD, & par conſequent medial ſon egal

rectangle de BF & FA. Nous avons donc trouvé les deux lignes AF, FB, incommenſurables en puiſſance, qui font le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle compris d'icelles, medial; Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Si AB *eſt* 6, *&* $BC\sqrt{12}$ BD *ou* EF *ſera* $\sqrt{3}$: *& par conſequent* AE *ſera* $3+\sqrt{6}$, *&* $EB\ 3-\sqrt{6}$.: *& puis que le quarré de* AF *eſt egal aux quarrez de* AE, EF, *icelle* AF *ſera* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$: *mais* BF *ſera* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$. *Donc icelles* AF, FB *ſont incommenſurables en puiſſance, & le composé de leurs quarrez, ſçavoir* 36, *eſt rationel, mais le rectangle compris d'icelles, ſçavoir eſt* $\sqrt{108}$, *eſt medial.*

PROBL. II. PROP. XXXV.

Trouver deux lignes droites incommenſurables en puiſſance, qui faſſent le composé de leurs quarrez medial: mais qu'elles comprenent un rectangle rationel.

Soient deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement (*voyez la figure precedente*) AB & BC, comprenant uu rectangle rationel, & que AB puiſſe plus que BC du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude, trouvées comme il a été enſeigné en la 32. prop. 10. & ſoit achevé la conſtruction comme en la precedente. Je dis que BF & FA ſont les deux lignes demandées.

Car nous demontrerons ainſi qu en la precedente pr. qu'icelles BF & FA ſont incommenſ. en puiſſance: & que le quarré de BA eſt medial, étant décrit ſur une ligne mediale, & egal aux deux de

BF & FA par la 47. pr. 1. Partant le composé de deux quarrez de BF & FA eſt medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a été demontré en la preced. prop.) eſt double du rectangle de AB, BD; & qu'il eſt rationel par la conſtruction, auſſi iceluy rectangle de AB, BD ſera rationel. Mais il a été demontré en la precedente qu'il eſt egal au rectangle de BF & FA: & par conſequent iceluy eſt auſſi rationel. Nous avons donc trouvé deux lignes AF & BF incommenſurables en puiſſance, qui font le composé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel: Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

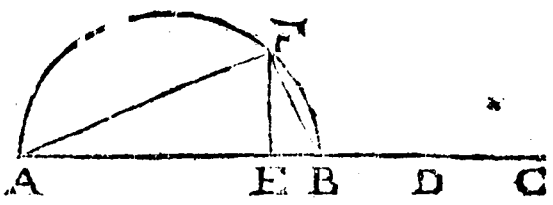
Si AB eſt √√432, & BC √√48: BD ou EF ſera √√3, & AF √(√108 + √72); mais BF eſt √(√108 − √72): & partant icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le composé de leurs quarrez ſçavoir eſt √432: eſt medial: mais le rectangle compris d'icelles, ſçavoir eſt √36, c'eſt à dire 6, eſt rationel.

PROBL. 12. PROP. XXXVI.

Touver deux lignes droites incommenſurables en puiſſance qui faſſent, le composé de leurs quarrez medial, & auſſi le rectangle d'icelles medial, & incommenſurable au composé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commenſurable en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant un rectangle medial, & que la plus grande AB puiſſe plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude, trouvées comme nous avons enſeigné à la fin de la 33. prop. 10.

& apres avoir achevé la cõstruction cõme en la 34. p. 10. Je dis que BF & FA sont les lignes demandées.



Car premierement elles sont incommensurables en puissance, comme en la demonstration de la 34. pr. 10 & le quarré de BA étant medial, comme en la precedente, le composé des quarrez de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC êtant medial par l'hypothese, le rectangle de AB, & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par le corollaire de la 24. pr. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a été demontré en la 34. pr. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longitude à BC, & qu'à icelle BC est commensurable en longitude sa moitié BD, par la 13. pr. 10. BD sera aussi incommensurable en longitude à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. pr. 10. & par consequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au quarré de BA, c'est à dire au composé des quarrez de BF & FA. Nous avons donc trouvé deux lignes droites AF, BF incommens. en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelle medial & incom. au composé d'iceux quarrez : Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Si AB *eſt* V V 192, *&* BC V V 48 ; BD *ou ſon egale* EF *ſera* V V 3, *&* AF V (V 48 + V 24), *&* BF V (V 48 — V 24) : *Parquoy icelles* AF, BF *ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçavoir eſt* V 292 *eſt medial incommenſ. à* V 24 *rectangle medial compris d'icelles* AF, BF.

Or de ce probleme eſt manifeſte le ſuivant.

Trouver deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

Car puis que tant le compoſé des quarrez des lignes AF, BF, *que le rectangle compris d'icelles, eſt medial, & qu'iceluy rectangle eſt incommenſurable à ce compoſé, auſſi les lignes pouvans iceluy compoſé, & rectangle, ſeront pareillement mediales incommenſ. tant en longitude que puiſſance. Car ſi elles eſtoient commenſurables en puiſſance, auſſi les quarrez d'icelles, c'eſt à dire le compoſé des quarrez des lignes* AF, BF, *& le rectangle ſous icelles* AF, FB, *ſeroient commenſ. ce qui n'eſt pas. Parquoy ſi on prend* AB *pouvant le compoſé des lignes* AF, FB ; *& une autre ligne pouvant le rectangle d'icelles* AF, FB, *c'eſt à dire une moyenne proportionelle entre* AF, FB, *ſeront trouvées deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.*

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes rationnelles par compoſition.

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont compoſées, la toute ſera irrationele: & ſoit icelle appellée Binome.



Soient compoſées deux lignes rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, trouvées par le lemme qui precede la 22. prop. 10. Je dis que la toute AC eſt irrationele.

Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC ſont incommenſ. en longit. par l'hypotheſe. Donc par la 10. pr. 10. le rectangle de AB,BC ſera incommenſ. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC ſera incommenſ. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB & BC ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, leurs quarrez ſeront commenſurables entr'eux; & le compoſé de tous deux ſera commenſurable au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & partant par la 14. prop. 10. les deux quarrez d'icelles AB & BC ſeront incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. prop. 10. le com-

posé de deux fois le rectangle & des deux quarrez, c'eſt à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré eſt egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) eſt incommenſ. aux deux quarrez de AB & BC, leſquels eſtans rationaux, & le compoſé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy eſt incommenſurable ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne AC irrationele : Or icelle ſera appellée binome, pource qu'elle eſt compoſée de deux noms; c'eſt à dire de deux lignes rationeles AB, BC, commenſurables en puiſſance ſeulement. Si donc deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit AB 2, BC $\sqrt{3}$: *la toute AC ſera* $2+\sqrt{3}$, *& ſon quarré eſt* $7+\sqrt{48}$.

Or il apert de ce que deſſus, que de deux lignes rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, ſont procrées deux lignes irrationeles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationeles eſt irrationele par la 22. prop. de ce livre, laquelle eſt appellée mediale. Et la compoſée d'icelles, par la 37. prop. 10. eſt une irrationele, qui eſt dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel ſont compoſées, la toute ſera irrationele : & ſoit icelle appellée bimediálle premiere.

Soient composées 2. mediales AB & BC commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel trouvées, par la 28. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationelle.



Car puis que par la 1. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au quarré de BC; & que AB, BC sont incommensurables en longitude; par la 10. prop. de ce livre, iceluy rectangle de AB, BC sera aussi incommensurable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC est commensurable à deux fois iceluy: & au quarré de BC est commens. le composé des quarrez d'icelles AB, BC (car puisque AB, BC sont commensurables en puissance, leurs quarrez seront commensur. & partant le composé d'iceux quarrez sera aussi commensurable au quarré de BC par la 16. prop. 10,) Donc le composé des deux quarrez de AB, BC sera incommensurable à deux fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le composé d'iceux deux quarrez & rectangles, c'est à dire le seul quarré de AC, qui leur est egal par la 4. prop. 2. sera aussi incommensurable à deux fois le rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable un seul rectangle d'icelles AB, BC: donc par la 13. prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au rectangle compris sous AB, BC: & iceluy rectangle estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de

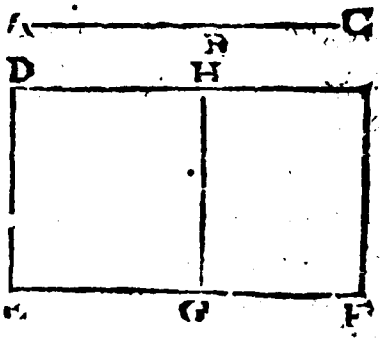
AC ſera irrationel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC ſera auſſi irrationele par la 11. def. 10. Et icelle ligne ſoit appellée bimediale premiere. Si donc deux lignes mediales comm. en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit AB *VV* 54, *&* BC *VV* 24: *La toute AC ſera donc VV* 54 + *VV* 24, *irrationele nommee bimediale premiere.*

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial ſont compoſées, la toute ſera irrationele: & ſoit icelle appellée bimediale ſeconde.



Soient compoſées les deux mediale AB & BC commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial, trouvées par la 29. prop. 10. Je dis que la toute AC eſt irrationele.

Car ſoit une ligne rationele propoſée DE, ſur laquelle ſoit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au compoſé des quarrez de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AC, c'eſt à dire le rectangle DF, eſt egal aux deux quarrez de AB, BC avec deux fois le rectangle d'icelles AB,

BC ; le rectangle HF ſera egal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypotheſe le rectangle de AB, BC, eſt medial, par le corol. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy eſt commenſurable, c'eſt à dire le rectangle HF, ſera auſſi medial. Derechef, puis que les quarrez des mediales AB, BC ſont commenſ. le compoſé d'iceux, c'eſt à ſçavoir le rectangle DG, ſera auſſi commenſurable à un chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, BC, eſt medial : Donc par le corol. de 24. prop. 10. le rectangle DG ſera auſſi medial : Ainſi les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationele DE, (car GH eſt egale à la rationele DE,) leurs autres coſtez EG & FG ſeront rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à DH, par la 23. pr. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC comme AB eſt à BC, par la 1. prop. 6. c'eſt à dire incommenſurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC : & les deux quarrez de AB & BC eſtans commenſurables entr'eux, les deux enſemble ſeront commenſurables au ſeul de BC, par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarrez de AB & BC ſeront incommenſurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par conſequent auſſi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationeles ſeront incommenſurables en longitude : elles ſeront donc commenſurables en puiſſance ſeulement ; (car autrement elles ne ſeroient rationeles ſi elles eſtoient incommenſ.) & par la 37. p. 10.

la toute composée EF sera irrationele: & le rectangle DF sera irrationel: car s'il estoit rationel la ligne DE estant rationele, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationel, ce qui n'est pas: DF est donc irrationel: & partant aussi irrationel son egal quarré de AC; & par consequent la ligne AC irrationele, qui sera appellée bimediale seconde. Si donc deux mediales commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle compris d'une ligne rationele & d'une irrationele, est aussi irrationel. Car il a esté demontré que le rectangle DF compris de la rationele DE, & irrationele EF, ne peut estre rationel.

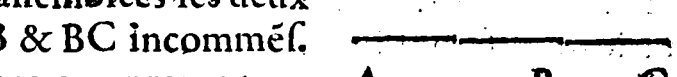
SCHOLIE.

Soit AB VV 18, & BC VV 8: La toute AC sera VV 18 + VV 8, qui est irrationele, appelé bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on ajoûte ensemble deux lignes droites incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, mais le composé de leurs quarrez soit rationel; la toute sera irrationele: & soit icelle appellée ligne majeure.

Soient assemblées les deux lignes AB & BC incommēs. en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, trouvées par la 34.



prop. 10. Je dis que la toute AC eſt irrationele.

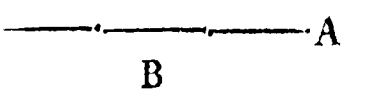
Car d'autant que le rectangle compris ſous AB & BC eſt poſé medial, deux fois le meſme rectangle ſera auſſi medial par le corol. de la 24. pr. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypotheſe le compoſé des quarrez de AB & BC eſt rationel: partant incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17 prop. 10. le compoſé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui eſt le quarré de AC par la 4. pr. 2.) ſera incommenſ. au compoſé des deux quarrez de AB & BC, qui eſt rationel: partant le quarré de AC ſera irrationel, & ſon coſté AC auſſi irrationel; lequel ſera appellé ligne Majeure. Parquoy ſi on ajoûte deux lignes droites incommenſ. &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, *& BC* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, *qui eſt irrationele nommée ligne majeure.*

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droites incommenſurables en puiſſance, comprenant un rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial, ſont aſſemblées; la toute ſera irrationele: & ſoit icelle appellée ligne pouvant un rationel, & un medial.



Soient compoſées les deux lignes AB & BC, telles que demande la propoſ. & qu'enſeigne à trouver la 31. prop. de ce Livre. Je dis que la toute AC eſt irrationele.

Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel; deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. prop. 10. le composé des deux quarrez, & des deux rectangles, sçavoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationel: & par consequent la ligne AC aussi irrationele: laquelle sera appellée ligne pouvant un rationel & un medial. Parquoy si deux lignes droites incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il faloit prouver.

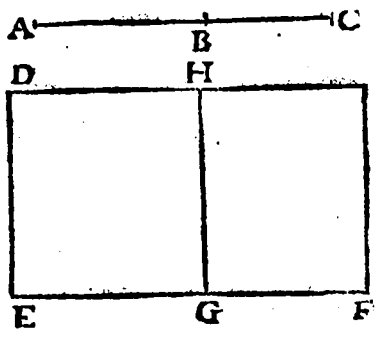
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{}$ ($\sqrt{}$ 108 + $\sqrt{}$ 72), *&* BC $\sqrt{}$ ($\sqrt{}$ 108 — $\sqrt{}$ 72): *La toute AC sera donc* $\sqrt{}$ ($\sqrt{}$ 108 + $\sqrt{}$ 72) + $\sqrt{}$ ($\sqrt{}$ 108 — $\sqrt{}$ 72.)

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droites incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, sont composées; la toute sera irrationele: Soit icelle appellée ligne pouvant deux mediaux.

Soient composées les
eux lignes AB & BC,
elles que demande la
rop. & qu'enseigne à
rouver la 36. prop. 10.
e dis que la toute AC
st irrationele.



Soit exposée la ratio-
nele DE, sur laquelle soit faite même construction qu'en la 39. prop. 10. sçavoir que le rectangle DF soit egal au quarré de AC, DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommensurable au rectangle HF, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a été demontré en la 39. pr. 10. & par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. EG & GF seront aussi incommensurables en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF êtans mediaux, & apliquez sur la rationele DE, feront les deux autres côtez EG & FG rationaux par la 23. prop. 10. Ainsi EG & FG seront rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF sera irrationele. Mais DE êtant rationele, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la 39. prop. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, sçavoir AC sera irrationele: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droites incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il aloit demontrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}$ *&* BC $\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$. *Dõc la toute AC sera* $\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$.

LEMME 1.

Si une ligne droite eſt coupée en deux inegalement en un point, & derechef en deux inegalement en un autre point, & que les parties de l'une des diviſions ſoient inegales aux parties de l'autre diviſion, chacune à la ſienne : les quarrez des deux parties de la plus inegale diviſion ſeront enſemble plus grands que les quarrez des parties de la moins inegale.



Soit la ligne droite AC diviſee inegalement en B : & encores inegalement en E, & les premieres parties AB, BC ſoient plus inegales que les poſterieures CE, AE : (c'eſt à dire que AE ſoit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC ſont plus grands enſemble que ceux de AE & EC enſemble.

Car ſi AC eſt coupee en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC ſont plus inegales que CE, AE, & que AE eſt plus grande que BC, il apert que ED ſera plus petite que BD : or par la 5. p. 2. le rectangle de AB *&* BC, *avec le quarré de* BD, *eſt egal au quarré de DC : Item le rectangle de AE & EC, avec le quarré de DE, eſt auſſi egal au quarré de DC : partant le rectangle de AE & EC avec le quarré de DE eſt egal au rectangle de* AB *&* BC, *avec le quarré de* BD. *Et en oſtant les quarrez inegaux des lignes inegales, DE,* BD, *le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de* AB *&* BC; *& pariant ſon double ſera auſſi plus grand que le double du rectangle de* AB *&* BC. *Maintenant les deux quarrez de* AB *&* BC, *avec deux fois le rectangle*

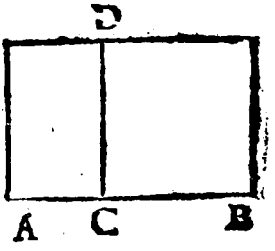
gle

de AB *&* BC, *ſont egaux au quarré de AC par* 4. *pr.* 2. *auquel ſont auſſi egaux les deux quarrez AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & C: & par conſequent les compoſez des quarrez & ctangles ſont egaux entr'eux: mais les deux re-angles de AE & EC, ont eſté demontrez plus rands que les deux de* AB *&* BC: *partant les deux arrez de* AB *&* BC *ſeront plus grands que les deux arrez de AE & EC: Ce qui eſtoit propoſé.*

LEMME 2.

Une figure rationele excede une figure ratione-e, d'une figure rationele.

Soient les deux figures ra-ioneles AE & AD, eſtant AE lus grande que AD de CE: Ie dis que CE eſt figure ratio-ele.

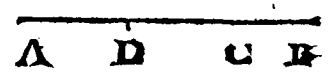


Car AE & AD eſtans ra-ionelés, elles ſeront auſſi com-enſ. & par la 16. *prop.* 10. AD *& CE ſeront commenſurables entr'elles, & par con-equent rationeles.*

THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut eſtre diviſée en ſes noms, qu'en un point ſeulement.

Soit le binome AB diviſé en ſes noms au point C: tellement que AC, CB ſoient rationeles commen-ſurables en puiſſance ſeule-ment, comme veut la 37. prop. Je dis qu'on ne peut diviſer AB en ſes noms en un autre point,



ſçavoir eſt que les lignes ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement.

Car s'il ſe peut faire, ſoit diviſée derechef AB en ſes noms au point D. Or il apert que AB n'eſt coupée en deux egalement és points C & D. Car AC & CB, ou AD & DB, ſeroient commenſ. en longitude contre l'hypotheſe : il faut donc que AB ſoit coupée inegalement eſdits point C & D, & que les parties AD & DB ſoient inegales aux parties AC & CB, chacune à la ſienne : car ſi elles eſtoient egales, icelle AB ſeroit diviſée à la ſeconde diviſion au meſme point qu'à la premiere. Si donc AD & DB ſont parties moins inegales que AC & CB, par le Lemme qui ſuit la 42. prop. 10. le compoſé des quarrez de AC & CB ſera plus grand que le compoſé des quarrez de AD & DB. Et d'autant qu'iceux compoſez ſont rationaux (car ce ſont quarrez conſtruits ſur lignes rationeles) leurs excez ſera auſſi rationel par le Lemme preced. Or eſt-il que le compoſé des quarrez de AC & CB, avec deux fois le rectangle de AC & CB, eſt egal au compoſé des quarrez de AD & DB, avec deux fois le rectangle de AD & DB : (car iceux ſont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, ſont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC, CB ſoient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a eſté demontré que l'excez des quarrez eſt rationel : donc l'excez des rectãgles ſera auſſi rationel : (puis que ces excez ſont egaux) qui eſt contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles par la 22. pr. 10. ſont mediaux, d'autant que les lignes AC

CB: ou AD & DB, sõt rationeles comm. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a pû être diviſé, en ſes noms qu'en C: car en quelque autre point qu'on le diviſe, il s'enſuivra toûjours la même abſurdité. Ce qu'il faloit demontrer.

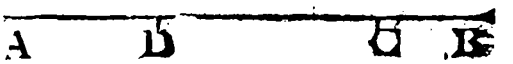
SCHOLIE.

Il eſt à noter qu'és cinq ſortes de lignes irrationeles qui ſuivent, jamais les deux noms d'icelles ne peuvent eſtre egaux: car comme il a eſté dit cy-deſſus, ils ſeroient commenſurables en longitude, & ils ont eſté demontrez incommenſurables en longitude faut auſſi remarquer que quand on dit qu'icelles lignes ne peuvent eſtre diviſées en leurs noms qu'au point propoſé, faut entendre que le contrediſant aportant une autre diviſion, les parties d'icelles doivent eſtre inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere eſt diviſée en ſes noms en un point ſeulement.

Soit la bimediale premiere AB, diviſée en ſes noms au point C, tellement que AC & BC ſoient mediales comm. en puiſſance ſeulement, compre-



nant un rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10. Je dis qu'on ne la peut diviſer en ſes noms en un autre point.

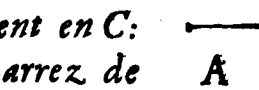
Car s'il ſe peut faire, ſoit AB derechef diviſée en D, ſçavoir que AD & DB ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel. Nous demontrerons tout

ainſi qu'en la precedente propoſition, que deux fois le rectangle de AD & DB ſeront autant plus grands que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB ſont plus petits que les quarrez de AC & BC : Or tous ces rectangles ſont rationaux par l'hpotheſe. Donc leurs excez ſera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par conſequent l'excez des quarrez ſera auſſi rationel, ce qui eſt abſurde : car iceux quarrez, eſtant décrits ſur lignes mediales, ſont mediaux, ainſi qu'il apert par la 16. propoſition 10. & coroll. de la 24. propoſition 10. partant l'excez d'iceux ne ſera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouvoit être diviſée en ſes noms, ſinon au point C. Ce qu'il faloit demontrer.

LEMME.

Si une ligne droite eſt coupée inegalement, les quarrez des deux parties ſeront plus grands enſemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droite AB coupée inegallement en C:



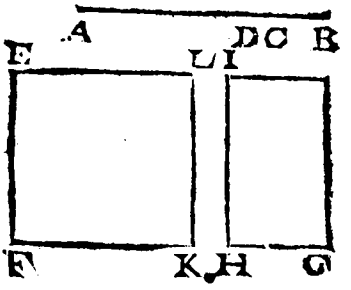
Ie dis que les quarrez de AC, CB, ſont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.

Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB par la 7. prop. 2. les quarrez AC, CD, c'eſt à dire de AC, CB, ſont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'eſt à dire de AC, CB) avec le quarré de AD & partant les deux quarrez de AC, CB ſont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB, ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la bimediale seconde AB divisée en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle medial, comme veut la 37. prop. de ce livre : Je dis qu'elle ne peut être divisée en ses noms en un autre point que C.



Car si faire se peut qu'elle soit encore divisée en AD & DB en sorte que dessus : & soit une ligne rationele proposée EF, sur laquelle (par la 45. prop. 1.) soit construit le rectangle E G, egal au. quarré de A B. Item EH egal aux deux quarrez de AC, CB : le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AC, CB, avec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la même maniere si sur EF on aplique EK egal aux quarrez de AD, DB : le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, sont inegaux aux quarrez de AD, DB : leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux : & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent ; EH sera aussi plus grand que

IG:& partant EH plus grand que la moitié de E
& conſequemment la ligne FH plus grande que
moitié de la ligne FG. Nous demontrerons p
mêmes raiſons que FK, eſt auſſi plus grande que l
moitié de FG. Donc les parties FH & HG, ſont ine-
gales aux parties FK, KG, chacune à la ſienne. E
pour ce que AC, CB ſont mediales, & commen-
ſurables en puiſſance; les quarrez d'icelles feront
auſſi mediaux & commenſurables; & par la 16. prop
10. le compoſé d'iceux ſera auſſi commenſurable à
un chacun d'eux; leſquels êtans mediaux, leur com-
poſé, c'eſt à ſçavoir le rectangle EH, ſera auſſi me-
dial par le corol. de la 24. prop. 10. Par même rai-
ſon EK ſera demontré medial: parquoy EH, EK
apliquez ſur la rationele EF, auront les côtez FH,
FK rationaux commenſurables en puiſſance ſeule-
ment à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareil-
lement, puis que le rectangle de AC, CB eſt poſé
medial; le double d'iceluy, ſçavoir eſt IG; ſera au-
ſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & étant
apliqué ſur la rationele HI, l'autre côté HG ſera
auſſi rationel commenſurable en puiſſance ſeule-
ment à icelle HI, par la 23. prop. 10. Et puis que
AC, CB ſont incommenſurables en longitude, &
par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi le quar-
ré de AC eſt au rectangle de AC, CB: (car ils ont
AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré ſe-
ra incommenſurable au rectangle: Mais au quar-
ré de AC eſt commenſurable le compoſé des quar-
rez de AC, CB; (car d'autant que AC, CB ſont com-
menſurables en puiſſance, & partant les quarrez
d'icelles commenſurables, le compoſé d'iceux
quarrez ſera auſſi commenſurable au quarré de AC,

par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB eſt commenſurable à ſon double. Donc auſſi le compoſés quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle EH, eſt incommenſurable au double du rectangle de AC, CB, c'eſt à dire à IG, par le ſcholie de la 4. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH eſt à IG, ainſi FH eſt à HG, par la 10. prop. 10. celles FH, HG ſeront incommenſurable en longitude. Mais elles ont été demontrées rationeles: Donc les lignes FH, HG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG ſera binome, & diviſées en ſes noms au point H. En la même maniere nous demontrerons auſſi FG bimome être diviſée en d'autres noms à un autre point K; ce qui eſt abſurde: car par la 43. prop. 10. elle ne peut eſtre diviſées en ſes noms qu'en un ſeul point. Donc AB bimediale ſeconde ne peut être diviſée en ſes noms qu'au point C. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne majeure, eſt diviſée en ſes noms en un point ſeulement.

Soit la ligne majeure AB, diviſée en ſes noms au point C, tellement que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance: & le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial, comme veut la 40. p. de ce livre. Je dis qu'on ne pourra diviſer icelle AB en ſes noms en un autre point que C

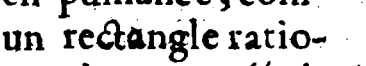


Car si faire se peut, qu'elle soit divisée en ses noms en un autre point D. Donc en quelque lieu que soit le point D, nous demontrerons tout ainsi qu'en la 45. prop. de ce livre, que les composez des quarrez de AC & BC; & de AD & DB ont un même excez que les doubles rectangles de AC, BC: & de AD, DB. Mais d'autant que les composez quarrez sont rationaux par l'hypothese, & par consequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (lesquels sont mediaux par le corol. de la 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui est contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne sera divisée en ses noms en autre point qu'en C. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouvant un rationel & un medial, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la ligne pouvant un rationel & un medial AB, divisée en ses noms au point C, ensorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant un rectangle rationel, & que le composé de leurs quarrez soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. prop. 10. Je dis qu'on ne pourra diviser icelle AB en ses noms en un autre point que C.



Car il s'ensuivroit même absurdité qu'en la precedente prop. sçavoir que si on la divisoit encores

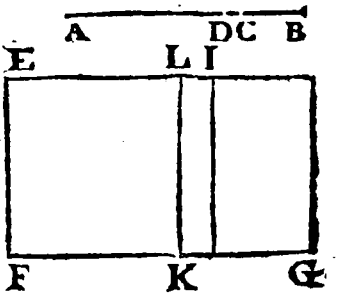
au point D, il s'enſuivroit comme là, que l'excez rant des quarrez, que des rectangles ſeroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouvant un rationel, & un medial, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouvant deux mediaux, eſt diviſée en ſes noms en un point ſeulement.

Soit la ligne pouvant deux mediaux AB, diviſée en ſes noms au point C, en ſorte que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance, comprenant un rectangle medial incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, comme veut la 42. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diviſer icelle AB en ſes noms en un autre point que C.

Car ſi faire ſe peut, qu'icelle AB ſoit encore diviſée au point D: & ſur la rationele propoſée EF ſoit faite pareille conſtruction qu'en la 45 prop. 10. ſçavoir eſt le rectangle EG egal au quarré de AB, & EH egal aux deux quarrez de AC & CB: & partant IG, egal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a été demontré en ladite 45. prop. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui ſont mediaux par la ſuſdite demonſtration, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le compoſé des quarrez de



AC & BC eſt incommenſurable au double de leur rectangle : (car par l'hypotheſe il eſt incommenſurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant auſſi les rectangles EG & EH ſeront incommenſurables. Ainſi les lignes rationeles FH & HG ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement : & par la 37. prop. 10. AB ſera binome diviſé en ſes noms au point H. Que ſi on veut dire que AB peut encore être diviſé en ſes noms au point D : il s'enſuivra, comme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diviſé en ſes noms au point H, ſe pourroit encore diviſer en ſes noms au point K, contre la 42 prop. 10. Ainſi AB ne pouvoit être diviſées en ſes noms qu'au ſeul point C. Ce qu'il faloit demontrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele eſtant propoſée, & un binome diviſé en ſes noms ; lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude.

1. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée, toute la ligne ſoit apellée Binome premier.

2. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée : toute la ligne ſoit apellée Binome ſecond

3. Que ſi ny l'un ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée : toute la ligne ſoit appellée Binome troiſiéme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſeé; toute la ligne ſoit appellée Binome quatriéme.

5. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée : toute la ligne eſt appellée Binome cinquiéme.

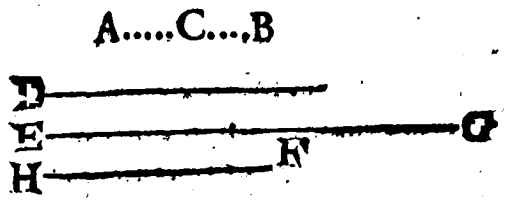
6. Que ſi l'un ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée ; la toute ſoit appellée Binome ſixiéme.

Il n'eſt rien dit icy des lignes, deſquelles les deux noms ſoient commenſurables en longitude à la rationele propoſée : parce que telles lignes ne ſont binomes : car par la 37. p. 10, tout binome eſt compoſé de deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

PROBL. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouver un Binome premier.

Eſtans trouvez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous avons enſeigné au 2. ſcholie de la 29. prop. 10. deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, afin que



que AB, CB ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne ſoient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré; à une rationele propoſée D, ſoit pris EF commenſ. en longit. & icelles D & EF ſeront rationeles commenſurables en longitude. En apres, par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit fait que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG. Je dis que la toute EG eſt binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG, qui ſont entr'eux comme les nombres AB, AC, ſont commenſurables par la 6. prop. 10. auſſi les lignes EF, FG ſeront commenſurables, au moins en puiſſance: Et d'autant que EF eſt rationele, auſſi FG ſera rationele. Mais pource que AB, AC ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré; & partant les lignes EF, FG ſont incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. la toute EG ſera binome. Je dis auſſi qu'il eſt premier. Car puis que les quarrez de EF, FG ſont entr'eux comme les nombres AB, AC: & AB eſt plus grand que

AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: que ce ſoit donc du quarré de H: (iceluy quarré ſera trouvé par le Lemme qui ſuit la 14. propoſition 10.) Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi que le quarré de EF eſt au quarré de FG: par converſion de raiſon comme AB à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de EF ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes EF, H ſont commenſ. en longitude par la 9. pr. 10. Veu donc que le plus grand nom EF eſt commenſ. en longitude à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude; EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Nous avons donc trouvé un binome premier: Ce qu'il faloit faire.

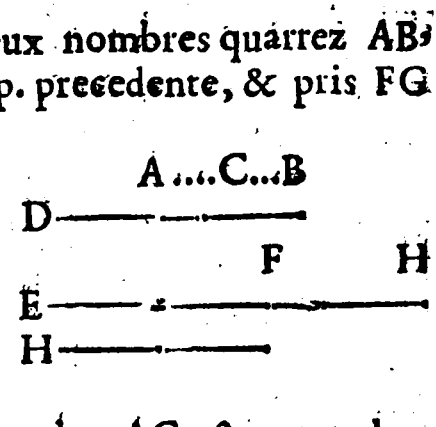
SCHOLIE.

Soit la rationele propoſée D 8, & EF 6; faiſant donc que comme AB 9 *eſt à AC* 5, *ainſi* 36 *quarré de EF, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera* $\sqrt{20}$: *& partant la toute EG, ſera* $6+\sqrt{20}$, *qui eſt binome premier: car le plus grand nom eſt commenſurable à nombre abſolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nombre d'un quarré dont la racine eſt commenſurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier ſera trouvé plus brievement que deſſus, poſant quelconque nombre pour le plus grand nom, & pour le moindre la racine quarrée des trois quarts de ſa puiſſance. Ainſi poſant* 8 *pour le plus grand nom, ſon quarré ſera* 64, *dont le quart ſouſtrait reſte* 48; *& partant* $8+\sqrt{48}$ *ſera binome* 1.

PROBL. 14. PROP. L.

Trouver un Binome ſecond.

Eſtans trouvez les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commenſurable en longitude à une rationele propoſée D: icelles D & FG ſeront rationeles commenſurables: puis apres par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG ſoit au quarré de EF. Je dis que EG eſt binome ſecond.



Car on demontrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG eſt binome. Et puis que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG eſt au quarré de EF, en changeant comme AB à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG. Mais AB eſt plus grand que AC: Donc auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG, & ſoit du quarré H. Nous demontrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF ſont commenſurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, & le moindre nom FG commenſurable en longitude à la rationele D: & par les ſecondes definitions E G, ſera binome ſecond. Nous avons donc trouvé un binome ſecond, ainſi qu'il eſtoit requis.

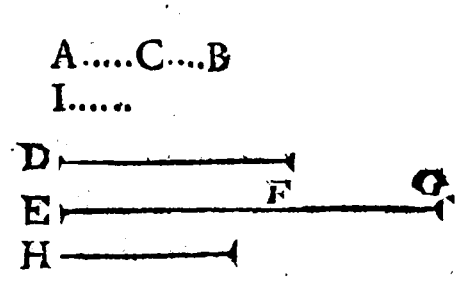
SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 7, & FG 5: faisant donc que comme AC 5 est à AB 9, ainsi 25 quarré de FG soit au quarré de EF; icelle EF sera √ 45: & partant la toute EG sera √ 45 + 5, qui est binome second: pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'un quarré, dont la racine est commensr. en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom est aussi commensur. au nombre rationel proposé. Or pour trouver plus briévement que dessus iceluy binome second, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy ajoûter le tiers, & la racine quarrée de ce qui en viendra sera le plus grand nom. Ainsi prenant pour le moindre nom 6, son quarré est 36, dont le tiers luy estant ajoûté sera 48: & partant √ 48 + sera binome second.

PROBL. 15 PROP. LI.

Trouver un Binome troisiéme.

Estans trouvez deux nombres AB, CB comme en la 49.p.10. soit pris un autre nombre I qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qui se fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré, il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré à nõbre quarré. Dere-



chef, puis qu'il eſt non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'unité, ou par le binaire: & partant il ne tombera pas entre I & AC un moyen proportionel, comme nous avons demontré au ſcholie de la 8. pr. 8. Ils ne ſeront donc pas plans ſemblables: & partant ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez,) & apres avoir expoſé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. ſoit fait que comme I à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: par ainſi les quarrez de D & EF, eſtans entr'eux comme nombre à nombre, ſeront commenſurables par la 6. pr. 10: & partant les lignes D & EF le ſeront auſſi, au moins en puiſſance. Parquoy D eſtant rationele, EF le ſera auſſi. Mais parce que I n'eſt pas à AB, c'eſt à dire le quarré de D au quarré de EF comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF ſeront incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef ſoit fait par le ſuſdit corol. que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG: & par la 6. prop. 10. iceux quarrez de EF, FG, eſtans comme nombre à nombre, ſeront commenſurables entr'eux: & partant les lignes EF FG auſſi commenſurables, au moins en puiſſance: & EF eſtant rationele, FG le ſera auſſi. Et d'autant que AB n'eſt pas à AC, c'eſt à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG ſeront incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. & partant icelles EF, FG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG ſera binome. Je dis auſſi qu'elle eſt binome troiſiéme. Car d'autant que comme I eſt à AB,

ainſi

ainsi le quarré de D est au quarré de EF ; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG: par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré: donc les quarrez de D & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré : & partant les lignes D & FG, seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49. prop. de ce livre, que EF & H sont commensurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy est commensurable en longitude, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longitude à la proposée rationele D, comme il a été demontré : partant EG sera binome troisiéme par les secõdes definitions. Nous avons donc trouvé un binome troisiéme. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

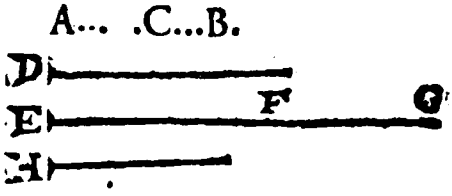
La rationele proposée D soit 6 : faisant donc que comme 16, est à AB 9, ainsi 36 quarré de D soit au quarré de EF ; icelle EF sera √54 : & faisant que cõme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG ; icelle FG sera √30 : & partant la toute EG sera √54 + √30, qui est binome troisieme, parce que l'un ny l'autre nom est commensurable en longitude au nombre rationel proposé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré, du-

quel la racine eſt commenſurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouver ce binome plus promptement que deſſus, on poſera la racine quarrée de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarrée des trois quarts du même nombre pour le moindre nom: Ainſi poſant pour le plus grand nom V 20, l'autre nom ſera V 15: & partant V 20 + V 15 ſera binome troiſiéme.

PROBL. 16. PROP. LII.

Trouver un binome quatriéme.

Eſtans trouvez deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB, ne ſoit à l'un ny à l'autre comme nombres quarrez (ſuivant ce que nous avons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop. de ce livre) ſoit expoſé la rationele D, & pris EF commenſ. en longitude à icelle rationele D; & par conſequent EF ſera auſſi rationele: Et ayant conſtruit le reſte comme en la 49. pr. 10. Nous demontrerons comme là que la toute EG eſt binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du quarré de H; & que par converſion de raiſon, comme AB eſt CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & par la 9. prop. 10. les lignes EF & H, ſont incommenſ. en longitude, parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui



luy eſt incommenſurable en longitude, & qu'icelle EF eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée D: EG ſera binome quatriéme par les def. ſecondes. Nous avons donc trouvé un binome quatriéme: Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La rationele expoſée D ſoit 8, *& EF* 6: *faiſant donc que comme AB* 9 *eſt AC* 6, *ainſi le quarré de EF, ſçavoir* 36, *ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera trouvée de V* 24: *& partant la toute EG ſera* 6 + *V* 24, *qui eſt binome quatriéme: pource que le plus grand nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'un quarré, dont la racine eſt incommenſurable en longitude à iceluy plus grand nom. On trouvera ce binome plus promptement que deſſus poſant pour le plus grand nom quelconque nombre: & pour le moindre la racine quarrée de la moitié du quarré d'iceluy. Ainſi poſant* 6 *pour le plus grand nom, ſon quarré ſera* 36, *dont la moitié ſera* 18, *& partant* 6 + *V* 18 *ſera binome quatriéme.*

PROBL. 17. PROP. LIII.

Trouver un Binome cinquiéme.

Eſtans trouvez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50. prop. on demontrera comme en ladite 50. prop. que EG eſt binome. Item que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H: Et comme en la precedente, qu'icelles EF & H ſont incommenſurables en longitude: & partant par les ſecondes def. EG eſt binome cinquiéme. Nous avons donc trouvé un bino-

me cinquiéme. Ce qu'il faloit faire.

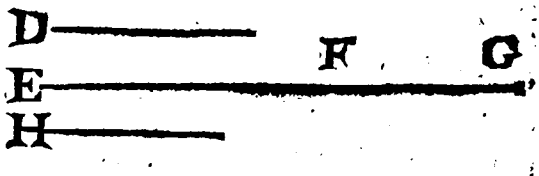
SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 7, & FG6 : donc faisant que comme AC6 est à AB9, ainsi le quarré de GF, sçavoir est 36, soit au quarré de EF ; icelle EF sera trouvée de √54 : partant la toute EG sera √54 + 6, qui est binome cinquiéme : car le moindre nom est commens. en longitude au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré dont la racine est incommens. en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouver tel binome, soit posé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy étant ajoûtée au même quarré, la racine du tout sera le plus grand nom : Ainsi posant 4 pour le moindre nom, son quarré sera 16, dont la moitié 8 luy étant ajoûtée seront 24, dont la racine sera √24 ; & partant √24 + 4 sera binome cinquiéme.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouver un binome sixiéme.

Soient trouvez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit : à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (ce qu'on fera ajoûtant ensemble deux nombres premiers : Car par la 30. prop. 7. le total sera aussi



premier à chacun d'eux: & partant ne ſera à l'un ny l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (par les choſes démontrées à la fin du 8. livre) puis ſoit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres, ſoit une rationele propoſée D: & par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit fait que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: & ayant achevé comme en la 51. prop. 10. nous demontrerons comme là que EG eſt binome: Item que D & FG ſont incommenſ. en longitude, & que le quarré de EF eſt plus grād que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demontrerons comme en la 49. p. que par converſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conſequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. prop. 10. les lignes droites EF & H, ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy eſt incommenſ. en longitude: & que l'un ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſurable en longitude à l'expoſée rationele D, par les ſecondes def. EG ſera binome ſixiéme. Nous avons donc trouvé un binome ſixiéme. Ce qu'il faloit faire.

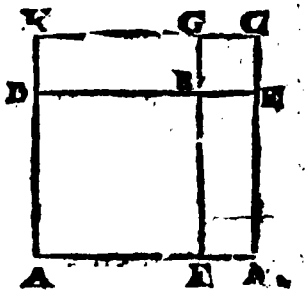
SCHOLIE.

La rationele propoſée D ſoit 6: faiſant comme 16 eſt à AB 8, ainſi le quarré de D, c'eſt à ſçavoir 36, au quarré de EF: icelle EF ſera trouvée de 4 8: &

faisant que comme AB8 est a AC5, ainsi 48 quarré de EF soit au quarré de FG : icelle FG sera trouvée de V30 : partant la toute EG sera V 48 + V 30 ; qui est binome sixiéme. car l'un & l'autre nom est incommensurable en longitude au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré, dont la racine est incommens. à iceluy plus grand nom. Or pour trouver plus promptement quadessus tel binome il n'y a qu'à prendre les racines quarrées de deux nombres non quarrez, dont l'un soit double de l'autre : Ainsi posant V 12 pour le plus grand nom, l'autre sera V 6, & partant V 12 + V 6 sera binome sixiéme.

LEMME

Les quarrez AB, BC étans conjoints à l'angle B, tellement que les côtez DB, BE fassent une seule ligne droite DE; & par consequent les côtez FB, BG aussi une seule ligne droite FG : étant achevé le parallelogramme HK : Je dis qu'iceluy est quarré; & le rectangle FE moyen proportionnel entre les quarrez AB, BC; & DC moyen proportionnel entre les quarrez AC, BC.



Car d'autant que DB est egale à FB, & BE à BG: la toute DE sera egale à la toute FG. Mais par la 34. prop. 1. la ligne DE est egale à l'une & à l'autre d'icelles AH, KC : & FG à AK, HC : & par consequent chacune d'icelles AH, KC est egale à l'une & à l'autre AK, HC, donc le parallelogramme HK est équilateral. Mais par la 29. pr. 1. il est aussi re-

tangle, & partãt quarré. Derechef, puis que DB, BE, ſont egales à FB, BG, chacune à ſa correſpondante, comme DB eſt à BE, ainſi FB à BG. Mais par la 1. pr. 6. comme DB à BE, ainſi AB a FE: & comme FB à BG, ainſi FE, à BC: donc comme AB a FE, ainſi FE à BC: & partant FE eſt moyen prop. entre AB, BC. Et finalement, veu que comme AD à DK, ainſi KG à GC, icelles eſtans egales chacune a la ſienne; en compoſant comme AK à DK, ainſi KC à GC. Mais comme AK à DK, ainſi AC à DC; & comme KC a GC, ainſi DC a BC par la 1 prop. 6. Donc comme AC à DC, ainſi DC à BC, & par conſequent DC eſt moyen prop. entre AC, BC.

Or voila comme Commandin propoſe & demonſtre ce Lemme: mais Clavius le propoſe ainſi.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt moyen proportionnel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu ſous la toute, & une des parties, eſt moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

Ce qui eſt la même choſe que deſſus.

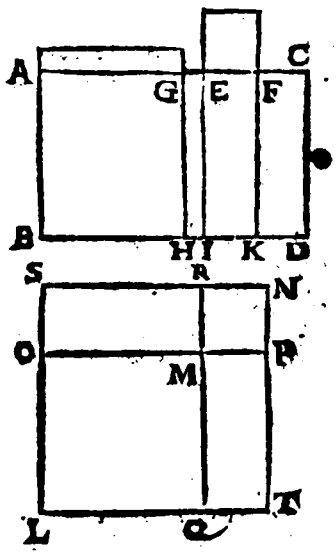
THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome premier; la ligne pouvant iceluy rectang. eſt binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationelle apellée binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom ſoit AE: donc par la def. AE, EC ſont rationeles com-

menſ. en puiſſance ſeulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eſt comm[illegible] en longitude, & auſſi AE ſera commenſurable en [illegible]lõgitude à la rationelle propoſée AB. Soit coupée EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ſi ſur icelle AE on aplique un rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eſt à dire au quarré de EF, & défaillant d'une figure quarrée, il diviſera icelle AE en parties commenſ. en long. par la 18. prop. 10. ſoient donc icelles parties AG, GE: & par les poin[illegible]s G,E, F ſoient menées GH,EL, FK paralleles à icelles AB, CD: puis par la 14. prop. 2. ſoient décrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & diſpoſez en ſorte que OM, MP faſſent une ligne droite: puis ſoit achevé le rectãgle ST, lequel ſera quarré par le lemme preced.



Maintenant, d'autant que par la conſtruction le rectangle de AG, GE eſt egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE ſeront proport. par la 17. prop. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI ſeront auſſi proportionaux: parquoy EK ſera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le Lemme precedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK ſeront egaux. Mais par

a 43. prop. 1. OR, QP ſont auſſi egaux : & par la 6. prop. 1. EK eſt egal à FD : donc QP ſera auſſi egal à FD : & par conſequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle AD : & par ainſi la ligne OP peut le rectangle AD: Je dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont êté demontrées commenſ. en longit. la toute AE ſera auſſi commenſ. en longit. à chacune d'icelles par la 16. p. 10. Mais AE eſt auſſi cómenſ. en longit. à AB, dóc par la 12. pr. 10. icelle AB eſt auſſi commenſ. en longit. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB êtant rationele, AG, GE ſeront auſſi rationeles : & par la 20. pr. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationeles, ſeront rationaux : donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN : & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationeles. Et d'autant que AE eſt incommenſ. en longit. à EC, mais comm. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. pr. 10. AG, EF ſeront incomm. en longit. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. prop. 6. ſont auſſi incommenſurables par la 10. prop. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP : donc par la 10 prop. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommenſurable en longitude puis que par la 1. prop. 6. elles ſont en même raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont êté demontrées rationeles : & partant elles ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement: donc la toute OP pouvant le rectangle AD eſt binome par la 37. p. 10. Parquoy ſi un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome premier, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC 4 + V 12. Donc le rectangle AD sera 20 + V 300 : Et puis que AE plus grand nom du binome est 4, Et EF moitié du plus petit nom EC, est V 3, AG sera 3, GE 1. Donc le rectangle AH sera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera V 15 : Ainsi GI est 5. & MP V 5. Mais EF est V 3, & EI egale à AB: donc EK sera V 75, & son double ED V 300. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produit MT V 75. egal à EK. Mais à iceluy MT est egal MS, donc MS, MT ensemble seront aussi V 300. Or les quarrez LM 15 MN 5, font ensemble 20 : Partant tout le quarré LN est 20 + V 300, & son côté OP ou LT V 15, + V 5, qui est binome sixiéme.

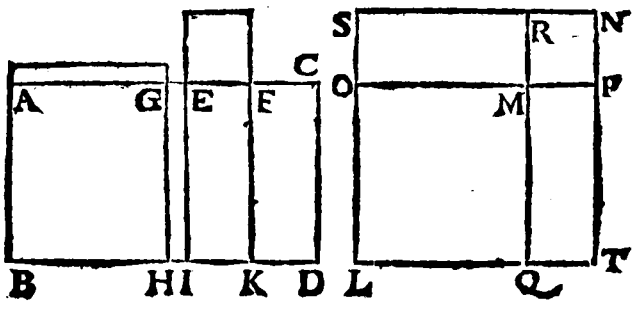
THEOR. 38. PROP. LVI.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome second AC: Je dis que (apres avoir fait pareille cõstruction & demõstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationele apelée bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommens. en longit. à la rationele AB: Item AG & EG (qu'on prouvera être commensurable en

longitude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. prop. 10. à leur toute AE ſeront par la 14. pr. 10. auſſi incommenſurables en longitude à icelle AB, laquelle eſtant rationele, icelles AG, GE ſeront auſſi rationeles: & par conſequent commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle rationele AB. Donc par la 22. pr. 10. les rectangles AH, GI ſeront mediaux: & leurs egaux quarrez LM, MN auſſi mediaux: Et partant les lignes OM, MP mediales, leſquelles on prouvera eſtre commenſ. en puiſſance ſeulement, tout ainſi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC eſt commenſ. en longitude à la rationele AB, le rectangle ED ſera rationel par la 20. prop. 10. auſſi ſera ſa moitié EK: & par conſequent ſon egal QP compris des deux mediales OM, MP: & par la 38. prop. 10. OP eſt bimediale premiere. Si donc un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 5, & AC V 48 + 6: donc le rectangle AD ſera V 12000 + 30. Et puis que AE eſt V 48, & EC 6: EF ſera 3, & ſon quarré 9,

auquel eſtant poſé egal le rectangle de AG, GE, icelles ſeront V 27, & V 3 : parquoy le rectangle AH ſera V 675, & par conſequent la ligne OM, qui peut iceluy ſera VV 675 ; ainſi GI ſera V 75, & MP VV 75. Or EC eſt 6 : partant ED double de MS VV 5 3625, c'eſt à dire 15 ; eſt 30 ; & par conſequent MS, MT, ſeront auſſi 30. Parquoy tout le quarré LN compoſé des quarrez LM V 675, MN V 75, & des deux rectangles MS, MT 30. ſera V 1200 + 30, & ſon coſté OP ou LT VV 675 + VV 75, qui eſt bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome troiſiéme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationele nommée bimediale ſeconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB & du binome troiſiéme AC; (apres avoir conſtruit comme aux precedentes.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, eſt l'irrationele apellée bimediale ſeconde.

Car on prouvera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement : Item, d'autant que AC eſt binome troiſiéme, EC eſt commenſurable eſt puiſſance ſeulement à la rationele AB ; & par la 22. p. 10. le rectangle ID ſera medial, auſſi ſera ſa moitié EK : Et par conſequent medial ſon egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainſi OM, MP ſont deux mediales commenſura-

bles en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP ſera bimediale ſeconde. Parquoy ſi un rectanglé eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 5, & AC V 32 + V 24. Donc le rectangle AD ſera V 800 + V 600. Mais d'autant que AE eſt V 32, & EC V 24; EF ſera V 6, au quarré de laquelle eſt poſé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG ſera V 18, & GE V 2. Parquoy le rectangle AH ſera V 450, & GI V 50, & par conſequent la ligne OM eſt VV 450, & MP VV 50. Et puis que EI eſt 5, & EC V 24, le rectangle ED ſera V 600, lequel eſt double de MT V 150. Donc tout le quarré LN, qui eſt compoſé des quarrez LM V 450, MN V 50, & des rectangles MS, MT V 600; ſera V 800 + V 600: & partant ſon coſté OP eſt VV 450 + VV 50, qui eſt bimediale ſeconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome quatriéme; la ligne qui peut iceluy rectangle eſt ligne Majeure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriéme AC, & de la rationele AB : (apres avoir conſtruit & demontré comme en la 55. prop.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD,

eſt l'irrationele qu'on apelle ligne majeure.

Car puis que AC eſt binome quatriéme, le plus grand nom AE eſt commenſur. en longitude à la rationele AB, & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eſt incomm. en longitude, & par la 19. pr. 10. le rectãgle defaillant compris ſous AG, GE, (qui eſt egal au quart du quarré de EC) diviſera AE en AG & EG incommenſ. en longitude: & les rectangles AH & GI ſeront incommenſ. par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Donc auſſi incommenſ. leurs egaux quarrez LM & MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais le rectangle AI compris des rationeles AB, AE, (qui eſt egal aux quarrez LM, MN) eſt rationel par la 20. prop. 10. Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP eſt medial, car ſon egal EK eſt medial, comme ſon double EC par la 22. prop. 10. eſtant ED rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP eſt ligne majeure. Si donc un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

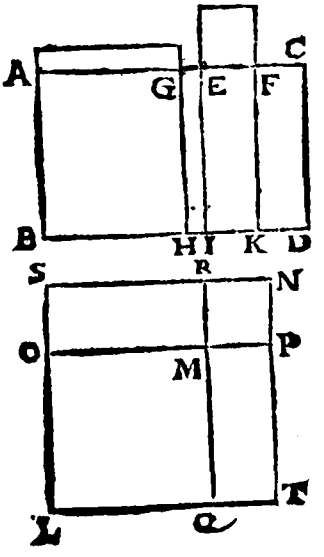
La rationele AB ſoit 5, & AC 4 + V 8, Donc le rectangle AD ſera 20 + V 200 Et puis que AE eſt 4, & EC V 8: EF ſera V 2, au quarré de laquelle, ſçavoir 2, ayant eſté poſé egal le rectangle de AG: GE: la ligne AG ſera 2 + V 2, & GE 2 — V 2, partant le rectangle AH ſera 10 + V 50, & GI 10. V 50: & par conſequent OM eſt V (10 + V 50,) & MP V (10 — V 50). Or EC eſtoit V 8: donc ED double du rectangle MT V 50, ſera V 200. La ſomme des

quarrez LM, MN, ſera donc 20, à laquelle ſi on adjoûte les plans TMS V 200, on aura pour tout le quarré LN 20 + V 200: & partant ſon coſté OP ſera V (10 + V 50) + V (10 — V 50), ou V (20 + V 200) qui eſt ligne majeure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome cinquiéme; la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt ligné irrationele pouvant un rationel & un medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome cinquiéme AC: Je dis, (apres avoir conſtruit & demontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt ligne irrationele, pouvant un rationel & un medial.



Car puis que AC eſt binome cinquiéme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & cõme en la precedente, AG & GE ſeront incommenſ. en long. Et les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance, & l'egal au compoſé de leurs quarrez, ſçavoir le rectangle AI, eſt medial par la 22. pr. 10. car les li-

gnes AB & AE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, ſont commenſ. en longit. par la 20 p. 10. ED eſt rationel: auſſi ſera ſa moitié EK, & ſon egal Q P compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP eſt ligne irrationele pouvant un rationel, & un medial. Si donc un rectangle eſt compris d'une ligne rationele & d'un binome cinquiéme, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 5, *& AC* $\sqrt{8} + 2$. *Donc le rectangle AD ſera* $\sqrt{200} + 10$. *Et d'autant que AE eſt* $\sqrt{8}$, *& EC* 2; *EF ſera* 1, *au quarré de laquelle eſtant egal le rectangle de AGE, le coſté AG ſera* $\sqrt{2} + 1$, *&* $GE \sqrt{2} - 1$: *& partant le rectangle AH ſera* $\sqrt{50} + 5$, *& la ligne* $OM \sqrt{[\sqrt{50} + 5]}$: *&* $MP \sqrt{[\sqrt{50} - 5]}$, *puis que GI eſt* $\sqrt{50} - 5$. *Et pource que EI eſt* 5, *& EC* 2; *le rectangle ED ſera* 10; *& par conſequent ſa moitié MT eſt* 5. *Donc la ſomme des quarrez LM, MN eſt* $\sqrt{200}$, *à laquelle adjoûtant les rectangles SMT* 10, *tout le quarré LN ſera* $\sqrt{200} + 10$: *& par conſequent ſon coſté OP, eſt* $\sqrt{[\sqrt{50} + 5]} + \sqrt{[\sqrt{50} - 5]}$, *ou bien* $\sqrt{[\sqrt{200} + 10]}$, *qui eſt ligne pouvant un rationel, & un medial.*

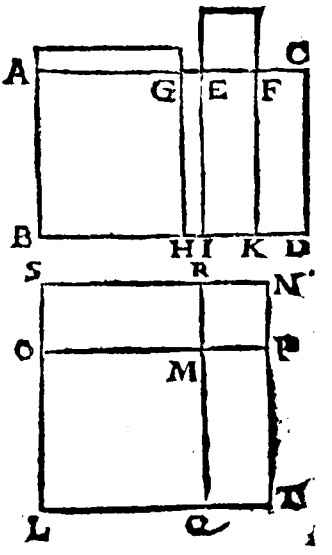
THEOR. 42. PROP. LX.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un binome ſixiéme la ligne pouvant iceluy rectangle, eſt ligne qui peut deux mediaux.

Soit

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome ſixiéme AC: (apres avoir conſtruit & demontré comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD.) Je dis qu'icelle OP eſt ligne pouvant deux mediaux.

Car puis que AC eſt binome ſixiéme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & ſi les deux noms ſont incommenſ. en longitude à la rationele AB: Et comme il a eſté demontré à la 58. prop. 10. OM, MP ſeront incommenſurables en puiſſance: auſſi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui eſt egal au compoſé de leurs quarrez eſt medial: Item ED qui eſt compris de deux rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt auſſi medial par la meſme propoſ. auſſi medial ſa moitié EK, & ſon egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et de plus, iceluy rectangle QP, ou ſon egal EK, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez LM, MN, ſçavoir AI: car les lignes AE & EC eſtans incommenſ. en longitude, auſſi AE & EF le ſeront: & partant par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AI & EK ſeront incommenſ. & par la 42. pr. 10. OP ſera ligne pouvant deux mediaux. Parquoy, ſi un rectangle eſt compris, &c. Ce qu'il faloit prouver.



SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, AC V 12 + V 8. Donc le rectangle AD sera V 300 + V 200. Et pource que AE est V 12, & EC V 8: EF sera V 2, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE; le côté AG sera V 3 + 1, & le costé GE V 3 — 1: Parquoy le rectangle AH sera V 75 + 5, & la ligne OMV (V 75 + 5): & GI estant V 75 5, MP sera V (V 75 — 5). Mais EC estant V 8, le rectangle ED, qui est double de MT V 50, sera V 200. Donc les quarrez LM, MN, feront ensemble V 300, & les rectangles S M T V 200: & partant tout le quarré LN sera V 300 + V 200: & par consequent son côté OP sera V (V 75 + 5) + V (V 75 — 5), ou bien V (V 300 + V 200), qui est ligne pouvant deux medianx.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'un binome appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé binome premier.

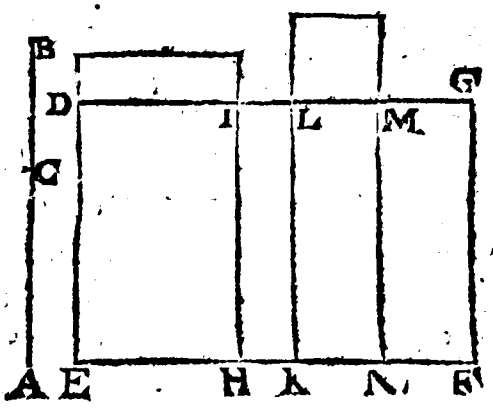
Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationele DE soit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF egal au quarré de AB: Je dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur HI un autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il est donc evident par la 4. prop. 2. que le reste LF est egal à

deux fois le rectangle de AC, CB : & en diviſant LG egalement en M, & en menant MN parallele à DE, chaque rectangle LN, MF ſera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB eſt binome, AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement ; & leurs quarrez ſeront rationaux, & leurs egaux rectangles DH & IK auſſi rationaux : & par la 21. prop. 10. les coſtez DI & IL ſeront rationeles commenſ. en longitude à la rationele DE, & entr'elles par la 12. prop. 10. Et par la 16, pr. 10. la toute DL ſera commenſ. en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle ſera rationele & commenſ. en longitude à DE rationele : Et d'autant que par la 12. prop. 10. le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF ſera auſſi medial : & par la 23. prop. 10. iceluy medial LF eſtant appliqué ſur la rationele LK, l'autre coſté LG ſera auſſi rationel incommenſ. en longitude à icelle LK, c'eſt à dire à DE, à laquelle DL eſtant commenſ. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG ſont incommenſ. en longit. mais elles ſont rationeles : elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement ; & par la 37. prop. 10. DG eſt binome. Je dis en outre que c'eſt binome premier.

Car il apert par le lemme de la 54. prop. de ce livre, que le rectangle de AC, CB eſt moyen proport. entre les quarrez d'icelles AC, CB : donc auſſi LN moyen prop. entre DH, IK : & par conſequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle DI, IL ſera egal au quarré de LM : Et d'autant que les quarrez de AC, CB ſont commenſ. (car icelles AC, CB ſont poſées commenſurables

en puiſſance ſleurs egaux rectangles DH, IK ſe-
ront auſſi com-
menſ. Donc auſſi
commenſura-
bles en longitu-
de les lignes DI,
IL par les 1. pr.
6. & 10. pr. 10.
Et d'autant que
les deux quarrez
de AC & CB
ſont plus grands



que deux fois leur rectangle, par le lemme qui ſuit la 44. prop. de ce Livre : DK ſera plus grand que LF ; & par conſequent DL plus grand nom que LG : car icelles lignes ſont entr'elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puiſque le rectangle de DI, IL appliqué ſur DL, eſt egal au quarré de LM, c'eſt à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, & que les parties DI, IL ſont commenſ. en longitude : icelle DL peut plus que IG du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant eſté demontrée commenſ. en longit. à la rationele DE, par les ſecondes def. DG ſera binome premier. Donc le quarré d'un binome appliqué ſur une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Le binome AB ſoit $\sqrt{45}+3$, *& la rationele DE* 6 : *d'autant que le plus grand nom AC eſt* $\sqrt{45}$, *ſon quarré eſt* 45 ; *lequel appliqué ſur DE* 6, *fait l'autre*

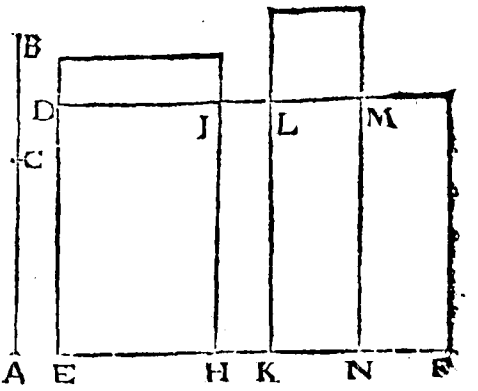
costé DI de 7 $\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB estant 3, son quarré est 9, qui apliqué sur IH 6, fait IL de 1 $\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9. Or le rectangle de ACB est V 405, & son double LF V 1620. Donc la la ligne FG sera V 5 : & par consequent la toute DG sera 9 + V 5, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'une bimediale premiere apliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB divisée en ses noms en C, dont le plus grand soit AC : (apres avoir construit comme en la precedente). Je dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. prop. 10. AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB étans mediales, leurs quarrez sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH,



IK ſeront auſſi mediaux & commenſ. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK eſt commenſ. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK ſera auſſi medial: Et par la 23. prop. 10. ſon autre coſté DL ſera rationel incommenſ. en longitude à la rationelle DE: & par la 13. prop. 10. DL, LG ſeront incommenſ. en longit. & partant rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. DG ſera binome. Je dis davantage qu'il eſt binome premier. Car il ſe prouvera comme en la precedente, que DL eſt le plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude. Nous avons auſſi montré que LG plus petit nom, eſt commenſ. en longitude à la rationelle DE: & partant par les ſecondes def. DG eſt binome ſecond. Parquoy le quarré d'une bimediale premiere, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

SCHOLIE.

La bimediale AB ſoit $\sqrt{\sqrt{108}}+\sqrt{\sqrt{12}}$, *& la rationelle DE* 4. *D'autant que le plus grand nom AC eſt* $\sqrt{\sqrt{108}}$, *ſon quarré eſt* $\sqrt{108}$, *lequel eſtant appliqué ſur la rationelle DE* 4, *le coſté DI ſera* $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. *Ainſi auſſi le moindre nom eſtant* $\sqrt{\sqrt{12}}$, *ſon quarré eſt* $\sqrt{12}$: *& par conſequent IL, eſt* $\sqrt{\frac{3}{4}}$, *& la toute DL* $\sqrt{12}$. *Or le rectangle de ACB eſt* 6; *& partant le rectangle KG double d'iceluy eſt* 12, *& le coſté LG* 3. *Donc la toute DG ſera* $\sqrt{12}+3$, *qui eſt binome ſecond.*

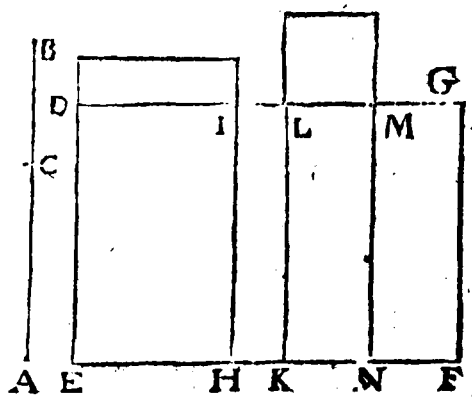
THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale ſeconde appliqué ſur une ligne rationelle, fait l'autre coſté binome troiſiéme.

Soit la bimediale ſeconde AB, diviſée en ſes noms en C, deſquels AC ſoit le plus grand. (Apres avoir conſtruit comme en la 61. pr.) Je dis que DG eſt binome troiſiéme.

Car puis que AB eſt bimediale ſeconde, par la 39. prop. 10. AC, BC ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial; partant les quarrez d'icelles AC, CB ſeront commenſ. & mediaux: & auſſi leurs egaux rectangles DH, IK: & par la 16. prop. 10. le total DK eſt commenſ. à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. pr. 10. DK ſera auſſi medial, & eſtant apliqué ſur la rationelle DE, par la 23. pr. 10. ſon autre coſté DL ſera rationel incommenſ. en longitude à icelle DE. Derechef, puis que le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF le ſera auſſi: & iceluy LF eſtant apliqué ſur la rationelle LK, ſon autre coſté LG ſera rationel incommenſ. en longitude à LK: c'eſt à dire à DE. Donc l'une & l'autre d'icelles lignes DL, LG, eſt rationelle & incommenſ. en longit. à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainſi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il eſt evident par la 10. pr. 10. que le quarré ſera incomm. au rectangle (eſtans les deux lignes incommenſ. en longit.) Mais par la 16. prop.

10. au quarré de AC eſt commenſ. le composé des quarrez de AC, CB : & au rectangle de AC, CB eſt commenſur. ſon double : Donc le composé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle DK, eſt incommenſ. au double du rectangle de AC, CB: c'eſt à dire au rectangle LF, par le ſcholie de la 14. prop 10. parquoy les lignes DL, LG qui ſont en meſme raiſon que DK, FL ſont incomm. en long. par la 10. p. 10. mais elles ſont rationeles, & partant comm. en puiſſance ſeulement : & par la 37. prop. 10. DG eſt binome.



Je dis davantage, qu'il eſt binome troiſiéme. Car il a eſté demontré que les deux nomis ſont incommenſurables en longitude à la rationele DE: Et ſe prouvera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude : & par les ſecondes def. DG eſt binome troiſiéme. Donc le quarré d'une bimediale ſeconde, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

AB ſoit $\sqrt{\sqrt{72}+\sqrt{8}}$, *&* DE 4. *Donc* DH *ſera* $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, *&* LN *ou* MF $\sqrt{24}$, *qui apliquez ſur* DE; **DI ſera* $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, IL $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *&* LM *ou* MG

$1\frac{1}{2}$: *& partant la toute DL ſera* $\sqrt{8}$, *& LG* $\sqrt{6}$. *Parquoy la toute DG eſt* $\sqrt{8}+\sqrt{6}$, *qui eſt binome troiſiéme.*

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'une ligne majeure apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté binome quatriéme.

Soit la ligne majeure AB, diviſée en ſes noms en C, dont le plus grand ſoit AC: (apres avoir conſtruit comme en la 61. p. de ce livre) je dis que DG eſt binome quatriéme.

Car puis que AB eſt ligne majeure, par la 40. p. AC, & CB ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant un rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel; le rectangle DK egal au compoſé d'iceux quarrez eſt auſſi rationel, lequel eſtant apliqué ſur la rationelle DE, ſon autre coſté DL ſera auſſi rationel commenſ. en longit. à icelle DE par la 21. pr. 10. Item le rectangle LF, double du rectangle de AC, CB, ſera medial, lequel apliqué ſur LK, c'eſt à dire ſur la rationele DE, par la 23. pr. 10. LG ſera rationele incommenſ. en longit. à DE. Et partant par la 13. pr. 10. les rationeles DL & LG ſeront incommenſurables en long. Donc commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. p. 10. DG eſt binome.

Je dis davantage qu'il eſt binome quatriéme. Car puiſque les lignes AC & CB ſont incommenſ. en puiſſance, leurs quarrez ſeront incommenſ. partant auſſi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, IL incommenſ. Et d'autant que l'on

demontrera comme en la 61. prop. que DL eſt plu grande que LG, & que ſur icelle DL eſt apliqu le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré d LG, & defaillant d'une figure quarrée, lequel di vi'e icelle DL à I en parties incomm. en long. par la 19. p. 10. DL, qui eſt commenſ. en longit. a la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longit. & par les ſecondes def. DG eſt binome quatriéme. Donc le quarré d'une ligne majeure, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La ligne majeure AR ſoit $\sqrt{(10+\sqrt{37\frac{1}{2}})}+\sqrt{(10-\sqrt{37\frac{1}{2}})}$, *& la rationele DE ſoit* 5. *Donc le rectangle DH ſera* $10+\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *IK* $10-\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *& LN ou MF* $\sqrt{62\frac{1}{2}}$; *qui apliquez ſur DE, le coſté DI ſera* $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *IL* $2-\sqrt{1\frac{1}{2}}$ *& LM, ou MG* $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. *Parquoy DL ſera* 4, *& LG* $\sqrt{10}$: *& par conſequent la toute DG eſt* $4+\sqrt{10}$, *qui eſt binome quatriéme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouvant un rationel & un medial apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté binome cinquiéme.

Soit la ligne pouvant un rationel & un medial AB, divisée en ſes noms au point C, dont le plus grand eſt AC: [apres avoir conſtruit comme en la 61. prop.) Je dis que DG eſt binome cinquiéme.

Car puis que AB eſt ligne pouvant un rationel & un medial, AC, CB, par la 41. pr. 10. ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant un rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle DK egal au compoſé d'iceux quarrez eſt auſſi medial, lequel eſtant appliqué ſur la rationele DE, ſon autre coſté DL ſera auſſi rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB eſtant rationel, ſon double LF ſera auſſi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF eſtant apliqué ſur LK, c'eſt à dire ſur la rationele DE, ſon autre coſté LG ſera ligne rationele commenſ. en longit. à icelle DE: & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 36. p. 10. DG ſera binome. Je dis de plus, qu'il eſt binome cinquiéme. Car LG eſt commenſurable en longitude à la rationele DE, & ſi on prouvera comme aux precedentes, que DL peut plus que LG, du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par les ſecondes definitions DG eſt binome cinquiéme. Donc le quarré d'une ligne pouvant un rationel & un medial, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE,

La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{125}+5)}+\sqrt{(\sqrt{125}-5}$, *& la rationelle DE* 5. *Donc le rectangle DH ſera* $\sqrt{125}+5$, *IK* $\sqrt{125}-5$, *& LN ou MF* 10, *qui appliquez ſur DE, le coſté DI ſera* $\sqrt{5}+1$, *IL* $\sqrt{5}-1$, *& LM ou MG* 2. *Parquoy DL ſera* $\sqrt{20}$, *& LG* 4, *& par conſequent la toute DG eſt* $\sqrt{20}+4$, *qui eſt binome cinquiéme.*

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouvant deux mediaux apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté binome ſixiéme.

Soit la ligne pouvant deux mediaux AB, diviſée en ſes noms au point C, dont le plus grand eſt AC. (Apres avoir conſtruit comme aux preced.) je dis que DG eſt binome ſixiéme.

Car puis que AB eſt ligne pouvant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant un rectangle medial, incommenſ. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial : par ainſi il eſt évident que DK & LF ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. p. 10. iceux rectang. eſtans appliquez ſur lignes rationelles, leurs autres coſtez DL, LG ſeront rationaux commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele DE. (*Voyez la figure de la page* 248.) Mais iceux coſtez DL, LG eſtans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF leſquels ſont incommenſ. ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr. 10. Donc les rationeles DL, LG ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 37. prop. 10. DG eſt binome, duquel les deux noms ſont incommenſ. en longitude à la rationele DE; & comme il a eſté demontré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & par les ſecondes def. DG eſt binome ſixiéme. Parquoy le quarré d'une ligne pou-

nt deux mediaux, &c. Ce qu'il faloit demon-
r.

SCHOLIE.

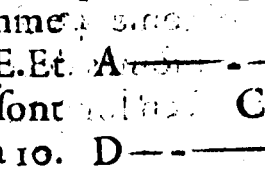
La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{252}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{252}-\sqrt{72})}$, *& DE 6. Le rectangle DH ſera donc* $\sqrt{252}-\sqrt{72}$, *IK* $\sqrt{252}-\sqrt{72}$, *& LN, ou MF* $\sqrt{180}$. *i apliquez a DE, le coſté DI eſt* $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, *IL* $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, *& LM ou MG* $\sqrt{5}$. *Partant DL eſt* $\sqrt{28}$, *LG* $\sqrt{20}$; *& par conſequent la toute DG eſt* $\sqrt{28}+\sqrt{20}$, *qui eſt binome ſixiéme.*

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

a ligne commenſurable en longitude au binome, eſt auſſi binome de meſme ordre.

Soit quelconque binome AB diviſé en ſes oms au point C, deſquels AC eſt le plus grand, CB le moindre: ſoit la ligne droite DE com-enſurable en longitude au binome AB. Je dis ue DE eſt auſſi binome, & de meſme ordre que B.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la oute AB eſt à la toute DE, ainſi la retranchée C ſoit à la retranchée DF, par la 19. p. 5. le reſte B ſera au reſte FE, comme



toute AB à la toute DE. Et ource que AB, DE, ſont ommenſ. en long. par la 10. r. 10. AC, DF, & CB, FE, ront auſſi commenſ. en ongitude. Mais par la 37. pr. 10. AC, CB ſont

rationeles. Donc auſſi DF, FE ſont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE, en permutant, comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc auſſi DF, FE ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE eſt binome. Maintenant je dis qu'il eſt auſſi binome de meſme ordre que AB.

Car ſi AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, auſſi par la 15. prop. 10. DF pourra de meſme plus que FE. Et ſi AC eſt commenſurable en longitude à la rationele proposée, auſſi ſera DF par la 12. prop. 10. vû que l'une & l'autre eſt commenſurable en longitude à la meſme AC; & partant chacune d'icelles AB & DE ſera binome premier. Que ſi CB eſt commenſurable en longitude à la rationele proposée, auſſi ſera FE: ainſi AB & DE ſeront binome ſecond: mais ſi AC & CB ſont incommenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſeront DF & FE: & par les def. AB & DE ſeront binome troiſiéme. Que ſi AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. auſſi par la 15. pr. 10. DF pourra de même plus que FE. Parquoy nous demontrerons comme deſſus, que AB, DE ſeront binome 4e. ou 5e. ou 6e. Partant AB, DE, ſeront binomes de meſme ordre. Donc la ligne commenſ. en longitude, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

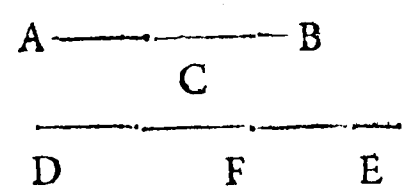
THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commenſurable en longitude à

une bimediale, eſt auſſi bimediale de meſme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diviſée en ſes noms au point C, deſquels AC eſt le plus grand, & CB le plus petit ; & à icelle AB ſoit commenſ. en longitude la ligne DE. Je dis qu'icelle DE eſt auſſi bimediale de meſme ordre qu'icelle AB.

Car (apres avoir conſtruit comme en la precedente) le reſte CB ſera au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE : & partant par la 10. p. 1. AC ſera commenſurable en longitude à DF; & CB à FE. Mais AC, CB ſont mediales : donc par la 24. pr. 10. DF, FE commenſurables à icelles, ſont auſſi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE : en permutant, comme AC à CB, ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 38. p. 10. Donc auſſi DF, FE ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, par la 10. p. 10. mais elles ſont auſſi mediales : & partant par la 38. ou 39. prop. 10. DE ſera bimediale. Davantage je dis qu'elle eſt en meſme ordre que AB. Car d'autant que comme AC eſt à DF, ainſi BC à FE, par la 22. pr. 6. le quarré de AC ſera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC eſt au rectangle de DF, FE : (étans iceux rectangles ſemblables, d'autant qu'ils ont les coſtez proport.) Mais le quarré de AC eſt commenſurable au quarré de DF, (pource que les lignes AC, DF ont été demontrées commenſ. en long.) Donc



par la 10. prop. 10. les rectangles ſeront auſſi commenſ. Que ſi l'un eſt rationel, l'autre le ſera auſſi, & par ainſi AB, & DE ſeroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que ſi l'un des rectangles eſt medial, l'autre ſera auſſi medial, & conſequemment AB & DE ſeront bimediales ſecondes, par la 39. prop. 10. Ainſi DE ſera bimediale, & en même ordre que AB. Parquoy la ligne commenſurable en longitude à une bimediale, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commenſurable à une ligne majeure eſt auſſi ligne majeure.

Soit la ligne majeure AB, diviſée en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſurable DE. Je dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne majeure.

Car (apres avoir conſtruit comme aux precedentes) AC ſera à CB comme DF à FE, & AC commenſurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. prop. 10. AC & CB ſont incommenſ. en puiſſance; les lignes DF & FE le ſeront donc auſſi. Item puis qu'icelles lignes AC, CB, DF, FE ſont proport. par la 22. prop. 6. leurs quarrez ſeront poportionnaux: & en compoſant, les deux de AC & BC ſeront au ſeul de CB, comme les deux de DF & FE ſont au ſeul de FE: & en permutant, les deux quarrez de AC & CB, ſeront aux deux de DF & FE, comme le ſeul de CB eſt au ſeul de FE. Mais les lignes CB, FE êtans commenſ. leurs quarrez ſeront auſſi commenſurables; & partant les deux de DF & FE, ſeront par la 10. prop. 10. commenſ. aux

deux

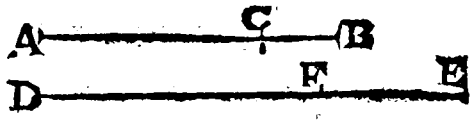
ceux de AC & BC: & ſeront rationaux comme iceux. Item, on prouvera comme en la precedente, que le rectangle de DE & FE eſt commenſurable au rectangle de AC & BC; lequel étant medial par la 40. prop. 10. auſſi ſera celuy de DF & FE par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE ſera ligne majeure. Donc la ligne commenſ. à une ligne majeure, eſt auſſi majeure. Ce qu'il faloit démontrer.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commenſurable à une ligne pouvant un rationel & un medial, eſt auſſi ligne pouvant un rationel & un medial.

Soit la ligne AB pouvant un rationel & un medial, diviſée en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſurable la ligne DE. Je dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouvant un rationel & un medial.

Car (apres telle conſtruction qu'aux precedentes) on prouvera que comme AC & BC ſont incommenſur. en puiſſance, auſſi le ſeront DF & FE. Item que le composé des quarrez de AC & BC ſera commenſ. au composé des quarrez de DF & FE: & le rectangle de AC & BC auſſi commenſur. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. p. 10. le composé des quarrez de AC & BC eſt medial, & leur rectangle rationel: Partant le composé des quarrez de DF & FE ſera auſſi medial, & leur rectangle rationel: & par ainſi la toute DE ſera ligne pouvant un rationel & un medial, par



la ſuſdite 41. prop. de ce livre. Parquoy la ligne commenſ. à une ligne pouvant un rationel, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commenſurable à une ligne pouvant deux mediaux, eſt auſſi ligne pouvant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouvant deux mediaux, diviſée en ſes noms au point C, & à icelle ſoit comm. DE. Je dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouvant deux mediaux.

Car (apres avoir conſtruit comme aux precedentes) on prouvera tout de meſme que DF & FE ſont incommenſ. en puiſſance; que le composé de leurs quarrez eſt medial, & leur rectangle auſſi medial: Mais on prouvera auſſi comme en la 69. pr. que le composé des quarrez de AC & BC, eſt au composé des quarrez de DF & FE. comme le quarré de CB au quarré de FE: & encore comme en la 68 p. que le quarré de CB eſt au quarré de EF, comme le rectangle de AC & BC, eſt au rectangle de DF & FE: donc par la 11. prop. 5. le composé ſera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le composé des quarrez de AC & BC eſt incommenſ. à leur rectangle, auſſi le composé des quarrez de DF & FE eſt incommenſ. à leur rectangle, & par la 42. pr. 10. DE eſt ligne pouvant deux mediaux. Parquoy la ligne commenſ. à une ligne pouvant deux mediaux, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

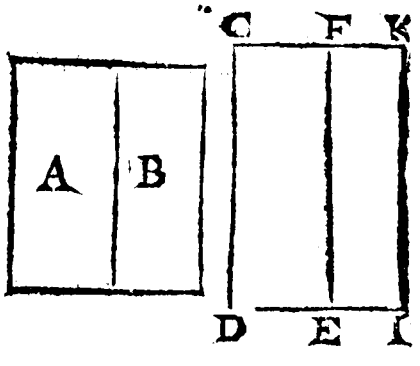
THEOR. 54. PROP. LXXII. Six. 7.

Si une ſuperficie rationele, & une mediale

ſont jointes; la ligne qui peut tout le composé eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouvant un rationel & un medial.

Soient jointes deux ſuperficies A rationele, & B mediale: je dis que la ligne qui peut toutes les deux eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouvant un rationel & un medial.

Car premierement les deux ſuperficies ne ſçauroient eſtre egales (car ou elles ſeroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales.) Soit donc premierement A plus grande que B: Et ſur la rationele CD ſoit apliqué le rectangle CE egal à A: & ſur EF un autre rectangle FI egal à B, afin que tout le rectangle CI ſoit egal aux deux ſuperficies proposées A & B. Et puis que A eſt rationele, & B mediale, auſſi le rectangle CE ſera rationel, & FI medial, leſquels étans apliquez à la rationele CD; CF ſera rationele commenſ. en longitude à icelle CD par la 21. prop. 10. & FK auſſi rationele, mais incommenſ. en longitude à la meſme CD par la 23. pr. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK ſeront incommenſ. en longitude: donc commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. CK ſera binome diviſé en ſes noms en



F. Mais puis que A a été posée plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI ; & partant CF sera plus grande que FK par la 1. p. 6. Parquoy CK sera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'une ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longitude. Si commens. (étant CF commens. en longitude à la rationele CD) CK sera binome premier par la 1. des secondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CK sera binome quatriéme, par la 4. des secondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne majeure.

Que si la figure A étoit plus petite que B, aussi le rectangle CE seroit plus petit que le rectangle FI; & CF seroit le plus petit nom commens. à la rationele CD : & par ce moyen CK seroit binome second, ou cinquiéme : si binome second, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale premiere. Si binome cinquiéme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouvant un rationel & un medial. Si donc une superficie rationele, & une mediale, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

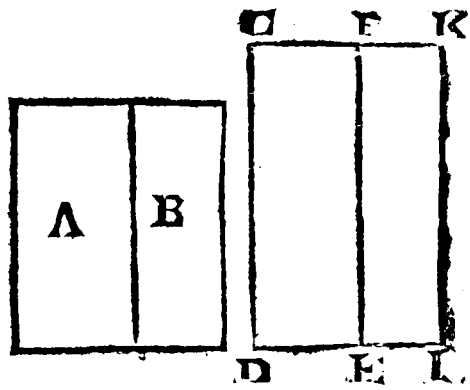
Si la superficie rationele A est 7, & la mediale B $V48$, *la ligne pouvant icelles ajoûtées ensemble sera* $2+V3$, *qui est binome premier : si A & B sont 21 &* $V432$, *la ligne pouvant icelles sera* $V12+3$, *qui est binome second : mais elle sera* V^2+V6 *qui est binome troisiéme, si A est 14 &* $B\,V192$: *mais si A est 6, &* $B\,V32$, *elle sera* $2+V2$, *qui est binome quatriéme : si A est 3 &* $B\,V8$, *elle sera* $V2+1$ *qui est bino-*

me cinquième : & ſi A eſt 5, & B V24 la ligne pouvant le composé d'icelles ſera V3+V2, qui eſt binome 6 : mais ſi A eſt 4, & B V18, la ligne pouvant la ſuperficie composée d'icelles ſera VV8+VV2, qui eſt mediale premiere : mais ſi A eſt 6, & B V12, la ligne pouvant le composé d'icelles ſera V(6+12) ou V(3+V3)+V(3−V3) : & finalement ſi A eſt 2, & B V8, la ligne pouvant icelles ſera V(V8+2) ou V(V2+1)+V[V2 1], qui eſt ligne pouvant un rationel & un medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux ſuperficies mediales incommenſurables ſont jointes, la ligne qui peut le composé d'icelles eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouvant deux mediaux.

Soient jointes enſemble deux ſuperficies mediales incommenſ. A & B ; Je dis que la ligne droite qui peut le composé d'icelles ſuperficies A & B eſt bimediale ſeconde, ou ligne pouvant deux mediaux.



Ayant fait ſur la rationele CD pareille conſtruction qu'en la prec. prop. les rectangles CE & FI ſeront mediaux & incomm. Et par la 23. p. 10. CF, FK ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele CD : & par la 37. p. 10. CK ſera binome. Soit donc CF le plus

grand nom: Car CF & FK ne ſçauroient eſtre eg
les, d'autant qu'elles ſont incommenſ. en longi
Donc CF peut plus que CG du quarré d'une ligne
qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. S
commenſ CK eſt binome troiſiéme par la 3 d ſe
[étans les deux noms CF, FK incomm. en long
la rationele CD) & par la 57. prop. 10, la ligne qu
peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde: Si in
commenſ par la 6. des ſec. def. CK ſera binome ſi
xiéme: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt pa
la 60. p 10 ligne pouvant deux mediaux. Parquoy
ſi deux ſuperficies mediales incommenſ. ſont join
tes, &c. Ce qu'il ſaloit demontrer.

SCHOLIE.

Si A eſt V 50, & B V 48: la ligne pouvant le composé d'icelles ſera VV 18 + VV 8, qui eſt bimediale ſeconde: mais ſi A eſt V 12, & B V 8, ladite ligne pouvant icelles ſera V (V 12 + V 8), ou bien V [V 3 + 1] + V [V 3 + 1], qui eſt ligne pouvant deux mediaux.

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui ſuivent icelle ſont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'une ligne mediale, appliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele, à laquelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'un binome, fait l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'une bimediale premiere, fait l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'une bimediale ſeconde, fait l'autre coſté binome troiſiéme, par la 63. pr. 10.

Le quarré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatriéme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouvant un raitonel & un medial fait l'autre costé binome cinquiéme, par la 65. p. 10.

Le quarré d'une ligne pouvant deux mediaux, fait l'autre costé binome sixiéme, par la 66 p. 10.

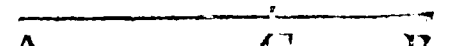
Mais il faut toûjours entendre qu'ils soient apliquez sur une ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationeles sont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'une ligne rationele, est retranchée une ligne rationele commensurable en puissance seulement à la toute; le reste est irrationel: & soit apelé Residu.

Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en sorte que AB & AC, soient rationeles commensurables en puissance seulement: Je dis que le reste CB est irrationel.



Car par la 1. p 6 comme AB est à AC, ainsi le quarré de AB est au rectangle de AB & AC: mais AB est incommens. en longitude à AC Donc par la 10 pr. 10 le quarré de AB est incommens au rectangle de AB & BC: Partant aussi à son double: mais les quarrez de AB & AC, sont posez commens. Donc par la 16 prop. 10, les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que

le quarré de AB eſt incommenſ. au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarrez de AB & AC, ſeront auſſi incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & AC, leſquels avec le quarré de CB, étans egaux aux deux quarrez de AB & AC par la 7. pr. 2. il s'enſuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB & AC ſeront incommenſ. à iceux deux rectangles. Et par le coroll. de la 17. pr. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) ſeront incommenſ. au quarré de CB : Mais iceux quarrez de AB, AC, étans rationaux ; (car ils ſont décrits ſur lignes ratioñeles) le quarré de CB ſera irrationel: Partant la ligne CB ſera auſſi irrationele : Et icelle ſoit apelée Apotome ou Reſidu. Si donc d'une ligne rationele eſt retranchée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 2., & AC √3 : Donc le reſte BC ſera 2—√3. Or en cette prop. & és 5 ſuivantes, où Euclide montre l'origine des Apotomes ou reſidui, il ne veut dire autre choſe, ſinon que ſi des lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. on retranche le plus petit nom du plus grand, le reſte ſera irrationel, qu'on apellera Apotome, ou reſidu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, eſt retranchée une mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel; le reſte eſt irrationel : Soit apelé reſidu medial premier.

Soit la bimediale AC, de laquelle eſt retranchée

la mediale AB, enſorte que AB & AC ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel : Je dis que le reſte BC eſt irrationel.



Car puis que AB & AC ſont mediales, leurs quarrez ſeront mediaux, & partant incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, lequel eſt rationel, un ſeul rectangle ayant été posé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, avec le quarré de BC ſont egaux aux quarrez de AB & AC : donc auſſi deux fois le rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC ſeront incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. prop. 10. le quarré de BC ſera incommenſ. au double du rectangle de AB & AC : mais iceluy double eſt rationel : donc le quarré de BC ſera irrationel ; & partant la ligne BC auſſi irrationele, qu'on apellera reſidu medial premier. Parquoy ſi d'une ligne mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

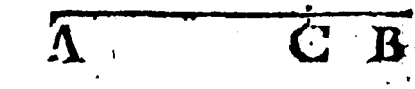
La mediale AC ſoit $\sqrt{\sqrt{54}}$, *& la retranchée AB* $\sqrt{\sqrt{24}}$: *donc le reſte BC ſera* $\sqrt{\sqrt{54}} - \sqrt{\sqrt{24}}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale eſt retranchée une ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial ; le reſte

eſt irrationel : Soit apellé reſidu media ſecond.

Soit la mediale AB, de laquelle eſt retranchée la mediale AC, en ſorte que AB & AC ſoient commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle medial: Je dis que le reſte CB eſt irrationel.



Car puis que les quarrez de AB & AC ſont commenſurables par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux ſera auſſi commenſ. à un chacun d'eux: & chacun d'iceux étant medial, (pource que les lignes AB, AC ſont poſées mediales) auſſi le compoſé d'iceux quarrez eſt medial par le coroll. de la 24. prop. 10 comme auſſi le double du rectangle de AB, AC, puis que le ſeul rectangle de AB, AC eſt poſé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC, avec le quarré de CB : le compoſé des quarrez de AB, AC, qui eſt medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui eſt auſſi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. prop. 10. un medial n'excede pas un medial, d'un rationel : donc le quarré de CB n'eſt pas rationel, & partant il eſt irrationel: & conſequemment la ligne BC auſſi irrationele, qu'on apellera reſidu medial ſecond. Parquoy ſi d'une ligne mediale on retranche une ligne mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.

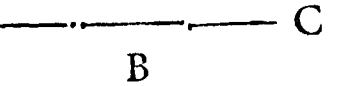
SCHOLIE.

La mediale AB ſoit VV18, & ACVV8 : donc le reſte CB ſera VV18—VV8.

THEOR 59. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite eſt retranchée une ligne droite incommẽſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle un rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel; le reſte ſera irrationel: Soit apellé ligne mineure.

Soit la ligne droite AC, de laquelle eſt retranchée AB incommenſ. en puiſſance à la toute AC, comprenant avec icelle un rectangle medial, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: Je dis que le reſte BC eſt irrationel.



Car puiſque le compoſé des quarrez de AB, & AC eſt rationel, il eſt incommenſ. au rectangle de AC & AB, lequel eſt medial: partant auſſi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC eſt egal au double du rectangle de AB, AC, enſemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez de AB, AC ſera auſſi incommenſ. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy compoſé eſt poſé rationel, par la 10. def. le quarré de BC eſt irrationel, & la ligne BC irrationele, qu'on apellera ligne mineure. Parquoy ſi d'une ligne droite eſt retranchée une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

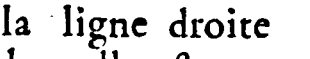
SCHOLIE.

Soit la ligne ACV (18 + V108), *& ABV* (18—V108): *le reſte BC ſera donc V* (18 +V108) —V (18—V108).

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite eſt retranchée une ligne droite incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant avec icelle un rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial: le reſte ſera irrationel: Soit apellé ligne faiſant avec ſuperficie rationele un tout medial.

Soit la ligne droite AC, de laquelle eſt retranchée AB incommenſ. en puiſſance à la toute, comprenant, avec icelle un rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: Je dis que le reſte BC eſt irrationel.



Car puis que le rectangle de AB & AC eſt rationel, auſſi ſera ſon double, & partant par la 10. def. il ſera incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles AB, AC, lequel eſt medial, c'eſt à dire irrationel. Mais le compoſé d'iceux quarrez par la 7. prop. 2. eſt egal au double du rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC. Donc auſſi le double du rectangle de AB, AC eſt incommenſurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC: Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle ſera

auſſi incommenſ. au quarré de BC. Et puis qu'icelluy double rectangle eſt rationel, par la 10. definit. le quarré de BC ſera irrationel, & la ligne BC auſſi irrationele: laquelle ſoit apellée ligne faiſant avec une ſuperficie rationele, un tout medial: & ce d'autant que le quarré d'icelle ligne étant ajoûté avec une ſuperficie rationele fait un tout medial, comme il aparoiſtra à la 109. prop. 10. Parquoy ſi d'une ligne droite eſt retranchée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

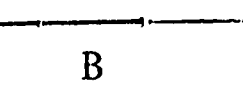
SCHOLIE.

Si AC eſt $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *& AB* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *le reſte BC ſera* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 61. PROP. LXXIX.

Si d'une ligne droite, eſt retranchée une ligne droite incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial; le reſte eſt irrationel: ſoit apellé ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Soit la ligne droite AB, de laquelle eſt retranchée la ligne AC incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial incomm. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial: Je dis que le reſte BC eſt irrationel.



Car puis que par la 7. p. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB,

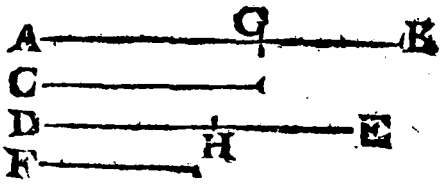
AC avec le quarré de BC: iceluy composé des quarrez excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. prop. 10. un medial n'excede pas un medial d'un rationel: Donc le quarré de BC n'eſt pas rationel; & partant eſt irrationel, & la ligne BC auſſi irrationelle; laquelle on apellera ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial; parce que le quarré d'icelle ligne avec une ſuperficie mediale fait un tout medial. Parquoy ſi d'une ligne droite eſt retranchée une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demontrer

SCHOLIE.

Si AB eſt √(√180 + √60), & AC √(√180 — √60), le reſte CB ſera √(√180 + √60) — √(√180 — √60).

LEMME.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C ſoit egal à HE excez d'entre DE & F; auſſi en permutãt l'excez d'entre AB & DE ſera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis que GB eſt l'excez d'entre AB & C, AG ſera egal à C: En la même maniere DH ſera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH ſera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne, & partant ajoûtant à AG & DH choſes egales GB & HE, l'excez d'entre les toutes AB & DE ſera toûjours egal à l excez d'entre C & F. Ce qui eſtoit propoſé.



COROLLAIRE.

De ces choſes apert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles ſeront auſſi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au reſidu ne peut convenir qu'une ſeule ligne droite rationele commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute.

Soit le reſidu AB, auquel convienne la ligne droite BC, rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute AC : Je dis qu'à icelle AB ne peut convenir autre ligne en la méme ſorte.

Car s'il eſt poſſible, ſoit une autre ligne BD, s'accordant avec icelle AB, en ſorte que AD & BD ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Maintenant par la 7. prop. 2. les deux quarrez de AC, BC ſont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD ſont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du méme quarré de AB; & en permutant, par le lemme precedent les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez ſont rationaux, leur excez ſera rationel, par le lemme qui precede la 43, prop. 10. & partant les rectangles étans mediaux,

A B C D

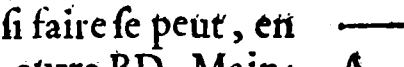
(pour ce que par la 22. prop. 10. un ſeul d'iceux rectangles eſt medial, & par le coroll. de la 24. prop. 10. ſon double eſt auſſi medial) leur excez ſera rationel contre la 17. prop. 10. Donc à AB ne peut convenir autre ligne que BC, rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute. Parquoy au reſidu ne peut convenir, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR 63. PROP. LXXXI.

Au reſidu medial premier, ne s'acorde qu'une ſeule ligne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle rationel.

Soit le reſidu medial premier AB, auquel la mediale BC s'acorde en ſorte que AC & BC, ſoient mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant un rectangle rationel: Je dis qu'à icelle AB ne peut convenir autre ligne droite que BC en la même ſorte.

Car ſi faire ſe peut, en ſoit un autre BD. Maintenant par la 7. prop. 2. il ſe prouvera comme en la preced. que l'excez d'entre le compoſé des quarrez de AC, BC, & le compoſé des quarrez de AD, BD, eſt tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles eſt rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux eſt rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui ſont mediaux, (étans décrits ſur lignes mediales)



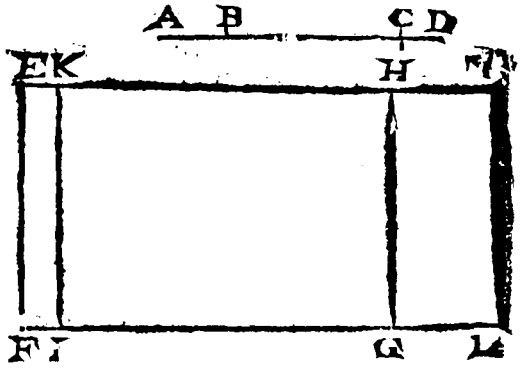
res) ſeroit auſſi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc AB ne peut convenir autre ligne mediale que BC, qui ſoit commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle rationel. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au reſidu medial ſecond, ne peut eſtre conjointe qu'une ſeule ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle medial.

Soit conjointe au reſidu medial ſecond AB la mediale BC, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute AC, & faiſant avec icelle un rectangle medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut pas convenir une autre ligne que BC, en la même ſorte.

Car ſi faire ſe peut, en ſoit conjointe une autre BD en la ſorte requiſe. Et ſur la rationele propoſée EF, ſoit apliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & à la même EF ſoit encore apliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7. pr. 2. le reſte KG ſera egal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item ſur la même rationele ſoit encore apliqué le rectangle EL egal aux 2. quarrez de AD, BD: Et puiſque le rectangle EI eſt egal au quarré de AB, auſſi KL ſera egal à



deux fois le rectangle de AD, BD, par la ſuſdit. 17. prop. 2.

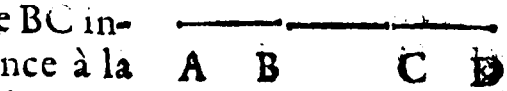
Maintenant les quarrez de AC & BC ſont mediaux (étans faits de lignes mediales) & ſi le double rectangle de AB & BD doit eſtre medial : partant leurs egaux rectangles EG & KG ſeront mediaux: leſquels apliquez ſur la rationele EF, auront les autres coſtez EH & KH rationaux comm. en puiſſ. ſeulement à EF par la 23. p. 10. en apres, le quarré de AC étant au rectangle de AC & BC, par la 1. p. 6. comme AC eſt à BC, qui ſont incommenſ. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC ſera incommenſ. au rectangle de AC & BC : & partant auſſi à ſon double KG. Item le quarré de BC eſt commenſ. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarrez, ſera incomm. au ſeul quarré de AC, auquel KG eſt incommenſ. Et par la 14. p. 10. EG & KG ſeront incommenſ. auſſi ſeront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. pr. 10. leſquelles étans rationeles ſeront incommenſ. en puiſſance ſeulement : & par la 74 p. 10. EK ſera reſidu & KH ſa convenable. Par même diſcours (ſi on maintient que DC ſoit auſſi adjointe à AB ſelon le requis) EK ſe trouvera reſidu, & KM ſa convenable : ce qui ſeroit contre la 80. pr. 10. Donc au reſidu medial AB ne peut s'adjoindre autre convenable que BC. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, convient une ſeule ligne droite incommenſ. en puiſſance à

la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle convienne BC incommenſ. en puiſſance à la toute AC, & faiſant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut être adjointe autre ligne que BC qui faſſe le meſme.

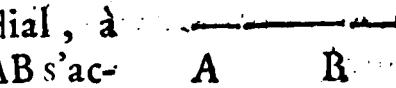


Car ſi faire ſe peut en ſoit ajoûté une autre BD, qui ſoit pareillement incommenſ. en puiſſance à la toute AD, & faiſant le composé des quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle compris ſous icelles AD, BD, medial. Il ſe prouvera comme en la 80. prop. 10. qu'il y a même excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez eſt rationel par le lemme qui ſuit la 42. prop. 10. pource que l'un & l'autre composé eſt rationel: donc auſſi l'excez d'entre les rectangles ſera rationel, contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles étans mediaux, l'excez d'iceux ne peut être rationel. Donc à la ligne mineure AB on ne peut ajoûter autre ligne convenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde une ſeule ligne, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 66. PROP. LXXXIV.

A la ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, s'accorde une seule ligne incommens. en puissance à la toute, & faisant avec icelle un rectangle rationel; mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne AB faisant avec une superficie rationelle un tout medial, à laquelle AB s'accorde la ligne BC, incommens. en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle un rectangle rationel, mais que le composé de leurs quarrez soit medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui face la mesme chose.



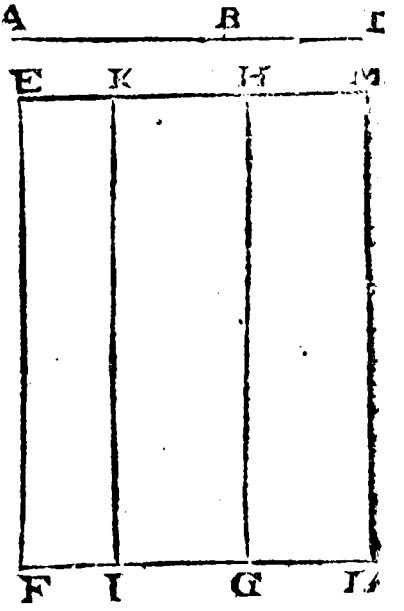
Car s'il est possible, en soit encore une autre BD : il se prouvera comme en la 80. proposition 10. que les quarrez de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'un mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB on pouvoit encore joindre BD incommensurable en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à une ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

THEOR. 07. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, se conjoint une seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & incommens. au composé de leurs quarrez qui est aussi medial.

Soit la ligne AB faisant avec une superficie mediale un tout medial, à laquelle AB s'accorde BC incommensurable en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrez, qui est aussi medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'adjoindre autre ligne que BC, qui face le proposé.

Car si faire se peut, en soit ajoûtée une autre BD. Puis soit fait même construction qu'en la 82. prop. 10. Donc le composé des quarrez de AC & BC étant medial, & incommens. à deux fois le rectangle de AC & BC, aussi medial, leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux & incomm. Et par la 23 p. 10. étans apliquez sur la rationele EF, leurs autres côtez EH & KH seront lignes rationeles, & par la 1. proposition 6. & 10. prop. 10.



commenſ. en puiſſance ſeulement; (puis que leurs rectangles ſont incommenſ.) & par la 74. prop. 10. EK ſera reſidu auquel KM ſera convenablement ajoûtée: Par même diſcours ſi on dit que BD ſoit auſſi convenable à AB, & faſſe ce qui eſt propoſé, EK ſe trouvera reſidu, & KM ſa convenable: ainſi le reſidu EK n'auroit pas une ſeule convenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouvoit donc pas adjoindre à AB, autre ligne convenable que BC, incommenſurable en puiſſance à la toute, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

DEFINITIONS TROISIE'MES.

Eſtant propoſée une ligne rationele, & un reſidu: Lors que la toute compoſée du reſidu & de ſa convenable ou ajoûtée, peut plus que la convenable du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude.

1. Si la toute eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée; le reſidu ſoit apelé reſidu premier.

2. Mais ſi la convenable ou ajoûtée eſt commenſurable en long. à la rationele propoſée; ſoit apelé reſidu ſecond.

3. Que ſi l'une ny l'autre n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée; ſoit apelé reſidu troiſiéme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'ajoûtée, du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si la toute eſt commenſurable en longitude à la rationele proposée; ſoit apelé reſidu quatriéme.

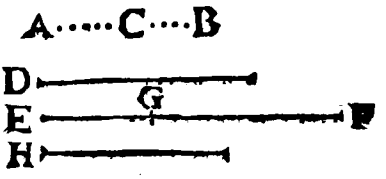
5. Mais ſi l'aioûtée eſt commenſurable en longitude à la rationele; ſoit apelé reſidu cinquiéme.

6. Que ſi ny l'une ny l'autre n'eſt commenſurable en longitude à la rationele; ſoit apelé reſidu ſixiéme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouver un Apotome ou reſidu premier.

Eſtans trouvez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous avons enſeigné au ſecond ſcholie de la 29. prop. de ce livre) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit posée la rationele D, à laquelle EF ſoit commenſ. en longit. & partant icelle EF ſera auſſi rationele: puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit fait que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de GF. Je dis que EG eſt reſidu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF, qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſ. par la 10. pr. auſſi les lignes EF, GF ſeront commenſ. au

moins en puiſſance : & EF étant rationele, GF le ſera auſſi. Mais d'autant que les deux nombres AB, AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez auſſi les quarrez de EF, GF ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF ſont incommenſ. en longit. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant le reſte EG ſera reſidu par la 74. pr. 19.

Je dis davantage qu'il eſt reſidu premier : car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle CF : ſoit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de GF, par converſion de raiſon, comme AB ſera à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB, CB ſont nombres quarrez : Donc les quarrez de EF & H ſont entr'eux comme nombres quarrez ; & partant par la 9. p. 10. les lignes EF & H ſont commenſ. en longitude. Par ainſi la toute EF commenſurable en longitude à la rationele D, peut plus que la convenable GF, du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſurable en longitude : & partant par la 1. des troiſiémes def. EG ſera reſidu premier. Nous avons donc trouvé un reſidu premier. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6 : AB 9, CB 4., & par conſequent AC eſt 5 : faiſant donc que comme 9 eſt à 5, ainſi le quarré de EF, c'eſt à dire 36, ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera √ 20 : & partant le reſte EG ſera 6 — √ 20, qui eſt reſidu premier.

Or il apert par les def. preced. que Apotome ou residu n'eſt autre choſe que ce qui reſtera ſi de deux nombres poſez rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement on ſouſtrait le moindre du plus grand ; ce qui ſe fait par l'interpoſition du ſigne — : & par ainſi il n'y-a aucune difference entre le binome & le reſidu, ſinon qu'en celuy-là les deux noms ſont conjoints par le ſigne +, & en cettuy-cy, l'un eſt ſouſtrait de l'autre par le ſigne —. Parquoy pour promptement trouver un reſidu de quelque eſpece que ce ſoit, il n'y-a qu'à trouver le binome de même eſpece, ainſi qu'il a été dit cy-devant, puis au lieu du ſigne + apoſer le ſigne —. Comme au ſcholie de la 49. prop. nous avons trouvé ce binome premier 8 + √48; *mais en changeant ſeulement le ſigne nous aurons* 8 — √48, *pour reſidu premier : & ainſi des autres.*

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.

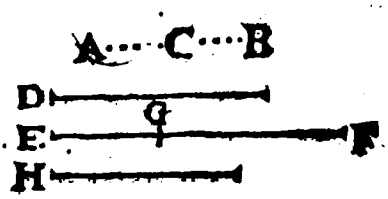
Trouver un reſidu deuxiéme.

Eſtans trouvez deux nombres quarrez AB, CB, (comme en la precedente propoſition) & l'expoſée rationele D, ſoit priſe GF, commenſ. en longitude à icelle D, laquelle ſera auſſi rationele: puis ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF par le corol. de la 6. prop. 10. Je dis que EG eſt reſidu ſecond.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raiſon des nombres AC, AB, ſont commenſur. par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF ſeront auſſi commenſ. au moins en puiſſance : & GF êtant rationele, EF le ſera auſſi. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant auſſi les quarrez de

GF, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, par la 9. prop. 10. GF, EF, ſeront incommenſ. en longitude : donc les rationeles GF, EF, ſont commenſurable en puiſſance ſeulement ; & partant par la 74. prop. 10. le reſte EG eſt reſidu.

Je dis auſſi qu'il eſt reſidu ſecond. Car EF êtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & ſoit du quarré de H. Donc puis que comme AC eſt à AB, ainſi le quarré de GF au quarré de EF ; en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de GF. Maintenant nous demonſtrerons comme en la precedente que la ligne H eſt commenſurable en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'ajoûtée GF, du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, comme auſſi à la rationele propoſée D : par les troiſiémes def. EG ſera reſidu ſecond. Nous avons donc trouvé un reſidu ſecond, ainſi qu'il faloit faire.



SCHOLIE.

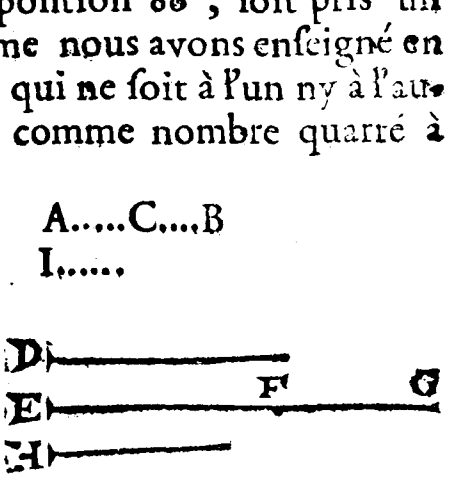
La rationele D ſoit 9, FG 5 : AB 9, CB 4 : & par conſequent AC 5 : faiſant donc que comme AC 5 eſt AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF : icelle EF ſera √45 ; & partant EG ſera √45—5. qui eſt reſidu ſecond.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouver un reſidu troiſiéme.

Ayant trouvé les deux nombres quarrez AB,

CB, comme en la proposition 86, soit pris un autre nombre I, (comme nous avons enseigné en la 51. prop. de ce livre) qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: puis étant exposée la rationele D, soit fait que comme I est à AB, le quarré de D soit au quarré de EG, lesquels quarrez par la 6. prop. 10. seront commensurables: & partant les lignes D & EG aussi commens. au moins en puissance. Donc D étant rationele, aussi EG sera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarrez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommens. en longitude. Derechef, soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Je dis que EF est residu troisiéme.



Car puis que les quarrez de EG, GF, étans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront aussi commens. au moins en puissance. Mais EG étant rationele, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarrez de EG, GF, ne sont entr'eux comme nombres quarrez; par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF seront incommens. en longitude. Donc EG, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant puis que de EG est ôtée GF commens. en puissance à icelle, par la 74. prop. 10. le reste EF sera residu.

Je dis qu'il eſt auſſi reſidu troiſiéme : Car puis que comme I eſt à AB, ainſi le quarré de D eſt au quarré de EG, & comme AB à AC, ainſi le quarré de EG au quarré de GF ; en raiſon egale, comme I ſera à AC, ainſi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez, ny par conſequent auſſi les quarrez de D & GF : parquoy par la 9. prop. 10. les lignes D & GF ſont incommenſ. en longitude. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF eſt incomenſ. en longitude à la rationele propoſée D. Et comme en la 86. prop. on prouvera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſ. en longitude : Et par les tierces def. EF ſera reſidu troiſiéme, qu'il faloit trouver.

SCHOLIE.

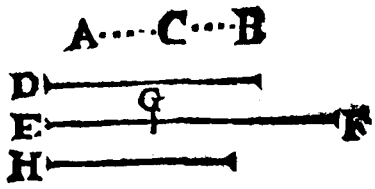
La rationele D ſoit 6, & ſoit fait que comme le nombre 16, eſt à AI 9, ainſi le quarré de D, ſçavoir 36, ſoit au quarré de EF, & iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF V 54 : Mais faiſant que comme AB 9, eſt à AC 5, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera V 30, & par conſequent EG ſera V 54 — V 30, qui eſt reſidu troiſiéme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouver un reſidu quatriéme.

Eſtans trouvez (comme nous avons enſeigné au 3. ſcholie de la 29. prop.) deux nombres AC, CB, tels que le compoſé d'iceux AB ne ſoit à l'un ny à l'autre AC, CB, cõme nombre quarré à nom-

bre quarré: ſoit propoſé la rationele D, à laquelle ſoit commenſurable en longitude EF, laquelle ſera par conſequent auſſi rationelle. Que ſi on acheve de conſtruire comme en la 86. prop. on demontrera comme là que EG eſt reſidu: & d'avantage, je dis qu'il eſt reſidu quatriéme.



Car EF êtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, ſoit du quarré de H. Et puis que comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de EF au quarré de GF; par converſion de raiſon, comme AB à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H ſeront incommenſ. en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'ajoutée GF du quarré de H, qui luy eſt incommenſ. en longitude, & la même EF eſt commenſurable en longitude à la rationele D: partant par les 3. def. EG ſera reſidu quatriéme. Nous avons donc trouvé un Apotome ou reſidu quatriéme. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 6, ainſi 36 quarré de EF ſoit au quarré de FG, icelle ſera √24, & par conſequent le reſte EG ſera 6 — √24, qui eſt reſidu quatriéme.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouver un reſidu cinquiéme.

Etans trouvez les deux nombr. AC, CB comme en

la prop. precedente ſoit fait même conſtruction qu'en la 87. puis ſoit demontré comme en icelle que GE eſt reſidu. Je dis en outre qu'il eſt reſidu 5e. Car FE peut plus que GF du quarré de H: Et comme en la 86. prop. nous demonttrerons par converſion de raiſon, que comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de H; & comme en la precedente, les lignes EF & H ſeront incommenſurables en longitude: & la convenable GF commenſurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les 3. def. EG ſera reſidu cinquiéme. Nous avons donc trouvé un reſidu cinquiéme. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

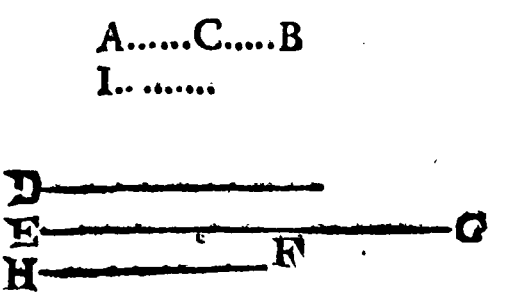
La rationele D ſoit 9, FG 6, faiſant que comme AC 6, eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF, iceluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF V54; & le reſte EG V54—6, qui eſt reſidu cinquiéme.

PROBL. 24. PROP XCI.

Trouver un reſidu ſixiéme.

Etans trouvez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. tels que AB ne ſoit à l'un ny à l'autre d'iceux AC, CB: & I à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: ſoit expoſée la rationele D, & achevée la conſtruction comme en la 88. prop. Nous demontrerons donc comme là, que D & EG ſont incommenſ en longitude, & que EF eſt reſidu:

en apres, que D & FG ſeront auſſi incommenſ. en longitude ; & partant l'une & l'autre d'icelles EG, FG eſt incommenſurable en longitude à la rationele propoſée D. Maintenant, que EG puiſſe plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demontrerons comme en la 89. prop. être incommenſurable en longitude à icelle EG. Donc puis que la toute EG peut plus que la convenable FG, du quarré de H qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que EG ny FG n'eſt commenſ. en longitude à la rationele propoſée D, par la derniere des 3. def. EF ſera reſidu ſixiéme. Nous avons donc trouvé un reſidu ſixiéme. Ce qu'il faloit faire.



SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9 ; & ſoit fait que comme 19 eſt à AB 12, ainſi 81 quarré de D ſoit au quarré de EF ; lequel ſera trouvé de 108. & par conſequent icelle EF ſera √108 ; & faiſant que comme AB eſt à AC 7, ainſi 108 ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera √63, & par conſequent le reſte EG ſera √108 — √63, qui eſt reſidu ſixième.

Or nous trouverons encores (comme enſeigne Theon) les ſix reſidus ſuſdits, ainſi qu'il enſuit.

S'il faut trouver pour exemple le reſidu premier : ſoit trouvé par la 49. prop. 10. le binome premier AD, du

quel le plus grand nom eſt AC, & le moindre CD puis ſoit coupé de AC la ligne CB egale à CD. Ie dis que AB eſt reſidu premier. Car d'autant que AC, CD ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: Auſſi AC, BC ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : Donc par la 74. pr.

10. *AB eſt reſidu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & AC eſt commenſ. en longitude à la rationele propoſée par la def. du binome premier, AB ſera reſidu premier par la 1. des tierces def. Par la même maniere ſeront trouvez tous les autres reſidus ; ſçavoir eſt le 2e, ſi du ſecond binome nous ôtons le moindre nom du plus grand ; &c.*



Ainſi ayant trouvé le binome premier AD 9 + √45, ſi du plus grand nom AC 9, on ôte le moindre nom, reſtera le reſidu AB de 9 — √45; & ainſi des autres.

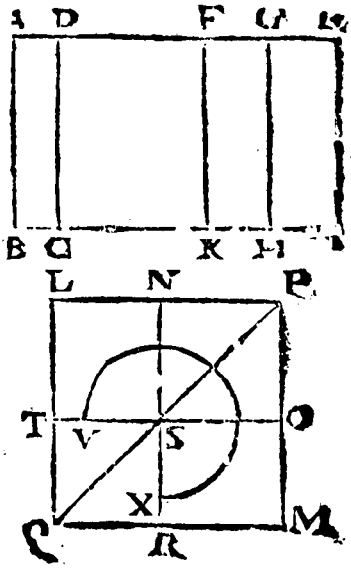
THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele & d'un reſidu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu premier AD : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Au reſidu AD ſoit ſa convenable DE, laquelle ſoit coupée en deux egalement au point F, puis ſur la ligne AE ſoit apliqué un rectangle defaillant d'une figure quarrée, & egal au quart du quarré de DE, qui eſt le quarré de FE, & ſoit iceluy rectangle compris ſous AG, GE : En apres, ſoient menees

menées les lignes FK, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongée en K, H & I : puis soit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26. prop. 6. seront au long d'un mesme diametre, lequel soit PQ : soient continuées les lignes NS, OS, afin d'achever le gnomon VX. Maintenant, FE est moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. pr. 6. car par l'hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. pr. 6 le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE: il le sera aussi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54. pr. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrez : Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO: & par consequent KG à LS, (étant HE egal à NO.) Iceluy GK sera aussi egal à SM : par ainsi le rectangle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera egal au quarré TR. Maintenant je dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC est residu.



Car puis que AD est residu premier, & DE sa convenable : les deux lignes AE & DE sont ratio-

neles commenſ. en puiſſance ſeulement, étant la toute AE commenſ. en longitude à la rationele AB, & pouvant plus que l'ajoûtée DE, du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude : Et par la 18. pr. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG GE commenſ. en longit. & par la 16. pr. 10. ils ſeront commenſ. en longit. à la totale AE, laquelle étant commenſurable en longit. à la rationele AB, par la 12. prop. 10. AE, AG, GE, AB, ſeront toutes rationeles commenſ. en longitude : & par la 20. pr. 10. les rectangles AH & HE ſeront rationaux, & par conſequent leurs egaux quarrez LM & NO auſſi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles. Pareillement, les deux lignes DF & FE étans egales & commenſ. elles le ſeront auſſi à leur toute DE, par la 16. pr. 10. laquelle DE étant rationele, DF & FE ſeront auſſi rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement à AB, comme leur toute DE : & par la 21. pr. 10. leurs rectangles CF & KE ſeront mediaux. Mais le rectangle LO eſt egal au medial KE, partant auſſi medial & incommenſ. au quarré rationel NO, donc par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs côtez TO & SO ſeront incommenſ. en longit. & pour autant qu'ils ſont rationaux, ils ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 74. pr. 10. TS eſt reſidu. Si donc un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

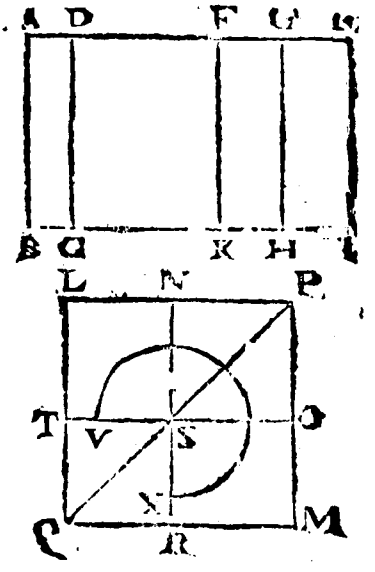
La rationele AB ſoit 8, *& AD* 9 — $\sqrt{45}$: *DE eſt donc* $\sqrt{45}$, *& ſa moitié DF* $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: *mais AG ſera* $7\frac{1}{2}$, *& GE* $1\frac{1}{2}$. *Donc le rectangle BE eſt* 72, *AH* 60. *HE* 12. *CF* $\sqrt{720}$ *& AC* $72\sqrt{}$ — 2880, *& le*

rectangle de AG, GE eſt 11 $\frac{1}{4}$. *Parquoy le quarré LM ſera* 60, *& NO* 12 : *& partant la ligne LP eſt* $\sqrt{60}$, *& NP* $\sqrt{12}$: *& par conſequent LN, ou TS ſera* $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, *qui eſt reſidu ; & ſon quarré TR eſt* $72 - \sqrt{2880}$, *egal au rectangle AC.*

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele & d'un reſidu ſecond, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt reſidu medial premier.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu ſecond AD. Je dis (apres avoir conſtruit comme en la precedente, & demontré comme là que le rectangle AC eſt egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, eſt reſidu medial premier



Car puis que AD eſt reſidu ſecond, & DE ſa convenable, les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, la convenable DE étant commenſurable en longitude à la rationele AB : & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſurables en longitude, & par la 16. prop. 10. ils ſeront

auſſi commenſurables à la totale AE, & par la 14. prop. 10. icelle totale étant commenſurable en longitude à la rationele AB, auſſi le ſeront AG & GE, qui ſont rationeles [car elles ſont commenſurables à leur totale AG, qui eſt rationele] commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 22. pr. 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux: partant mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes medialés. Pareillement DE étant commenſurable en longitude à la rationele AB, auſſi le ſera ſa moitié FE, & par la 20. prop 10. le rectangle KE ſera rationel: partant auſſi rationel ſon egal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, leſquelles ſont incommenſurables en longitude: (autrement leur rectangle ſeroit medial par la 25. pr. 10.) & par la 75. pr. 1. TS eſt reſidu medial premier. Si donc un rectangle compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 4, AD $\sqrt{45} - 5$ *: DE eſt donc 5, & ſa moitié DF* $2\frac{1}{2}$, *& par conſequent le quarré d'icelle DF ou FE eſt* $6\frac{1}{4}$, *auquel étant egal le rectangle de AG, GE, icelles ſeront* $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, *&* $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: *parquoy le rectangle HE, ou le quarré NO ſera* $\sqrt{20}$: *& partant ſon coſté SO eſt* $\sqrt{\sqrt{20}}$. *Mais puis que la ligne AE eſt* $\sqrt{45}$, *& AG* $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: *le rectangle BE ſera* $\sqrt{720}$, *& AH, ou le quarré LM* $\sqrt{500}$: *& par conſequent la ligne TO eſt* $\sqrt{\sqrt{500}}$: *de laquelle étant oſtée SO, reſtera TS* $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, *qui eſt reſidu medial premier, & ſon quarré TR eſt* $\sqrt{720} - \sqrt{20}$. *Mais le rectangle AC eſt*

lutant : car multipliant AB 4 par AD V45 − 5, viendra auſſi V720 − V20 Donc ST reſidu medial premier peut le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIV.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un reſidu troiſiéme ; la ligne pouvant iceluy rectangle, eſt reſidu medial ſecond.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu troiſiéme AD : (apres avoir conſtruit comme en la 92. prop. 10.] Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, [comme nous avons demontré en la ſuſdite prop.) eſt reſidu medial ſecond.

Car puis que AB eſt reſidu troiſiéme, & DE ſa convenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tant entr'elles, qu'à la rationele AB : mais AE peut plus que DE du quarré d'uńe ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & par la 18. pr 10. AG & GE ſeront commenſ. en longitude, & à leur totale AE par la 16 pr. 10. Et ſeront rationeles comme icelle : mais AE eſt commenſ en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 14. pr. 10 AG & GE ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement à AB:Et par la 22. propoſition 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux : donc auſſi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes mediales. Pareillement DE étant incomm. en long à la rationele AB, auſſi le ſera ſa

moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EI étant rationele comme ſa double DE, le rectangle KE ſera medial, partant auſſi medial ſon egal LO, compris des deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement TO & SO : car leurs quarrez LM, NO ſont commenſ. l'étans leurs egaux rectangles AH & HE. Or ils ne ſçauroient être commenſ. en longitude : car il faudroit par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. que LO & NO fuſſent auſſi commenſurables & par conſequent leurs egaux rectangles KE & HE, ce qui n'eſt pas. Donc par la 76. p. 10. TS eſt reſidu medial ſecond. Parquoy ſi un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

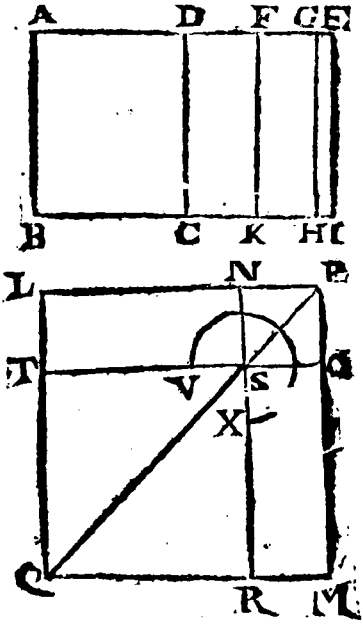
La rationele AB ſoit 4, & AD √54 — √30 : donc DE eſt √30 ; ſa moitié DF √7½, & ſon quarré 7½, lequel etant apliqué ſur la ligne AE √54, & defaillant d'une figure quarrée, les coſtez du rectangle apliqué, ſçavoir AG, GE, ſeront √37½, & √1½. Parquoy le rectangle AC ſera √864 — √480, BE √384, CE √480, AH √600, DK √120, & HE √24. Mais le quarré LM étant egal à AH, il ſera auſſi √600, NO egal à HE √24 : & partant les coſtez d'iceux quarrez, ſçavoir TO, SO ſont √√600, √√24 : & par conſequent TS eſt √√600 — √√24, & ſon quarré TR √864 — √480, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele & d'un reſidu quatriéme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu quatriéme AD: apres avoir conſtruit comme en la 92. p. 10. & demontré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC). Je dis qu'icelle ligne TS eſt ligne mineure.

Car puis que AD eſt reſidu quatriéme, & DE ſa convenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement; & AE qui eſt commenſ. en longit. à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy eſt incomm. en long. & par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longitude: partant par la 1. pr. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE ſeront incommenſurables, auſſi ſeront donc leurs egaux quarrez LM & NO: partant les lignes TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance: Mais AE étant commenſ. en longit. à la rationele AB, par la 20. p. 10. le rectangle AI ſera rationel: partant auſſi rationel ſera le composé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement DE étant commenſurable en puiſſance ſeulement à AB, le rectangle CE ſera medial par la 22. prop. 10. auſſi ſera ſa moitié KE: & par conſequent ſon egal LM ſera auſſi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales, (car



elles ſont incommenſur. en puiſſance) & le com-
poſé de leurs quarrez étant rationel, par la 77.
10. TS eſt ligne mineure. Parquoy ſi un rectan-
gle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il
faloit prouver.

SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 6, AD 9 — V54 : donc DE eſt V54, & ſa moitié DF V13½, ſon quarré 13½, lequel aplíqué ſur AE 9, & defaillant d'une figure quarrée, les coſtez AG, GE ſeront 4½ + V6¼, & 4½ — V6¼. Parquoy le rectangle AC ſera 54 — V1.44, BE 54, AH 27 + V243 DK V486, & HE 27 — V243. Mais le quarré LM étant egal à AH, ſera auſſi 27 + V243, & NO egal à HE 27 — V243; & partant leurs coſtez TO, SO ſont V(27 + V243), & V(27 — V243) : & par conſequent TS eſt V(27 + V243) — V(27 — V243), & ſon quarré TK 54 — V1944, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele & d'un reſidu cinquiéme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu cinquiéme AD : [apres avoir conſtruit comme en la 92. pr. 10. & demontré comme là que la ligne TS peut iceſuy rectangle AC). Je dis qu'icelle TS eſt ligne faiſant avec une ſuperficie rationele, un tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu cinquiéme, & DE ſa convenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & DE eſt

commenſurable en longitude à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & par la 19. prop. 10. les lignes AG & GE ſont incommenſ. en longitude, & comme en la precedente TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais AE étans incommenſurables en longitude à la rationele AB, le rectangle AI ſera medial par la 22. prop. 10. partant auſſi medial le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement, DE étant commenſurable en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE ſera rationel, auſſi le ſera ſa moitié KE, & ſon egal LO, compris de deux lignes incommenſ. en puiſſance TO & SO, deſquelles le compoſé de leurs quarrez fait un tout medial, & par la 78. prop. 10. TS ſera ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial. Parquoy ſi un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB, ſoit 4, *AD* $\sqrt{54}-6$, *donc DE eſt* 6, *& ſa moitié DF* 3, *ſon quarré* 9, *auquel étant egal le rectangle de AGE : AG ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$, *& GE* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$. *Mais le rectangle AC. ſera* $\sqrt{864}-24$, *BE* $\sqrt{864}$, *AH* $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, *DK* 12, *& HE* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$: *ainſi le quarré LM ſera* $\sqrt{216}+\sqrt{72}$, *NO* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *& leurs coſtez TO, SO,* $\sqrt{(\sqrt{216}+72)}$, *&* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$ *& par conſequent TS eſt* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& ſon quarré TR ſera* $\sqrt{864}-24$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si un rectangle eſt compris d'une ligne rationele, & d'un reſidu ſixiéme, la ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB & du reſidu ſixiéme AD : (apres avoir conſtruit comme en la 92. prop. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme il a été demontré en la ſuſdite prop.) eſt ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu ſixiéme, & DE ſa convenable, AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele AB ; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude. Et par la 19.pr. 10.AG, & GE ſeront incomm. en longit. Et comme en la 95. prop.10. TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance ; & tout ainſi qu'en la precedente, le rectangle AI êtant medial, le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO, ſera auſſi medial ; Item DE êtant commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, par la 22. prop. 10. le rectangle CE ſera medial : auſſi le ſera donc ſa moitié KE, & ſon egal LO. Et AE, DE êtans incom. en longit. par la 1. prop. 6. & 10.p. 10. les rectangles AI, CE, ſeront incommenſ. & puis que CE eſt commenſ. à ſa moitié KE, par la 14. prop. 10. KE ſera incommenſ. à AI : & partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incommenſ. en puiſſance, eſt incommenſ. au com-

posé des quarrez d'icelle TO & SO (egal à AI) medial : Parquoy par la 79. prop. 10. le reste TS sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD $\sqrt{108}-\sqrt{63}$, *donc DE est* $\sqrt{63}$, *& sa moitié DE* $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, *son quarré* $15\frac{3}{4}$, *AG* $\sqrt{27}+\sqrt{11\frac{3}{4}}$, *GE* $\sqrt{27}-\sqrt{11\frac{3}{4}}$: *mais le rectangle AC sera* $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$, *BE* $\sqrt{3888}$, *AH* $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, *DK* $\sqrt{56}$, *& HE* $\sqrt{972}-\sqrt{405}$: *ainsi le quarré LM sera* $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, *NO* $\sqrt{972}-\sqrt{405}$, *& leurs costez TO, SO, seront* $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}$. *&* $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$: *& par consequent TS est* $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}}$, *& son quarré TR* $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$.

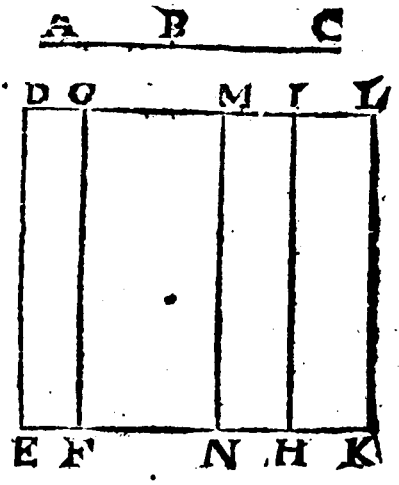
THEOR. 74. PROP. XCVIII. Six.5.

Le quarré d'un residu apliqué sur une rationele, fait l'autre côté residu premier.

Soit le residu AB, & BC sa convenable, tellement que AC, BC, soient rationeles commensurable en puissance seulement : & sur la rationele DE soit apliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Je dis que l'autre côté DG est residu premier.

Car à la méme rationele DE soit apliqué le rectangle DH egal au quarré de AC : & sur IH un autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarrez de

AC, BC : lequel êtant egal par la 7. prop. 2. à deu fois le rectangle de AC, CB, enſemble avec l quarré de AB, ſi on ôte le quarré de AB, & le rectangle DF ; reſtera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB : partant GL êtant coupée en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE : MK ſera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB ſont rationeles, leurs quarrez ſeront auſſi ratiqnaux, & partant commenſ. & par la 16. pr. 10. le compoſé d'iceux quarrez eſt commenſ. à un chacun d'eux : & partant iceluy compoſé, ou DK ſon egal, eſt ationel, lequel êtant apliqué à la rationele DE, par la 21. prop. 10. DL ſera ationele commenſ. en longitude à icelle DE. Derechef, puis que AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, le rectangle d'icelles, & partant auſſi ſon double GK, ſera medial : & iceluy êtant apliqué à la rationele GF, par la 23. prop. 10. GL ſera rationele incommenſ. en longitude à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'eſt à dire irrationel, ſont incomm. par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. les lignes DL, GL, ſeront auſſi incommenſ. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont êté demontrées rationeles, elles ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant par la 74. prop. 10. le reſte DG ſera auſſi



reſidu. Je dis davantage qu'il eſt reſidu premier.

Car puis que le lemme de la p. 54. le rectangle de AC, CB, ou ſon egal MK, eſt moyen pr. entre les quarrez de AC, CB, c'eſt à dire entre DH, IK: DH, MK, IK ſeront continuellement proportionaux: & par conſequent auſſi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL, eſt egal au quarré de ML, c'eſt à dire au quart du quarré de GI, par le ſcholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, ſont commenſ. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DI, IL, ſeront commenſ. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, LG ſont inegales, & à la plus grande de DL eſt apliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, par la 18. prop. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: & par la 1. des 3. def. DG ſera reſidu premier. Parquoy le quarré d'un reſidu apliqué ſur une rationele, &c Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

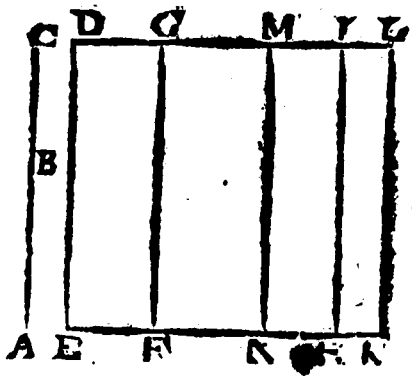
Le reſidu AB ſoit √60 - √12, & BC √12: donc la toute AC eſt √60.: mais la rationele DE ſoit 8, ſur laquelle eſtant apliqué le quarré de AB, qui eſt 72 — √2880, l'autre coſt: DG ſera 9 — √45: auſſi DI ſera 7½, IL 1½, DL 9, & GL √45. & GM √11¼: Ainſi le rectangle DK ſera 72, DH 60, IK 12, GN √720, GK √2880, & DF 72 — √2880.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un reſidu medial premier, apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre côté reſidu ſecond.

Soit le resîdu medial premier AB, duquel la convenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales commensurables en puissance seulement & contiennent un rectangle rationel: & sur la rationele DE soit apliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Je dis que l'autre côté DG est resîdu second.

Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à une fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement: les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commensurables, & partant par la 16. prop. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le coroll. de la 24. prop 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationele commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21.e prop. 10. GL sera rationele commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK êtans incommensurable (car l'un est rationel, & l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera resîdu:



lequel je dis être auſſi ſecond. Car on prouvera de même qu'en la precedente, que la toute DL, peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude ; & partant par les tierces definitions, DG eſt reſidu ſecond. Parquoy le quarré d'un reſidu medial premier, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Le reſidu medial premier AB ſoit $\sqrt{\sqrt{500}}-\sqrt{\sqrt{20}}$, *& BC* $\sqrt{\sqrt{20}}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{\sqrt{500}}$: *& étant apliqué ſur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui eſt* $\sqrt{500}$, *l'autre coſté DI ſera* $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, *& ſi à la meſme DE eſt apliqué IK egal au quarré de BC, qui eſt* $\sqrt{20}$, *IL ſera* $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: *ainſi la toute DL ſera* $\sqrt{45}$. *Derechef apliquant à DE le rectangle GN egal au rectangle de ACB, qui eſt* 10, *l'autre coſté GM ſera* $2\frac{1}{2}$, *& ſon double GL 5 : parquoy DG ſera* $\sqrt{45}-5$, *qui eſt reſidu ſecond.*

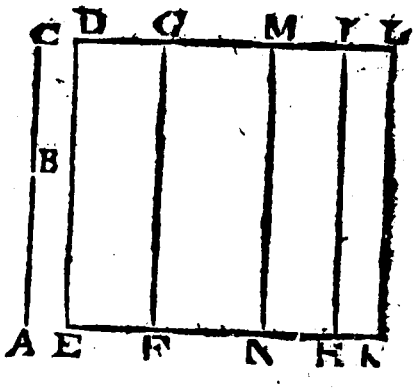
THEOR 76. PROP. C.

Le quarré d'un reſidu medial ſecond, apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre côté reſidu troiſiéme.

Soit le reſidu medial ſecond AB, auquel convienne BC, tellement que AC, CB, ſoient medialles commenſ. en puiſſance ſeulement, & contiennent un rectangle medial : Et ſur la rationele DE, ſoit apliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre côté DG eſt reſidu troiſiéme.

Car ayant conſtruit comme en la 98. prop. on

demontrera comme en la precedente que le rectangle DK eſt medial, & partant par la 23. prop. 10 ſon autre côté DL ſera rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC, étant medial, auſſi le ſera ſon double GK, & par la 23. prop. 10. GL ſera auſſi rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele DE: Et puis que AC, BC ſont incommenſ. en longitude, le quarré de AC ſera incommenſ. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant auſſi à ſon double GK: Mais le quarré de AC eſt auſſi commenſurable au quarré de BC: (pource qu'iceux quarrez ſont déc its ſur lignes commenſ. en puiſſance:) & partant par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez, c'eſt à dire DK, ſera auſſi commenſ. au quarré de AC, auquel eſt incommenſ. GK; donc par la 13. prop. 10. DK ſera incommenſ. à GK: & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant même raiſon que DK, GK ſeront incommenſ. en longitude. Mais êtans rationeles, elles ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 74. prop. 10. BG ſera reſidu. Mais ny DL, ny GL ne ſont commenſ. en longitude à la rationele DE, & ſi on prouvera comme en la 98. prop. que DL peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par les tierces def. DG eſt reſidu troiſiéme. Parquoy le quarré d'un



reſidu,

ſidu medial ſecond, &c. Ce qu'il faloit démon-
trer.

SCHOLIE.

Le reſidu medial ſecond AB ſoit $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, *& BC* $\sqrt{\sqrt{24}}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{\sqrt{600}}$: *& apliquant ſur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui eſt* $\sqrt{600}$, *l'autre côté DI ſera* $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *mais apliquant à la meſme DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre coſté IL ſera* $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL ſera* $\sqrt{54}$; *& ſi derechef on aplique ſur la meſme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui eſt* $\sqrt{120}$, *l'autre coſte GM ſera* $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, *& ſon double GL* $\sqrt{30}$: *parquoy DG eſt* $\sqrt{54}-\sqrt{30}$, *qui eſt reſidu troiſiéme.*

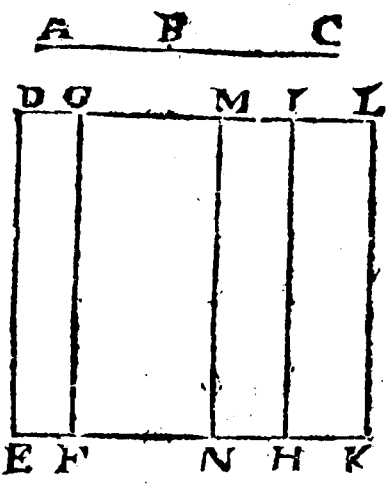
THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'une ligne mineure, apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté reſidu quatriéme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC convienne, en ſorte que AC, BC, ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel : & le quarré d'icelle AB ſoit apliqué à la rationele DE : je dis que l'autre côté DG eſt reſidu quatriéme.

Car apres avoir conſtruit comme en la 98. p. le rectangle DK ſera rationel, & GK medial, par le diſcours des precedentes : & par la 21. pr. 10. DL ſera rationele comm. en longitude à la rationele DE : & GL, par la 23. p. 10. ſera rationele comm. en puiſſance ſeulement à icelle rationele DE : & puis que DK eſt rationel, & GK medial, il sõt incõm. & par la 10.

prop. 10. les lignes DL, GL, qui sont en même raison que DK, GK, seront incommensurables en longitude. Mais elles sont rationeles : elles seront donc comm. en puissance seulement: & par la 74. p. 10. DG sera residu.



Je dis davantage qu'il est residu quatriéme. Car puis que les lignes AC, BC sont incomm. en puissance, leurs quarrez seront incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles DH, IK, & & par consequent incommens. les lignes DI, IL, costez du rectangle defaillant d'une figure quarrée egale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a été demontré en la 98 prop. & par la 19. prop. 10. DL (qui est commens. en longitude à la rationele DE) peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude : & par les tierces definitions DG est residu quatriéme. Donc le quarré d'une ligne mineure, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{(27+\sqrt{243})}-\sqrt{27}$ $-\sqrt{243}$), *&* $BC\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: *la toute AC sera donc* $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$, *le quarré de laquelle apliqué sur la rationele DE 6, l'autre costé DI sera* $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *mais*

étant apliqué sur la meſme DE, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui eſt 27 — V243, l'autre coſté IL ſera $4\frac{1}{2}$ *— V* $6\frac{3}{4}$ *: & partant la toute DL ſera 9. Que ſi à la meſme DE on aplique le rectangle GN egal au rectangle de ACB qui eſt V486, l'autre coſté GM ſera V* $13\frac{1}{2}$*, & ſon double GL V54 : & partant DG eſt 9 — V54, qui eſt reſidu quatriéme.*

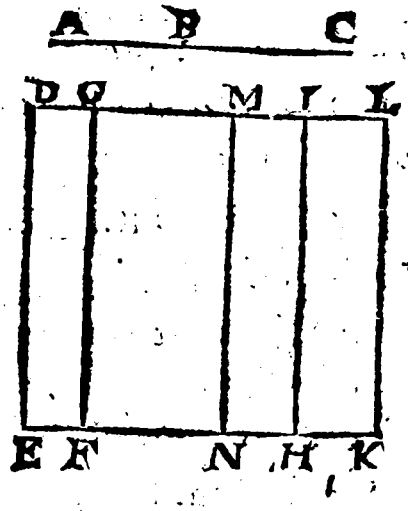
THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faiſant avec une ſuperficie rationelle, un tout medial, apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté reſidu cinquiéme.

Soit la ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial AB, de laquelle le quarré ſoit apliqué ſur la rationele DE : Je dis que l'autre côté DG eſt reſidu cinquiéme.

Car (apres avoir conſtruit comme en la 98. pr. 10.) AB étant ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial, & BC ſa convenable, les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance ; comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial : partant le rectangle DK ſera medial, & GK rationel, & par la 23. prop 10 DL ſera rationele incommenſ. en longitude à la rationele DE : & par la 21. prop. 10. GL ſera auſſi rationele, mais commenſ. en longitude à la rationele DE : Item les rectangles DK, GK étans incommenſurables [car l'un eſt rationel, & l'autre medial] les lignes DL, GL ſeront auſſi incommenſurables en lõgit Mais icelles ſont rationeles : elles ſont donc commenſur. en puiſſance

seulement, & par la 74. proposition DG sera residu. Mais il a été demontré que GL est commensurable en longitude à la rationele DE, & on prouvera comme en la precedente, que la toute DL peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude: & partant par les tierces def. DG est residu cinquiéme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie rationele, &c. Ce qu'il faloit démontrer.



SCHOLIE.

La ligne AB soit $V[V216+V72]-V[V216-V72]$, *& BC* $V[V216-V72]$; *la toute AC sera donc* $V[V216+V72]$, *le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationele DE 4, & l'autre costé DI sera* $V13\frac{1}{2}+V4\frac{1}{2}$: *mais étant apliqué sur la mesme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est* $V216-V72$, *l'autre costé IL sera* $V13\frac{1}{2}-V4\frac{1}{2}$: *& partant la toute DL sera V54: Que si a la mesme rationele on aplique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui est 12., l'autre costé ML sera 3, & son double GL 6: Parquoy DG sera V54−6, qui est residu cinquiéme.*

THEOR. 79. PROP. CII.

Le quarré d'une ligne faisant avec une su-

perficie mediale un tout medial, apliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté reſidu ſixiéme.

Soit la ligne AB, faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB ſoit apliqué ſur la rationele DE : Je dis que l'autre côté DG eſt reſidu ſixiéme.

Car (apres avoir conſtruit comme en la 98. pr.) AB étant ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial, & BC la convenable à icelle AB; les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant un rectangle medial, incommenſ. au composé de leurs quarrez auſſi medial: partant les deux rectangles DK & GK ſont mediaux & incommenſ. & par la 23. prop. 10. DL GL ſeront rationeles incommenſ. en longitude entr'elles, & à la rationele DE : & par conſequent commenſ. en puiſſance ſeulement : & par la 74. prop. BG ſera reſidu. Mais on peut prouver comme en la 101. prop. 10. que la toute DL peut plus que ſa convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & partant par les tierces def. GD eſt reſidu ſixiéme. Donc le quarré d'une ligne faiſant avec une ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

SCHOLIE.

* *La ligne AB ſoit* $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{[\sqrt{972}-\sqrt{405}]}$, *&* $BC\ \sqrt{[\sqrt{972}-\sqrt{405}]}$: *donc la toute AC ſera* $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}$. *au quarré de*

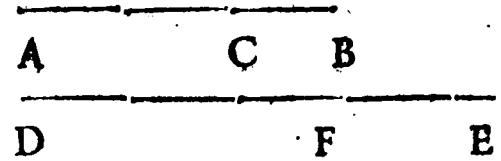
laquelle ſoit egal le rectangle DH, apliqué à la rationele DE & l'autre coſté DI ſera donc $\sqrt{27} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$. *mais étant aplique à la meſme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui eſt* $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, *l'autre coſté IL ſera* $\sqrt{27} - \sqrt{11\frac{1}{4}}$: *& partant la toute DL ſera* $\sqrt{108}$: *Si derechef on aplique la meſme rationele le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui eſt* $\sqrt{567}$, *l'autre coſté GM ſera* $\sqrt{15\frac{3}{4}}$. *& ſon double* $\sqrt{63}$: *parquoy DG ſera* $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, *qui eſt reſidu ſixieme.*

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne droite commenſurable en longitude à un reſidu eſt auſſi reſidu, & de même ordre.

Soit le reſidu AC, auquel ſoit commenſurable en longitude la ligne droite DF. Je dis que DF eſt reſidu de même ordre que AC.

Car CB ſoit la convenable au reſidu AC, tellement que AB, CB ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 12. prop. 6. ſoit fait que comme AC eſt à DF, ainſi CB ſoit à FE. Donc par la 12. prop. 5. la toute AB ſera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE : & par la 10. p. 10. comme AC eſt commenſ. en long. à DF, ainſi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant, comme AB à BC, ainſi DE à FE. Maintenant, comme AB & BC ſont rationeles, auſſi ſeront DE & FE : [car



elles ſont commenſ. à icelles, par la 10. p. 10.] Mais AB & BC ſont commenſ. en puiſſance ſeulement: partant DE & EF ſeront auſſi rationeles comm. en puiſſance ſeulement, & par la 74. p. DF eſt reſidu.

Je dis davantage qu'il eſt reſidu de même ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude : ſi commenſur. auſſi DE pourra plus que FE de même façon par la 15. p. 10 (étans les quatre lignes proport.) Que ſi AB eſt commenſurable en longitude à une ligne rationele proposée, auſſi DE qui luy eſt commenſ. en longitude ſera commenſ. en longitude à la même rationele proposée par la 12. pr. 10. Parquoy AC & DF ſeront reſidus premiers: Que ſi BC eſt commenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſera FE; & AC, DF ſeront reſidus ſeconds : Et ſi AB & BC ſont incomm. en longitude à la rationele, auſſi ſeront DE & FE; & AC, DF ſeront reſidus troiſiémes. Que ſi AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude auſſi DE pourra plus de même que FE par la 15. pr. 10. Et ſi AB eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera DE : & AC, DF ſeront reſidus quatriémes. Mais ſi BC eſt commenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſera FE : & AC, DF ſeront reſidus cinquiémes. Si AB & BC ſont incommenſurables en longitude à la rationele, auſſi ſeront DE & FE: partant AC & DF ſeront reſidus ſixiémes : par ainſi DF eſt reſidu de même ordre que AC. Parquoy la ligne commenſurable en longitude en un reſidu, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Le residu AC soit √60 — √12, & DF √15 — √3 lesquelles sont commens. en longitude l'une étant double de l'autre, & la convenable CB soit √12 : Donc la toute AB est √60 : & puis que comme AC est à DF, ainsi CB √12 est à FE : icelle FE sera √3 : & la toute DE √15, commens. seulement en puissance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne droite commensurable à un residu medial, est aussi residu medial de même ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AC : je dis qu'icelle DF est aussi residu medial, & de même ordre que AC.

Car ayant fait même construction qu'en la prec. prop. AB & BC seront commens. à DE, EF lesquelles sont mediales commens. en puissance seulement, & par la 24. p. 10. DE & FE seront mediales commensurables en puissance seulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. prop. DF est residu medial : Je dis davantage qu'il est de même ordre que AC.

Car par la 1. p. 6. le quarré de AB est au rectangle de AB, BC comme AB à BC : Item le quarré de DE est aussi au rectangle de DE, FE comme DE à FE. Mais le quarré de AB est commens. au quarré de DE, étant AB & DE commens. & par la 10. pr. 10. les deux rectangles seront aussi comm. & comme

un ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial : partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers : & ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds. Donc la ligne commenſ. à un reſidu medial, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

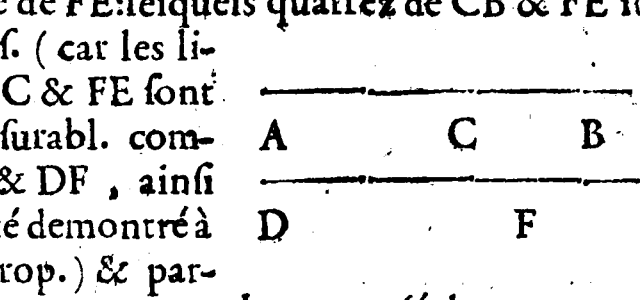
Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, *&* $DF\ \sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}} - \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$: *BC ſera* $\sqrt{\sqrt{20}}$, *& la toute AB* $\sqrt{\sqrt{500}}$: *mais FE ſera* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$, *& la toute DE* $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne droite commenſurable à une ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commenſurable à une ligne mineure AC : Je dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB étant convenable à icelle AC, apres avoir fait même conſtruction qu'en la 104. prop. 10. AB & BC ſeront incommenſur. en puiſſance, comprenant un rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. prop. 10. DE & FE ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AB à BC, ainſi DE à FE, par la 22. prop. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux : & en compoſant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DE; FE, ſera au quarré de FE: & en permutant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au compoſé

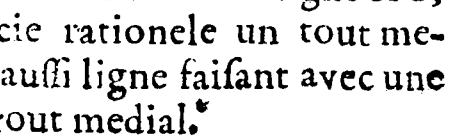
des quarrez de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE: leſquels quarrez de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes BC & FE ſont commenſurabl. comme AC & DF, ainſi qu'il a été demontré à la 104 prop.) & partant par la 10. prop. 10. le compoſé des quarrez de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera commenſurable au compoſé des quarrez de DE & FE, lequel ſera auſſi rationel. Pareillement, puis que comme à la prop. precedente le quarré de AB eſt au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE eſt au rectangle de DE & FE: en permutant, comme le quarré au quarré, ainſi le rectangle au rectangle: c'eſt à dire commenſurable. Car les lignes AB & DE ſont commenſ. par la 10. prop. 10. & par le corol. de la 24. prop. 10. le rectangle de AB & BC étant medial, celuy de DE & FE ſera auſſi medial: partant DE & FE étant incommenſ. en puiſſance comprenant un rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, par la 77. prop. 10. DF ſera ligne mineure. Donc la ligne commenſurable à une ligne mineure eſt auſſi ligne mineure. Ce qu'il faloit demontrer.



THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne droite commenſurable à une ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial, eſt auſſi ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.

Soit la ligne DF commenſurable à la ligne AC, faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial. Je dis que DF eſt auſſi ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.



Car ſoit CB convenable à AC, tellement que AB, CB ſoient incommenſ. en puiſſance, & faſſent le compoſé de leurs quarrez medial : mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et êtant fait même conſtruction qu'en la 104. prop. on demontrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE ſont incommenſ. en puiſſance ; & que le compoſé des quarrez de AB, CB eſt commenſurable au compoſé des quarrez de DE, FE. Mais celuy-là eſt medial: auſſi ſera donc cettuy-cy, par le corol. de la 24. prop. 10. Derechef, comme nous avons demontré en la 105. prop. le rectangle de AB, CB eſt commenſurable au rectangle de DE, FE : mais cettuy-là eſt poſé rationel : auſſi ſera donc cettuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, ſont incommenſ. en puiſſance, & font le compoſé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. prop. 10. DF ſera ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial. Parquoy la ligne commenſ. à une ligne, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR 84. PROP. CVIII.

La ligne commenſurable à une ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial, eſt auſſi ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Soit la ligne DF commenſ. à la ligne AC, faiſ
avec une ſuperficie mediale un tout medial: Je
que DF eſt auſſi ligne faiſant avec une ſuperfi
mediale un tout medial.

Car à AC ſoit CB convenable, tellement q
AB, CB ſoient incommenſ. en puiſſance, & fa
ſent le compoſé de leurs quarrez medial, & le
rectangle auſſi medial & incommenſ. au compo
de leurs quarrez: & ayant fait ſemblable conſtru
ction qu'aux precedentes, on prouvera comme e
la 106. prop. que les lignes DE, FE, ſont incom
menſ. en puiſſance, & que le compoſé des quarre
de AB & BC, eſt commenſ. au compoſé des quar
rez de DE & FE: & comme en la 105. prop. que l
rectangle de AB & BC, eſt commenſ. au rectangle
de DE & EF. Mais le rectangle de AB & CB, eſ
medial, & incommenſurable au compoſé des quar
rez de AB & CB, auſſi medial: partant par le ſcho
lie de la 14. prop. 10. le rectangle de DE & FE, ſera
medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez de
DE & FE auſſi medial: & DF ſera ligne faiſant avec
une ſuperficie mediale un tout medial. Donc la li
gne commenſ. à une ligne faiſant avec une ſuper
ficie mediale, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

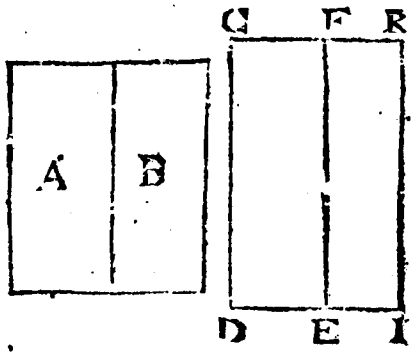
THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une ſuperficie rationele, eſt retranchée une ſuperficie mediale: la ligne qui peut le reſte eſt reſidu, ou ligne mineure.

Soit la ſuperficie rationele AB, de laquelle ſoit
retranchée la mediale A: Je dis que la ligne qui
peut le reſte B, eſt reſidu, ou ligne mineure.

Car ſur une rationele propoſée CD ſoit décrit le

tangle CE egal à A, & ſur FE le rectangle FI
al à B. Il èſt evidét que CI egal au rationel AB,
a auſſi rationel, & par la 21 prop. 10. ſon autre
é CK ſera rationel commenſ. en longit. à CD.
em par la 23. prop.
. CE étant medial,
F ſera rationele com.
enſur. en puiſſance
ulement à CD, &
r la 13. prop. 10. CK
CF ſeront ratione-
s commenſ. en puiſ-
nce ſeulement : &
partant par la 74. pr. 10. FK ſera reſidu, & FC ſa
onvenable. Parquoy CK peut plus que CF du
uarré d'une ligne qui luy eſt commenſ. ou incom-
enſ. en longitude. Si commenſurable, FK ſera
eſidu premier : & partant la ligne qui peut le re-
tangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu par la 92. pr.
o. Si incommenſurable, FK eſt reſidu quatriéme;
conſequemment la ligne qui peut le rectangle
I (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par la 95. pr.
o. Parquoy ſi d'une ſuperficie rationele, &c. Ce
u'il faloit demonſtrer.



SCHOLIE.

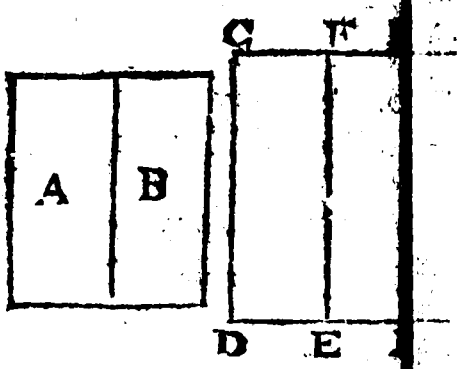
Si l'eſpace rationel AB eſt 32, le medial AV 320, & la ligne rationele CD 6, ſur laquelle eſt décrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B : les côtez F, & FK, ſeront V $8\frac{8}{9}$, & $5\frac{1}{3}$ — V $8\frac{8}{9}$: & partant toute CK ſera $5\frac{1}{3}$: & le rectangle CI 32, duquel ſtant CE, qui eſt V 320, le reſte rectangle FI ſera 2 — V 320 : & la ligne pouvant iceluy ſera V (16 + V 176) — V (16 — V 176), qui eſt ligne mineure.

THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'une ſuperficie mediale eſt retranch
une ſuperficie rationele, la ligne qui pe
le reſte, eſt reſidu medial premier, ou
gne faiſant avec une ſuperficie ratione
un tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſo
retranchée la rationele A. Je dis que la ligne q
peut le reſte B, eſt reſidu medial premier, ou
gne faiſant avec une ſuperficie rationele un to
medial.

Car, ayant conſtruit comme en la precedent
puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale, auſſi
totale CI eſt mediale, & par la 23. ptop. 10. le c
té CK eſt rationel commenſ. en puiſſance ſeule
ment à la rationele CD. Item puis que le retran
ché A eſt rationel, auſſi ſera ſon egal CE, &
par la 21. prop. 10. CF
ſera rationele comm-
menſ. en longitude à
la rationele CD : &
par la 13. prop. 10. CK
& CF ſeront ration-
les commenſ. en puiſ-
ſance ſeulement ; &



partant par la 74. prop. 10. FK ſera reſidu, & FC
ſa cõvenable. Donc CK peut plus que CF du quar
ré d'une ligne qui luy eſt commenſurable ou in
commenſurable en longitude, & conſequemmen

K ſera reſidu ſecond, ou reſidu cinquiéme. Si reſidu ſecond ; la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial premier par la 93. pr. 10. Si reſidu cinquiéme, la ligne qui peut le rectangle FI, eſt ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial, par la 96. prop. 10. Parquoy ſi d'une ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie mediale AB eſt √800, & la rationele A 1 : le reſte B ſera √800—12, & la ligne pouvant iceluy ſera √(√200 +√164)—√[√200 —√164], qui eſt ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'une ſuperficie mediale, eſt retranchée une ſuperficie mediale incommenſurable à la toute ; la ligne qui peut le reſte eſt ou reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchée la ſuperficie mediale A, incommenſ. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

Car ayant fait même conſtruction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE ſeront mediaux & incommenſurables entr'eux ; & par la 22. prop. 10. les lignes CK, CF ſeront rationeles incom-

menſ. en longitude à CD. Et puis que CI ;
ſont incommenſ. les rationeles CK, CF, qui
la 1. pr. 6. ſont en même raiſon que CI, CE, ſera
auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. pr.
& par conſequent elles ſont ſeulement comme
en puiſſance : Donc FK ſera reſidu par la 74. pro
10. & FC ſa convenable. Partant CK peut plu
que FK, du quarré d'une ligne qui luy eſt com
menſurable ou incommenſ. en longitude : ſi in
commenſ. FK ſera reſidu troiſiéme, par la de
Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI [ou ſo
egal B] eſt reſidu medial ſecond, par la 94. prop
Si incommenſ. FK ſera reſidu 6e. par la def. Par
quoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B ſon
egal) eſt ligne faiſant avec une ſuperficie mediale
un tout medial, par la 97. prop. Si donc d'une ſu
perficie mediale, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Si la ſuperficie mediale AB eſt $\sqrt{279}$. *&* $A\sqrt{40}$: *la ſuperficie reſtante B ſera* $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: *& la ligne pouvant icelle ſera* $\sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} + \sqrt{59\frac{3}{4}})} - \sqrt{(\sqrt{69\frac{3}{4}} - \sqrt{59\frac{3}{4}})}$, *qui eſt apelée ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.*

THEOR. 88. PROP. CXII.

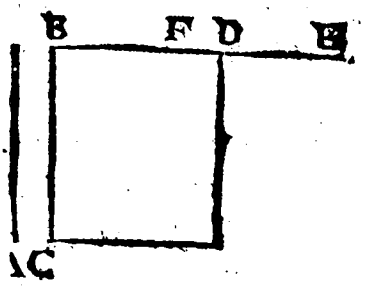
La ligne apelée reſidu, n'eſt pas la meſme que Binome.

Soit quelconque reſidu A. Je dis qu'elle n'eſt pas même ligne que binome.

Car ſoit la rationele proposée BC, ſur laquelle ſoit apliqué le rectangle CD egal au quarré du re-

ſidu

du A : par la 98. prop. BD ſera reſidu premier, auquel ſi on ajoûte ſa convenable DE ; BE & DE ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & BE commenſ. en longitude à la rationele BC.



Maintenant ſi on poſe A être binomè ; BD ſera binome premier par la 61. pr. 10. lequel étant diviſé en ſes noms au point F ; (étant BF le plus grand nom) BF & FD ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, & BF commenſurable en longitude à la rationele BC : & par la 12. pr. 10. BE & BF, ſeront commenſ. en longitude. Vû donc que la toute BE eſt commenſ. en longitude à la partie BF, par le coroll. de la 16. pr. 10. l'autre partie FE ſera auſſi commenſ. en longit. à BE : partant auſſi rationele comme icelle BE. Mais DE qui eſt auſſi rationele, n'eſt pas commenſurable en longitude à BE, & par la 14. pr. 10. FE, DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant par la 74. p. 10. FD eſt reſidu, & par conſequent irrationele ; ce qui eſt abſurde : car elle a été prouvée rationele : donc le reſidu A ſera differend du binome. Parquoy la ligne apelée reſidu n'eſt pas la même que binome. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

De ces choſes on peut facilement colliger que la ligne apelée reſidu, & les cinq ſortes de lignes irratio-

neles ſuivantes, ſont differentes de la mediale, entr'elles. Car le quarré de la mediale apliqué à une ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle rationele, par 23. p. 10.

Le quarré du reſidu, fait l'autre coſté reſidu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du reſidu medial premier, fait l'autre coſté reſidu ſecond, par la 99. p. 10.

Le quarré du reſidu medial ſecond, fait l'autre coſté reſidu troiſiéme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre coſté reſidu quatriéme, par la 101 p. 10.

Le quarré de la ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial, fait l'autre coſté reſidu cinquiéme, par la 102 p. 10.

Le quarré de la ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial, fait l'autre coſté reſidu ſixiéme par la 103. pr. 10,

Puis donc que tous ces coſtez, (qui ſont les latitudes des rectangles) ſont differens; les lignes qui les peuvent ſeront auſſi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles ſuivantes, étans apliquez à une ligne rationele font l'autre coſté binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq ſuivantes ſont differentes du reſidu, & des cinq ſuivantes.

Ainſi toutes les lignes irrationeles cy-devant dites ſont treize: ſçavoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale ſeconde.
5. Ligne majeure.

6. Ligne pouvant un rationel & un medial.
7. Ligne pouvant deux mediaux.
8. Reſidu.
9. Reſidu medial premier.
10. Reſidu medial ſecond.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faiſant avec une ſuperficie rationele un tout medial.
13. Ligne faiſant avec une ſuperficie mediale un tout medial.

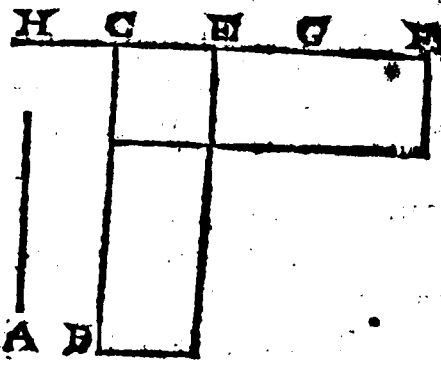
THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationele étant apliqué à un binome, fait l'autre côté reſidu, les noms duquel ſont proportionnaux & commenſ. aux noms du binome: en outre le reſidu eſt de même ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grãd nom ſoit BD: & à icelle BC ſoit apliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Je dis que l'autre côté CE eſt reſidu duquel les noms, c'eſt à dire la ligne totale & ſa convenable, ſont proportionnaux & commenſ. aux noms BD, DC du binome BC: & en outre qu'iceluy reſidu eſt de même ordre que ledit binome.

Car au moindre nom CD ſoit apliqué le rectãgle DF auſſi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, ſeront egaux, & par la 14. p. 6. leurs côtez ſeront reciproques, ſçavoir que comme BC à DC, ainſi CF à CE; & en diviſant, comme BD à DC, ainſi FE à EC. Mais BD eſt plus grande que CD: donc auſſi FE ſera auſſi plus grande que EC. Maintenant de EF ſoit retranchée EG egale à EC, & ſoit fait que comme FG. à GE, ainſi EC

ſoit à CH par la 12. pr. 6. & en compoſant, comme FE ſera à EG, (ou EC ſon egale) ainſi EH à CH, & par la 12 pr. 5 les deux antecedens FEH ſeront aux deux conſequens ECH comme l'un des antecedens EH à l'un des conſequens CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, ſeront continuellement proportioneles en la raiſon de FE à EC, ou BD à DC: & par la 22. prop. 6. & 10. pr. 10. comme le quarré de BD eſt commenſ. au quarré de DC, [car iceux quarrez ſont commenſ. puis que BD, DC ſont les noms du binome BC] ainſi le quarré de EH ſera commenſ. au quarré de CH: & par le corollu de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH ſera commenſ. en longitude à la troiſiéme proportionele FH, & par la 16. p 10. CH & GF ſeront commenſ. en longitude. Et d'autant que le rectangle DF eſt rationel [étant egal au quarré de la ligne rationele A] & DC ligne rationele: CF ſera auſſi ligne rationele commenſ. en longitude à CD par la 21. p. 10 Et CH ſera auſſi rationele commenſ. en longitude à CD, par la 12 p. 10 & par la 10. pr. 10. comme CD & DB ſont rationeles comm. en puiſſance ſeulement, auſſi CH, EH, ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. p. 10. CE ſera reſidu, duquel les noms EH, CH ſont proportionaux, & commenſ. aux



noms BD, DC, du binome BC : Car il a esté demontré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH, & partant en permutant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont été demontrées commens. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouver que le residu CE est de même ordre que le binome BC : Or les noms de l'un étans proportionaux, & commens. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longitude : aussi le plus grand nom du residu pourra plus de même. Que si le plus grand nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus grand nom du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus petit du residu; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele: semblablement l'un ny l'autre nom du residu ne sera comm. à la même rationele par la 14. p. 10. & partant ils seront binome, & residu troisiéme : & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'une ligne rationele étant apliqué sur un binome, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

SCHOLIE.

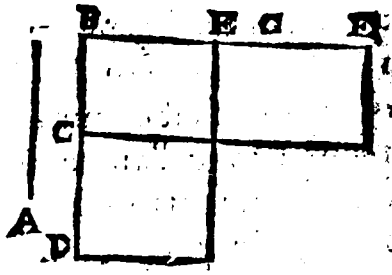
Si la rationele A est 8. le binome BC 9 + V45, tellement que BD soit 9, & CD V45 : Le quarré de A étant apliqué sur BC, l'autre costé du rectangle CE sera 16 — V142 2/5, qui est residu : & puis que comme

DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{}{}}$ *& EF* $\sqrt{460\frac{2}{5}} - 16$. *Mais EG etant egale à CE,* $16 - \sqrt{142\frac{2}{5}}$; *GF* $\sqrt{1115\frac{1}{25}} - 32$; *& d'autant q comme FG est à GE, ainsi EC à CH, icelle sera* $142\frac{2}{5}$, *& EH 16; Ainsi est manifeste que CE est r sidu de mesme ordre que le binome BC, & que l noms EH, CH, sont proportion. aux noms BD, CD*

THEOR. 90. PROP. CXIV.

Le quarré d'une ligne rationele, étant apliqué à un residu, fait l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du residu: En outre le binome est de même ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC, auquel convienne CD, & sur BC soit décrit le rectangle CE egal au quarré de la rationele A: Je dis que l'autre côté BE est binome, dont les noms sont proport. & comm. à BD, CD, noms du residu BC; & en outre qu'iceluy binome BE est de mesme ordre que ledit residu BC.



Car sur BD soit décrit le rectangle DF egal au même quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront egaux, & ayans les côtez reciproques par la 14. pr. 6. BD sera à BC comme BE à BF; & par conversion de raison, BD sera à CD comme BE à FE. Maintenant soit coupée EF en G, par la 10. prop. 6. tellement que comme BE est à FE, ain-

EG ſoit à GF: Vû donc que comme la toute BE eſt à la toute FE, ainſi EG retranchée de BE, eſt à GF retranchée de FE, auſſi par la 19. p. 5. le reſte BG ſera au reſte EG, comme la toute à la toute, c'eſt à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF: & partant EG eſt moyenne proportionele entre BG & GF. Parquoy: comme BG ſera à GF, ainſi le quarré de BG ſera au quarré de EG, par le corollaire de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainſi BE à FE, c'eſt à dire BG à GE; & BD, CD noms du reſidu BC ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: par la 10. p. 10. BG, GE ſeront auſſi commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant les quarrez d'icelles BG, GE ſont commenſ. & par conſequent les lignes BG, FG qui ont même raiſon qu'iceux quarrez, ſont commenſ. en longit, par la même 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF ſeront auſſi commenſ. en longit. Et d'autant que BD plus grand nom du reſidu BC eſt rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, eſt rationel; par la 21. p. 10. BF ſera auſſi rationele commenſ. en longit. à BD. Donc par la 12. p. 10 BG ſera auſſi rationele comm. en long. à la même BD. Et puis que BG, GE, ont été demõtrées comm. en puiſſance ſeulement, & BG rationele; GE ſera auſſi rationele. Donc BG, GE ſont rationeles cõm. en puiſſance ſeulement. Et partant par la 37. p. 10. BE eſt binome: duquel les noms BG, GE, ſont proport. & comm. aux noms BD, CD, du reſidu BC. Car il a été demontré que comme BD à CD, ainſi BG à GE: & partant en permutãt, comme BD à BG, ainſi CD à GE: mais BD a été demontré comm. en long. à BG: donc auſſi CD ſera comm. en longitude à GE, par la 10. prop. 10. Reſte donc à prouver que

BE eſt binome de même ordre que le reſidu B
ce qu'on fera procedant tout ainſi qu'en la ptec
dente. Parquoy le quarré d'une ligne ratione
étant apliqué ſur un reſidu, &c. Ce qu'il faloit d
montrer.

SCHOLIE.

Si la rationele A eſt 4, & le reſidu BC 9 — √45, CD √45, & BD 9, le rectangle DF ſera 16, & auſſi CE 16 : ainſi le coſté BF ſera 1 1/9, & BE 4 + √8 8/9 : & par conſequent FE ſera √8 8/9 + 2 2/9 ; & GE 8 8/9, FG 2 2/9, BG 4 : ainſi eſt evident que BE eſt binome en meſme ordre que le reſidu BC, & que les noms d'iceux ſont proportionnaux.

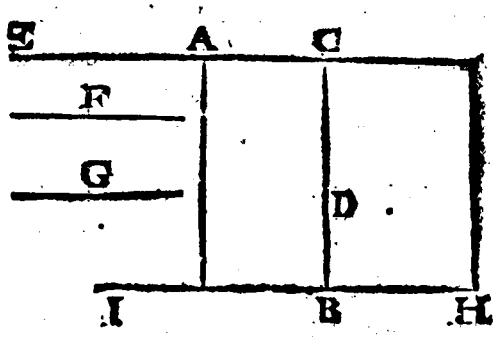
THEOR. 91. PROP. CXV.

Si un rectangle eſt compris d'un reſidu, & d'un binome, deſquels les noms ſont proportionaux & commenſurables; la ligne droite pouvant iceluy rectangle eſt rationele.

Soit le rectangle AB compris ſous le reſidu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB ſoient proportionaux, & commenſurables aux noms CE, AE, du reſidu AC: & ſoit la ligne droite F pouvant iceluy rectangle AB. Je dis que F eſt rationele.

Car ſoit une rationele proposée G, le quarré de laquelle étant apliqué ſur le binome CB, faſſe le rectangle CH. Donc par la 113. p. l'autre côté BH ſera reſidu, duquel les noms HI, BI ſont comm. & proportionaux aux noms CD, DB, ſçavoir eſt que comme HI à BI, ainſi CD à DB, & par tant ainſi CE à AE : & en permutant, comme la toute

HI à la toute CE, ainsi la retranchée BI à la retranchée AE; & par la 19.p.5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont comm. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'une & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC seront commensurables en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA êtans par la 1. prop. 6. en même raison que BH, & AC, ils seront aussi commensurables. Mais HC, egal au quarré de la rationele G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele. Si donc un rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'un rectangle rationel, peut être compris de lignes irrationeles.

SCHOLIE.

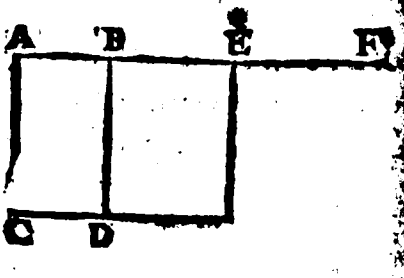
Si le residu AC est $4-\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient* 4, *&* $\sqrt{8\frac{8}{9}}$, *mais le binome BC soit* $9+\sqrt{45}$, *le rectangle AB sera* 16, *qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est* 4, *& par consequent rationele. Or la rationele G étant* 8, *le rectangle CH sera* 64, *& le costé BH* $16-\sqrt{142\frac{2}{9}}$, *HI* 16, *& BI* $\sqrt{142\frac{2}{9}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naiſſent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des devant dites.

Soit la ligne mediale AB: ie dis que d'icelle naiſſent infinies lignes irrationeles toutes differentes des treize lignes devant dites.

Car ſi ſur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui ſoit rationele, & on acheve le rectangle AD, iceluy rectangle ſera irrationel par le corol. de la 39. prop. 10. & par la 11. def. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle eſt irrationele, ſoit icelle BE laquelle ſera differente de toutes les lignes devant dites. Car ſon quarré apliqué à une ligne rationele AC, fait l'autre côté AB medial: Ce que ne faiſoit pas une d[illegible]3. lignes devant dites. Item ſi on acomplit le rectangle DE, il ſera auſſi irrationel par le même coroll. & la ligne qui le peut, auſſi irrationele: & ſoit EF, laquelle ſera differente de toutes les lignes devant dites. Car le quarré de pas une d'icelles, apliqué à une ligne rationele, ne fait l'autre côté tel que BE: & procedant de cette façon, on trouvera infinies autres lignes irrationeles differentes entr'elles & des precedentes. Parquoy de la ligne mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.



SCHOLIE.

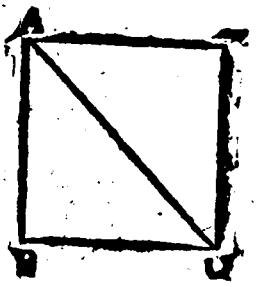
Si la mediale AB eſt VV2, & la rationele AC2, le rectangle AD ſera VV32, & la ligne BE qui peut iceluy ſera VVV32 : Ainſi le rectangle DE ſera VVV512, & la ligne EF qui peut iceluy ſera VVVV512, & ainſi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale eſt incommenſurable en longitude au côté.

Soit le quarré ABCD, duquel AC ſoit diagonale. Je dis qu'icelle diagonale AC eſt incommenſurable en longitude au côté AB.

Car par la 47. propoſition 1. le quarré de AC eſt double du quarré de AB : mais toute grandeur double d'une autre eſt comme deux à un, ou quatre à deux, ou huit à quatre, &c. Donc le quarré de AC eſt au quarré de AB, comme deux à un, ou quatre à deux, ou huit à quatre, &c. qui n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous avons demontré au corollaire de la 24. propoſition 8. & partant par la 9. propoſition 10. la diagonale AC, & le côté AB,



ſont incommenſurable en longit. Donc au q
ré, la diagonale eſt incommenſurable en long
de au côté. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Si AB coſté du quarré eſt 1, *la diagonale A*
ſera $\sqrt{2}$: *tellement que la raiſon du coſté au diame*
eſt comme 1 *à* $\sqrt{2}$, *c'eſt à dire incommenſurable e*
longitude.

Fin du dixiéme Element.



ELEMENT UNZIE'ME.

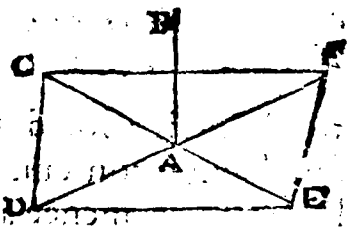
DEFINITIONS.

1. Solide, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur.

2. Mais les termes d'un ſolide, ſont ſuperficies.

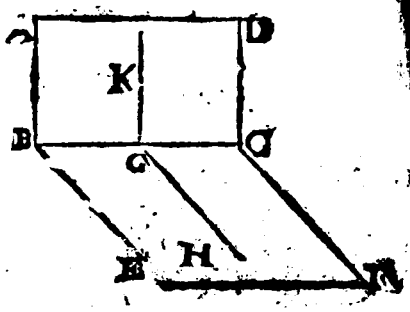
3. Une ligne droite eſt perpendiculairement eſlevée ſur un plan, quand toutes les lignes droites conſtituées ſur icelluy plan, & menées vers elle la rencontrent en angles droits.

Soit la ligne droite AB eſlevée au deſſus du plan CDEF, ſur lequel ſoient menées tant de lignes droites que l'on voudra CA, DA, EA, & FA, qui rencontrant en A ladite ligne AB faſſent les angles droits CAB, DAB, EAB & FAB: Nous dirons donc qu'icelle ligne AB eſt perpendiculaire, ou eſlevée à angles droits ſur ledit plan propoſé CDEF.



4. Un plan eſt élevé perpendiculairement ſur plan, quand les lignes menées ſur l'un d'iceux p pendiculairement à la ligne de commune ſecti ſont auſſi perpendiculaires à l'autre plan.

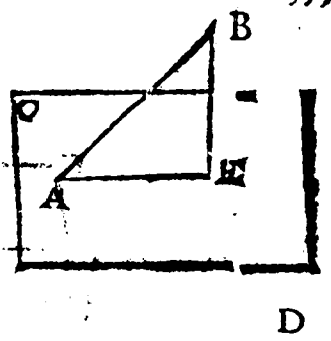
Soit le plan ABCD élevé ſur le plan BEFC, tellem que la ligne AD ſoit en l'air, & la ligne BC leur commu ſection : mais au plan EBFC, ſoit tirée la ligne droite G perpendiculaire à icelle commune ſection BC. Mainten ſi la même ligne GH eſt auſſi perpend. à l'autre plan ABCD, c'eſt à dire qu'ayant mené en iceluy du point G, quelque ligne droite, comme GK, l'angle HGK ſoit droit : iceluy plan ABCD ſera élevé perpendiculairement ou à angles droits ſur l'autre plan BCEF.



Partant lors qu'un plan eſt élevé à angles droits ſur quelqu autre plan, auſſi les lignes droites menées en l'un d'iceu à angles droits à leur commune ſection, ſeront perpendi culaires à l'autre plan ; tellement que ſi on dit que le pla ABCD, eſt élevé à angles droits ſur le plan BCEF, & qu'en celuy-là ſoient menées les lignes droites AB, KG DC perpendic. à la commune ſection BC, nous conclurons qu'icelles lignes ſont auſſi perpendic. à l'autre plan BCEF, & ſont les angles ABE, KGH, DCF droits.

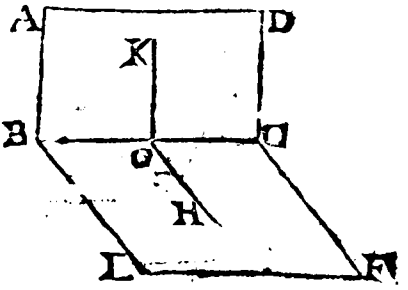
5. L'inclination d'une ligne droite à un plan, eſt l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droite menée au plan de l'inclinante, par le point auquel tombe une perpendiculaire tirée du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.

Soit la ligne droite AB inclinée au plan CD, & du point du ſommet B, ſoit menée BE perpendiculaire au même plan CD, & tirée AE : l'angle aigu B A E ſera l'inclination de ladite ligne AB au plan CD.



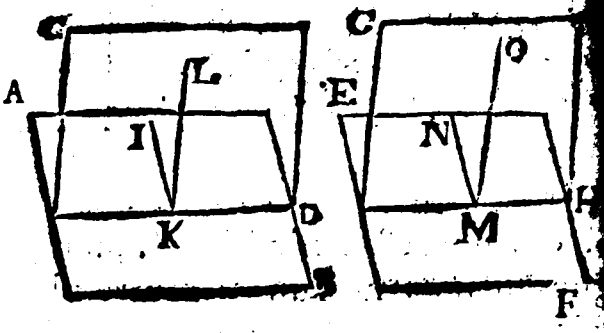
6. Un plan eſt incliné ſur un plan, quand les lignes menées ſur l'un & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers un même point d'icelle, ne ſont point perpendiculaires les unes aux autres: & l'inclination d'iceux plans, eſt l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

Soit le plan ABCD élevé au deſſus du plan BCFE, tellement que la ligne AD eſt en l'air, & BC leur commune ſection : mais de quelque point d'icelle comme G, ſoient menées GH au plan CE, & GK au plan AC, chacune perpendiculaire à ladite BC. Or ſi leſdites perpendiculaires GH & GK, ne ſont perpendiculaires entr'elles, c'eſt à dire que l'angle KGH ne ſoit droit, le plan ABCD ſera incliné au plan BCFE, & l'angle aigu KGH contenu ſous icelles perpendiculaires GH, GK ſera l'inclination d'iceux plans.



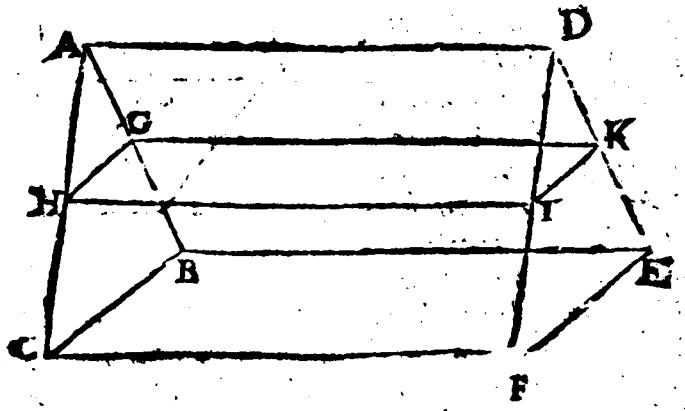
7. Un plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à un plan, & un autre à un autre, lors que les ſuſdits angles d'inclinations ſont egaux entr'eux.

Soient deux plans AB, CD, inclinez entr'eux, & des autres plans EF, GH, auſſi inclinez entr'eux; mais que l'angle d'inclination de ceux là, qui eſt IKL, ſoit egal à l'angle d'inclination de ceux-cy, qui eſt MNO: Le plan AB ſera ſemblablement incliné au plan CD, que le plan EF au plan GH, c'eſt à dire que l'inclination de ces deux plans là ſera ſemblable & egale à l'inclination de ces deux-cy.



8. Plans parallels, ſont ceux leſquels étans continuez ne ſe rencontrent point.

Comme ſi les deux plans ABC, DEF, étans prolongez de part & d'autre, ne ſe rencontrent point: iceux plans ſeront parallels entr'eux. Item les deux plans BCFE, GHIK

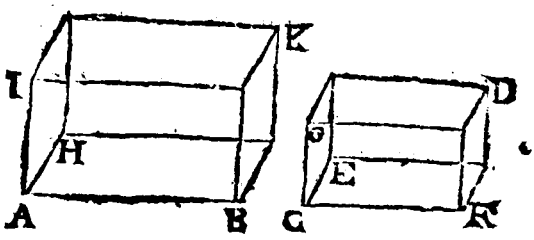


ne ſe pouvant jamais rencontrer étans prolongez, ſeront auſſi dits plans parallels, mais non pas les deux plans CHIF, BGKE, leſquels étans continuez ſe rencontrent en AD.

9. Sc

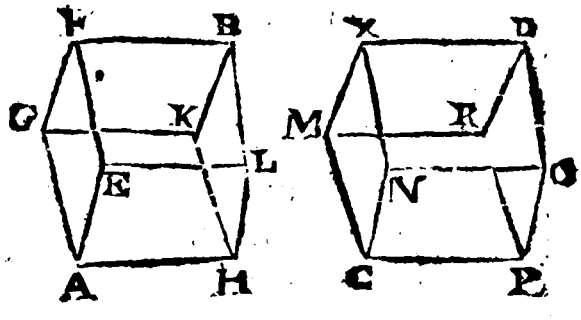
Solides ſemblables, ſont ceux qui ſont compris de plans ſemblables, egaux en nombre.

Comme les ſolides AK, & CD; chacun deſquels eſt contenu & environné de ſix plans ou ſuperficies ſemblables, ſeront dits ſolides ſemblables.



10. Solides egaux & ſemblables, ſont ceux qui ſont compris & environnez de ſemblables plans, egaux en nombre & grandeur.

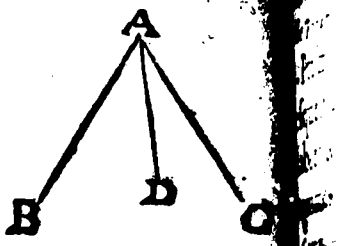
C'eſt à dire que ſi les plans ſemblables, qui ſuivant la precedente definition cõtiennent les corps ſemblables, ſont egaux chacun au ſien: tels ſolides ne ſeront pas ſeulement dits ſemblables, mais auſſi egaux: Comme chacun des corps AB, CD, étant contenu de ſix plans ſemblables & egaux, chacun à ſon correſpondant, ſeront dits corps ou ſolides egaux & ſemblables.



11. Angle ſolide, eſt l'inclination ou rencontre de plus de deux lignes, qui ſe touchans en un même point, ne ſont conſtituées ſur un même plan, *ou bien*, Angle ſolide, eſt ceſuy qui eſt contenu ſous plus de deux angles plans, qui ſe rencontrans à un même point ſont conſtituez ſur plans differens.

Nous avons dit au premier livre que quand deux lignes droites conſtituées à un meſme plan ſe rencontrent indire-

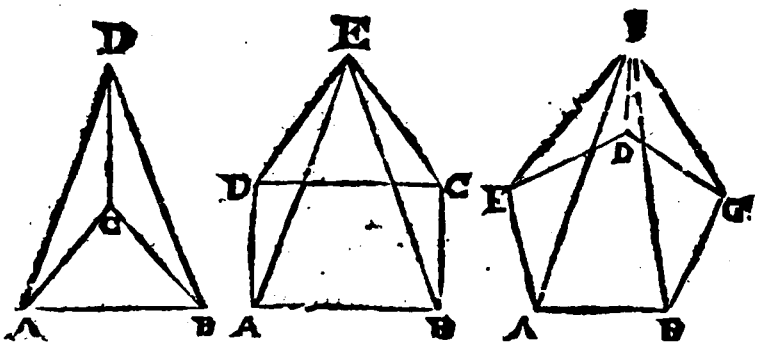
ctement à un point, elles font un angle plan, tel qu'eſt l'
gle BAC contenu des deux lignes AB, AC, conſtituées
un meſme plan: Mais s'il y interuient une troiſéme li
comme AD qui ne ſoit conſtituée au meſme plan, ains
le point D ſoit en l'air hors le plan
d'icelles, ſera fait au point A un
angle ſolide: Lequel eſt auſsi con-
ſtitué par les trois angles plans
BAC, BAD, & CAD, qui ſe ren-
contrent au meſme point A, & ſont
conſtituez ſur plans differens.



Mais eſt icy à noter que cette
def. ne comprend que les angles
ſolides qui ſont contenus ſous plus de deux lignes droites, o
plus de deux angles plans rectilignes: car elle ne compren
pas l'angle du cone, qui eſt contenu d'une ſeule ſuperfici
courbe; ny celuy fait de deux ſuperficies l'une plaine &
l'autre courbe, tel qu'eſt l'angle fait lors qu'un Cone eſt
coupé par le ſommet. Comme eſt auſsi à noter que les angles
ſolides contenus d'angles plans egaux en multitude & gran-
deur, ſont egaux entr'eux.

12. Pyramide, eſt un ſolide compris de pluſieurs plans, ſe rencontrans en un même point, & ayant un autre plan pour baſe.

Comme la figure ſolide ABCD conſtituée ſur le plan ABC
avec les trois autres plans ADB, ADC, & CDB, qui ſe

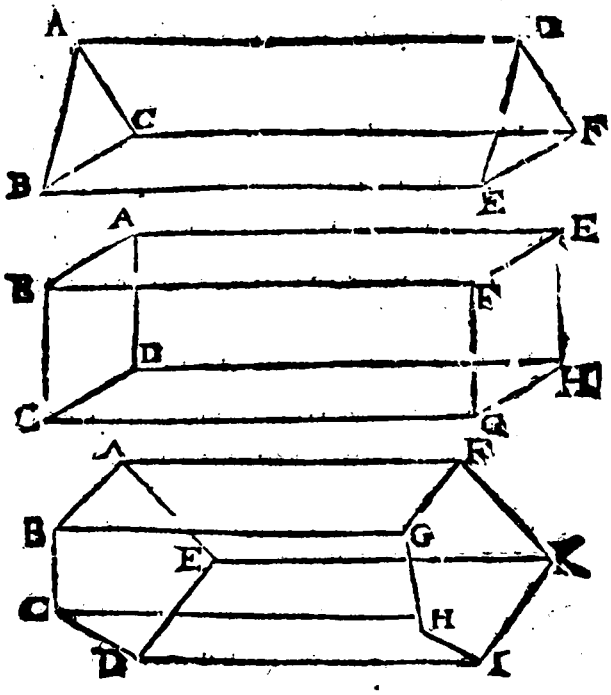


rencontrent & terminent au point D, eſt apelée Pyramide.
Comme auſsi la figure ſolide ABCDE conſtituée ſur la baſe
ABCD, les autres plans ſe rencontrans au ſommet E: Item

figure ſolide ABCDEF : Chacune deſquelles Pyramides prend ſa denomination ſelon la figure de ſa baſe : tellement que celle qui a un triangle pour baſe, comme la premiere des trois cy-deſſus, s'apelle Pyramide triangulaire : celle qui a un quadrangle comme la 2e ſe nomme Pyramide quadrangulaire : celle qui a un pentagone pour baſe, comme la 3e s'apelle Pyramide pentagonale, &c.

3. Priſme, eſt un ſolide compris de pluſieurs plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

Comme la figure ſolide ABCDEF s'apelle priſme, car elle eſt contenuë de deux triangles oppoſez ABC, DEF qui ſont egaux ſemblables & parallels, & de trois parallelogrammes BCFE, BADE, ACFD. Semblablement la figure ſolide ABCDHEFG, en laquelle les plans oppoſez, egaux, ſemblables & parallels ſont les quadrilateres ABCD, EFGH, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nõmée Priſme : Comme auſſi l'autre figure ſolide ABCDEKFGHC, dont 2. des plans qui la contiennent ſont oposés, egaux ſemblables & parallels, ſçavoir les pentagones ABCDE, FGHIK, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommée Priſme. Parquoy un priſme n'eſt autre choſe qu'une colomne



d'egale groſſeur qui a les baſes opposées egales, ſemblables & paralleles, ſoit qu'icelles baſes ſoient triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, &c. ainſi qu'il apert es figures cy-deſſus.

14. Sphere, eſt une figure contenuë de la ſuperficie décrite par un demy cercle, lors que ſon diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle eſt tourné jusques à ce qu'il revienne où il a commencé à mouvoir.

Encore que nous ayons ſuppleé quelque choſe en cette diffinition de la ſphere, ſi eſt-ce toutesfois que celle de Theodoze y est portée en noſtre Coſmographie ſoit plus claire & intelligible: & des deux nous en avons fait un autre, qui eſt au commencement de noſtre Geometrie practique, laquelle eſt telle qu'il enſuit,

La ſphere, eſt un corps compris d'une ſeule ſuperficie à laquelle toutes les lignes droites menées d'un ſeul point de ceux qui ſont au dedans d'iceluy corps ſont egales entr'elles: & icelle ſphere eſt décrite par un demy cercle tournant un tour ſur ſon diametre immobile.

15. L'axe de la ſphere, eſt iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

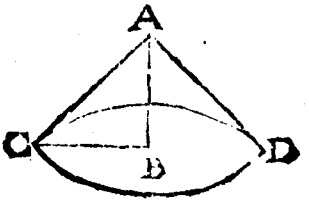
16. Le centre de la ſphere, eſt le même que celui du demy cercle.

17. Mais le diametre de la Sphere, eſt une ligne droite, laquelle paſſant par le centre d'icelle, eſt terminée à la ſuperficie de la ſphere.

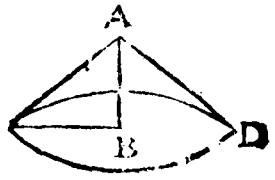
18. Cone, eſt un ſolide compris ſous deux ſuperficies décrites par un triangle rectangle, lors que l'un des côtez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, le triangle fait un tour à l'entour d'iceluy côté. Et ſi ledit côté immobile eſt egal à l'autre côté comprenant l'angle droit, le cone ſera rectangle: mais ſi plus petit; il ſera ambligone: & ſi plus grand; il ſera oxigone.

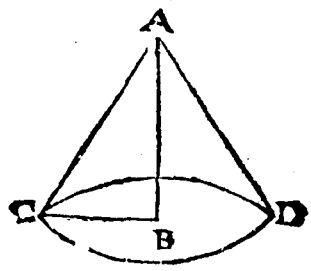
Soit le triangle ABC, dont l'angle B eſt droit, & le coſté AB

meurant fixe, soit imaginé ledit triangle ABC estre meu
entour dudit costé AB, jusques à ce qu'il ait fait une en-
ere revolution: alors sera décrite une figure solide conte-
ë sous deux superficies, l'une plane
circulaire décrite par le costé BC,
l'autre courbe & convexe décrite
ar le côté AC oposé à l'āgle droit: la-
uelle figure est apelée Cone par Eu-
lide & autres Geometres; mais plu-
eurs l'apellēt aussi Pyramide rōde.



Que si le côté immobile AB est egal
BC autre côté de l'angle droit, cōme
en la premiere figure, le Cone sera dit
Orthogonel ou rectangle, pource que
l'angle au sommet A sera droit cha-
cun des deux CAB & DAB, qui le
composent étant demy droit, à cause
que l'angle B est droit, & les côtés AB
& BC egaux. Mais si le costé immo-
bile AB est moindre que l'autre costé
de l'angle droit BC, comme en la 2. fi-
gure, le Cone décrit sera dit Ambli-





gone, pource que l'angle au sommet A sera obtus, attendu que chacun des angles egaux BAC, BAD, qui le composent est plus grand qu'un demy droit, l'angle ACB qui fait un droit avec BAC étant moindre qu'iceluy. Et finalement si le costé immobile AB est plus grand que l'autre costé BC, comme en la 3. figure, le Cone décrit sera apelé Oxigone, parce que l'angle au sommet A sera aigu, puis que l'angle ACB sera plus grād qu'un demy droit & chacun des angles BAC, BAD qui composent ledit angle A, moindre qu'un demy droit.

19. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

Comme en chacun des trois Cones décrits cy-dessus, l'axe est la ligne droitte immobile AB.

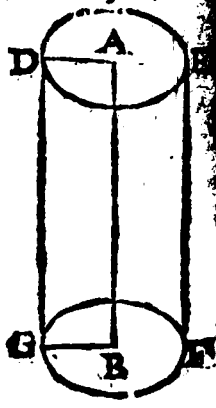
20. Mais la base du cone, est le cercle décrit par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne.

Comme és Cones cy-dessus, la base est le cercle décrit par le costé BC.

21. Cylindre, est un solide compris de trois superfi-

cies décrites par un parallelogramme rectan
lors que l'un des côtez demeurant immobile, le
rallelogramme fait un tour à l'entour d'iceluy cô

*Soit un parallelogramme rectangle ABCD, & le
ſté AB demeurant fixe & immobile ſoit conceu le
parallelogramme eſtre meu allentour dudit coſté A
iuſques à ce qu'il ſoit revenu au lieu où il a commencé de mouvoir : alors ſera décrite une figure ſolide CDEF contenuë ſous trois ſuperficies, c'eſt à ſçavoir deux planes & circulaires décrites par les côtez AD, BC, & l'autre courbe & convexe décrite par le coſté DC : laquelle figure CDEF eſt appellée Cylindre par Euclide & pluſieurs autres Geometres ; mais quelques-uns l'appellent Colomne ronde.*



22. L'aze du Cylindre, eſt icelle ligne mobile
l'entour de laquelle ſe meuſt le parallelogramme

Comme en la figure precedente la ligne droite AB qui eſt demeurée immobile eſt dite Axe du Cylindre CDEF.

23. Mais les baſes du Cylindre, ſont les cercles décrits par les deux coſtez oppoſez, meus allentour.

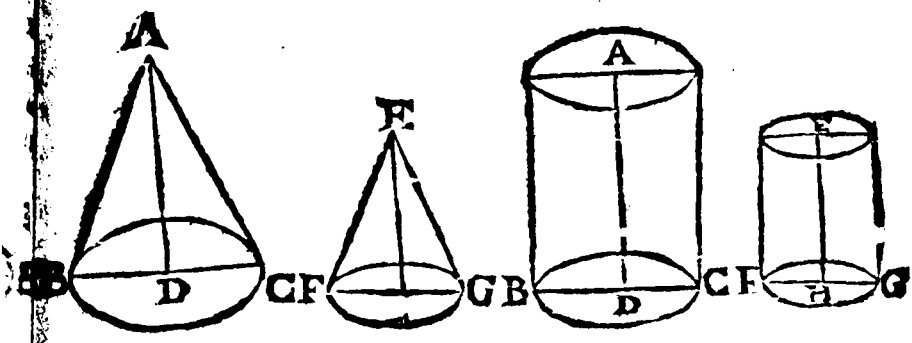
Ainſi en la figure cy-deſſus les cercles DE & CF décrits par les coſtez oppoſez AD, BC, ſeront les baſes du Cylindre CDEF.

24. Semblables Cones, & Cylindres, ſont ceux deſquels les axes & les diametres de leurs baſes ſont proportionaux.

Soient deux Cones ABC, EFG : Item deux Cylindres; & AD, EH ſoient leurs axes; & BC, FG les diametres des bazes. Or ſi l'axe AD eſt à l'axe EH, comme le diametre BC eſt au diametre FG ; tant les Cones, que les Cylindres ſeront ſemblables entr'eux.

Mais eſt icy à noter qu'en cette def. & autres preced. des Cones & des Cylindres, Euclide ne definit, & n'entend

rler cy apres que des Cones & Cylindres droits, c'eſt à ſçavoir de ceux dont l'axe eſt perpendiculaire & à angles



droits ſur la baze : mais Appolonius Pergeus, & Serenus en traitent univerſellement, c'eſt à ſçavoir tant des Ortogones, que des inclinez, ou ſcalenes.

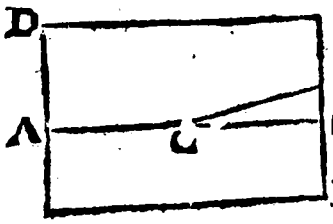
25. Cube eſt un ſolide cõpris de ſix quarrez egaux.
26. Tetraedre, eſt une figure ſolide compriſe de quatre triangles egaux, & equilateraux.
27. Octaedre, eſt un ſolide compris de huit triangles egaux, & equilateraux.
28. Dodecaedre, eſt un ſolide compris de douze pentagones egaux, equilateraux, & equiangles.
29. Icoſaedre, eſt un ſolide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.
30. Parallelipipede, eſt un ſolide compris de ſix quadrangles plans, deſquels les oppoſez ſont parallels.
31. Une figure ſolide, eſt dite inſcrite en une figure ſolide, lors que tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou és angles, ou és cõtez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.
32. Mais une figure ſolide, eſt dite circonſcrite à une figure ſolide, quand ou les angles, ou les cõtez, ou les plans de la figure circonſcrite touchent

tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle eſt décrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Une partie d'une ligne droite ne peut eſtre ſur un plan, & l'autre partie en l'air.

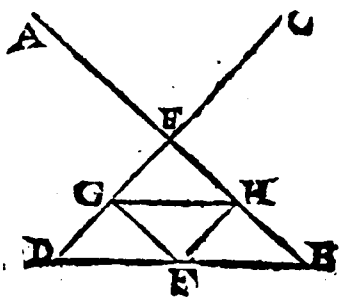
Car ſoit, s'il eſt poſſible, une partie de la ligne droite AB ſçavoir AC ſur le plan DE, & l'autre partie CB en l'air. Donc puis que AC eſt ligne droite poſée au plan DE, elle peut eſtre prolongée directement ſur iceluy plan, lequel prolongement ſoit CF, qui ſera autre que CB, icelle ayant eſté poſée en l'air, & hors dudit plan DE: Et partant les deux lignes droites ACB, ACF auront un commun ſegment AC; Ce qui ne peut eſtre par la 10. comm. ſent. Parquoy une partie d'une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droites ſe coupent l'une l'autre, elles ſeront ſur un même plan: & tout triangle eſt en un même plan.

Soient deux lignes droites AB & CD ſe coupans l'une l'autre au point E; & en EB, ED ſoient pris quelconques points B & D, & ſoit tirée la ligne droite ED, afin de faire le triangle FBD. Je dis que les deux lignes droites AB, CD, ſont conſtituées en un ſeul & meſme plan: Item, que le triangle EBD eſt pareillement en un meſme plan.



Car ſi quelque partie d'iceluy triangle EBD, comme FBEG eſtoit en un plan, & la partie reſtante FDG en un autre plan, auſſi BF, EG ſeroient en un plan, & les parties reſtantes FD, GD, en un autre plan, c'eſt à dire en l'air, contre la prec. prop. Par meſmes raiſons DEHF

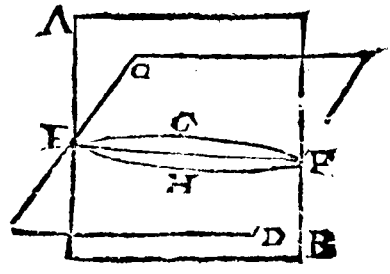
partie du meſme triangle BED, ne peut pas eſtre en un plan, & l'autre partie BHF en un autre plan : Ny auſſi la partie DGHB ne peut pas eſtre en un autre plan que la partie reſtante GHE : car il arriveroit toûjours la meſme abſurdité que deſſus, ſçavoir eſt que partie d'une ligne droite ſeroit en un plan, & l'autre partie en l'air contre ce qui a eſté demontré à la prec. prop. Partant tout le triangle EBD eſt en un ſeul & meſme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, ſont en un meſme plan, il s'enſuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD ſont auſſi en un meſme plan ; ſçavoir eſt en celuy auquel nous avons demontré eſtre le triangle EBD. Parquoy ſi deux lignes droites ſe coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans ſe coupent l'un l'autre, leur commune ſection ſera une ligne droite.

Soient deux plans ſe coupans l'un l'autre AB & CD, & leur commune ſection, ſoit la ligne EF. Je dis que icelle commune ſection EF eſt une ligne droite.

Car ſi elle n'eſt telle, des points extrémes E & F, qui ſont communs à tous les deux plans on pourra tirer ſur chacun d'iceux plans une ligne droite qui ſera autre qu'icelle cõmune ſectiõ EF : ſoit dõc menée au plan AB une ligne droite EGF, & au plan CD la ligne droite EHF. Donc puiſque ces deux lignes droites EGF, EHF ont meſmes termes E & F, elles encloront un eſpace : ce qui eſt abſurde. Donc la commune ſection EF ſera ligne droite. Parquoy ſi deux plans, &c. Ce qu'il faloit prouver.



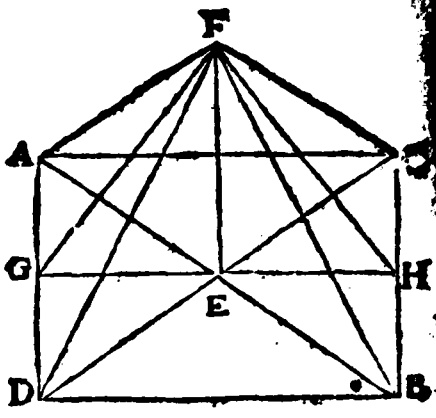
THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droites ſe coupent l'une l'autre, & au point de leur commune ſection on éleve perpendiculairement une autre ligne droite, elle ſera auſſi élevée perpendiculairement ſur le plan d'icelles.

Soient deux lignes droites AB & CD, ſe coupans l'une l'au-

tie au point E, & d'iceluy point de ſection E, ſoit élevée perpendiculaire à chacune d'icelles AB, CD : je dis qu'elle auſſi perpendiculaire à leur plan.

Car ſoient poſées egales les lignes droites AE, EB, & CE ED ; puis ſoient tirées les lignes droites AD, BC ; & par point E ſoit menée quelconque ligne droite GH coupant les gnes AD, BC, és points G & H : Item du point en l'air ſoient tirées les lignes droites FA, FG, FD, FB, FH & F



D'autant que les coſtez EA, ED du triangle AED, ſont egaux aux coſtez EB, EC du triangle BEC, chacun au ſien, & les angles AED, BEC contenus par iceux coſtez auſſi egaux par la 15. pr. 1. les baſes AD, BC ſeront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH ſont egaux par la 15. pr. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE ſeront egaux aux deux angles BEH, EBH, du triangle BHE, & le coſté AE eſt egal au coſté EE : donc par la 26. prop. 1. les deux coſtez AG, GE, ſeront egaux aux deux coſtez BH, HE, Et puis que les deux coſtez FE, EA du triangle FEA ſont egaux aux coſtez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, ſçavoir droits par l'hypotheſe, par la 4. prop. 1. les bazes FA, FB ſeront egales. Par meſme raiſon ſeront auſſi egales les lignes FD, FC. Davantage, veu que les coſtez FA, AD du triangle FAD, ſont egaux aux coſtez FB, BC du triangle FBC, & la baſe FC egale à la baſe FD, par la 8. pr. 1. les angles FAD, FBC ſeront auſſi egaux : Parquoy les coſtez FA, AG du triangle FAG, eſtans egaux aux coſtez FB, BH, du triangle FBH, les baſes FG, FH, ſeront pareillement egales par la 4. prop. 1. Et finalement, puis que les coſtez FE, EG, du triangle FEG, ſont egaux aux coſtez EF, EH du triangle FEH, & les baſes FG, FH auſſi egales, les angles FEG, FEH ſeront pareillement egaux par la 8. pr. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droite FE ſera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & conſtituée au meſme

plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 11.

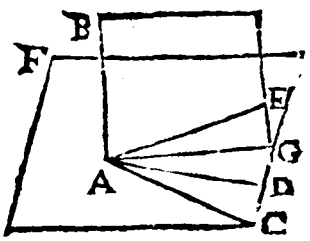
On pourra ſemblablement mener tant de lignes droites qu'on voudra ſur le meſme plan, leſquelles rencontrant la perpendiculaire FE en E, y feront angles droits, par les meſmes raiſons que deſſus : & par la 2. def. 11. icelle FE ſera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droites ſe coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite rencontre en un point perpendiculairement trois autres lignes droites, icelles trois lignes droites ſeront en un meſme plan.

Soit la ligne droite AB perpendiculaire à trois autres lignes droites AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, ſont ſur un meſme plan.

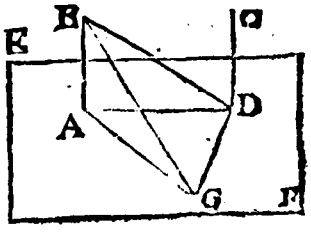
Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles ſoient ſont en un meſme plan par la 2. prop. 11. ſoient AC, AD, au plan FC : Si donc on dit que AE n'eſt point ſur le meſme plan FC, mais qu'elle eſt élevée en l'air, elle pourra eſtre au meſme plan que AB par la 2. prop. 11. & ſoient toutes deux au plan BE. Ainſi FC, & BE ſont deux plans differens, leſquels ſe touchans au point A, ne ſont pas parallels, partãt eſtans continuez tant qu'il ſera de beſoin ils ſe couperont, & leur commune ſection ſera une ligne droite par la 3. prop. 11. ſoit la ligne AG, laquelle par ce moyen ſera au meſme plan que AC ; & partant par la 4. d. 11. BA, & GA ſe rencontreront en angles droits : mais par l'hypotheſe AB & AE ſe rencontrent auſſi en angles droits : par ainſi les angles BAE, BAG eſtans au plan BG tiré par les lignes BA : AG, ſeroient egaux, la partie au tout : ce qui eſt impoſſible, Donc AE n'étoit pas élevée en l'air, ains eſtoit au meſme plan que AC & AD, Parquoy ſi une ligne droite rencontre en un point, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



THEOR 6. PROP. VI.

Si deux lignes droites ſont élevées perpendiculairement ſur un même plan, elles ſeront paralleles.

Soient deux lignes droites AB, CD élevées perpendiculairement ſur un meſme plan EF, & aux points A & D. Je dis que icelles AB, CD, ſont paralleles entr'elles.



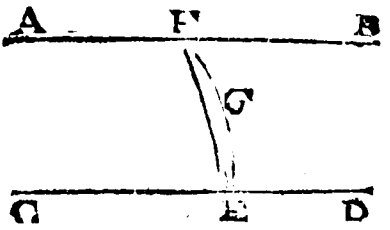
Car des ſuſdits points A & D du plan EF, ſoit menée la ligne droite AD, & du point D la ligne droite DG perpendiculaire à icelle AD par la 11. prop. 1. puis ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menées les lignes BD, DG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux coſtez AB, DG, egaux, & AD commun, & l'angle BAD egal à l'angle GDA (car cettuy-là eſt droit par la 3. def. 11. & celuy-cy eſt auſſi droit par la conſtruction) par la 4. prop. 1. la baſe BD ſera egale à la baſe AG. item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux coſtez AB, AG egaux aux deux coſtez DG, BD, chacun au ſien, & la baſe BG commune, par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG, ſeront egaux. Mais l'angle BAG eſt droit par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droit; & partant la ligne DG eſt perpendiculaire à BD. Mais elle eſt auſſi perpendiculaire à chacune d'icelles AD, CD par la 3. def. 11. Parquoy GD touche perpendiculairement en un point D, les trois lignes DA, DB, DC; & partant par la 5. prop. 11. icelles trois lignes ſeront en un meſme plan, c'eſt à dire que CD ſera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. prop. 11. les trois lignes AB, BD, AD qui conſtituent le triangle ABD ſont en un meſme plan: partant AB & CD ſeront auſſi en un meſme plan. Mais par la 3. def. 11. elles font les deux angles BAD, CDA droits: donc par la 28. prop. 1. icelles lignes AB, DC ſont paralleles entr'elles. Parquoy ſi deux lignes droites ſont élevées, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droites ſont paralleles, & de l'une

à l'autre on mene une ligne droite, elle ſera au même plan des lignes paralleles.

Soient deux lignes droites paralleles AB & CD de l'une à l'autre ſoit menée la ligne droite EF. Je dis qu'icelle ligne EF eſt au meſme plan des lignes paralleles AB & CD.



Car ſi elle n'eſt au meſme plan, ains en un autre : que celuy-cy coupe cettuy-là és points E & F, & la commune ſection d'iceux plans ſoit EGF, laquelle ſera ligne droite par la 3. prop. 11. donc les deux lignes droites EF, EGF, ayans meſmes termes E & F, enfermeront un eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droite EF n'eſt pas en un autre plan que celuy auquel ſont les paralleles AB, CD. Parquoy ſi deux lignes droites ſont paralleles, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

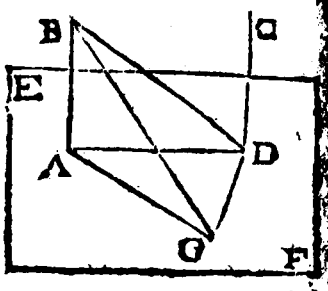
Cette même propoſition eſt auſſi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne ſoient paralleles, pourveu qu'elles ſoient en un même plan, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droites paralleles, deſquelles l'une ſoit à angles droits à quelque plan : auſſi l'autre ſera à angles droits ſur le même plan.

Soient deux lignes droites paralleles AB & CD, & que l'une d'icelles AB ſoit élevée perpendiculairement ſur le plan EF. Je dis que l'autre CD eſt auſſi élevée perpendiculairement ſur le meſme plan EF. Car eſtant menée au plan EF la ligne droite l'angle BAD ſera droit par la 3. def. 11. Mais les deux lignes AB, CD eſtans paralleles, les deux angles BAD, CDA ſont egaux à deux droits par la 29. prop. 1. donc l'angle CDA ſera droit. Maintenant au meſme plan EF ſoit menée DG perpendiculaire à AD, & ayant poſé icelle DG egale à AB,

soient menées les lignes AG, BG, BD. D'autant que les cos BA, AD du triangle ABD sont egaux aux costez GD, DA du triangle ADG, chacun au sien, & les angles BAD, ADG contenus d'iceux costez aussi egaux, estans droits; les bazes BD, AG seront egales par la 4. prop. 1. Item, les costez BA, AG du triangle GBA estans egaux aux costez GD, DB du triangle BDG, & la baze BG commune à tous les deux triangles; les angles BDG, BAG contenus desdits costez seront egaux par la 8. prop. 1. Mais BAG est droit par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droit. Parquoy GD sera perpendiculaire à chacune d'icelles AD, BD, lesquelles faisant angle à D s'y entrecouperont estans prolongées: & par la 4. prop. 11. icelle GD sera élevée perpendiculairement au plan mené par les lignes AD & BD: mais par la precedente prop. icelles deux lignes BD & AD sont au même plan des paralleles AB & CD: donc GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD: partant l'angle CDG sera droit. Mais nous avons demontré que l'angle ADC est aussi droit: donc par la 4. proposition 11. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Par quoy s'il y a deux lignes droites paralleles, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



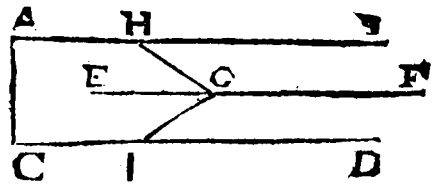
THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droites paralleles à une même, lesquelles ne sont en un même plan qu'icelle sont aussi paralleles entr'elles.

Soient les lignes droites AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en un mesme plan qu'icelle. Je dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirées à icelle EF deux perpendiculaires, sçavoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'au-

ant que EF eſt perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G; elle le ſera auſſi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, ſont paralleles; & EF eſt perpẽdiculaire au plan mené par GH, GI : auſſi



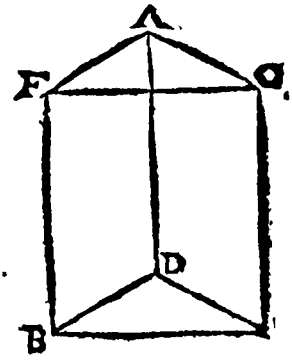
AB ſera perpendiculaire au meſme plan par la 8. prop. 11. Par meſme raiſon CD ſera perpendiculaire au plan paſſant par GH, GI : & partant par la 6. prop. 11. AB, CD eſtans perpendiculaires à un meſme plan, ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droites s'entretouchans, ſont paralleles à deux autres lignes droites s'entretouchans, & ne ſont en un même plan, elles comprendront angles egaux.

Soient deux lignes droites AB & AC s'entretouchans en A, leſquelles ſoient paralleles à deux autres lignes droites DE & & DF ſe touchans l'une l'autre en D : & AB, AC ne ſoient au meſme plan que DE, DF. Je dis que les angles BAC, EDF, compris par icelles ſont egaux.

Car eſtans priſes egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF, ſoient menées les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Donc AB & DE eſtans egales & paralleles, AD & BE ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par meſme raiſon AD & CF ſeront auſſi egales & paralleles: & partant par la prec. prop. BE & CF ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles : & par la 33. prop. 1. BC & EF ſeront pareillement egales & paralleles entr'elles. Parquoy les deux

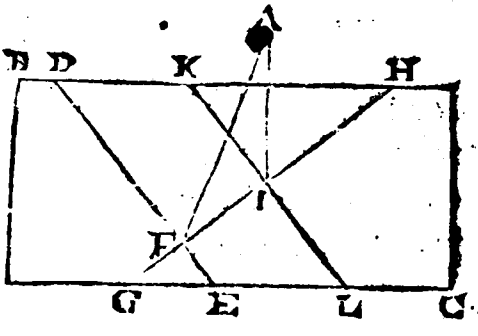


triangles ABC & DEF auront les trois costez egaux aux t costez chacun au sien, & par la 8. prop. 1. les angles BAC, EL seront egaux. Si donc deux lignes droites, &c. Ce qu'il fal demontrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'un point donné en l'air, mener une ligne droit perpendiculaire sur le plan qui est au dessou d'iceluy point.

Soit le point A en l'air, duquel il faut tirer une perpendicu laire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy point A. Au pla BC, soit menée comme on voudra la ligne DE : à laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. pr. 1. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. p. 1. Et a icelle GH soit tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. pr. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.



Car au plan BC, soit tirée par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. Donc puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH, par la construction : & partant aussi perpendiculaire au plan tiré par icelles FA, FH par la 4. prop. 11. pareillement KI sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en un mesme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droit par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendic. au plan où sont les lignes KI, IF, sçavoir au plan BC. Nous avons donc d'un point donné en l'air abaissé une perpendiculaire au plan d'au dessous d'iceluy point : Ce qu'il faloit faire.

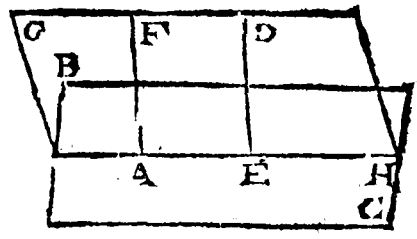
PROBL. 2. PROP. XII.

A un plan donné, & d'un point donné en iceluy, élever

élever une ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le point donné en iceluy soit A: il faut d'iceluy point A élever une ligne perpendiculaire audit plan BC.

Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menée sur le plan BC, la perpendiculaire DE par la preced. pr. laquelle rencontrant le plan BC au point A, on aura fait ce qui étoit requis: Mais si elle ne rencontre iceluy point A, ains quelqu'autre point E, dudit point A soit menée AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. Je dis qu'icelle AF sera perpendiculaire au plan BC. Car DE, AF étans paralleles, & DE perpendic. au plan BC par la construction, par la 8. pr. 11. AF sera aussi perpendiculairement élevée sur le mesme plan BC. Parquoy à un plan donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

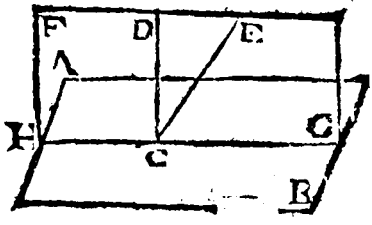


THEOR. 11. PROP. XIII.

D'un plan donné, & d'un même point d'iceluy, on ne levera pas en l'air d'un même costé, deux lignes droites perpendiculaires.

Soit donné le plan AB, & le point en iceluy C: Je dis que du point C, on n'élevera pas en l'air deux lignes droites perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.

Car, s'il est possible, du point C, soient élevées en l'air les deux perpendiculaires CD & CE: par la 2. p. 11. elles seront en un mesme plan, & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB au point C, n'est point parallele à iceluy AB: partant iceux plans étans continuez se couperont, & leur commune section sera une ligne droite, laquel-

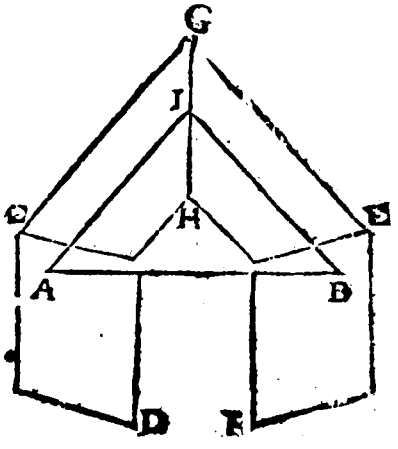


le soit CCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seront droits, & partant egaux : la partie au tout : ce qui est impossible. Il ne se peut donc élever du point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si une ligne droite est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallels.

Soit la ligne droite AB perpendiculaire à chacun des plans CD, & EF : je dis qu'iceux plans sont parallels entr'eux.



Car s'ils ne sont parallels, étans continuez ils se rencontreront : que ce soit donc de la part de C, E, & que GH soit la ligne de leur commune section, en laquelle soit pris comme on voudra le point I, & d'iceluy soient menées les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB est posée perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, seront droits, contre la 17. pr. 1. donc les deux plans CD, EF prolongez ne se rencontreront point ; & partant ils sont parallels. Si donc une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit prouver.

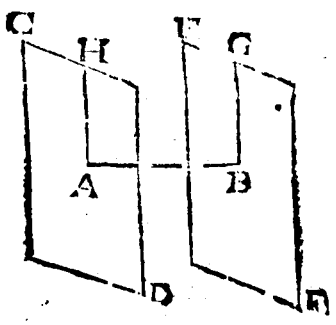
SCHOLIE.

Commandin demontre la converse de cette prop. qui est telle.

S'il y a deux plans parallels, la ligne droite qui est perpendiculaire à l'un d'iceux, sera aussi perpendiculaire à l'autre.

Soient deux plans parallels, CD, EF, & la ligne droite

AB soit perpendiculaire au plan CD : Ie dis qu'icelle AB eſt auſsi perpendiculaire au plan EF : car ſi elle n'eſt perpendiculaire ſoit tirée audit plan EF, la ligne droite BG de la part que AB fait l'angle moindre qu'un droit, & par AB, BG ſoit mené un autre plan, duquel & du plan CD la commune ſection ſoit la ligne droite AH. Et d'autant que l'angle ABG eſt aigu, les plans étans prolongez, les lignes droites BG, AH ſe rencontreront, & partant auſsi les plans, leſquels ont eſté poſez paralleles : ce qui eſt abſurde. Donc AB eſt perpendiculaire au plan EF. Ce qu'il fallait prouver.



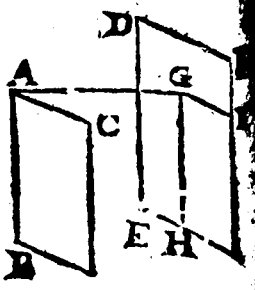
THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droites s'entretouchans ſont paralleles à deux autres lignes droites s'entretouchans, n'étans toutesfois en un même plan : les plans paſſans par icelles, ſeront auſſi parallels.

Soient deux lignes droites AB & AC. s'entretouchans en A, paralleles à deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne ſoient en un meſme plan qu'icelles. Je dis que le plan BC mené par icelles AB, AC eſt parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

Car par la 11. propoſition 11. de A ſoit tirée ſur le plan EF la perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF en G : puis par la 31. propoſition 1. audit plan EF, ſoient tirées de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH ſont paralleles à DE, icelles AB, GH ſeront paralleles entr'elles par la 9. propoſition 11 & partant par la 29. propoſition 1. les angles BAG, AGH ſont egaux à deux droits. Mais AGH eſt droit, par la 3. def. 11. Donc BAG ſera auſſi droit. Par même raiſon on prouvera l'angle CAG eſtre droit. Parquoy, veu que la ligne GA eſt perpen-

diculaire aux deux AB, AC; par la 4. propoſition 11. elle ſera auſſi perpendiculaire à leur plan BC : Mais par la conſtruction elle l'eſt auſſi au plan EF. Donc par la precedente propoſition les plans BC, EF ſeront parallels. Parquoy ſi deux lignes droites s'entretouchans, &c. Ce qu'il faloit démontrer.

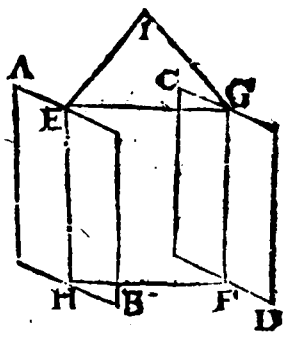


THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels ſont coupez par un autre plan; les lignes de communes ſections ſeront paralleles.

Soient deux plans parallels AB & CD, coupez par le plan EF, & les communes ſections d'iceux ſoient EH, GF. Je dis qu'elles HE & FG ſont paralleles entr'elles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, étans prolongées elles ſe rencontreront au plan coupant EF: Que ce ſoit donc au point I. Or d'autant que toute la ligne droite HEI eſt en un meſme plan, ſçavoir en AB prolongé; & auſſi toute la ligne droite FGI en un meſme plan, ſçavoir en CD prolongé; les plans AB, CD étans prolongez ſe rencontreront auſſi en I : ce qui eſt abſurde, ayans été poſez parallels. Donc HE, FG étans continuées ne ſe rencontrent point; & partant ſont paralleles entr'elles. Parquoy, Si deux plans parallels ſont coupez &c. Ce qu'il faloit demontrer.



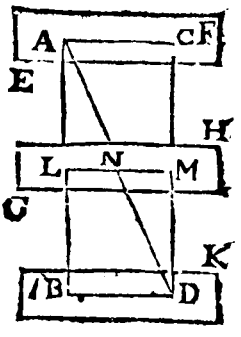
THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droites ſont coupées par des plans

parallels, elles seront coupées proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, traversans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont coupées par iceux plans és points A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont coupées proportionnellement, c'est à dire que les segmens d'icelles compris entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

Car és plans EF, IK, soient menées les lignes droites AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au point N, duquel soient menées les lignes LN, NM, au mesme plan GH : & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. sera en un mesme plan: semblablement le triangle ADC aussi en un mesme plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK sont coupez par le plan du triangle ABD, leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la prec. prop. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droites sont coupées par des plans parallels, &c. Ce qui estoit à prouver.



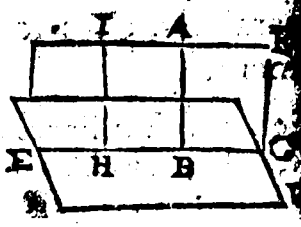
THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite est élevée perpendiculairement sur un plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Je dis que tous les plans menez de la ligne AB, vers quelle part on voudra, seront élevez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

Car par AB soit tiré le plan EF, coupant le plan CD par la ligne droite EG : & en icelle soit pris quelconque point H, duquel au plan EF soit menée HI

parallele à AB, par la 31. prop. I. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posée perpendiculaire au plan CD; aussi IH sera perpendiculaire au mesme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant aussi perpendiculaire à la commune section EG, par la 3. d. 11. P... mesme discours toutes autres lignes qui seront tirées au pl... EF, paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au pl... CD; & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 4. d... 11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesm... raison seront demontriez tous autres plans tirez par la ligne A... estre perpend. au plan CD. Si donc une ligne droite est élevé... perpendiculairement sur un plan, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

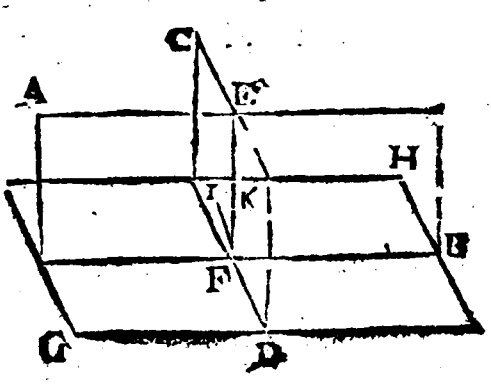


THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans élevez perpendiculairement sur un autre plan s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur icelluy plan.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD, élevez perpendiculairement sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section EF: je dis qu'icelle EF est perpendiculaire au mesme plan GH.

Car, ou EF est perpendic. à BF, DF, communes sections des plans AB, CD avec ledit plan GH, ou non. Que si elle leur est perpend. par la 4. p. 11. elle le sera aussi audit plan GH, mené par icelles BF, DF. Mais si on dit que EF est seulement perpendiculaire à l'une ou l'autre desdites sections BF, DF; qu'elle le soit à BF. Donc puis que le plan AB est perpendiculaire au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne EF (qui au plan AB est menée perpend. à BF, commune section d'iceluy avec le plan GH) sera per-

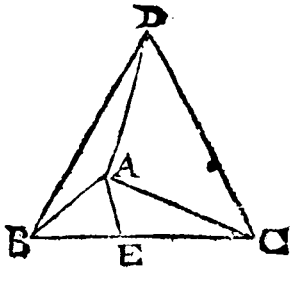


pendiculaire au plan GH. L'on conclura le meſme ſi ladite EF eſt concedée perpendiculaire à la ſection DF : car alors icelle EF ſera perpend. au plan GH par ladite 4. definition, puis qu'elle eſt poſée perpendicul. à DF commune ſection du plan CD avec le plan GH, & menée audit plan CD qui eſt perpendic. à iceluy plan GH. Finalement, ſi on croit EF n'eſtre perpendic. à l'une ny l'autre d'icelles communes ſections BF, DF, du point F ſoit menée au plan AB la ligne FI perpend. à BF par la 11. p. 1. & au plan CD, la ligne FK perpendiculaire à la ſection DF. Donc puis que le plan AB eſt perpend. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne FI (laquelle eſt perpendiculaire à DF commune ſection d'iceux plans AB, GH) ſera auſsi perpendic. à iceluy plan GH. Par meſme raiſon FK ſera encore perpend. au meſme plan GH. Par ainſi FI, FK ſeront d'un meſme point F donné au plan GH élevées perpendiculairement ſur iceluy plan : Ce qui eſt contre la 13. pr. 11. Parquoy EF ſera perpendiculaire au plan GH. Si donc deux plans élevez perpendicul. &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si un angle ſolide eſt compris de trois angles plans, deux d'iceux pris comme on voudra, ſont plus grands que le troiſiéme.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Je dis que deux d'iceux leſquels on voudra, comme BAD & DAC ſont plus grands enſemble que le troiſiéme BAC.



Car ſi on dit que BAC eſt plus grand que les deux autres : au plan tiré par AB, AC, ſoit fait l'angle BAE egal à l'angle DAB par la 23. prop. 1. & la ligne AE egale à la ligne AD : puis au meſme plan ſoit menée par E la ligne droite BC, coupant les lignes AB, AC, en B & C : & tirées les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux coſtez AB & AD du triangle ABD ſont egaux aux deux coſtez AB & AE du triangle ABE, chacun au ſien, & les

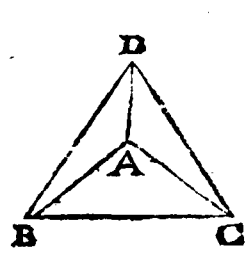
angles contenus d'iceux coſtez auſsi egaux; la baſe DB ſ
egale à la baſe BE, par la 4. prop. 1. Item puis que l'on p
l'angle BAC plus grand que les deux autres BAD, CAD
que le retranché BAE eſt egal à l'un d'iceux BAD, le re
CAE ſera plus grand que l'autre CAD: mais les deux c
ſtez EA & AC du triangle ACE, ſont egaux aux deux coſt
AD & AC du triangle CAD, & l'angle CAE eſt plus gra
que l'angle DAC: & partant par la 24. p. 1. la baſe EC ſe
plus grande que la baſe DC: adjoûtant donc les egales EB
DB, les deux CE, EB, c'eſt à dire la toute BC, ſera tousjou
plus grande que les deux CD, DB: & partant au triangle AB
le coſté BC eſt plus grand que les deux autres: ce qui eſt con
tre la 20. pr. 1. Donc l'angle BAC n'eſt point plus grand qu
les deux autres BAD, CAD. Que ſi on dit qu'il eſt egal, i
s'enſuivra par le meſme diſcours que BC eſt egal à BD & CD
ce qui contrevient toûjours à la 20. pr. 1. Il eſt donc plus peti
que les deux autres. Parquoy ſi un angle ſolide eſt compris de
trois angles plans, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle ſolide, ſont plus petits que quatre angles droits.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans C A B, BA D, D AC. Ie dis qu'iceux trois angles plans ſont plus petits que quatre angles droits.

Car eſtans tirées les trois lignes droites BC, C D, B D, ſeront conſtituez trois angles ſolides B, C, D, deſquels chacun eſt contenu ſous trois angles plans, ſçavoir B, ſous A B C, ABD, CB D: & C ſous ACB, AC D, BC D: & D ſous A D B, A D C, B D C. Et d'autant que par la 20. pr. 11. de chacun d'iceux angles ſolides, deux angles plans leſquels on voudra ſont plus grands que le troiſiéme, les deux angles ABC, ABD, ſeront plus grands que le troiſiéme BC; & les deux ACB, AC D, ſeront plus grands que le troiſiéme B C D:



Item les deux C D A, & B D A, ſont plus grands que B D C: &

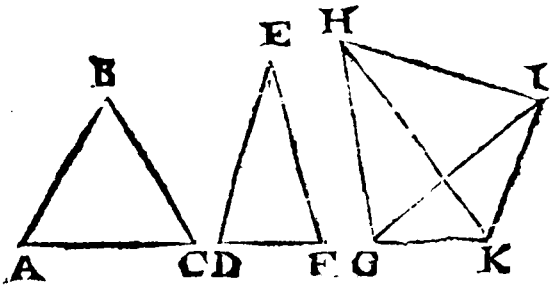
partant les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droits: (car iceux trois angles valent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux six angles avec les trois qui font l'angle solide A, valent six droits, par la 32. prop. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) si on oste ces six-là, qui sont plus grands que deux droits; les trois qui font l'angle solide A, demeureront plus petits que quatre droits. Parquoy tous les angles plans, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droites comprenant iceux, egales; il se peut faire que des lignes droites qui conjoignent icelles egales, soit constitué un triangle.

Soient trois angles plans ABC, DEF, GHK contenus de lignes droites egales BA, BC, ED, EF, HG & HK: deux desquels pris comme on voudra sont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droites AC, DF, GK, qui conjoignent icelles lignes egales, peut estre constitué un triangle, c'est à dire que deux d'icelles lignes AC, DF, GK de quelque façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisiéme.

Car premierement, si les trois angles B, E, H sont egaux, puis que les lignes qui les contiennent sont egales, par la 4. pr. 1. les bases AC, DF, GK seront egales: & partant deux d'icelles lesquelles on voudra seront ensemble plus grandes que la troisiéme. Mais si lesdits angles proposez sont egaux, puis que deux d'iceux pris comme on voudra sont plus

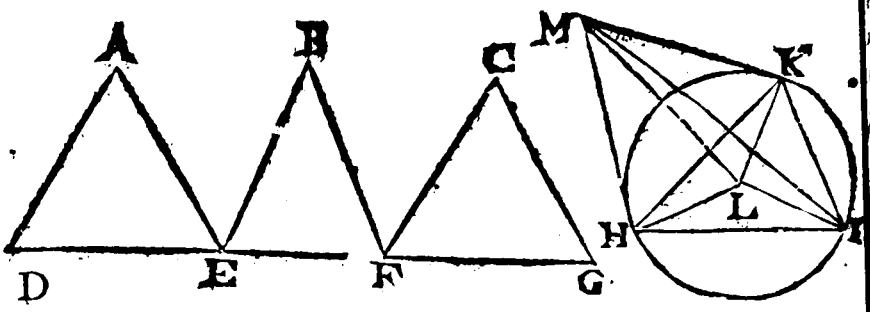


grands que le troiſiéme, ſi on en met deux enſemble tels q
voudra, comme ſi à G K on adjoûte KHL egal à E p
23. pr. 1. & ayant fait HL egale à EF on tire I K & GL : l
gle total GHL ſera plus grand que le troiſiéme ABC, & la
ſe GL par la 24. pr. 1. ſera plus grande que la baſe AC : (
les deux coſtez ſont egaux aux deux coſtez) & à plus fo
raiſonles deux GK, KL, qui par la 20. pr. 1. ſont plus gran
qu'icelle GL, ſeront plus grandes que la troiſiéme AC.
par meſme diſcours on monrrera tousjours que deux d'icel
baſes AC, DF, GK priſes comme on voudra, ſont plus gran
que la troiſiéme : Partant d'icelles on pourra faire un triang
par la 22. prop. 1. S'il y a donc trois angles plans, &c. Ce q
eſtoit à demontrer.

PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire un angle ſolide de trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſont plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles ſoient moindres que quatre droits.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que quatre droits, & deſquels deux quels qu'ils ſoient ſont plus grands que l'autre,



Il faut faire un angle ſolide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.

Soient poſées egales les ſix lignes droites AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles propoſez, leſquels ſoient ſouſtenus des trois baſes DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire un triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, ſoit fait le triangle HIK, ayant les 3 côtez egaux à icelles

baſes DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel ſoit circonſcrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L ſoient menées les trois lignes LH, LI, LK : & apres avoir par la 12 prop. 11. élevé en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. ſoit icelle retranchée en ſorte, que ſon quarré avec le quarré de LH, ſoit egal au quarré de l'un des coſtez d'iceux angles plans: puis ſoient menées les lignes HM, IM, KM, Ie dis que HIMK eſt un angle ſolide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK eſtans egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM, IM, KM, ſeront egales, d'autant qu'elles peuvent autant l'une comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuvent autant que l'un des coſtez des angles plans donnez, elles ſeront egales aux coſtez d'iceux angles plans : puis les trois baſes HI, IK, KH eſtans egales aux baſes des angles donnez par la 8. prop. 1. les trois angles plans faiſant l'angle ſolide au point M, ſeront egaux aux trois donnez A, B, C. Nous avons donc fait un angle ſolide de trois angles plans, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

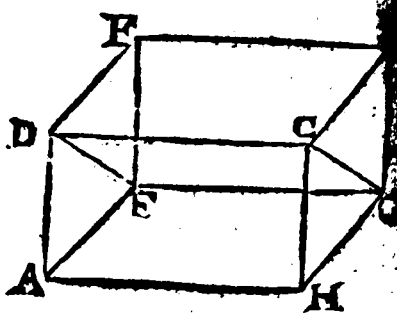
Si quelqu'un objectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas touſiours eſtre retranchée, en ſorte que ſon quarré avec le quarré de LH ſoit egal au quarré de l'un des coſtés des angles donnez : comme par exemple, ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arrive iamais, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à HL : Car ſi HL & IL eſtoient egaux à AD & AE : & la baſe HI egale à la baſe DE, par la 8. p. 1. (& ainſi des 2. autres triangles) les trois angles au point L ſeroient egaux aux trois angles A, B, C, chacun au ſien : ce qui eſt evidemment faux : Car touſiours par hypotheſe les trois angles A, B, C, ſont plus petits que quatre droits ; & par le corol. de la 15. p. 1. les trois au point L ſont egaux à quatre droits.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si un ſolide eſt compris de plans parallels ; les plans oppoſez d'iceluy ſeront parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Soit le ſolide AB compris de ſix plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB : Ie dis que les plans oppoſez ſont paralelogrammes ſemblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB ſont paralels, eſtans co[upez] par les plans AE & HB : les lignes de commune ſection [EA] FE ſont paraleles : Item HC & GB, par la 16. prop. 11. par meſme raiſon les plans AG & DB eſtans paralels, les lignes commune ſection AF & DE : Item GH & BC ſont paralel[es] partant AE & HB ſont paral-lelogrammes. Par le meſme diſcours AG, DB ; AC, FB, ſe prouveront eſtre parallelogrammes. Je dis maintenant que les parallelogrammes oppoſites ſont ſemblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, ſont paralleles aux lignes HG, HC, & non en meſmes plans, mais en oppoſez : par la 10. pr. 11. les angles DAF, CHG, ſeront egaux : par meſme raiſon les autres angles du parallelogramme AE, ſeront egaux aux autres angles du parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC les coſtez AD, HC ſont egaux, comme auſſi les coſtez AF, HG, du parallelogramme AG, comme AD ſera à AF, ainſi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainſi HG à GB, &c. Donc les coſtez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, ſeront proportionaux : & partant ils ſont parallelogram. ſemblables. Maintenant eſtans tirez les diametres DF, CG : veu que les coſtez AD, AF, du triangle ADF, ſont egaux aux coſtez HC, HG, du triangle HCG, & les angles DAF, CHG, auſſi egaux : par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, ſeront pareillement egaux : leſquels eſtans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogrammes ſeront auſſi egaux entr'eux. Par meſme diſcours on demontrera les autres parallelogr. oppoſez AG, DB ; AC, FB, eſtre ſemblables & egaux. Si donc un ſolide eſt compris de plans parallels, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

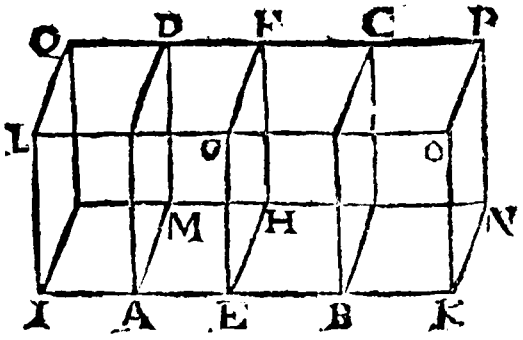


THEOR. 22. PROP. XXV.

Si un ſolide parallelipipede eſt coupé par un plan parallel aux plans oppoſez, les ſolides coupez ſeront l'un à l'autre comme leurs baſes.

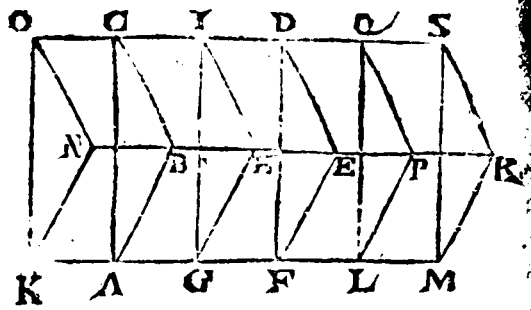
Soit le ſolide parallelipipede ABCD coupé par le plan EF parallel aux deux oppoſez AD & BC, & faiſant deux ſolides AF & EC : Je dis qu'iceux ſolides ſeront l'un à l'autre, comme la baſe AH à la baſe BH.

Car la ligne AB étant prolongée de part & d'autre, ſoient faites egales AI à AE, & BK à BE, & ſoient accomplis les parallelogrammes IM, & BN : Item les ſolides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE ſont egales, les parallelogiammes IM, AH ſeront auſſi egaux par la 1. pr. 6. & par la precedente les plans oppoſez LD, GD ſeront ſemblables & egaux : Item AL AG ſemblables & egaux à MQ MF, plans oppoſez, & ainſi des autres : & par la 9. def. de ce livre, le ſolide AQ eſt egal au ſolide AF. Par le meſme diſcours le ſolide BP ſera egal au ſolide FB : partant le ſolide IF eſt autant multiplice du ſolide AF, comme la baſe IH eſt multiplice de la baſe AH : Item le ſolide EP eſt autant multiplice du ſolide EC, comme la baſe EN eſt multiplice de la baſe BH : & partant comme la baſe IH ſera plus grande, egale ou plus petite que la baſe AH, ainſi le ſolide IF ſera plus grand, egal, ou plus petit que le ſolide AF. Tout de meſme comme la baſe EN ſera plus grande, egale, ou plus petite que la baſe BH, ainſi le ſolide EP ſera plus grand, egal, ou plus petit que le ſolide EC. Maintenant ſoient quatre grandeurs, les deux baſes AH, BH, & les deux ſolides AF, EC : deſquelles de la premiere & troiſiéme (ſçavoir de la baſe AH & du ſolide AF) on a pris les equemultiplices HI baſe, & IF ſolide : Item de la ſeconde & quatriéme, (ſçavoir de la baſe BH, & du ſolide EC) les equemultiplices EN baſe, & EP ſolide, leſquels nous avons montré eſtre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles ſoient priſes : & partant comme la baſe AH à la baſe BH, ainſi le ſolide AF au ſolide EC. Parquoy ſi un ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



SCHOLIE.

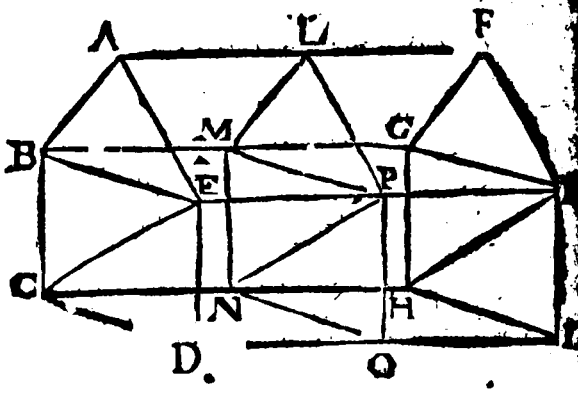
Cette propoſ. ſe peut accommoder à tous priſmes : Car quelconque priſme eſt coupé par un plan parallel aux plans oppoſez : tout ainſi que la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide ſera au ſolide. Car ſoit premierement le priſme ABCDEF duquel les plans oppoſez ſont les triangles ABC, DEF : & ſoit iceluy coupé par le plan GHI parallel aux plans oppoſez. Ie dis que comme la baſe AI eſt à la baſe FI, ainſi le ſolide ABCIHG eſt au ſolide FEDIHG. Car ſoit imaginé le priſme ABCDEF eſtre prolongé de part & d'autre tant qu'on voudra: & de AF prolongées ſoient priſes AK egale à GF, & FL, LM egales à FG : En apres, par les points G, L, M, ſoient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, ſont coupez par le plan AI : leurs communes ſections AC, GI, ſeront paralleles par la 16. prop. 11. Mais à cauſe que AD eſt parallelog. AG, CI ſeront auſſi paralleles. Donc AI eſt parallelog. Par meſmes raiſons ſeront démontrez AH, CH eſtre parallelog. Et pource que les coſtez AC, AB, du triangle ABC, ſont egaux aux coſtez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. prop. 1. AC eſt egal à GI, & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI ſont auſſi egaux : (pource que les lignes AB, AC ſont paralleles aux lignes GH, GI, & en divers plans) par la 4. prop. 1. les triangles ABC, GHI ſont egaux entr'eux, & equiangles : Parquoy par la 4. prop. 6. les coſtez d'alentour les angles egaux, ſeront proportionnaux ; & partant iceux triangles ſeront ſemblables. Donc le ſolide ABCIHG, contenu de deux plans oppoſez ABC, GHI egaux & ſemblables, & des parallelog. AI, IB, GB, eſt un priſme. Par meſme raiſon ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, &



LP2SRM seront prismes: Et pource que les parallelogrammes AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB, & CH, OB, tous les plans du prisme ABCIHG, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme KBCONK. Parquoy par la 10. def. 11. les prismes ABCIHG, KBCONK sont egaux. Par mesme raison les prismes GHIDEF, DELP2, LP2SRM seront egaux. Partant le prisme KNOIHG sera autant multiple du prisme ABCIHG, que la base KI de la base AI, & le prisme GHISRM autant multiplice du prisme GHIDEF, que la base GS de la base GD. Et pource que si la base KI, (multiplice de la base AI premiere grandeur) est egale a la base GS, (multiplice de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme KNOIHG, (multiple du prisme ABCIHG 3. grandeur) est egal au prisme GHISRM, multiple du prisme GHIDEF 4. grandeur:) Mais si la base KI est plus grande que la base GS, aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. def. 5. comme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme ABCIHG 3. grandeur sera au prisme GHIDEF 4. grandeur. En la mesme maniere on demontrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE, & comme la base CH est à la base EI. Ce qui étoit proposé.

Soit maintenant le prisme ABCDEFGHIK, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçavoir pentagones, & soit coupé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que comme la base CM est à la base NG, ainsi le solide ABCDELMNOP, au solide LMNOPFGHIK. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles és plans opposez. Parquoy comme la base BP sera à la base MK, ainsi le prisme ABEPML sera au prisme LMPKGF, par les choses démontrées cy-dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est a la base Nk, ainsi le prisme BCEPMN sera au prisme MNPRGH; & le prisme CDEPNO au prisme NOPkHI. Mais par la 1. pr. 6. comme EP est à MK: & CP à NK, ainsi est la ligne EP à la ligne Pk, c'est à dire comme CN est à NH, & comme CN est à NH, ainsi, est CM à NG. Donc les prismes ABEPML

BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſ LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM a NG, partant ont la mêm. entr'eux. Mais par la 12. pr. 5. comme un ſeul eſt à un ſeul, ainſi ſont les trois aux trois. Donc comme le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH; c'eſt à dire comme la baſe CM à la baſ NG ainſi le priſme ABCDELMNOP composé des trois ſera au priſme LMNOPFGHIK composé des trois. Ce qui étoit proposé. Il y aura meſme demonſtration en quelconque autre priſme.



COROLLAIRE.

De ceey reſulte que ſi quelconque priſme eſt coupé par un plan parallel aux plans oppoſez. que la ſection eſt une figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Car il a eſté démontré au premier priſme que le triangle GHI eſt egal, & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a meſme demonſtration en tous. Le meſme ſe doit entendre des parallelipipedes.

PROPL. 4. PROP. XXVI.

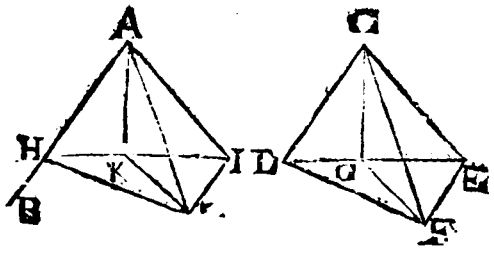
Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, conſtituer un angle ſolide egal à un angle ſolide donné.

Soit la ligne droite donnée AB, & le point donné en icelle A; & il faut conſtruire ſur icelle AB, & au point A, un angle ſolide egal à l'angle ſolide C compris de trois angles plans DCE, ECF, FCD.

Soit tirée de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. prop. 11. & ſoient menées les lignes DF, FE,

E, EG, GD, CG : en apres soit prise AH egale à CD : & par 23. prop. 1. soit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE ; & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI, soit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG, & la ligne AK egale à la ligne CG : puis par la 12. prop. 11. de K soit tirée au plan auquel sont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL : laquelle soit posée egale à FG, soit menée la ligne AL. Ie dis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est egal à l'angle solide donné C.

Car estans menées les lignes HK, KI, IL, LH : veu que les costez AH, AK du triangle AHK, sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la construction : les bases HK, DG seront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, estans ostez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes egales : par la 4. prop. 1. les bases KI, GE, seront aussi egales. Les costez KI, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF, & les angles HKL, DGL droits : donc par la mesme 4. prop. 1. les bases HL, DF, seront egales. Parquoy puisque les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF : (car les costez AK, KL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprennent angles droits : partant les bases AL, CF sont egales par la 4. prop. 1.) les angles HAL, DCF seront pareillement egaux par la 8. prop. 1. Finalement, pource que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droits ; par la 4. prop. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8. prop. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composans l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composans l'angle solide C ; & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C. Parquoy nous avons constitué sur une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit faire.

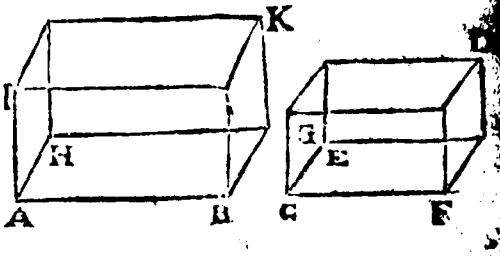


PROBL. 5. PROP. XXVII.

Sur une ligne droite donnée, décrire un ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé à un ſolide parallelipipede donné.

Soit la ligne donnée AB ſur laquelle il faut conſtruire un ſolide paralleipipede ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipipede donné CD.

Sur la ligne AB, & au point en icelle A, ſoit fait par la pre. un angle ſolide egal à l'angle ſolide C, lequel ſoit compris de trois angles plans HAI, BAI, BAH : tellement que HAI ſoit egal à ECG; BAI à FCG; & BAH à FCE : puis par la 12. prop. 6. ſoit fait comme CF eſt à CG, ainſi AB à AI, & comme CG à CE, ainſi AI à AH: & en raiſon egale, AB ſera à AH comme CF à CE. Et ſoient parachevez les parallelogr. BH, HI, BI, BK, KI, KH, qui accompliront le parallelipipede AK. Je dis qu'iceluy parallelipipede AK eſt ſemblable & ſemblablement poſé au donné CD.

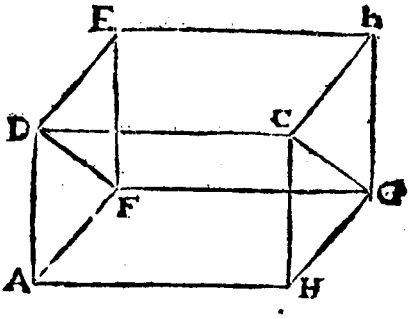


Car d'autant que AB eſt à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogr. BI eſt ſemblable au parallelog. FG : par la meſme raiſon le parallelog. BH ſera ſemblable au parallelog. FE. & HI à EG. Partant trois parallelog. du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement poſez à trois parallelog. du ſolide CD. Mais par la 24. p. 11. les trois oppoſez ſont egaux, & ſemblables. Parquoy les ſix plans du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement poſez aux ſix plans du ſolide CD : & partant par la 9. def. les ſolides AK & CD ſeront ſemblables & ſemblablement poſez. Nous avons donc ſur une ligne droite donnée, décrit un parallelipipede, &c. Ce qu'il faloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si un ſolide parallelipipede eſt coupé par un plan paſſant par les diagonales des plans oppoſez, il ſera coupé en deux egalement.

Soit le solide parallelipipede AB coupé par le plan CDFG, par les diagonales des plans oppoſez DF, CG. Ie dis qu'il eſt coupé en deux egalement.

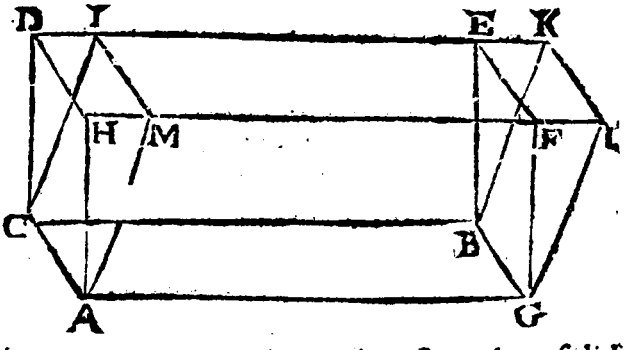


Car puis que les plans AE, HB, ſont parallelogr. egaux & ſemblables par la 34. prop. 1. les triangles ADF, EFD, CGH & GCB ſont egaux entr'eux: mais les coſtez qui contiennent les angles egaux DAF, DEF, CHG, & CBG ſont proportionnaux: donc iceux triangles ſeront auſſi ſemblables par la 6. prop. 6. & le plan AG eſt egal & ſemblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ce ſont plans oppoſez.) Partant les deux priſmes ADCHGF, FEBGCD; ſont compris de parallelogrammes & de triangles oppoſez ſemblables & egaux, & par la 10. def. iceux priſmes ſont egaux. Parquoy puis qu'ils compoſent le parallelipipede AB: iceluy ſera coupé en deux egalement par le plan DCGF. Si donc un ſolide parallelipipede eſt coupé par un plan, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les ſolides parallelipipedes ayans même baſe, & même hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ſont colloquées en mêmes lignes droites, ſont egaux entr'eux.

Soient conſtituez ſur la baſe AB, & en meſme hauteur, les ſolides parallelipipedes AD EG, AIKG, deſquels les lignes inſiſtantes AH, AM, GF, GL; CD, CI, BE, BK ſont colloquées en meſmes lignes droites HL, DK. Ie dis que le ſolide ADEG eſt egal au ſolide



AIKG. Car d'autant que les parallelogrammes A L conſtituez ſur meſme baſe AG ſont egaux entr par la 35. propoſition 1. ſi on en oſte le trapeze comm GM, reſteront egaux les triangles AHM, GFL: Et puis par la 34. propoſition 1. ils ont leurs coſtez egaux, chacun au ſi ils ſeront equiangles, & partant auſſi ſemblables par la 4 pro Pour meſmes raiſons les triangles CDI, BEK, ſeront auſſi eg & ſemblables. Mais par la 24. prop. 11. le parallelogr. AD egal & ſemblable au parallelogr. GE: Item le parallelogr. au parallelogr. GK. Et par la 36. prop. 1. DM eſt egal à E attendu que leurs baſes HM, FL ſont egales (car HF, ML ſo egales entr'elles, chacune d'icelles eſtant egale à AG; & oſta MF qui leur eſt commune, reſtent MH, FL egales.) Parqu les cinq plans du priſme AHM DC ſont egaux & ſemblab aux cinq plans du priſme GFLKE: & par la 10. def. 11. leſ dits priſmes ſeront egaux: partant ſi on adjouſte à chacun d'i- ceux priſmes le commun ſolide AMICBEFG, ſeront fai egaux les parallelipipedes ADEG, AIKG. Parquoy les ſolide parallelip. ayans une meſme baſe, &c. Ce qu'il faloit demon- trer.

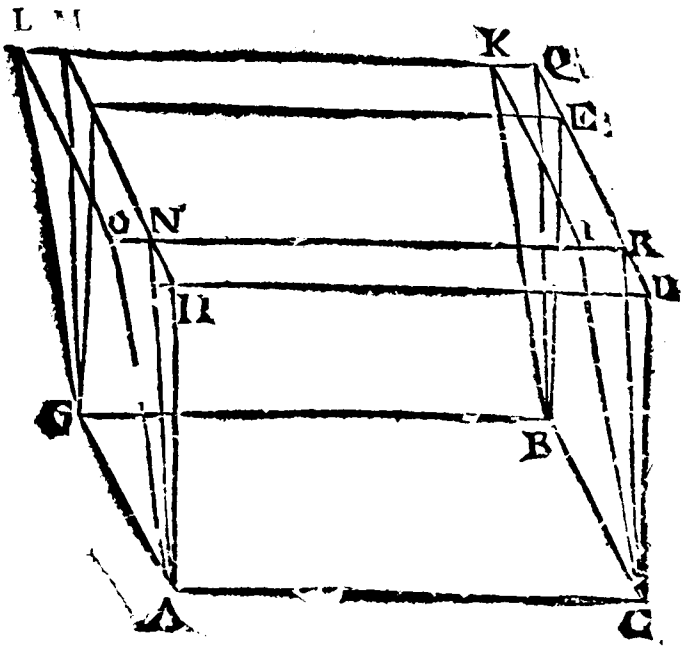
THEOR. 25. PROP. XXX.

Les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur même baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ne ſont colloquées en meſmes lignes droites; ſont egaux entr'eux.

Sur une meſme baſe AB, & en meſme hauteur (c'eſt à dire entre meſme plans parallels) ſoient conſtituez les ſolides parallelipipedes CF, CL deſquels les lignes inſiſtentes menées des quatre angles de la baſe AB, ſçavoir AH, AO, GF, GL, CD, CI, BE, BK, ne ſont pas colloquées en meſmes lignes droites. Je dis que le ſolide CF eſt egal au ſolide CL.

Car puis que les plans HE, OK oppoſez à la baſe commune AB, ſont en un meſme plan, à raiſon de la meſme hauteur des parallelipipedes; ſoient prolongées en iceluy plan les lignes HF, DE, iuſques à ce qu'elles rencontrent LK auſſi prolongée en M & Q: ſoit encore prolongée OI, qui rencontre HF & ED en N & R, puis ſoient tirées les lignes droites AN, GM, BQ, CR. D'autant que les lignes conti-

nées LK, OI ſont paralleles, comme auſſi HF, DE; le quadrilatere NMQR ſera parallelogramme, qui ayãt les coſtez oppoſez egaux & parallels, auſſi ANMG, CRQB, ANRC, GMQB, ſeront parallelogr. & partant le ſolide CM ſera parallelipipede: & par la preced. prop. il ſera egal au parallelip. CF, puis qu'eſtans conſtituez ſur meſme baſe AB, & de meſme hauteur, les lignes inſiſtantes AH, AN, GI, GM, CD, CR, BE, BQ ſont colloquées en meſmes lignes droites HM, DQ. Mais pour meſmes raiſons le parallelipip. CM eſt auſſi egal au parallelip. CL, ayans meſme baſe, & les lignes inſiſtantes colloquées en meſmes lignes droites IQ, OR. Donc le parallelipipede CF ſera egal au parallelip. CL. Parquoy les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il faloit demonstrer.



SCHOLIE.

On convertira tant cette propoſition que la precedente en cette maniere,

Les ſolides parallelipipedes egaux ayans meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtentes ſoient colloquées en meſmes lignes droites, ou non, ſont de meſme hauteur.

Car ſi l'on dit que l'un eſt plus haut, ſi d'iceluy on coupe un parallelipipede de meſme hauteur que l'autre, le coupé & l'autre ſeront egaux, par la 29. ou 30. pre-

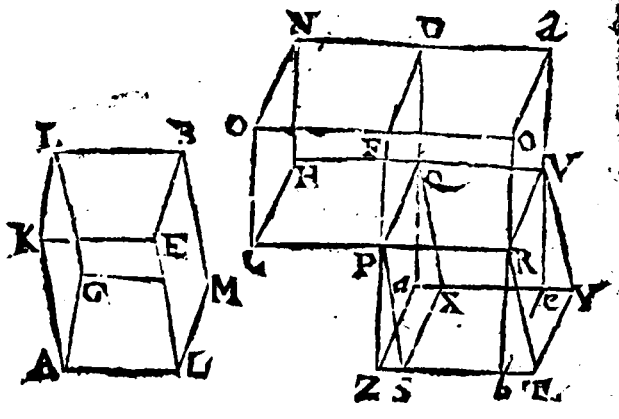
position 12. & puis que cet autre est posé egal au tout, la partie coupé sera egal au tout. Ce qui est absurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

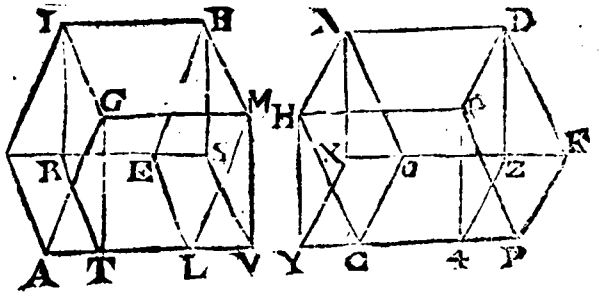
Les solides parallelipipedes constituez sur bases egales, & de mesme hauteur sont egaux entr'eux.

Soient les solides parallelipipedes AB, CD constituez sur les bases egales AE & CF, & de mesme hauteur. Ie dis qu'iceux solides sont egaux entr'eux.

Car premierement les lignes insistentes AG, LM, KI, EB soient perpendiculaires à la base AE, & les insistentes CH, FO, ON, FD perpendic. à la base CF; toutes lesquelles perpendr. seront egales entr'elles, puis que les parallelip. sont de mesme hauteur: & apres avoir continué CP iusques à R, & fait PR egale à KE, au plan de OP prolongé, soit fait l'angle RPS egal à l'angle AKE, & fait PS egale à KA: puis soit achevé le parallelog. PM, sur lequel soit constituit le parallelip. QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les costez PR, PS sont egaux aux costez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelogrammes PT, KL seront egaux & semblables. Derechef puis que les costez PQ, PS sont egaux aux costez KI, KA, & les angles QPS, IKA droits par la 3. def 11. pource qu'icelles IK, PQ sont posées perpendiculaires aux plans AE, PT: aussi les parallelogrammes QS, AI. seront egaux & semblables. Item les costez PR, PQ estans egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droits, par la mesme def. les parallelogr. PV, KB seront aussi egaux & semblables. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, TV, du parallelipipede QSTV sont egaux & semblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la



24.prop.11. tant ceux-là, que ceux-cy ſeront egaux,& ſemblables à leurs autres parallelog. oppoſez : & partant par la 10. definit. les parallelipipedes AB, SV ſeront egaux entr'eux.Maintenant que EP,TS prolongées ſe rencontrent en Z:& DQ,YX, en *a*, & ſoit achevé le parallelipipede ZV. Item que ND, *e* V prolongées ſe rencontrent en *d*,& OF, *b* R, en *o*, & ſoit achevé le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont meſme baſe PV,& meſme hauteur, & que les lignes inſiſtentes PS, PZ, RT, R*b* : Q*x*, Q*a*, VY, V*e*, ſont collocquées entre meſmes lignes droites ZT, *a* Y : iceux ſolides ſeront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV eſt demonstré egal au parallelipipede AB : donc le parallelipipede ZV ſera egal au meſme AB Et d'autant que par la 35. pr. 1. les parallelogrammes PT, P*b* ſont egaux, & PT egal à AE, auſſi P*b* ſera egal au meſme AE, c'eſt à dire à CF (car AE, CF ſont poſées baſes egales:) & par la 7. pr. 5 comme CF ſera à P*o*, ainſi P*b* ſera à P*o* : & par la 25. pr. 11. comme la baſe CF eſt à la baſe P*o*, ainſi le ſolide CD eſt au ſolide P*d*, puis que le parallelipipede C*d* eſt coupé par le plan PD parallel aux plãs oppoſez CN, R*d* : Semblablement comme P*b* eſt à P*o*, ainſi le ſolide ZV au ſolide P*d*, pource que le parallelipipede D*b* eſt coupé par le plan PV parallel aux plans oppoſez F*d*, Z*e*. Donc par la 9. pr. 5, les parallelipipedes CD, ZV ſeront egaux, puis qu'ils ont même raiſon au ſolide P*d*, ſçavoir eſt la même qu'ont les baſes CF, P*b* à la baſe P*o*. Parquoy puis que le parallelipipede ZV*a* eſté demonstré egal au parallelipipede AB: les paralellipipedes AB & CD ſeront pareillement egaux : ce qui eſtoit propoſé.



Maintenant, ſi les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, E B; CH, PQ, ON FD, ne ſont perpendiculaires, ſur les baſes AE, CF, ſoient tirées des points (apres avoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il ſera de beſoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & ſur les plans d'audeſſous d'iceux points les perpendic. GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Q*x*, par la 11. pr. 11. & ſoient tirées R T,

SV, XY, Za, pour faire les parallelipipedes ITVB, NY… lesquels par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus ſeront egaux entr'eux, car ils ſont ſur baſes egales CB, HD; & de meſme hauteur: Mais par la 29. ou 30. prop. 11. le ſolide ITVB eſt egal au ſolide AB, & le ſolide NY … D egal au ſolide CD: donc le ſolide AB ſera egal au ſolide CD. Parquoy les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On convertira cette 31. prop. en cette maniere.

Les ſolides parallelipipedes des egaux conſtituez ſur baſes egales, ſont de meſme hauteur: & les ſolides parallelipipedes egaux qui ſont en meſme hauteur: ſont ſur baſes egales, s'ils n'ont un meſme baſe.

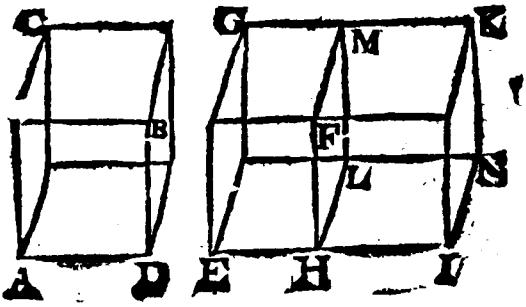
Car ſi on croit l'un plus haut que l'autre: ſi on coupe du plus haut un parallelip. de meſme hauteur que l'autre: par la 31. p. 11. le coupé ſera egal a l'autre, auquel eſt auſſi poſé egal le tout: parquoy le coupé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde. Que ſi les parallelipip. eſtans de même hauteur on croit que la baſe de l'un ſoit plus grande que la baſe de l'autre: ſi d'icelle baſe on en coupe une egale à l'autre, & ſur icelle coupée on entend eſtre un parallelipipede de meſme hauteur, l'on demontrera en la meſme maniere, la partie eſtre egale au tout: Ce qui eſt abſurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les ſolides parallelipipedes de même hauteur, ſont l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux parallelipipedes de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquels les baſes ſoient AB, EF. Ie dis que le ſolide eſt au ſolide comme la baſe à la baſe.

Car ſi ſur la ligne EF, (apres avoir prolongé le plan EF vers & à l'angle FHI on conſtruit le parallelogr. FI egal au parallelogr. AB; puis on acheve le ſolide IFLK; iceluy eſtant de meſme hauteur que le ſolide ABCD, & ſur baſe egale, il luy ſera egal par la 31. pr. 11. Parquoy



par la 7. pr. 5. comme le solide IFK L. est au solide EFCH ainsi le solide ABCD est au mesme solide EFGH. Mais par la 25. pr. 11. le solide FKL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est à dire AB, à la base EF : Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB à la base EF. Parquoy les solides parallelipipedes de mesme hauteur, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

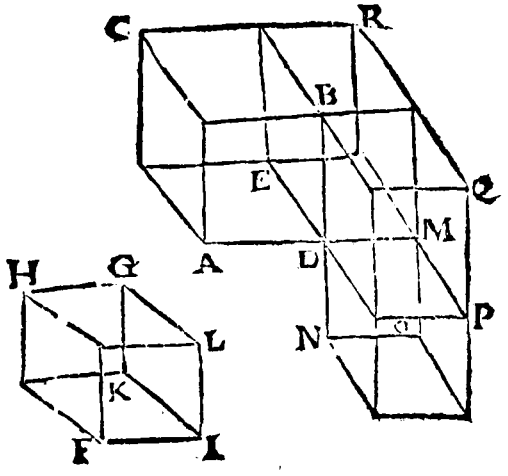
La converse : Si les solides parallelipipedes sont entr'eux comme leurs bases ; ils seront en mesme hauteur. *Car si l'une des hauteurs est plus grande que l'autre, de la plus grande en soit coupée une egale à la moindre, & puis soit tiré un plan parallel à la base ; & par la 32. p. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelipipede sera au parallelipipede coupé : mais ainsi il estoit aussi au parallelipipede total. Donc le coupé est egal au tout par la 9. pr. 5. Ce qui est absurde.*

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelipipedes sont l'un à l'autre en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient deux semblables parallelipipedes ABCE, FHGI constituez sur bases semblables AE. F , esquelles les costez homologues sont AD, FI. Ie dis que le parallelipipede ABCE est au parallelipipede FHGI en raison triplée des costez homologues AD, FI.

Car soit prolongé AD vers M, tellemẽt que DM soit egale à FI, ou HG. item BD vers N, en sorte que DN soit egale à LI ou CK : item ED vers O, tellement que EO soit egale à KI ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogr. DP, MN, NO, soit achevé le parallelipipede NMP. Il



eſt donc evident que les deux parallelipipedes FG, NP ſemblables & egaux, puis qu'ils ſont compoſez de plans qui les angles egaux, & les coſtez au long d'iceux angles egaux auſſi egaux. Item ſoient conſtruits les parallelipipedes BMG & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD, FG ſont ſemblables, comme AD eſt à FI, c'eſt à dire à DM, ainſi DE à KI, c'eſt à dire à DO: & BD à LI, c'eſt à dire à DN. Mais par la 1. prop. 6. comme AD à DM, ainſi le parallelog. AE au parallelog. EM: & comme ED à DO, ainſi le parallelog. EM à DP: & comme BD à DN, ainſi le parallelogr. BM à MN. Donc comme AE ſera à EM, ainſi EM à DP & BM à MN. Mais par la 32. pr. 11. comme la baſe AE à la baſe EM, ainſi eſt le parallelipipede AECB au parallelip. EMRB: & comme la baſe EM eſt à la baſe DP, ainſi le parallelip. EMRB eſt au parallelipipede de DPBQ: & comme la baſe BM eſt à la baſe MN, ainſi le parallelip. DPBQ eſt au parallelipipede NP. Parquoy cõme le parallelipipede AECB ſera au parallelip. EMRB, ainſi le parallelipipede EMRB ſera au parallelip. DPBQ: & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP. Partant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP ſont continuellement proportioneles: & par la 10. d. 5. la premiere AECB ſera à la quatriéme NP, c'eſt à dire à FG, en raiſon triplée de la premiere AECB à la ſeconde EMRB. Mais par la 32. prop. 11 comme AECB eſt à EMRB, ainſi la baſe AE eſt à la baſe EM: & par la 1. prop. 6. comme AE eſt à EM, ainſi AD eſt à DM, c'eſt à dire à FI. Donc par la 11. pr. 5. AECD ſera à EMRB comme AD à FI: partant la raiſon triplée de AECD à EMRB, ſera la meſme que de AD à FI: & par cõſequent AECD eſtant à FG en raiſon triplée de AECD à EMRB; il ſera auſſi en raiſon triplée de AD à FI. Parquoy les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

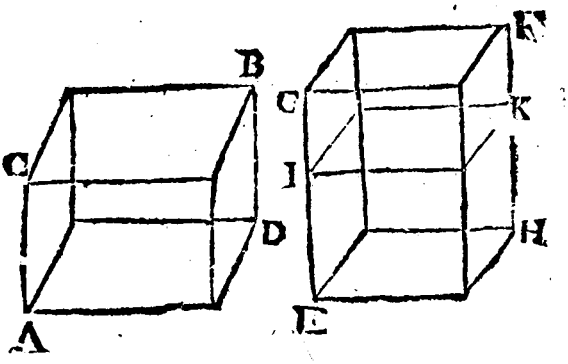
COROLLAIRE.

Par cecy eſt evident que s'il y a quatre lignes droites continuellement proportioneles, comme la premiere eſt à la quatriéme, ainſi le parallelipipede décrit ſur la premiere, eſt au parallelipipede ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ſeconde: Puis que tant le parallelipipede eſt au parallelipipede, que la premiere ligne à la quarte en raiſon triplée de la raiſon de la premiere ligne à la ſeconde, ſçavoir des coſtez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les ſolides parallelipipedes egaux, ont les baſes & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les baſes & les hauteurs reciproques ſont egaux.

Soient les parallelipipedes egaux ABCD, EFGH ſur les baſes AD, EH, deſquels les hauteurs ſont AC, EG. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques, c'eſt à dire, que comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur AC.



Car ſi les baſes AD & EH ſont egales (eſtans les ſolides poſez egaux) les hauteurs AC, EG ſeront auſſi egales par le ſchol. de la 31. pr. 11. & partant comme la baſe AD à la baſe EH, ainſi la hauteur EG à la hauteur AC.

Mais ſi les baſes ſont inegales, ſçavoir AD, plus grande que EH, la hauteur EG ſera plus grande que la hauteur CA: car elle ne peut eſtre plus petite, non pas ſeulement egale, d'autant que par la 31. p. 11. iceux ſolides ſeroient l'un à l'autre comme leurs baſes; partant AB plus grand que EF, & nous les avons poſez egaux: La hauteur EG ſera dõc plus grande que CA; & d'iceluy ſoit retranchée EI egale à CA, & d'iceluy point I ſoit imaginé que le plan IK parallel à EH, coupe le parallelip. EF; Or les deux ſolides AB & EF eſtans egaux, ils auront meſme raiſon l'un comme l'autre au ſolide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK eſtans de meſme hauteur, ils ſeront l'un à l'autre comme la baſe AD à la baſe EH, par la 32. pr. 11. Partant EF ſera auſſi à EK comme la baſe AD à la baſe EH. Or comme le parallelipipede EF eſt au parallelip. EK, ainſi la baſe GL à la baſe IL, par la 25. pr. 11, & icelle baſe GL eſt à la baſe IL, comme la ligne EG eſt à la ligne EI, par la 1. pr. 6. & partant par la 11. p. 5. le ſolide EF eſt au ſolide EK, comme EG à EI. Mais le ſolide EF eſt auſſi au ſolide EK, comme la baſe AD à la baſe EH; Donc par

la 11. prop. 5. comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur EI, ou à ſon egale AC.

Pour la ſeconde partie, ſi la baſe AD eſt à la baſe EH, comme la hauteur EG eſt à la hauteur AC. Je dis que les ſolides AB & EF ſont egaux.

Car ſi les hauteurs ſont egales, il eſt evident que les baſes ſ auſſi egales, puis qu'elles ſont posées en meſme raiſon: & partant par la 31. prop. 11. les parallelipipedes AB, EF ſeront reillement egaux.

Que ſi la hauteur EG eſt plus grande que la hauteur AC d celle, ſoit retranchée EI egale à AC, & par I ſoit tiré le pl IK parallele à la baſe EH. Donc par la 32. p. 11. comme la ba AD eſt à la baſe EH, ainſi le ſolide AB eſt au ſolide EK, pu que leurs hauteurs ſont egales: ET par la 1. p. 6. comme EG e à EI, ainſi le plan GL eſt au plan IL. Mais comme la baſe GL eſt à la baſe IL, ainſi le ſolide EF, eſt au ſolide EK: (car ils ſont de meſme hauteur,) donc comme le ſolide AB eſt au ſolide EK, ainſi le ſolide EF eſt au meſme ſolide EK, puis que par l'hypotheſe AD eſt à EH comme EG à AC ou EI: partant par la 9. prop. 5. les ſolides AB, EF ſeront egaux. Donc les ſolides parallelipipedes egaux, ont les baſes, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à cette demonſtration & preſque à toutes les autres de ce livre, les hauteurs des ſolides doivent eſtre perpendiculaires. Parquoy ſi elles n'étoient telles, il les y faudroit reduire, comme nous avons fait à la fin de la 31. prop. de ce livre.

Or toutes les choſes que nous avons démontrées és 6 precedentes propoſitions, ſçavoir és 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conviennent auſſi aux priſmes qui ont deux plans oppoſez triangulaires, obſervant les ſuſdites hypotheſes. Car ſi à deux tels priſmes de meſme hauteur, & conſtituez ſur une meſme baſe, ou ſur baſes egales, on appoſe deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront faits deux parallelipedes de meſme hauteur, & conſtituez ſur mêmes, ou egales baſes. Parquoy par la 29. 30. ou 31. pr. 11. ſeront egaux iceux parallelipipedes; & partant auſſi les priſmes donnez, c'eſt à ſçavoir les moitiez d'iceux parallelipipedes.

Derechef, ſi aux deux priſmes ſuſdits de meſme hau-

eur, & constituez ſur diverſes baſes, on ajoint deux autres priſmes egaux, & ſemblables à iceux, ſeront faits derechef deux parallelipipedes de meſme hauteur: Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelipipede ſera au parallelipipede comme la baſe à la baſe, & partant par la 15. p. 5. le priſme ſera au priſme, c'eſt à ſçavoir la moitié de l'un des parallelipipedes à la moitié de l'autre, comme la même baſe à la baſe, ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçavoir eſt la moitié d'une baſe à la moitié de l'autre, ſi les baſes ſont triangulaires.

Davantage, ſi à iceux deux priſmes ſemblables, on ajoûte deux autres priſmes egaux & ſemblables à eux, ſeront conſtituez deux parallelipipedes ſemblables, leſquels par la 33. p. 11. ſeront entr'eux en raiſon triplée des coſtez homologues. Donc auſſi par la 15. pr. 5. les priſmes, ſçavoir eſt les moitiez d'iceux, auront la raiſon triplée de meſmes coſtez homologues, leſquels ſont pareillement coſtez homologues des priſmes.

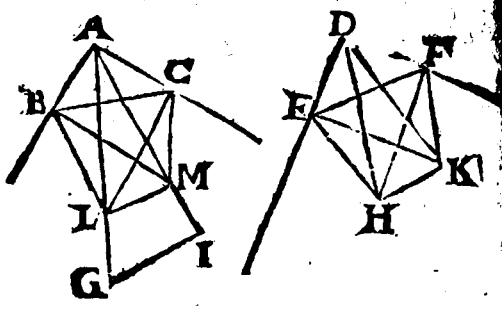
Finalement, ſi aux deux ſuſdits priſmes egaux, on ajoûte deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, ſeront conſtituez deux parallepip. egaux de meſme hauteur que les priſmes: Parquoy par la 34. pr. 11. puis que les baſes, & les hauteurs des parallelipipedes ſont reciproques, & les baſes des priſmes ſont les meſmes, ou les triangles moitiez d'icelles, ayant meſme raiſon par la 15. p. 5. auſſi les baſes & les hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'Il y a deux angles plans egaux, aux ſommets deſquels ſoient levées en l'air deux lignes droites faiſant angles egaux avec les lignes des angles premierement poſez, chacun au ſien; & d'un point pris au haut de chacune d'icelles deux lignes élevées ſont menées des lignes perpendiculaires aux plans eſquels ſont les plans premierement poſez, & des points où tombent icelles perpendiculaires ſont tirées des lignes droites vers les ſommets des angles premierement poſez: Les angles que font icelles lignes, avec les levées en l'air ſont egaux entr'eux.

Soient deux angles plans egaux BAC, EDF, des ſommets

desquels A & D, soient levées en l'air les lignes droites DH, tellement que l'angle BAG soit egal à l'angle EDH, l'angle CAG egal à l'angle FDH : & des points G & H, pris és lignes AG, DH, soient tirées aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és points I, K, desquels soient menées les lignes IA, DK. Je dis que les angles GAI, HDK, sont egaux entr'eux.



Car si les deux lignes AG, DH sont inegales de la plus grande AG, soit retranché AL egale à DH : & de L au plan du triangle AGI, soit tirée LM parallele à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que GI est perpendiculaire à iceluy plan. Soient aussi tirez des points M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF : & soient menées les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le sera aussi à la ligne AM tirée au mesme plan par la 3. def. 11. partant par la 47. prop. 1. le quarré de AL sera egal aux quarrez de AM, ML : mais par la mesme prop. le quarré de AM est egal aux quarrez de AC, CM, puis que l'angle ACM est droit par construction. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AC, CM, ML : Et par la 47. prop. 1. le quarré de CL est egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 3. d. de ce livre, l'angle CML est droit. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AC, GL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL est droit. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL est egal aux quarrez de AM, ML : & le quarré de AM est egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM étant droit par la construction : le quarré de AL est egal aux quarrez de AB, BM, ML : mais le quarré de BL est egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML est droit par la 3. def. 11. Donc le quarré de AL est egal aux quarrez de AB, BL : & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL sera droit. On demontrera en la mesme manie-

que les angles DFH, DEH ſont auſſi droits. Maintenant dis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, étans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4. pr. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles. & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droits : Donc auſſi les autres angles BMC, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE, & partant puis que les coſtez BC, EF, ont été demontrez egaux; les coſtez BM, MC, ſeront egaux aux coſtez EK, FK, par la 26. prop. 1. veu donc que les coſtez AC, CM, du triangle ACM ſont egaux aux coſtez DF, FK, du triangle DFK, & les angles ACM, DFK ſont droits, par la 24. prop. 1. les baſes AM, DK ſeront egales. Et puis que BL, EH ont été démontrées egales, leur quarrez ſeront auſſi egaux. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL eſt egal au quarré de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, KH, pource que les angles BML, EKH ſont droits, par la 3. def. 11. Donc les quarrez de BM, ML ſeront egaux aux quarrez de EK, KH : & partant étans oſtez les quarrez de BM, EK, qui ſont egaux, les lignes BM, EK, ayant été demontrées egales, reſteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes LM, HK ſeront egales. Parquoy veu que les coſtez AL, AM du triangle ALM, ſont egaux aux coſtez DH, DK du triangle DHK, & la baſe LM egale à la baſe HK; les angles LAM, HDK ſeront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

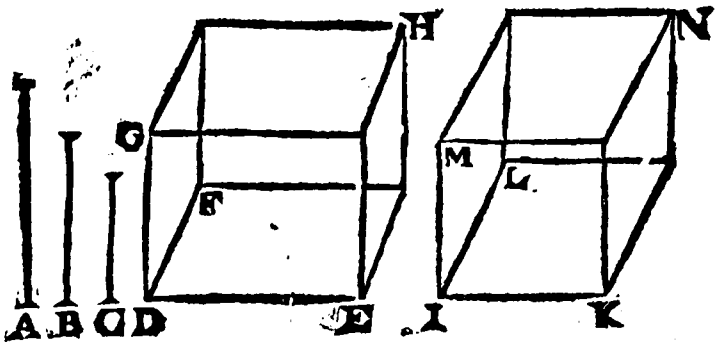
Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, és ſommets deſquels ſoient élevées en l'air des lignes droites egales, leſquelles avec les lignes d'iceux angles premierement poſez, contiennent angles egaux, chacun au ſien: les perpendiculaires tirées des points extrémes d'icelles lignes élevées en l'air, ſur les plans des angles premierement poſez, ſeront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, ſont poſez egaux, & les lignes egales AL, DH

élevées en haut constituent les angles egaux LAB, H
Item LAC, HDF, il a esté demonstré que les perpendicul
res LM, HK, sont egales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droites sont proportioneles; le s
lide parallelipipede constitué d'icelles trois
gnes, est egal au solide parallelipipede fait
la moyenne, pourvû qu'iceux deux solid
soient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportioneles A, B, C & soit constitué un angle solide D, de trois quelconques angle plans EDF, EDG, FDG, tellement que la ligne DE soit egale à la ligne A, DG à B, & DF à C: & soit accomply le parallelipipede DH: en apres, par la 26. pr. 11. sur la ligne IK egale B, & au point I soit fait l'angle solide I des trois angles plan



KIL, KIM, & MIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que chacune des lignes IK, IL, IM soit egale à la moyenne B; & soit parfait le parallelipipede IN. Je dis que les solides DH, IN sont egaux.

Car puis que comme DE est à IK, ainsi IL à DF: (car DE est egale à A; IK, IL à B; & DF à C,) & les angles EDF, KIL egaux, les parallelog. EF, KL seront egaux par la 14. pr. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans egaux EDF, KIL sont élevez en l'air les lignes egales DG, IM, lesquelles

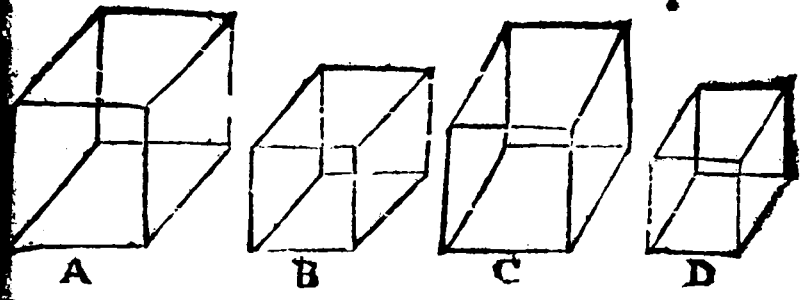
elles avec les lignes des angles premierement poſez com-
ennent angles egaux, un chacun au ſien : les perpendiculaires
ées de G, M, ſur les plans des baſes EF, KL; (ſçavoir eſt les
uiteurs des parallelipipedes DH, IN) ſeront egales entr'elles
r le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. pr. 11. les
rallelip. DH, IN, ſeront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les
ſes EF, KL egales, & pareillement les hauteurs egales. Par-
oy ſi trois lignes droites ſont proportioneles, &c. Ce qu'il
loit demontrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droites ſont proportioneles; les ſolides parallelipipedes ſemblables, & ſemblablement décrits ſur icelles, ſeront auſſi proportionaux : Et ſi quatre ſolides parallelipipedes ſemblables & ſemblablement poſez ſont proportionaux; les quatre lignes droites, ſur leſquelles ils ſeront décrits, ſeront auſſi proportioneles.

Soient quatre lignes droites proportioneles A, B, C, D : & ient décrits ſur icelles quatre ſolides ſemblables & ſembla-lement poſez A, B, C, D. Je dis qu'iceux ſolides ſont pro-ortionaux.

Car puis que le ſolide A eſt ſemblable au ſolide B : par la 33. rop. 11. ils ſeront l'un à l'autre en raiſon triplée de la ligne A à



ligne B : pareillement les ſolides C & D ſeront auſſi en raiſon iplée de C à D : mais la raiſon de A à B, eſt comme de C à par l'hypotheſe. Donc la raiſon triplée de A à B, ſera ſem-

blable à la raiſon triplée de C à D, & partant par la 11. pr
le ſolide A ſera au ſolide B, comme le ſolide C au ſolide
Maintenant ſi les quatre ſolides A, B, C, D, ſemblabl
ſemblablement décrits ſur les quatre lignes droites A, B, C
ſont proportionaux. Je dis que la ligne A ſera à la ligne B, co
me la ligne C à la ligne D. Car le ſolide A ſera au ſolide B
raiſon triplée de la ligne A à la ligne B par la 33. pt. 11. I
le ſolide C au ſolide D, en raiſon triplée de C à D: mais le
lide A eſt au ſolide B comme le ſolide C au ſolide D: part
leur raiſon triplée ſera ſemblable; & par conſequent les qua
lignes droites A, B, C, D, ſeront proportioneles. Parquoy
quatre lignes droites ſont proportioneles, &c. Ce qu'il fal
démontrer.

SCHOLIE.

*Semblablement, ſi trois lignes droites ſont proportionele
los parallelipip. ſemblables & ſemblablement décrits ſ
icelles ſeront proportionaux; & ſi trois ſolides ſemblable
&c. Car la moyenne ligne étant priſée deux fois avec ſ
ſolide, les quatre ſolides ſeront proportionaux, comme il
été demontré. Car puis que le ſolide de la deuxiéme ligne
eſt egal au ſolide de la troiſiéme ligne, & la deuxiéme ligne
egale à la troiſiéme, la propoſition eſt manifeſte.*

*Et eſt à noter qu'il n'importe pas que tous les quatre ſol
des ſoient ſemblables entr'eux: Car les deux ſolides décri
ſur les deux premieres lignes A & B étans ſemblables
ſemblablement poſez, il n'eſt pas neceſſaire que les deux
autres ſolides décrits ſur les deux dernieres lignes C &
ſoient ſemblables & ſemblablement poſez aux deux pre
miers, ains ſuffit qu'ils le ſoient entr'eux deux, ainſi qu'
eſt evident par la demonſtration cy-deſſus.*

Nous ajoûterons icy cet autre theoreme.

Si quatre lignes droites ſont continuellement proportioneles
le parallelipipede ayant pour baſe le quarré de l'une des extre
mes, & pour hauteur l'autre extréme, eſt egal au cube de l
moyenne proport. plus prochaine de la premiere extréme priſe

*Soient quatre lignes continuellement proportioneles A
B, C, D. Je dis que le parallelipipede ayant le quarré d
l'extréme A pour baſe, & l'autre extréme D pour hauteu
eſt egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extré
me A.*

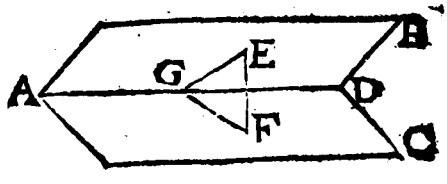
Car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A au quarré de B, comme A à C, c'eſt à dire comme B à D: les baſes avec les hauteurs ſeront reciproques, puis que le quarré de A eſt la baſe du parallelippipede, & la ligne D, hauteur d'iceluy; & la baſe du cube eſt le quarré de B, & ſa hauteur la meſme ligne B. Donc par la 34. prop. 11. le parallelipipede & le cube ſeront egaux. Par meſme raiſon le parallelip. ayant pour baſe le quarré de l'extreme D, & pour hauteur l'autre extreme A, ſera demontré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si un plan eſt perpendiculaire à un autre plan, & d'un point de l'un d'iceux on mene une ligne perpendiculaire à l'autre, elle tombera ſur leur commune ſection.

Soit le plan AB perpendiculaire au plan AC, leur ligne de commune ſection AD: & du point E pris en AB, ſoit menée une perpendiculaire au plan AC: je dis qu'elle tombera ſur la commune ſection AD.

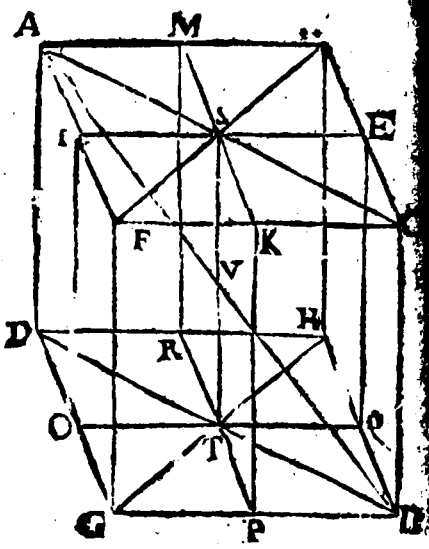
Car qu'elle tombe ailleurs, s'il eſt poſſible, comme au point F du plan AC: & par la 12. prop. 1. de F ſoit menée FG perpendiculaire à AD; & la ligne GE faiſant le triangle GFE. Or ſi la ligne EF eſt perpendiculaire au plan AC, par la 3. def. 11. elle le ſera auſſi à la ligne FG: & icelle FG eſtant perpendiculaire à la commune ſection AD, par la 4. def. elle le ſera pareillement au plan AB: & par conſequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles ſur la ligne GF ſeroient tous deux droits contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E au plan AC ne tombera pas hors la commune ſection AD, ains ſur icelle. Parquoy ſi un plan eſt perpendiculaire à un autre plan, &c. Ce qu'il faloit prouver.



THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les coſtez des plans oppoſez d'un ſolide para lipipede, ſont coupez en deux egalement, on mene des plans par les ſections : la ligne commune ſection d'iceux plans, & le diame du ſolide parallelipipede, ſe couperont en de egalement.

Soit le parallelipipede AB ; les plans oppoſez AC, BD, d quels tous les coſtez ſoient coupez en deux egalement és poi I, K, L, M, O, P, Q, R, par leſquels ſoient imaginez paſſer les plans IQ, KR, ſe coupans l'un l'autre en la ligne ST : & ſoit menée la diagonale AE : Je dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entrecoupent en deux egalement.



Car étans tirées les lignes SA, SC, TD, TB: ſoient conſiderez les deux triangles BQT, DOT, deſquels les deux coſtez BQ, QT ſont egaux aux deux coſtez DO, OT, (car BQ, DO, ſont moitiez des lignes droites egales BH, DG & par la 34. pr. 1. QT, OT, ſont egales aux deux egales BP, GP puis que PQ, PO ſont parallelogrammes) & l'angle EQT ; par la 29. prop. 1. eſt egal à l'interne DOT : partant par la 4. prop 1. les baſes BT, DT ſeront auſſi egales : & les angles BTQ DTO pareillement egaux : & par la 13. prop. 1. les angles BTQ BTO ſont egaux à deux droits. Donc auſſi DTO, BTO ſon egaux à deux droits : & partant par la 14. prop. 1. BT, DT conſtituent une ſeule ligne droite. En la meſme maniere ſera demontré que AS, CS ſont egales, & compoſent une ſeule ligne droite. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC eſt

allele & egale à FG, à cauſe des parallelogrammes DF, FB: elles ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. parquoy AC, BD qui conjoignent les extrémitez d'icelles AD, C, ſont auſſi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par conſequent AS, BT moitiez d'icelles ſont egales. Mais pource que AC, BD ſont paralleles, les lignes AB, ST ſeront avec icelles en un meſme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecouperont en un point, ſçavoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. prop. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, ſont egaux aux deux angles BTV, BVT, du triangle BTV, & le coſté AS egal au coſté BT: les autres coſtez AV, SV, ſeront auſſi egaux aux autres coſtez BV, TV, chacun au ſien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecoupent en deux egalement au point V. Parquoy ſi les coſtez des plans oppoſez d'un ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt evident qu'en tout parallelippipede, tous les diametres s'entrecoupent en deux egalement en un ſeul point, ſçavoir eſt au point V, auquel ils diviſent en deux egalement la ligne ST. Eſt auſſi manifeſte que tout plan qui coupe le parallelipipede en deux egalement paſſe par le centre d'iceluy, ſçavoir par V.

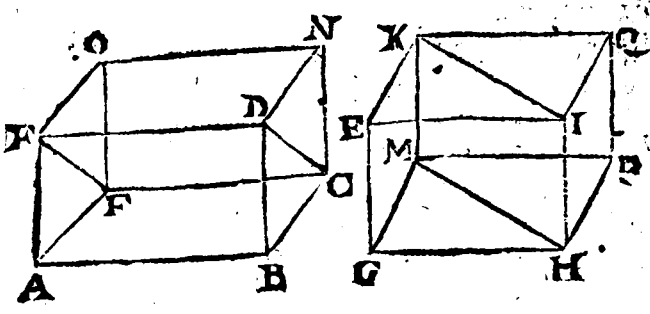
THEOR. 35. PROP. XL.

S'il y a deux priſmes d'egale hauteur, l'un deſquels ait pour baſe un triangle, & l'autre un parallelogramme double d'iceluy triangle: iceux priſmes ſeront egaux entr'eux.

Soient deux priſmes d'egale hauteur ABCDEF, GHIKLM: & que celuy-là ait pour baſe le parallelogramme ABCF, double du triangle GHM baſe du priſme GHIKLM. Je dis qu'iceux priſmes ſont egaux entr'eux.

Car ſi on les accomplit pour eſtre ſolides parallelipipedes AN, GQ, la baſe GP ſera egale à la baſe BF: & étans poſez de meſme hauteur, ils ſeront egaux par la 31. prop. 11. & par la

28. prop. les plans diagonaux CDEF, HIKM les di
en deux egalement; & partant les prisme propoſez



moitiez de choſes egales, ſeront egaux entr'eux. Parquoy
y a deux priſmes d'egale hauteur, &c. Ce qu'il faloit pr
ver.

Fin de l'unziéme Element.



ELEMENT DOUZIEME.

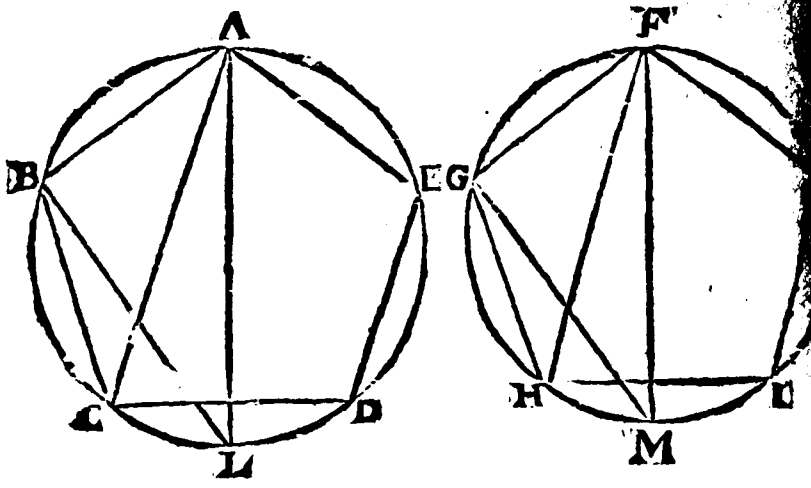
THEOR. 1. PROP. I.

LES polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'un à l'autre comme les quarrez décrits des diametres des cercles.

Soient deux polygones semblables ABCDE & FGHIK, inscrits aux cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Je dis qu'iceux polygones sont l'un à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.

Car soient menées les lignes droites AC, FH : item BL & GM. D'autant que les pentagones estans semblables, AB est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC egal à l'angle FGH: par la 6. prop. 6. les triangles A B C, FGH sont equiangles: partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG. Mais celuy-là est egal à l'angle D, cettuy-cy à l'angle M, par la 21. prop. 3. (car ils sont sur mesmes segmens BA, & FG.) Donc l'angle L sera egal à l'angle M : & par la 31. prop. 3. les angles A B L, FGM estans dans les demy cercles sont droits & egaux: partant les triangles ABL FGM seront equiangles : car le troisiéme angle BAL sera egal au troisiéme GFM par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB, ainsi FM à FG : & & en permutant, comme AL sera à FM, ainsi AB à FG. Parquoy par la 22. prop. 6. comme le pentagone décrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG

ainſi le quarré de AL ſera au quarré de FM. Parquoy le

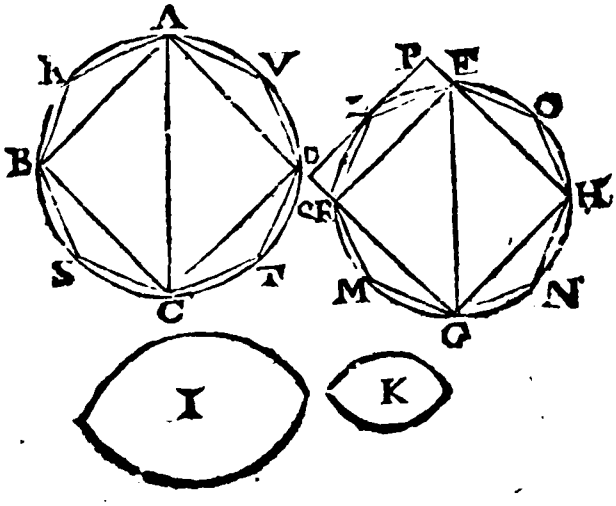


lygones ſemblables inſcrits aux cercles, &c. Ce qui eſtoit prouver.

THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles ſont l'un à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres ſont AC & EG: Je dis qu'ils ſont l'un à l'autre comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le



cercle ABCD ſoit à quelque figure quatriéme proport. comme I, qu'icelle figure eſt egale au cercle EFGH.

Autrement elle ſera plus petite ou plus grande. Qu'elle ſoit premierement plus petite, s'il eſt poſſible : & ſoit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. pr. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera enfin une quantité plus petite que K: ſoit donc dans iceluy cercle EFGH décrit le quarré EFGH, qui eſt plus grand que la moitié du cercle : (d'autant que le quarré de EG, qui eſt ſon double, eſt plus grand que le cercle.) Si les quatre ſegmens du cercle ſont moindres que K, nous avons ce que nous demandons ; ſinon ſoit coupé l'arc EF en deux egalement au point L, & ſemblablement les trois autres arcs FG, GH, HE, és points M, N, O; & ſoient tirées les lignes droites EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, afin d'avoir l'octogone ELFMGNHO, inſcrit au cercle : Il eſt evident que dans les quatre ſegmens egaux, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, eſt plus de la moitié de ſon ſegment : (car par la 41. pr. 1. le triangle iſoſcele FLE eſt la moitié du rectangle FP de meſme hauteur, & ſur meſme baſe FE, lequel rectangle eſt plus grand que le ſegment FLE.) Soient maintenant les huit petites figures reſtantes plus petites que la figure K : que ſi cela n'eſtoit, il faudroit toûjours couper les arcs derniers, & toûjours inſcrire des polygones, deſquels le dernier auroit deux fois autant de côtez que ſon precedent, & ſouſtraire toûjours plus de la moitié de chaque ſegment, ſçavoir ſon triangle iſoſcele : Il eſt certain que les dernieres portions ſeront enfin plus petites que la figure K, Mais pour abreger ſoient les devant dites huit portions reſtantes plus petites que la figure K : Il eſt evident que l'octogone ELFMGNHO ſera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K ſont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inſcrit un octogone ſemblable au cercle AB, CD : ce qui eſt facile ; car il n'y a qu'à couper chaque demy circõference ABC, ADC en deux egalement és points B & D ; puis les circonferences AB, BC, CD, AD auſſi en deux egalement en R, S, T, V ; & ayant tiré les lignes droites AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV, & VA ; il eſt evident que la figure inſcrite ſera ſemblable à la figure octogone décrite au cercle EFGH. Maintenant par la preç. prop. l'octogone ARBSCTDV ſera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC eſt au quar-

ré de EG: mais comme le quarré de AC eſt au quarré de
ainſi le cercle ABCD eſt à la figure I: & par la 11. pr. 5. c
le poligone ARBSCTDV ſera au poligone ELFMGNH
ainſi le cercle ABCD ſera à la figure I: mais le poligone
BSCTDV eſt moindre que le cercle ABCD: Donc par la
prop. 5. le poligone ELFMGNHO ſera auſſi moindre que
figure I: mais il a auſſi eſté demontré plus grand. Ce qui
abſurde. Donc la figure I n'eſt pas plus petite que le cer
EFGH.

Elle ne peut auſſi eſtre plus grande: Car puis que comme
quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD eſt
la figure I; en changeant, la figure I ſera au cercle ABCD
comme le quarré de EG au quarré de AC: mais ſoit imagi
que comme I eſt au cercle ABCD, ainſi le cercle EFGH ſoi
à quelque autre figure, comme K: & par la 14. pr. 5. comm
la figure I eſt plus grande que le cercle EFGH, ainſi le cercl
ABCD ſera plus grand que la figure K: & par la 11. prop. 5.
cercle ABCD ſera à la figure K, comme le quarré de AC eſt
au quarré de EG: ce qui eſt contre la premiere partie de la de
monſtration en laquelle nous avons demontré que l'un des cer
cles eſtant à une figure, en la raiſon des quarrez des diametres
qu'icelle figure ne pouvoit eſtre plus petite que l'autre cercle.
Partant la figure I ne pouvoit eſtre plus grande que le cercle
EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle étoit
donc egale à iceluy. Parquoy les cercles ſont entr'eux comme
les quarrez de leurs diametres. Ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE.

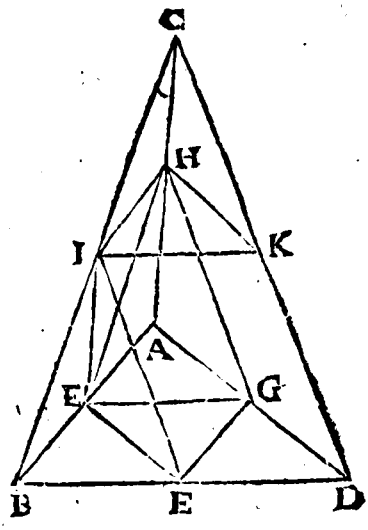
Par ces choſes eſt evident que le cercle eſt au cercle comme le polygone décrit en celuy-là eſt au polygone ſemblable décrit en cetui-cy. Puis que le cercle eſt au cercle, & le polygone au polygone, comme le quarré du diametre eſt au quarré du diametre, ainſi qu'il a eſté demontré és 1. & 2. prop. cy-deſſus.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant baſe triangulaire, peut être diviſée en deux pyramides egales, ſemblables entr'elles, & à la totale, & en deux priſmes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide ABCD ayant la baſe triangulaire ABD, & le ſommet au point C: Je dis qu'elle peut eſtre diuiſée en deux pyramides egales, ſemblables entr'elles, & à la totale ABCD: & en deux priſmes egaux, plus grands que la moitié d'icelle pyramide propoſée.

Car ſoient coupez en deux egalement, tous les coſtez des plans d'icelle pyramyde, ſçavoir les trois de la baſe ABD aux points E,F,G, & les trois hypothenuſes AC, BC, DC aux trois points H, I, K & ſoient menées les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Premierement il eſt évident que toute la pyramide ABDC eſt diviſée en quatre ſolides, ſçauoir en deux pyramides AEGH, HIKC, dont les baſes ſont triangles AEG, HIK, & les ſommets H, C: & en deux priſmes BFIHEG, FGDKHI, dont la baſe de celuy-là eſt le quadrangle BFGF, & de celuy-cy le triangle FGD. Or d'autant que les coſtez AB, AC, ont eſté coupez en deux egalement en E & H, par la 2. prop. 6, BC, EH ſeront paralleles: & par meſme raiſon HI eſt parallele à BA: donc le quadrilatere BIHE eſt parallelogramme: & par la 34. prop. 1. EI eſt egale à EB, ou EA ſon egale, & HE à BI, ou IC ſon egale: & par le corol. de la 4. prop. 6. les deux triangles ABC, AEH ſont ſemblables entr'eux. Par meſmes raiſons les deux triangles ABC, HIC ſeront ſemblables entr'eux, & conſequemment auſſi les deux AEH, HIC, par la 21. prop. 6. leſquels ſeront auſſi egaux entr'eux, puis qu'ils ont tous leurs coſtez egaux, chacun au ſien. Par meſmes raiſons le triangle AHG ſera egal & ſemblable au triangle HCK: mais les lignes HE, HG étans paralléles aux lignes CI, CK, & ſe touchans en divers plans, par la 10. p. 11. les angles EGH, ICK ſeront egaux: & les coſtez qui ſont iceux angles eſtans proportionaux, les trois triangles EHG, ICK, BCD ſeront equiangles, & conſequemment ſemblables: comme auſſi les trois AEG, HIK, ABD: Donc par la 9. def. 11. les trois pyramides ABDC, AEGH, HIKC



ſeront ſemblables entr'elles : & par la 10. def. les deux dernie ſeront auſſi egales entr'elles, puis que tous les quatre triang de l'une ont eſté montrez ſemblables & egaux aux quatre trian gles de l'autre.

Or que les deux ſolides BFIHGE, FGDKHI, ſoient deu priſmes egaux, & faiſant enſemble plus de la moitié de la pyra mide propoſée ABDC, on le prouvera ainſi, puis que les cô tez des plans d'icelle pyramide ont êté coupez en deux egale ment, & partant proportionellement, par la 2. prop. 6. les li gnes AB, FG ſont paralleles, comme auſſi BD, EG : par ainſi le quadrilatere BEGF eſt un parallelogr. & par la 9. p. 11. HG & IF êtans paralleles à CD, elles le ſont auſſi entr'elles : donc FIHG eſt un parallelogr. ; comme eſt auſſi BIHE : partant les trois coſtez du triangle BIF ſeront egaux aux trois coſtez du triangle EHG, chacun au ſien: conſequemment iceux triangles ſont equiangles & egaux entr'eux, & partant ſemblables : Mais par la 15. p. 11. ils ſont auſſi parallels, les lignes BI, FI, êtans paralleles aux lignes EH, GH. Parquoy le ſolide BFIHGE contenu des deux triangles BIF, EHG egaux ſemblables & parallels oppoſez, & des trois parallelogr. BFGF, BIHE, FIHG eſt un priſme par la 13. def. 11. Derechef. FD, FG, GD, coſtez de parallelogr. ſont egaux aux coſtez oppoſez IK, IH, HK, chacun au ſien par la 34. p. 1. & partant les triangles FGD, IHK ſeront egaux & equiangles entr'eux, & conſequemment ſemblables: Mais ils ſont auſſi parallels par la 15. p. 11. donc le ſolide FGD KHI contenu des deux triangles oppoſez FGD, IHK egaux, ſemblables & parallels, & des trois parallelogr. FIKD, FIHG, GHKD eſt un priſme ; lequel êtant de même hauteur que le priſme BFIHGE (car ils ſont tous deux entre les plans parallels BEGD, IHK) luy ſera egal par la 40. p. 11. puis que la baſe quadrangulaire BEGF de celuy-cy eſt double de la baſe triangulaire de celuy-là, par le ſcholie de la 41 p. 1. Mais il eſt evident qu'iceluy priſme BFIHGE eſt plus grand que la pyramide de meſme hauteur BEFI, qui n'en eſt que partie, la baſe d'icelle BEF n'eſtant que la moitié du parallelogr. BEGF : laquelle pyramide BEFI eſt egale & ſemblable à la pyramide EAGH, comme il eſt manifeſté par l'egalité & ſimilitude de leurs triangles. Parquoy ledit priſme BFIHEG, ſera auſſi plus grand qu'icelle pyramide EAGH: Et par cõſequent les deux priſmes BFIHEG, FGDKHI enſemble, ſeront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK enſemble. Mais iceux priſmes & pyramides

ſont enſemble la pyramide totale ABCD: donc iceux priſmes étans plus grands qu'icelles 2 pyramides, ſeront auſſi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il faloit prouver.

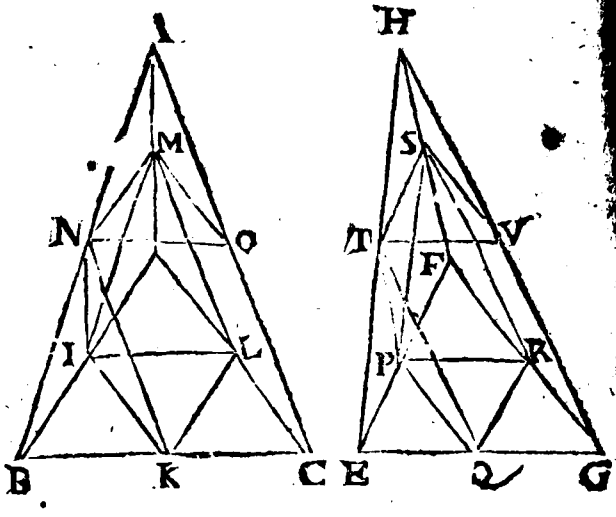
THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de même hauteur ayans baſes triangulaires, chacune deſquelles ſoit diviſée en deux autres pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, & en deux priſmes egaux; & que les pyramides provenuës de cette diviſion ſoient toujours diviſées de même façó: comme la baſe de l'une des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'une des pyramides, ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de même hauteur, chacune deſquelles ſoit diviſée comme en la prec. pr. en deux pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, ſçavoir eſt en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de meſme façon ſoient entenduës les pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH eſtre diviſées; & en continuant toûjours de meſme façon. Ie dis que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFC, ainſi tous les priſmes faits en la pyramide ABCD ſont à tous les priſmes faits en la pyramide EFGH, egaux en multitude.

Car puis que comme BC à CK, ainſi FG à GQ, pource que l'une & l'autre ligne eſt diviſée en deux également, & les triangles ABC, IKC ſont ſemblables & ſemblablement poſez: Item les triangles EFG, RQG par le corollaire de la 4. propoſition 6. auſſi comme le triangle ABC ſera au triangle LKC, ainſi le triangle EFG ſera au triangle RQG par la 22. propoſition 6. & en permuttant, comme ABC à EFG, ainſi KC à RQG. Mais comme LKC à RQG, ainſi eſt le priſme CKLMNO au priſme GQRSTV, comme nous demonſtrerons incontinent: & partant ainſi auſsi le priſme IBKLMN eſt au priſme PFQRST, puis que ceux-cy ſont egaux à ceux-là: Et comme un ſeul priſme, ſçavoir IBKLMN, eſt à un ſeul priſme PFQRST, ainſi ſont les 2. priſmes enſemble IBKLMN,

CKLMNO, aux deux prismes ensemble PQRSTV p
12. prop. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EF
ainsi les deux prismes en la pyramyde ABCD seront aux d
prismes en la pyramide EFGH. Nous demontrerons en la m
me maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNOD, E
tes en la pyramide ABCD, être à deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faites en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme division sera faite. Mais comme ces bases-là sont à celles-cy ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi à la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelcõque pyramide faite en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faite en la pyramide EFGH : & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront tant les prismes de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. prop. 5. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes étans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. ensemble, sont à tous les prismes étans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. ensemble, si ceux-cy sont egaux en multitude à ceux-là : pareillement comme la base ABC est à la base EFG,



ſi ſeront tous les priſmes de la pyramide ABCD, à tous les ſmes de la pyramide EFGH. Parquoy s'il y a deux pyrami-s de meſme hauteur, ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il oit prouver.

LEMME.

Or que comme LKC eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO oit au priſme GQRSTV, nous le demontrerons ainſi. Soient imaginées tomber des ſommets D, H, des lignes erpendiculaires ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſe-ront les hauteurs egales des pyramides ABCDEFGH. Donc uis que les plans parallels ABC, MNO coupent proportio-uellement par la 17. prop. 11. deux lignes droites, ſçavoir DC, & la perpendiculaire tombant de D, & DC eſt coupée en deux egalement en O: pareillement la perpendiculaire tombant de D, ſera coupée en deux egalement au point au-quel elle rencontre le plan MNO. Par la meſme raiſon la perpendiculaire tombant de H, ſera coupée en deux egale-ment par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendi-culaires ſont poſées egales, leurs moitiez, ſçavoir eſt les hauteurs des priſmes, ſeront auſſi egales: & partant les priſmes CKLMNO, GQRSTV étans à egales hauteurs, ſe-ront entr'eux, comme les baſes LKC, RQG, par les cho-ſes que nous avons demontrées au ſcholie de la 34. prop. 11.

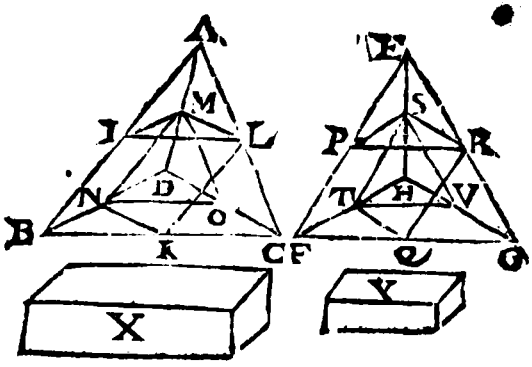
THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de même hauteur ayans baſes triangulaires, ſont l'une à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquelles les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Je dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe.

Autrement, ſoit imaginé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſoit à quelque ſolide comme X, lequel ſera plus petit ou plus grand que la pyramide EFGH: Et ſoit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du ſolide Y. Ainſi nous imaginons que les deux ſolides X & Y, ſont egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diviſer une pyramyde en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, leſquels ſeront plus grands que la moitié de la pyramide totale; Que ſi de la pyramide EFGH,

on retranche plus de la moitié, ſçavoir les deux priſ
PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide reſta
EPRS, STVH, encores plus de la moitié, ſçavoir deux pri
mes, en continuant toûjours juſques à ce que toutes les pyr
mides reſtantes apres le dernier retranchement, ſoient tout
enſemble manifeſtement plus petites que le ſolide Y : ce q
peut arriver par la 1. prop. 10. Ainſi tous les priſmes enſemb
retranchez de la pyramide EFGH, ſeront plus grands que
ſolide X, puis que le reſte eſt plus petit que le ſolid
Y. Pareillement ſoient retranchez autant de fois deux pri
mes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché d
la pyramide EFGH : il eſt evident par ce qui a été demontré e
la precedente propoſition, que comme la baſe ABC eſt à la ba
ſe EFG, ainſi tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD
ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH:
Mais nous avons poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe
EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Or tous



les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſont plus petits qu'icelle pyramide : donc par la 14. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, ſeront auſſi plus petits que le ſolide X : Mais nous les avons tantoſt prouvez plus grands: Ce qui eſt abſurde. Partant le ſolide X n'étoit pas plus petit que le pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible ; & puis que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD au ſolide X en permutant la baſe EFG, ſera à la baſe ABC, comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD. Mais comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD, ſoit poſé la pyramide EFGH eſtre à quelqu'autre ſolide, comme Y : Et par la 14. prop. 5. d'autant que le ſo-

solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y : & par la p. 5. comme la base EFG est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à un solide plus petit que l'autre pyramide : mais nous avons demontré que cela étant, il s'ensuit une absurdité, savoir que les prismes retranchez d'une pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit: il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a été posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X ; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egal à iceluy solide X ; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de mesme hauteur,&c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Par la converse: Si les pyramides triangulaires sont entr'elles comme leurs bases ; elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, en soit coupée d'icelle une egale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la base, soient tirées des lignes droites, & comme la base sera à la base, ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituée: mais elle étoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. pr. 5. la pyramide constituée sera egale à toute la pyramide ; c'est à sçavoir la partie au tout : ce qui est absurde.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituées sur mesme, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles : puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posées egales, ou une seule & mesme.

Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituées sur une mesme, ou egales bases, sont de mesme hauteur : Et que les pyramides egales, & ayans mesme hauteur, ont les bases egales, si elles ne sont un mesme : lesquelles deux choses l'on demontrera par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous avons usé en demontrant la converse des 30. & 31. pr. 11. si tant sur la

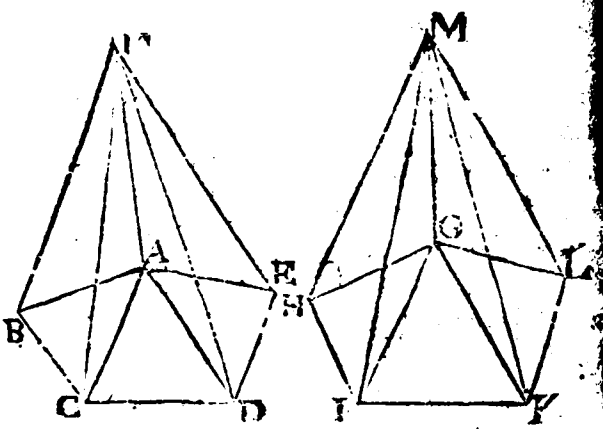
hauteur, que sur la base coupée est constituée une autre pyramide, &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de même hauteur ayans bases polygones, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide ABCDEF de mesme hauteur que la pyramide GHIKLM, desquelles les bases ABCDE & GHIKL sont polygones: Je dis que comme la base est à la base, ainsi la pyramide est à la pyramide.

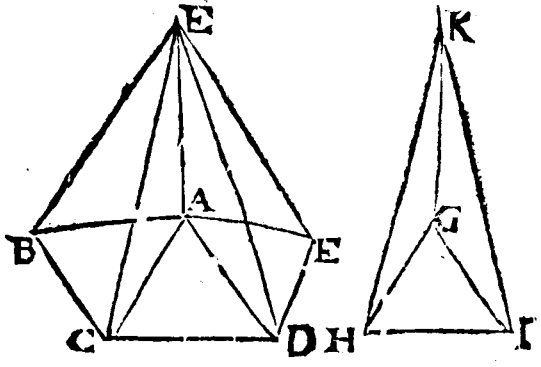
Car les bases étans reduites en triangles ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL: soit imaginé sur chacun d'iceux une pyramide de mesme hauteur que la totale. Donc puis que par la prop. 12. comme la base ABC est à la base ACD, ainsi la pyramide ABCF est à la pyramide ACDF; en composant, comme la base ABCD sera à la base ACD, ainsi la pyramide ABCDF sera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5. prop. 12. comme la base ACD est à la base ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF. Donc en raison egale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF: & partant en composant, comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera demontré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GKLM: & en changeant, comme la base GKL est à la base GHIKL ainsi la pyramide GKLM est à la pyramide GHIKLM. Derechef, puis que par la 5. prop. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide



GKLM : les 4. baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, ſeront en meſmes raiſons que les quatre pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM : Parquoy en raiſon egale, comme la baſe ABCDE eſt à la baſe GHIKL, ainſi la pyramide ABCDEF eſt à la pyramide GHIKLM. Donc les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, &c. Ce qu'il faloit prouver.

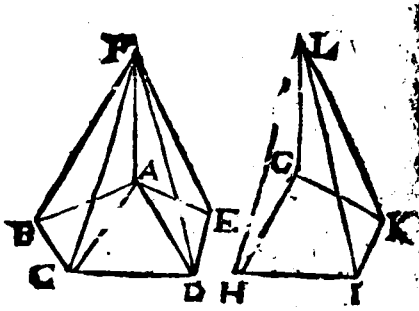
SCHOLIE.

Encore que ſelon pluſieurs Interpretes, il ſoit parlé en la demonſtration de cette propoſ. ſeulement des pyramides de meſme hauteur, deſquelles les baſes polygones ont les coſtez egaux en nombre : toutesfois nous demontrerons auſſi le meſme des pyramides de meſme hauteur, la baſe de l'une deſquelles contient plus de coſtez que la baſe de l'autre. Car ſoient premierement deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIK, la baſe de l'une deſquelles ſoit polygone, ſçavoir eſt pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe : Car le pentagone étant reſoud en triangles, auſſi la pyramide ſera divisée en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC premiere quantité eſt à la baſe GHI, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſiéme quantité eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité. Et en la meſme maniere, comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxiéme quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIK quatriéme quantité : par la 24. p. 5. comme la baſe ABCD premiere & cinquiéme quantité enſemble ſera à la baſe GHI ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité avec la 6e. ſera à la pyramide GHIK 4e. quãtité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD eſt à la baſe GHI, ainſi la pyramide ABCDF eſt à la pyramide GHIK, comme nous venons de



demontrer : & que par la 5. prop. 12. comme la baſe A cinquiéme quantité eſt à la baſe GHI deuxéme quanti ainſi la pyramide ADEF ſixiéme quantité eſt à la pyram GHIK quatriéme quantité : par la meſme 24. propoſitio la baſe ABCDE ſera à la baſe GHI, comme la piram ABCDEF eſt à la piramide GHIK : ce qui etoit propoſé. la meſme maniere faudroit toûjours proceder s'il y av davantage de triangles en la baſe du polygone. Or puis q comme il a eſté demontré, la base du polygone ABCDE eſt à la baſe triangulaire GHI, ainſi que la pirami ABCDEF eſt à la piramide GHIK : *pareillement en cha geant, comme la baſe* GHI *ſera a la base ABCDE, ainſi piramide* CHIK *ſera à la piramide ABCDEF. Parqu deux piramides, deſquelles l'une à la base poligone, & l'au tre triangulaire, ſont toûjours comme leurs bases, de que que façon que l'on commence : Car encore que la demonſtra tion commence au poligone & à ſa piramide, comme apet par la demonſtration ci-deſſus, toutesfois en changeant, eſt permis de commencer au triangle & à ſa piramide, com me il a été dit.*

Maintenant ſoient deux piramides de meſme hauteu ABCDEF, CHIKL, *deſquelles les bases ſont poligones & ſont plus de coſtez en une base qu'en l'autre : Ie di derechef que la piramide eſt à la piramide, comme la base eſt à la base. Car étant resoud le poligne ABCDE és triangles ABC, ACD, ADE : la piramide ſera divisée en autant de piramides. Et d'autant que comme la base triangulaire ABC, premiere quantité, eſt à la base poligne* GHIK, *ſeconde quantité, ainſi la piramide ABCF troiſiéme quantité, eſt à la piramide* GHIKL *quatriéme quantité ; & comme la base ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la piramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la piramide* GHIKL *quatriéme quantité : auſſi par la 24. prop. 5. comme la baſe ABCD premiere quantité avec la cinquiéme ſera à la base* GHIK *ſeconde*



antité, ainſi la piramide ABCDF troiſiéme quantité avec la ſixiéme ſera à la piramide GHIKL *quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la base ABCD premiere quantité eſt à la base* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la piramide ABCDF tierce quantité, eſt à la piramide* GHIKL *quatriéme quantité: & auſsi que comme la base ADE quinte quantité, eſt à la base* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la piramide ADEF ſixiéme quantité, eſt à la piramide* GHIKL *quarte quantité; pareillement par la 24. propoſit. 5. comme la base ABCDE premiere quantité avec la quinte, ſera à la baſe* GHIK *ſeconde quantité, ainſi la piramide ABCDEF tierce quantité avec la ſixiéme, ſera à la piramide* GHIK *quatriéme quantité: ce qui eſtoit propoſé. Il faudroit toûjours proceder en la meſme maniere s'il y avoit davantage de triangles en la base.*

Or nous convertirons tant cette 6. prop. d'Euclide que celle demontrée en ce Scholie en cette maniere.

Les pyramides de quelconques baſes, leſquelles ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on demontrera en la meſme maniere, que les choſes dites au Scholie de la 5. propoſition de ce livre, ont eſté demontrées.

COROLLAIRE.

Il apert auſsi que les piramides de meſme hauteur, conſtituées ſur baſes egales multilateres, ou ſur une meſme, eſtre egales entr'elles, puis qu'elles ont meſme raison que leurs bases, leſquelles ſont poſées egales, ou une meſme.

Derechef, eſt evident que les piramides multilateres egales, & conſtruites ſur baſes egales, ou ſur une meſme, ont meſme hauteur. Et que les piramides multangulaires egales, & ayans meſme hauteur, ont auſsi les bases egales, ſi elles ne ſont une meſme. Ce qui ſe peut demontrer comme nous avons dit au corollaire de la 5. propoſition de ce livre.

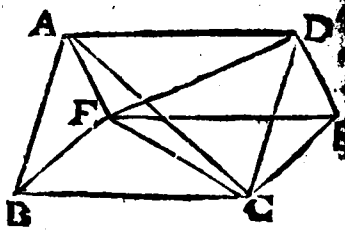
THEOR. 7. PROP. VII.

Tout priſme ayãt la baſe triãgulaire peut être diviſé

en trois pyramides egales, ayans baſes triangulaires.

Soit le priſme ABCDEF duquel les deux triangles oppoſ ABF, DCE ſont egaux & ſemblables. Je dis qu'iceluy priſ peut eſtre diviſé en trois pyramides egales, ayans baſes triang laires.

Car aux trois parallelogrammes d'iceluy priſme, ſoient m nées les trois diametres AC, CF, FD; d'autant que par la 34. pr. 1. les triangles ABC, ADC ſont egaux, & que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ADC, ainſi eſt la pyramide ABCF à la pyramide ADCF, (car elles ont une meſme hauteur, ſçavoir eſt la perpendiculaire menée du ſommet F au plan BCD) icelles pyramides ſeront egales entr'elles. Par meſme raiſon ſeront egales les pyramides ADFC, EFDC, conſtituées ſur les baſes egales ADF, EFD, & ſous meſme hauteur, ſçavoir de la perpendiculaire menée du ſommet C ſur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF eſt la meſme que la pyramide ADFC: puis que l'une & l'autre eſt contenuë des quatre plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Parquoy tout priſme ayant baſe triangulaire, &c. Ce qu'il faloit prouver.



COROLLAIRE.

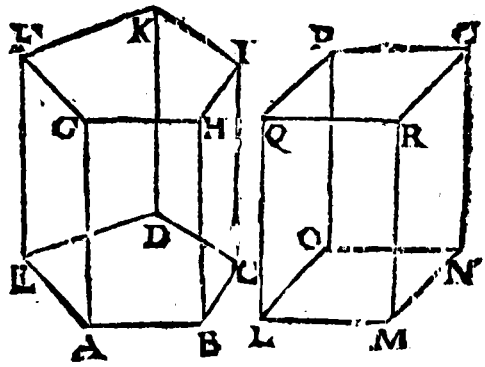
De cecy reſulte que tout priſme eſt triple d'une pyramide de meſme hauteur, étant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales, ou bien qu'une pyramide eſt la tierce partie d'un priſme de meſme hauteur, étant ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales.

SCHOLIE.

Nous ajoûterons icy la demonſtration d'une autre propoſition, touchant les priſmes qui ont au ſommet les plans paralleles à la baſe, egaux & ſemblables: cette propoſition eſt telle.

Les prismes étans sous mesme hauteur, & ayans quelconques baſes, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient deux prismes de mesme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, desquels les baſes ſont figures multilateres. Ie dis que comme la base ABCDE eſt à la baſe LMNO, ainſi eſt le prisme au prisme. Car ſi de tous les angles de chaque baſe on tire des lignes droites à un point du plan ſuperieur, qui eſt opposé à la baſe, ſe feront deux pyramides ſous meſme hauteur, ayans meſmes bases que le prisme : Et partant par le corollaire ci-deſſus, chaque piramide ſera la troiſiéme partie de ſon prisme. Parquoi par la 15. prop. 5. comme la piramide ſera à la piramide, ainſi le prisme ſera au prisme: Mais la piramide eſt à la piramide, comme la base à la base, ainſi qu'il a eſté demontré à la 6. prop. de ce livre. Donc auſſi comme la base ſera à la base, ainſi le prisme ſera au prisme. Ce qui étoit proposé.



COROLLAIRE.

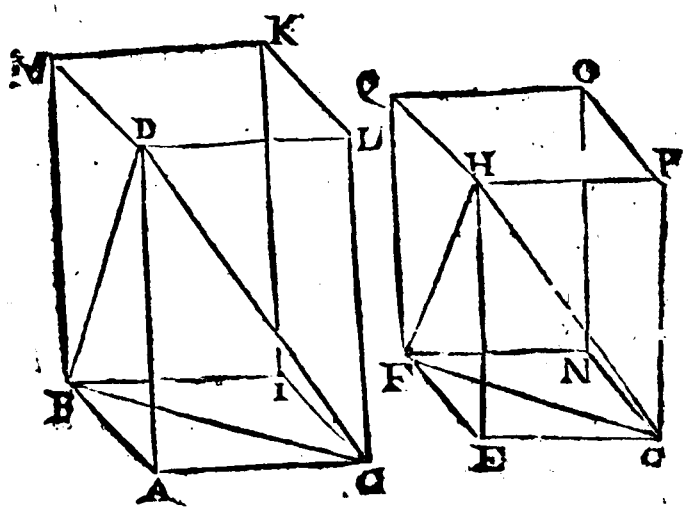
Il eſt manifeſte par ces choses, que les prismes de meſme hauteur, & conſtituez ſur meſme base, ou ſur baſes egales quelles qu'elles ſoient, ſont egaux entr'eux, puis qu'ils ont meſme raiſon entr'eux que leurs baſes, leſquelles ſont une meſme, ou bien ſont egales.

Apert auſſi par le contraire, que les prismes egaux conſtituez ſur une meſme baſe, ou ſur egales ſont en meſme hauteur : Et que les prismes egaux de meſme hauteur, ont auſſi meſme baſe, ou egales. Ce qu'on demontrera en la meſme maniere qu'a eſté demontré la converſe de la 31. prop. 1.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides ſemblables ayans baſes triangulaires, ſont en raiſon triplée de leurs côtez homologues.

Soient deux pyramides ſemblables ABCD & EFGH, [illegible] baſes triangulaires ABC & EFG ; Je dis qu'elles ſont en [illegible] ſon triplée des coſtez de meſme raiſon AC & EG. Car [illegible] achevez les parallelipipedes AK & EO. D'autant que les [illegible] ramides ſont ſemblables, les trois angles plans de l'angle [illegible] de A, (ſçavoir DAC, DAB, BAC) ſeront egaux aux [illegible] angles plans de l'angle ſolide E, (ſçavoir HEG, HEF, FE [illegible] & les coſtez au long d'iceux angles egaux, proportionaux ; [illegible] lement que comme DA eſt à AC, ainſi HE eſt à EG ; comme DA eſt à DB, ainſi HE eſt à EF : & comme BA



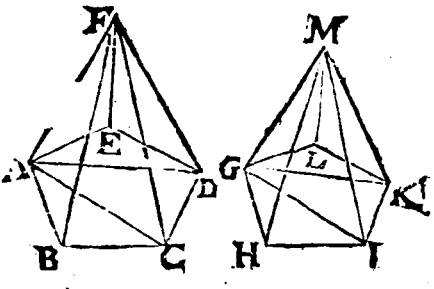
à AC, ainſi FE eſt à EG : Parquoy les trois parallelogramme [illegible] AL, AM, AI ſeront ſemblables aux trois parallelog. EP, EQ [illegible] EN. Mais par la 24. prop. 11. tant les trois AL, AM, AI du parallelipipede AK ſont egaux & ſemblables aux trois oppoſez BK, CK, ML ; que les trois EP, EQ, EN du parallelipipede EO, le ſont aux trois oppoſez QN, PN, HO : & partant les ſix plans du parallelipipede AK ſont ſemblables aux ſix plans du parallelipipede EO. Et par la 9. definition 11. iceux parallelipipedes ſont ſemblables. Donc par la 33. propoſition 11. ils ſeront en raiſon triplée de leurs coſtez homologues AC & EG. Mais par la 15. propoſition 5. comme le parallelipipede AK eſt au parallelipipede EO, ainſi la pyramide ABCD eſt à la pyramide EFGH : (car chacune d'icelles pyramides eſt la ſixiéme partie de ſon parallelipipede, puis que chaque parallelipipede peut eſtre diviſé en deux priſmes egaux

par la 38. proposition 11. & chacun prisme en trois pyramides egales par la precedente proposition) donc par la 11. proposition 5. lesdites pyramides ABCD, EFGI, sont aussi en la raison triplée des mesmes costez AC & EG. Parquoy les pyramides semblables ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE.

De ceci est manifeste, qu'aussi les piramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

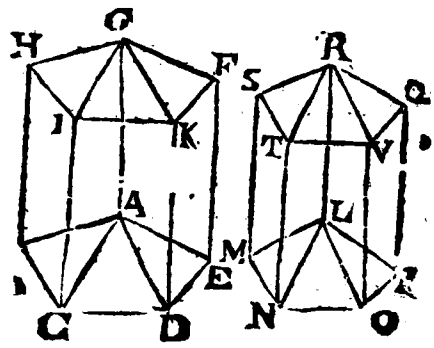
Soient les piramides semblables ABCDEF, GHIKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Ie dis qu'icelles piramides sont en raison triplée des costez homologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droites AC, AD: GI, GK: par la 20. proposition 6. les bases semblables seront divisées en nombre egal de triangles semblables, sçavoir est que les triangles ABC, ACD, ADE, seront semblables aux triangles GHI, GIK, GKL. *Donc puis que les piramides sont semblables, les triangles AFB,* GMH, *sont semblables, & l'angle FAB, egal à l'angle* MGH; *& comme FA sera à AB, ainsi* MG *sera à* GH: *mais comme AB à AC, ainsi* GH *à* GI, *à cause de la similitude des triangles ABC,* GHI: *donc en raison egale, comme FA sera à AC, ainsi* MG *sera à* GI. *Derechef, puis que comme AC est à CB, ainsi* GI *est à IH, à cause de la similitude des triangles ABC,* GHI: *& comme CB à CF, ainsi IH à IM, car à cause de la similitude des piramides, les triangles BCF, HIM, sont semblables: aussi en raison egale, comme AC sera à CF, ainsi* GI *sera à IM, & partant puis que comme FA à AC, ainsi* MG *à* GI; *& comme AC à CF, ainsi* GI *à IM: pareillement en raison egale,*



comme FA ſera à FC, ainſi MG à MI. Parquoi par la prop. 6. les triangles AFC, GMI, ſeront equiangles, & par tant ſemblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC ſont auſſi ſemblables aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. def. 11. les piramides ABCF, GHIM, ſont ſemblables. Par meſme raiſon ſeront ſemblables les piramides ACDF, GIKM: Item ADEF, GKLM. Parquoi par la prop. 12. les piramides ABCF, ACDF, ADEF, ſeront aux piramides GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne en raiſon triplée des coſtez homologues AB, CD, DE, GH, IK, KL, chacun au ſien. Veu donc qu'à cauſe de la ſimilitude des baſes ABCDE.GHIKL, il y a une ſeule & meſme raiſon de AB, CD, DE à GH, IK, KL: auſſi les piramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux piramides GHIM, GIKM, GKLM, une ſeule & meſme raiſon, c'eſt à ſçavoir triplée. Et par la 12. prop. 5. comme une ſeule piramide ABCF, eſt à une ſeule piramide GHIM, ainſi toutes les piramides, ſçavoir eſt la piramide ABCDEF, eſt à toutes les piramides, ſçavoir à la totale GHIKLM. Parquoi puis que par la 8. propoſition 12. la piramide ABEF eſt à la piramide GHIM en raiſon triplée des coſtez homologues AB, GH, auſſi la piramide ABCDEF ſera à la piramide GHIKLM en la raiſon triplée des meſmes coſtez homologues AB, GH: Ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon les prismes ſemblables ſont en raiſon triplée de leurs coſtez homologues: Car ſoient deux prismes ſemblables ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV: Ie dis qu'ils ſont en raiſon triplée des coſtez homologues. Car ſi des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO; par la 20. p. 6. les triãgles ABC, CAD, DEA, ſerõt ſemblables aux triangles LMN, LNO, OPL. Semblablement, ſi des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV; les triangles GHI, GIK, GKF,



ferent auſſi ſemblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux ſuſdits : puis que par la def. du priſme, tous les plans oppoſites des priſmes ſont ſemblables. Et d'autant qu'à cauſe de la ſimilitude des priſmes, les parallelogrammes CH, NS ſont ſemblables, comme CI ſera à CB, ainſi TN ſera à NM: mais comme BC eſt à CA, ainſi NM eſt à NL à cauſe de la ſimilitude des triangles. Donc en raiſon egale, comme CI ſera à CA, ainſi TN à NL. Derechef pource que l'angle ſolide N, eſt egal à l'angle ſolide C, à cauſe de la ſimilitude des priſmes, ſi celuy-cy eſt ſuperpoſé à l'autre, l'angle MNO conviendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD, mais auſſi la ligne droite NL convient à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA ſont egaux. Donc les angles ICA, TNL ſont egaux; & partant puis que les coſtez d'alentour iceux, ont eſté demontrez proportionaux, les parallelogrammes CG, NR, ſeront ſemblables. Mais auſſi les parallelogrammes CH, HA, ſont ſemblables aux parallelogrammes NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les priſmes ABCIGH, LMNTRS, ſont ſemblables, par la 8. def. 11. On demontrera en la même maniere que les priſmes CDAGIK, NOLTRV, ſont ſemblables, comme auſſi les priſmes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les priſmes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF par les choſes demontrées à la 34. pr. 11. ſont aux priſmes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au ſien, en raiſon triplée des coſtez homologues BC, CD, DE à MN, NO, OP; chacun au ſien. Et partant en la meſme maniere que nous avons demontré cy-deſſus des piramides multangles, on demontrera que les priſmes ABCDEF GHIK, LMNOPQRSTV, ſont en raiſon triplée des côtez homologues BC, MN.

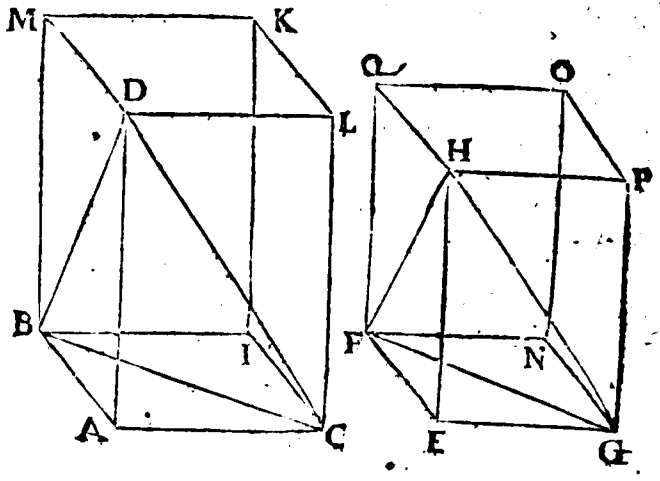
De toutes ces choſes ſe collige. que les pyramides multangles ſemblables, ſe diviſent en pyramides triangulaires ſemblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Ce qui eſt manifeſte par la demonſtration du precedent corollaire.

Il ſe collige auſſi que les priſmes multangulaires ſemblables, ſe diviſent en priſmes ſemblables, ayans baſes triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme apert par la demonſtration de ce ſcholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales ayans baſes triangulair les hauteurs ſont reciproques aux baſes : Et l pyramides ayans baſes triangulaires recipro ques à leurs hauteurs, ſont egales.

Soient les pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans baſ triangulaires ; ie dis que les baſes d'iceſſes ſont reciproques leurs hauteurs, c'eſt à dire que comme la baſe ABC à la baſ EFG, ainſi la hauteur du point H à la hauteur du point D.



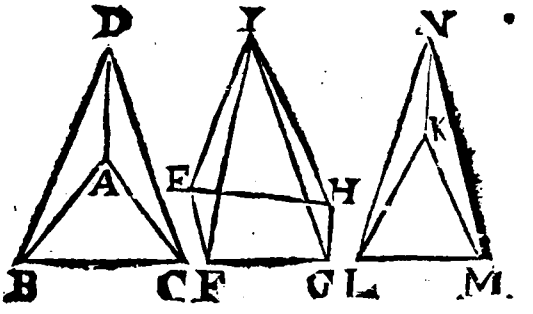
Car ſoient achevez les parallelipipedes AK, EO; & cõme il a été dit en la pr. precedente, chacun d'iceux parallelipipedes ſera ſextuple de ſa pyramide. Et les deux pyramides eſtans egales, iceux ſolides AK, EO, ſeront egaux ; & par la 34. prop. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux baſes. (C'eſt à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point H, ainſi la baſe EN à la baſe AI.) Mais comme EN eſt à AI, ainſi le triangle EFG (moitié de EN) eſt au triangle ABC ; (moitié de AI) & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du point D eſt à la hauteur du point H, ainſi le triangle EFG eſt au triangle ABC.

Pour la ſeconde partie : Si la hauteur du point D eſt à la hauteur du point H, comme le triangle EFG eſt au triangle ABC : ie dis que les pyramides ABCD, EFGH ſeront egales. Car il eſt evident comme cy deſſus que la hauteur du point D, ſera à la hauteur du point H, comme la baſe EN à la baſe AI : (d'autant qu'elles ſont doubles des triangles EFG & ABC) ainſi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux baſes :

par la 34. prop. 11. ils seront egaux ; & par consequent leurs ziémes parties serõt aussi egales, ç'avoir les pyramides ABCD EFGH : Parquoy des pyramides egales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

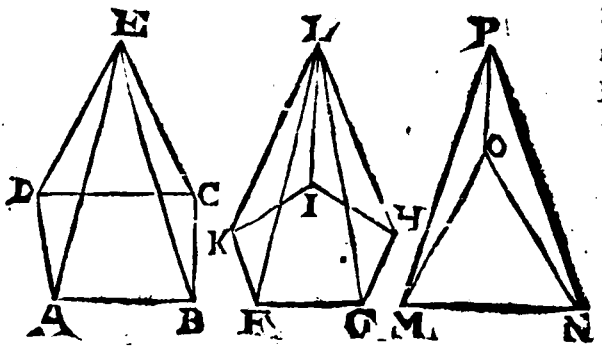
Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premieremẽt deux pyramides egales, l'une desquelles ABCD ait la base triangulaire, mais l'autre EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM egal à la base non triangulaire EFGH ; puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide KLMN, *de même hauteur que la piramide* EFGHI. *Or d'autant que les piramides* EFGHI, KLMN, *ont les bases egales, & même hauteur; elles seront egales, par les choses demontrées au scholie de la 6. p. 12. Mais la piramide* EFGHI *a esté posée egale à la piramide ABCD ; donc aussi les piramides* ABCD, KLMN *serõt egales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangulaires, par la 9. pr. 12. comme la base ABC sera à la base* KLM, *ou à son egale* EFGH, *ainsi la hauteur de la piramide* KLMN, *c'est à dire la hauteur de la piramide* EFGHI, *sera à la hauteur de la piramide ABCD: & partant les piramides egales ABCD,* EFGHI, *les bases & hauteurs sont reciproques.*



Mais maintenant d'icelles piramides, les bases & hauteurs soient reciproques: ie dis qu'icelles piramides sont egales. Car demeurant la même construction faite cidessus; puis que la base ABC est posée estre à la base EFGH, *comme la hauteur de la piramide* EFGHI *à la hauteur de la piramide* ABCD; *aussi la base ABC sera à la base* KLM, *comme la hauteur de la piramide* KLMN *sera à la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9. pr. 12. les pyramides ABCD,* KLMN, *sont egales. Mais comme nous avons demontré au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide* KLMN

eſt egale à la pyramide EFGHI; donc auſſi la pyram... ABCD ſera egale à la pyramide EFGHI, Ce qui eſt propoſé.

Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FG... IKL, ayans baſes multangulaires. Soit fait derechef... triangle MNO egal a la baſe ABCD, & la pyrami... MNOP de méme hauteur que la pyramide ABCDE. Do... par les choſes demontrées au ſcholie de la 6. prop. 12. la py... ramide MNOP ſera egale à la pyramide ABCDE, laquell... a eſté poſée egale a la pyramide FGHIkL: donc auſſ... la pyramide MNOP ſera egale à pyramide FGHIkL. Par... quoy comme nous avons demontré cy-deſſus, ainſi que la... baſe MNO, c'eſt à dire la baſe ABCD, ſera à la baſe FGHIk... ainſi la hauteur de la pyramide FGHIKL ſera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'eſt à dire a la hauteur de la pyramide ABCDE: Et partant des pyramides egales ABCDE, FGHIKL, les baſes & hauteurs ſont reciproques.



Mais ſoient maintenant reciproques les baſes & hauteurs d'icelles pyramides: on demontrera comme deſſus qu'elles ſont egales.

Or tout ce que nous avons demontré cy-deſſus peut auſſi convenir à quelconques prismes. Car ſi les prismes eſtoient egaux, auſſi les pyramides de méme hauteur qu'iceux, ayans les mêmes baſes, ſeroient egales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. prop. 12. elles ſont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le Scholie de la méme prop. Parquoy comme nous avons demontré n'agueres, les baſes & hauteurs d'icelles piramides, ſeront reciproques. Veu donc que ces baſes & hauteurs ſont les mêmes que des prismes, les baſes & hauteurs des prismes ſeront pareillement reciproques.

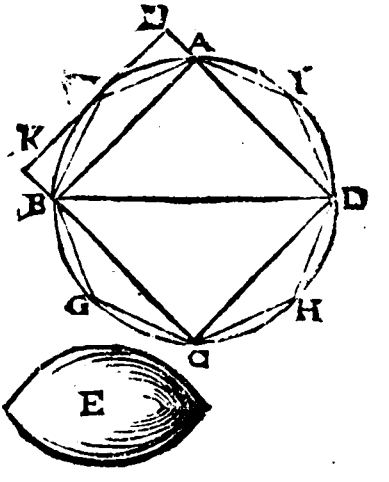
Derechef, ſi les baſes & hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des piramides ayans mêmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Parquoy comme il a eſté démontré, les piramides ſont égales: & partant auſſi les priſmes, puis que d'icelles piramides, ils ſont triples, ou ſeſquialteres. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone eſt la troiſiéme partie du cylindre qui a même baſe, & egale hauteur.

Soit un cone & un cylindre ayans une meſme baſe, ſçavoir le cercle ABCD, & une meſme hauteur. Je dis qne le cylindre eſt triple du cone.

Autrement, il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone: Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible, ſçavoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire, que ſi du cylindre ayant pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone ayant pour baſe le meſme cercle ABCD: dans iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, diviſé en deux triangles par la diagonale BD, & ſur iceux triangles ſoient imaginez eſtre élevez deux priſmes de méme hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré eſt plus de la moitié du cercle, il eſt evident qu'iceux deux priſmes ſeront plus de la moitié du cylindre. Que ſi les ſegmens reſtans du cylindre, (les deux priſmes eſtans ôtez) ſont encores plus grands que le ſolide E, ſur les baſes d'iceux ſegmens ſoient faits les quatre triangles Iſoſceles AFB, BGC, CHD, DIA, & ſur iceux ſoient imaginez eſtre élevez quatre priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre, dont la baſe eſt le cercle



ABCD. Il eſt evident que ces triangles Iſoſcelles ſont pl
la moitié des baſes des ſegmens reſtans du cylindre ; & par c
ſequent qu'iceux quatre priſmes ſeront plus de la moitié d'ic
quatre ſegmens: Que ſi les huit petits ſegmens reſtans du cy
dre ne ſont plus petits que le ſolide E, ſoit toûjours en cette
çon ſouſtrait plus de la moitié de ce qui reſtera, iuſqu'à ce q
les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E : Ce q
doit advenir par la 1. prop. 10 Et pour abreger, ſoient iceux
petits ſegmens plus petits qu'iceluy ſolide E. Il eſt donc man
feſte que la colomne compoſée de ces ſix priſmes, ayant po
baſe le poligone inſcrit au cercle ABCD, & de meſme haute
que le cylindre donné, ſera plus que triple d'icelty cone ; p
ce qui a eſté dit cy-deſſus. Or d'autant que chacun priſme e
triple de la pyramide de meſme hauteur, & ayant baſe egale (c
il peut eſtre diviſé en trois telles pyramides egales par la 7. p
12.) il s'enſuit que tous iceux priſmes faiſans la colomne qui
pour baſe le polygone inſcrit au cercle ABCD, (c'eſt à dire icel
le colomne de meſme hauteur que le cylindre) eſt triple de tou
tes les ſix pyramides, qui ſont la ſeule pyramide, ayant le meſ
me polygone pour baſe, & de meſme hauteur qu'icelle colom
ne. Partant icelle pyramide ſera plus grande que le cone d
meſme hauteur, qui a le cercle ABCD pour baſe : ce qui eſt
impoſſible, n étant la pyramide que partie du cone. Donc le
cylindre n'étoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il eſt poſſible ; ſçavoir de la quantité
du ſolide E, c'eſt à dire que ſi on retranche le ſolide E du cone,
que le reſidu ſoit la troiſiéme partie du cylindre. Maintenant
du cone, qui a pour baſe le cercle ABCD, ſoit retranché plus
de la moitié, ſçavoir la pyramide de meſme hauteur, ayant
pour baſe le quarré ABCD, & du reſidu, ſçavoir des quatre
ſegmens F,G,H,I, ſoit retranché plus de la moitié, ſçavoir la
pyramide de chacun ſegment, de meſme hauteur qu'iceluy
ſegment, & ayant pour baſe le triangle Iſoſcelle en iceluy ſeg-
ment : ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que les ſeg-
mens reſtans ſoient plus petits que le ſolide E : ce qui doit arri-
ver par la 1 prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huit pe-
tits ſegmens plus petits que le ſolide E : il eſt donc evident que
la pyramide de meſme hauteur que le cone, qui a iceluy octo-
gone pour baſe, eſt plus grande que le tiers du cylindre donné,
d.autant qu'elle eſt plus grande que le cone, apres que d'iceluy
on a retranché le ſolide E. Or iceluy cone ainſi reſcindé eſt le

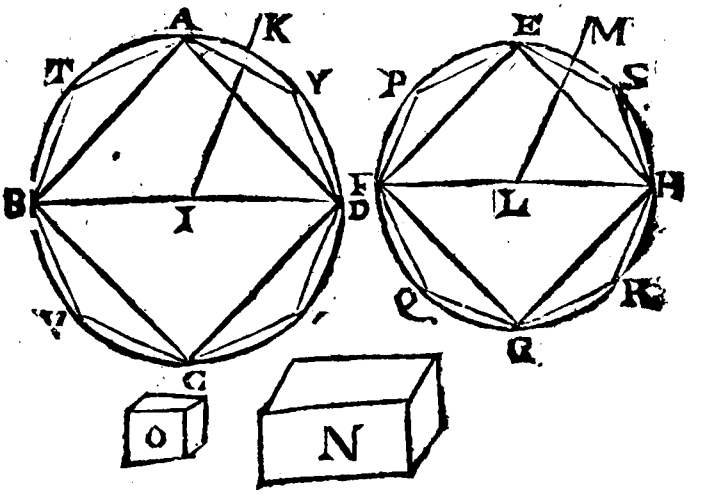
tiers

ers du cylindre donné, & la pyramide eſt auſſi, (comme il a été dit cy-deſſus le tiers de la colomne de meſme hauteur, ayant meſme octogone pour baſe : Partant icelle colomne ſeroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle eſt partie : Ce qui eſt impoſſible. Donc le cylindre donné n'eſtoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone : il faut donc qu'il luy ſoit egal. Parquoy tout cone eſt la troiſiéme du cylindre ; &c. Ce qui eſtoit à demontrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de même hauteur, ſont l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux cones de meſme hauteur, deſquels les baſes ſont les cercles ABCD & EFGH, les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Je dis que comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au cone FM ; c'eſt à dire que ſi on imagine quelque autre ſolide, cõme N ; iceluy ſolide N ſera egal au cone FM.



Autrement, il ſera plus petit ou plus grand : Soit premierement plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité du ſolide O : donc les deux ſolides N & O ſeront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, ſoit retranché plus de la moitié, ſçavoir une pyramide de meſme hauteur que

le cone, ayant pour baſe le quarré EGHE : & du reſidu e
res plus de la moitié, ſçavoir quatre pyramides de meſme h
teur que le cone, ayans pour baſes les quatre triangles Iſoſc
EPF, FQG, GRH, HSE; en continuant toûjours iuſques
que le reſidu ſoit plus petit que le ſolide O : & ſoit iceluy r
du pour abreger les huit petits ſegmens : il s'enſuit que la
ramide FM de meſme hauteur que le cone FM, & ayant p
baſe l'octogone EPFQGRHS, ſera plus grãde que le ſolide
Au cercle ABCD, ſoit inſcrit un polygone ſemblable au po
gone inſcrit dans la baſe circulaire EFGH, & ſur iceluy f
imaginé eſtre élevée une pyramide de meſme hauteur que
cone BK. Or par le corol. de la 2. prop. 12. comme le cerc
ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le polygone TVXY eſt
poligone LQRS : mais comme le cercle ABCD eſt au cerc
EFGH, ainſi le cone BK eſt au ſolide N, & par la 6. prop. 1
comme le poligone au poligone, ainſi la pyramide à la pyra
mide de meſme hauteur que les cones : & partant par la
prop. 5. la pyramide ATBVCXDYK ſera à la pyramide E
QGRHSM, comme le cone BK au ſolide N. Mais la pyram
de ATBVCXDYK eſt plus petite que le cone BK ; la part
que le tout : Donc auſſi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQ
RHSM ſera moindre que le ſolide N. Mais elle a eſté demon
trée auſſi plus grande : ce qui eſt abſurde. Donc le ſolide
n'eſtoit pas plus petit que le cone FM.

Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible : Or puis que l'on a poſ
le cercle ABCD eſtre au cercle EFGH, comme le cone BK
ſolide N, en permutant, comme le ſolide N ſera au cone BK
ainſi le cercle EFGH ſera au cercle ABCD : Mais comme ice-
luy ſolide N eſt au cone BK, ſoit auſſi le cone FM à quelqu
autre ſolide, comme O ; Et par la 14. prop. 5. puis que le ſolid
N eſt plus grand que le cone FM, auſſi le cone BK ſera plu
grand que le ſolide O. Parquoy puis que comme le cercle
EFGH eſt au cercle ABCD, ainſi le ſolide N eſt au cone BK
par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH eſt au cercle ABCD,
ainſi le cone FM au ſolide O, plus petit que le cone BK : ce qu
tantoſt nous avons montré eſtre impoſſible. Donc le ſolide N
n'eſt pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Par-
quoy puis qu'on a poſé la baſe ABCD eſtre à la baſe EFGH,
ainſi que le cone ABCDK au ſolide N : & que par la 7.
prop. 5. comme le cone ABCDK eſt au ſolide N, ainſi eſt le
meſme cone ABCDK au cone EFGHM : pareillement com-

que la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK sera au cone EFGHM.

Or ce que nous avons prouvé des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur: d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone, comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. pr. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

On peut convertir cette prop. ainsi: Les cones & les cylindres qui sont entr'eux comme leurs bases, sont de mesme hauteur.

Ce qu'on peut demontrer en la même façon que nous avons demontré la converse de la 31. prop. 11.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les cones, & les cylindres de même hauteur, constituez sur même base ou sur bases egales, sont aussi egaux. Il s'ensuit encore que les cones & les cylindres egaux constituez sur même base, ou sur bases egales sont de même hauteur; & que les egaux de même hauteur sont sur bases egales, s'ils n'ont une même base. Ce que l'on pourroit aussi demontrer, comme en la converse de la 31. prop. 11.

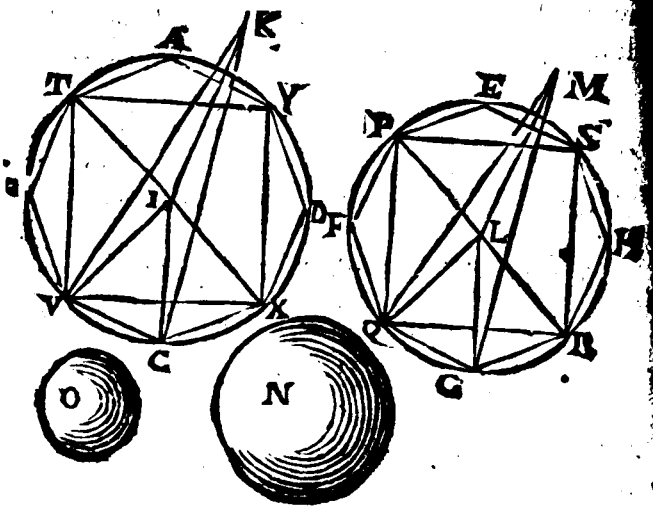
THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones, & les cylindres semblables, sont l'un à l'autre en raison triplée des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones, & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux soient IK, LM; & les diametres des bases TX, PR. Je dis que le cone est au cone, & le cylindre au cylindre, en raison triplée du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide,

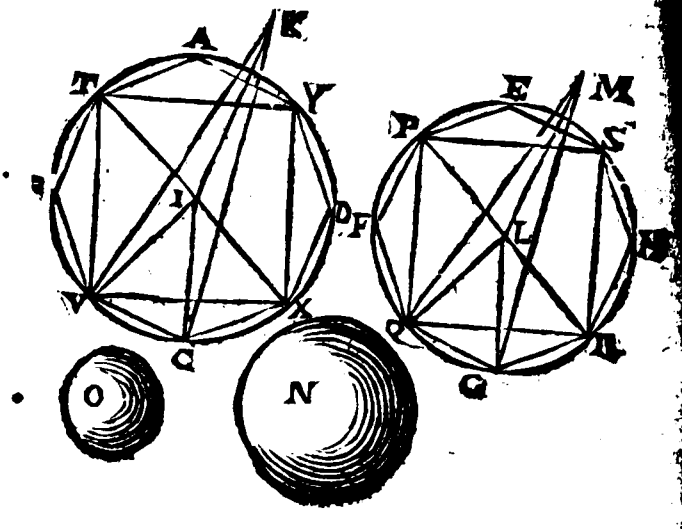
comme N, en raiſon triplée du diametre TX au diametre
iceluy ſolide N ſera egal au cone EFGHM.

Autrement, il ſera plus grand ou plus petit : Soit premierement plus petit, ſçavoir de la quantité du ſolide O : donc deux ſolides O & N ſeront egaux au cone EFGHM : & comme en la precedente ſoit faite diſtraction de plus de la moitié du cone EFGHM & du reſidu encore plus de la moitié, juſques à ce que les reſtes ſoient plus petits que le ſolide O: & pour abreger, iceux reſtes ſoient les huit petits ſegmens qui ſont en l'entour de la pyramide FM qui a pour baſe l'octogone EPFQGRHS; tellemẽt qu'icelle pyramide ſera plus grande que le ſolide N. Maintenant au cercle ABCD ſoit inſcrit un tel poligone que le plus grand inſcrit au cercle EFGH, ſçavoir ATBVCXDY: & ſur iceluy ſoit imaginé eſtre élevée une pyramide de meſme hauteur que le cone BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; ſoient menées les lignes QM, GM; VK, CK. afin d'avoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il eſt manifeſte que la pyramide ATBVCXDYK eſt compoſée d'autant de pyramides egales, qu'il y a de coſtez au poligone inſcrit dans le cercle, (c'eſt à ſçavoir qu'icelle pyramide totale BK eſt compoſée de huit pyramides egales & ſemblables à la pyramide VICK de meſme hauteur que la totale.) On peut dire ſemblablemẽt que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM eſt compoſée de huit pyramides egales & ſemblables à la pyramide QLGM, de meſme hauteur que ſa totale. Mais d'autant que les cones BK & FM ſont ſemblables par la definition



les cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR ; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM : & en permutant, comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL à l'axe LM : & les angles VIK & QLM estans droits, (car les cones sont posez droits, & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droits angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIK sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. pr. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L ; (ayans chacun la huitiéme partie de la circonference pour base) & partant par la 6. prop. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles ; partant semblables : Item VC est à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est à VK, comme QL à QM : & en raison egale, VC sera à VK, comme QG à GM : Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM : Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM & GM : Et partant par la 5. prop. 6. les triangles VKC, QMG, seront equiangles, & semblables : & par la def. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, seront semblables : Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplée de leurs costez homologues, sçavoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouvera les sept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK, proportioneles à une chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM : Et partant par la 12. prop. 5. les toutes seront aux toutes, comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide Bk est à toute la pyramide FM, en raison triplée du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX au diametre PR ; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR par la 15. pr. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplée des deux diametres TX, PR : Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide ATBVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. prop. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM : & il a esté demontré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide

N n'eſt pas plus petit que le cone FM. Qu'il ſoit donc plus grand, s'il eſt poſſible. D'autant qu'on a poſé que le cone CDK eſt au ſolide N en raiſon triplée du diametre TX diametre PR, & la pyramide BK eſt à la pyramide FM en raiſon triplée des meſmes diametres, comme nous avons demontré par la 11. propoſition 5.



comme le cone BK ſera au ſolide N, ainſi la pyramide BK à la pyramide FM : & en permutant, comme N eſt au cone BK, ainſi la pyramide FM eſt à la pyramide Bk. Parquoy puis que par le corol. de la 8. prop. 12. la pyramide FM eſt à la pyramide BK en raiſon triplée des coſtez homologues QG à VG : c'eſt à dire du diametre PR au diametre TX ; pareillement le ſolide N ſera au cone BK en raiſon triplée des meſmes diametres PR à TX. Soit poſé que comme N eſt au cone BK, ainſi le cone FM ſoit au ſolide O. Donc auſſi le cone FM ſera au ſolide O en raiſõ triplée du diametre PR au diametre TX. Et puis que le ſolide N a eſté poſé plus grand que le cone FM : par la 14. pr. 5. le cone BK ſera auſſi plus grand que O. Parquoy le cone FM ſera au ſolide O, moindre que le cone BK, en raiſõ triplée du diametre TR au diametre TX : ce qui eſt abſurde. Car il a eſté demõtré cy deſſus qu'un cone ne peut être à un ſolide moindre qu'un autre cone, en raiſon triplée des diametres des baſes d'iceux cones. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM : il eſt donc egal. Parquoy par la 7. pr. 5. le cone ABCDK à meſme raiſon au cone EFGHM qu'au ſolide N. Et partant puis qu'on a poſé le cone ABCDK eſtre à N en raiſon

triplée des diametres TX & PR : le cone ABCDK ſera auſſi au cone EFGHM en la raiſon triplée des meſmes diametres.

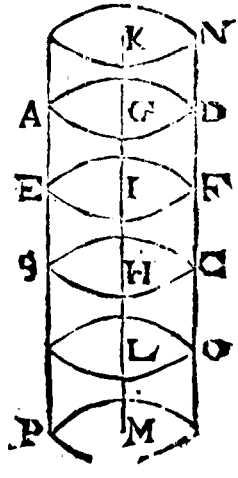
Cette demonſtration ſe doit auſſi entendre des cylindres ſemblables : car leurs cones étans en raiſon triplée des diametres, par la 15. propoſit. 5. les cylindres qui ſont triples d'iceux cones, ſeront auſſi l'un à l'autre en raiſon triplée de leurs diametres. Donc les cones, & les cylindres ſemblables, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si un cylindre eſt coupé par un plan parallel aux plans oppoſez, les ſegmens du cylindre ſeront l'un à l'autre comme les ſegmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, coupé par le plan EF parallel aux plans oppoſez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Je dis que le ſegment du cylindre AF eſt au ſegment du cylindre EC, comme l'axe GI eſt à l'axe IH.

Car ayant continué l'axe GH de part & d'autre, ſoit faite GK egale à GI : & de l'autre coſté HL, LM, chacune egale à IH : Et ſoit imaginé le cylindre ABCD eſtre continué de part & d'autre juſques aux points K & M : Cela étant, il eſt evident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, ſont tous ſur baſes egales : & par le corollaire de la 11. prop. 12. les deux AF, AN, (qui ſont de meſme hauteur, c'eſt à dire qui ont leurs axes IG, GK egaux) ſont egaux entr'eux ; Item les trois BF, BO, PO, étans de meſme hauteur, ſont auſſi egaux entr'eux. Parquoy l'axe IK eſt autant multiple de l'axe IG, que le cylindre EN eſt multiple du cylindre ED ; & l'axe IM autant multiple de l'axe IH, que le cylindre PF eſt multiple du cylindre BF : Et partant ſi l'axe IK (multiple de IG premiere grandeur) eſt egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiple de IH ſeconde grandeur) auſſi le cylindre EN (multiple du cylindre ED troiſiéme grandeur) ſera

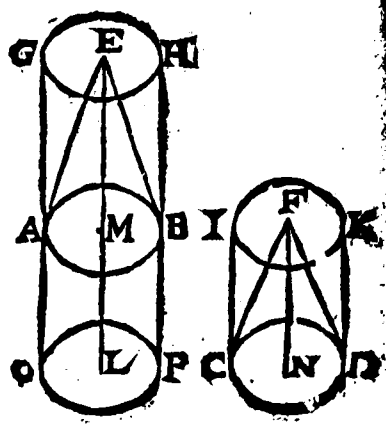


egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multi
du cylindre BF quatriéme grandeur) en quelque multipli
tion que ce soit : & partant par la 6. def. 5. l'axe G
IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy si un c
lindre est coupé par un plan, &c. Ce qui étoit à demontrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones & les cylindres ayans bases egales, son entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient sur bases egales AB, CD, les deux cones ABE, CDF & les deux cylindres ABGH, CDKI, desquels les axes o hauteurs, (car aux cones & aux cylindres droits, desquels seulement parle Euclide, les axes & les hauteurs sont les mesmes) soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.



Car ayant continué l'axe FM, jusques au point L, soit faite ML egale à FN; & soit imaginé le cylindre AH continué jusques au plan OP parallel à AB, & passant par le point L, afin que le cylindre AP soit fait de mesme hauteur que le cylindre CK. Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre OPGH, étant parallel aux deux plans opposez OP, GH par la precedente proposition les cylindres AH, AP, seront entr'eux comme les axes EM & ML : Mais ML est egal à FN, & la base AB egale à la base CD : Donc par le corollaire de la 11. proposition 12. le cylindre AP sera egal au cylindre CK : Partant comme EM sera a NF, ainsi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABE, CDF, sont les tierces parties des cylindres AH, CK : ils auront mesme raison qu'iceux cylindres, par la 15. pr. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la

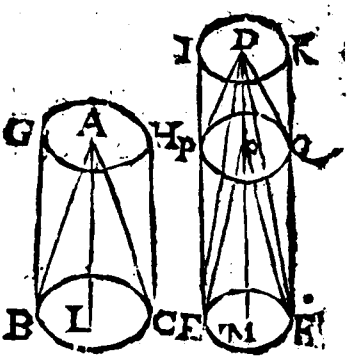
hauteur NF. Donc les cones, & les cylindres constituez sur bases egales, &c. Ce qui estoit à demontrer.

THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases : Et les cones, & les cylindres, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases, sont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux ; & les cylindres BGHC, EIKF aussi egaux, desquels les bases soient BC, EF, & leurs axes ou hauteurs AL, DM. Je dis que les bases sont reciproques aux hauteurs ; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF, ainsi la hauteur DM est à la hauteur AL.

Car premierement si la hauteur DM est egale à la hauteur AL ; les cylindres estans egaux par le corollaire de la 11. prop. 12. la base sera egale à la base : & partant comme la base BC sera à la base EF, ainsi la hauteur DM à la hauteur AL. Que si l'une, comme MD est plus grande que AL, soit retranchée MO egale à AL ; Et soit coupé le cylindre EK par le plan PQ, parallel à EF, & passant par le point O. Donc par la precedente proposition le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. proposition 5. le cylindre BH, egal à iceluy BK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO : & par la 11. proposition 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur FQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. proposition 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.



Par mesme discours on prouvera que les bases & hauteurs

des cones egaux ABC, DEF, ſont reciproques; ſi on conſtr
deux cones ſous les hauteurs MO, OD, comme apert en la
gure.

Maintenant, ſoient les baſes reciproques aux hauteurs :
dis que les cylindres BH & EK ſont egaux. Car ayant co
ſtruit comme deſſus, puis que la baſe BC eſt à la baſe E
comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO ſon ega
Et par la 11. pr. 12. comme la baſe BC à la baſe EF, ainſi le cy
lindre BH au cylindre de meſme hauteur EQ : Item par la pre
cedente propoſition, comme la hauteur MD à la hauteur MO
ainſi le cylindre EK au cylindre EQ : donc par la 11. propoſi
tion 5. les deux cylindres BH & EK auront meſme raiſon a
troiſiéme EQ l'un comme l'autre ; Et par la 9. propoſition 5
ils ſeront egaux.

Quant aux cones qui ont auſſi leurs baſes & hauteurs recipro
ques, ils ſeront par le meſme diſcours demontrez egaux. Ce
qui eſt toutesfois aſſez evident, puis qu'ils ſont par la 10. pro
poſition 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones,
& aux cylindres egaux, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

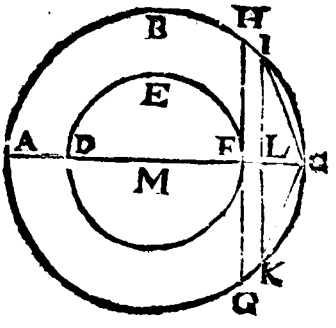
PROBL. 1. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux étans à l'entour d'un même centre; inſcrire au plus grand cercle un polygone equilateral, ayant le nombre des côtez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles inegaux ABC & DEF, à l'entour d'un meſme centre M : Il faut dans le plus grand ABC, inſcrire un polygone equilateral, duquel les coſtez ſoient en nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre M le diametre AC, coupant le petit cercle au point F; duquel ſoit menée HG perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du plus grand cercle aux points H & G : & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corollaire de la 16. pr. 3. Item ſoit coupée la demie circonference ABC en deux egalement en B ; & la moitié BC

encores en deux egalement, en continuant toûjours ainſi juſques à ce qu'on vienne à un arc plus petit que l'arc HG : ce qui eſt poſſible par la 1. propoſition 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tirée la ligne droite ſubtendante IC. Je dis qu'icelle ligne droite IC eſt un coſté du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont toûjours eſté diviſez par moitiez juſques à l'arc IC ; il eſt evident qu'iceluy arc eſt contenu preciſément certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nombre pair ; & par conſequent que la ligne droite IC ſera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant ſera décrit dans le cercle ABC un polygone equilateral & de coſtez pair, lequel ne touchera le moindre cercle DEF. Car de I ſoit menée IK perpendiculaire à AC, coupant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF ſont droits, les lignes GH, IK ſeront paralleles par la 28. propoſition 1. Parquoy puis que la ligne droite GH touche le cercle DEF au ſeul point F ; la ligne droite IK ſera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut jamais toucher, puis que jamais elle ne conviendra avec la ligne droite GH : Donc à plus forte raiſon la ligne droite IC, qui eſt moindre & plus éloignée d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas ; ny partant auſſi les coſtez du polygone inſcrit, puis qu'ils ſont egaux à IC, & par conſequent egalement diſtans du centre d'iceluy cercle par la 14. propoſition 3. Parquoy deux cercles inegaux étans à l'entour d'un meſme centre, &c. Ce qu'il faloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi de l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel rencontre le diametre, on tire une ligne droite perpendiculaire à iceluy diametre, elle ne pourra toucher le moindre cercle, mais tombera toute hors d'iceluy. Car telle eſt la ligne IK, laquelle du point I, extremité du coſté IC rencontrant le diametre AC, eſt tirée per-

pendiculairement ſur iceluy diametre AC, & a eſté montré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

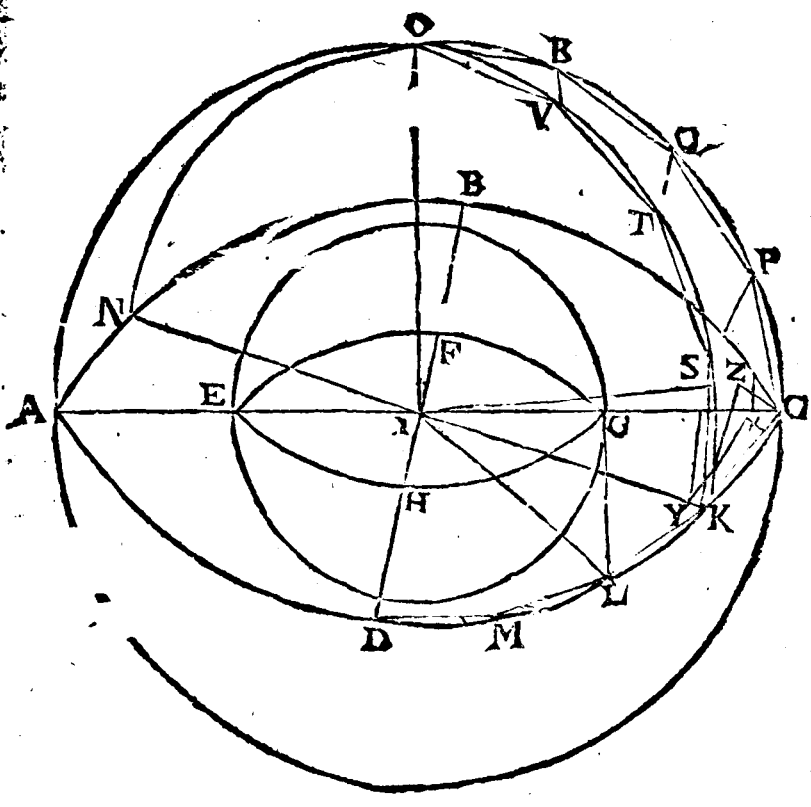
PROPL. 2. PROP. XVII.

Deux ſpheres inegales êtans ſur un même centre inſcrire en la plus grande un polyedre, duquel les plans ne touchent point la ſuperficie de la petite ſphere.

Soient deux ſpheres inegales ABCD, EFGH à l'entour d'un meſme centre I, & il faut dans la plus grande ABCD inſcrire un ſolide polyedre, ou de pluſieurs coſtez, lequel ne touche la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH.

Les deux ſpheres ſoient coupées par quelque plan paſſant par le centre I: il eſt evident par la def. de la ſphere, que les communes ſections ſeront cercles, & les plus grands de toute la ſphere d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la ſphere, puiſque le plan coupant paſſe par le centre de ladite ſphere: ſoient donc icelles communes ſections, ſçavoir en la plus grande ſphere le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH: & ſoient leurs diametres AC & BD ſe coupans en angles droits au centre I: Et dans le cercle de la plus grande ſphere ABCD, ſoit inſerit un polygone, ne touchãt point le moindre cercle EFGH, par la precedente prop. duquel les coſtez de la quarte CD, ſoient CK, KL, LM, MD: Et ayant mené par le centre I le diametre KN, par la 12. pr. 11. dudit centre ſoit menée IO perpendiculaire ſur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la ſuperficie de la plus grande ſphere en O: puis par icelle IO, & chacun des diametres AC, NK, ſoient tirez les plans AOC, NOK, leſquels (par ce qui a eſté dit cy-deſſus) ſeront en la ſuperficie de la ſphere des grands cercles: & d'iceux ſoient les demy cercles AOC, NOK: Et d'autant que la ligne IO eſt élevée perpendiculairement ſur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, ſeront par la 18. prop. 11. élevez perpendiculairement ſur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK ſont egaux, (ayans les diametres egaux,) auſſi leurs moitiez ſeront egales, ſçavoir les quartes DC, OC, OK. Parquoy, autant qu'il y aura de coſtez du polygone en la quarte CD, on en pourra inſcrire autant en

chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & KS, ST, TV, VO: & soient menées les lignes SP, TQ, VR:



Item des points P & S soient menées par la 11. pr. 11. PX, SY perpendiculaires au plan du cercle ABCD, lesquelles par la 38. prop. 11. tomberont sur les lignes IC, IK, communes sections d'iceluy plan, & des quarts de cercles IOC, IOK élevez perpendiculairement sur ledit plan ou quart IDC. Soit aussi menée la ligne XY. Maintenant, puis que les arcs & les cordes PC & SK sont egales; les angles PXC, SYK droits, & les angles PCX, SKY egaux; (car ils insistent sur les peripheres egales AOP, NOS) les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le costé PC, sont egaux aux deux angles SKY, SYK, & au costé SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres costez PX, XC seront egaux aux autres costez SY, YK. Parquoy puis que les deux semidiametres IC, IK sont egaux: & les segmens XC, YK, aussi egaux; les segmens IX, IY seront pareillement egaux: partant comme IX est à XC, ainsi IY

eſt à YK : & par la 2. prop. 6. YX ſera parallele à KC. Et les deux perpendiculaires PX, SY eſtans egales, ſont auſſi parralleles par la 6. prop. 11 & par la 33. prop. 1. SP, YX, ſeront egales & paralleles : & par la 9. prop. 11. SP & KC ſeront parralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC ſeront au meſme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CKSP, eſt en un meſme plan. Par meſme diſcours on monttera auſſi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en un meſme plan. Que ſi des points P, Q, R, S, T, V on imagine des lignes droites eſtre menées au centre I, on repreſentera une figure ſolide, compriſe entre OC & OK, compoſée de quatre pyramides, deſquelles le ſommet eſt au centre I, & leurs baſes ſont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et ſi on conſtruit pareillement ſur les coſtez KL, LM, & MO, comme on a fait ſur CK : Et ſemblablement ſur toutes les autres quartes, on aura inſcrit un poliedre en la ſphere donnée.

Je dis davantage, qu'iceluy poliedre ne touche la petite ſphere EFGH. Car ſi du centre I on mene la ligne IZ perpendiculaire ſur le plan SC, elle ſera plus grande que IG demy diametre de la petite ſphere. Car ayant pour l'inſcription du polygone tiré du point G la ligne GI perpendiculaire à AC, laquelle eſt manifeſtement plus grande que CK coſté d'iceluy poligone inſcrit, ſoit tirée IL ; & auſſi CZ, KZ. D'autant que par la 3. def. 11. les angles IZC, IZK ſont droits, le quarré de IC ſera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK : Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, eſtans egaux, les quarrez de IZ, CZ, ſeront egaux aux quarrez de IZ, ZK : oſtant donc le quarré de IZ commun, reſteront egaux les quarrez de CZ, KZ ; & par conſequent les lignes CZ, KZ ſont egales. On demontrera en la meſme maniere eſtans tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles ſeront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ : Parquoy ſi du centre Z, & de l'intervale de l'une d'icelles, on décrit un cercle, il circonſcrira le quadrilatere CKSP : duquel les trois coſtez CK, CP, KS, qui ſoûtiennent arcs egaux de cercles egaux, ſont egaux, & l'autre coſté SP plus petit : (car les triangles ICK, IXY eſtans ſemblables, & le coſté IC plus grand que le coſté IX, auſſi le coſté CK ſera plus grand que le coſté XY, qui a eſté demontré egal à SP) & partant ſoûtiendra un plus petit arc que chacun de ces trois là, qui conſe-

comment ſera moindre que le quart de l'entiere circonferen-ce, & chacun de ceux-cy plus grand : Parquoy l'angle CZK ſera plus grand qu'un droit : & par conſequent le plus grand du triangle CZK : & par la 19. prop. 1. CK ſera plus grand coſté que CZ. Parquoy GL eſtant plus grande que CK, elle ſera auſſi plus grande que CZ : & par conſequent le quarré de GL plus grand que celuy de CZ. Et d'autant que par la 47. pr. 1. les quarrez de IG & GL, ſont egaux aux quarrez de IZ, CZ : car tant ces deux-cy, que ces deux-là ſont egaux au quarré du demy diametre de la grande ſphere, les triangles IGL, ICZ eſtans rectangles) & le quarré de GL, eſt plus grand que le quarré de CZ : le quarré de IZ, ſera plus grand que le quarré de IG ; & par conſequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite ſphere EFGH. On prouvera par meſme raiſon que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la grande ſphere ne touchent pas la petite ſphere EFGH. Donc deux ſpheres inegales, &c. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

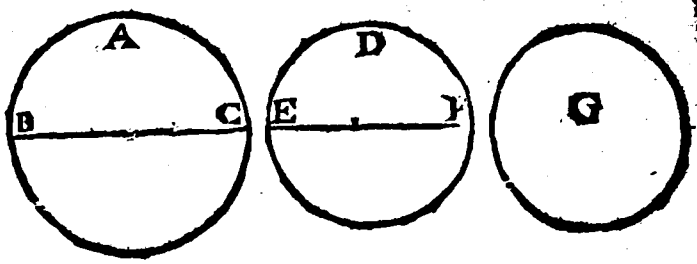
Des choſes ci-deſſus demontrées reſulte que ſi en une autre ſphere on inſcrit un poliedre ſemblable au poliedre ci-deſſus décrit, qu'iceux poliedres ſeront en raiſon triplée des diametres des ſpheres, auſquelles ils ſeront inſcrits. Car iceux poliedres eſtans ſemblables par la def. des ſolides ſemblables, ils auront en leur convexité autant de plans ſemblables l'un comme l'autre : partant ils ſe pourront diviſer en autant de piramides ſemblables l'un comme l'autre, ayans toutes le demy diametre de leur ſphere pour un de leurs coſtez. : Partant priſes une à une, elles ſeront en raiſon triplée des coſtez homologues, ſçavoir eſt des demy diametres des ſpheres, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raiſon triplée des demy diametres par la 12. pr. 5. Et par la 15. pr. 5. en raiſon triplée des diametres entiers.

THEOR. 26. PROP. XVIII.

Les ſpheres ſont l'une à l'autre, en raiſon triplée de leurs diametres.

Soient deux ſpheres ABC, DEF, deſquelles les diam[etres] ſont BC, EF. Je dis qu'elles ſont l'une à l'autre raiſon tri[plée] du diametre BC au diametre EF : C'eſt à dire que ſi on i[magi]ne que comme la raiſon triplée de BC à EF, ainſi la ſ[phere] ABC ſoit à quelqu'autre ſphere, comme G : icelle ſphe[re] ſera egale à la ſphere DEF.

Autrement elle ſera plus grande ou plus petite. Soit premi[e]rement la ſphere G, plus petite que la ſphere DEF, s'il eſt poſſible : Elle pourra donc eſtre enfermée dans icelle, ſi on met toutes deux ſur un meſme centre : Et partant dans la ſphere DEF, peut eſtre inſcrit un polyedre qui ne touchera point la plus petite ſphere G par la 17. prop. 12. Et dedans l'autre ſphere pourra eſtre pareillement inſcrit un ſemblable polyedre par la meſme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy ſera à celuy-là, en raiſon triplée du diametre BC au diametre EF : mais en telle raiſon, la ſphere ABC eſt poſée eſtre à la ſphere G, & par la 11. prop. 5. comme la ſphere ABC eſt à la ſphere G, ainſi le polyedre de la ſphere ABC, ſera au polyedre de la ſphere DEF. Or la ſphere ABC, eſt plus grande que ſon polyedre, n'eſtant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la ſphere G eſt auſſi plus grande que le polyedre de la ſphere DEF : ce qui eſt impoſſible, n'eſtant que partie d'iceluy. Donc la ſphere ABC, ne peut eſtre en raiſon triplée des diametres BC & EF, à une autre ſphere plus petite que DEF.



Soit donc la ſphere G plus grande que DEF, s'il eſt poſſible: Et puis qu'on a poſé que la ſphere ABC eſt à la ſphere G, en la raiſon triplée du diametre BC au diametre EF ; en changeant, la ſphere G ſera à la ſphere ABC, en raiſon triplée du diametre EF au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la ſphere G eſt à la ſphere ABC, ainſi la ſphere DEF ſoit à une

ne, quatriéme proportionele : laquelle ſera plus petite que BC par la 14. prop. 5. d'autant que G eſt poſée plus grande e DEF : Et partant icelle quatriéme proport. pourra eſtre ſcrite en la ſphere ABC ; Et ſi par la 11. prop. 5. la ſphere DEF ſera à icelle quatriéme inſcrite dans ABC, en raiſon triplée du diametre EF au diametre BC ; ce que nous avons demontré être impoſſible. Donc la ſphere G n'a pû être plus grande, ne plus petite que la ſphere DEF, mais egale ; & par conſequent les ſpheres ſont l'une à l'autre en raiſon triplée de leurs diametres. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte qu'une ſphere eſt à une ſphere, comme le polyedre décrit dans celle-là, eſt au polyedre ſemblable décrit en cette-cy : pource que tant les ſpheres que les polyedres ſont en raiſon triplée des diametres d'icelles ſpheres, comme il a été demontré.

Fin du douziéme Element.



ELEMENT TREIZIE'ME.

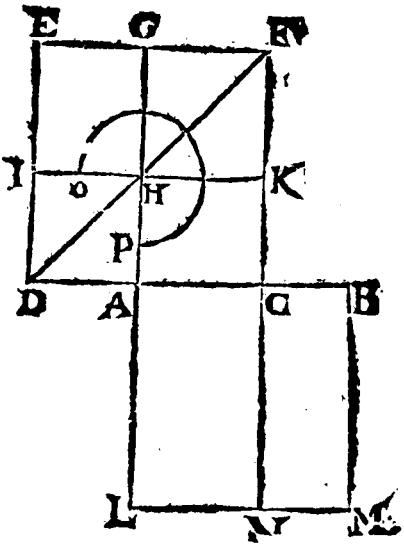
THEOR. 1. PROP. I.

SI une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extrême raiſon : le quarré de la moitié de la toute, & du grand ſegment comme d'une ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droite AB coupée au point C en la moyenne, & extreme raiſon, dont le grand ſegment eſt AC, auquel ſoit ajoûtée AD egale à la moitié de la totale AB : je dis que le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA.

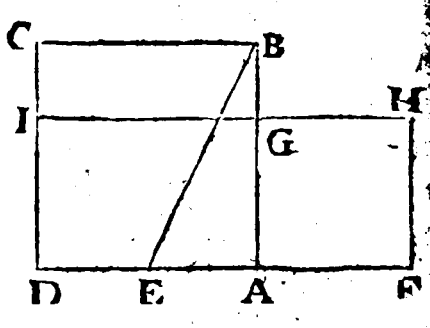
Car ſoit décrit ſur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF ; puis ſoit menée AG parallele à DE, coupant le diametre DF en H, par lequel point ſoit

rée IK parallele à CD. En apres ayant prolongé A, & accomply le quarré AM, soit produite FC jusques en N. Premierement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilateres AI, GK seront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB est coupée en la moyenne & extreme raison en C, comme AB sera à AC, ainsi AC est à CB; & par la 17. p. 6. le rectangle CM compris sous AB, CB, est egal au quarré de AC, sçavoir GK. Et puis que AB est posée double de DA; & AL est egale à icelle AB; & AH à AD, aussi AL sera double de AH. Mais comme AL est à AH, ainsi le rectangle AN est au rectangle AK, par la 1. prop. 6. Donc AN est double de AK. Et puis que par la 43. prop. 1. AK est egal à IG; AN sera egal aux deux IG, AK; ajoûtant donc ces egaux aux egaux CM, KG le quarré AM sera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, aussi le gnomon OP sera quadruple du même quarré AI: & partant si au gnomon OP est ajoûté le quarré AI; CE quarré de DC sera quintuple de AI quarré de DA. Si donc une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il faloit prouver.



SCHOLIE.

Commandin demontre encore cette prop, ainsi. S la ligne droite AB coupée en G, selon la moyenne extreme raison, de laquelle AB soit fait le qua ABCD, & ayant coupé AD en deux egalement en soit menée BE, & prolongée EA en F, de sorte q EF soit egale à icelle EB; & par ce qui est demont en la 11. prop. 2. AF sera egale à AG; parqu apert EF estre composée du grand segment AG & AE, moitié de la toute AB. Ie dis que le quarré EF est quintuple du quarré EA. Car puis que AB double de AE, le quarré de AB sera quadruple quarré de AE par les choses demontrées au scholie la 4. prop. 2. Mais le quarré de EB est egal aux quarrez d'icelles AB, AE par la 47. prop. 1. donc le quarré de BE, c'est à dire de EF, sera quintuple du quarré de AE. Ce qu'il faloit prouver.



Or tout ainsi qu'en la pluspart des prop. du 10. livre nous avons joint & apliqué les nombres aux lignes, afin d'en rendre les demonstrations plus claires & evidentes, aussi le ferons nous en cettuy-cy pour le contentement de ceux qui se delectent aux operations numeralles. Donc en la precedente figure la ligne droite AB soit 10, sa moitié AE 5; & leurs quarrez seront 100 & 25: partant le quarré de BE, ou de EF son egale sera 125 qui est quintuple de 25 quarré de la moitié AE, comme veut la proposition.

De cecy apert qu'étant conneuë une ligne droite coupée en la moyenne & extreme raiſon, on peut facilement connoître les ſegmens d'icelle. *Car la-dite ligne AB eſtans* 10, *& coupée en la moyenne & extréme raiſon en G, par ce que deſſus EF eſt trouvée de* V125, *& AE de* 5; *partant le reſte AF, ou AG, qui eſt le grand ſegment, ſera* V125—5, *qui oſtez de la toute AB* 10, *reſteront* 15—V125 *pour le moindre ſegment BG. Les mêmes ſegmens AG, BG ſeront auſſi conneus par ce qui eſt cy-devant enſeigné à la fin du* 21. *chap. de noſtre ſommaire d'Algebre.*

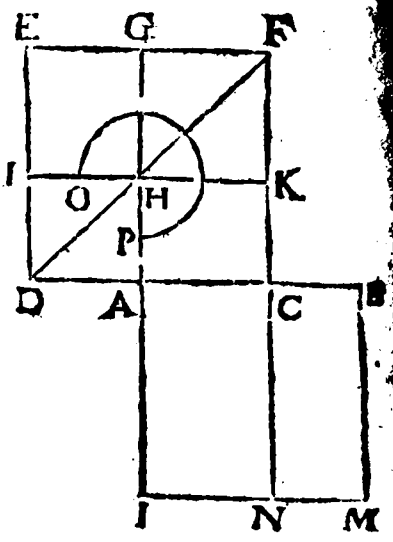
THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'une ligne droite eſt quintuple du quarré d'une partie d'icelle : le double d'icelle partie étant couppé en la moyenne & extréme raiſon, le grand ſegment ſera l'autre partie de la donnée.

Soit la ligne droite DC diviſée au point A, en ſorte que le quarré d'icelle, ſoit quintuple du quarré de la plus petite partie DA : & ſoit priſe AB double d'icelle AD, laquelle (comme nous demontrerons cy-apres) ſera plus grande que l'autre partie AC : Je dis que ſi on diviſe AB en la moyenne & extreme raiſon, que le grand ſegment ſera AC, autre partie de la donnée DC.

Car ayant fait ſur DC le quarré CE, & achevé la conſtruction comme en la precedente ; les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez par le corol. de la 4. prop. 2. Et puis que AB, c'eſt à dire AL, eſt

double de DA, ou AH ont egale, le rectangle
ſera double du rectangle AK par la 1. prop. 6.
egal aux deux AK, IG qui ſont egaux par la
prop. 1. Or par le ſcholie de la 4. prop. 2. le qua
AM eſt quadruple du quarré AI, & le quarré E
eſt quintuple du même par l'hypotheſe : il eſt do
evident que le quarré AM eſt egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, ſont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, ſoit egal au quarré GK, fait ſur une ligne egale à AC: & partant par la 17. prop. 6. comme BM, c'eſt à dire AB eſt à AC, ainſi AC à CB. Parquoy par la 3. def. 6. la ligne AB ſera coupée en la moyenne & extreme raiſon au point C: & AC autre partie de la totale DC, eſt le grand ſegment d'icelle. Parquoy ſi le quarré d'une ligne droite eſt quintuple, &c. Ce qu'il faloit prouver.



LEMME.

Que AB double de AD ſoit plus grand que AC, nous le demontrerons ainſi. D'autant que par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de AB eſt quadruple du quarré de AD, iceux deux quarrez ſeront enſemble quintuple du ſeul quarré de AD. Mais le quarré de DB eſt plus grand que les quarrez de DA, AB, puis que par la 4. prop. 2. il eſt egal à iceux deux quar-

avec deux fois le rectangle ſous DA, AB. Donc le quarré de DB ſera auſſi plus grand que le quintuple du quarré de AD: & partant plus grand que le quarré de DC, qui eſt poſé quintuple du meſme quarré de AD: parquoy la ligne droite DB ſera plus grande que la ligne droite DC: & oſtant DA qui eſt commun, le reſte AB ſera plus grand que le reſte AC.

SCHOLIE.

La ligne donnée DC ſoit 5, & DA √5, afin que le quarré de celle-là, qui eſt 25, ſoit quintuple du quarré de celle-cy, qui eſt 5: Donc le reſte AC ſera 5—√5, & AB double de AD ſera √20: laquelle étant diviſée en la moyenne & extréme raiſon, ainſi qu'il a eſté dit au prec. ſcholie, le plus grand ſegment ſera 5—√5, qui eſt egal a AC, comme veut la propoſition.

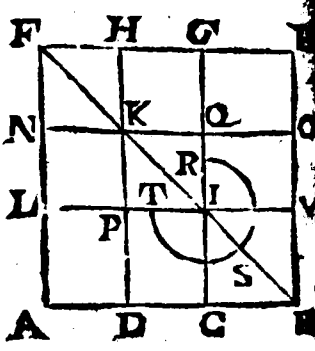
THEOR. 3. PROP. III.

Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extréme raiſon; le quarré du petit ſegment, & de la moitié du grand ſegment comme d'une ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié du grand ſegment.

Soit la ligne droite AB, coupée en la moyenne & extreme raiſon au point C, de laquelle le grand ſegment AC eſt coupé en deux egalement en D: je dis que le quarré du petit ſegment & de la moitié du grand, ſçavoir de BD, eſt quintuple du quarré de DC, moitié du grand ſegment AC.

Car ſur AB ſoit décrit le quarré AE, & ayant mené ſon diametre BF, des points C & D ſoient

menées CG DH paralleles à AF, coupans le diametre BF és points I & K, par leſquels ſoient menées LM, NO paralleles à AB, leſquels coupent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. prop. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO ſeront quarrés des lignes AC, CD, DB. Donc puis que comme AB à AC, ainſi AC à CB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (ſçavoir AM) ſera egal au quarré de la moyenne AC, ſçavoir LG, lequel étant par le ſcholie de la 4. prop. 2 quadruple du quarré PQ, le rectangle AM ſera auſſi quadruple de PQ: mais AP & DI étans ſur baſes egales, ſont egaux par la 1. prop. 6. Et DI étant egal à IO par la 43. prop. 1 le gnomon RST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: Parquoy ajoûtant à iceluy gnomon le même quarré PQ; le quarré DO, décrit de DB ſera quintuple d'iceluy quarré PQ, décrit de DC: Si donc une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extréme raiſon, &c. Ce qu'il faloit démontrer.



SCHOLIE.

La ligne droite AB eſtant 12, le grand ſegment AC ſera √180 − 6, & le moindre CB 18 − √180: Parquoy DC moitié de AC ſera √45 − 3, & ſon quarré 54 − √1620. Mais DB *compoſée de DC & CB ſera 15 − √45, & ſon quarré 270 − √40500, qui eſt quintuple du quarré de DC 54 − √1620, comme veut la propoſition; La converſe de laquelle eſt auſſi veritable, c'eſt à ſçavoir que*

Si une ligne droite eſt coupée en deux ſegmens inegaux, & que le quarré du moindre ſegment & de la moitié du grand, comme d'une ſeule ligne ſoit quintuple du quarré d'icelle moitié : cette ligne-là ſera coupée en la moyenne & extréme raiſon.

Soit la ligne droite AB *(en la prec fig.) coupée inegalement en C, de laquelle le grand ſegment AC eſt coupé en deux egalement en D, & le quarré de* DB *ſoit quintuple du quarré de CD : Ie dis que la ligne* AB *eſt diviſée en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Car demeurant la meſme conſtruction que deſſus, le quarré LG eſt quadruple du quarré PQ par le ſcholie de la 4. prop 2. Mais du meſme quarré PQ eſt auſſi quadruple le gnomon RST, puis que le quarré DO eſt poſé quintuple dudit quarré PQ : donc le gnomon RST ſera egal au quarr LG. Mais il eſt auſſi egal au rectangle AM : donc le quarré LG ſera egal au rectangle AM contenu ſous* AB, BC : *& partant par la 17. p. 6, comme* AB *ſera à AC, ainſi AC à* CB : *Parquoy* AB *ſera coupée en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon : Ce qui eſtoit propoſé.*

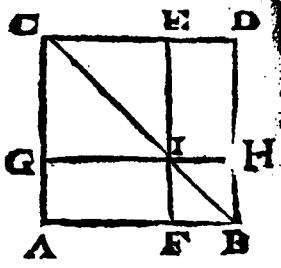
THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, le quarré de la toute, & le quarré du petit ſegment enſemble, ſont triples du quarré du grand ſegment.

Soit la ligne droite AB, coupée en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon, dont AF ſoit le plus grand ſegment : je dis que les quarrez de AB, &

FB, ſont enſemble triples du quarré de AF.

Car ſoit décrit ſur AB le quarré AD, auquel étant tiré le diametre BC, ſoit menée de F la ligne EF parallele à AC, coupant BC en I, par lequel ſoit menée GH parallele à AB. Par le corol. de la 4. p. 2. les parallelogrammes GE, FH ſeront quarrez des lignes AF, FB: Et puis que comme AB eſt à AF, ainſi AF eſt à FB, par la 17. p. 6. le rectangle des extremes AB, FB, ſçavoir AH, eſt egal au quarré de la moyéne AF, ſçavoir GE. Vû donc que AH & FD ſont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH, ſera egal au double du quarré GE: & partant ajoûtant le quarré GE; AD au quarré de AB, avec FH quarré de FB, ſera triple de GE quarré de AC. Si donc une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extréme raiſon, &c. Ce qu'il faloit prouver.



SCHOLIE.

La ligne AB *ſoit* 4 : *donc le grand ſegment AF ſera* $\sqrt{20}-2$, *& le moindre* FB $6-\sqrt{20}$: *& partant leurs quarrez ſeront* $16, 24-\sqrt{320}$, *&* $56-\sqrt{2880}$: *mais celuy-cy ajoûté au premier* 16 *fait* $72-\sqrt{2880}$, *qui eſt le triple de* $24-\sqrt{320}$, *quarré de l'autre ſegment AF, ainſi que veut la prop. La converſe de laquelle eſt auſſi veritable, ſçavoir eſt que*

Si une ligne droite eſt coupée en deux inegalement, & que le quarré de la toute avec le quarré du moindre ſegment ſoit triple du quarré du grand ſegment: cette ligne-là ſera coupée en la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droite AB *coupée en deux inegale-*

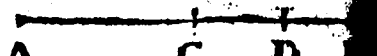
ment en F, de sorte que le quarré de la toute AB *avec le quarré du moindre segment* FB *est triple du quarré de l'autre segment AF. Ie dis que la ligne droite* AB *est coupée en F, selon la moyenne & extreme raison. Car ayant construit comme dessus, d'autant que les quarrez AD, FH sont triples du quarré GE, autant le quarré GE, le gnomon EBG avec le quarré FH sera double du mesme quarré GE. Mais iceluy gnomon* EBG *avec ledit quarré FH est egal aux deux rectangles AH FD: donc iceux deux rectangles sont aussi double du quarré GE: & partant puis que lesdits rectangles AH, FD sont egaux, le seul AH compris sous* AB, BF *sera egal à iceluy quarré GE: & par la 17. prop. 6. comme* AB *sera à GI ou AF, ainsi AF sera à* FB: *& partant* AB *est divisée en* F, *selon la moyenne & extreme raison. Ce qui a esté proposé.*

Nous ajoûterons encores icy la demonstration que fait Maurolic de cet autre theoreme.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & du moindre segment cõme d'une seule ligne est quintuple du quarré du grand segment: & une ligne droite étant coupée inegalement, si le quarré de la toute & du moindre segment, comme d'une seule ligne est quintuple du quarré du grãd segmẽt; icelle ligne sera coupée en la moyéne & extreme raison.

Soit premierement la ligne droite AD coupée en C, selon la moyẽne & extreme raisõ, à laquelle soit ajoûtée DB *egale au moindre segment CD: ie dis que le quarré de* AB *est quintuple du quarré de AC. Car d'autant que par la* 17. *p.* 6. *le rectangle de AD, DC est egal au quarré de AC (pource que les trois lignes AD, AC, CD sõt proport.) quatre fois le rectangle de AD, DC sera qua-*

druple du quarré de AC, & conſequemment le quarré de AC avec quatre fois le rectangle de AD,



DC ſera quintuple d'iceluy quarré de AC. Mais p la 8. p. 2. le quarré de AD eſt egal audit quarré AC, avec quatre fois le rectangle d icelles AD, DC Donc auſſi le quarré de AD ſera quintuple du quarré de AC : Ce qui eſtoit propoſé.

Secondement ſoit la ligne droite AD diviſée inegalement en C, à laquelle ſoit ajoûtee DB egale a moindre ſegment CD, & ſoit le quarré de AB quintuple du grand ſegment AC: Ie dis que AD eſt coupé ſelon la moyenne & extreme raiſon en C Car d'autant que par la 8. prop. 2. le quarré de AB eſt egal au quarré de AC avec quatre fois le rectangle de AD DC, auſſi iceux quarré de AC & quatre rectangles de AD, DC, ſeront enſemble quintuple dudit quarré de AC : & partant le rectangle de AD DC quatre fois ſera quadruple d iceluy quarré de AC, c'eſt à dire qu'un ſeul rectangle de AD, DC, ſera egal à iceluy quarré de AC, & par la 17. prop. 6. comme AD ſera à AC, ainſi AC ſera à CD ; & partant AD eſt coupée en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon. Ce qui eſt propoſé.

Cette prop. eſt auſſi evidente par nombres : Car ſi AD eſt 4, le grand ſegment AC ſera $\sqrt{20}-2$, & ſon quarré $24-\sqrt{320}$. mais le moindre ſegment CD ſera $6-\sqrt{20}$, qui ajoûté à AD, fait $10-\sqrt{20}$ pour la toute AB, dont le quarré eſt $120-\sqrt{8000}$, qui eſt quintuple de $24-\sqrt{320}$ quarrez du grand ſegment AC.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, & à icelle on ajoûte une ligne droite egale au grand ſegment; la toute ſera coupée en la moyenne & extréme raiſon, & le grand ſegment ſera la ligne premierement poſée.

Soit la ligne droite AB, coupée en la moyenne & extreme raiſon au point C, dont le grand ſegment eſt AC; & à icelle AB ſoit ajoûtée directement AD egale à AC: je dis que la toute DB eſt auſſi coupée en la moyenne & extreme raiſon au point A, & que le grand ſegment eſt AB.



Car puis que comme AB eſt à AC, c'eſt à dire AD ainſi AC eſt à CB; en changeant, comme DA ſera à AB, ainſi BC à AC: & en compoſant comme DB ſera à AB, ainſi AB à AC, c'eſt à dire AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon au point A, & le grand ſegment eſt la ligne AB propoſée au commencement. Si donc une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qui eſtoit à prouver.

SCHOLIE.

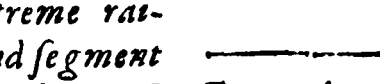
La ligne droite AB ſoit 4, *le moindre ſegment CB* $6-\sqrt{20}$, *& le grand AC* $\sqrt{20}-2$: *Ajoûtant donc à* AB *le grand ſegment AC, viendront* $\sqrt{20}+2$, *pour la toute* DB. *Or comme* $\sqrt{20}+2$ *eſt à* 4, *ainſi*

4 eſt à V 20 — 2 ; car multipliant V 20 + 2 par V 2[0] — 2, le produit eſt 16, qui eſt le quarré de 4 : P[ar]quoy eſt manifeſte ce qui eſtoit proposé.

Clavius apres Campanus demontre en cet endr[oit] les deux theoremes ſuivans.

1. Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, & que du grand ſegment on retranche le moindre: iceluy grand ſegment ſera auſſi coupé en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera cette ligne là, qui étoit le moindre ſegment de la premiere ligne.

Car la ligne droite DB ſoit coupée en A, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & du grand ſegment AB ſoit retranchée AC egale au moindre ſegment AD : Ie dis que le grand ſegment AB eſt divisé en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment être AC, qui eſt egal au moindre ſegment AD. Car d autant que comme la toute DB eſt à la toute AB, ainſi AB retranchée de BD eſt à AD, c'eſt à dire AC retranchée de AB, auſſi par la 19. prop. 5. AD reſte d icelle BD, c'eſt à dire AC ſera à CB reſte d'icelle AB, comme la toute DB à la toute AB, c'eſt à dire comme AB à AC : & partant AB ſera divisée en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon : Ce qui eſtoit proposé.



Le même eſt auſſi manifeſte en nombres : Car ſi DB eſt 4, le grand ſegment AB ſera V 20 — 2, & le moindre AD 6 — V 20, qui retranché de AB reſtera CB de V 80 — 8. Or comme V 20 — 2 eſt à 6 — V 20, ainſi 6 — V 20 eſt à V 80 — 8, car le produit des extremes eſt egal à celuy des moyens, ſçavoir eſt 56 — V 2880:

partant apert ce qui eſtoit propoſé.

Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, & de la moitié d'icelle on retranche la moitié du grand ſegment: la moitié de la toute ſera auſſi diviſée en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera la moitié du grand ſegment de la toute.

Car ſoit AB *divisée en C, ſelon la moyenne & extreme raiſon & DE ſoit la moitié de la toute, & DF moitié du grand ſegment AC: Ie dis que DE eſt coupée en F, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que le grand ſegment eſt DF. Car puis que comme la toute* AB *eſt à la toute DE, ainſi la retranchée AC eſt à la retranchée DF, (car l'une & l'autre eſt raiſon double) par la 19. prop. 5. le reſte* CB *ſera auſſi au reſte FE, comme la toute à la toute, & partant* CB *ſera auſſi double de FE. Mais par la 15. prop 5. comme* AB *eſt à AC, ainſi DE moitié de celle-là eſt à FE moitié de celle-cy, & par la def. de la ligne coupée en la moyenne & extreme raiſon* AB *eſt à AC, comme AC à* CB: *donc auſſi DE ſera à DF, comme DF à FE: & partant par la même def. DE ſera coupee en la moyenne & extreme raiſon en F. Ce qui eſt propoſé.*

A C. B

D F E

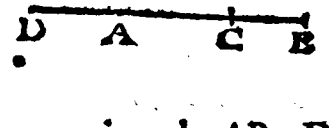
Ce theoreme eſt auſſi manifeſte en nombres: car ſi AB *eſt 4, la moitié DE ſera 2, le grand ſegment* AC $\sqrt{20}-2$, *& ſa moitié DF* $\sqrt{5}-1$, *& partant le reſte FE ſera* $3-\sqrt{5}$. *Or il eſt evident que ces trois nombres* 2, $\sqrt{5}-1$, *&* $3-\sqrt{5}$ *ſont continuellement propor. car le produit des deux extremes eſt egal au quarré du milieu, ſçavoir eſt à* $6-\sqrt{20}$.

THEOR. 6. PRO.P. VI.

Si une ligne droite rationele eſt coupée [en] la moyenne & extreme raiſon: l'un [et] l'autre ſegment eſt ligne irrationele, a[p]pellée reſidu.

Soit la ligne droite rationele AB, coupée en moyenne & extreme raiſon au point C: ie dis qu[e] chaque ſegment AC, BC eſt ligne irrationele ap[pellée] reſidu.

Car au grand ſegment AC ſoit ajoûtée directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA, il eſt à iceluy comme nombre à nombre: Et par la 6. prop. 10. iceux quarrez de DC, DA ſeront commenſurables: & par conſequent les lignes DC, DA ont auſſi commenſ. au moins en puiſſance Or AD eſt rationele,



puis qu'elle eſt moitié d'une rationele AB: Donc auſſi DC ſera rationele Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne ſont comme nombre quarre à nombre quarré: (comme il apert par le corol. de la 24 prop. 8. car ils ſont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, ſeront incommenſ. en longit. par la 9. prop. 10. & partant rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Parquoy ſi de DC rationele on ôte DA comm. en puiſſance ſeulement, par la 74. p. 10. le reſte AC ſera irationele, apellée reſidu.

Derechef AB étant coupée en la moyenne & extreme raiſon en C, le quarré de AC ſera egal au rectangle de AB, CB par la 17. p. 6. Mais le quarré

du reſidu

u residu AC apliqué à la rationele AB, doit faire autre côté CB residu premier par la 98. prop 10. parquoy chacun des segmens AC, CB, est ligne rrationele, apellée residu. Si donc une ligne droite rationele, &c. Cé qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

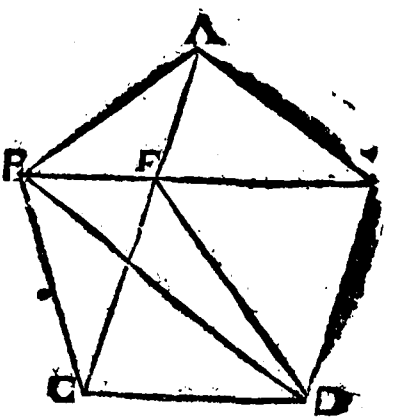
La ligne AB *soit* 4: *donc le grand segment* AC *sera* $\sqrt{10}-2$, *& le moindre segment* CB $6-\sqrt{20}$ *l'un & l'autre desquels segmens est residu, puis que leurs deux nombres sont comm. en puissance seulement, &c.*

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en un pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Au pentagone equilateral ABCDE, soient trois angles egaux, premierement d'ordre comme A, B, C: ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car êtans tirées à iceux angles egaux A, B, C, les lignes subtendantes AC, BE, BD: de F ou s'entrecoupent AC, BE soit tirée FD. Or puis que les costez AB, AE du triangle ABE sont egaux à BC, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux, aussi egaux, par la 4. p. 1. les bases BE, BD seront egales, & les angles AEB, BDC egaux. Mais par la 5.



p. 1. les angles BED, BDE ſont auſſi egaux, les de
côtez BE, BD ayant été prouvez egaux : Donc l'a
gle total AED ſera egal au total CDE. Derechef, pu
que les côtez AB, AE du triangle ABE ſont ega
à BA, BC du triangle ABC, & les angles A &
contenus d'iceux egaux, par la 4. p. 1. la baſe BE ſe
egale à la baſe AC, & les angles ABE, AEB egau
aux angles BAC, BCA, chacun au ſien : & partan
les angles FAB, FBA du triangle ABF ſont egau
donc les côtez AF, BF ſeront auſſi egaux : & partan
iceux êtans ôtez des ſubtendantes egales AC, B
les reſtes FC, FE ſeront egales. Parquoy les deux cô
tez FC, CD du triangle CFD ſeront egaux aux
côtez FE, ED du triangle DFE, & la baſe FD com
mune : donc par la 8. p. 1. les angles FCD, FED ſeron
egaux. Mais ACB, AEB ont été prouvez egaux : dõ
les touts BCD, AED ſont egaux : Parquoy AED
ayant été montré egal à CDE, tous les angles d
pentagone ſeront egaux entr'eux par la 1. com
ſent. & conſequemment iceluy pentagone ABCD
ſera equiangle.

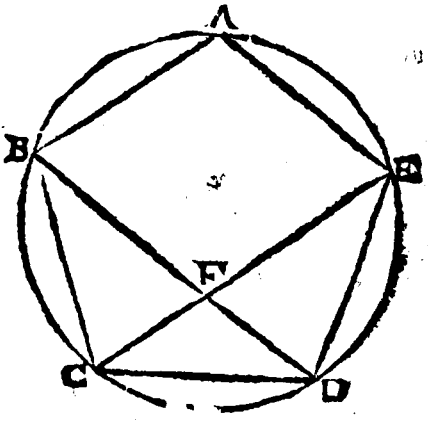
Secondement, ſoient les trois angles A, C, D, no
d'ordre, egaux. D'autant que les côtez AB, AE d
triang. ABE ſont egaux aux côtez CB, CD du triang
BCD, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux,
par la 4. p. 1. les baſes BE, BD ; & les angles AEB,
BDC ſeront egaux : Mais par la 5. p. 1. les côtez BE,
BD êtans egaux, les angles BED, BDE ſeront pa-
reillement egaux : donc l'angle total AED ſera ega
au total CDE. Et puis que les angles BAE, CDE ont
été poſez egaux : les trois angles A, E, D, qui ſont
d'ordre, ſeront egaux : & partant comme il a été
déja montré le pentagone ſera equiangle. Donc

en un pentagone equilateral, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droites ſubtendent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſoient d'ordre; elles ſe couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raiſon, & leurs grands ſegmens ſeront egaux au côté du pentagone.

Au pentagone ABCDE equiangle & equilateral ſoient deux lignes droites BD, CE, ſubtendantes les angles C, D, qui ſont d'ordre, leſquelles s'entrecoupent en F. Je dis qu'elles ſe coupent en la moyenne & extreme raiſon, & que chacun de leurs grands ſegmens BF, EF ſera egal à quelconque côté du pentagone.



Car ayant décrit par la 14. p. 4. un cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD DE, EA ſeront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux coſtez egaux, & l'ang. compris d'iceux auſſi egal par l'hypotheſe; les baſes BD, CE, & les angles CDB, DCE ſeront pareillement egaux par la 4. p. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF ſont egaux, & par la 32. p. 1. l'angle externe BFC eſt egal à iceux: iceluy BFC ſera double de DCE. Mais par la 32. p. 6. l'angle BCE eſt

auſſi double du même DCE, pource que l'arc B
eſt double de l'arc DE : Donc les angles BFC, B
ſont egaux : & partant par la 6.p.1. BF eſt egale
côté du pentagone BC. Et d'autãt que par la 17.p
les angles DBC, ECD, inſiſtans ſur arcs egaux, ſo
egaux; les deux angles DBC, CDB du triangle BC
ſont egaux aux deux angles DCF, FDC du triang
CFD : & partant les deux triangles BCD, CFD
ront equiangles par la 32. p. 1. Parquoy par la 4.
6. comme BD ſera à DC c'eſt à dire à BF, ainſi C
ou BF ſera à FD : & partant la ſubtendante BD e
coupée en F, en la moyenne & extreme raiſon, &
le plus grand ſegment BF eſt egal à BC côté du pen-
tagone. Par même raiſon on demontrera CE êtr
coupée en la moyenne & extreme raiſon en F, &
que le grand ſegment EF eſt egal à DE côté d
pentagone. Parquoy ſi deux lignes droites ſubten
dent deux angles d'un pentagone, &c. Ce qu'i
faloit prouver.

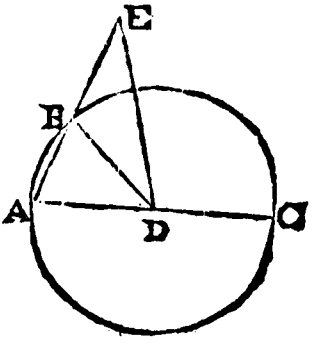
SCHOLIE.

*On peut facilement demontrer que la ligne droit
qui ſoûtient l'angle du pentagone equilateral &
equiangle eſt parallele au coté oposé, c'eſt a dire que
CE eſt parallele au côté* AB, *&* BD *au coſté AE: car
ayant décrit un cercle à l'entour du pentagone, d'au-
tant que par la 22.p.3. tant les deux angles A&* BCE,
que les deux ABC, *AEC ſont egaux à deux droits,
& que A,* ABC *ſont egaux entr'eux, le pentagone
êtant equiangle, les deux autres* BCE, ACE *ſeront auſ-
ſi egaux. Veu donc que* A *&* BCE *ſont egaux à deux
droits;* A *&* AEC *ſont auſſi egaux à deux droits, &
par la* 28.*p* 1. AB, CE *ſeront paralleles, &c.*

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droite composée du côté de l'hexagone, & du côté du decagone, tous deux inscrits en un même cercle, est coupée en la moyenne & extreme raison, de laquelle le grand segment est le côté de l'hexagone.

Au cercle ABC soit inscrite la ligne droite AB, côté du decagone à laquelle soit ajoûtée directement BE egale au demy diametre du cercle, c'est à dire au côté de l'hexagone inscrit au même cercle, car il luy est egal par le coroll. de la 15. p. 4. Je dis que AE est coupée en la moyenne & extreme raison, & que BE côté de l'hexagone est le grand segment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB étant la dixiéme partie de toute la periphere du cercle, sera la cinquiéme de l'arc ABC, moitié d'icelle periphere: & partant l'arc BC sera quadrupl d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. auſſi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. p. 1. l'angle BDC étant exterieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels étans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD est Isoscele, l'un ou l'autre sera double de ABD: mais l'un d'iceux DBA étant exterieur, est egal aux deux opposez interieures DEB & BDE: (lesquels sont

egaux, étant le triangle DBE Isoscele, pource que DB demy diametre, & BE sont egaux par la construction) donc l'angle DBA sera double de l'angle E; qui par consequent sera egal à l'angle ADB: Parquoy les deux triangles AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A cõmun, l'angle E egal à l'angle ADB, & par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers donc par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB: partant AE est coupée en la moyenne & extreme raison en B & BE côté de l'hexagone est le grand segment. Donc la ligne droite composée du côté de l'hexagone & du côté du decagone, &c. Ce qu'il faloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy est evident que le costé de l'hexagone estant coupé en la moyenne & extreme raison, le grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE *costé de l'hexagone on coupe une partie egale à* AB: *comme la toute AE sera à la toute* BE: *ainsi la retranchée* BE *sera à la retranchée de* BE, *c'est à dire à* AB: *& partant par la 19. prop. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchée à la retranchée. Parquoy* BE *sera semblablement coupée que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le grand segment sera* AB *costé du decagone.*

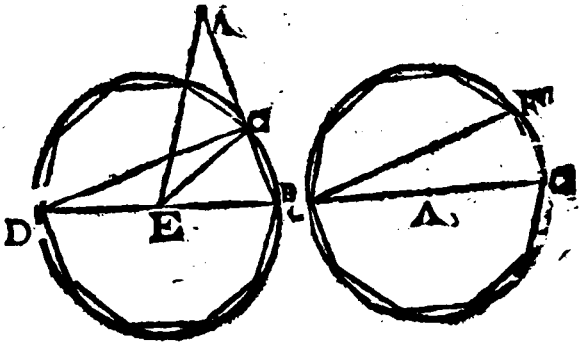
SCHOLIE.

Clavius demontre apres Campanus la converse de cette proposition ainsi qu'il ensuit.

Si le grand segment d'une ligne divisée en la moyenne & extréme raison est le côté de l'Hexagone de quelque cercle; le moindre segment sera

le côté du decagone du même cercle. Que si le petit segment est le côté du decagone de quelque cercle, le grand segment sera le côté de l'hexagone du même cercle.

Car soit AB *divisée en* C *selon la moyenne & extreme raison, & soit premierement le grand segment* AC *coste de l'hexagone du cercle* BCD : *Ie dis que le petit segment* BC *est le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car* BC *estant accommodée au cercle, en sorte que* CA *tombe hors le cercle, soit tirée de* B *par le centre* E *le diametre* BED, *& les lignes* EA. EC. *Donc puis que comme* AB *est à* AC, *ainsi* AC *est à* CB, *& que* AC *est egale au semidiametre* EB *par le corol. de la* 15. *prop.* 4. *Aussi comme* AB *sera à* BE, *ainsi* EB *à* BC : *& par la* 6. *prop.* 6. *les triangles* ABE. EBC *seront equiangles, puis qu'ils ont les costez de l'angle commun* B *proportionaux ; & l'angle* A *sera egal à l'angle* BEC. *Derechef, pource que les costez* CA, CE *sont egaux, par la* 5. *prop.* 1. *les angles* CAE. CEA *seront egaux, & puis que par la* 32. *prop.* 1. *à iceux est egal l'angle externe* BCE ; *iceluy* BCE *sera double de l'angle* A : *Mais par la* 5. *prop.* 1. *l'angle* CBE *est egal à l'angle* BCE, *à cause de l'egalité des costez* EB, EC : *donc aussi* CBE *sera double de l'angle* A : *& partant les deux angles* BCE, CBE *ensemble se-*



ront quadruple du meſme angle A. Et puis que l'
gle externe CED eſt egal aux internes BCE, C
auſſi CED ſera quadruple du meſme angle A, & p
tant de l'angle BEC ſon egal: & par la 33. prop.
l'arc DC ſera pareillement quadruple de l'arc B:
partant l'arc du demy cercle BCD ſera quintuple
meſme arc BC, & conſequemment toute la periphe
du cercle ſera decuple d'iceluy arc BC: Parquoy la l
gne droite BC eſt le coſté du decagone.

Maintenant, le moindre ſegment CB ſoit le coſ
du decagone du cercle BCD. Ie dis que le grand ſeg
ment AC eſt le coſté de l'hexagone: Car derechef ſoit
accommodé au cercle BCD, le ſegment BC & ſoi
tiré le diametre BED: puis de l'intervale AC ſoi
decrit le cercle CFG, duquel le diametre eſt CAG, &
par le corol. de la 15. prop. 4. AC ſera coſté de l'hexa
gone du cercle CFG. Donc puis que AB eſt coupée e
C, ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que le grand
ſegment AC eſt coſté de l'hexagone du cercle CFG, le
petit ſegment CB, comme il a ja eſté demontré, ſera
coſté du decagone du meſme cercle CFG. Soit donc
decrit en iceluy cercle CFG, le decagone equilateral
& equiangle CFG. Item au cercle BCD, le triangle
equilateral & equiangle BCD, les coſtez BC, CF ſeront
egaux entr'eux: Mais d'autant que les lignes droites
CD, FG eſtans tirées, les angles CDB, FGC inſiſtans
ſur arcs ſemblables BC, CF, ſont egaux, comme nous
avons demontré au ſcholie de la 22. prop. 3. & que les
angles BCD, CFG eſtans au demy cercle ſont auſſi
egaux, ſçavoir droits par la 31. prop. 3. les coſtez BD,
CG ſeront pareillement egaux entr'eux par la 26. p. 1.
Parquoy les diametres BD, CG eſtans egaux, les cer-
cles BCD, CFG ſeront auſſi egaux: & partant puis

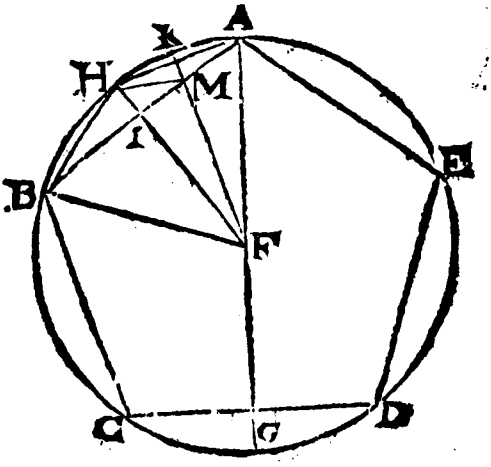
que la ligne droite AC *eſt coſté de l'hexagone du cercle* CFG, *auſſi la meſme* AC *ſera le coſté de l'hexagone du cercle* BCD. *Ce qui eſt propoſé.*

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du coſté du pentagone equilateral inſcrit en un cercle, eſt egal aux deux quarrez des coſtez du decagone, & de l'hexagone, inſcrits au meſme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre eſt F, ſoit inſcrit un pentagone equilateral, un côté duquel eſt AB. Je dis que le quarré d'iceluy côté AB eſt egal aux deux quarrez des côtez de l'hexagone, & du decagone inſcrits au même cercle.

Car ayant tiré le diametre AFG, & joint FB, ſoit coupé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle coupe auſſi la ligne droite AB en I, & ſoient tirées les lignes droites AH, BH; & AH ſera côté du decagone, & FB côté de l'hexagone: En apres, ſoit coupé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle coupe auſſi la ligne droite AH en L, & la ligne droite AB au point M, auquel ſoit menée la ligne HM. Vû donc que les arcs AH, BH ſont egaux, auſſi ſeront egaux les angles AFH, BFH



apuyez ſur iceux, par la 27. pr. 3. Parquoy les
tez AF, FB étans egaux, & FI commun aux d
triangles AFI, BFI, la baſe AI ſera egale à la b
BI, par la 4. prop. 1. & les angles AIF, BIF a
egaux, & partant droits. Par même raiſon ſer
egales les lignes droites AL, HL, & les ang
ALF, HLF droits. Or ſi des demy cercles ega
ABCG, AEDG on ôte arcs egaux ABC, AED,
ſteront egaux les arcs CG, GD, & partant l'a
CG ſera moitié de l'arc CGD. Mais auſſi l'arc A
eſt moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs A
CD ſont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux
ſeront auſſi egaux: & partant l'arc AH étant dou
ble de l'arc HK, auſſi le ſera CG. Et puis que l
arcs AB, BC ſont egaux, & l'arc AB eſt double d
l'arc BH, l'arc BC ſera pareillement double du m
me arc BH. Parquoy les arcs CG, BC ſont equé
multiplices, ſçavoir eſt doubles des arcs HK, BH
& partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG ſera dou
ble de l'arc BK: & par conſequent l'angle BFG auſ
double de l'angle BFK, par la 33. prop. 6. Mais pa
la 20. prop. 3. le même angle BFG au centre, eſ
double de l'angle FAB en la circonference: don
les angles BFM, FAB ſeront egaux, & partant l'an
gle ABF étant commun aux deux triangles ABF,
FBM, & le tiers au tiers par la 32. prop. 1. iceux
triangles ſeront equiangles; & par la 4. prop. 6.
comme AB ſera à BF, ainſi BF à BM: & partant
par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM ſera egal
au quarré de BF. Derechef puis que les côtez AL,
LM du triangle ALM ſont egaux aux côtez HL,
LM du triangle HLM, & les angles contenus d'i-
ceux auſſi egaux, ſçavoir droits, par la 4. prop. 1.

les baſes AM,HM,& les angles LAM,LHM ſeront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM eſt egal à l'angle HBA, pource que les côtez HA, HB ſont egaux : Donc auſſi l'angle LHM ſera egal au même HBA : & partant par la 32. prop. 1. les triangles ABH, AHM ſeront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. prop. 6. comme AB ſera à AH, ainſi AH à AM: & par la 17. pr. 6. le rectangle de AB, AM ſera egal au quarré de AH. Mais il a été demontré que le rectangle de AB, BM, eſt egal au quarré de BF : donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM enſemble, ſont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. prop. 2. iceux rectangles ſont egaux au quarré de AB: donc le quarré de AB côté du pentagone eſt egal aux deux quarrez des lignes BF, AH côtez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui étoit à prouver.

COROLLAIRE.

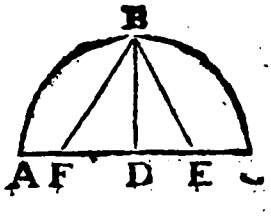
Par cecy eſt manifeſte qu'une ligne droite tirée du centre, & laquelle diviſe en deux egalement un arc, diviſe auſſi la ligne ſubtendante d'iceluy arc en deux egalement, & à angles droits.

Eſt auſſi evident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diviſe en deux egalement l'arc que le coſté oppoſé à iceluy angle ſubtend, comme auſſi iceluy coſté oppoſé, & à angles droits. Car il a eſté demontré que le diametre AG tiré du point A, diviſe en deux egalement l'arc CD, lequel le coſté oppoſé CD ſubtend : Parquoy par ce que deſſus, il coupera auſſi en deux egalement & à angles droits iceluy coſté CD. La meſme demonſtration ſera en tout polygone equilateral inſcrit au cercle, le nombre des coſtez

eſtant impair, tellement que ſi d'un angle de quelc
que polygone regulier dont le nombre des coſtez
impair, on mene une ligne droite par le centre d'i
lny qui coupe le coſté oppoſé; elle coupera les angles
deux egalement, comme auſsi ledit coſté, & à a
gles droits. Mais au contraire, ſi elle coupe l'ang
ou le coté en deux egalement, ou à angles droits: ice
le ligne paſſera par le centre.

SCHOLIE.

Au quatrieme, livre, Euclide a enſeigné à decri
au cercle un pentagone equilateral; Mais Ptolomé
au premier livre de ſa grande conſtruction a enſeign
un autre moyen, beaucoup plus bref & facile pour de
crire tant ledit pentagone que le decagone; leque
moyen nous avons desja raporté en noſtre Conſtructio
de la table des ſinus: & neanmoins nous le raporte
rons encore icy. Soit donc un cercle ABC, duquel le
centre eſt D, & ayant tiré le diametre AC, du centre
D ſoit élevée DB perpendic. à
AC; & apres avoir coupé en
deux egalement le ſemidia-
metre DC en E, & menée BE
ſoit priſe EF egale à EB, &
tirée BF. Ie dis que BF eſt le



coſté du pentagone, & DF le coſté du decagone. Car
puis que CD eſt coupée en deux egalement en E, &
qu'à icelle eſt aiôutée DF, par la 6. pr. 2. le rectangle
de CF, DF avec le quarré de DE eſt egal au quarré
de FE, ou EB ſon egale. Mais par la 47 prop. 1. le
quarré de EB eſt egal aux quarrez de BD, DE: donc
le rectangle de CF, DF avec le quarré de DE ſera
auſſi egal aux quarrez de BD, DE; & oſtant le quar=

de DE commun, reſtera le rectangle de CF, FD egal au quarré de BD, c'eſt à dire au quarré de CD: & par la 17. prop. 6. comme CF ſera à CD, ainſi CD à DF. & partant la ligne droite CF ſera diviſée en D ſelon la moyenne & extreme raiſon. Vû donc que le grand ſegment CD eſt le coſté de l'hexagone du cercle ABC par le corol. de la 15 prop. 4. le moindre ſegment DF ſera le coſté du decagone du meſme cercle par le ſ-hol. prec. Et pource que par cette 10. prop. le quarré de BD, coſté de l'hexagone, avec le quarré de DF, coſté du decagone, eſt egal au quarré du coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle, & que par la 47. pr 1. le quarré de BF eſt egal aux ſuſdits quarrez de BD, DF; le quarré du coſté du pentagone ſera egal au quarré de BF, & partant la ligne droite BF eſt egale au coſté au pentagone. Ce qui a eſté proposé.

De cecy apert qu'eſtant connu le diametre d'un cercle, on connoiſtra aiſément le coſté tant du pentagone que du decagone inſcriptibles en iceluy cercle. Car le diametre AC eſtant 8. BD ſera 4, & DE 2: partant BE ou EF ſera $\sqrt{20}$, & oſtant DE d'icelle EF, reſtera DF $\sqrt{20}-2$, qui eſt le coſté du decagone: Et pource que le quarré d'iceluy coſté FD eſt $24-\sqrt{320}$ & celuy de BD 16: le quarré de BF ſera $40-\sqrt{320}$, & partant icelle BF, qui eſt egale au coſté du pentagone ſera $\sqrt{40-\sqrt{320}}$).

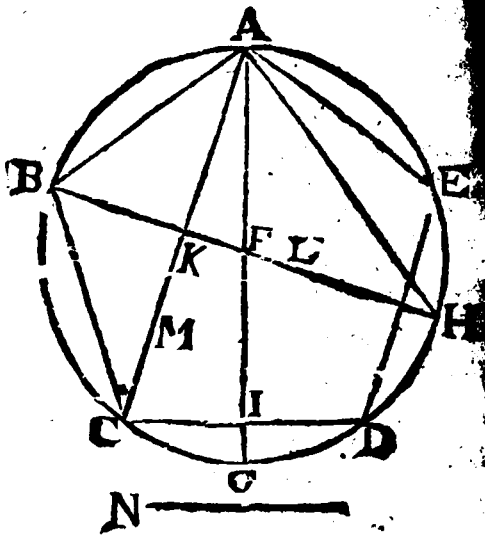
THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans un cercle ayant le diametre rationel, on inſcrit un pentagone equilateral; le coſté au pentagone eſt irrationel, appelé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, inſcrit dãs

le cercle ABCDE, duquel le diametre eſt ration
ie dis que AB, côté du pentagone, eſt irratio
apellé ligne mineure.

Car ſoient menez par le centre F les diamet
AG, BH, deſquels AG coupera le côté CD en de
egalement en I, & à angles droits par le corol.
la preced. ſoient auſſi tirées les lignes droites AC, AH, deſquelles AC ſera coupée par le diametre BH en deux egalement en K par le corol. de la prec. Partant eſt manifeſte que les deux triangles ACI & AKF ſont equiangles: car l'angle du point A êtant cõmun à tous les deux, & le droit AKF egal au droit AIC; le tiers ſera egal au tiers par la 32. prop. 1. Et par la 4. prop. 6. comme IC à CA, ainſi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel eſt rationel & egal à A) ſoit retranchée FL egale au quart de FA, laquelle FL ſera rationele, êtant le quart d'une ligne rationele, & par la 16. prop. 10. BL compoſée des deux BF, FL, & commenſurable à chacune d'icelles, ſera auſſi rationele. Item de AC ſoit retranché CM quart d'icelle ligne: & par la 15. prop. 5. CI ſera à CM quart de CA, comme KF, à FL quart de FA: Que ſi on double les deux CI & CM par la



prop. 5. CD ſera à CK (car elle eſt la moitié de CA & double de CM comme KF à FL : & en compoſant, comme les deux CD & CK enſemble à CK, ainſi KL à FL : Et par la 22. prop. 6. le quarré de la composée de CD & CK ſera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC êtant coupée en la moyenne & extreme raiſon (ſçavoir eſt êtant tirées la ligne droite BD) par la 8. prop. 13. ſon plus grand ſegment eſt egal au côté du pentagone, ſçavoir à iceluy CD ; par la 3. prop. 12. le quarré de la compoſée de CD plus grand ſegment, & de CK moitié de la toute CA, ſera quintuple du quarré de CK. moitié de la toute : partant auſſi le quarré de KL, ſera quintuple du quarré FL. Mais la ligne BL eſt auſſi quintuple de FL, êtant FL quart de FB: donc comme BL à FL, ainſi le quarré de KL au quarré de FL, c'eſt à dire en raiſon doublée de KL à FL: car iceux quarrez ſont en cette raiſon par la 20. p. 6. dont s'enſuit que KL ſera moyenne prortionelle entre BL & FL. Mais par le corol. de la même prop. le quarré de BL ſera au quarré de KL, comme BL à FL, c'eſt à dire que le quarré de BL ſera quintuple du quarré de KL : donc iceux quarrez ſeront entr'eux comme nombre à nombre, & partant commenſurables par la 6. prop. 10. & conſequemment les lignes BL, KL ſeront commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance : Mais leurs quarrez êtans entr'eux comme 5 à 1, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré par la 9. prop. 10. icelles lignes BL & KL, ſeront incommenſurables en longitude: & partant BL ayant été montrée rationelle,

icelles BL & KL seront rationeles commensurabl
en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. B
sera residu.

Maintenant, que la ligne BL puisse plus que l
ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis qu
le quarré de BL, qui est quintuple du quarré d
KL est egal aux deux quarrez de KL & N, iceu
quarrez de BL & N seront entr'eux comme 5 à 4, &
partant commens. par la 6. pr. 10. & consequem-
ment les lignes BL & N, commensurables entr'el-
les, au moins en puissance: Mais BL a été montrée
rationelle: donc N le sera aussi. Et pource que les
quarrez d'icelles BL & N sont entr'eux comme 5 à
4, qui par le corol. de la 24. pr. 8. n'est pas com-
me nombre quarré à nombre quarré, icelles lignes
BL & N seront incommens. en longit. par la 9. p.
10 & partant rationelles commens. en puissance
seulement. Donc la toute BL étant rationelle com-
mensurable en longitude à la rationelle proposée
BE (car BL est de 5 parties telle que BH en a 8)
peut plus que sa convenable KL du quarré de N,
qui luy est incommens. en longitude, partant BK
sera residu quatriéme par la 4. des tierces def. du 10.

Finalement, pource que par le corol. de la 8. p.
6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK;
(car par la 31. p. 3. le triangle ABH à l'angle BAH
droit, duquel est tirée AK perpend. à la base BH)
le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK.
Parquoy puis que la ligne droite AB peut la super-
ficie contenuë de la rationele FH & du residu
quatriéme BK: par la 95. pr. 10. icelle AB sera ligne
mineure. Parquoy si dans un cercle ayant le dia-
metre rationel, &c. Ce qu'il faloit prouver

SCHOLIE.

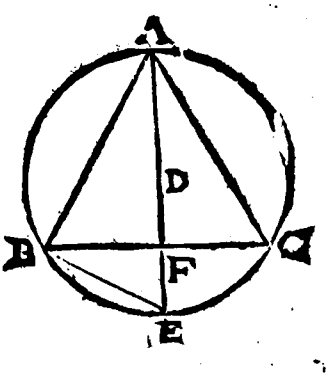
SCHOLIE.

Le diametre BH soit 8 : donc BF sera 4, BL 5, & AB V(40 — V320), & par consequent son quarré sera 40 — V320, qui divisé par BH 8, viendront 5 — V5 pour BK; & consequemment KL sera V5, qui est incommensurable en puissance seulement à BL, leurs quarrez 5 & 25, estans en raison quintuple; partant BK est residu. Et puis que BL peut plus qu'icelle KL du quarré de N, iceluy quarré sera 20, & N V20, qui est incommensurable en longitude à la toute BL 5; & partant BK sera residu quatriéme. Mais le quarré de AB 40 — V320 estant egal au produit d'iceluy residu 5 — V5 multiplié par la rationele BH 8; icelle AB V(40 — V320), qui est le costé du pentagone, sera ligne mineure, comme veut la proposition. Les nombres apliquez aux autres lignes de la fig. seront tels qu'ils ensuivent : KL sera V5 1, CK V(10 + V20), AC V(40 + V320), CM V($2\frac{1}{2}$ + V$1\frac{1}{4}$), & CI V(10 — V20).

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit au cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en un cercle ABC, duquel le centre est D. Je dis que le quarré de AB côté d'icelui triangle, est triple du quarré du semidiametre.



Car étant tiré le diametre AE, lequel coupera par

le corol. de la 10. propoſ. de ce livre, l'arc BC
deux egalement en E; & auſſi la ligne droite BC
deux egalement & à angles droits: vu que l'arc B
eſt le tiers de toute la circonference, BE ſera la
xiéme partie : partant étant tirée la ligne dr
BE, elle ſera le côté de l'hexagone, & egale au
mydiametre DE par le corol. de la 15 p. 4. O
quarré du diametre AE ſera quadruple du qua
de BE egale au demy diametre pa le ſcholie d
4. pr. 2. & par la 47. prop 1. il eſt auſſi egal a
deux de DA & BE, l'angle ABE étant droit par
31. prop. 3. il eſt donc manifeſte qu'il ſera triple d
quarré de BE, ou ED on egal. Parquoy le quar
du côté du triangle equilateral, &c. Ce qu'il f
loit prouver.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ce que deſſus, que le quarré du diam
tre d'un cercle eſt au quarré du coſté du triangle equ
lateral inſcrit en iceluy cercle, en raiſon ſeſquitier
c'eſt à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a eſté demo
tré que le quarré du coſté AB eſt triple du quarr
demy diametre AD, poſant le quarré de AB 3,
quarré de AD ſera 1; & le quarré de AF quadrup
d'iceluy ſera 4. Parquoy le quarré de AE ſera
quarré de AB comme 4 à 3.

Et pour ce que par le corol. de la 8. prop. 6 comm
AE eſt à AB, ainſi AB eſt à AF, perpendiculair
tombant d'un angle ſur un coſté; pareillement le quar
ré de AB ſera au quarré de AF, comme 4 à 3.

On peut auſſi facilement colliger que le ſemidiame
tre DE, lequel tombe perpendiculairem. ſur BC co
du triangle equilateral, eſt coupé en deux egalemen
en F par ledit coſté BC. Car puis que le quarré de A

est triple du quarré de BE, costé de l'hexagone, si on pose iceluy quarré de AB estre 12, le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1 par la 47. prop 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2 la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est coupée en deux egalemẽt en F par le coté BC: tellement que la ligne perpendic. tombant du centre du cercle au côté du triangle equilateral inscrit en iceluy est moitié du côté de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

SCHOLIE.

Le diametre AE estant 8, BE sera 4, EF 2, AF 6, AB √48 & BF √12 : Parquoy le quarré du costé du triangle sera 8, & celuy du semidiametre 16, &c.

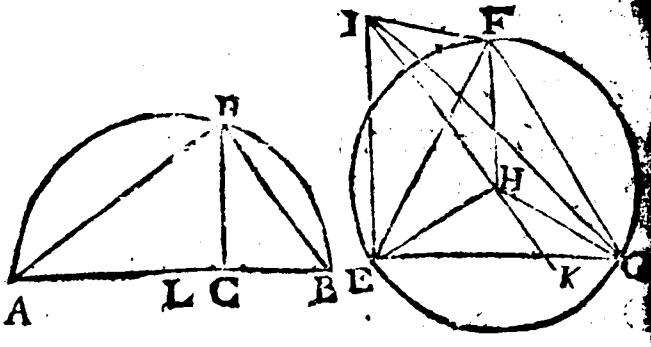
PROBL. 1. PROP. XIII.

Dans une sphere donnée, inscrire une pyramide equilaterale : & montrer que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarré du côté d'icelle pyramide.

Soit AB diametre de la sphere donnée, & soit divisé en C, de sorte que AC soit double de BC. Et apres avoir décrit sur AB le demy cercle ADB, levé la moyenne proportionele CD, & mené les lignes droites DA & DB : Soit décrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD: & apres avoir inscrit en iceluy le triangle equilateral EFG, & tiré HF, HG, chacune desquelles sera egale à CD, étant egale à HE; du centre H soit levée HI perpendiculaire au plan du cercle EFG par la 12. pr. 11.

& egale à AC: puis soient menées les lignes IE, & IG. Je dis premierement que la pyramide EF est equilaterale.

Car par la construction le triangle EFG est equ lateral, & il est evident que les trois lignes IE, I IG, sont aussi egales entr'elles: (puis que par 47.p. 1. le quarré d'une chacune d'icelle est egal quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles so egales.)



Et d'autant que les côtez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux côtez HI, HE du triangle IHE; & les angle qu'ils comprennent egaux, étans droits: la ba AD sera egale à la base EI par la 4.p.1. En la mêm maniere sera demontré AD être egale à FI, GI. Et v que le quarré de AC est double du quarré de CD (car ils sont l'un à l'autre comme AC à CB par l cor. de la 20.p. 6. étans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le quarré de AD, qui est egal à tous les deux, sera triple du quarr de CD, ou de son egale HE. Mais par la prec. pr le quarré de EF est aussi triple du quarré de HE donc EF & AD sont egales: & par la 1. com. sent. EF & EI seront egales. Parquoy puis que AD, est

ussi égale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI seront equilateraux, & egaux entr'eux: et par consequent la pyramide EFGI, dont la base est le triangle EFG, & le sommet I, est equilaterale.

Je dis en second lieu qu'icelle pyramide peut être inscrite en la sphere, dont le diametre est AB. Soit continuée la ligne perpendiculaire IH par dessous la base de la pyramide jusques en K: tellement que HK soit egale à CB, & la toute IK à la toute AB, & soit imaginé être posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, sçavoir le point A au point I, le point B au point K: & puis que AC & CB sont egales à IH & HK; & HG egale à DC, faisant angle droit avec IH aussi bien que leurs egales AC & CD, il est evident que le point D du demy cercle tombera sur le point G: Partant le diametre AB demeurant immobile, si le demy cercle fait une revolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (étans les lignes HE, HF, HG egales) & par ainsi la pyramide EFGI est inscrite en la sphere donnée, puis que tous les angles d'icelle E, F, G, I, touchent ladite sphere.

Finalement, je dis que le quarré du diametre AB est sesquialtere au quarré du côté AD, qui est egal à chacun côté de la pyramide: Car puis que AB est triple de BC: & AC double de la même BC, AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. p. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportioneles: Et partant par le corol. de la 20. pr. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtete. Nous avons donc in-

ſcrit une pyramide equilaterale dans une ſph
donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

*De ces choſes on peut facilement colliger, que la pu
ſance du diametre de la ſphere eſt quadruple ſeſqui
tere de la puiſſance du ſemidiametre du cercle deſc
à l'entour de la baſe de la pyramide. Car puis que A
diametre de la ſphere, a eſté demontré ſeſquialtere
puiſſance à EF coſté de la pyramide, le quarré de E
ſera de 6 parties, telles que le quarré du diametre A
en contiendra 9. & le quarré de la ligne HE 2, pour
que le quarré de EF eſt triple du quarré de HE, pa
la 12. prop. 13. Donc de 9 telles parties que contiendr
le quarré de AB, le quarré de HE en contiendra 2: E
partant le diametre AB eſt quadruple ſeſquialtere
puiſſance au ſemidiametre HE, puis que la raiſon d
quarrez eſt comme 9 à 2.*

*Auſſi la perpend. tirée du centre de la ſphere a
plan de la baſe de la pyramide eſt la ſixiéme parti
du diametre de la ſphere, & la tierce partie du ſemi
diam. Car L ſoit le centre du demy cercle ADB: L ſe
ra pareillement le centre de la ſphere. Ie dis que la li
gne LC, (qui eſt la perpend. tirée du centre de la ſpher
a la baſe EFG: car puis que AC eſt egale à HI, &
partant le point C le meſme que H, ſera auſſi L le mê
me que le centre de la ſphere.) eſt la ſixi me partie du
diametre de la ſphere, ſçavoir eſt de AB, & la tierce
partie du ſemid. AL. Car puis que AC eſt double de
CB, de telles 4. parties qu'eſt AC, de 2 telles ſera CB:
& partant de 6 telle ſera la toute AB, & de 3 le ſe
mid. AL. Parquoy ſi AC eſt 4, & AL 3; LC ſera 1; &
partant LC ſera la ſixiéme partie de AB, & la tierce
de AL.*

Semblablement la hauteur de la pyramide HI ſera deux tierces parties du diametre de la ſphere. Car HI eſt la meſme que AC, laquelle par la conſtruction eſt deux tierces parties d'iceluy diametre.

Auſſi de 9 telles parties que ſera le quarré d'iceluy diametre, le quarré de la hauteur de la pyramide en ſera 4. Car la raiſon de 9 à 4, eſt la raiſon doublée de 3 a 2.

SCHOLIE.

Le diametre AB eſtant 12, AC ou HI ſera 8, CB 4, CD ou HE V32, AD ou EF, EI V96, & BD V48. Parquoy le quarré du diametre AB eſt 144, & celuy de EF côté de la pyramide eſt 96: tellement que ces deux quarrez ſõt entr'eux cõme 3 a 2, ainſi que veut la p &c.

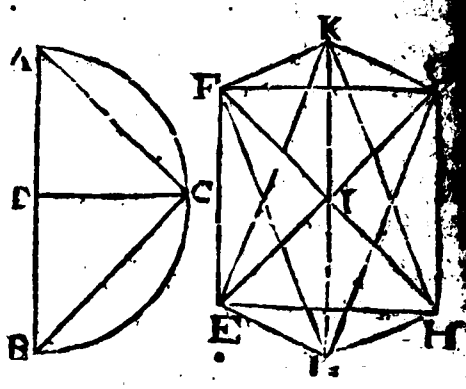
PROBL. 2. PROP. XIV.

Dans une ſphere donnée, inſcrire un octaedre: Et montrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt double du quarré du coſté de l'octaedre.

Soit AB le diametre de la ſphere donnée, & iceluy ſoit coupé en deux egalement au point D: & apres avoir conſtruit le demy cercle ACB; levé la perpendiculaire DC, & mené les lignes droites CA, CB, leſquelles ſeront egales entr'elles par la 4. p. 1. ſur la ligne EF eg le à l'une d'icelles AC, CB, ſoit conſtruit le quarré EFGH, dans lequel ſoient menées les deux diagonales FH, GE ſe coupans au point I: duquel point par la 12. p. 11. ſoit élevée la ligne IK perpendiculairement ſur le quarré GE, & continuée par deſſous iceluy plan juſques en L, tellement que IK, IL, ſoient chacune egale à AD: puis des points L & K, ſoient menées aux angles du quarré les lignes KE, KF, KG, KH,

LE, LF, LG, & LH.

Je dis maintenant que la figure solide KL est vironnée de huit triangles equilateraux ; & c'est un octaedre. Car le quarré EFGH, ayant côtez egaux à AC: Il est evident que les diagonales EG, FH seront egales à AB ; partant leurs moitiez à AD. Mais les deux lignes IL & IK sõt aussi egales à AD : & par cõsequent elles seront egales à une chacune d'icelle demy diagonales : & par la 4 prop. 1. les huit lignes LE, LF, LG, LH, KE, KF, KG, KH, seront toutes egales entr'elles ; & aux quatre du quarré EFGH par la même 4. prop. 1. (étans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en constituant des angles droits au point I, milieu du quarré.) Et puis que tous les côtez sont egaux, tous les triangles seront equilateraux ; sçavoir les quatre d'au dessus du quarré EFGH, ayans leurs bases sur les quatre côtez d'iceluy quarré, & se terminans au point K, & quatre autres au dessous du même quarré, ayans aussi leurs bases sur les côtez du quarré, & se terminans au point L: & partant le solide KL compris de huit triangles equilateraux, sera octaedre.



Je dis davãtage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est evident que la ligne KL, est egale au diametre AB, & que l'ãgle KEL est droit: (d'autant que les deux lignes KI, IE étãs ega-

les, les angles sur la base KE seront egaux, & demy droits, pource que l'angle KIE est droit : Et par même raison l'angle IEL, est demy droit : & partant le total KEL sera droit.) Partant le demy cercle ayant pour diametre KL, & faisant une revolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le point E : & par même discours il touchera aussi les trois autres F, G, H, desquels les angles sont egaux à l'angle E, & par consequent l'octaedre KL sera inscriptible en la sphere dont le diametre est AB, puis que tous les angles d'iceluy touchent ladite sphere. Finalement, il est evident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la sphere AB ou KL, est egal aux deux quarrez de KE, EL, lesquels sont egaux: & partant iceluy quarré de KL diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'iceux côtez de l'octaedre. Nous avons donc inscrit un octaedre dans une sphere, &c. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Il est evident par les choses cy-dessus, qu'en l'octaedre trois diametres s'entrecoupent à angles droits au centre de la sphere, car le diametre KL est perpend. aux deux diametres EG, FH, qui s'entrecoupent au centre I à angles droits.

Il est encore evident que l'octaedre peut être divisé en deux pyramides semblables & egales, ayans pour base commune le quarré EFGH, & pour sommets K & L, telles que sont les deux pyramides EFGHK, EFGHL.

Il apert aussi que si le tetraedre & l'octaedre sont décris en une mesme sphere : le costé du tetraedre sera sesquitierce en puissance au costé de l'octaedre. Car le

quarré du diametre de la sphere estant 6 parties, par la prec. prop. le quarré du coste du tetraedre sera 4 parties : & par cette 14. prop. le quarré de l'octaedre sera 3 parties. Donc le quarré du coste du tetraedre sera au quarré du costé de l'octaedre, comme 4 à 3 ; qui est raison sesquitierce.

SCHOLIE.

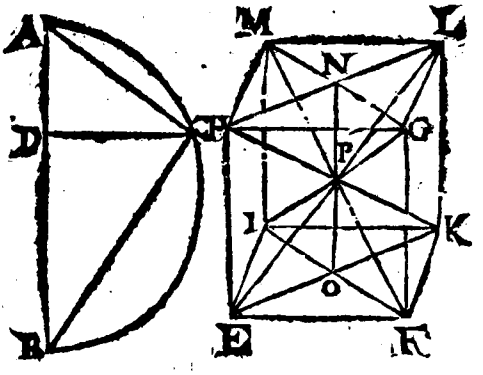
Le diametre AB étans 12, AD, ou DC, IK seront 6, AC ou EF √72, EG 12, & EI 6 Parquoy le quarré AB diam. de la sphere est 144, & celuy de EF côté de l'octaedre est 72: tellement qu'iceux quarrez sont entr'eux comme 2 a 1, ainsi que veut la prop. &c.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans une sphere donnée, inscrire un cube & montrer que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du côté d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnée AB, lequel soit coupé au point D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD: Puis apres avoir construit le demy cercle ACB, levé la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC & BC ; sur EF egale à AC, soit fait le quarré EFGH, sur lequel soient elevées par la 12. prop. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, FK, GL, HM, chacune egale à EF : puis soient menées les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK sont perpendiculaires au plan EFGH, elles seront paralleles par la 6. prop. 11. Mais elles sont aussi egales: donc par la 33. prop. 1.

EF, IK seront pareillemẽt egales & paralleles: & partant EFKI est un parallel. ayant les 4 cõtez egaux. Mais il a aussi par la 34. prop 1 les quatre angles droits, puis que les angles EIK, FKI sont opposez aux droits KFE, IEF: donc EFKI est quarré. Par méme raison FKLG, GLMH, HMIE seront quarrez: & partant IKLM sera aussi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il est egal & semblable au quarré opposé EFGH: Car EL est un solide parallelipipede, pource que par la 15. prop. 11. les plans opposez d'iceluy sont parallels, étans tirez par des lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL sera un cube: lequel ie dis être inscriptible en la sphere donnée. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, & GM, des plans opposez EFKI, HGLM, soient imaginez être tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, lesquels par la 28. prop. 11. couperont le cube en deux egalement, & passeront par le centre d'iceluy, sçavoir par le point P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entrecouperont aussi en deux egalement: & partant la commune section d'iceux plans, sçavoir NO, passera par le même centre P. Mais il est evident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Par-



quoy étant décrit un cercle du centre P ſur le di-
metre EL ; il eſt evident qu'iceluy demy cercle fai-
ſant une revolution à l'entour du cube, décrira une
ſphere paſſant par tous les angles du cube : laquel-
le ie dis être egale à celle du diametre AB. Car puis-
que par la 47. prop. 1. le quarré de EK eſt egal aux
quarrez des lignes egales EF, FK, & partant dou-
ble du quarré de EF, ou de KL: les quarrez de EK,
KL ſeront triples du quarré de KL. Mais par la 47.
prop. 1. le quarré de EL eſt egal aux quarrez de EK,
KL: donc auſſi le quarré de EL ſera triple du quar-
ré de KL, c'eſt à dire du quarré de AC : duquel eſt
auſſi triple le quarré de AB : (car par le corollaire
de la 8. prop. 6 AB, AC, AD ſont proport. & par-
tant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB eſt
à AD, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AC.
Veu donc que AB eſt triple de AD, auſſi le quarré
de AB ſera triple du quarré AC.) Parquoy les quar-
rez de EL, AB ſont egaux : & par conſequent les
lignes EL, AB, diametres des ſpheres ; comme auſſi
les ſpheres d'iceux diametres, ſont pareillement
egales.

Or il a été demontré que le quarré du diametre
EL eſt triple du quarré du côté du cube KL. Par-
quoy nous avons fait tout ce qui étoit propoſé.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte que le quarré du diametre de la ſphere, ou du cube, eſt egal aux quarrez du coſté du tetraedre & du cube pris enſemble. Car par la 47. p. 1 le quarré de AB diametre de la ſphere, eſt egal aux deux quarez de AC, BC, cotez du cube, & du tetraedre.

Eſt auſſi enident que tous les diametres du cube ſont egaux entr'eux, & qu'ils ſe diviſent en deux egalement au centre de la ſphere: & pareillement que les lignes droites qui conjoignent les centres des quarrez opoſez, ſe coupent en deux egalement au méme centre de la ſphere.

SCHOLIE.

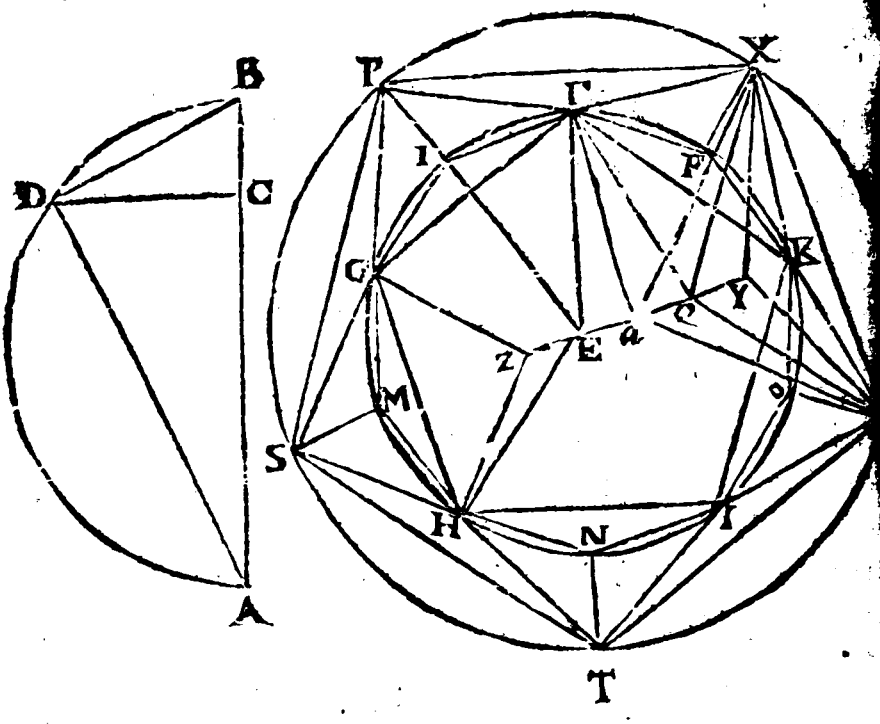
Le diametre AB êtant 12, AD ſera 4, BD 8, DC √ 32, BC √ 96, AC ou EF √ 48, EK √ 96, & EL 12. Parquoy apert que le quarré du diametre de la ſphere AB, *qui eſt* 144, *eſt triple du quarré de EF coſté du cube, qui eſt* 48, *&c.*

PROBL. 4. PROP. XVI.

Dans une ſphere donnée, inſcrire une icoſaëdre: Et montrer que ſon côté eſt ligne irrationele, apellée ligne mineure.

Soit le diametre de la ſphere donnée AB, lequel ſoit diviſé au point C, en ſorte que AC ſoit quadruple de BC, & apres avoir conſtruit le demy cercle ADB, levé la perpendiculaire CD, & mené les lignes droites AD, DB; du centre E, & de l'intervale EF egale à BD: ſoit fait un cercle, dans lequel ſoit inſcrit le pentagone equilateral FGHIK, & puis dans le méme cercle, ſoit auſſi inſcrit un decagone equilateral: (ce qui ſe fera en coupant en deux egalement l'arc d'un chacun côté du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E, & des points L, M, N, O, P, ſoient levées les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHIK, chacune deſquelles ſoit

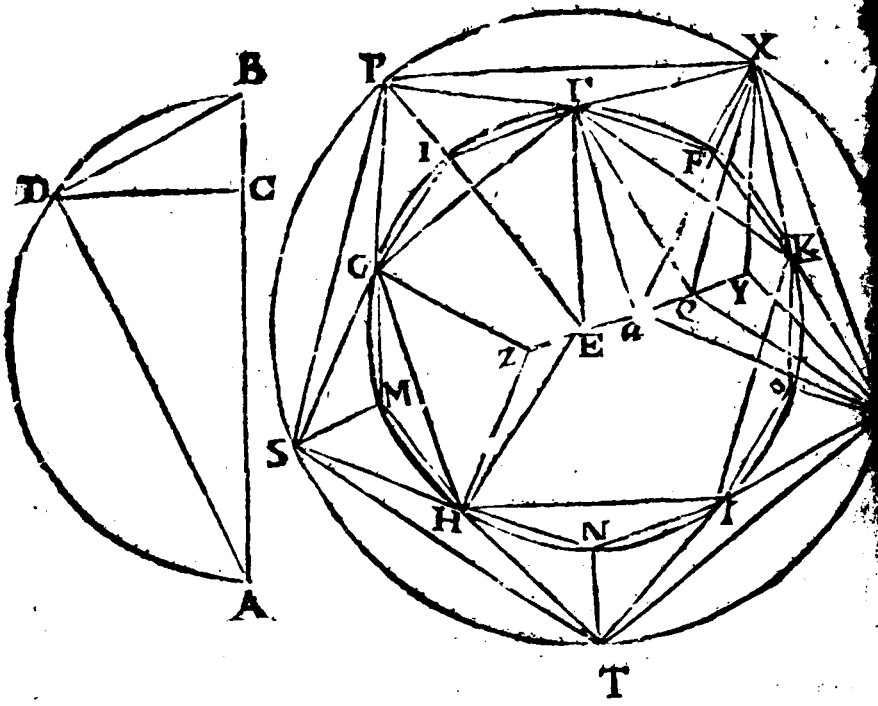
posée egale à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. el
seront paralleles entr'elles: & partant les ligr
droites conjoignant icelles, sçavoir EL, QR; E
QS; EN, QT: EO, QV; EP, QX, (toutes lesquell
toutesfois nous n'avons tirées pour eviter confu
sion) seront egales & paralleles entr'elles, par
33. prop 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont egal
au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, Q
seront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy dia
metre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 1



prop. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la même raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallel au même plan FGHIK, tiré par les lignes EM, EN: mais que le plan tiré par les lignes QR, QS convient avec le plan mené

par les lignes QS, QT, en la ligne droite QS; il eſt evident par les choſes demontrées à la 16. prop. 11. que ces deux plans en font un ſeul. On demontrera en la méme maniere, que le plan tiré par QT, QV, avec celuy-cy en fait un ſeul, & auſſi celuy tiré par QV, QX & par QX, QR: tellement donc que les 5. lignes QR, QS, QT, QV, QX ſont en un même plan: & partant ſi de Q, & de l'intervale QX, on décrit un cercle en iceluy plan, il paſſera par les autres points R, S, T, V, & ſera egal au cercle FGH K. Soient tirées les lignes droites RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autant que LR, PX ſont egales & paralleles: ſi on imagine être tirée une ligne droite LP, auſſi par la 33. prop. 1. LP, RX ſeront egales & paralleles: & partant par la 28. p. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la cinquiéme partie du cercle FGHIK, ſçavoir les deux dixiémes parties LF, FP: Donc auſſi RX, prend la cinquiéme partie du cercle RSTVX. Par même maniere nous concluons que chacune des autres lignes droites RS, ST, TV, VX, prend la cinquiéme partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX eſt un pentagone equilateral, ayant tous les côtez egaux à ceux du pentagone F G H I K. Soient tirées des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droites RF, RG SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpendiculaire LR eſt egale au demy diametre EF, c'eſt à dire au côté de l'hexagone du cercle FGHIK; & que LF eſt côté du decagone, par la 10. prop. 13. le quarré du côté du pentagone du même cercle, eſt egal aux quarrez de LR, LF. Mais le quarré de FR par la 47. prop. 1. eſt egal à iceux

quarrez de LR, LF : Donc le quarré de FR est e
au quarré du coté du pentagone; & par conſequ
la ligne RF ſera egale à LP côté du pentagone, o
FG, c'eſt à dire à RX. Par la même raiſon, les a
tres lignes RG, SG, &c. ſeront egales aux autr
côtez de chaque pentagone ; & partant les di
triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TI
VIK, VKX, XKF, ſeront equilateraux, & egau
entr'eux. Maintenant ſoit prolongée de part



d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que cha-
que prolongemen QY, EZ ſoit egal au côté du de-
cagone, & ſoient tirées les lignes VQ, VY, XQ,
XY, GE, GZ, HE. HZ. D'autant que QX eſt ſe-
midiametre du cercle RSTVX, c'eſt à dire côté de
l'hexagone, & QY eſt côté du decagone de même
cercle ; par la 10. prop. 13. le quarré de XV, côté du
pentagone

pentagone, ſera egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47. prop. 1. à iceux quarrez de QX, QY, eſt auſſi egal le quarré de XY : (car l'angle XQY, eſt droit, étant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallels). Donc le quarré de XY; eſt egal au quarré de XV, & partant la ligne XY egale à la ligne XV. Par même raiſon XV ſera demontrée egale à VY : & partant le triangle VYX eſt equilateral. Par même maniere, (étans tirées les lignes RY, SY, TY, leſquelles ne ſont tirées pour eviter confuſion) chacun des 4 triangles RYX, RYS, SYT, TYV, ſera demontré equilateral, & egal au triangle VYX, c'eſt à dire à chacun des dix premiers triangles, puis que tous leurs côtez ſont egaux aux côtez du pentagone. Par ſemblable argument ſera prouvé que le triangle GZH eſt equilateral, comme auſſi les 4 autres triangles HZI, IZK, KXF, FZG, (deſquels toutesfois nous n'avons auſſi tiré les lignes, afin d'eviter confuſion) tous leſquels ſeront egaux tant entr'eux qu'aux 15 precedans. Veu donc que tous ces 20 triangles ſont equilateraux, & egaux, & qu'ils ſe conjoignent les uns aux autres par lignes droites; ſera conſtitué d'iceux un Icoſaedre : lequel ie dis être inſcriptible en la ſphere donnée, de laquelle le diameeſt AB. Car ayant coupé en deux egalement EQ en *a*, & tiré les lignes *a* F, *a* X. *a* V; les côtez *a* Q, QV du triangle *a* QV ſeront egaux aux côtez *a* Q, QX du triangle *a* QX, (car QV, QX, ſont ſemydiametres du cercle RSTVX) & les angles *a* QV, *a* QX ſont droits: & partant par la 4. pr. 1. les baſes *a* V, *a* X ſeront egales. Par la même raiſon, ſi on tire des lignes de *a* & Q à R, S, T, les lignes *a* R, *a* S. *a* T ſeront demontrées egales entr'elles, & à icel-

les *a* V, *a* X. Et puis que les côtez *a* Q, QX
triangle *a* QX ſont egaux aux côtez *a* E, EF
triangle *a* EF, (pource que QX, EF ſont de
diametres de cercles egaux, & EQ eſt coupée
deux egalement en *a*) & les angles *a* QX, *a*
ſont auſſi egaux, ſçavoir droits: par la 4. prop.
les baſes *a* X, *a* F, ſeront auſſi egales. Par mê
raiſon, ſi de *a* & E on tire des lignes droites à
H,I,k, on demontrera les lignes *a* G, *a* H, *a* I, *a*
être egales à icelle *a* X: & partant les dix ligne
droites tirées de *a* aux dix angles F,G,H,I,R,k,S,
V,X, ſont egales. Et d'autant que QE eſt ſemidia
metre, c'eſt à dire côté de l'hexagone du cercle
FGHIk, & EZ côté du decagone du même cercle
par la 9. prop. 13. QZ ſera diviſée en la moyenne &
extreme raiſon en E, & le plus grand ſegment ſer
QE. Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ ſe
ra quintuple du quarré de E *a*. Mais le quarré d
a F eſt auſſi quintuple du même quarré de E *a*: (ca
le quarré de EF êtant quadruple du quarré de E
par le ſcholie de la 4. prop. 2. pource que EF eſ
double de E *a*: les quarrez de EF, E *a*, ſont le quin
tuple du quarré de E *a*. Mais par la 47. prop. 1. le
quarré de *a* F eſt egal à iceux quarrez de EF, E *a*
donc auſſi le quarré d'icelle *a* F ſera quintuple d'i
celuy quarré de E *a*.) Donc les quarrez de *a* Z, *a* F
ſont egaux: & par conſequent les lignes *a* Z *a* F
ſeront egales. Et puis que *a* E, *a* Q, & EZ, QY
ſont egales auſſi *a* Z, *a* Y ſeront egales: & toutes
les lignes droites tirées de *a*, à tous les angles de
l'Iſcoſaedre pareillement egales. Parquoy la ſphere
décrite à l'entour du diametre ZY, paſſera par tous
les angles de l'Iſcoſaedre. Car d'autant que par la

5. prop. 5. comme *a* Z eſt à *a* E, ainſi YZ à QE; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de *a* Z eſt au quarré de *a* E, ainſi le quarré de YZ au quarré de QE, & que le quarré de *a* Z a êté demontré quintuple du quarré de *a* E pareillement le quarré de YZ ſera quintuple du quarré de QE, c'eſt à dire du quarré de DB ſon egale. Mais auſſi le quarré de AB eſt quintuple du même quarré de BD: (car AB, BD, BC êtans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB ſera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. prop. 6. & partant AB êtant quintuple de BC, auſſi le quarré de AB ſera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB ſont egaux: & partant les lignes YZ, AB, & les ſpheres décrites à l'entour d'icelles ſeront egales.

Je dis finalement que le côté de l'Icoſaedre eſt ligne irrationele, apellée ligne mineure: ce qui eſt evident par la 11. prop. 13. êtant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou ſon egale BD, ligne rationele commenſurable en puiſſance à la poſée rationele AB, de laquelle nous avons montré que le quarré êtoit quintuple du quarré de BD. Nous avons donc fait ce qui êtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que le quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarré du ſemidiametre du cercle comprenant 5 coſtez de l'Icoſaedre.

Et auſſi qu'iceluy diametre de la ſphere eſt compoſé du coſté de l'hexagone, & de deux coſtez du decagone décrits en un même cercle.

Et encore que le coſté de l'icoſaedre eſt egal au coſté

du pentagone, par le moyen duquel eſt conſtruit ic
Icoſaedre.

SCHOLIE.

Le diametre AB étant 10, *AC ſera* 8, CB 2 *CD*
AD V80, BD *ou EF* V20: *& partant GF*
RX coſté du pentagone ſera V (,0—V500), *& L*
*ou FL*5—V5. *Mais RL êtant egale au ſemidiam*
tre, ou coſté de l'hexagone EF, eſt V20: *donc R*
ou RF coſté de l'Icoſaedre ſera V (50—V 500), *q*
partant eſt egal au coſté du pentagone GF ou RX,
par conſequent ligne mineure comme iceluy. Davar
tage Ea ou aQ eſtant moitié de EQ ou EF egale
QX ſera V5, *EZ ou QY* 5—V5: *partant ZQ*
ZY composée du coſté de l'hexagone EQ, & de celu
du decagone LF ſera 5+V5, *IZ* 5, *& la tou*
ZY 10: *Parquoy apert que le quarré du diametre d*
la ſphere eſt quintuple, &c.

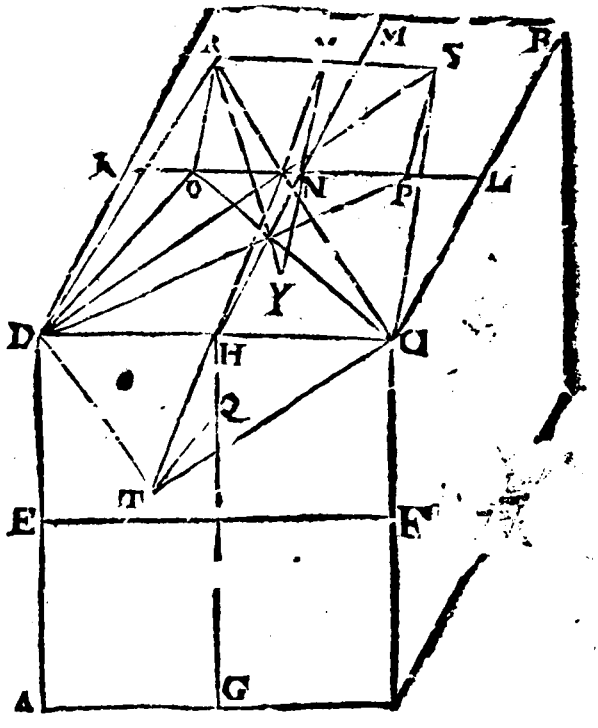
PROBL. 5. PROP. XVII.

Dans une ſphere donnée, inſcrire un dode caedre: Et montrer que ſon côté eſt li gne irrationele, apellée reſidu.

Soit le cube AB inſcriptible en la ſphere donnée, duquel les deux plans exterieurs AC & DB, ſe rencontrent à angles droits à la ligne de commune ſection DC: & d'iceux plans tous les côtez ſoient coupez en deux egalement, ſçavoir AC, par les deux lignes EF, GH ſe coupans au point I; & DB, par les lignes KL & HM ſe coupans au point N. Item les trois lignes KN, NL, HI ſoient coupées

en la moyenne & extreme raiſon aux points O, P, Q deſquelles les plus grands ſegmens ſoient NO, NP, IQ: & par la 12. prop. 11. ſoient levées les deux lignes OR, PS perpendiculaires au plan DB: mais QT au plan AC, leſquelles ſoient poſées egales aux trois ſegmens ON, NP, IQ: Puis ſoient menées les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Je dis que DRSCT eſt pentagone equilateral conſtitué ſur un même plan, & equiangle.

Car ſoient menées les lignes DO, DP, DS: & d'autant que KN eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon au point O, & que ON eſt le plus grand ſegment, par la 4. prop. 13. les deux quarrez de KN, KO ſeront triples du quarré de ON: Et KN étant egale à KD, & ON à OR, les deux quarrez de KD & KO, ou le ſeul de DO, qui leur eſt egal par la 47. prop. 1. eſt triple du quarré de OR: & partant le quarré de DR, qui eſt egal à tous les



deux par la 47. prop. 1. ſera quadruple du ſeul RO : Et d'autant que RS eſt double de RO, ſ quarré, par le ſcholie de la 4. prop. 2. ſera auſſi qu druple du quarré de OR, auſſi bien que le quar DR : Partant les lignes DR, RS ſeront egales. P même diſcours on montrera l'egalité des tro autres côtez SC, CT, TD, tant entr'eux qu'au deux DR, RS, donc le pentagone DRSCT e equilateral.

Je dis qu'il eſt auſſi en un même plan. Car ayan menée NV parallele à OR, ſoient tirées TH, & HV, icelles deux lignes ſe rencontreront directement : tellement que THV ſera une ſeule ligne droite. Car d'autant que HI eſt coupée en l moyenne & extreme raiſon au point Q ; IH ſera IQ, comme IQ à QH. Mais HN eſt egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI : donc comme HN eſt à NV, ainſi QT à QH. Parquoy les triangles NVH, QTH, ont deux côtez proportionaux à deux côtez, & ſont conjoints à l'angle H, tellement que les côtez homologues HN, TQ ; & NV, QH, ſont parallels par la 6. prop. 11. ces deux-là étans perpendiculaires au plan AC, & ces deux-cy au plan DB : Donc par la 32. prop. 6. THV ſera une ſeule ligne droite. Or par la 1. pr. 11. toute ligne droite eſt en un même plan : par conſequent le pentagone DRSCT eſt en un même plan.

Je dis encores qu'il eſt equiangle : Car puis que KN eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, étant ON plus grand ſegment, par la 5. prop. 13. en ajoûtant KN à NP, egale au plus grand ſegment ON ; la toute BP ſera coupée en la moyenne & extreme raiſon au point N, & ſera KN le plus

grand segment : & partant par la 4 pr. 13. les quarrez de KP & NP (ou PS son egale) sont triples du quarré de KN, C ou de son egale KD:) & en ajoûtant le quarré de KD avec les deux de KP & PS : iceux trois quarrez seront quadruples du seul de KD, (ou par la 47. pr. 1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP avec celuy de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. pr. 2. êtant DC double de KD : partant les deux lignes DC & DS seront egales : Mais aussi êtans tous les côtez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois côtez egaux aux trois côtez chacun au sien : Et par la 8. pr. 1. l'angle au point R sera egal à l'angle au point T. Et semblablement nous montrerons que l'angle RSC est egal à l'angle DTC : partant trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. prop. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & fait sur DC l'un des côtez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de même façon un pentagone, sur chacun des unze côtez restans, on trouvera une figure solide environnée de douze pentagones equiangles & equilateraux, qui par les def. sera dodecaedre.

Je dis d'avantage qu'il est inscriptible en la sphere donnée. Car si on prolonge VN, qui est perpendiculairem. élevée sur le centre du quarré DB, il apert par la 39. prop. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux egalement : qu'elle la coupe donc au point X, auquel point sera le centre de la sphere environnant le cube par le corol. de la 15. prop. 13. & NX est egale au demy côté du cube:

Soit menée la ligne R X. Or nous avons tan
montré par la 4. pr. 13. que les quarrez de KP
NP ſont triples du quarré de KN: Mais VX
egale à KP; & RV à NP: (car NX eſt egale à K
& VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, X
ou le ſeul de RX, par la 47 prop. 1. eſt triple
quarré de KN: Mais par la 15. prop. 13. le quar
du diametre de la ſphere circonſcripte au cube, e
triple du quarré du côté d'iceluy cube: Et par
15. prop. 5. le quarré du demy diametre eſt triple a
quarré du demy côté. Or KN eſt le demy côté d
cube: Partant RX ſera le demy diametre de l
ſphere circonſcrite au cube AB, duquel le centr
eſt X: Par même diſcours nous montrerons que d
point X, toutes les lignes menées vers les autre
angles du dodecaedre, ſont egales au demy diame
tre de la ſphere circonſcripte au cube. Partant un
même ſphere pourra être circonſcripte au cube &
au dodecaedre.

Je dis finalement que le côté du dodecaedre eſt
ligne irrationele, apellée reſidu. Car d'autant
que les deux demy côtez du cube K N, NL ſont
chacun coupez en la moyenne & extreme raiſon:
par la quinziéme propoſition cinq toute la ligne
KL ſera aux deux plus grands ſegmens enſemble,
ſçavoir à OP, comme iceux plus grands ſegmens
ſont aux plus petits enſemble, ſçavoir à la compo-
ſée de KO & PL. Parquoy ſi KL côté du cube eſt
coupée en la moyenne & extreme raiſon, le plus
grand ſegment ſera OP Mais la toute KL ainſi cou-
pée eſt rationele: (car ſon quarré eſt commenſ. au
quarré du diametre de la ſphere, lequel eſt poſé
rationel: puis qu'il eſt le tiers d'iceluy par la 15.

prop. 13.) Donc par la 6. prop. 13. le plus grand segment OP, c'est à dire RS côté du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationele, apelée residu. Nous avons donc fait tout ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le costé d'un cube estant coupé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en une mesme sphere.

Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droite subtendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant coupée en la moyenne & extreme raison, par la 8. prop. 13. le plus grand segment est costé d'un pentagone: & partant par la 5. prop. 13. la ligne droite composée d'icelle, c'est à dire du costé du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement divisée, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grãd costẽ est du cube: Il s'ensuit que si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre: le plus grand segment sera costé du cube inscrit en la mesme sphere.

SCHOLIE.

Nous avons donc trouvé à la 15. prop. que le diametre de la sphere estant 12, le costé du cube inscriptible en icelle est V48, & partant KN moitié d'iceluy costé sera V12, & estant coupée en la moyenne & extreme raison en O, le grand segment NO sera V15 —V3, & le moindre KO V27 —V15, tellement que

leurs trois quarrez ſeront 12, 18—√180, *&* 42—√1620. *Mais d'autant que le quarré de DO eſt* [illegible] *aux deux quarrez de KO, DK, iceluy quarré de* [illegible] *ſera* 54—√1620: *& ajoûtant à iceluy le quarré* [illegible] *OR, c'eſt à aire de ON, viendront* 72—√2880 [illegible] *le quarré de DK coſté du dodecaedre: & partant* [illegible] *luy coſté ſera* √60—√12, *qui eſt reſidu ſixiéme. D* [illegible] *vantage, ajoûtant à KN ſon grand ſegment* [illegible] *viendront* √15+√3 *pour la toute KP, dont le qu* [illegible] *ré eſt* 18+√180 · *auquel quarré eſtant ajoûté cel* [illegible] *de DK, viendront* 30+√180 *pour le quarré de D* [illegible] *& luy ajoûtant le quarré de PS, qui eſt* 18—√18[illegible] *viendront* 48 *pour le quarré de DS ſubtendante* [illegible] *l'angle du pentagone, qui partant eſt* √48, *egal* [illegible] *coſté du cube: lequel coſté eſtant coupé en la moyen* [illegible] *& extreme raiſon, le moindre ſegment ſera* √108 [illegible] √60, *& le grand* √60—√12, *partant egal au co* [illegible] *du dodecaedre, qui eſtant ajoûté à la ſubtendan* [illegible] *DS, la compoſée ſera* √60+√12, *qui eſt le do* [illegible] *ble de KP. Parquoy apert que le coſté d'un cer* [illegible] *eſtant coupé, &c.*

PROBL. 6. PROP. XVIII.

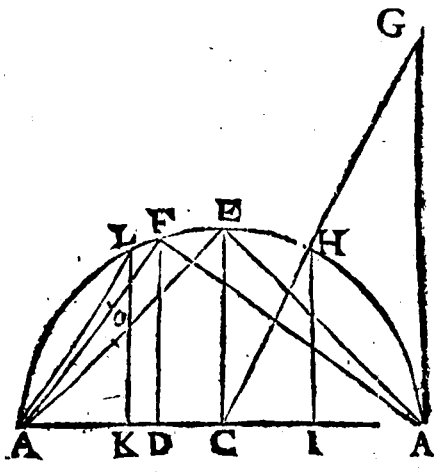
Le diametre d'une ſphere étant donné trouver les coſtez des cinq figures regulieres inſcrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit donné AB le diametre d'une ſphere: & il faut premierement trouver les côtez des cinq figures regulieres inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diviſé le diametre AB en deux egalement

au point C, mais au point D, tellement que AD soit la tierce partie de AB : puis ayant décrit sur AB un demy cercle, soient élevées les perpendiculaires CE, DF, & tirées les lignes droites AE, AF, BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF est moyenne proportionele entre AB, BD, par le corol. de la 20. prop. 6 comme AB sera à BD ainsi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere : (car par la construction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2.) Donc aussi le quarré de AB est au quarré de BD, en raison sesquialtere : & partant puis que par la 13. pr. 13. le quarré du diametre de la sphere est en raison sesquialtere au quarré du côté du tetraedre : BF sera le costé du tetraedre inscrit en la sphere du diametre AB.



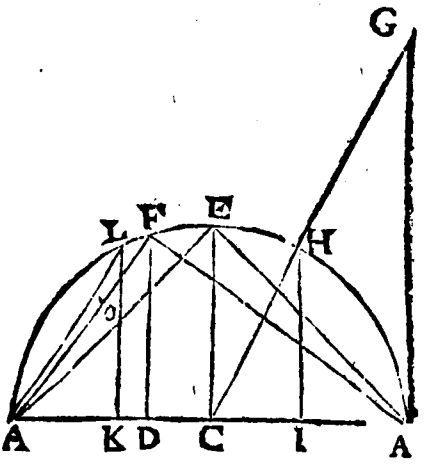
Derechef, puis que par le même cor. de la 8. p. 6. AE est moyenne proportionele entre AB, AC : & partant comme AB est à AC, ainsi le quarré de AB au quarré de AE par le corol. de la 20. prop. 6. & AB est double de AC, aussi le quarré de AB sera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est double du côté de l'octaedre, AE sera côté de l'octaedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Et pour autant que par les mêmes corol. des 8. 20. prop. 6. le quarré de AB eſt au quarré de A comme AB à AD, & que par la conſtruction A eſt triple de AD; le quarré de AB ſera triple quarré de AF. Parquoy vû que par la 15. prop. le quarré du diametre de la ſphere eſt triple quarré du côté du cube, AF ſera le côté du cub inſcrit en la ſphere du diametre AB.

Et d'autant que AF eſt côté du cube, ſoit icelu coupé en la moyenne & extréme raiſon au poin O, duquel le plus grand ſegment ſoit AO: icelu ſegment (par le corol. de la 17. prop. 13) ſera le côté du dodecaedre inſcrit en la même ſphere qu le cube, qui eſt celle-là même qui a pour diametre AB.

Quant au côté de l'Icoſaedre, ſoit levée la perpendiculaire BG egale à AB: & apres avoir mené la ligne CG coupant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy point ſoit menée HI perpendicul. à AB par la 12. prop. 1. Or EG étant egale à AB, elle ſera double de BC: & partant par la 4. prop. 6. HI ſera double de IC: (car les triangles ſont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des points B & I droits: le tiers G ſera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le ſcholie de la 4 prop. 2. le quarré de HI ſera quadruple du quarré de IC: & partant le quarré de HC (ou de ſon egale AC) qui par la 47. prop. 1. eſt egal à tous les deux, ſera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD eſt le tiers du diametre AB, & AC ſa moitié, DC ſera le demy tiers: & partant AC ſera triple de DC, & ſon quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. propoſi-

tion 6. Or iceluy quarré de AC n'eſt que quintuple du quarré de CI : & partant la ligne CI ſera plus grande que DC. Soit donc priſe CK egale à CI, & apres avoir levé la perpendiculaire kL, ſoit menée la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC eſt quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) ſera quintuple du quarré de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaedre eſt quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonſcrivant 5 côtez de l'Icoſaedre: donc IK ſera ſemidiametre, c'eſt à dire côté de l'hexagone d'iceluy cercle, lequel côté de l'hexagone avec deux fois le côté du decagone inſcrit dans le même cercle, eſt egal au diametre de la ſphere AB, par le corol. de la même 16. p. 13. Il faut donc que AK & IB lignes egales, ſoient deux côtez du decagone inſcrit dans le même cercle, dans lequel kI eſt le côté de l'hexagone. Mais kI & kL ſont egales: (car kL eſt egale à IH, pour être en même diſtance du centre C, laquelle étant double de CI ſera egale à KI.) Partant KL ſera côté de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. or. 1. & 10. pr. 13. AL ſera le côté du pentagone inſcrit au même cercle. Donc il ſera auſſi le côté de l'Icoſaedre par la



16. prop. 13. Nous avons donc trouvé les côtez
5 figures regulieres inſcriptibles en une me
ſphere.

Maintenant pour le regard de la comparai
d'iceux côtez trouvez. D'autant qu'il a été deme
tré que le quarré du diametre de la ſphere eſt ſ
quialtere au quarré du côté de la pyramide; m
double de celuy du côté de l'octaedre, & triple
quarré du côté du cube: il eſt evident que le quar
du diametre de la ſphere étant 6, celuy du côté d
tetraedre ſera 4; celuy du côté de l'octaedre 3,
celuy du côté du cube 2. Partant le quarré du côt
de la pyramide eſt ſeſquitierce au quarré de l'o-
ctaedre: mais double de celuy du côté du cub
Item le quarré du côté de l'octaedre eſt ſeſquialte
re à celuy du côté du cube. Parquoy les quarrez de
côtez d'icelles trois figures, & celuy du diametr
de la ſphere, ſont entr'eux comme nombre à nom
bre: & partant par la 6. prop. 10. iceluy diametr
de la ſphere, & les côtez d'icelles trois figures ſon
lignes commenſurables & rationeles, pource qu
le diametre eſt posé rationel. Mais les ſuſdits quar
rez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nom
bre quarré, ainſi qu'il apert par le corol. de la 2
prop. 8. Donc icelles lignes (ſçavoir le diametr
de la ſphere, le côté de la pyramide, le côté de l'o-
ctaedre, & celuy du cube,) ſont incommenſura-
bles en longitude par la 9. prop. 10. & partant el-
les ſont rationeles commenſurables en puiſſance
ſeulement.

Et quant aux côtez de l'icoſaedre, & dodecaedre:
pource qu'ils ſont lignes irrationeles, il eſt evident
qu'ils ſont incommenſurables, tant entr'eux, qu'au

diametre de la sphere, & aux côtez des autres figures.

Or lesquels d'iceux côtez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi: d'autant qu'il a été demontré cy-dessus que le quarré de AB est triple du quarré de AF: mais quintuple du quarré de KI, c'est à dire de KL son egale, trois quarrez de AF seront egaux à 5 quarrez de KL. Et puis que AF est coupé en la moyenne & extréme raison en O, & AO est le plus grand segment, il est evident par la 1.pr. 6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF, OF: Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarré de AF par la 2. p. 2 & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarré de AO: (car par la 17. p. 6. le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarré de AO.) Donc aussi le quarré de AF sera plus grand que deux fois le quarré de AO: & par consequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de KL leurs egaux, seront aussi plus grands que 6 quarrez de AO. Parquoy un seul quarré de KL sera plus grand qu'un seul quarré de AO: & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO: Partant AL, qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la même AO, côté du dodecaedre. Nous avons donc fait ce qui étoit proposé.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures solides cy-dessus declarées, on n'en peut pas trouver d'autres compriſes de superficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux

triangles, ou de deux autres ſuperficies planes, qui ne comprendra aucun ſolide, ne pouvant iceux conſtituer un angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitue l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'Icoſaedre: de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide, car iceux ſont egaux à quatre angles droits & tous les angles plans d'un angle ſolide, doivent eſtre plus petits que quatre angles droits par la 21. propoſ. 11. Par meſme raiſon on ne pourra conſtituer un angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droits eſt composé l'angle ſolide du cube, de quatre angles droits on ne fera aucun angle ſolide, car ce ſeroit toûjours contrevenir à la 21. prop. 11. L'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangles: De quatre pentagones il ſera impoſſible, eſtans iceux plus grands que quatre droits, puis que chacun vaut les ſix quints d'un droit par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas un autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuivroit toûjours la même abſurdité. Partant il eſt evident qu'outre les cinq figures reguliere cy-deſſus declarées, on n'en trouvera point d'autres equilateres & equiangles.

Quant à l'aplication des nombres aux lignes de la demonſtration cy-deſſus, le diametre AB eſtant 6, AC ſera 3, AD 2, & DC 1, DB 4: Mais DF ſera V8, BF coſté de la pyramide V24, AE coſté de l'octaedre V18, AF côté du cube V12, AO coſté du dodecaedre V15 — V3, CG V45 CI ou CK V1 4/5, HI ou IK ou kL V7 1/5, IB ou AK 3 V1 4/5, & partant AL coſté de l'Icoſaedre ſera V(18 — V64 4/5)

Reſte à remarquer icy certaines regles colligées des

choſes

choſes demontrées en ce 13. livre, au moyen deſquelles il ſera fort aiſé de connoiſtre les coſtez des cinq corps reguliers inſcriptibles en une ſphere, dont le diametre ſera connu: Et au contraire eſtant connu le coſté de quelconque deſdits cinq corps, connoiſtre le diametre de la ſphere, & conſequemment auſſi tous les coſtez des autres corps.

1. Le quarré du diametre de la ſphere eſt au quarré du côté du tetraedre, comme 3 à 2; de l'octaedre, comme 2 à 1; & du cube, comme 3 à 1.

2. Le quarré du côté du tetraedre eſt au quarré du côté de l'octaedre, comme 4 à 3, & du cube, comme 2 à 1.

3. Le quarré du côté de l'octaedre eſt au quarré du côté du cube, comme 3 à 2.

4. Mais le diametre de la ſphere étant rationel, le quarré du côté de l'Icoſaedre eſt eſt reſidu quatriéme, duquel le grand nom eſt la moitié du quarré dudit diametre, (*ou le double du quarré du ſemidiam.*) & le moindre nom eſt $V\frac{8}{20}$ du quarré dudit diametre: (*ou* $V\frac{4}{5}$ *du quarré du ſemidiam.*)

5. Et le côté du dodecaedre eſt reſidu ſixiéme, duquel le grand nom eſt $V\frac{5}{5}$ du ſemidiam (*ou* $V\frac{5}{12}$ *du diam.* & le petit nom eſt $V\frac{1}{5}$ du ſemidiam. (*ou* $V\frac{1}{12}$ *du diam. c'eſt à dire* $V\frac{1}{5}$ *du grand nom.*

Leſquelles Regles ſeront d'autant plus intelligibles par les exemples, ou propoſitions ſuivantes.

1. Qu'il faille connoître les côtez des cinq corps inſcriptibles en une ſphere, dont le diametre eſt 8.

Premierement, je quarre ledit diametre 8, & viennent 64, dont je prends les $\frac{2}{3}$, *& viennent* $42\frac{2}{3}$ *pour le quarré du coſté du tetraedre ou pyramide equilaterale: & partant iceluy coſté eſt* $V\,42\frac{2}{3}$.

Secondement, du meſme quarré 64, je prens la moitié, pour avoir le coſté de l'octaedre: & partant iceluy coſté eſt V32.

Tiercement, du même quarré 64, je prends le tiers pour le quarré du coſté du cube, qui partant eſt V21.

Quartement, du même quarré 64, je prends la moitié 32 pour le grand nom du reſidu de l'Icoſaedre; puis je quarre ledit quarré 64, & viennent 4096, que je diviſe par 20, & prepoſant le ſigne V au quotient, ſera V204 $\frac{4}{5}$, qui eſt le petit nom dudit reſidu: Parquoy le quarré du coſté de l'Icoſaedre ſera 32—V204 $\frac{4}{5}$, & partant iceluy coſté eſt V 32 — V204$\frac{4}{5}$.

Finalement, je diviſe le meſme quarré 64 par 12, & viennent 5$\frac{1}{3}$, & le quintuple 26$\frac{2}{3}$, a chacun deſquels deux nombres je prepoſe le ſigne V pour avoir les deux noms du coſté du dodecaedre, qui partant ſera V 26 —V5$\frac{1}{3}$.

2. Le côté du dodecaedre inſcriptible en une ſphere étant V20—2 : connoître tant le diametre d'icelle ſphere, que les côtez des autres corps reguliers.

Premierement, je multiplie le moindre nom 2 par V3, & viennent V12, pour le ſemidiametre de la ſphere: & partant tout le diametre ſera V48.

Secondement, je prends les $\frac{2}{3}$ du quarré du diametre trouvé, & viennent 32 pour le quarré du coſté de la pyramide, qui partant eſt V32.

Tiercement, du meſme quarré 48, je prends la moitié, qui eſt le quarré du coſté de l'octaedre, qui partant eſt V24.

Quartement, du même quarré 48, je prends le tiers pour avoir le quarré du côté du cube, & partant iceluy côté ſera 4.

Finalement la moitié du mesme quarré 48, sera le grand nom du quarré du costé de l'Icosaedre, & pour avoir le petit nom, je quarre ledit quarré 48, & viendra 2304, que je diviſe par 20, & prepoſant le ſigne radical V au quotient, il ſera V115 $\frac{1}{5}$ Parquoy le quarré du costé de l'Icosaedre requis ſera 24 — V115 $\frac{1}{5}$: & partant iceluy costé ſera V(24 — V115 $\frac{1}{5}$).

Or quant aux perpendiculaires, ou hauteurs d'iceux corps, enſemble leurs ſuperficies, & contenus ſolides, nous en avons traité amplement aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, où les curieux & amateurs de telles ſuputations pourront avoir recours, s'ils ne ſe contentent de ce que nous en dirons au livre ſuivant.

Fin du treiziéme Element.



ELEMENT QUATORZIE'ME,

Qu'aucuns attribuent à Hypſicle Alexandrin.

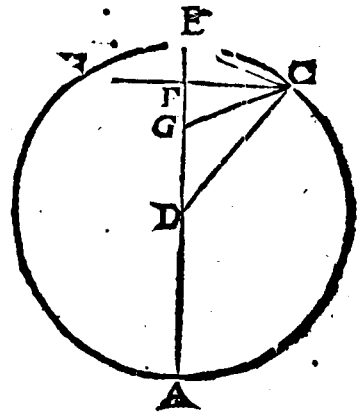
THEOR. 1. PROP. 1.

LA ligne droite perpendiculaire menée du centre au coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié des deux côtez de l'hexagone, & decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.

Soit le cercle ABC, dont le centre eſt D, & BC le côté du pentagone inſcrit en iceluy cercle; mais du centre D ſoit menée la ligne DF, perpendicul. à iceluy côté BC, & icelle étant prolongée de part & d'autre juſques en A & E pour parfaire le diametre AE, elle coupera en deux egalement, tant la ligne droite BC, que l'arc BEC, ainſi qu'il eſt evident par les 3. & 28. pr. 3. Parquoy étant tirée la ligne droite EC, elle ſera le côté du decagone, & DE le côté de l'hexagone. Je dis que la perpen-

diculaire DF est la moitié des deux côtez ensemble EC & DE.

Car apres avoir pris FG egale à FE, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquiéme partie de la circonference du cercle, EC sa moitié sera la cinquiéme partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. propos. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20 pr. 3. lequel par ce moyen sera double de CDE: mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux: donc FGC sera aussi double de GDC: Mais iceluy FGC étant par la 32. prop. 1. egal à tous les deux GDC, GCD opposez interieurement dans, iceux deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux: & par la 6. p. 1 GC & GD seront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE étans egales, la seule FD sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC seront egales au double de la seule DF: & par consequent icelle DF perpendiculairem. tirée du centre sur le côté du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, côtez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droite perpend. &c. Ce qu'il faloit prouver.



COROLLAIRE.

Il eſt donc manifeſte que la perpendiculaire menée du centre au coſté du pentagone eſt egale à la perpendiculaire tirée dudit centre au coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone inſcrit au même cercle, puis que par le corol. de la 12. prop. ladite perpendiculaire menée au coſté du triangle equilateral eſt moitié du coſte de l'hexagone.

SCHOLIE.

Le ſemidiametre DC eſtant 4, nous avons trouvé au Scholie de la 10. pr. 13. que le coſté du pentagone BC ſera $\sqrt{(40 - \sqrt{320})}$, *& le coſte du decagone EC* $\sqrt{20} - 2$: *Parquoy le quarré de FC moitié dudit coſté BC ſera* $10 - \sqrt{20}$, *qui oſté du quarré de DC, c'eſt à dire de 16, reſteront* $6 + \sqrt{20}$ *pour le quarré de DF, & partant icelle DF eſt* $\sqrt{(6 + \sqrt{20})}$. *Mais le ſemidiam. DC, qui eſt 4. eſtant aioûté avec le coſté du decagone EC* $\sqrt{20} - 2$, *fait* $\sqrt{20} + 2$, *dont la moitié* $\sqrt{5} + 1$ *eſt egal à* $\sqrt{(6 + \sqrt{20})}$: *car le quarré de l'un & l'autre eſt* $6 + \sqrt{20}$: *partant apert ce qui eſtoit proposé.*

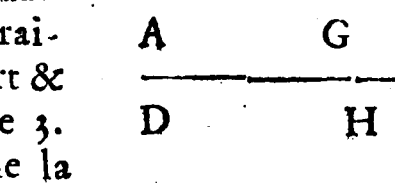
THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droites coupées en la moyenne & extreme raiſon; elles ſeront ſemblablement coupées.

Soient deux lignes droites AB & DE coupées en la moyenne & extreme raiſon aux points G & H: & leurs plus grands ſegmens ſoient AG & DH.

Je dis qu'icelles lignes sont semblablement coupées : c'est à dire que comme AB est à DE, ainsi AG à DH, & GB à HE : Item comme AG à GB, ainsi DH à HE, &c.

Car par la 17. proposition du 6. le rectangle de AB, & GB, est egal au quarré de AG : & le rectangle de DE & HE egal au quarré de DH : & partant comme le rectangle de AB ; GB sera au quarré de AG, ainsi le rectangle de DE HE sera au quarré de DH : (y ayant raison d'egalité de part & d'autre) & par le 3. theor. du Scholie de la 22. p. 5. quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH : & en composant [apres avoir ajouté directement BC egale à BG ; & EF egale à EH] quatre fois le rectangle de AB & GB avec le quarré de AG, [ou par la 8. pr. 2. le seul quarré de AC] est au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, avec le quarré de DH, [ou le seul quarré de DF] est au quarré de DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG, ainsi DF à DH : Et en composant, comme la composée de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG, ainsi la composée de DF, DH, c'est à dire la double de DE, est à DH : & en permutant, comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH : Et par la 15. proposition 5. comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE, ainsi AG à DH : & partant par la 19. proposition 5. ainsi



fera auſſi le reſte GB au reſte HE. Parquoy c
me AG à DH, ainſi ſera GB à HE, puis que
ne & l'autre raiſon eſt comme AB à DE: &
permutant, comme AG ſera à GB, ainſi DH ſer
HE: & ainſi ſelon toutes les autres manieres d'
gumenter és proportions, on demontrera tou
lignes & les parties d'icelles être proportionel
entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droites, &
Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La ligne droite AB eſtant 4, le grand ſegmen AG ſera $\sqrt{20}-2$, *& le petit GB* $6-\sqrt{20}$. *Mai DE eſtant 2, le grand ſegment DH ſera* $\sqrt{5}-1$ *& le petit HE* $3-\sqrt{5}$. *Or le produit de AB 4, en DH* $\sqrt{5}-1$ *eſt* $\sqrt{80}-4$, *& le produit de DE 2 en AG* $\sqrt{20}-2$ *eſt auſſi* $\sqrt{80}-4$: *& partant comme AB à DE, ainſi AG à DH. Le produit de AB 4 en HE* $3-\sqrt{5}$ *eſt* $12-\sqrt{80}$: *& le produit de DE 2 en GB* $6-\sqrt{20}$ *eſt auſſi* $12-\sqrt{80}$: *partant comme AB à DE, ainſi GB à HE. Le produit de AG* $\sqrt{20}-2$ *en HE* $3-\sqrt{5}$ *eſt* $\sqrt{320}-16$, *& le produit de GB* $6-\sqrt{20}$ *en DH* $\sqrt{5}-21$ *eſt pareillement* $\sqrt{320}-16$: *Parquoy eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.*

Or de cecy apert qu'eſtant connuë une ligne droite, il eſt fort aiſé de connoiſtre combien ſeront les ſegmens d'icelle coupée en la moyenne & extreme raiſon, par le moyen de quelqu'autre ligne dont les ſegmens ſeront connus: Et pour tant plus en faciliter la pratique nous avons expreſſement adapté de petits nombres à la ligne DE: tellement que ſi on veut, par exemple, connoiſtre les ſegmens

d'une autre ligne de 10. pieds, il faut dire par regle de trois, Si 2. donnent V5—1, que donneront 10? & faisant la regle on trouvera V125—5 pour le grand segment, qui osté de la toute 10, resteront 15—V125 pour le moindre segment.

Aussi l'un ou l'autre des segmens êtant connû, on connoistra par la mesme methode tant l'autre segment que la toute: Parquoy estant connû le costé du pentagone on peut connoistre le diametre du cercle circonscrivant iceluy: car puis que par la 8. prop. 13. la subtendante de l'angle d'un pentagone estant coupée en la moyenne & extreme raison le grand segment est egal au costé dudit pentagone, on connoistra le petit segment ou reste de ladite subtendante, ainsi qu'il est dit cy-dessus: & le quarré de la moitié d'icelle subtendante estant osté du quarré du costé du pentagone, restera le quarré d'une ligne par laquelle estant divisé le quarré de la moitié de la subtendante on aura le diametre du cercle, ainsi qu'il apert des choses demontrées à la 11. prop. 13. Lequel diametre on obtiendra encore par la regle de proportion; d'autant que nous avons demontré sur le 8. chap. du 2. livre de la Geometrie d Errard que la raison du semidiametre du cercle au costé du pentagone inscrit en iceluy est comme de 2 à V(10—V20): parquoy voulant connoistre le diametre d'un cercle dont le costé du pentagone est V(40—V320), ie diray, si V(10—V20) donnent 2, que donneront V(40—V320)? & ayant fait la regle ainsi qu'il apartient, le 4. nombre proport. sera 4, dont le double 8 est le diametre requis.

Le mesme se doit entendre de tout autre polygone dont la raison du semidiametre au costé sera connuë: Et pour ce sujet nous remarquerons icy que le semidia-

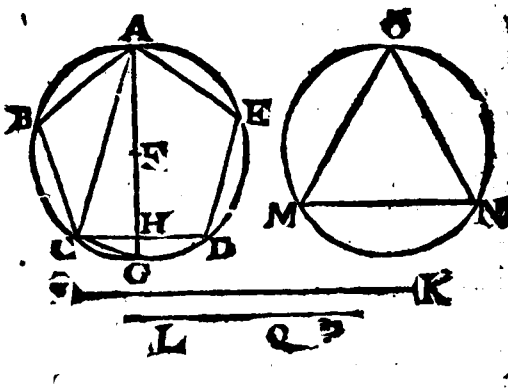
metre du cercle eſtant 2, le coſté du triangle in en iceluy ſera V 12: celuy du quarré V8: celuy pentagone V(10—V20): celuy de l'octogone V(8 V32): celuy du decagone V5—1: & celuy du de cagone V6—V2.

THEOR. 3. PROP. III.

Vn même cercle comprend le pentagon du dodecaedre, & le triangle de l'ic ſaedre inſcrits en une même ſphere.

Auparavant que d'expliquer cette prop. il con vient demontrer que le quarré du côté du penta gone, avec le quarré de la ligne qui ſoûtient u angle d'iceluy, eſt quintuple du quarré du dem diametre du cercle dans lequel eſt inſcrit icelu pentagone.

Soit un cercle ABCDE, le côté du pentagon inſcrit en iceluy cercle CD, la ligne qui ſoûtien un angle d'iceluy pentagone CA, le demy diame tre F G; lequel coupe en deux egalement, tan l'arc CGD, que le côté CD, par le corol. de la 1 prop. 13. Je dis que les deux quarrez de CA & CD ſont enſemble quintuples du quarré de FG.



Car ſi on mene CG, ce ſera le côté du decagone: & par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de

AG, ſera quadruple du quarré du demy diametre FG ; & par conſequent les deux de AC, CG, qui par la 47. prop. 1. ſont egaux au quarré de AG, ſeront auſſi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, ſeront enſemble quintuple du ſeul de GF : Mais les deux de CG & GF, coſtez de l'hexagone & decagone ſont enſemble egaux au quarré de CD côté du pentagone, par la 10. prop. 13. partant les deux quarrez de AC & CD ſont quintuples du quarré de GF. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la propoſition. Soit IK le diametre de la ſphere comprenant le dodecaedre & l'Icoſaedre : & d'iceluy dodecaedre ſoit un pentagone ABCDE, & de l'Icoſaedre ſoit le triangle equilateral LMN: je dis qu'un même cercle circonſcrit le pentagone ABCDE, le triangle LMN : c'eſt à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonſcrivent ſont egaux.

Car êtant tirée AC ſubtendante de l'angle du pentagone B, ce ſera le côté du cube inſcrit en la même ſphere, par le corol. de la 17. prop. 13, & ſoit expoſée la ligne droite OP, telle que le quarré de IK diametre de la ſphere, ſoit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP ſera egal au demy diametre du cercle, dans lequel on conſtruit l'Icoſaedre par le corol. de la 16. prop. 13. ſoit icelle OP coupée en la moyenne & extreme raiſon en Q; & le plus grand ſegment OQ ſera côté du decagone inſcrit au même cercle, dont OP eſt le côté de l'hexagone ou ſemidiametre, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. prop. 13. lors que CA eſt diviſée en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus

grand ſegment eſt AB : Donc par la 2. propoſit
14. comme la toute AC ſera à la toute OP, ainſ
plus grand ſegment AB ſera au plus grand ſegme
OQ : partant par la 22. prop. 6. comme le qua
de AC ſera au quarré de OP, ainſi le quarré
AB ſera au quarré de OQ ; & par la 4. prop.
comme le triple du quarré de AC eſt au quintup
du quarré de OP, ainſi le triple du quarré de A
eſt au quintuple du quarré de OQ. Mais le trip
du quarré de AC eſt egal au quintuple du quar
de OP : (pource que le quarré de IK diametre de
ſphere, eſt egal, tant au triple du quarré de AC
côté du cube par la 15. prop. 13. que au quintupl
du quarré de OP par l'hypotheſe.) Donc auſſi l
triple du quarré de AB ſera egal au quintuple d
quarré de OQ. Or par le corol. de la 16. pr. 13. ML
coſté du triangle de l'Icoſaedre, eſt egal au côté d
pentagone inſcrit dans le cercle, dont OP eſt de
my diametre : & partant puis que par la 10. prop
13. le quarré d'iceluy côté eſt egal aux deux quar
rez de OP, & OQ, côtez de l'hexagone & du de
cagone, cinq quarrez de ML ſeront egaux à cinq
quarrez de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA,
& à trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA,
& AC eſtans quintuples du quarré du demy dia-
metre FA, (comme nous avons demontré au com-
mencement de cette propoſition) trois quarrez de
AB, & AC ſeront egaux à quinze quarrez du de-
my diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, côté
du triangle equilateral, ſont auſſi egaux à quinze
quarrez du demy diametre du cercle LMN : (car
chacun quarré de ML eſt triple du quarré du demy
diametre, par la 12. propoſition du 13.) Donc les

fois de BA & AC êtans egaux au cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN : Partant un quarré d'iceux sera egal à un quarré, & le demi-diametre au demi-diametre, & par consequent les cercles ABCDE, LMN seront egaux. Donc un mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

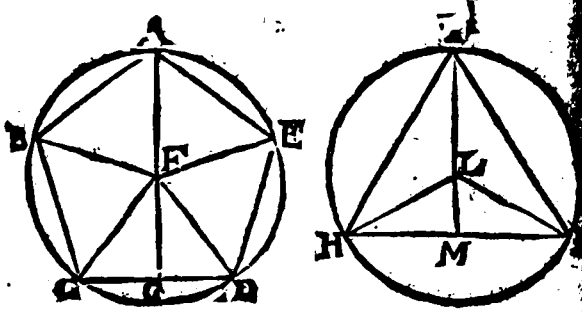
Il apert par ce que nous avons dit à la fin du livre precedent, que le diametre de la Sphere IK estant 8, AB costé du dodecaedre sera $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$, *& LM costé de l'Icosaedre* $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{5}}]}$. *Mais par ce qui a esté enseigné au Scholie preced. le semidiam. du cercle circonscrivant un pentagone dont le costé est* $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{5}}$ *sera trouvé de* $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{45}}]}$ *: & celuy du cercle circonscrivant un triangle equilateral, dont le costé est* $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{5}}]}$ *sera aussi trouvé de* $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{45}}]}$, *soit qu'on procede par la mesme methode du Scholie preced. ou bien qu'on prenne le tiers du quarré dudit costé : car par la 12. pr. 13. iceluy tiers sera le quarré du semidiametre requis : Parquoy apert ce qui estoit proposé.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si du centre du cercle circonscrivant le pentagone du dodecaedre, on mene une ligne droite perpendiculaire sur un costé d'iceluy pentagone ; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, est egal à la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle ABCDE circonſcrivant un p
tagone du dodecaedre, & le centre d'iceluy ce
ſoit F, duquel ſoit tirée FG perpendiculairem
ſur le coſté CD. Je dis que trente fois le recta
gle compris de FG & CD, eſt egal à la ſuperfi
du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, F
il eſt evident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, eſt double du triangle CFD. Or



en la ſuperficie du dodecaedre il y a douze pentagones egaux, & chaque pentagone à cinq pareils triangles que CFD, qui ſont en tout ſoixante triangles, deſquels ſoixante rectangles, ſeroient le double: Donc trente rectangles FG & CD, leur ſeront egaux.

Nous demonſterons ſemblablement, que ſi un triangle equilateral, comme HIK, eſt inſcrit en un cercle, du centre duquel L, on tire ſur le coſté HK la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, ſeront egaux à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Car icelle ſuperficie contient vingt triangles equilateraux ſemblables à HIK; & chacun d'iceux ſe diviſe en trois autres triangles egaux entr'eux & ſemblables, & egaux à HLK, qui ſont en tout ſoixante triangles comme HLK: mais le rectangle

le la perpendiculaire LM & du coſté HK, eſt double du triangle HLK par la 41. p. 1. Et par conſequent ſoixante rectangles ſeroient doubles de 60 triangles : Donc trente rectangles de LM & HK ſeront egaux à la ſuperficie totale de l'icoſaedre.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte, par la 15. prop. 5. que comme un ſeul rectangle de FG & CD, eſt à un ſeul rectangle de LM & HK, ainſi la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre.

SCHOLIE.

Nous avons trouvé cy-devant que le diametre de la ſphere eſtant 8, CD coſté du dodecaedre ſera $\sqrt{26\frac{2}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5}}}$, *HK coſté de l'Icoſaedre* $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{5}}]}$, *& le ſemidiametre CF ou LH* $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{45}}]}$.: *Parquoy le quarré de CG ſera* $8 - \sqrt{35\frac{5}{9}}$, *qui oſté de* $10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{45}}$ *quarré du ſemidiametre CF, reſteront* $2\frac{2}{3} + \sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendic. FG, qui partant eſt* $\sqrt{(2\frac{2}{3} + \sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *& le produit d'icelle perpendiculaire par le coſté CD ſera* $\sqrt{[56\frac{8}{9} - \sqrt{647\frac{109}{405}}]}$, *lequel produit multiplié par 30, donne* $\sqrt{(51200 - \sqrt{524288000})}$ *pour la ſuperficie de tout le dodecaedre. Mais le quarré de HM ſera* $8 - \sqrt{12\frac{4}{5}}$, *qui oſté du quarré de LH, reſteront* $2\frac{2}{3} - \sqrt{1\frac{19}{45}}$ *pour le quarré de la perpendiculaire LM, qui partant eſt* $\sqrt{(2\frac{2}{3} - \sqrt{1\frac{19}{45}})}$, *le produit de laquelle perpendic. par le coſté HK ſera* $\sqrt{(102\frac{2}{5} - \sqrt{5825\frac{19}{45}})}$, *& trente fois ce produit donne* $\sqrt{(92160 - \sqrt{4718592000})}$ *pour la ſuperficie de l'Icoſaedre.*

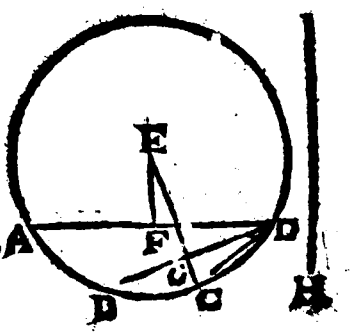
Or en la meſme maniere que deſſus on peut trouver la ſuperficie des trois autres corps reguliers, c'eſt à ſçavoir du tetraedre, de l'octaedre & du cube: Car ſi du centre du cercle qui circonſcrit le triangle du tetraedre ou de l'octaedre, ou le quarré du cube, eſt tirée une perpendiculaire à un coſté d'iceux, au tetraedre ſix fois le rectangle compris ſous icelle perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre: Mais à l'octaedre, & au cube, douze fois ledit rectangle compris ſous la perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie de l'octaedre, & auſſi egal à la ſuperficie du cube. Car ſi du centre du cercle circonſcrivant le triangle du tetraedre, ou de l'octaedre, on tire des lignes droites à chaque angle dudit triangle ainſi que deſſus, on le diviſera en trois triangles ſemblables & egaux entr'eux., & par conſequent il y aura 12 tels triangles en toute la ſuperficie dudit tetraedre, & 24 en celle de l'octaedre: Mais le rectangle compris ſous la baſe & la perpendic. eſt double de chacun deſdits triangles par la 41. p. 1. & partant ledit rectangle pris ſix fois ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre; & pris douze fois, il ſera egal à la ſuperficie dudit octaedre. Mais ayant mené du centre du cercle circonſcrivant le quarré du cube des lignes droites à chaque angles d'iceluy quarré il ſera diviſé en quatre triangles egaux & ſemblables; & par conſequent il y en aura 24 en toute la ſuperficie du cube, leſquels ſont egaux à 12 rectangles compris ſous le coſté & la perpendiculaire, ainſi que nous avons demontré plus au long ſur le 4. chap. du 3. livre de la Geometrie d'Errard.

THEOR.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre ; ainſi le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, inſcrits en une meſme ſphere.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoit pris AD, coſté du triangle equilateral de l'icoſaedre ; & BD coſté du pentagone du dodecaedre inſcrits en une meſme ſphere ; (ce qui eſt poſſible, puis que par la 3. prop 14 un meſme cercle comprend le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Et du centre E ſoient tirées ſur AD, BD les perpendiculaires EF, EG : & icelle EG eſtant prolongée iuſques à la circonference, elle coupera l'arc BCD en deux egalement en C : & eſtant tirée la ligne droite CD, ce ſera le coſté du decagone : & finalement ſoit expoſée la ligne droite H coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere. Je dis que la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, comme H coſté du cube eſt à AD coſté de l'Icoſaedre.



Car d'autant que EC eſt coſté de l'hexagone, & CD coſté du decagone inſcrit en un meſme cercle ; la compoſée d'iceux coſtez, ſera coupée en la moyenne & extreme raiſon, dont le plus grand

ſegment ſera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. pr
14. la moitié d'icelle compoſée eſt EG ; & par
corol. de la 12. p. 13. la moitié d'icelluy. plus gra
ſegment EC eſt EF : Et partant, puis que par
15. prop. 5. les toutes ſont aux toutes, comme
moitiez aux moitiez : il eſt evident que la moi
EG eſtant coupée en la moyenne & extreme ra
ſon, la moitié EF ſera le plus grand ſegment : (
la moitié du plus grand ſegment, & la moitié d
plus petit fait la moitié de la toute.) Mais par
corol. de la 17. prop. 13. H coſté du cube eſtan
auſſi coupé en la moyenne & extreme raiſon, ſon
plus grand ſegment ſera ED coſté du dodecaedre
Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, ſera
BD ſon plus grand ſegment, ainſi la toute EG ſer
EF ſon plus grand ſegment : Et partant par la 1
prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF
ſera egal au rectangle des moyennes BD, EG. E
pource que par la 1. pr. 6. comme H eſt à AD, ain
le rectangle de H, EF, eſt au rectangle de AD, EF
(car ces deux rectangles ont une même hauteu
EF. Auſſi comme H ſera à AD, ainſi le rectangle d
BD, EG (lequel eſt egal à celuy de H, EF) eſt au
même rectangle compris ſous AD, EF Parquoy
puis que par le corol. de la preced. comme le re
ctangle compris ſous BD, EG eſt au rectangle com-
pris de AD, EF, ainſi la ſuperficie du dodecaedre
eſt à la ſuperficie de l'icoſaedre pareillement com-
me H côté du cube ſera à AD côté de l'icoſaedre,
ainſi ſera la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie
de l'icoſaedre. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Nous avons trouvé cy-devant que AD eſt V(32—

$V104\frac{4}{5}$) $BD 26\frac{2}{3} - V5\frac{1}{3}$, $EC V(10\frac{2}{3} - V22\frac{34}{45})$ $EF V(2\frac{2}{3} - V1\frac{19}{45})$ $EG V(2\frac{2}{3} + V1\frac{19}{45})$, & $HV21\frac{1}{3}$: & que le rectangle ou produit du coſte BD en la perpend. EG eſt $V(568\frac{8}{9} - V647\frac{109}{405})$, celuy du coſté AD en la perpend. $EF V(102\frac{2}{5} - V5825\frac{19}{45})$: Mais que la ſuperficie du dodecaedre eſt $V(51200 - V524288000)$, & celle de l'icoſaedre $V(92160 - V4718592000)$. Or le produit de cette ſuperficie-là multipliee par le coſté de l'icoſaedre AD $V(32 - 204\frac{4}{5}1)$ eſt egal au produit de cette ſuperficie-cy multipliee par le coſté du cube $HV21\frac{1}{3}$, car l'un & l'autre produit eſt $V(1966080 - V2147483648000)$: & partant apert ce qui eſtoit propoſé; & en outre que le rectangle ou produit de H en EF eſt egal à celuy de BD en EG, l'un & l'autre d'iceux produits eſtant $V(568\frac{8}{9} - V647\frac{109}{405})$: partant que comme le coſté du cube H eſt au coſté du dodecaedre BD, ainſi la perpendiculaire EG eſt à la perpendiculaire EF.

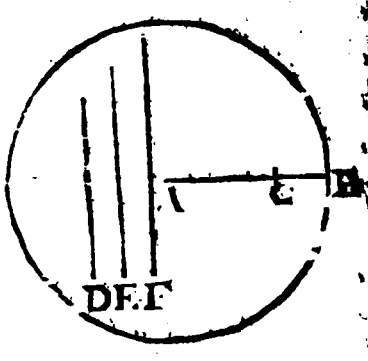
Apert encore que EF perpendic. de l'icoſaedre eſt moitié du ſemidiam. EC; le quarré de laquelle perpendic. eſt un reſidu, dont le binome correſpondant eſt le quarré de EG perpendic. du dodecaedre; & partant ledit ſemidiam. EC eſtant connu on trouvera fort aiſement leſdites perpendiculaires; car prenant la moitié d'iceluy, on aura la perpendic. EF, & changeant le ſigne $-$ en $+$ on aura l'autre perpend. EG.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon; comme les quarrez de la toute & du plus grand ſegment,

ſont aux quarrez de la toute & du plus petit ſegment, ainſi le quarré du côté du cube, eſt au quarré du côté de l'icoſaedre inſcrit en une même ſphere.

Soit le cercle comprenant le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, ſoit coupé en la moyenne & extreme raiſon en C, dont le plus grand ſegment ſoit AC, qui ſera le côté du decagone inſcrit dans le même cercle par le coroll. de la 9. prop. 13. Item ſoient priſes trois lignes, ſçavoir D côté du dodecaedre, E côté de l'icoſaedre, & F côté du cube inſcriptibles en une même ſphere: Je dis que le quarré de F, eſt au quarré de E, cõme les quarrez de AB & AC ſont aux quarrez de AB & CB.



Car D êtant le côté du pentagone, & E le côté du triangle tous deux inſcrits dans le cercle donné; lors que F côté du cube eſt diviſé en la moyenne & extreme raiſon, D eſt ſon plus grand ſegment, par le corol. de la 17. pr. 13. Donc E êtant le côté du triangle inſcrit au cercle donné, ſon quarré ſera triple du quarré du demy-diametre AB par la 12. propoſition 13. & par la 4. propoſition 13. les deux quarrez de AB & CB ſont triples du quarré de AC: partant le quarré de E eſt au quarré de AB, comme les deux quarrez de AB, CB ſont au quarré de AC: Et en permutant,

le quarré de E ſera aux deux quarrez de AB, CB, comme le quarré de AB, au quarré de AC, mais comme le quarré de AB, au quarré de AC, ainſi le quarré de F au quarré de D: [car par la 2. prop. 14. comme la toute AB eſt à ſon plus grand ſegment AC, ainſi la toute F à ſon plus grand ſegment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F ſera au quarré de D) donc par la 11. pr. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainſi le quarré de F au quarré de D: & en permutant, cõme le quarré de E au quarré de F, ainſi les quarrez de AB & CB ſont au quarré de D, coſté du pentagone: lequel quarré par la 10. pr. 13. eſt egal aux deux quarrez de AB & AC cotez de l'hexagone & decagone inſcrits en un même cercle; & par conſequent le quarré de F coſté du cube, eſt à E coſté de l'Icoſaedre, comme les quarrez de AB & AC, ſont aux quarrez de AB & CB. Si donc une ligne droite eſt coupée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Si quelconque ligne droite AB eſt 2. icelle eſtant coupée en C ſelon la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment AC ſera $\sqrt{5}-1$, *& le petit CB* $3-\sqrt{5}$: *mais puis que F eſt le coſté du cube inſcrit en une ſphere, iceluy ſoit tel que nous l'avons cy-devant trouvé, ſçavoir eſt* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$, *& E coſté de l'icoſaedre inſcrit en la meſme ſphere ſera auſſi tel que nous l'avons trouvé, ſçavoir eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Or le quarré de la toute AB eſt 4, celuy de AC* $6-\sqrt{20}$, *& celuy de CB* $14-\sqrt{180}$: *donc les deux quarrez de*

AB, AC ſont enſemble 10 — √ 20, *& les deux AB, CB ſont* 18 — √ 180: *Mais le quarré de F eſt* 21 *& celuy de E eſt* 32 — √ 204 $\frac{4}{5}$; *leſquels quatre nombres ſont proportionaux: car le produit des deux extremes eſt egal au produit des deux moyens, l'un & l'autre produit eſtant* 384 — √ 81920; *partant apert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre eſt à l'icoſaedre, inſcrits en une même ſphere.

Cette demonſtration eſt facile, les precedentes eſtans bien entenduës: car puis que par la 3. pr. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre ſont inſcrits dans un même cercle: il eſt evident qu'iceux triangle & pentagone ſeront equidiſtans du centre de la ſphere, Parquoy ſi on diviſe le dodecaedre & l'icoſaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'un que de l'autre ſolide ſeront de meſme hauteur: Et par les 5. & 6. prop. 12. elles ſeront l'une à l'autre, comme leurs baſes; c'eſt à ſçavoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icoſaedre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'eſt à dire que comme la ſuperficie du dodecaedre ſera à la ſuperficie de l'icoſaedre, ainſi tout le dodecaedre ſera à tout l'icoſaedre. Mais par la 5. pr. 14. icelles ſuperficies ſont l'une à l'autre, cõme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre: donc par la 11. pr. 5. comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, ainſi le do-

decaedre à l'icosaedre. Ce qui estoit à prouver.

SCHOLIE.

Nous avons enseigné tant en nostre Geometrie pratique qu'aux annotations faites sur la Geometrie d'Errard, divers moyens pour trouver les superficies & soliditez non seulement du dodecaedre & icosaedre, mais aussi de tout autre corps, c'est pourquoy nous n'en dirons rien icy, seulement y adjoûterons nous (pour d'abondant servir d'exemple de tout ce que nous avons cy-devant dit) les costez, superficies & soliditez des cinq corps reguliers inscrits en une sphere, dont le diametre est 6, afin que par le moyen d'icelles on puisse plus promptement trouver les costez, superficies & soliditez de tout autre corps semblable, dont le costé sera connû, suivant les regles & proportions des figures semblables cy-devant demonstrées, c'est à sçavoir de la raison doublee des costez, quant aux superficies; & de la triplee pour les soliditez.

Le costé du tetraedre sera $\sqrt{4}$, *sa superficie* $\sqrt{1\,2}$, *& sa solidité* $\sqrt{192}$.

Le costé de l'octaedre sera $\sqrt{18}$, *sa superficie* $\sqrt{3888}$, *& sa solidité* 36.

Le costé du cube sera $\sqrt{12}$, *sa superficie* 72, *& sa solidité* $\sqrt{1728}$.

Le costé du dodecaedre sera $\sqrt{15} - \sqrt{3}$, *sa superficie* $\sqrt{(1620 - \sqrt{52483000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240 + \sqrt{5832000})}$.

Le costé de l'Icosaedre sera $\sqrt{(18 - \sqrt{64\frac{4}{5}})}$ *sa superficie* $\sqrt{(29160 - \sqrt{472392000})}$, *& sa solidité* $\sqrt{(3240 + \sqrt{2099520})}$.

Parquoy apert d'abondant ce qui êtoit proposé, sçavoir est que comme $\sqrt{12}$ *costé du cube est à* $\sqrt{(18 - \sqrt{64\frac{4}{5}})}$ *costé de l'Icosaedre, ainsi* $\sqrt{[3240 + \sqrt{5832000}]}$

ſolidité du dodecaedre en à V [3240 + V 2099520 ſolidité de l Icoſaedre : car le produit des deux nombres extremes eſt egal à celuy des deux du milieu, l'un & l'autre produit étant V [38880 + V 302330880.

Apert auſſi que la ſuperficie de l octaedre eſt ſeſquialtere à la ſuperficie du tetraedre, c'eſt a dire comme 3 a 2 : car le produit des deux nombres extremes eſt egal au produit des deux nombres du milieu, l'un & l'autre produit étant V 15552.

Que l'octaedre eſt au triple du tetraedre, comme le côté de l'octaedre au côté du tetraedre : car le produit des deux nombres extremes eſt egal au produit des deux moyens, l'un & l'autre produit étant 31104.

Que la ſuperficie du cube eſt egale au double du quarré du diametre de la ſphere, & la ſolidité d'iceluy cube triple de la ſolidité du tetraedre.

Et finalement, que le cube eſt à l'octaedre, comme la ſuperficie du cube eſt à la ſuperficie de l octaedre : car le produit des deux nombres extremes eſt egal au produit des deux du milieu, l'un & l'autre produit eſtant 2592 : & auſſi comme le côté du cube au ſemidiametre de la ſphere, car le produit des deux nombres extremes eſt V 15552 auſſi bien que le produit des deux du milieu.

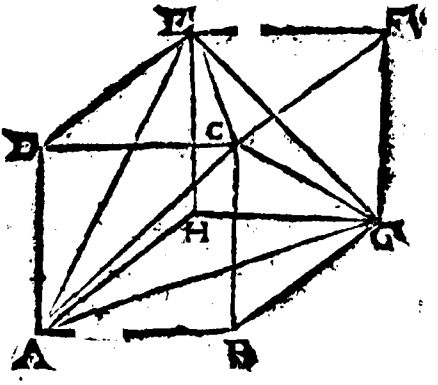
Fin du quatorziéme Element.

ELEMENT QUINZIEME.

PROBL. I. PROP. I.

DAns un cube donné, inſcrire une pyramide.

Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire une pyramide. De quelque angle d'iceluy, comme E ſoient menées les diagonales EA, EC, EG; & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menées les diagonales AG, AC, GC: Toutes leſquelles diagonales ſont egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dãs leſquelles elles ſont menées ſont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG,

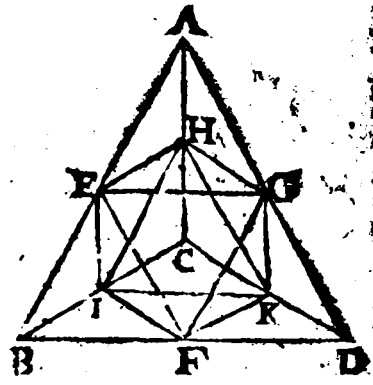


ſont equilateraux, & egaux entr'eux : & partant la pyramide AEGC, conſtituée d'iceux triangles, inſcrite au cube donné AF, par la 31. d. 11. Car tous les angles d'icelle pyramide ſont colloquez és angles d'iceluy cube AF. Nous avons donc inſcrit une pyramide dans le cube donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. II.

Dans une pyramide donnée, inſcrire un octaedre.

Soit la pyramide donnée ABCD, dans laquelle il faut inſcrire un octaedre. Soient coupez tous les côtez d'icelle pyramide en deux egalement aux points E,F,G,H,I,K : Et ſoient menées les lignes EF,FG,GE, HI. IK, KH, EI, IF, FK, KG,GH: HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles par la 4. prop. 1. toutes les lignes coupées êtans egales entr'elles, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux : Et partant le quadrilatere EGKI a les quatre côtez egaux: & les quatre triangles EHI, IHK, KHG, GHE, commençans ſur iceluy quadrilatere, & finiſſans au point H, ſont tous equilateraux, & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au deſſous du quadrilatere, & finiſſans au point F, ſont auſſi equilateraux & egaux tant

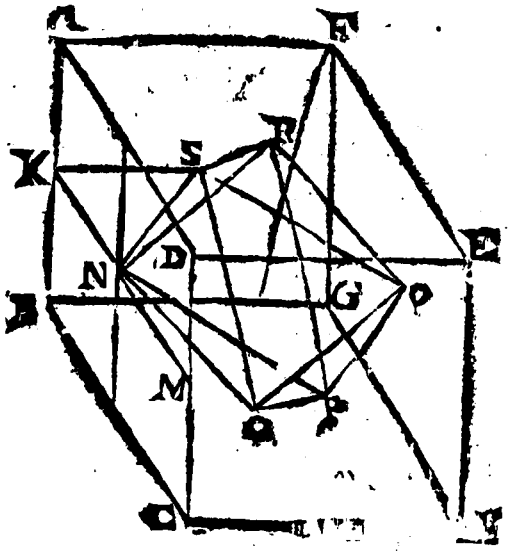


entr'eux qu'aux quatre precedans. Parquoy la figure EIKGHF composée d'iceux huit triangles est un octaedre, par la 27. def. 11. & par la 31. def. 11. il est inscrit dans la pyramide donnée ABCD, puis que tous les angles d'iceluy touchent tous les côtez d'icelle pyramide. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

PROBL. 3. PROP. III.

Dans un cube donné, inscrire un octaedre.

Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inscrire un octaedre. Soient coupez en deux egalement les côtez du quarré AC, és points I, K, L, M, & soient menées les deux ligues I L, KM, s'entre-coupans en N, lequel point sera le centre du quarré AC, comme il apert par la demonstration de la 8. prop. 4. Par la même maniere seront



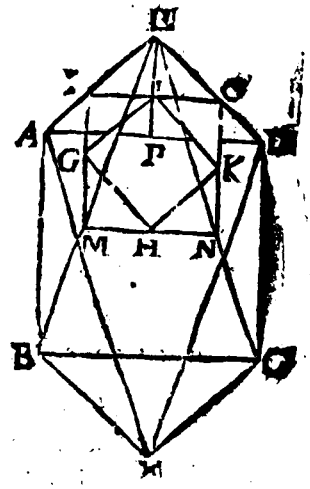
trouvez les centres des 5 autres quarrez du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R, S : Donc toutes les lignes droites tirées d'iceux centres à châque point de la section des côtez de leurs quarrez, telles que sont NI, NK, NL, NM, KS, &c. seront egales

aux moitiez d'iceux côtez, comme il apert par
susdite demonstration de la 8. prop. 4. & par co
sequent sont egales entr'elles. Item soient co
joints les centres S, N, P, Q par les quatre lign
droites SN, NP, PQ, QS, lesquelles seront tout
egales par la 4. prop. 1. d'autant qu'elles sont ba
de quatre triang'es Isoscelles ayans deux côtez
gaux à deux côtez, (chacun d'iceux côtez êta
egal à la moitié du côté du cube ainsi que NK, S
du triangle NKS) & l'angle contenu d'iceux côte
egal à l'angle, sçavoir droit comme NKS: Il e
evident qu'icelles quatre lignes feront aussi u
quarré qui est au milieu de l'octaedre, & paralle
à la base d'iceluy. Or des quatre angles d'icelu
quarré soient menées au point P, centre du quarr
superieur AE, les quatre lignes NR PR, QR, SR
lesquelles comme il a été dit cy-dessus seront toute
egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, &
feront les quatre triangles equilateraux NRP
PRQ, QRS, NRS: Item des mêmes quatre angle
du quarré NPQS, soient menées au point O, cen-
tre de la base CG, les lignes NO, PO, QO, SO, qui
seront egales comme dessus, & feront quatre autres
triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS;
lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers, car
tous leurs côtez sont egaux, êtans bases de huit
triangles Isoscelles rectangles, tel qu'est NKS. Par-
quoy le solide NOPQRS composé d'iceux 8 trian-
gles equilateraux & egaux entr'eux est octaedre
inscrit au cube donné, par les 27 & 31. def. 11.
puis que tous les six angles d'iceluy touchent les
six plans dudit cube à leurs centres. Nous avons
donc fait ce qui étoit requis.

PROBL. 4. PROP. IV.

Dans un octaedre donné, inscrire un cube.

Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inscrire un cube. Des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui se termine au point E, soient pris les centres G, H, I, K, & soient menées les lignes GH, HK, KI, GI: Il est evident que GHKI sera quarré. Car si d'iceux quatre centres on meine les lignes droites LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à son côté du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO seront equilateraux, puis qu'ils sont semblables aux triangles equilateraux cy-dessus par le corol. de la 4. pr. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les côtez communs; & par consequent les quatre bases LM, MN, NO, LO sont egales. Item si de E par le centre I on meine EP: elle divisera en deux egalement tant l'angle E, que le côté AD par le corol de la 10 prop. 13. & par consequent LO étant parallele à AD sera aussi coupée en deux egalement au centre I: Par même raison LM, MN, NO seront aussi coupez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainsi les quatre triangles GLI, IOK, GMH, HNK sont Isoscelles rectangles. (Car par la 10. prop. 11. les angles des points L, M, N, O, sont egaux aux



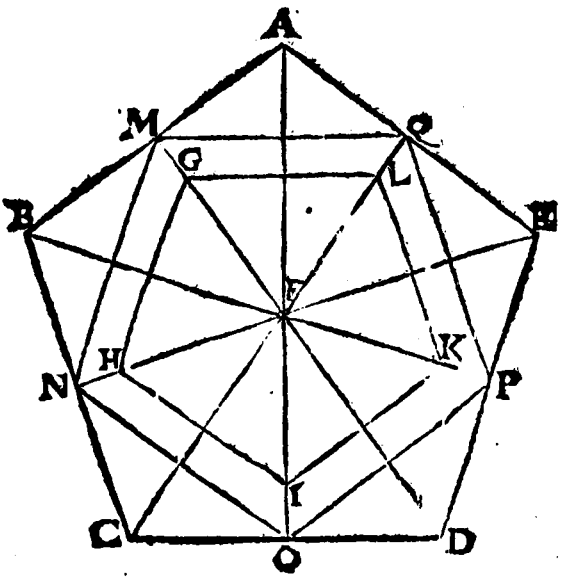
droits du quarré ABCD.) Parquoy les quatre l
ſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les ang
qu'elles comprennent droits: partant GHKL
quarré. Que ſi ſemblablement des autres triangl
de l'octaedre on prend les centres: iceux centr
êtans tous conjoints par lignes droites, ſeront d
crits encores 5 quarrez, leſquels ayans les côte
communs ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cub
compoſé d'iceux 6 quarrez ſera inſcrit dans l'octa
dre donné, puis que les angles d'iceluy touchen
les huit baſes de l'octaedre à leurs centres; & pa
ainſi nous avons fait ce qui êtoit requis.

PROBL. 5. PROP. V.

Dans un icoſaedre donné, décrire un dode caedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen du quel on conſtruit l'icoſaedre, ſur lequel ſoit une des douze pyramides pentagonales de l'icoſaedre, ayant pour ſommet le point F, auquel s'aſſemblent les cinq triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & ſoit trouvé le centre de chacun d'iceux triangles aux points G, H, I, K, L, & d'iceux ſoient menées les lignes HG, GL, LK, KI, IH: Item de F par iceux centres, ſoient menées les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, leſquelles couperont en deux egalement les côtez AB, BC, CD, DE, EA, comme il apert par le corol de la 10. prop. 13. & partant êtant menées les lignes droites MN, NO, OP, PQ, QM; il eſt evident par la 4. prop. 1. qu'elles ſeront egales; & que par la 8. prop. 1. les angles qu'elles

soûtiennent au point F sont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL sont aussi egales: (car ce sont demi-diametres de cercles circóscrivans triágles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG seront pareillement egales, & les angles de dessus icelles aussi egaux,



par la 4. prop. 1. Parquoy le pentagone GHIKL est equilateral & équiangle: & il se prouvera aisement comme à la 17. prop. 13. qu'il est aussi en un même plan. Que si semblablement on conjoint par lignes droites, les centres de tous les triangles des autres onze pyramides de l'icosaedre, seront aussi décrits des pentagones equilateraux & equiangles, lesquels puis qu'ils ont des côtez communs, seront aussi egaux entr'eux. Parquoy 12 tels pentagones constitueront un dodecaedre, lequel sera inscrit dans l'icosaedre, puis que les 20 angles d'iceluy octaedre sont constituez & touchent les 20 bases de l'icosaedre à leurs centres. Nous avons donc inscrit un dodecaedre, dans un Icosaedre donné. Ce qu'il faloit faire.

Fin du quinziéme & dernier Element.

COMMENTAIRE OU PREFACE DE MARIN PHILOSOPHE, sur le Livre des DONNEZ d'Euclide.

PRemierement, *il nous faut mettre comme fondement que c'eſt qu'on appelle* DONNE' : *en apres remarquer l'utilité d'iceluy, & en troiſiéme lieu à quelle ſcience appartient ce Traité.* DONNE' *doncques ſe definit en pluſieurs maniere*s ; *car les Anciens l'ont defini d'une façon*, *& les modernes d'une autre* ; *dont s'enſuit qu'il ſemble mal-aiſé en pouvoir donner la vraye explication. Car quelques-uns n'ont point baillé de definition de* Donné, *mais ils ont avec beaucoup de travail recherché certaines proprietez d'iceluy, & quelques autres raſſemblans & meſlangeans ce qui en avoit eſté dit auparavant par les autres ont eſſayé de definir* DONNE' : *mais non pas de telle façon qu'ils ne ſe ſoient contrariez eux-meſmes, quoy qu'il ſemble que tous fondez ſur une meſme notion & ſuppoſition en ayent dit quelque choſe: car tous ont eſtimé que le* Donné *eſtoit quelque choſe compriſe ; & partant entre ceux qui ont taſché de le décrire plus ſimplement & avec quelque ſimple difference, les uns ont creu que* Donné *eſtoit ce qui eſt* Ordonné, *ainſi qu'Apollonius en ſon Traité des Inclinations, & en ſon Traité Vniverſel : & les autres, comme Diodore, ce qui eſt* Conneu : *car en cette ſignification il prend la ligne droite, & les angles eſtre donnez, & tout ce qui peut venir à noſtre connoiſſance, encore qu'on ne le puiſſe pas bien ex-*

primer : Mais les autres ont creu que c'eſtoit meſme ce *eſt* Effable, *comme ſemble avoir voulu Ptolomée, le appelle* Donnez *toutes les choſes dont la meſure eſt con ſoit preciſément, ou à peu prés. Quelques autres auſſi penſé que* Donné *eſtoit ce qui nous eſt concedé en l'h theſe par le propoſant, veu qu'aux premiers Elemens prennent autrement un point donné qu'une ligne dr donnée, c'eſt-à-dire que qui donneroit & determine la quantité d'une ligne droite : toutes leſquelles ch veulent ſignifier quelque* Comprehenſion. *Et parti de toutes ces definitions, celles-là agréent le plus ; quelles plus appertement declarent la* Comprehenſi *comme nous ferons voir par les choſes ſuivantes.*

Or expliquons maintenant les diverſes opinions ceux, leſquels décrivans la nature du Donné *n'o point pris une ſimple marque, ou unique caractere p le definir, & les reduiſons comme en un ſommaire abregé, afin que nous puiſſions aiſément reconnoitre nombrer toutes leurs differences. Les uns donc ont de* Donné *être ce qui eſt* Ordonné & Porime *enſem & les autres, ce qui eſt* Ordonné & Connu *enſe ble : & les autres, ce qui eſt* Porime & Connu *ſemble : c'eſt pourquoy tous ſemblent avoir defini ſorte qu'ils ont eu égard à la* Comprehenſion, Somption & Invention *du Donné. Et afin que n concevions tant mieux leur opinion, & que des dicts pluſieurs nous puiſſions tirer une vraye definition de qui eſt propoſé, nous remarquerons en premier lieu ſignification de tous les termes ſimples dont ils ſe ſ vent, comme auſſi de leurs oppoſez, aſſavoir de l'*Ino donné, *& de l'*Inconnu, *de l'*Apore, *& de l'*Irr tionel : *car ces choſes-là appartiennent à cette matie Geometrique, aux choſes naturelles, & aux diſcipli Mathematiques.*

Or on appelle Ordonné *(ou reglé) cela qui gar & obſerve toûjours ce parquoy il eſt dit être ordonn ſoit quant à la grandeur, ou quant à l'eſpece, ou to chant quelque autre choſe de ſemblable : On le defin encore ainſi :* Ordonné *eſt ce qui ne peut être fait diverſes façons, mais en une ſeule en quelque lieu d terminé : comme pour exemple une ligne droite men*

par deux points donnez est dite être Ordonnee, *parce qu'il ne se peut faire autrement, ny en plusieurs façons : Mais un angle passant par deux points est dit* Inordonné, *(on desordonné & dereglé) parce qu'il est constitué en infinies & differentes façons par un grand ou un petit cercle décrit par deux points en l'infini : Et au contraire, un angle constitué par trois points est dit* Ordonné; *comme aussi ces choses sont dites être* Ordonnées; *constituer sur une ligne droite un triangle equilateral, car on ne le constituë point diversement, mais invariablement sur l'une & l'autre extrêmité de la ligne : Et coupper une ligne droite donnée selon une raison donnée, car cela ne se peut faire qu'en une partie de la bissection. Les* Inordonnez, *sont ceux qui se font au contraire de ceux-là; comme construire un triangle scalene, & coupper une ligne droite indefiniment. Or ce parquoy le Probleme est ordonné est proposé en la determination, attendu qu'une certaine chose pourra être* Ordonnée *en une certaine maniere, &* Inordonnée *en une autre : comme un triangle equilateral, entant qu'il est equilateral il est* Ordonné; *mais quant à la grandeur il est* Inordonné, *car il n'est nullement determiné.*

Mais on appelle Connu, *ce qui est notoire, comme clair & compris de nous : &* Inconnu, *ce qui n'est point connu ny compris de nous; comme la longueur d'un chemin est ditte connuë quand l'on sçait combien il contient de stades : Item que les trois angles d'un triangle rectiligne sont egaux à deux droits : & pareillement que le binome est irrationel; telles choses sont connuës, comme aussi qu'il n'y a qu'une ligne droite qui touche la ligne Spyralle d'un point donné hors d'icelle de l'une ou l'autre part : car s'il y en avoit encore une autre, deux lignes droites enclorroient un espace, ce qui est impossible. Au reste les choses irrationelles ne s'appellent point inconnuës, mais celles-là seulement qui ne sont ny connuës, ny compriſes de nous.*

Le Porisme *(ou qui a effection) est ce que nous pouvons faire & construire, c'est-à-dire le reduire en connoissance : On le definit encore en cette maniere,* Porisme *est ce qui peut être exhibé par demonstration, ou*

qui eſt apparent ſans demonſtration; comme eſt déc
un cercle d'un centre & intervalle, comme auſſi c
ſtruire non ſeulement un triangle equilateral, mais d
un Scalene : ou trouver un binome; ou trouver deux
gnes droites rationelles commenſurables en puiſſance ſ
lement; & autres choſes que l'on connoit en infinies
çons ſont Porimes, *comme décrire un cercle par de*
points.

L'APORE (*ou qui n'a effection*) *eſt totaleme*
oppoſé au Porime, comme par exemple, la quadratu
du cercle; car elle n'a pas encore eſté trouvee, bien qu
ſoit certain qu'elle le peut eſtre : toutefois le moyen
façon de la trouver n'a pas juſques à preſent eſté con
priſe : Mais nous parlons icy de ce qui eſt déja conn
qui s'appelle Porime principal; *car ce qui n'a pas e*
core eſté fait, & qui neanmoins eſt poſſible, eſt appe
Poriſte (*ou faiſable.*) *Mais l'*Apore, *comme il*
eſté déja dit, eſt oppoſé au Porime, *& eſt ce dont*
recherche n'eſt point encore decidee ny bien determ
née.

L'EFFABLE (*c'eſt-à-dire rationel, ou dicible &*
explicable) *eſt ce dont nous pouvons dire la grandeu*
l'eſpece, & poſition : Mais cette definition eſt un pe
trop generale, car proprement & ſelon ſoy, Effable, *e*
ce qui eſt connu par certaines choſes, & ſelon une me
ſure donnee par poſition, comme d'un épam ou d'u
doigt.

Ces choſes donc eſtans ainſi expliquees, nous pou
aiſément appercevoir en quoy conviennent & differen
toutes les choſes que nous avons dites cy-deſſus : Et pre
mierement comme s'accorde Ordonné *avec* Connu, *&*
ſemblablement leurs oppoſez entr'eux; car on ne peut
point dire qu'une de ces choſes par contreſchange ſoit
l'autre, ny auſſi que l'une n'ait pas plus d'eſtendu
que l'autre, quoy qu'ils s'accordent en pluſieurs choſes
comme décrire une ligne droite par deux points, & con
ſtituer un triangle equilateral par trois cercles. Mais
quarrer un cercle, cela eſt bien Ordonné, *mais* In-
connu, *neanmoins : Item qu'à un point d'une Spyralle*
il y ait une ſeule touchante, cela eſt bien du genre des
Ordonnez, *& ne ſe peut faire autrement, mais pour-*

aut la demonſtration & conſtruction n'en eſt pas connuë. Et derechef, la ſection indefinie, & la conſtitution du Scalene eſt bien Connuë, *mais elle n'eſt pas* Ordonnée; *tellement qu'il eſt manifeſte qu'entre les* Ordonnez, *il y en a de* Connus, *& d'autres* Inconnus: *Et par le contraire, qu'entre les* Connus, *il y en a d'*Ordonnez, *& d'autres* Inordonnez: *Et partant ces choſes ſe rapportent entr'elles, comme entre les animaux, celuy qui a raiſon avec celuy qui a des pieds; car ils ne s'egalent point entr'eux, ny l'un ne s'eſtend pas plus que l'autre.*

*Semblablement ſe comportent entr'eux l'*Ordonné *& l'*Inordonné, *au regard du* Porime *& de l'*Apore, *vû qu'entre iceux il y a une tres-grande reſſemblance, & different entr'eux en la façon ſuſdite: Car à la verité la Spyralle eſt bien* Ordonnee, *mais elle n'eſtoit pas Porime devant Archimede. Et par même raiſon les choſes qui ſont inordonnees & connuës par infinis moyens ſont Porimes, ſi quelqu'un en invente leur conſtitution & conſtruction. Et neanmoins elles ne ſont pas encore ordonnees, comme eſt conſtituer un triangle Scalene, car il n'eſt pas difficile de faire connoître la conſtitution d'iceluy par un equilateral, voire il eſt tres-facile, quoy qu'il ſoit inordonné, & connu en infinies façons.*

*Et de même façon ſe comportent l'*Ordonné *& l'*Inordonné *avec l'*Effable *& l'*Irrationel, *car en pluſieurs choſes ils s'accordent entr'eux, & different neanmoins par la ſuſdite raiſon, vû que ces choſes-là ne s'egallent point entr'elles, ny une choſe ne contient pas l'autre: Car tous les binomes, & les choſes qui ſont priſes comme irrationelles, ſont bien ordonnces; mais elles ne ſont pas pourtant effables ou dicibles & expliquables, comme ne l'eſt pas le diametre du quarré au regard du côté. Or des effables il y en a pluſieurs inordinez, parce qu'ils ſont connus diverſement, & en façons indeterminees: Car on peut meſurer un triangle Scalene par une meſure propoſee & definie, comme explicable, quoy qu'il ſoit inordonné.*

Or il eſt aiſé de voir la convenance du Connu *avec le* Porime, *mais il eſt difficile d'en expliquer leur difference, d'autant que leur nature approche l'une de l'au-*

tre, tellement qu'il ſemblent s'egaler entr'eux : il [illegible] *roitra neanmoins y avoir quelque difference à qui conſiderera de prés. Car qu'il n'y ait qu'une ligne droite qui touche la Spyralle en un point, cela eſt* Connu *toutesfois le Probleme n'en eſt pas* Porime, *n'eſtant pas encore compris. De maniere que tout ce qui eſt* Connu *n'eſt pas pourtant* Porime : *Mais tout ce qui eſt* Porime *eſt auſſi* Connu ; *& partant le* Connu *paroiſt plus eſtendu que le* Porime.

Or *le* Connu, *le* Porime, *& l'*Effable *conviennent en certaines choſes, & different en d'autres par la même raiſon que nous avons déja ditte : Car ces lignes-là que l'on appelle Irrationelles, à la verité ſont connuës, & toutesfois elles ne ſont pas effables ou explicables. Au contraire tout nombre eſt bien* Effable, *& neanmoins tout nombre n'eſt pas* Connu. *Mais l'*Effable *de ſa nature eſt toûjours effable, jaçoit que quelque longueur ſoit tantoſt effable, & tantoſt non, ſi elle eſt exigee avec quelque autre ſelon une même meſure. Mais auſſi cette même longueur eſt par fois connuë, & autresfois non, jaçoit qu'elles s'accordent totalement entr'elles. Or il eſt difficile de trouver quelque choſe qui ſoit* Effable & Inconnu *enſemble ; car le Connu ſemble paroitre plus eſtendu que l'Effable. Et par ces choſes il eſt manifeſte que le* Porime *& l'*Apore *different du* Rationel *ou* Effable, *& de l'*Irrationel : *Car il ſe peut faire que des choſes* Irrationelles, *quelques-unes ſoient* Porimes ; *mais des* Rationelles, *aucunes ne peuvent être irrationelles. Et partant il eſt tres-aiſé à voir en quoy s'accordent les choſes ſuſdites, neanmoins elles ſe comportent entr'elles de telle ſorte qu'il ſemble que le* Porime *ſoit plus eſtendu que l'*Effable.

Or par ces choſes on peut reconnoître la difference des choſes qui ont eſté dittes, car à la verité Effable *&* Irrationel *ſe dit au reſpect de la meſure, laquelle neanmoins n'eſt pas parvenuë à nôtre connoiſſance ; vû que quelque choſe qui eſt rationel, peut n'être pas connu de nous, & ſemblablement être rationel, & n'être jamais compris qu'il le ſoit. Mais l'*Ordonné *& l'*Inordonné *ſe dit ſelon ſoy, & ſelon la propre nature de la choſe qui vient en contemplation, encore qu'il ne ſoit pas com-*

pris de nous, comme Archimede a apperçû quelques choſes être ordonnees de leur nature, leſquelles Serenus avoit auparavant contemplees. Mais le Connu *& l'*Inconnu *ſe dit au regard de nous; tellement que les choſes ſuſdites different entr'elles : car celles-cy ſe rapportent à nous, celles-là à la propre nature, & les autres à la meſure.*

Ayant donc expliqué les convenances & differences des choſes qui ont eſté propoſées il reſte à conſiderer que c'eſt que Donné : *Car de tous ceux-là qui croient que ce qui eſt concedé en l'hypotheſe par le propoſant ſoit le* Donné, *ſe fourvoient de ce qui eſt cherché, parce que tous les Elemens des Donnez ne ſont pas compoſez de cette ſorte de* Donné, *qui eſt ſelon l'hypotheſe, comme on peut voir aux traitez qui ont eſté faits du* Donné: *C'eſt pourquoy delaiſſant cette opinion il nous faut juger des definitions des autres. Donc ce qui eſt concedé en l'hypotheſe, eſt quelque choſe qui eſt conſequemment connuë par les principes : mais ceux qui ſe ſervent des definitions d'un ſeul mot, le definiſſent & le marquent par quelques-uns des ſuſdits, comme il a été dit au commencement; tellement que preſque tous ſemblent avoir eu cette commune notion du* Donné, *ſçavoir eſt qu'il eſt compris, comme auſſi le mot de* Donné *le manifeſte : Et entre ceux-cy, ſont les principaux ceux qui le definiſſent par l'hypotheſe ou ſuppoſition : Et les autres ont eu egard à ce qui eſt concedé. Mais nous uſant des choſes dites comme d'une regle & addreſſe pour bien juger, nous pourrons trouver une parfaite definition de* Donné : *Car il eſt certain qu'il faut qu'elle s'egale & convertiſſe avec la choſe definie, qui eſt une choſe propre aux bonnes definitions. Or telle ſemble être la definition du propoſé, laquelle entre les expliquees le plus ſimplement, le definit* Porime; *& entre les complexes, celle qui le definit* Porime & Connu *enſemble, mais toutes les autres ſont imparfaittes : Car celle qui le definit* Ordonné, *ne ſuffit pas pour la comprehenſion & intelligence du* Donné, *parce que ny tout ordonné, ny le ſeul ordonné n'eſt pas compris, vû qu'il y a des choſes inordonnées qui ont la même condition, comme il a été montré. Celle-là ne ſatisfait pas non plus, laquelle*

décrit qu'il eſt le Connu : *car tout connu n'eſt compris, encore que le ſeul connu ſoit compris. Ce là n'eſt pas auſſi parfaite laquelle definit que l'eſſable : car l'effable n'eſt pas ſeul compris, puis que quelques-unes des irrationelles ſont auſſi compriſes : Semblablement tout effable n'eſt pas compris, comme nous avons declaré cy-deſſus. Or entre les definitions qui s'expliquent par un ſeul mot, reſte celle qui le definit* Porime, *laquelle ſemble grandement manifeſter la comprehenſion ; car tout Porime & le ſeul Porime eſt compris : Pourtant Euclide même a uſé d'une telle definition décrivant toutes les eſpeces de Donnez par luy conçûes & regardées. Mais entre les definitions compoſées celle-là eſt parfaite, laquelle definit le Donné être le* Connu *& le* Porime *enſemble, ayant le Connu pour genre analogique, & le Porime pour difference. Mais celle-là eſt imparfaite, laquelle dit l'*Ordonné *& le* Porime *enſemble : car les choſes qui ſont telles ne ſont pas ſeule données. Et celle-là qui le definit* Ordonné *&* Effable *enſemble, comprend ſemblablement le Donné avec deffaut. Mais celle du* Connu *&* Ordonné *enſemble, n'eſt pas auſſi recevable, vû qu'elle excede ce qu'on definit : car ce qui eſt tel n'eſt pas donné ſeul. Donc ceux-là ſeuls qui ont dit que le* Donné *eſt le* Connu *& le* Porime *enſemble, ſemblent avoir atteint la notion du Donné : car ce qui eſt tel, eſt tout & ſeul compris, leſquelles deux choſes doivent être aux definitions bien données. Mais ceux-là approchent bien prés de ceux-cy, leſquels ont defini ainſi :* Donné *eſt ce à quoy nous pouvons trouver un égal, ſelon les choſes que nous avons propoſées aux premieres hypotheſes & principes. Du nombre deſquels eſt Euclide ayant uſé par tout du verbe* πορισάσθαι *qui ſignifie exhiber ou inventer, quoy qu'il delaiſſe le* Connu *comme conſequent du* Porime. *Quelqu'un pourroit neanmoins le reprendre de ce qu'il n'ait auparavant defini* Donné *en general, mais immediatement quelques-unes des eſpeces de* Donné, *jaçoit qu'aux Elemens de Geometrie il ait defiy la ligne ſimple avant que de definir les eſpeces.*

Quelle eſt l'utilité du traité des Donnez.

Donques aprés avoir expliqué univerſellement & ſe-

on qu'il nous a semblé necessaire pour l'usage present, que c'est que DONNÉ, *il faut consequemment que nous facions voir les utilitez de ce traité. Or ce traité est tel, qu'il n'est pas seulement institué pour l'amour de soymesme, mais aussi pour quelque autre chose : car il est grandement necessaire au* lieu *que l'on appelle* Resolu: *Et nous avons déja dit ailleurs combien de force obtient le* Lieu resolu *aux disciplines Mathematiques & en l'Optique & Canonique, lesquelles approchent grandement d'icelles, tant pource que la* Resolution *est une invention de la demonstration, que parce qu'en choses semblables elle nous sert de beaucoup pour l'invention de la demonstration, ou parce qu'il est beaucoup plus excellent de rencontrer une puissance resolutive, que de posseder plusieurs demonstrations particulieres.*

A quelle science se rapporte le traité des Donnez.

Or veu que la consideration des Donnez est utile à toutes les sciences, attendu qu'elle sert de beaucoup à la RESOLUTION, *elle sera dite à bon droit estre revoquée non pas à une seule science, mais à la Mathematique universellement, laquelle traite des nombres, des temps, de la velocité, & choses semblables ; qui traitte mesmes des raisons, comme aussi des proportions, & pour dire en un mot de toutes medietez. Parquoy pour la parfaitte & demonstrative connoissance des* Donnez *tant utile, Euclide a travaillé à ce livre des* Donnez, *lequel autheur entre tous ceux qui ont composé des Elemens de Geometrie obtient à bon droit le premier rang, & lequel ayant elabouré les Elemens, ou plûtost les introductions presque de toutes les disciplines Mathematiques, assavoir de toute la Geometrie en 13 livres ; de l'Astronomie és Phœnomenes, de la Musique, & Optique, il a laissé par écrit les Elemens resolutifs du traité de* Donné. *Mais comme il étoit Geometre, il a particulierement accommodé aux grandeurs ce qui étoit du Donné, & toutesfois commun aux autres choses, laquelle methode a aussi été observée par luy, lors que traittant universellement des raisons & proportions, il les a appropriées aux grandeurs au 5. livre des Plans.*

Maintenant il a été dit en general que c'est que Donné, *à quelle science il appartient, & combien en est utile*

la contemplation : Adjoûtons donc à ce qui a été la deſcription d'icelle ſcience, laquelle traitte du Do attendu qu'elle eſt, comme il appert par ce qui dit, une comprehenſion en toutes maniere de Donn & de leurs accidens & proprietez. Mais eu égard livre propoſé nous dirons que c'eſt une doctrine Elem taire de toute la connoiſſance du Donné : *dont s'e ſuit qu'elle ſera fort utile, comme auſſi les choſes y co tenuës, entant qu'elles ſe referent au* Donné. *Or ce vre eſt diviſé ſelon les eſpeces des Donnez, & en premiere ſection ſont contenuës les choſes qui ſont donn par raiſon : ſecondement, celles qui ſont données p poſition ; & en aprés, celles qui ſont données par eſpe Car ce qui eſt* Donné *par grandeur, eſt ſimple & pa ticulierement contenu aux autres, & principalement a Donnez par eſpece. Or il a commencé aux choſes don nées par raiſon & poſition, d'autant que celles qui ſon données par eſpece en ſont conſtituées. Euclide donne en core une autre diviſion à ce livre, car il le diviſe en univer ſelles grandeurs, en lignes, en ſuperficies, & en theorem circulaires ; lequel ordre il a auſſi gardé és definitions ſuppoſitions de ce livre. Outre ce il s'eſt ſervi d'un genr d'enſeigner qui ne procede point par la compoſition, ma par la reſolution, ainſi que Pappus a fait voir am plement aux Commentaires qu'il a fait ſur ce livre.*

FIN.

LES DONNEZ D'EUCLIDE.

DEFINITIONS.

1. LES plans ou eſpaces, les lignes, & les angles, auſquels nous en pouvons trouver d'égaux ſeront dits eſtre donnez par grandeur.

2. Une raiſon eſt dite eſtre donnée, lors que nous en pouvons trouver une meſme, ou egale à icelle.

3. Les figures rectilignes dont les angles ſont donnez, & auſſi les raiſons que les coſtez ont entr'eux, ſont dites eſtre données par eſpece.

4. Les points, les lignes, & les angles, qui ont & gardent toûjours un meſme lieu & ſit, ſont dits eſtre donnez par poſition ou ſituation.

5. Un cercle eſt dit eſtre donné par grandeur, lors qu'on en donne le demi-diametre par grandeur.

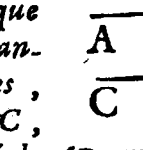
6. Un cercle eſt dit eſtre donné par poſition, & par grandeur, lors qu'on en donne le centre par poſition, & le demi-diametre par grandeur.

7. Les segmens de cercles auſquels les angles & les baſes ſont données par grandeur, ſont dits eſtre donnez par grandeur.

8. Les segmens de cercle, auſquels les angles ſont donnez par grandeur, & les baſes des segmens par poſition & grandeur, ſont dits eſtre donnez par poſition & par grandeur.

9. Une grandeur eſt plus grande qu'une autre d'une grandeur donnée, lors qu'en ayant oſté la donnée, le reſte eſt égal à cette autre.

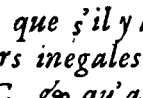
C'eſt-à-dire que s'il y-a deux grandeurs inegales, comme AB & C,



& qu'ayant ôté de AB une grandeur donnee BD, le reſte AD ſoit egal à l'autre grandeur C; icelle AB ſera dite plus grande que C, d'une grandeur ou excez donné.

10. Une grandeur eſt moindre qu'une autre, d'une grandeur donnée, lors qu'ayant adjoûté la donnée à icelle, la toute eſt égale à cette autre.

C'eſt-à-dire que s'il y a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant adjoûté à la moindre

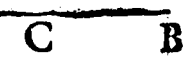


AB, une grandeur donnée BD, toute la grandeur AD ſoit egale à l'autre grandeur C: Icelle AB ſera dite moindre que C, d'une grandeur ou excez donné.

11. Une grandeur eſt dite plus grande qu'une autre grandeur d'une donnée, qu'en raiſon, lors qu'oſtant d'icelle grandeur la donnée, le reſte a à cette autre une raiſon donnée.

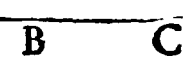
Soient par exemple deux grandeurs AB & CB, & ayant ôté de AB, une grandeur donnée AD, le reſte DB ait à l'autre grandeur CB, une raiſon donnee: Icelle AB ſera

dite plus grande que C B d'une donnee, qu'en raiſon; pource qu'ayant ôté d'icelle AB la donnee AD, le reſte DB a à l'autre grandeur CB une raiſon donnee.



12. Une grandeur eſt dite moindre qu'une autre d'une grandeur donnée, qu'en raiſon; lors que la donnée luy étant adjoûtée, la toute a à cette autre une raiſon donnée.

Soient par exemple deux grandeurs AB, BC; & ayant adjoûté à AB, une grandeur donnee AD, la toute DB ait à l'autre grandeur BC une raiſon donnee: Icelle AB ſera dite moindre que la même BC d'une donnee, qu'en raiſon: car ayant adjoûté à icelle AB, la grandeur donnee AD, la compoſee DB a à l'autre grandeur BC, une raiſon donnee.

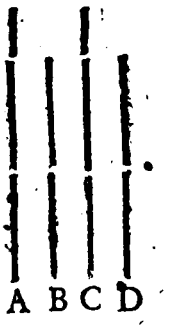


13. Une ligne droite eſt au long ou vis à vis par poſition, quand par un point donné elle eſt menée parallele à une autre ligne.

PROPOSITION I.

Des grandeurs eſtans données, la raiſon qu'elles ont entr'elles eſt auſſi donnée.

Soient données les grandeurs A & B: Je dis que la raiſon de A à B eſt donnée.



Car puis que la grandeur A eſt donnée, [a] nous en pouvons trouver une égale à icelle; laquelle ſoit C: Derechef, dautant que la grandeur B eſt donnée, nous en pouvons auſſi trouver une égale à icelle: & ſoit D. Donc puis que A eſt égale à C, & B à D, comme A eſt à C [b] ainſi B à D: & en permutant, comme A ſera à B, ainſi C à D. Donc [d] la raiſon de A à B eſt

[a] 1. *d. conu.*
[b] 7. 5.
[c] 16. 5.
[d] 2. *d.*

donnée : car c'eſt la meſme raiſon que de C à D, nous avons trouvée. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROP. II.

Si une grandeur donnée a à quelque autre grandeur une raiſon donnée, cette autre eſt auſſi donnée par grandeur.

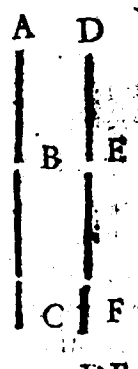
Que la grandeur donnée A ait à une autre grande B une raiſon donnée : Je dis qu'icelle B eſt auſſi donnée par grandeur.

Car puis que A eſt donnée, nous en pouvons trouver une égale à icelle, laquelle ſoit C : Et d'autant que la raiſon de A à B eſt auſſi donnée, nous en pouvons trouver [c] une de meſme : Qu'elle ſoit trouvée, & ſoit la raiſon de C à D. Or puis que comme A eſt à B, ainſi C à D ; en permutant, comme A à C, ainſi B à D : Mais A eſt égale à C : Donc [f] B ſera auſſi égale à D. Partant [n] la grandeur B eſt donnée, veu qu'à icelle en a eſté trouvée une égale D.

[c] 2. d.
[f] 14. 5.
[n] 1. d.

PROP. III.

Si des grandeurs données ſont compoſées, auſſi ſera donnée cette grandeur-là, qui eſt compoſée d'icelles.



Soient compoſées les grandeurs données AB, BC : Je dis que la grandeur AC, qui eſt compoſée des grandeurs AB, BC, eſt donnée.

Car puis que AB eſt donnée, nous en pouvons trouver une égale à icelle, laquelle ſoit DE. Derechef, veu que BC eſt donnée, nous en pouvons auſſi trouver une égale à icelle, laquelle ſoit EF. Donc puis que à icelle DE eſt égale AB, & à EF eſt égale BC, la toute [g] AC eſt égale à la toute DF. Donc AC [n] eſt donnée, puis que à icelle a eſté poſée égale DF.

[g] 2. ax.

PROP. IV.

Si d'une grandeur donnée, on ôte une grandeur donnée, auſſi ſera donnée la grandeur reſtante.



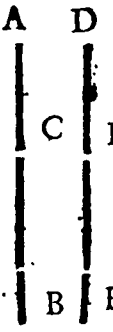
Que d'une grandeur donnée AB, ſoit retranchée la grandeur donnée AC : Je dis que la grandeur reſtante CB eſt donnée.

Car d'autant que AB eſt donnée on en peut trouver une égale à icelle, laquelle ſoit DE. Derechef, puis que AC eſt donnée nous en pouvons auſſi trouver une égale à icelle, laquelle ſoit DF. Veu donc que la grandeur AB eſt égale à la grandeur DE, & la grandeur AC à la grandeur DF; le reſte CB [h] ſera égal au reſte FE. Parquoy CB eſt donnée : car à icelle en a eſté baillée une égale FE.

[h] 3. ax.

PROP. V.

Si une grandeur a une raiſon donnée à quelque partie d'icelle, elle aura auſſi à la partie reſtante une raiſon donnée.



Que la grandeur AB ait une raiſon donnée à quelque partie d'icelle AC: Je dis qu'elle aura auſſi à la partie CB une raiſon donnée.

Car ſoit expoſée une grandeur donnée DE; & pource que la raiſon de la grandeur AB à la grandeur AC eſt donnée, [d] nous en pouvons trouver une de meſme, laquelle ſoit DE à DF: Donc la raiſon d'icelle DE à DF eſt donnée : Mais DE eſtant donnée, [i] auſſi l'eſt ſa partie DF, & conſequemment [l] le reſte FE : Donc [m] puis que DE & FE ſont données, la raiſon d'icelle

[d] 2. d. conu.
[i] 2. p.
[l] 4. p.
[m] 1. p.

DE à FE eſt auſſi donnée. Et d'autant que comme E
n *ſch.* 19. 5. eſt à DF, ainſi AB à AC, en convertiſſant [n] comm DE à FE, ainſi AB à CB. Mais la raiſon de DE à F eſt donnée, comme il a eſté demonſtré : Donc aus la raiſon de AB à CB eſt donnée.

SCHOLIE.

De cecy eſt evident que ſi une grandeur a à quelq partie d'icelle une raiſon donnee, en diviſant ſera auſ donnée la raiſon d'une partie à l'autre. Car puis qu comme DE eſt à FE, ainſi AB eſt à CB; en diviſant comme DF à FE, ainſi AC à CB. Mais il a eſté de monſtré que les parties DF & FE ſont données, & con ſequemment leur raiſon eſt auſſi donnee : pareillemen donc eſt donnée la raiſon de AC à CB.

PROP. VI.

Si deux grandeurs ayans entr'elles une raiſon donnée ſont compoſées, auſſi la grandeur compoſée d'icelles aura à l'une & à l'autre une raiſon donnée.

Soient compoſées deux grandeurs AB, BC ayans entr'elles une raiſon donnée : Je dis que la toute AC a une raiſon donnée à chacun d'icelles AB, AC.

Car ſoit expoſée une grandeur donnée DE ; & pource que la raiſon de AB à BC eſt donnée, en ſoit fait une meſme d'icelle DE à EF : Donc la raiſon d'icelle DE à EF eſt donnée : & partant

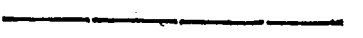


o 2 *p.* [o] la grandeur DE eſtant donnée, l'une & l'autre d'icelles DE, FE eſt donnée.
p 3. *p.* Parquoy [p] la toute DF ſera auſſi donnée.
q 1. *p.* Donc [q] la raiſon de la meſme DF à chacune d'icelles DE, EF ſera donnée. Et d'autant que comme AB à BC ainſi DE
r 18. 5. à EF : en compoſant, [r] comme AC à BC, ainſi DF à EF : Donc en convertiſſant,
f *ſch.* 19. 5. [f] comme AC à AB, ainſi DF à DE. Parquoy comme la toute DF eſt à l'une & à l'autre grandeur DE, EF, ainſi la toute AC eſt à l'une & à l'autre

re grandeur AB, BC. Donc [t] la raiſon d'icelle AC à chaque grandeur AB, BC eſt donnée. [t] 2. d.

PROP. VII.

Si une grandeur donnée eſt couppée en raiſon donnée, chaque ſegment eſt donné.



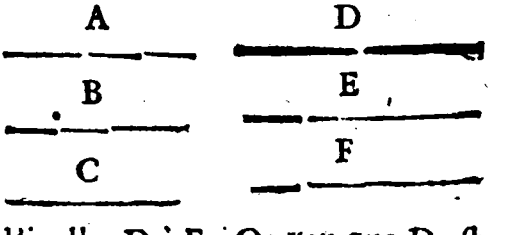
Que la grandeur donnée AB ſoit couppée en une raiſon donnée, ſçavoir eſt de AC à CB: Je dis que chaque ſegment AC, CB ſera donné.

Car d'autant que la raiſon de AC à CB eſt donnée, la raiſon de [u] AB à chacune d'icelles AC, CB eſt auſſi donnée. Mais AB eſt donnée: donc [x] chacun des ſegmens AC, CB eſt auſſi donné. [u] 6. p. [x] 2. p.

PROP. VIII.

Les grandeurs qui ont à une même une raiſon donnée, ſeront entr'elles en une raiſon donnée.

Que chaque grandeur A & C ait une raiſon donnée à la grandeur B: Je dis que la raiſon de la grandeur A à la grandeur C eſt auſſi donnée.



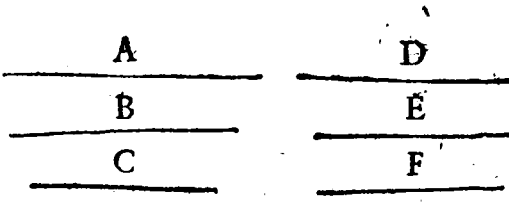
Car ſoit expoſée une grandeur donnée D: & puis que la raiſon de A à B eſt donnée, ſoit faite la meſme d'icelle D à E. Or veu que D eſt donnée [y] auſſi E eſt donnée. Derechef, puis que la raiſon de B à C eſt donnée, ſoit faite la meſme de E à F. Mais E eſt donnée: & partant F eſt auſſi donnée. Mais puis que D eſt donnée, [z] la raiſon d'icelle D à F eſt donnée. Et d'autant que comme A à B, ainſi D à E, & comme B à C, ainſi E à F; en raiſon égale, [a] comme A à C, ainſi D à F. Mais la raiſon d'icelle [y] 2. p. [z] 1. p. [a] 22. 5.

D à F eſt donnée : Donc la raiſon de A à C eſt au
donnée.

PROP. IX.

Si deux ou davantage de grandeurs ſont en
tr'elles en raiſon donnée : & que les méme
grandeurs ayent à quelques autres gran
deurs des raiſons données, jaçoit qu'elle
ne ſoient les mémes : ces autres grandeur
ſeront auſſi entr'elles en raiſons données.

Que deux ou davantage de grandeurs A, B, C
ſoyent entr'elles en raiſon donnée ; & que ces meſme
grandeurs A, B, C, ayent à quelques autres gran
deurs D, E, F, les raiſons données, non toutefois le
meſmes : Je dis qu'icelles D, E, F, ſeront entr'elles en
raiſons données.



Car d'autant que la raiſon de A à B eſt donnée, & auſſi celle de A à D ; la raiſon de D à B ſera donnée : Mais la raiſon de B à E eſt auſſi donnée : Donc la raiſon d'icelle D à E ſera pareillement donnée. Derechef, puis que la raiſon de B à C eſt donnée, & auſſi celle de B à E ; la raiſon de E à C ſera donnée. Mais la raiſon de C à F eſt auſſi donnée : Donc [b] la raiſon de E à F ſera donnée. Mais il a eſté demonſtré que la raiſon de D à E eſt auſſi donnée : & partant [b] la raiſon de D à F ſera donnée. Donc les grandeurs D, E, F, ſont entr'elles en raiſons données.

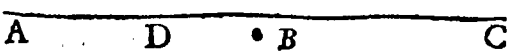
[b] 3. p.

PROP. X.

Si une grandeur eſt plus grande qu'une gran
deur d'une donnée, qu'en raiſon : la com
poſée des deux ſera auſſi plus grande que cet

te même grandeur d'une donnée, qu'en raiſon : Mais ſi cette compoſée eſt plus grande que la même grandeur d'une donnée, qu'en raiſon ; ou le reſte ſera auſſi plus grand qu'icelle même d'une donnée, qu'en raiſon ; ou bien ſera donné iceluy reſte avec la ſuivante, à laquelle l'autre grandeur a raiſon donnée.

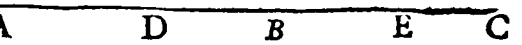
Soit la grandeur AB plus grande que la grandeur C d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que la toute AC eſt auſſi plus grande que la meſme BC d'une donnée, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que BC d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée la grandeur donnée AD : Donc [c] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnée ; & en compoſant, [d] la raiſon de DC à BC eſt auſſi donnée. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnée : Donc AC eſt plus grande que [c] la meſme BC d'une donnée, qu'en raiſon.

[c] 11. d.
[d] 6. p.

Derechef, ſoit la grandeur AC plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que le reſte AB eſt ou plus grand que la meſme BC d'une donnée qu'en raiſon, ou que la meſme AB avec celle qui ſuit, à laquelle BC a une raiſon donnée, eſt donnée.



Car d'autant que la grandeur AC eſt plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit retranchée la grandeur donnée. Or icelle grandeur donnée eſt, ou moindre que la grandeur AB, ou plus grande. Soit premierement moindre, & ſoit AD : donc la raiſon [e] du reſte DC à CB eſt donnée. Parquoy en diviſant [e] la raiſon de DB à BC eſt donnée. Mais la grandeur AD eſt auſſi donnée : Donc la grandeur AB eſt plus grande [f] que la grandeur BC d'une

[e] ſch. 5. pr.

donnée, qu'en raiſon. Soit maintenant la grandeur donnée plus grande que la grandeur AB; & ſoit posée AE égale à icelle: Donc [f] la raiſon du reſte EC à AB eſt donnée: Et en convertiſſant, [g] la raiſon d'icelle BC à BE eſt auſſi donnée. Mais icelle EB avec BA eſt donnée, pource que la toute AE eſt donnée: Donc eſt donnée AB avec celle qui ſuit BE, à laquelle elle a une raiſon donnée.

[f] 11. d.
[g] 5. p.

PROP. XI.

Si une grandeur eſt plus grande qu'une grandeur d'une donnée, qu'en raiſon, la meſme grandeur ſera auſſi plus grande que la compoſée d'icelles d'une donnée, qu'en raiſon. Et ſi la meſme grandeur eſt plus grande que les deux enſemble d'une donnée, qu'en raiſon; cette meſme grandeur ſera auſſi plus grande que le reſte d'une donnée, qu'en raiſon.

Que la grandeur AB ſoit plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raiſon: Je dis que la meſme AB eſt auſſi plus grande que la toute AC d'une donnée, qu'en raiſon.

Car puis que la grandeur AB eſt plus grande que BC d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée une grandeur donnée AD. Donc [h] la raiſon du reſte DB à BC eſt donnée; & partant [i] la raiſon de DC à BD ſera auſſi donnée.

[h] 11. d.
[i] 6. p.

Soit fait la meſme de AD à DE:

A E D B C

Donc la raiſon d'icelle AD à [illegible] eſt donnée. Mais AD eſt donnée: Donc [l] DE eſt auſſi donnée, & conſequemment [m] le reſte AE eſt auſſi donné. Mais d'autant que comme AD à DE, ainſi DC à BD; en permutant, [n] comme AD à DC, ainſi DE à DB; Donc en compoſant, [o] comme AC à CD, ainſi EB à DB; & en permutant, [n] comme AC à EB, ainſi DC à DB. Mais la raiſon de DC à DB eſt donnée: Donc

[l] 2. p.
[m] 4. p.
[n] 16. 5.
[o] 18. 5.

aussi le sera celle de AC à EB, conſequemment celle de EB à AC. Mais il a été demonſtré que AE eſt donnée : Donc [h] AB eſt plus grande que AC d'une donnée AE, qu'en raiſon.

Mais maintenant ſoit AB plus grande que AC d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que la même AB eſt auſſi plus grande que le reſte BC d'une donnée, qu'en raiſon. Car d'autant que AB eſt plus grande que AC d'une donnée qu'en raiſon, en ſoit retranchée la grandeur donnée AE. Donc la [h] raiſon du reſte EB à AC eſt donnée, & conſequemment auſſi le ſera celle de AC à EB. Soit faite la même de AD à DE : Donc la raiſon de AD à DE eſt donnée; & en convertiſſant, [p] la raiſon de AD à AE ſera auſſi donnée, & conſequemment celle de AE à AD. Or AE eſt donnée : Donc la toute AD [l] ſera auſſi donnée. Et d'autant que comme la toute AC eſt à la toute EB, ainſi la retranchée AD eſt à la retranchée ED ; ainſi auſſi ſera [q] le reſte DC au reſte DB. Mais la raiſon de AC à EB eſt donnée : Donc auſſi le ſera celle de DC à DB. Parquoy en diviſant, [r] la raiſon de BC à DB eſt donnée, & conſequemment auſſi le ſera celle de DE à BC. Mais il a été demonſtré que AD eſt donnée : Donc [h] AB eſt plus grande que la même BC d'une donnée, qu'en raiſon.

[p] 5. p.
[q] 19. 5.
[r] ſch. 5. pr.
[h] 11. d.

PROP. XII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere avec la ſeconde ſoit donnée, mais la ſeconde avec la tierce ſoit auſſi donnée : ou la premiere ſera égale à la tierce, ou l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée.

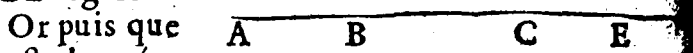
Soient trois grandeurs AB, BC, CD ; & AB avec BC, ſçavoir AC ſoit donnée : mais BC avec CD, ſçavoir BD ſoit auſſi donnée : Je dis que la grandeur AB eſt ou égale à la grandeur CD, ou que l'une eſt plus grande que l'autre d'une donnée.

A B C D

Car d'autant que chacune des grandeurs AC, est donnée, les grandeurs données ſont ou égales tr'elles, ou inégales : Qu'elles ſoient premieren égales. Donc AC eſt égale à BD : ſoit ôtée la co mune BC, & demeurera [f] AB égale à CD. M qu'elles ſoient inégales, comme en cette autre fi re. Et ſoit BD plus grande que AC. Soit donc ſée BE égale à AC. Or puis que AC eſt donnée, BE eſt auſſi donnée. Mais la toute BD eſt auſſi do née : le reſte ED [t] le ſera donc auſſi. Et d'autant q BE eſt égale à AC ôtant la commune BC, [s] reſte AB égale à CE. Mais ED eſt donnée : Donc CD plus grande que AB d'une donnée ED.

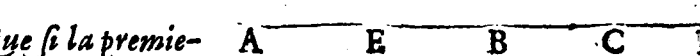
[f] 3. ax.

[t] 4. pr.



SCHOLIE.

Que ſi la premiere avec la ſeconde,



ſçavoir AC étoit plus grande que la ſeconde avec la tierce ſçavoir BD, comme en cette autre figure, on feroit CE égale à icelle BD ; & par meſmes raiſons que deſſus on demonſtreroit AE être donnée, & égale à CD ; & partant AB être plus grande que CD d'une donnée.

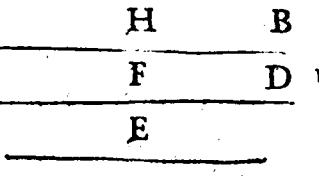
PROP. XIII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere d'icelles ait à la ſeconde une raiſon donnée, mais la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raiſon ; auſſi la premiere ſera plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, E ; & icelle AB ait à CD une raiſon donnée : mais la grandeur CD ſoit plus grande que la grandeur E, d'une donnée, qu'en raiſon: Je dis que la grandeur AB eſt plus grande que la grandeur E d'une donnée, qu'en raiſon.

Car puis que CD eſt plus grande que E d'une don-

ée, qu'en raiſon, en ſoit ôtée une grandeur donnée CF : Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnée. Et d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnée, ſoit faite la même de AH à CF. Donc la raiſon d'icelle AH à CF eſt donnée.



Mais CF eſt donnée : Donc u AH eſt auſſi donnée. Et vû que comme la toute AB eſt à la toute CD, ainſi la retranchée AH eſt à la retranchée CF, & ainſi x auſſi le reſte HB eſt au reſte FD : la raiſon d'icelle HB à FD eſt auſſi donnée. Mais la raiſon de FD à E eſt auſſi donnée : Donc o la raiſon de *HB* à E eſt donnée. Mais il a été demonſtré que AH eſt donnée : Donc l *AB* eſt plus grande qu'icelle E d'une donnée, qu'en raiſon.

u 2. *pr.*

x 19. 5.

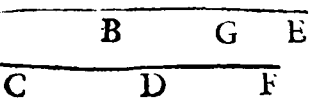
o 8. *pr.*

l 11. *d.*

PROP. XIV.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raiſon donnée, & qu'à chacune d'icelles de joûte une grandeur donnée, ou les toutes auront entr'elles une raiſon donnée, ou l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs *AB*, CD ayans entr'elles une raiſon donnée ; & à chacune d'icelles ſoit adjoûtée une grandeur donnée, ſçavoir *BE* & DF : Je dis que les toutes AE, CF, où ſont entr'elles en une raiſon donnée, ou que l'une eſt plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.



Car d'autant que chacune d'icelles *BE*, DF eſt donnée, y la raiſon d'icelle *BE* à DF eſt auſſi donnée : Et ſi cette raiſon eſt la même que de *AB* à CD ; celle de la toute AE à la toute CF z ſera encore la même : & partant la raiſon d'icelle AE à CF eſt donnée.

y 1. *pr.*

z 12. 5.

Maintenant, la raiſon de *BE* à DF ne ſoit la même

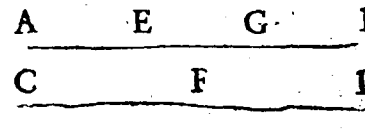
que de *AB* à CD ; & soit fait comme *AB* à CD, *BG* à DF : Donc la raison d'icelle *BG* à DF est donnée. Mais la grandeur DF est donnée : Donc [a] est aussi donnée. Et puis que la toute *BE* est donnée, [b] le reste GE sera aussi donné. Mais d'autant que comme *AB* à CD, ainsi *BG* à DF, [z] ainsi aussi est la toute AG à la toute CF : & partant la raison d'icelle AG à CF est donnée : Mais la grandeur GE est donnée. Donc [l] la grandeur AE est plus grande que la grandeur CF d'une donnée, qu'en raison.

a 2. pr.
b 4. pr.
z 12. 5.
l 11. d.

PROP. XV.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée, & que de chacune d'icelles on ôte une grandeur donnée : les grandeurs restantes, ou auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs *AB*, CD, ayans entr'elles une raison donnée, & que de chacune d'icelles soit retranchée une grandeur donnée, c'est assavoir de *AB* la grandeur AE, & de CD la grandeur CF : Je dis que les restes *EB*, FD, ou sont entr'eux en une raison donnée, ou bien que l'un est plus grand que l'autre d'une donnée, qu'en raison.



Car d'autant que chaque grandeur AE, CF est donnée, la raison de AE à CF est donnée : Et si elle est la même que de *AB* à CD, celle du reste *EB* au reste FD [c] sera aussi la même ; & partant la raison d'icelle *EB* à FD sera aussi donnée. Mais si elle n'est la même, soit fait comme *AB* à CD, ainsi AG à CF. Or la raison de *AB* à CD est donnée : Donc aussi celle de AG à CF sera donnée. Mais CF est donnée : Donc [d] AG est donnée. Mais AE est aussi donnée : Donc [e] le reste EG est donnée. Et d'autant que comme *AB* à CD, ainsi la retranchée AG à la retranchée CF, & ainsi aussi [e] le

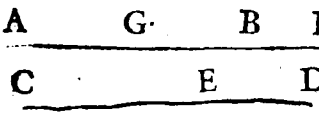
c 19. 5.
d 2. pr.
e 4. pr.

reſte *GB* au reſte FD ; la raiſon d'icelle *CB* à FD eſt auſſi donnée. Partant puis que EG eſt donnée, *EB* eſt plus grande que FD [o] d'une donnée, qu'en raiſon. [o] 11. *d.*

PROP. XVI.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raiſon donnée, & que de l'une d'icelles on ôte une grandeur donnée, & à l'autre on en ajoûte une donnée : la toute ſera plus grande que le reſte d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient deux grandeurs *AB*, CD, ayans entr'elles une raiſon donnée, & que de CD on ôte une grandeur donnée DE, mais à *AB* ſoit adjoûtée la grandeur donnée *BF* : Je dis que la toute AF eſt plus grande que le reſte CE d'une donnée, qu'en raiſon.



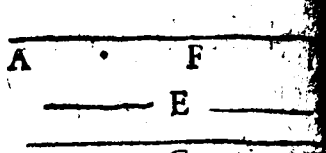
Car puis que la raiſon de *AB* à CD eſt donnée, ſoit faite la même de *BG* à DE : Donc [f] la raiſon d'icelle *BG* à DE eſt donnée. Mais DE eſt donnée : Donc [g] *BG* eſt auſſi donnée. Mais *BF* eſt auſſi donnée : Donc [h] la toute GF eſt donnée. Et puis que comme *AB* à CD, ainſi la retranchée *BG* à la retranchée DE, & [i] ainſi auſſi le reſte AG au reſte CE ; la raiſon d'icelle AG à *CE* eſt donnée : Mais GF eſt donnée : Donc la grandeur AF eſt plus grande [o] que la grandeur *CE* d'une donné, qu'en raiſon.

[f] 2. *d.*
[g] 2. *p.*
[h] 3. *p.*
[i] 19. 5.

PROP. XVII.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere ſoit plus grande que la ſeconde d'une donnée, qu'en raiſon, mais la tierce ſoit auſſi plus grande que la même ſeconde d'une donnée, qu'en raiſon : la premiere aura à la tierce, ou une raiſon donnée, ou l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, E, CD, & que chacune des grandeurs, AB, CD, soit plus grande que la grandeur E d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que les grandeurs AB, CD, ou ſont entr'elles ſelon une raiſon donnée, ou que l'une eſt plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.



Car puis que AB eſt plus grande que E d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit ôtée la grandeur donnée AF : Donc la raiſon du reſte FB à E eſt donnée. De rechef puis que CD eſt plus grande que la même E d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit retranchée la grandeur donnée CG ; & la raiſon du reſte GD à E ſera donnée : Donc [l] la raiſon de FB à GD ſera auſſi donnée. Mais à icelles FB, GD, ſont adjoûtées les grandeurs données AF, CG : Donc les toutes AB, CD, [m] ou auront entr'elles une raiſon donnée, ou l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.

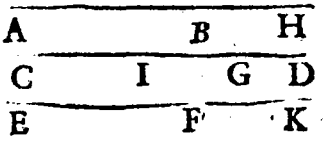
[l] 18. p.

[m] 14. p.

PROP. XVIII.

S'il y a trois grandeurs, & que l'une d'icelles ſoit plus grande que chacune des autres d'une donnée qu'en raiſon, ou les deux autres auront entr'elles une raiſon donnée, ou l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, EF, & l'une d'icelles, ſçavoir CD, ſoit plus grande que chacune des autres AB, EF, d'une donnée qu'en raiſon : Je dis que les deux grandeurs AB, EF, ou ſeront entr'elles ſelon une raiſon donnée, ou que l'une ſera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon.



Car d'autant que la grandeur CD eſt plus grande

que la grandeur *AB* d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée la grandeur donnée DG : donc la raiſon du reſte CG à *AB* eſt donnée. Soit faite la meſme de GD à BH : donc la raiſon d'icelle DG à *BH* eſt donnée. Mais DG eſt donnée : donc [n] *BH* eſt auſſi donnée. Et d'autant que comme CG à *AB*, ainſi GD à *BH*, [o] ainſi auſſi eſt la toute CD à la toute *AH*, la raiſon d'icelle CD à *AH* ſera auſſi donnée. [n] 2. *pr.* [o] 12. 5.

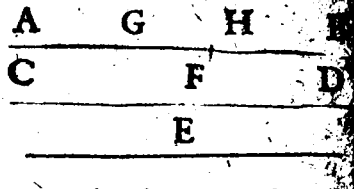
Derechef, puis que la meſme CD eſt plus grande que EF, d'une grandeur donnée, qu'en raiſon, en ſoit retranchée la grandeur donnée DI : Donc la raiſon du reſte CI à EF eſt donnée : Soit faite la meſme de DI à FK. Donc la raiſon d'icelle DI à FK ſera auſſi donnée. Mais DI eſt donnée : Donc FK eſt auſſi donnée. Et veu que comme CI à EF, ainſi ID à FK; ainſi auſſi eſt la toute [o] CD à la toute EK : la raiſon d'icelle CD à EK ſera donnée. Mais la raiſon de la meſme CD à *AH* eſt auſſi donnée : Donc [p] la raiſon d'icelle *AH* à EK ſera donnée. Et puis que d'icelles *AH*, EK ſont retranchées les grandeurs données *BH*, FK : les grandeurs *AB*, EF, [q] ou ſont entr'elles en une raiſon donnée, ou l'une eſt plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raiſon. [p] 8. *p.* [q] 15. *p.*

PROP. XIX.

S'il y a trois grandeurs, & que la premiere ſoit plus grande que la ſeconde, d'une grandeur donnée, qu'en raiſon, & la ſeconde ſoit plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raiſon : Auſſi la premiere grandeur ſera plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raiſon.

Soient trois grandeurs AB, CD, E, & la grandeur AB ſoit plus grande que CD d'une donnée, qu'en raiſon ; mais CD ſoit auſſi plus grande que E d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que AB eſt plus grande que la meſme E d'une donnée qu'en raiſon.

Car puis que CD eſt plus grande que E d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit oſtée la grandeur donnée CF : Donc la raiſon du reſte FD à E eſt donnée. Derechef, veu que AB eſt plus grande qu la meſme CD d'une donnée, qu'en raiſon, en ſo oſtée la grandeur donnée AG: Donc la raiſon du reſt GB à CD eſt donnée. Soit faite la meſme de GH CF : Donc la raiſon d'icelle GH à CF eſt donné Mais CF eſt donnée : Donc auſſi GH eſt donnée. E puis AG eſt auſſi donnée, la toute [r] AH ſera auſſ donnée. Mais comme GB à CD, ainſi GH à CF, & ainſi auſſi le [s] reſte HB au reſte FD ; Donc la raiſo d'icelle HB à FD, eſt donnée. Mais la raiſon de l meſme FD à E eſt auſſi donnée : Donc la raiſon d HB à E eſt pareillement donnée, & eſt auſſi donné la grandeur AE: Parquoy la grandeur AB [l] eſt plus grande que E d'une donnée, qu'en raiſon.

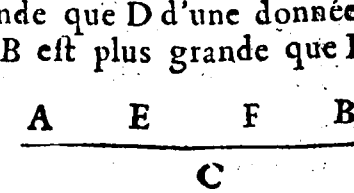


[r] 3. p.
[s] 19. 5.
[l] 11. d.

AVTREMENT.

Soient trois grandeurs AB, C, D, & que AB ſoit plus grande que C d'une donnée, qu'en raiſon ; mais icelle C ſoit auſſi plus grande que D d'une donnée, qu'en raiſon : Je dis que AB eſt plus grande que D d'une donnée, qu'en raiſon.

Car d'autant que AB eſt plus grande que C d'une donnée, qu'en raiſon, en ſoit retranchée la grandeur donnée AE : Donc la raiſon du reſte EB à C eſt donnée. Mais la grandeur C eſt plus grande que la grandeur D d'une donnée, qu'en raiſon : Donc [t] EB eſt plus grande que D d'une donnée qu'en raiſon. Parquoy en ſoit retranchée la grandeur donnée EF, & la raiſon du reſte FB à D ſera donnée. Mais AF [u] eſt donnée : Donc [l] AB eſt plus grande que D d'une donnée, qu'en raiſon.

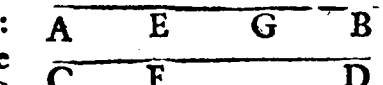


[t] 13. p.
[u] 3. p.
[l] 11. d.

PROP. XX.

S'il y a deux grandeurs données, & que d'icelles soient ôtées des grandeurs ayans entr'elles une raison donnée : ou les grandeurs restantes auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera pas grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, CD, desquelles soient ôtées les grandeurs AE, CF, ayans entr'elles une raison donnée : Je dis que les grandeurs EB, FD, ou auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison. Car puis que l'une & l'autre grandeur AB, CD est donnée, la raison d'icelle AB à CD est [z] aussi donnée : Et si c'est la mesme que de AE à CF celle du reste EB au reste FD sera [x] aussi la mesme, & partant la raison d'icelle EB à FD sera aussi donnée. Mais si elle n'est la mesme, soit fait que comme AE à CF, ainsi AG à CD. Or la raison d'icelle AE à CF est donnée : donc la raison d'icelle AG à CD est donnée. Mais CD est donnée : Donc [a] AG est aussi donnée. Mais la toute AB est pareillement donnée : Donc [b] le reste BG est donné. Et puis que comme AE à CF, ainsi AG à CD, & aussi le reste EG au reste FD : la raison d'icelle EG à FD est donnée. Mais GB est aussi donnée : Donc la grandeur EB est plus grande [l] que la grandeur BD d'une donnée, qu'en raison.

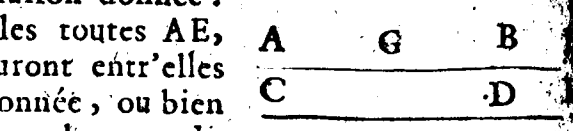


z 1. p.
x 19. 5.
a 3. p.
b 4. p.
l 11. d.

PROP. XXI.

S'il y a deux grandeurs données, & qu'à icelles on ajoûte d'autres grandeurs ayans entr'elles une raison donnée : ou les toutes auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, CD, & à icelles soient adjoustées les grandeurs BE, DF ayans entr'elles une raison donnée : Je dis que les toutes AE, CF, ou auront entr'elles une raison donnée, ou bien que l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.



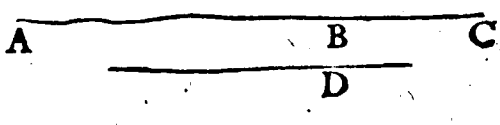
Car puis que l'une & l'autre grandeur AB, CD est donnée, leur raison [c] est aussi donnée : Et si c'est la même raison que de BE à DF, aussi sera donnée la raison de la toute AE à la toute CF ; car ce sera encore [d] la même. Mais si ce n'est la même, soit fait que comme BE est à DF, ainsi BG à CD : Donc la raison d'icelle BG à CD est donnée. Mais CD est donnée : Donc [e] le sera aussi BG. Mais la toute AB est donnée : Donc le sera aussi [f] le reste AG. Et puis que comme BE à DF ainsi BG à CD, & aussi [d] la toute GE à la toute CF ; la raison d'icelle GE à CF sera pareillement donnée. Mais AG est donnée : Donc la grandeur AE est plus grande que la grandeur CF d'une donnée, qu'en raison.

[c] 1. p.
[d] 12. 5.
[e] 2. p.
[f] 4. p.

PROP. XXII.

Si deux grandeurs ont à quelque autre une raison donnée, aussi leur composée aura à la méme une raison donnée.

Que les deux grandeurs AB, BC ayent à quelque autre grandeur D une raison donnée : Je dis que la composée AC a aussi à la même D une raison donnée.

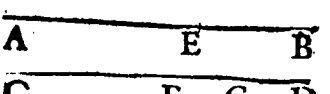


Car puis que chaque grandeur AB, BC a une raison donnée à D, la raison [g] de AB à BC est donnée : & en composant [h] la raison de AC à BC est donnée. Mais celle de BC à D est aussi donnée : donc [g] la raison d'icelle AC à D sera pareillement donnée.

[g] 8. p.
[h] 6. pr.
[g] 8. pr.

PROP. XXIII.

Si le tout eſt au tout en raiſon donnée, & que les parties ſoient aux parties en raiſons données, jaçoit que ce ne ſoient les mémes: les toutes ſeront aux toutes en raiſons données.



Que le tout AB ait au tout CD une raiſon donnée; mais les parties AE, EB ſoient aux parties CF, FD en raiſons données, bien qu'elles ne ſoient les meſmes: Je dis que toutes ces grandeurs ſeront auſſi entr'elles en raiſons données, c'eſt-à-dire qu'une chacune d'icelles AB, AE, BE, CD, CF, FD ſera à chacune des autres en raiſon donnée.

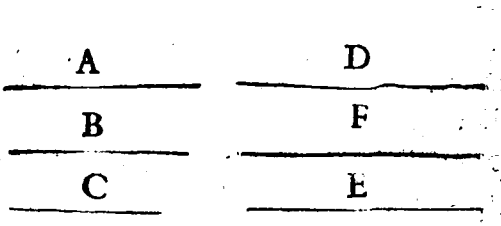
Car puis que AE eſt à CF en raiſon donnée, ſoit faite la même de AB à CG: Donc la raiſon d'icelle AB à CG eſt donnée, & conſequemment auſſi celle [i] du reſte EB au reſte FG. Mais la raiſon de FD à la même EB eſt auſſi donnée: Donc la raiſon de FD à FG [l] eſt pareillement donnée: & partant [m] celle de FD au reſte GD eſt auſſi donnée. Mais la raiſon de AB à chacune d'icelles CD, CG eſt donnée: Donc le ſera auſſi [l] celle de CD à CG, & encore [m] celle de CD au reſte GD. Mais la raiſon de FD à DG eſt donnée: Donc le ſera auſſi [l] celle de la même CD à FD, & conſequemment celle de [m] CD au reſte FC: Donc auſſi ſera donnée la raiſon de CF à FD. Mais la raiſon de EB à FD eſt poſée donnée: Donc la raiſon de CF à EB ſera donnée. Derechef, pource que la raiſon de AB à CD eſt donnée, & auſſi celle de CD à chacune d'icelles FC, FD; la raiſon de la même AB à chacune deſdites FC, FD [l] ſera pareillement donnée. Mais la raiſon d'icelle FD à EB eſt donnée: Donc auſſi ſera donnée la raiſon de AB à BE, & conſequemment au reſte [m] AE. Parquoy en diviſant, [n] la raiſon de AE à EB ſera pareillement donnée. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnée.

[i] 19. 5.
[l] 8. p.
[m] 5. p.
[n] *ſch.* 5. p.

l 8. pr. Donc le ſera auſſi l celle de AE à FD. Semblablem
pource que la raiſon de CD à AB eſt donnée, & c
le de AB à chacune de ſes parties AE, EB : auſſi
raiſon d'icelle CD à chacune deſdites AE, EB l ſe
donnée. Parquoy chacune des grandeurs AB, C
AE, EB, CF, FD eſt à chacune des autres en r
ſon donnée.

PROP. XXIV.

Si de trois lignes droites proportionnelles, l
premiere a à la tierce une raiſon donnée; elle
aura auſſi à la ſeconde une raiſon donnée.



Soient trois lignes droites proport. A, B, C, & ſoit A à B, ainſi que B à C : mais A ait à C une raiſon donnée : Je dis que A aura auſſi à B une raiſon donnée.

Car ſoit expoſée une autre ligne droite D; & puis que la raiſon de A à C eſt donnée ſoit faite la meſme de D à F : Donc la raiſon de D à F eſt donnée. Mais D eſt donnée : donc F eſt auſſi donnée. Entre les deux lignes droites D, F ſoit priſe o la moyenne proportionnelle E. Donc le rectangle fait ſous D, F eſt égal p au quarré de E. Mais iceluy rectangle de D, F eſt q dõné: (car tous les angles d'iceluy rectangle ſont donnez, étans droits, & les raisõs qu'ont les coſtez entr'eux ſont auſſi données) donc le quarré de E r eſt donné, & conſequemment icelle ligne droite E eſt auſſi donné; (car on en peut trouver une égale à icelle s, puis que le rectangle de D, F eſt donné.) Mais D eſt donnée: Donc t la raiſon de D à E eſt donnée, & comme A eſt à C, ainſi D à F. Mais comme A à C, u ainſi le quarré de A au rectangle de A, C, & auſſi comme D à F, ainſi le quarré de D au rectangle de D, F. Donc comme le quarré de A eſt au rectangle de A, C, ainſi le quarré

o 13. 6.
p 17. 6.
q 3. d.
r 1. d.
s 14. 2.
t 1. p.
u 1. 6.

quarré de D est au rectangle de D, F. Mais le rectangle de A, C, est égal au quarré de B, (puis que A, B, C sont proportionnelles) & celuy de D, F, au quarré de E. Donc comme le quarré de A est au quarré de B, ainsi le quarré de D est au quarré de E. Parquoy [x] comme A à B, ainsi D à E. Mais la raison de D à E [y] est donnée: donc [y] aussi la raison de A à B est donnée.

[x] 22. 6.
[y] 2. d.

AVTREMENT.

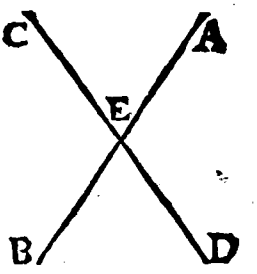
D'autant que la raison de A à C est donnée, & que comme A est à C, ainsi le quarré de A au rectangle de A, C: là raison d'iceluy quarré de A au rectangle de A, C est aussi donnée. Mais à iceluy rectangle de A, C est égal le quarré de B (puis que A, B, C sont proport.) donc la raison du quarré de A au quarré de B est donnée, & par consequent est aussi donnée la raison de la ligne A à la ligne B: Car à chacune d'icelles A, B, nous en avons exhibé une égale au propre quarré de chacune.

A
B
C

PROP. XXV.

Si deux lignes données par position s'entrecouppent, le poinct auquel elles se couppent est donné par position.

Soient deux lignes AB, CD données par position, qui se couppent l'une l'autre au poinct E: Je dis que le poinct E est donné par position: Car s'il changeoit de lieu l'une ou l'autre des lignes AB, CD changeroit sa position: Or est il que par l'hypothese elle ne change point: Donc [a] le point E est donné par position.

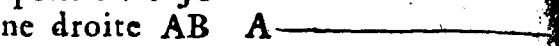


[a] 4. d.

PROP. XXVI.

Si les extremitez d'une ligne droite ſont données par poſition : icelle ligne droite eſt donnée par poſition, & par grandeur.

De la ligne droite AB les extremitez A, B ſoient données par poſition : Je dis que la ligne droite AB eſt donnée par poſition, & par grandeur.



Car ſi le poinct A demeurant en ſon lieu; la poſition ou la grandeur de la ligne droite AB change, le poinct B tombera ailleurs : Or eſt-il que par l'hypotheſe il n'y tombe point. Donc la ligne droite AB eſt donnée par poſition, & par grandeur.

PROP. XXVII.

Si d'une ligne droite donnée par poſition, & par grandeur une extremité eſt donnée, auſſi l'autre extremité ſera donnée.

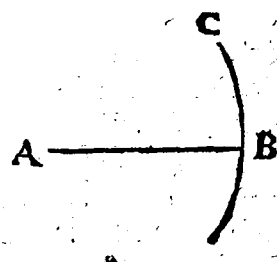
De la ligne droite AB donnée par poſition, & par grandeur ſoit dõnée une extremité, ſçavoir A : Je dis que l'autre extremité B eſt donnée.



Car ſi le poinct A demeurant en ſon lieu le poinct B change & tombe en un autre lieu, ou la poſition de la ligne droite AB, ou ſa grandeur changeroit : or eſt-il que ſelon l'hypotheſe l'une ny l'autre ne change. Donc le poinct B eſt donné.

AVTREMENT.

Du centre A, & de l'intervalle AB ſoit décrite la circonference BC. Donc [b] icelle circonference BC eſt donnée par poſition. Mais la ligne droite AB eſt auſſi donnée par poſition : Donc le poinct B [c] eſt donné.

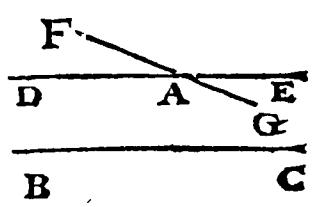


[b] 6. d.

[c] 25. p.

PROP. XXVIII.

Si par un poinct donné eſt tirée une ligne droite vis à vis d'une ligne droite donnée par poſition, la ligne droite menée eſt donnée par poſition.



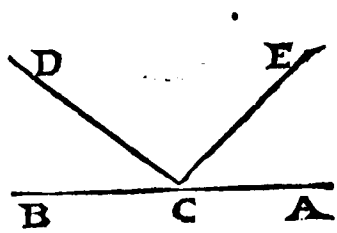
Que par le poinct donné A ſoit menée vis à vis d'une ligne droite BC donnée par poſition, une ligne droite DAE: Ie dis que la ligne droite DAE eſt donnée par poſition.

Car ſi elle n'eſt donnée, le poinct A demeurant en ſon lieu, la poſition de la ligne droite DAE changera. Qu'elle change donc s'il eſt poſſible, & tombe ailleurs demeurant parallele à BC, & ſoit FAG. Donc BC eſt parallele à icelle FAG. Mais [d] la meſme BC eſt auſſi parallele à DAE: Donc [e] DAE eſt parallele à icelle FAG. Ce qui eſt abſurde vû qu'elles ſe joignent & rencontrent en A. Donc la poſition de la ligne droite DAE ne tombe pas ailleurs. Parquoy, celle ligne DAE eſt donnée par poſition.

[d] 13. d.
[e] 30. L.

PROP. XXIX.

Si à une ligne droite donnée par poſition, & à un poinct donné en icelle eſt menée une ligne droite qui faſſe angle donné; la ligne menée eſt donnée par poſition.



Qu'à une ligne droite donnée AB, & à un poinct donné en icelle C, ſoit menée la ligne droite CD, qui fait l'angle donné ACD: Je dis que la ligne droite CD eſt donnée par poſition.

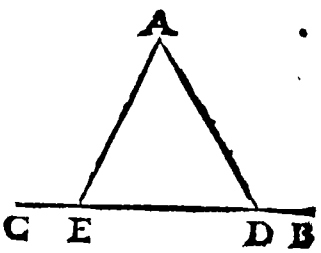
Car ſi elle n'eſt donnée par poſition, le poinct C demeurant en ſon lieu, la poſition de la ligne CD

obſervant la grandeur de l'angle ACD tombera ailleurs : Qu'elle y tombe donc, s'il eſt poſſible ; & ſoit CE. Donc l'angle ACD eſt égal à l'angle ACE, le grand au moindre. Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droite CD ne tombera ailleurs : & partant icelle ligne CD eſt donnée par poſition.

PROP. XXX.

Si d'un point donné eſt tirée à une ligne droite donnée par poſition une ligne droite faiſant un angle donné : la ligne tirée eſt donnée par poſition.

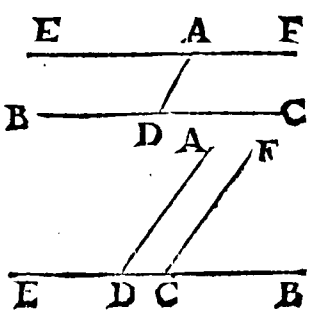
D'un poinct donné A ſoit tirée à la ligne droite BC donnée par poſition, une ligne droite AD faiſant l'angle ADB donné : Je dis que la ligne AD eſt donnée par poſition.



Car ſi elle n'eſt donnée, le poinct A ne bougeant de ſon lieu la poſition de la ligne droite AD gardant la grandeur de l'angle ADB changera. Quelle change donc ; & ſoit la ligne droite AE. Donc l'angle ADB
f 16. 1. eſt égal à l'angle AEB, le grand f au moindre : Ce qui eſt abſurde. Donc la poſition de la ligne droite AD ne change point : & partant icelle ligne AD eſt donnée par poſition.

AVTREMENT.

Par le poinct A ſoit tirée la ligne EAF parallele à la ligne droite BC. Donc puis que par le poinct donné A, vis-à-vis & contre une ligne droite BC donnée par poſition, eſt tirée la ligne droite EF ; icelles lignes EF, BC ſont paralleles, mais auſſi ſur icelles tombe la ligne droite AD:



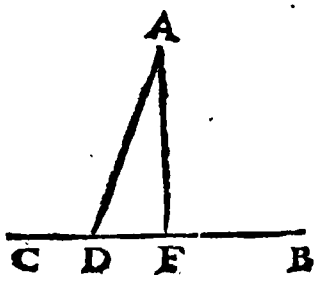
donc g l'angle FAD eſt égal à l'angle donné ADB; partant il eſt auſſi donné. Parquoy à la ligne droite EF donnée par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tirée la ligne droite AD faiſant l'angle donné FAD : Donc h icelle AD eſt donnée par poſition. g 29. 1. h 29. p.

AVTREMENT.

En la ligne BCE ſoit pris un poinct donné C, & par iceluy ſoit menée CF parallele à icelle DA. D'autant que AD, FC ſont paralleles, & que ſur icelles tombe la ligne droite BCE : l'angle FCB eſt égal à l'angle donné ADB : & partant il eſt auſſi donné. Et puis que à la ligne droite BC donnée par poſition, & à un poinct C donné en icelle eſt tirée la ligne droite FC faiſant un angle donné FCB ; icelle ligne FC h eſt donnée par poſition. Mais par le poinct donné A, eſt tirée vis-à-vis de la ligne FC donnée par poſition, la ligne AD : Donc icelle i AD eſt donnée par poſition. g 29. 1. h 29. p. i 28. p.

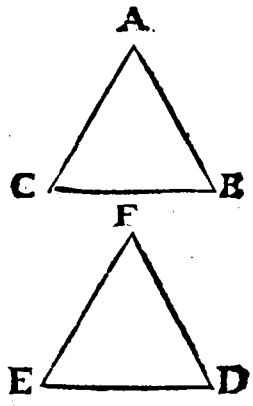
AVTREMENT.

Soit pris en la ligne droite BC quelque poinct F, & ſoit tirée AF. D'autant que chaque poinct A, F eſt donné, la ligne AF eſt donnée l par poſition. Mais la ligne BC eſt auſſi donnée par poſition: Donc † l'angle AFD eſt donné. Mais par l'hypotheſe l'angle ADF eſt donné : Donc DAF (qui eſt le reſte n de deux droits) eſt donné. Et puis que à la ligne droite AF donnée par poſition, & au poinct A donné en icelle, eſt tirée la ligne droite DA faiſant l'angle donné DAF, m icelle ligne DA eſt donnée par poſition. l 26. p. n 32. 1. m 29. p.



SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que deux lignes droites étans données par poſition, & inclinées entr'elles font un angle donné ; ce qu'aucuns demonſtrent ainſi. D'autant que les deux lignes droites données par poſition ſont inclinées entr'elles, l'inclination d'icelles lignes eſt donnée : Mais l'angle eſt l'inclination des lignes : Donc l'angle que font les lignes droites données par poſition, & inclinées entr'elles eſt donné.*



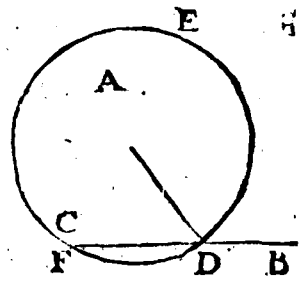
Mais le ſieur Hardy le demonſtre preſque ainſi. Soient deux lignes droites inclincés AB, CB données par poſition, & en AB ſoit pris quelque poinct donné A, & en BC auſſi quelque poinct C, & ſoit tirée la ligne droite AC. Puis que tant le poinct B, que chacun des poincts A & C eſt donné, ° 26. p. *les trois lignes droites AB, BC, AC ſont données par grandeur. Parquoy de trois lignes directes égales à icelles, on pourra conſtituer un triangle : ſoit donc fait le triangle FDE ayant le côté FD égal au côté AB, le côté FE égal au côté AC, & la baſe DE égale à la baſe BC. Vû donc que les angles compris des lignes droites égales ſont égaux, nous avons trouvé l'angle FDE égal à l'angle ABC : & partant iceluy* ᵈ *angle ABC eſt donné.* ᵈ 1. def.

PROP. XXXI.

Si d'un point donné, on tire à une ligne droite donnée par poſition, une ligne droite donnée par grandeur : elle ſera auſſi donnée par poſition.

Que d'un poinct donné A, ſoit tirée à la ligne droite BC donnée par poſition, la ligne droite AD donnée par grandeur : Je dis qu'icelle AD eſt donnée par poſition.

Car du centre A, & de l'intervalle AD ſoit décrit le cercle DEF. D'autant que le centre A eſt donné par poſition, & le ſemi-diam. AD par grandeur; le cercle DEF [p] eſt donné par poſition. Mais la ligne droite BC eſt auſſi donnée par poſition : Donc le poinct d'interſection D [q] eſt donné. Et puis que le poinct A eſt auſſi donné : [r] la ligne droite AD eſt donnée par poſition.



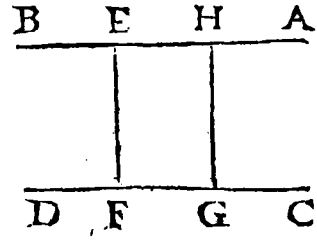
[p] 6. d.
[q] 25. p.
[r] 26. p.

PROP. XXXII.

Si à des lignes droites paralleles données par poſition, on tire une ligne droite, faiſant des angles donnez; la ligne tirée ſera donnée par grandeur.

Aux lignes droites paralleles AB, CD données par poſition, ſoit tirée la ligne droite EF faiſant les angles donnez BEF, EFD : Je dis que la ligne EF eſt donnée par grandeur.

Car ſoit pris en la ligne CD un poinct donné G, & d'iceluy ſoit tirée GH parallele à FE. D'autant que les lignes EF, HG ſont paralleles, & que ſur icelles tombe la ligne CD [s] l'angle EFD eſt égal à l'angle FGH. Mais l'angle EFD eſt donné : donc l'angle FGH eſt auſſi donné. Et d'autant qu'à la ligne droite CD donnée par poſition, & au poinct G donné en icelle eſt tirée la ligne droite GH faiſant l'angle donné FGH; [t] icelle ligne GH eſt donnée par poſition. Mais AB eſt auſſi donnée par poſition : Donc [u] le poinct H eſt donné. Mais le poinct G eſt auſſi donné : Donc [x] la ligne GH eſt donnée par



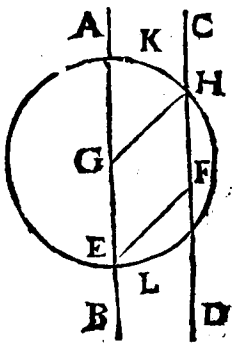
[s] 29. 1.
[t] 29. p.
[u] 25. p.
[x] 26. p.

grandeur, & est y égale à EF. z Parquoy icelle li
z 1. d. EF est donnée par grandeur.

PROP. XXXIII.

**Si à des lignes droites paralleles donnée p
position, on tire une ligne droite donné
par grandeur, elle fera les angles donnez.**

Aux lignes droites paralleles AB, CD données p
position, soit tirée une ligne droite EF donnée p
grandeur: Je dis qu'elle fera les angles BEF, DF
donnez.

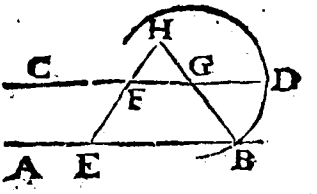


Car soit pris en la ligne droite AB le poinct G, & par iceluy soit tirée GH parallele à EF. Donc EF est égale à icelle
y 34. 1. y GH. Mais EF est donnée par grandeur: Donc GH est aussi donnée par grandeur. Mais le poinct G est donné, & partant si d'iceluy, & de l'intervalle
a 6. d. GH est décrit un cercle a il sera donné par position. Qu'il soit donc décrit, & soit HKL. Iceluy cercle HKL est donc donné, par position: Mais la ligne CD qui couppe la circonference KHL en H est aussi donnée par position: donc iceluy point d'intersection H b est
b 25. p. donné. Mais le poinct G est donné: donc c la ligne
c 26. p. droite GH est donnée par position. Mais la ligne droite CD est aussi donnée par position: Donc d l'an-
d sch. gle GHF est donné. Mais à iceluy est égal e l'angle
30. pr. EFD: Donc l'angle EFD est donné; & partant aussi
e 29. 1. l'angle BEF, car c'est le reste de la somme de deux droits.

AVTREMENT.

Soit pris en la ligne droite CD le poinct G; & soit posée GD égale à EF: puis du centre G & intervalle GD soit décrit un cercle DBH, & tiré GB. D'au-

tant que le centre G eſt donné par poſition, & le ſemidiametre GD par grandeur, le cercle BDH [a] eſt donné par poſition. Mais la ligne AB eſt auſſi donnée par poſition : Donc [b] le poinct B eſt donné. Mais le poinct G eſt auſſi donné : Donc [c] la ligne droite GB eſt donnée par poſition. Mais la ligne droite CD eſt auſſi donnée par poſition : Donc [d] l'angle BGD eſt donné. Parquoy ſi EF eſt parallele à BG, l'angle EFD, [e] ſera donné, & conſequemment auſſi l'autre angle BEF. Mais les lignes droites BG, EF n'étans paralleles, qu'elles ſe rencontrent au poinct H. D'autant que EB eſt parallele à FG, & EF eſt égale à GD, c'eſt-à-dire à BG ; auſſi FH [f] ſera égale à GH. (car EH, BH étans couppées proportionnellement [g] par la parallele FG, comme EF à FH ainſi BG à GH, & en permutant, comme EF à BG ainſi FH à GH.) Donc [h] l'angle HFG eſt égal à l'angle HGF. Mais iceluy HGF eſt donné : (car il eſt égal [i] au donné BGD.) Donc l'angle HFG eſt auſſi donné. Mais à iceluy eſt égal l'angle BEF ; & partant eſt donné, comme auſſi le reſtant EFG.

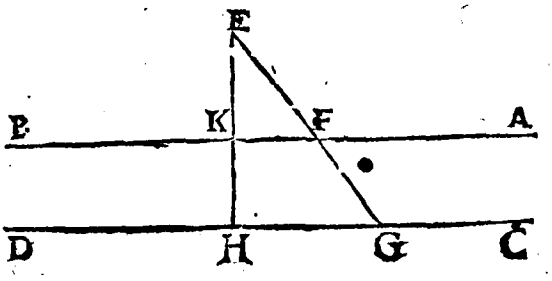


[a] 14. 5.
[b] 2. 6.
[c] 5. 1.
[d] 15. 1.

PROP. XXXIV.

Si d'un point donné on tire à des lignes droites paralleles données par poſition, une ligne droite ; elle ſera coupée en raiſon donnée.

Qu'aux lignes droites paralleles AB, CD données par poſition, ſoit tirée du



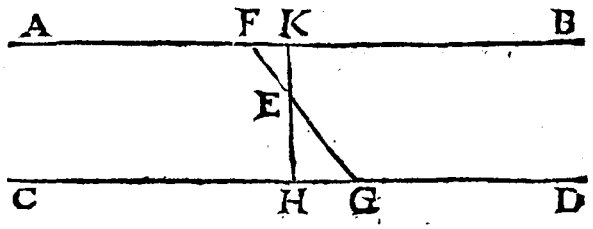
poinct donné E, la ligne droite EFG : Je dis que la raiſon de EF à FG eſt donnée.

Car du poinct E ſoit tirée EH perpendiculaire à la ligne CD. D'autant que du poinct donné E eſt tirée à CD la ligne droite EH, faiſant l'angle donné EHG, [l] icelle ligne EH eſt donnée par poſition. Mais l'une & l'autre ligne AB, CD eſt auſſi donnée par poſition. Donc [m] les poincts d'interſection K, H ſont donnez. Mais le poinct E eſt auſſi donné : Donc [n] chaque ligne EK, KO eſt donnée. Parquoy [o] la raiſon d'icelle EK à KO eſt donnée. Mais comme EK à KO, ainſi EF à FG : (car au triangle GEH, la ligne KF étant parallele à HG, les côtez EH, EG ſont couppez proportionnellement.) Donc la raiſon d'icelle EF à FG eſt donnée.

l 30. p.
m 25. p.
n 26. p.
o 1. p.

AVTREMENT.

Aux lignes droites paralleles AB, CD données par poſition, ſoit tirée du poinct donné E la ligne droite FEG : Je dis que la raiſon de GE à EF eſt donnée. Car du poinct E ſoit tirée à CD la perpendiculaire EH, & produite juſques au poinct K. Puis donc que du poinct E à la ligne droite CD donnée par poſition, eſt tirée la ligne EH faiſant l'angle donné EHG; [l] icelle EH eſt donnée par poſition. Mais chaque ligne AB, CD eſt auſſi donnée par poſition : Donc [m] chaque poinct d'interſection H, K eſt donné. Mais le poinct E eſt auſſi donné. Donc [n] chacune des lignes EH, EK eſt donnée par grandeur : & partant [o] la raiſon d'icelle EH à EK eſt donnée. Mais [p] comme EH à EK ainſi EG à EF : (car les angles oppoſez du poinct E étans égaux, & les lignes AB, CD paralleles, les triangles EHG, EKF ſont équiangles, & partant comme



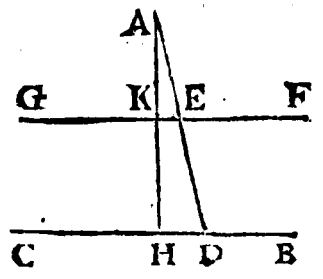
l 30. p.
m 25. p.
n 26. p.
o 1. p.
p 4. 6.

EH à EG ainsi EK à EF ; & en permutant comme EH à EK ainsi EG à EF.) Donc la raison d'icelle EG à EF est donnée.

PROP. XXXV.

Si d'un point donné à une ligne droite donnée par position, est tirée une ligne droite, laquelle soit coupée en une raison donnée, & que par le point de section soit menée une ligne droite vis à vis de la ligne droite donnée par position : la ligne menée sera donnée par position.

Que d'un poinct donné A soit tirée à une ligne droite BC donnée par position, la ligne droite AD, & soit couppée en E selon une raison donnée, c'est à sçavoir de AE à ED, mais par le poinct E soit menée FEG parallele à BC : Je dis que FG est donnée par position.



Car du poinct A soit tirée AH perpendiculaire à BC. D'autant que du poinct donné A est tirée à BC donnée par position, la ligne droite AH faisant l'angle AHD donné ; [q] icelle AH est donnée par position. Mais BC est aussi donnée par position: Donc [r] le poinct H est donné. Mais le poinct A est aussi donné : Donc [s] la ligne AH est donnée par grandeur, & par position. Et d'autant que [t] comme AE à ED, ainsi AK à KH, & que la raison de AE à ED est donnée ; aussi la raison de AK à KH est donnée : & en composant, [u] la raison de AH à AK est donnée. Mais AH est donnée par grandeur. Donc [x] aussi AK est donnée par grandeur. Mais AK est aussi donnée par position, & le poinct A est donné : Donc [y] le poinct K est aussi donné. Et puis que par iceluy poinct K donné est menée la ligne

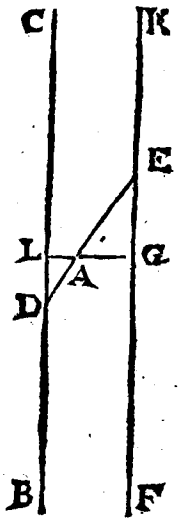
[q] 30. p.
[r] 25. p.
[s] 26. p.
[t] 2. 6.
[u] 6. p.
[x] 2. p.
[y] 27. p.

droite FG, vis à vis de la ligne droite BC donnée par
[z] 28.p. position ; icelle ligne FG [z] est donnée par position.

PROP. XXXVI.

Si d'un point donné on tire à une ligne droite donnée par position une ligne droite, & qu'à icelle on ajoûte quelque ligne droite ayant une raison donnée à la même ; mais que par l'extremité d'icelle ajoûtée, on mene une ligne droite vis à vis de la ligne donnée par position : icelle ligne menée sera donnée par position.

Que du poinct donné A soit tirée à la ligne droite BC donnée par position, la ligne droite AD, à laquelle soit adjoustée la ligne droite AE qui ait à AD une raison donnée ; mais par le poinct E soit menée FEK parallele à icelle BC : Je dis que FK est donnée par position.

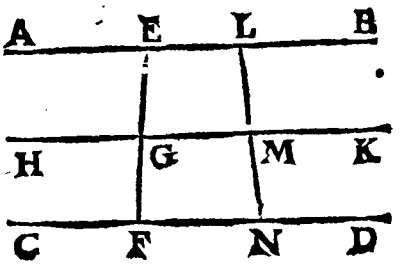


Car du point E soit menée à BC la perpendiculaire AL, & prolongée jusques au poinct G. D'autant que du poinct donné A est tirée à la ligne droite BC donnée par position la ligne droite GL, qui fait
[q] 30.p. un angle GLD donné ; [q] icelle ligne GL est donnée par position. Mais BC est aussi donnée par po-
[r] 26.p. sition : Donc [r] le poinct L est donné. Et puis que le poinct A est
[s] 26.p. aussi donné, la ligne [s] AL est donnée. Mais d'autant que la raison
[a] 4.6. de AE à AD est donnée, & que [a]
[c] 16.5. comme icelle AE à AD, ainsi AG à AL ; (à cause que les triangles ALD, AGE sont équiangles) la raison de AG à AL est aussi donnée. Mais AL est don-
[b] 2.p. née par grandeur : Donc [b] AG est donnée par grandeur. Mais elle l'est aussi par position, & le poinct A
[c] 17.p. est donné : Donc [c] le poinct G est aussi donné. Et puis

que par iceluy poinct donné G, eſt menée la ligne FK, vis à vis de la ligne droite BC donnée par poſition ; [d] icelle ligne FK eſt donnée par poſition. [d] 28. p.

PROP. XXXVII.

Si à des lignes droites paralleles données par poſition, eſt tirée une ligne droite, qui ſoit coupée en raiſon donnée : mais par le point de ſection ſoit menée vis à vis des lignes droites données par poſition, une ligne droite : icelle ligne menée ſera donnée par poſition.



Soient des lignes droites paralleles AB, CD données par poſition, & à icelles ſoit tirée la ligne droite EF coupée en la raiſon donnée de EG à GF ; & par le poinct G ſoit menée HGK parallele à laquelle on voudra d'icelles AB, CD : Je dis que KH eſt donnée par poſition.

Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné L, & d'iceluy poinct ſoit tirée LN perpendiculaire à CD. Et puis que du poinct donné L, eſt tirée à la ligne droite CD, la ligne LN faiſant l'angle LND donné icelle LN [e] eſt donnée par poſition. Mais CD [e] 30. p. eſt auſſi donnée par poſition. Donc le poinct N [f] eſt [f] 25. p. donné. Mais le poinct L eſt auſſi donné : Donc [g] la [g] 26. p. ligne LN eſt donnée. Et vû que la raiſon de FG à GE eſt donnée, & que † comme FG à GE, ainſi NM à ML ; la raiſon d'icelle NM à ML eſt donnée : Et en compoſant [h], la raiſon de LN à LM eſt [h] 6. p. auſſi donnée. Mais LN eſt donnée par grandeur : Donc ML eſt [i] donnée par grandeur. Mais elle l'eſt [i] 2. p. auſſi par poſition, & le poinct L donné. Donc le poinct M [l] eſt auſſi donné. Et attendu que par iceluy [l] 27. p. poinct M eſt menée la ligne droite KH vis-à-vis de

la ligne droite CD donnée par position : icelle ligne KH eſt auſſi donnée par poſition.

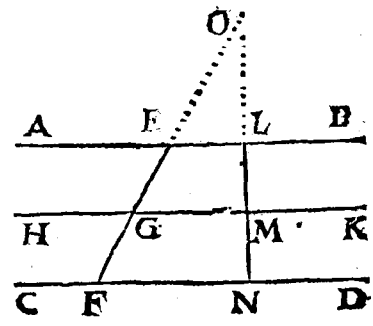
SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que comme FG eſt à GE, ainſi NM eſt à ML, mais le ſieur Hardy l'a demonſtré ainſi. Les lignes EF, LN ſont paralleles, ou non : Qu'elles ſoient donc premierement paralleles. Et d'autant que par l'hypotheſe les lignes EL, FN, EF, LN, ſont paralleles, EN ſera un parallelogramme ; & partant le coſté EF eſt égal au coſté LN. Derechef, veu que MG eſt parallele à FN : & GF à MN ; GN ſera auſſi parallelogramme, & partant le coſté GF eſt égal au coſté MN. Parquoy les égales EF, LN, au-*

m 7, 5. *ront aux égales FG, MN* m *une meſme raiſon : Donc com-*

n 17. 5. *me EF à FG, ainſi LN à MN ; & en diviſant,* n *comme GE à GF, ainſi LM à MN.*

Maintenant que les lignes EF, LN ne ſoient paralleles, mais qu'elles ſe rentontrent au poinct O, D'autant qu'au triangle OFN eſt menée HY parallele



o 2. 6. *à un des coſtez FN ; o les coſtez OF, ON ſont couppez proportionnellement ; & partant comme FG à GO ainſi NM à MO. Derechef, veu qu'au triangle OGM eſt menée EL parallele au coſté GM, les coſtez OG, OM ſont couppez proportionnellement : Parquoy* o *comme OE à EG, ainſi OL à LM ; & en compo-*

p 18. 5. *ſant,* p *comme OG à EG, ainſi OM à LM. Mais il a été domonſtré que comme FG à GO, ainſi NM à MO : Donc*

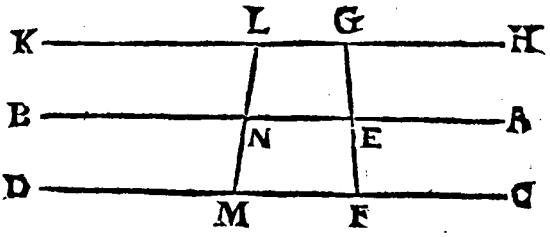
q 22. 5. *par raiſon égale,* q *comme FG à GE ainſi NM à ML.*

PROP. XXXVIII.

Si à des lignes droites paralleles données par poſition, on tire une ligne droite, & qu'à icelle on ajoûte quelque autre ligne droite

qui ait une raiſon donnée à la même ; mais par l'extremité de l'ajoûtée ſoit menée une ligne droite vis à vis des paralleles données par poſition : la ligne menée ſera auſſi donnée par poſition.

Soient des lignes droites paralleles AB, CD données par poſition, & à icelles ſoit tirée la ligne droite EF, à laquelle ſoit ajoûtée la ligne droite *EG* ayant une raiſon donnée à la même EF, mais par le point *G* ſoit menée la ligne droite HK parallele à l'une ou à l'autre des lignes AB, CD : Je dis qu'icelle ligne HK eſt donnée par poſition.



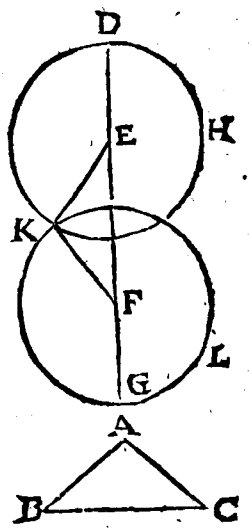
Car ſoit pris en la ligne AB le poinct donné N, & d'iceluy ſoit tirée à CD la perpendiculaire NM, & ſoit prolongée juſques au poinct L. D'autant que du poinct donné N eſt tirée à la ligne droite CD donnée par poſition, la ligne droite NM faiſant un angle donné NMF ; icelle NM [r] eſt donnée par poſition. Mais la ligne CD eſt auſſi donnée par poſition : Donc [s] le poinct M eſt donné. Mais le poinct N eſt auſſi donné : Donc [t] la ligne NM eſt donnée. Et pource que la raiſon de EG à EF eſt donnée, & que (par les choſes demonſtres au Scholie prec.) comme EG à EF ainſi LN à NM, la raiſon de LN à NM eſt auſſi donnée. Mais NM eſt donnée : Donc LN [u] eſt auſſi donnée. Mais le poinct N eſt donné : Donc [x] le poinct L eſt auſſi donné. Vû donc que par le poinct donné L, eſt menée la ligne droite HK vis à-vis de la ligne AB donnée par poſition ; [y] icelle HK eſt auſſi donnée par poſition.

[r] 30. p.
[s] 25. p.
[t] 26. p.
[u] 2. p.
[x] 27. p.
[y] 28 p.

PROP. XXXIX.

Si chaques côtez d'un triangle ſont donnez par grandeur, le triangle eſt donné par eſpece.

Du triangle ABC ſoient donnez chaques coſtez par grandeur: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



Car ſoit expoſée une ligne droite DG donnée par poſition, & finie au poinct D, mais infinie vers l'autre partie G. En icelle ſoit priſe DE égale à AB. Or puis que icelle AB eſt donnée par grandeur, DE l'eſt auſſi, mais la meſme DE eſt auſſi donnée par poſition, & le poinct D donné: Donc [z] le poinct E eſt donné. Derechef, ſoit poſée EF égale à BC. Et veu que BC eſt donnée par grandeur, EF le ſera auſſi. Mais icelle EF eſt ſemblablement donnée par poſition, & le poinct E eſt donné: Donc [z] le poinct F eſt donné. Soit encore priſe FG égale à AC. Or d'autant que icelle AC eſt donnée par grandeur, FG l'eſt auſſi. Mais FG eſt auſſi donnée par poſition, & le poinct F eſt donné: Donc le poinct G eſt auſſi donné. Maintenant du centre E, & intervalle ED ſoit décrit le cercle DHK, [a] & iceluy ſera donné par poſition. Derechef, du centre F & intervalle FG ſoit décrit le cercle GLK: Donc [a] iceluy cercle GLK eſt donné par poſition; & partant [b] le poinct d'interſection K eſt donné Mais chacun des poincts E, F eſt donné: Donc chaque ligne [c] EK, EF, FK eſt donnée par poſition & grandeur. Donc le triangle EKF eſt † donné par eſpece: Mais il eſt égal & ſemblable au triangle ABC; & partant le triangle ABC eſt auſſi donné par eſpece.

[z] 27. p.

[a] 6. d.

[b] 25. p.

[c] 26. p.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Euclide ſuppoſe icy qu'un triangle dont les côtez ſont donnez par grandeur & poſition eſt donné par eſpece, mais l'ancien interprete le demonſtre preſque ainſi. D'autant que les lignes droites KE, EF, ſont données d *la raiſon qu'elles ont entr'elles eſt donnée. Item les lignes droites EF, FK eſtans données, leur raiſon eſt auſſi donnée. Et ſemblablement eſt donnée la raiſon d'icelles EK, FK. Derechef, pource que les mémes lignes KE, EF ſont données par poſition* e *l'angle KEF eſt donné par grandeur: Item les lignes droites EF, FK eſtans données par poſition, l'angle EFK eſt donné par grandeur; comme eſt auſſi le reſtant EKF. Par ainſi au triangle EKF tous les angles ſont dõncz, & auſſi les raiſons des côtez: Donc* f *iceluy triangle EKF eſt donné par eſpece.*

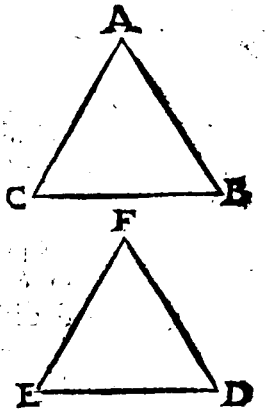
d 1. p.

e e ſch. 30. pr.

f 3. def.

PROP. XL.

Si les angles d'un triangle ſont donnez par grandeur, le triangle eſt donné par eſpece.



Que chacun angle du triangle ABC ſoit donné: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car ſoit expoſée la ligne droite DE donnée par poſition & par grandeur, & ſoit conſtitué au poinct D l'angle EDF égal à l'angle CBA, mais au poinct E l'angle DEF égal à l'angle BCA: Donc le troiſiéme angle BAC eſt égal au troiſiéme angle DFE. Or chacun des angles conſtituez aux points A, B, C eſt donné: Donc chacun de ceux qui ſont poſez aux points D, F, E eſt auſſi donné. Et puis que à la ligne droite DE donnée par poſition, & au point D donné en icelle eſt tirée la ligne droite DF, qui fait l'angle donné EDF; g la ligne DF eſt donnée par poſition. Et par meſme raiſon la ligne EF eſt donnée par poſition: Donc h le point F eſt donné par poſition. Mais chacun des points D, E eſt donné;

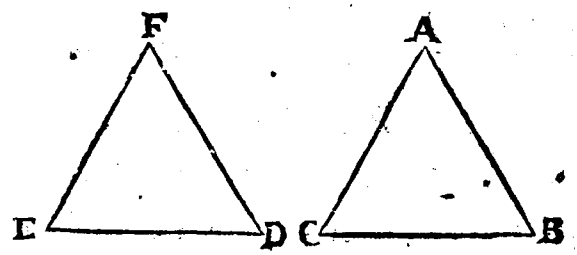
g 29. p.

h 25. p.

i 26. p. Donc i chacune des lignes DF, DE, EF eſt donné
l 39. p. par grandeur. Parquoy le triangle DFE l eſt donn
par eſpece ; & eſt ſemblable au triangle ABC : Don
le triangle ABC eſt donné par eſpece.

PROP. XLI.

Si un triangle a un angle donné, & que les deux côtez qui le conſtituent ayent entr'eux une raiſon donnée ; le triangle eſt donné par eſpece.



Que le triangle ABC ait l'angle BAC donné, & que les coſtez BA, AC qui font iceluy angle ſoient entr'eux en raiſon donnée: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

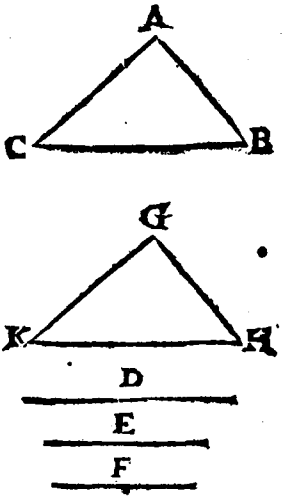
Car ſoit expoſée la ligne droite DF donnée par grandeur & poſition ; mais ſur icelle & au point donné F ſoit conſtitué l'angle DFE égal à l'angle BAC. Or l'angle BAC eſt donné : Donc auſſi eſt donné l'angle DFE. Et puis que à la ligne droite DF donnée par poſition & du point F donné en icelle eſt tirée une ligne droite FE faiſant l'angle donné DFE,
m 29. p. m icelle ligne FE eſt donnée par poſition. Mais veu que la raiſon de AB à AC eſt donnée ; ſoit faite la même de DF à FE, puis ſoit tirée DE. Donc la raiſon de DF à FE eſt donnée : Mais DE eſt donnée ;
n 2. pr. Donc n FE eſt donnée par grandeur. Mais la meſme FE eſt auſſi donnée par poſition, & le poinct F eſt
o 27. p. donné Donc o le poinct E eſt auſſi donné. Mais cha-
p 26. p. cun des poincts D, F eſt donné : Donc p chacune des lignes droites DF, FE, DE eſt donnée par poſition &
q 39. p. grandeur. Parquoy q le triangle DEF eſt donné par eſpece. Et veu que les deux triangles ABC, DEF ont

un angle égal à un angle, c'eſt à ſçavoir l'angle BAC à l'angle DFE, & les coſtez qui conſtituent iceux angles égaux, proportionnaux; [r] le triangle ABC eſt ressemblable au triangle DEF. Mais le triangle DFE eſt donné par eſpece: Donc le triangle ABC eſt donné par eſpece. [r] 6. 6.

PROP. XLII.

Si les côtez d'un triangle ſont entr'eux en raiſons données, le triangle eſt donné par eſpece.

Que les coſtez du triangle ABC ſoient entr'eux en raiſons données: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece. Car ſoit expoſée la ligne droite D donnée par grandeur; & puis que la raiſon de BC à AC eſt donnée, ſoit faite la meſme de D à E. Or D eſt donnée: Donc [f] E eſt auſſi donnée. Derechef, veu que la raiſon de AC à AB eſt donnée, ſoit faite la meſme de E à F. Or E eſt donnée: Donc [f] F eſt auſſi donnée. Maintenant de trois lignes droites égales aux trois données D, E, F, & deſquelles deux en quelque façon qu'elles ſoient priſes ſont plus grandes que l'autre, ſoit conſtitué le triangle GHK, tellement que D ſoit égale à HK, mais E à KG, & GH à F. Donc chacune deſdites lignes HK, KG, GH eſt donnée par grandeur. Parquoy [t] le triangle HGK eſt donné par eſpece. Et d'autant que comme BC à CA, ainſi D à E, & que D eſt égale à HK, & E à KG: comme BC à CA ainſi HK à KG. Derechef, pour ce que comme CA à AB, ainſi E à F, & que E eſt égale à KG, & F à GH: comme CA à AB, ainſi



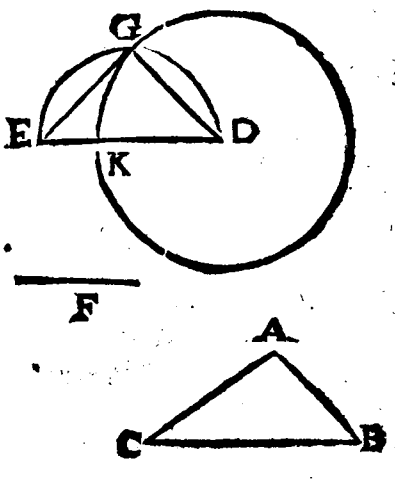
[f] 2. pr.

[t] 39. pr.

KG à GH. Mais il a été demonſtré que comme B
à CA, ainſi HK à KG : Donc par égalité de raiſon
a 5. 6. comme BC à AB, ainſi HK à GH. Donc a le triang
& 1. d. ABC eſt ſemblable au triangle GHK. Mais le tria
6. gle GHK eſt donné par eſpece : Donc le triang
ABC eſt auſſi donné par eſpece.

PROP. XLIII.

Si les côtez d'autour un des angles aigus d'u
triangle rectangle, ont entr'eux une raiſo
donnée ; le triangle eſt donné par eſpece.



Soit un triangle ABC ayant l'angle A droit, & les côtez BC, BA d'allentour un des angles aigus ſoient entr'eux en raiſon donnée : Je dis que le triangle ABC eſt donnné par eſpece.

Car ſoit expoſée la ligne droite DE donnée par grandeur & poſition, & ſur icelle DE ſoit décrit
b 6. def. le demy cercle DGE. Donc b le demy cercle DGE eſt donné par poſition : (car la ligne DE étant donnée, & couppée en deux également, le centre dudit cercle eſt donné par poſition, & le ſemidiam par grandeur.) Et d'autant que la raiſon de BC à BA eſt donnée, ſoit faite la même de DE à F : Donc la raiſon de DE à F eſt donnée. Mais DE eſt donnée:
c 2. pr. Donc F eſt c auſſi donnée. Or BC eſt plus grande que
d 19. 1. d AB : Donc ED eſt c auſſi plus grande que F. Soit ac-
e 14. 5. commodée DG égale à F, & tiré EG ; puis du centre D & intervalle DG ſoit décrit le cercle GK. Or iceluy cercle b eſt donné par poſition, puis que le centre D eſt donné, & le ſemidiametre DG auſſi donné par

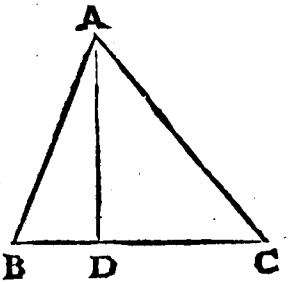
grandeur. Mais le demy cercle DGE eſt auſſi donné par poſition : Donc [f] le poinct d'interſection G eſt donné. Mais les poincts D, E ſont auſſi donnez : Donc [g] chacune des lignes droites DE, DG, EG eſt donnée par poſition & grandeur. Parquoy [h] le triangle DGE eſt donné par eſpece. Et puis que les triangles ABC, DGE ont un angle égal à un angle, ſçavoir l'angle droit BAC à l'angle droit [i] DGE, & les côtez d'allentour les angles CBA, EDG proportionnaux, mais chacun des autres ACB, DEG moindre qu'un droit : iceux triangles ABC, DEG [l] ſont ſemblables. Mais le triangle DGE eſt donné par eſpece : Donc le triangle ABC eſt auſſi donné par eſpece.

f 25. p.
g 26. p.
h 39. p.
i 31. 3.
l 7. 6. 4. 6. & 1 def. 6.

PROP. XLIV.

Si un triangle a un angle donné, & que les côtez d'autour un autre angle ayent entr'eux une raiſon donnée ; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC qui ait l'angle B donné, & les côtez BA, AC d'autour un autre angle BAC ayent entr'eux une raiſon donnée: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.



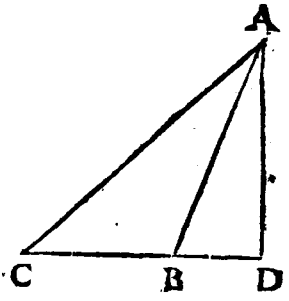
Or l'angle donné B eſt aigu ou obtus ; (car il étoit droit à la prop. prec.) ſoit premierement aigu, & du poinct A ſoit tirée AD perpend. à BC : Donc l'angle ADB eſt donné: Mais l'angle B eſt auſſi donné ; & partant le troiſiéme BAD eſt donné. Parquoy [m] le triangle ABD eſt donné par eſpece : & partant [n] la raiſon de BA à AD eſt donnée. Mais la raiſon de la même BA à AC eſt auſſi donnée : Donc [o] la raiſon de AD à AC eſt donnée ; & l'angle ADC eſt droit. Parquoy le

m 40. p.
n 3. def. converſ.
o 8. pr.

triangle p ACD eſt donné par eſpece : Donc n l'angle C eſt donné. Mais l'angle B eſt auſſi donné ; partant l'autre angle BAC eſt donné: Donc q le triangle ABC eſt donné par eſpece.

p 43. p.
n 3. def.
q 40. p.

Maintenant, l'angle ABC donné ſoit obtus, & ſur le côté CB prolongé ſoit tirée la perpendiculaire AD. D'autant que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD qui eſt de ſuite ſera donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné : Donc le troiſiéme DAB eſt donné. Parquoy q le triangle ABD eſt donné par eſpece : & partant n la raiſon de DA à AB eſt donnée. Mais la raiſon de AB à AC eſt auſſi donnée : Donc o la raiſon de DA à AC eſt donnée; & l'angle D eſt droit : Donc le triangle DAC eſt donné par eſpece ; & partant l'angle ACB eſt donné. Mais l'angle ABC eſt auſſi donné : Donc le troiſiéme angle BAC eſt donné. Parquoy le triangle ABC eſt donné par eſpece.



q 3. def.
n 8. pr.

PROP. XLV.

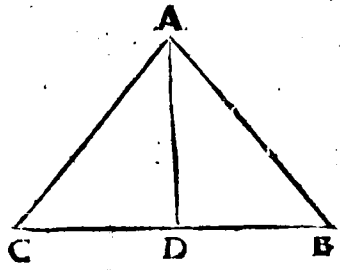
Si un triangle a un angle donné, & que le compoſé des deux côtez d'autour iceluy angle donné ait à l'autre côté une raiſon donnée; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC, qui ait l'angle BAC donné, mais la ligne compoſée des deux côtez AB, AC qui conſtituent iceluy angle BAC ait au troiſiéme côté BC une raiſon donnée : Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car l'angle BAC ſoit couppé en deux également par la ligne AD. Donc r l'angle CAD eſt donné. Et puis que comme AB à AC, ainſi f BD à CD; en compoſant, t comme la compoſée CAB eſt à CA,

r 7. pr.
f 3. 6.
t 18. 5.

ainſi BC à CD; & en permutant, comme la compoſée CAB à CB, ainſi CA à CD. Mais la raiſon de la compoſée BAC à BC eſt donnée: Donc la raiſon de CA à CD eſt auſſi donnée; & l'angle CAD eſt donné: Donc [u] le triangle ACD eſt donné par eſpece; & partant l'angle C eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le troiſiéme B eſt donné. Parquoy [x] le triangle ABC eſt donné par eſpece.

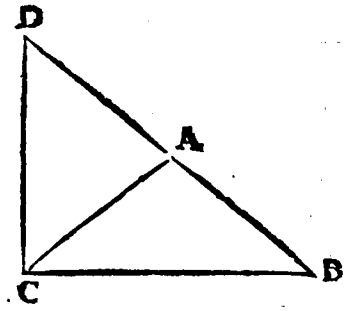


[u] 44.p.

[x] 40.p.

AVTREMENT.

Soit prolongée BA directement juſques en D, tellement que AD ſoit égale à AC, puis ſoit joint CD. D'autant que la raiſon de la compoſée CAB à CB eſt donnée, & que AD eſt égale à AC; la raiſon de la toute BD à BC eſt donnée. Mais l'angle ADC eſt auſſi donné, car il eſt moitié de l'angle donné BAC: (pource qu'iceluy BAC [y] eſt égal aux deux angles interieurs ACD, ADC qui ſont [z] égaux entr'eux étans les côtez AC, AD égaux.) Parquoy le triangle BDC [a] eſt donné par eſpece; & partant l'angle B eſt donné. Mais l'angle BAC eſt auſſi donné: Donc le reſte ACB eſt donné. Parquoy [b] le triangle ABC eſt donné par eſpece.



[y] 32. 1.

[z] 5. 1.

[a] 44.p.

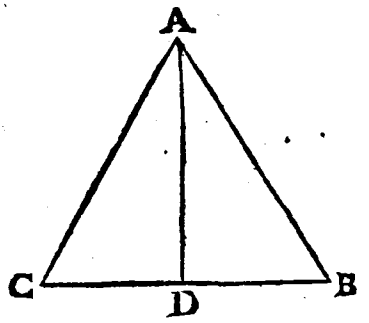
[b] 40.p.

PROP. XLVI.

Si un triangle a un angle donné, & que la compoſée des deux côtez d'autour un autre an-

gle ait à l'autre côté une raiſon donnée; le triangle eſt donné par eſpece.

Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle B donné, mais la compoſée des deux côtez d'autour un autre angle B*A*C, c'eſt-à-dire C*AB*, ait à l'autre côté BC une raiſon donnée : Je dis que le triangle *ABC* eſt donné par eſpece.

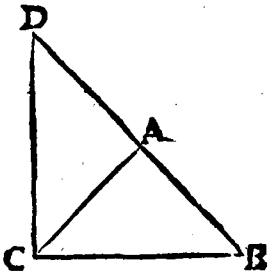


Car ſoit couppé l'angle B*A*C en deux également par la ligne *AD* : Donc (comme il a été demonſtré à la prec. prop.) la compoſée C*AB* eſt à CB, comme *AB* à BD. Mais la raiſon d'icelle compoſée CAB à C*B* eſt donnée : Donc auſſi la raiſon de *AB* à *B*D eſt donnée. Mais l'angle *B* eſt auſſi donné : Donc le triangle *ABD* [c] eſt donné par eſpece ; & partant [d] l'angle *BAD* eſt donné. Mais l'angle B*A*C eſt double d'iceluy *BAD* ; & partant il eſt auſſi donné ; Donc le troiſiéme angle C eſt donné. Parquoy le triangle *ABC* eſt donné par eſpece.

[c] 41. *p.*
[d] 3. *def. conu.*

AVTREMENT.

Soit prolongée *BA* directement, & poſé *AD* égale à *AC*, puis joint CD. D'autant que la raiſon de la compoſée C*AB* à C*B* eſt donnée, & que *AD* eſt égale à *AC* : la raiſon de *BD* à *BC* eſt donnée ; & l'angle *B* eſt auſſi donné : Donc le triangle C*DB* [c] eſt donné par eſpece ; & partant [d] l'angle D eſt donné : Donc l'angle *BAC*, qui eſt



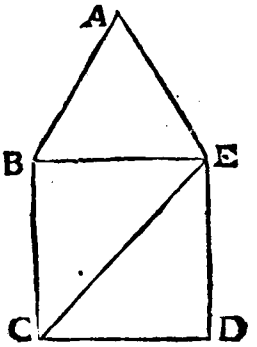
ouble d'iceluy, eſt auſſi donné. Parquoy l'autre ngle *ACB* eſt donné : Donc le triangle *ABC* eſt onné par eſpece.

PROP. XLVII.

Les rectilignes donnez par eſpece, ſe diviſent en triangles donnez par eſpece.

Soit un rectiligne *AB* DE donné par eſpece ; Je dis qu'il ſe diviſe en triangles donnez par eſpece.

Car ſoient tirées les lignes droites *EB*, EC. D'autant que le rectiligne *ABC* DE eſt donné par eſpece, l'angle [d] *BAE* eſt donné, & la raiſon du côté *AB* à *AE* : Donc [e] le triangle *BAE* eſt donné par eſpece. Parquoy l'angle *ABE* eſt donné. Mais tout l'angle *ABC* eſt auſſi donné : Donc [f] le reſte *EBC* eſt donné. Mais la raiſon du côté *AB* à *BE*, & auſſi celle de *AB* à *BC* eſt donnée : donc [o] la raiſon de *BC* à *BE* eſt donnée ; & l'angle *CBE* eſt auſſi donné : partant [e] le triangle *BCE* eſt donné par eſpece. Par même diſcours on demonſtrera que le triangle CDE eſt donné par eſpece. Donc les rectilignes donnez par eſpece ſe diviſent en triangles donnez par eſpece.



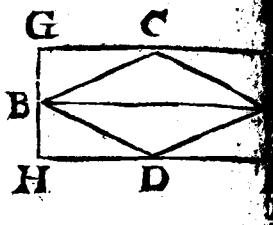
[d] 3. *def. conver.*
[e] 41. *p.*
[f] 4. *p.*
[o] 8. *pr.*
[e] 41. *p.*

PROP. XLVIII.

Si ſur une même ligne droite ſont décris des triangles donnez par poſition, ils auront entr'eux une raiſon donnée.

Sur la meſme ligne droite AB ſoient décris deux triangles ACB, ABD donnez par eſpece : Je dis que la raiſon de ACB à ABD eſt donnée.

Car des poincts A, B ſoient tirées à angles droits ſur la ligne AB, les lignes AE, BG, & prolongées juſques aux poincts F, H ; mais par les poincts C, D, ſoient menées ECG, FDH paralleles à AB. D'autant donc que le triangle ABC eſt donné par eſpece, [g] la raiſon CA à BA eſt donnée, & l'angle CAB auſſi donné. Mais l'angle BAE eſt donné : Donc le reſte CAE eſt auſſi donné. Mais l'angle CE*A* eſt donné ; & partant l'autre angle ACE eſt auſſi donné. Parquoy [h] le triangle AEC eſt donné par eſpece. Or la raiſon de EA à AB [o] eſt donnée, (car [d] la raiſon de EA à AC, & celle de AC à AB eſt donnée.) Et ſemblablement eſt donnée la raiſon de FA à AB. Donc [o] la raiſon de EA à AF eſt donnée. Mais comme AE eſt à AF [i] ainſi le parallelogramme AH eſt au parallelogramme AG. Mais ACB eſt [l] moitié de AH, & ADB moitié de AG : Donc la raiſon du triangle ACB au triangle ADB eſt donnée ; car c'eſt la meſme raiſon que de AH à AG, c'eſt à dire de EA à AF, qui eſt donnée.

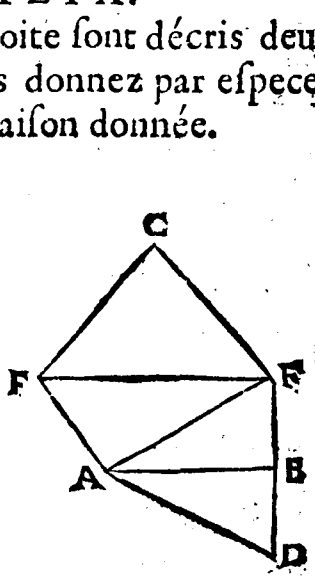


g 3. *def. conu.*
h 40 *p.*
o 8. *pr.*
d 3. *def.*
i 1. 6.
l 41. 1.
m 15. 5.

PROP. XLIX.

Si ſur une même ligne droite ſont décris deux quelconques rectilignes donnez par eſpece, ils auront entr'eux une raiſon donnée.

Sur une meſme ligne droite AB ſoient décris deux quelconques rectilignes AECFB, ADB données par eſpece : Je dis que la raiſon de AECFB à ADB eſt donnée.



Car ſoient menées FA, FE: Donc chacun des triangles [n] ABF, AFE, ECF eſt donné par eſpece. Et veu que ſur une meſme ligne droite EF ſont décris les

n 47. *p.*

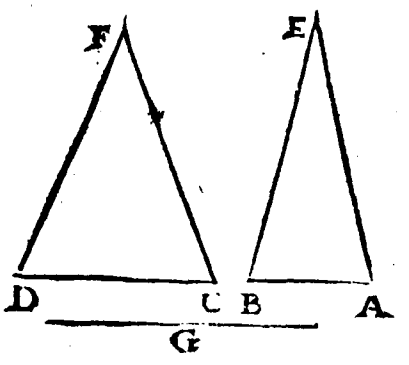
triangles ECF, EAF donnée par eſpece ; la raiſon de ECF à EAF o eſt donnée. Donc en compoſant, p la raiſon de AECF à EAF eſt donnée. Mais la raiſon d'iceluy EAF à FAB eſt donnée, o puis que ce ſont triangles donnez par eſpece décris ſur une meſme ligne droite AF : Donc q la raiſon de AECF à FAB eſt donnée. Parquoy en compoſant, p la raiſon de AECFB à FAB eſt donnée. Mais la raiſon d'iceluy FAB à ABD o eſt donnée : Donc q la raiſon de AECFB à ABD eſt auſſi donnée.

o 48. p.
p 6. pr.
q 8. pr.
o 48. p.

PROP. L.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raiſon donnée, & que ſur icelles ſoient décris des rectilignes ſemblables & ſemblablement poſez ; ils auront entr'eux une raiſon donnée.

Soient deux lignes droites *A*B, CD ayans entr'elles une raiſon donnée, & ſur icelles ſoient décris les rectilignes *A*EB, CFD ſemblables & ſemblablement poſez : Je dis que la raiſon qu'ils ont entr'eux eſt donnée.



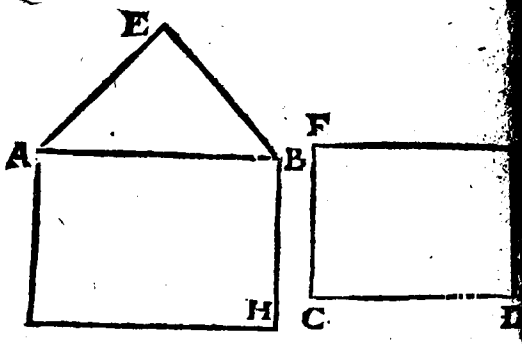
A icelles *A*B, CD ſoit priſe une troiſiéme proportion G. Donc comme *A*B à CD, ainſi CD à G. Mais la raiſon de *A*B à CD eſt donnée : Donc la raiſon de CD à G eſt auſſi donnée. Parquoy q la raiſon de *A*B à G eſt donnée. Mais r comme *A*B à G, ainſi *A*EB à CFD : Donc la raiſon d'iceluy *A*EB à CFD eſt donnée.

q 8. pr.
r corol. 19. ou 20. 6.

PROP. LI.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raiſon donnée, ſur icelles ſoient décris quelconques rectilignes donnez par eſpece ; ils auront entr'eux une raiſon donnée.

Soient deux lignes droites *AB*, CD ayans entr'elles une raiſon donnée, & ſoient deſcris ſur icelles quelconques rectilignes AEB CFD donnez par eſpece: Je dis que la raiſõ de AEB à CFD eſt dõnée.



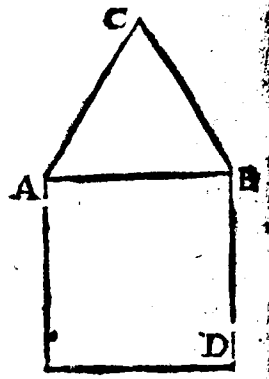
Car ſur *AB* ſoit décrit le rectiligne *AH* ſemblable & ſemblablement poſé à DF. Or DF eſt donné par eſpece: Donc auſſi *AH* eſt donné par eſpece. Mais *AEB* eſt auſſi donné par eſpece & décrit ſur la meſme ligne *AB*: Donc [s] la raiſon de *AEB* à *AH* eſt donnée. Et puis que la raiſon de *AB* à CD eſt donnée, & que ſur icelles lignes ſont décris les rectilignes *AH*, DF ſemblables & ſemblablement poſez: la raiſon [t] d'icelluy AH à DF eſt donnée. Mais la raiſon de AEB à AH eſt auſſi dõnée: Donc la raiſõ [u] de AEB à DF eſt dõnée.

[s] 49. p.
[t] 50. p.
[u] 8. pr.

PROP. LII.

Si ſur une ligne droite donnée par grandeur eſt décrite une figure donnée par eſpece, Icelle figure eſt donnée par grandeur.

Sur la ligne droite *AB* donnée par grandeur ſoit décrite la figure *ACB* donnée par eſpece: Je dis que la figure *ACB* eſt donnée par grandeur.



Car ſur la meſme ligne *AB* ſoit décrit le quarré *AD*. Donc *AD* eſt donné par eſpece † & par grandeur. Et veu que ſur la ligne droite *AB* ſont décrits les deux rectilignes *ACB*, *AD* donnez par eſpece; [x] la raiſon de *ACB* à *AD* eſt donnée. Donc [z] *ACB* eſt donnée par grandeur.

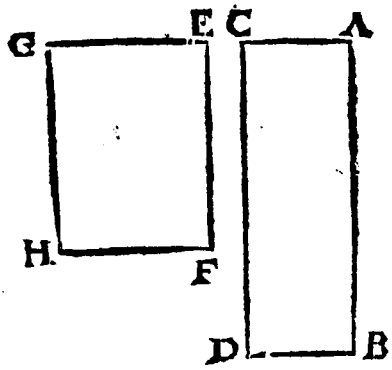
[x] 49. p.
[z] 2. p.

SCHOLIE.

L'ancien interprete a remarqué icy que tout quarré eſt donné par eſpece, pource que tous les angles en ſont donnez, étans tous droits & égaux : Mais auſſi les raiſons des coſtez ſont données ; car iceux coſtez étans tous égaux, auſſi les raiſons en ſont égales. Davantage, toutesfois & quantes qu'un quarré eſt expoſé, on en peut exhiber un égal à iceluy ; & partant le quarré eſt donné par grandeur, & auſſi chaque coſté d'iceluy.

PROP. LIII.

S'il y a deux figures données par eſpece, & qu'un côté de l'une ait à un côté de l'autre une raiſon donnée : les autres côtez auront auſſi aux autres côtez raiſons données.



Soient deux figures AD, EH données par eſpece, & la raiſon de BD à F*H* ſoit donnée : Je dis que la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez eſt donnée.

Car puis que la raiſon de BD à FH eſt donnée, & auſſi celle [a] de BD à BA : [b] la raiſon d'icelle AB à FH eſt donnée. Mais la raiſon d'icelle FH à FE [a] eſt auſſi donnée : donc [b] la raiſon de AB à EF eſt donnée : Auſſi eſt ſemblablement donnée la raiſon des autres coſtez aux autres coſtez.

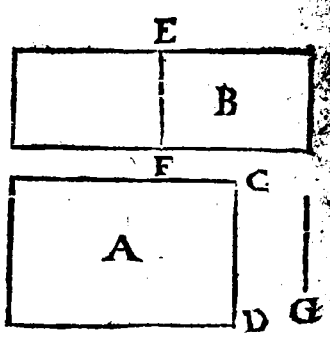
a 3. *d.*
b 8. *p.*

PROP. LIV.

Si deux figures données par eſpece ont entr'elles une raiſon donnée, auſſi les côtez d'icelles ſeront entr'eux en raiſon donnée.

Soient deux figures A, B données par eſpece, qui ayent entr'elles une raiſon donnée : Je dis que leurs côtez auront entr'eux une raiſon donnée.

Car ou la figure A eſt ſemblable, & ſemblablement poſée à *B*, ou non. Qu'elle ſoit premierement ſemblable & ſemblablement poſée, & ſoit priſe G troiſiéme proport. aux lignes droites CD, EF. Donc cõme CD à G, [e] ainſi A à B. Mais la raiſon de A à B eſt donnée: donc auſſi la raiſon de CD à G eſt donnée. Et veu que CD, EF, G ſont proport. [d] auſſi la raiſon de CD, à EF, eſt donnée. Mais A & B ſont données par eſpece: donc [e] les autres côtez auront raiſon donnée aux autres côtez.



[e] *corol.* 19. *ou* 20. 6.

[d] 24. *p.*

[e] 53. *p.*

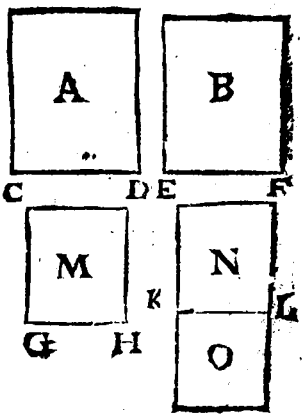
Maintenant, la figure A ne ſoit ſemblable à la figure B; & ſoit décrite ſur EF la figure EH ſemblable & ſemblablement poſée à A: donc la figure EH eſt donnée par eſpece. Mais la figure *B* eſt auſſi donnée par eſpece: donc [f] la raiſon de *B* à EH eſt donnée; & partant la raiſon de A à icelle EH [g] eſt auſſi donnée. Mais A eſt ſemblable à EH: donc (par ce que deſſus) la raiſon de CD à EF eſt donnée: & ſemblablement la raiſon des autres côtez aux autres côtez eſt donnée.

[f] 49. *p.*

[g] 8. *p.*

AVTREMENT.

Soit expoſée une ligne droite donnée GH. Maintenant ou la figure A eſt ſemblable à la figure B, ou non. Soit premierement ſemblable; & ſoit fait comme CD à EF, ainſi GH à LK: puis ſur GH, LK ſoient décrites les figures M, N ſemblables & ſemblablement poſées à icelles A, B: leſquelles M, N ſeront conſequemment don-

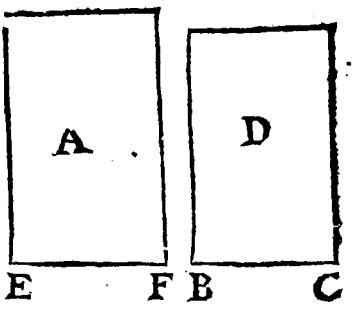


nées par especes. Donc puis que comme CD à EF, ainsi GH à LK, & que sur icelles lignes CD, EF, GH, LK sont décrites les figures A, B, MN semblables & semblablement posées: [h] cõme A à B ainsi M à N. Mais la raison de A à B est donnée: donc la raison de M à N est donnée. Mais [i] M est donnée, attendu que c'est une figure donnée par espece décrite sur une ligne droite donnée par grandeur: donc N est aussi donnée. Maintenant, sur LK soit décrit le quarré O: donc [l] la figure O est donnée par espece. Parquoy la raison de K à N est donnée. Mais N est donnée: donc K est donnée; & consequemment [l] aussi KL. Mais GH est donnée: donc [m] la raison de GH à KL est donnée. Mais comme GH à LK, ainsi CD à EF: donc la raison de CD à EF est donnée; & partant les figures A & B étans données par especes: [n] les autres costez d'icelles auront aussi aux autres costez une raison donnée. Mais si les figures ne sont semblables; sera procedé comme en la derniere partie de la demonstration cy-dessus.

[h] 22. 6.
[i] 52. p.
[l] sch. 52. p.
[m] 3. pr.
[n] 53. p.

PROP. LV.

Si un espace est donné par espece & par grandeur, les côtez d'iceluy seront donnez par grandeur.



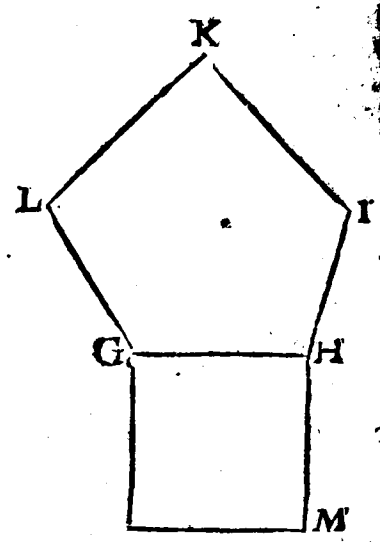
Soit un espace A donné par espece & par grandeur: Je dis que les côtez d'iceluy sont donnez par grandeur.

Car soit exposée la ligne droite BC donnée par position & par grandeur; & sur icelle BC soit décrit l'espace D semblable & semblablement posé à A: partant iceluy espace D est donné par espece. Et pource qu'il est décrit sur la ligne BC donnée par grandeur; il est aussi donné [o] par grandeur. Mais la figure A est aussi donnée: donc [m] la raison de A à D

[o] 52. p.

est donnée. Mais icelles figures A, D sont donnée
p 54. p. par espece : donc p la raison de la ligne EF à la lig
m 3. p. BC est donnée. Mais BC est donnée : donc m EF
q 3. d. aussi donnée. Mais la raison d'icelle EF à FG
conu. donnée : donc r FG est donnée. Et par mêmes raiso
r 2. p. on demonstrera chacun des autres côtez estre don
par grandeur.

AVTREMENT.



Soit l'espace GHIKL donné par espece & par grandeur : Je dis que les côtez d'iceluy sont donnez par grandeur.

Car soit décrit sur la ligne droite GH le quarré GM : donc f GM est
f 5ch. 52. p. donné par espece. Mais l'espace GHIKL est aussi donné par espece:
t 49. p. donc t la raison d'iceluy espace GK à GM est donnée. Mais GK est donné par grandeur:
r 2. p. donc r GM est aussi donné par grandeur. Et veu que GM est le quarré de la ligne GH ; f icelle ligne GH est donnée par grandeur. Parquoy semblablement chacune des autres lignes HI, IK, KL, LG est donnée.

PROP. LVI.

Si deux parallelogrammes équiangles ont entr'eux une raison donnée, comme un côté du premier est à un côté du second, ainsi l'autre côté du second est à celle à laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée que le parallelogramme a au parallelogramme.

Soient

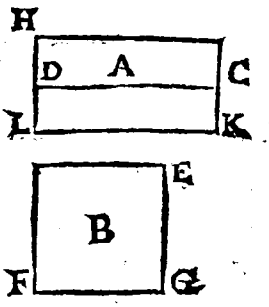
Soient deux parallelogrammes équiangles A, B ayans entr'eux une raiſon donnée : Je dis que comme CD eſt à FG, ainſi GE eſt à celle à laquelle DH a la raiſon donnée que le parallelogramme A a au parallelogramme B.

Car ſoit prolongé directement HD juſques en L, tellement que comme CD eſt à FG, ainſi HD ſoit à DL; & ſoit achevé le parallelogramme DK. D'autant que comme CD à FG, ainſi HD à DL, & que [a] CD eſt égal à KL : comme LK à FG, ainſi GE à DL ; & par ainſi les côtez d'autour les angles égaux DLK, EGF, ſont reciproquement proportionnaux: parquoy [b] DK eſt égal à B. Et partant puis que la raiſon de A à B eſt donnée, & que B eſt égal à DK; la raiſon de A à DK eſt donnée. Mais comme [c] A à DK (c'eſt-à dire B) ainſi HD à DL : donc la raiſon de HD à DL eſt auſſi donnée. Et vû que comme CD à FG, ainſi GE à DL, & que la ligne droite HD a à DL raiſon donnée, ſçavoir celle qu'a l'eſpace A à l'eſpace B : comme CD eſt à FG, ainſi GE eſt à celle à laquelle HD à la raiſon donnée qu'a l'eſpace A à l'eſpace B, c'eſt-à-dire la raiſon de HD à DL.

[a] 34. 1.

[b] 14. 6.

[c] 1. 6.



PROP. LVII.

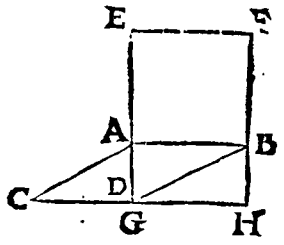
Si un eſpace donné eſt appliqué à une ligne droite donnée en angle donné, la largeur de l'application eſt donnée.

A la ligne droite donnée AB ſoit appliqué l'eſpace donné AD, en angle donné CAB : Je dis que CA eſt donnée.

Car ſur AB ſoit décrit le quarré AF : donc [d] icelui AF eſt donné. Soient prolongées les lignes EA, FB, CD aux poincts G, H. Vû donc que chaque

[d] *ſch.* 52. *pr.*

espace AD, AF est donné, leur raison est aussi donnée. Mais [e] AD est égal à AH : donc la raison de AF à AH est donnée. Parquoy la raison de EA à AG est donnée. (car [f] c'est la même que de AF à AH.) Mais EA est égale à AB : donc la raison de AB à AG est donnée. Maintenant puis que l'angle CAB est donné, & l'angle GAB aussi donné ; le reste CAG est donné. Mais l'angle CGA est aussi donné, pource qu'il est droit : donc le reste ACG est donné. Parquoy le triangle [g] CAG est donné par espece. Donc la raison de CA à AG est donnée. Mais la raison de AB à la même AG est aussi donnée : Donc la raison de CA à AB est donnée ; & icelle AB est donnée. Parquoy CA est aussi donnée.



e 36. 1.

f 1. 6.

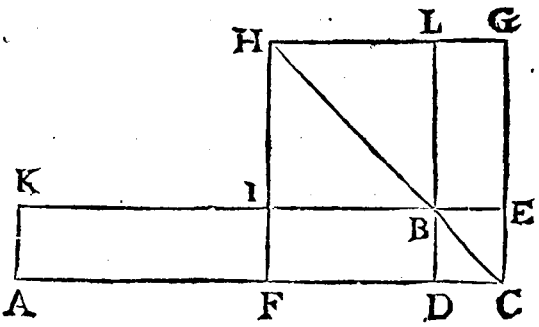
g 40. p.

PROP. LVIII.

Si un espace donné est appliqué à une ligne droite donnée, défaillant d'une figure donnée par espece ; les largeurs du defaut sont données.

Soit un espace donné AB appliqué selon la ligne droite donnée AC défaillant de la figure DE donnée par espece : Je dis que chacune des lignes droites BD, DC est donnée.

Car soit coupée AC en deux également au point F ; donc tant AF, que FC est donnée. Sur icelle FC soit décrit le rectiligne FG

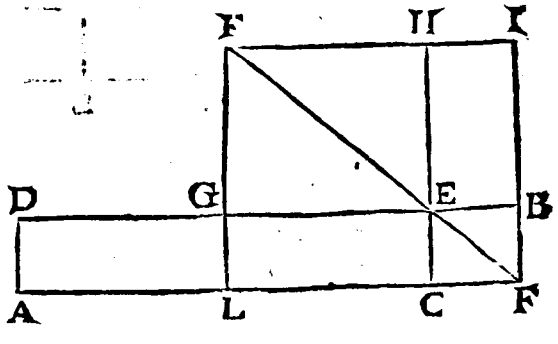


ſemblable & ſemblablement poſé à DE, & ſoit conſtruite la figure. Donc FG eſt donné par eſpece : & puis qu'il eſt décrit ſur la ligne droite FC donnée par grandeur, iceluy rectiligne FG eſt [h] auſſi donné par grandeur. Mais FG eſt égal à AB, IL ; (car [i] AI, FE étans égaux, & [l] FB, BG auſſi égaux, le gnomon ICL eſt égal à *AB*, & partant leur adjoûtant IL commun, FG ſera égal à *AB*, IL :) Donc les figures AB, IL enſemble ſont données par grandeur. Mais AB eſt donnée par grandeur : donc [m] la reſtante IL eſt auſſi donnée par grandeur. Mais elle eſt auſſi donnée par eſpece, puis qu'elle eſt [n] ſemblable à DE : Donc [o] les côtez d'icelle IL ſont donnez. Parquoy IB eſt donnée : & puis qu'elle eſt égale [p] à FD ; icelle FD eſt auſſi donnée. Mais FC eſt donnée : Donc le reſte DC [m] eſt donné ; & [q] a raiſon donnée à *BD* : & partant [r] BD eſt donnée.

[h] 52. *p.*
[i] 36. 1.
[l] 43. 1.
[m] 4. *p.*
[n] 24. 6.
[o] 55. *p.*
[p] 34. 1.
[q] 3. *d.*
[r] 2. *pr.*

PROP. LIX.

Si un eſpace donné eſt appliqué ſelon une ligne droite donnée, excedant d'une figure donnée par eſpece ; les largeurs de l'excés ſont données.



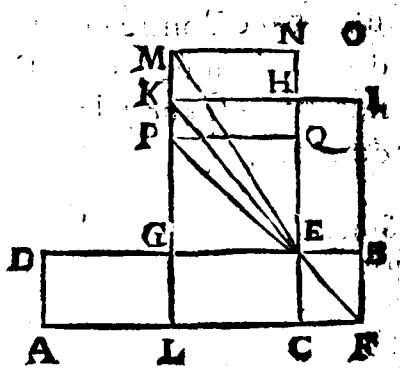
Soit un eſpace donné AB appliqué ſelon la ligne droite donnée *AC*, excedant de la figure CB donnée par eſpece : Je dis que chacune des lignes CE, CF eſt donnée.

Car DE étant couppée en deux également en G, ſoit décrit ſur GE le rectiligne GH ſemblable &

ſemblablement poſé à CB ; & ſoit conſtruite ſ
gure. Or puis que GB eſt ſemblable à GH ; ic
CB, GH † ſont autour d'un même diametre ;
GH eſt donné par eſpece, tout ainſi que CB. M
f 52. p. il eſt décrit ſur la ligne donnée GE : Donc f icel
GH eſt auſſi donné par grandeur. Mais AB eſt do
né : Donc AB, GH ſont donnez par grandeur. C
iceux AB, GH ſont égaux à LI : (car AG, L
EI étans égaux ; le gnomon GFH eſt égal à AB ;
partant adjoûtant GH commun, LI ſera égal à A
GH.) Donc LI eſt donné par grandeur. Mais
t 24. 6. eſt auſſi donné par eſpece, attendu qu'il eſt t ſem
x 55. p. blable à CB : Donc x les côtez d'iceluy LI ſont don
nez ; & partant le côté LF eſt donné. Mais LC e
y 4. p. auſſi donné, vû qu'il eſt égal à GE : Donc y le reſt
z 3. d. CF eſt donné, & la raiſon donnée z à CE. Parquoy
a 2. p. a CE eſt donnée.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que CB, GH ſont allentour d'un même diametre ; mais nous le demontrerons ainſi. Soient deux parallelogrammes ſemblables GB, GH, diſpoſez en la même ſorte que deſſus, c'eſt-à-dire que les angles égaux ſe conjoignans en E le côté CE rencontre directement ſon homologue EH ; & le côté BE ſon correſpondant EG : E ſoit tiré le diametre FE : Je dis qu'iceluy diametre FE prolongé paſſera par le poinct K ; c'eſt-à-dire les parallelogrammes GH, CB conſiſter allentour un même diametre. Car s'ils n'y conſiſtent le diametre FE étant produi paſſera au deſſus du poinct K, ou au deſſous. Qu'il tombe premierement au deſſus, & couppe GK prolongé en M, & par le poinct M ſoit menée MN parallele à KH, laquelle rencontre EH prolongé en N & FB en O. D'autant*



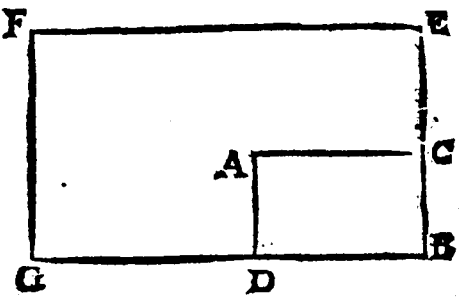
que les parallelogr. GN, CB ſont avec le parallelogr. LO autour d'un même diametre, ils ſont [b] *ſemblables entr'eux. Parquoy comme FC à CE, ainſi EG à GM. Semblablement pource que les parallelogr. CB, GH ſont ſemblables, comme FC à CE, ainſi EG à GK: Donc* [d] *comme EG à GM, ainſi EG à GK. Parquoy* [e] *GM & GK ſont égales; la partie au tout; Ce qui eſt abſurde. On demontrera par meſmes raiſons que le diametre prolongé ne tombera pas au deſſous du poinct K. Donc les parallelogrammes CB, GE conſiſtent allentour d'un même diametre.*

[b] 24. 6.
[d] 11. 5.
[e] 9. 5.

PROP. LX.

Si un parallelogramme donné par eſpece & par grandeur eſt augmenté ou diminué d'un gnomon, les largeurs du gnomon ſont données.

Que le parallelogramme AB donné par eſpece & par grandeur, ſoit premierement augmenté du gnomon CFD. Je dis que chacune des lignes droites CE, DG eſt donnée.



Car puis que AB eſt donné, & le gnomon CFD auſſi donné, tout le parallelogramme BF eſt donné: Mais il eſt auſſi donné par eſpece, attendu qu'il eſt ſemblable à BA. Donc [f] les coſtez d'iceluy BF ſont donnez; & partant chacune des lignes BE, BG eſt donnée. Mais chacune des lignes BC, BD eſt donnée: Donc chacune des lignes reſtantes CE, DG eſt auſſi donnée.

[f] 55. p.

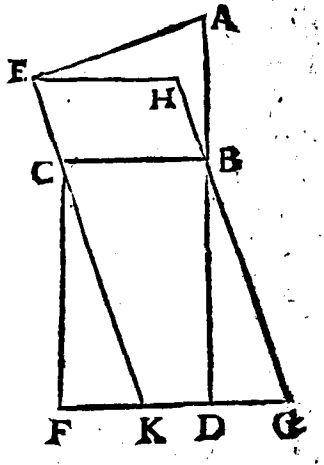
Maintenant que le parallelogramme BF donné par eſpece & par grandeur ſoit diminué du gnomon donné CFD: Je dis que chacune des lignes CE, DG eſt donnée. Car d'autant que BF eſt donné, & le gno-

mon CFD donné ; le reſte AB eſt auſſi donné. M
il eſt auſſi donné par eſpece, veu qu'il eſt ſemblabl
BF: Donc [f] les coſtez d'iceluy AB ſont donnez;
partant chacune des lignes CB, BD eſt donnée. M
chacune des lignes ; BE, BG eſt donnée : Donc au
chacune des reſtées CE, DG eſt donnée.

PROP. LXI.

Si à un côté d'une figure donnée par eſpece eſt appliqué un eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure donnée ait au parallelogramme une raiſon donnée: le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Qu'à un coſté de la figure ABCE donnée par eſpece ſoit appliqué un eſpace parallelogramme CD en angle donné BCF, & ſoit donnée la raiſon de la figure AC au parallelogramme CD: Je dis que CD eſt donné par eſpece.



Car par le poinct B ſoit tirée BH parallele à CE, & par le poinct E ſoit menée EH parallele à CB, & ſoient prolongées EC, HB aux poincts K, G. D'autant que l'angle BCE eſt donné, & la raiſon de EC
[g] 3. d. à CB, [g] le parallelogramme CH, eſt donné † par eſpece : Mais la figure ABCE eſt auſſi donnée par eſpece, & eſt décrite ſur la meſme ligne BC que le parallelogramme CH donné par eſpece : Donc [h] la raiſon de la figure ABCE au parallelogramme CH eſt donnée. Mais par l'hypotheſe la raiſon d'icelle figure ABCE
[h] 49. p. [i] 36. 1. au parallelogramme CD eſt auſſi donnée ; & CD eſt [i] [l] 8. p. égal à CG : Donc [l] la raiſon de CH à CG eſt don-

née. Parquoy la raiſon de la ligne EC à la ligne CK eſt donnée : (car [m] comme CH à CG, ainſi EC à CK.) Mais la raiſon de EC à CB eſt auſſi donnée : Donc [l] la raiſon d'icelle CB à CK eſt donnée. Et veu que l'angle ECB eſt donné, auſſi l'angle de ſuite BCK [n] eſt donné : Mais l'angle BCF eſt poſé donné : & partant le reſté FCK eſt donné. Item l'angle CKF eſt donné, attendu [o] qu'il eſt égal à l'angle BCK : Donc l'autre angle CFK eſt donné. Parquoy [p] le triangle FCK eſt donné par eſpece ; & partant la raiſon de FC à CK eſt donnée. Mais la raiſon de CB à la meſme CK eſt auſſi donnée : Donc [l] la raiſon de FC à CB eſt donnée ; & l'angle BCF eſt auſſi donné. Parquoy le parallelogramme CD eſt donné par eſpece.

[m] 1. 6.
[n] 13. 1.
[o] 4. p. 5 & 29. 1.
[p] 40. p.

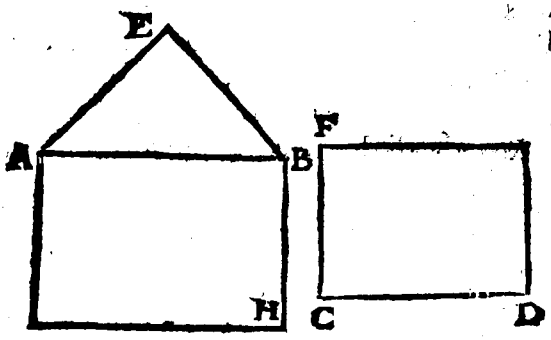
SCHOLIE.

† *Encore qu'il ſoit manifeſte qu'un parallelogramme qui a un angle donné, & la raiſon des coſtez d'autour iceluy angle auſſi donnée, ſoit donné par eſpece ainſi que le dit icy Euclide, ſi eſt-ce que l'ancien interprette l'a voulu demonſtrer ainſi. Pource qu'au parallelogramme CH l'angle ECB eſt donné, auſſi l'angle CEH eſt donné : car la ligne droite EC tombant ſur les paralleles EH, CB fait les deux angles interieurs d'une meſme part égaux à deux droits : Et partant puis que l'angle ECB eſt donné, les autres angles ſont donnez. Et pource que la raiſon de EC à CB eſt donnée, & que BH eſt égale à CE, & EH à BC la raiſon des coſtez entr'eux eſt auſſi donnée.*

PROP. LXII.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raiſon donnée, & ſur l'une d'icelles eſt décrite une figure donnée par eſpece, mais ſur l'autre un eſpace parallelogramme en angle donné, & que la figure ait au parallelogramme une raiſon donnée ; le parallelogramme eſt donné par eſpece.

Que les deux lignes droites AB, CD ayent entr'elles une raiſon donnée, & ſur AB ſoit décrite la figure AEB donnée par eſpece, mais ſur CD le parallelogramme DF en angle donné DCF; & la raiſon de celle figure AEB au parallelogramme DF ſoit donnée. Je dis que le parallelogramme DF eſt donné par eſpece.



Car ſur la ligne AB ſoit décrit le parallelogramme AH ſemblable & ſemblablemẽt poſé à DF. Veu donc que la raiſon de AB à CD eſt donnée, & ſur icelles lignes ſont décrits les rectilignes AH, FD ſemblables & ſemblablement poſez, [q] la raiſon de AH à FD eſt donnée. Mais la raiſon de FD à AEB eſt auſſi donnée: Donc [r] la raiſon de AH AEB eſt donnée. Mais l'angle ABH eſt auſſi donné, eſtant égal à l'angle FCD: par ainſi la figure AEB eſt donnée par eſpece, & à AB l'un des coſtez d'icelles eſt appliqué le parallelogramme AH en angle donné ABH, & la raiſon de ladite figure AEB à iceluy parallelogramme AH eſt donnée: Donc [s] le parallelogr. AH eſt donné par eſpece, & partant FD, qui luy eſt ſemblable, eſt auſſi donné par eſpece.

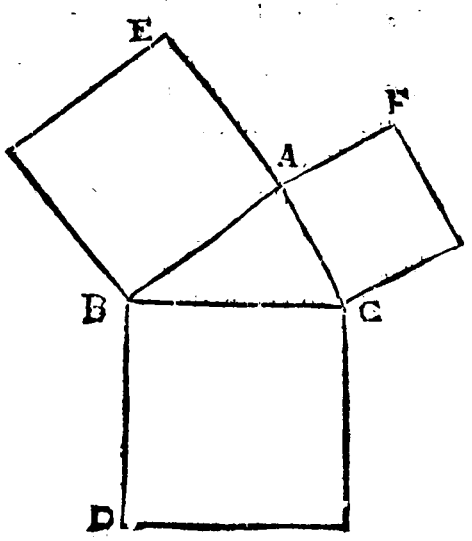
[q] 50. p.
[r] 8. p.
[s] 61. p.

PROP. LXIII.

Si un triangle eſt donné par eſpece, le quarré qui eſt décrit ſur un chacun des coſtez aura raiſon donnée au triangle.

Soit le triangle ABC donné par eſpece, & ſoient décrits ſur chacun des côtez d'iceluy les quarrez BE, CD, CF: Je dis que chacun des quarrez EB, CD,

CF aura une raiſon donnée au triangle ABC.



Car puis que ſur une meſme ligne droite BC ſont décrits les deux rectilignes ABC, CD donnez par eſpece; [t] la raiſon d'iceluy ABC à CD eſt donnée: Et partant eſt auſſi donnée la raiſon de l'un & l'autre des quarrez BE, CF au triangle ABC.

t 49. p.

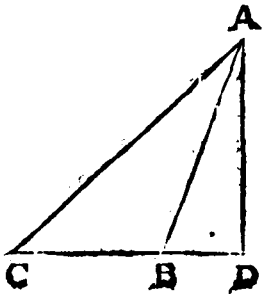
PROP. LXIV.

Si un triangle a un angle obtus donné, cet eſpace là duquel le côté ſoûtendant l'angle obtus peut plus que les côtez comprenant iceluy angle, aura une raiſon donnée au triangle.

Soit le triangle ambligone ABC ayant l'angle obtus ABC donné: & ayant prolongé directement CB, de A ſoit tirée la perpendiculaire AD: Je dis que l'eſpace duquel le quarré de la ligne AC excede les quarrez des lignes AB, BC, c'eſt-à-dire [x] le double du rectangle ſous CB, *BD*, aura une raiſon donnée au triangle *ABC*.

x 12. 2.

Car puis que l'angle ABC eſt donné, auſſi l'angle ABD eſt donné. Mais l'angle ADB eſt auſſi donné: Donc l'autre angle *BAD* eſt donné. Parquoy [y] le triangle ABD eſt donné par eſpece: Donc [z] la raiſon de AD à DB eſt donnée. Mais comme AD



y 40.

z 3. d.

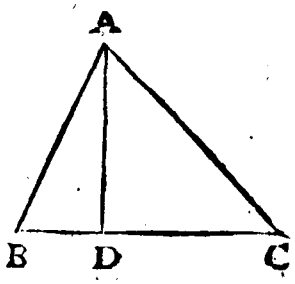
[a] 1. 6. à DB', ainsi [a] le rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Mais la raison de AD; DB est donnée. Donc aussi est donnée la raison du rectangle de AD, BC au rectangle de BC, BD. Parquoy la raison du double d'iceluy rectangle de BC, BD au rectangle de AD, BC est aussi donnée : Mais iceluy rectangle de AD, BC a aussi raison donnée au triangle ABC (c'est à sçavoir la raison double, car le rectangle est [b] double du triangle) donc la raison du double rectangle de BC, BD [c] au triangle ABC est donnée. Mais iceluy double rectangle de CB, BD, est cet espace là duquel le quarré de la ligne AC, excede les quarrez des lignes AB, BC : Donc iceluy espace a raison donnée au triangle ABC.

[b] 41. 1.

[c] 8. p.

PROP. LXV.

Si un triangle a un angle aigu donné, cet espace là duquel le côté subtendant ledit angle aigu peut moins que les côtez comprenans iceluy angle aigu, aura au triangle une raison donnée.



Soit le triangle ABC ayant l'angle aigu ACB donné, & du poinct A soit menée AD perpendiculaire à BC : Je dis que cet espace là duquel le quarré de la ligne droite AB est moindre que les quarrez des lignes AC, CB, c'est-à-dire [d] le double du rectangle de BC, CD, à une raison donnée au triangle ABC.

[d] 13. 2.

Car d'autant que l'angle C est donné, & l'angle ADC aussi donné, l'autre angle DAC est donné: parquoy [e] le triangle ADC est donné par espece; & partant la raison de AD à DC est donnée, & consequemment aussi [f] celle du rectangle de BC, CD au

[e] 40. p.

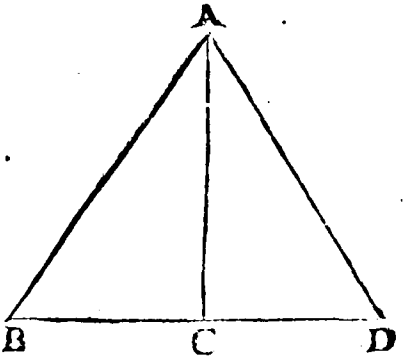
[f] 1. 6.

rectangle de BC, AD. Donc la raiſon du double rectangle de BC, CD au rectangle de BC, AD eſt donnée. Mais eſt auſſi donnée la raiſon d'iceluy rectangle de BC, AD au triangle ABC : (car [g] le rectangle eſt double du triangle) donc [h] la raiſon du double rectangle de BC, CD au triangle ABC eſt donnée. Et vû que iceluy double rectangle de BC, CD eſt ce dont le quarré de la ligne AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC ; cet eſpace là duquel le quarré de la ligne droite AB eſt moindre que les quarrez des lignes AC, BC aura raiſon donnée au triangle ABC.

[g] 41. 1.
[h] 8. p.

PROP. LXVI.

Si un triangle a un angle donné, le rectangle des lignes comprenans iceluy angle aura une raiſon donnée au triangle.



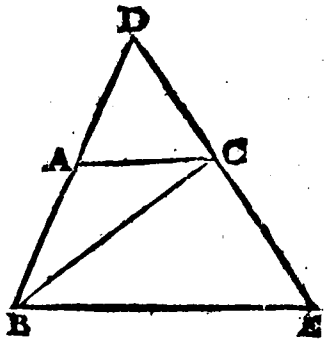
Soit le triangle ABD, qui ait l'angle B donné : Je dis que le rectangle compris ſous AB, BD a raiſon donné au triangle ABD.

Car du point A ſoit tirée AC perpendiculaire à BD. Donc puis que l'angle B eſt donné, & auſſi l'angle ACB, l'autre angle BAC eſt pareillement donné. Parquoy le triangle ABD [i] eſt donné par eſpece : & conſequẽment eſt donnée la raiſon de AB à AC. Mais comme AB à AC, [l] ainſi le rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC : Donc la raiſon du rectangle de AB, BD au rectangle de BD, AC eſt donnée. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de BD, AC au triangle ABD eſt auſſi donnée : (car c'eſt la raiſon double, le rectangle étant double [m] du triangle) donc [h] la raiſon du rectangle de AB, BD au triangle ABD eſt donnée.

[i] 40. p.
[l] 1. 6.
[m] 41. p.

PROP. LXVII.

Si un triangle a un angle donné, cet espace duquel la composée des deux costez comprenans iceluy angle peut plus que l'autre côté aura raison donnée au triangle.



Soit le triangle ABC, ayant l'angle BAC donné : Je dis que cet espace là duquel le quarré de la composée de BA, AC est plus grand que le quarré de BC, aura raison donnée au triangle ABC.

Car soit prolongée BA, tellement que AD soit égale à AC, puis étant tirée DCE indeterminement du poinct B soit menée BE parallele à AC rencontrant icelle DE en E. D'autant
h 4. 6. que AD est égale à AC, h DB est égale à BE : (car les
& 14. deux triangles ADC, BDE sont semblables) & du
5. sommet B est tirée à la base DE la ligne droite BC, Donc † le rectangle de DG, CE avec le quarré de BC est égal au quarré de BD. Mais icelle BD est composée de BA, AC : Donc le quarré de la composée d'icelles AB, AC est plus grand que le quarré de BC du rectangle de DC, CE.

Maintenant, je dis que le rectangle de DC: CE a raison donnée au triangle ABC. Car d'autant que l'angle BAC est donné, aussi est donné l'angle DAC. Mais chacun des angles ADC, ACD est donné, car il est moitié de l'angle BAC, qui est donné: Donc
* 40. p. o le triangle ADC est donné par espece, & partant la
P 50. p. raison de DA à DC est donnée. Donc P aussi est donnée la raison du quarré d'icelle DA au quarré de DC.
q 2. 6. Et veu que comme BA à AD q ainsi EC à CD, & aussi
r 1. 6. comme BA à AD r ainsi le rectangle de BA, AD au quarré de AD, & comme EC à CD r ainsi aussi le rectangle de EC, CD au quarré de CD : En permu-

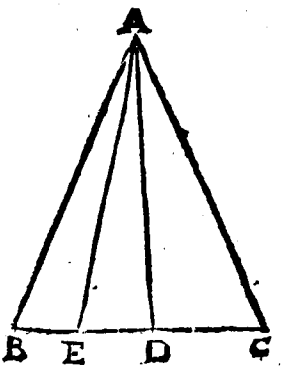
tant ; comme le rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD, ainſi le quarré de AD au quarré de DC. Mais la raiſon d'iceluy quarré de AD au quarré de DC eſt donnée : Donc la raiſon du rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD eſt auſſi donnée. Mais AD eſt égale à AC : Donc la raiſon du rectangle de BA, AC au rectangle de EC, CD eſt donnée. Mais la raiſon du rectangle de BA, AC au triangle ABC [f] eſt donnée, pource que l'angle BAC eſt donné : Donc [t] la raiſon du rectangle EC, CD au triangle ABC eſt donnée. Mais le rectangle de EC, CD eſt ce dont le quarré de la compoſée de BA, AC eſt plus grand que le quarré de BC : Donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſée de BA, AC eſt plus grand que le quarré de BC, aura raiſon donnée au triangle ABC.

[f] 66. p.
[t] 8. pr.

SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy que lors qu'en un triangle Iſoſcelle eſt tirée du ſommet à la baſe quelque ligne droite ; le quarré d'icelle ligne avec le rectangle contenu ſous les ſegmens de la baſe eſt égal au quarré de l'une ou l'autre des jambes: Ce que l'ancien Interprete demonſtre ainſi.*

Soit le triangle Iſoſcelle ABC, duquel les jambes ſoient AB, AC, & du ſommet A ſoit tirée à la baſe BC quelconque ligne droite AD : Ie dis que le quarré de AD avec le rectangle de BD, DC eſt égal au quarré de l'une ou l'autre des jambes AB, AC. Or la ligne AD eſt perpendiculaire à BD, ou non : Quelle ſoit premierement perpendiculaire ; Donc [u] elle couppera la baſe BC en deux également au point D; & partant le rectangle ſous BD, DC eſt égal au quarré d'icelle BD, & leur adjoutant le commun quarré de AD : le rectangle de BD, DC avec le quarré de AD ſera égal aux quarrez de DB, AD. Mais à iceux quarrez de AD, DB, eſt [x] égal le quarré de AB : donc



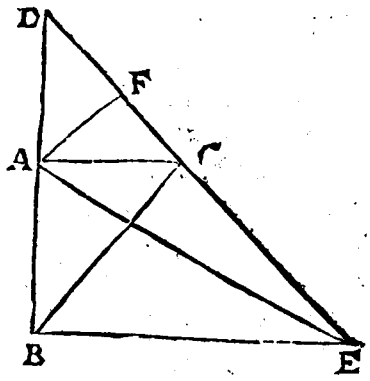
[u] *ſch.* 26. I.

[x] 47. I.

le quarré de AB eſt égal au rectangle de BD, DC, & quarré de AD enſemble.

Maintenant AD ne ſoit perpendiculaire, mais que du poinct A tombe ſur BC la perpendiculaire AE : Cela étant ainſi, BC ſera couppée en deux également en E, & inégalement en D ; parquoy le rectangle de BD; DC avec le ɣ 5. 2. *quarré de DE, eſt égal au quarré de BE : & adjoutant le commun quarré de AE, le rectangle de BD, DC avec les quarrez de DE, AE ſera égal aux quarrez de BE, AE. Mais × le quarré de AD eſt égal aux deux quarrez de DE, AE : Donc le rectangle de BD, DC avec le quarré de AD eſt égal aux quarrez de BE, AE. Mais à iceux quarrez de BE, AE eſt égal le quarré de AB : Donc le quarré de AD avec le rectangle de BD, DC, eſt égal au quarré de AB.*

AVTREMENT.



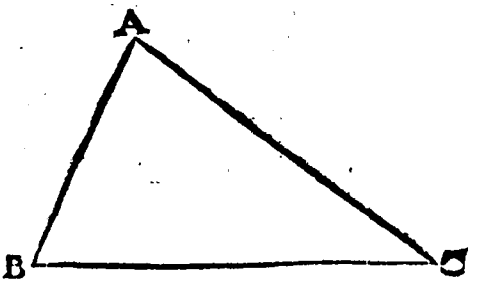
Ayant conſtruit comme en la demonſtration prec. du poinct A ſoit tirée AF perpẽdiculaire à CD, & ſoit menée AE. D'autant que l'angle BAC eſt donné, auſſi le ſera ACF moitié d'iceluy. Mais l'angle AFC eſt donné ; & partant le triangle AFC eſt donné par eſpece : Donc la raiſon de AF à FC eſt donnée. Mais la raiſon de CD à la même FC eſt auſſi donnée, attendu que CD [a] eſt double de FC : Donc [b] la raiſon de CD à AF eſt donnée ; & partant eſt auſſi donnée la raiſon du rectangle de CD, EC au rectangle de AF, EC : (car c'eſt la même raiſon [c] que de CD à AF.) Mais la raiſon du rectangle de AF, EC au triangle ACE eſt donnée, vû qu'il eſt double d'iceluy [d] triangle : donc la raiſon du rectangle de CD, CE au triangle ACE eſt auſſi donnée. Mais le triangle ACE eſt égal au triangle ABC [e], car l'un & l'autre eſt conſtitué ſur une même baſe AC, & entre meſmes paralleles

[a] *ſch.* 26. 1.
[b] 8. *p.*
[c] 1. 6.
[d] 41. 1.
[e] 37. 1.

AC, BE : donc [b] la raiſon du rectangle de CE, CD, au triangle ABC eſt donnée. Mais iceluy rectangle de CE, CD eſt l'eſpace duquel le quarré de la compoſée de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC : donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſée de AB, AC eſt plus grand que le quarré de BC, a raiſon donnée au triangle ABC. [b] 8. p.

AVTREMENT.

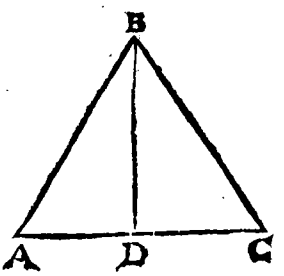
Car l'angle donné A eſt ou droit, ou aigu, ou obtus. Qu'il ſoit premierement droit : donc le quarré de la compoſée BAC eſt plus grand que le quarré de BC de deux fois le rectãgle de BA, AC : (pource que [f] le quarré de BC eſt égal aux deux quarrez de BA, AC ; & le quarré de la compoſée BAC [g] eſt égal à iceux deux quarrez de BA, AC, & deux fois le rectangle d'icelles BA, AC.) Parquoy la raiſon du double rectangle de BA, AC au triangle ABC eſt donnée.



[f] 47. 1.

[g] 4. 2.

Maintenant, ſoit l'angle A aigu, & du poinct B ſoit tirée ſur AC la perpendiculaire BD. D'autant que le triangle ABC eſt oxigone, & eſt tirée la perpendiculaire BD, les quarrez de AB, AC ſont égaux [h] au quarré de BC avec deux fois le rectangle de AC, AD : adjoûtant donc le commun double rectangle de AB, AC ; les quarrez de AB, AC, avec le double rectangle d'icelles AB, AC, c'eſt-à-dire, [i] le ſeul quarré de la compoſée BAC, ſont égaux au quarré de BC avec le double rectangle de AD, AC, & en outre le double rectangle de BA, AC, c'eſt-à-dire le double rectangle ſous la compoſée BAD, AC : (car le rectangle de BAD, AC eſt [l] égal aux rectangles de BA, AC, &



[h] 13. 2.

[i] 4. 2.

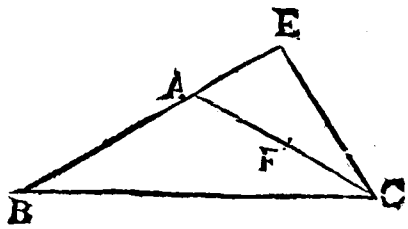
[l] 1. 2.

de *AD*, *AC*.) Donc le quarré de la composée *BAC* est plus grand que le quarré de *BC*, du double rectangle de *BAD*, *AC*. Et puis que l'angle *BAC* est donné, & l'angle *ADB* aussi donné; l'autre angle *ABD* est donné : donc [m] le triangle *ABD* est donné par espece ; & partant la raison de *AD* à *AB* est donnée, & par consequent la raison de la composée *BAD* à *AB* est aussi donnée. Parquoy est aussi donnée la raison du rectangle d'icelles composée *BAD*, *AC* [o] au rectangle de *BA*, *AC*. Mais la raison d'iceluy rectangle de *PA*, *AC* au triangle *ALC* [p] est donnée, pource que l'angle *A* est donné : donc la raison du double rectangle de la composée *BAD*, *AC* au triangle *ALC* est donnée.

[m] 40. p.
[n] 6. p.
[o] 1. 6.
[p] 66. p.

Finablement, soit l'angle *FAC* obtus, & ayant prolongé *EA*, du poinct *C* soit tirée sur icelle la perpendiculaire *CE*, puis soit posée *AF* égale à *AE*. D'autant que l'angle *FAC* est obtus, & est tirée la perpendiculaire *CE*, les quarrez de *AB*, *AC*, & le double rectangle sous *BA*, *AE*, ou *AF*, sont ensemblement égaux [q] au quarré de *BC* : & adjoûtant le commun double rectangle de *BA*, *AC*, les quarrez d'icelles *AB*, *AC* avec le double rectangle des mesmes *AB*, *AC* c'est-à-dire [r] le quarré de la composée *BAC*, & le double rectangle de *BA*, *AF* sont ensemble égaux au quarré de *BC* avec le double rectangle de *BA*, *AC* : Soit ôté le commun double rectangle de *BA*, *AF* & restera le quarré de la composée *BAC* égal au quarré de *BC* avec le rectangle de *AB CF* : (car le rectangle de *AB*, *AC* est égal [s] aux deux rectangles de *AB*, *AE*, & *AB*, *CF*) donc le quarré de la composée *BAC* est plus grand que le quarré de *BC* du double rectangle de *AB*, *CF*. Et d'autant que l'angle *BAC* est donné, l'angle *CAE* [t] est donné. Mais l'angle *AEC* est aussi

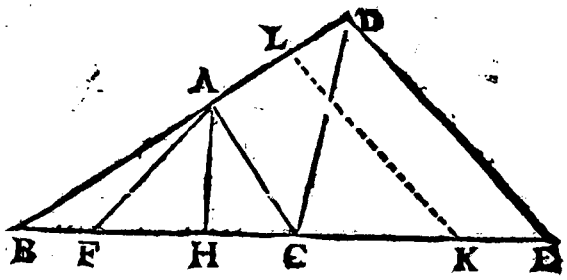
[q] 12. 2.
[r] 4. 2.
[s] 1. 2.
[t] 13. 1.



aussi donné : donc l'autre angle ACE est donné. Parquoy [u] le triangle ACE est donné par espece ; & partant la raison de CA à AE, c'est à dire à AF, est donnée : donc [x] la raison d'icelle CA à FC est aussi donnée. Mais la raison de la mesme CA à CE est donnée : donc [y] la raison de CE à CF est aussi donnée. Parquoy la raison du rectangle de EC, AB au rectangle de FC, AB est donnée, (car le rectangle est au rectangle, [z] comme CE à CF) & aussi celle du rectangle de AC, AB au rectangle de EC, AB : donc [y] la raison du rectangle de FC, AB au rectangle de AC, AB est donnée. Mais la raison du rectangle de AC, AB au triangle ABC [a] est donnée : donc aussi la raison du double rectangle de FC, AB au triangle ABC est donnée. Mais iceluy double rectangle de FC, AB est ce dont le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC : dont cet espace là duquel le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC a raison donnée au triangle ABC.

[u] 40. p.
[x] 5. p.
[y] 8. p.
[z] 1. 6.
[a] 66. p.

AVTREMENT.



Soit prolõgée la ligne BA jusques au poinct D, en sorte que AD soit égale à AC, & soit menée CD. D'autant que l'angle BAC est donné, aussi chacun des angles ADC, ACD qui est moitié d'iceluy sera donné ; & partant l'autre angle DAC est aussi donné : donc [u] le triangle ACD est donné par espece. Parquoy la raison de AC à CD est donnée. Et d'autant que l'angle ADC est donné, soit fait chacun des angles DEC, AFC † égal à iceluy ADC. Donc puis que l'angle BDC est égal à l'angle DEC, & l'angle DBE est commun aux triangles DBE, DBC, l'autre angle BDE est égal à l'autre angle BCD ; & partant le triangle BDE

b 4. 6. eſt équiangle au triangle BDC. Donc b comme EB
BD, ainſi BD à CB: parquoy le rectangle de EB, CB
c 3. 2. c'eſt-à-dire c le rectangle de EC, CB c avec le quarré
d 17. 6. de CB, eſt égal d au quarré de BD, c'eſt-à-dire au quarré de la compoſée BAC, car AD eſt égale à AC, & partant le rectangle de EC, CB avec le quarré de CB, c'eſt-à-dire le quarré de la compoſée BAC eſt plus grand que le quarré du rectangle de BC, CE: Je dis donc que la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au triangle ABC eſt donnée.

Car d'autant que l'angle BDE eſt égal à l'angle BCD, & l'angle ADC égal à l'angle ACD, l'autre angle CDE eſt égal à l'autre ACB : Mais l'angle DEC eſt auſſi égal à l'angle AFC ; donc le reſte CAF eſt égal au reſte DCE. Parquoy le triangle AFC eſt équiangle au triangle DCE ; & partant b comme
b 4. 6. CA à AF, ainſi CD à CE ; & en permutant, comme AC à CD, ainſi AF à CE. Mais la raiſon de AC à CD eſt donnée : donc auſſi la raiſon de AF à CE eſt donnée. Du poinct A ſoit menée AH perpendiculaire à BC. D'autant que l'angle AFC eſt donné, & l'angle AHF auſſi donné, le troiſiéme HAF eſt donné. Parquoy e le triangle AHF eſt donné par
e 40. p. eſpece ; & par conſequent la raiſon de AF à AH eſt donnée. Mais la raiſon de AF à CE eſt auſſi donnée: donc f la raiſon de AH à CE eſt donnée ; & partant
f 8. pr. la raiſon du rectangle de AH, BC g au rectangle de
g 1. 6. BC, CE eſt auſſi donnée. Mais la raiſon du rectangle de AH, BC au triangle ABC eſt pareillement donnée ; (car le rectangle h eſt double du triangle)
h 41. 1. & le rectangle de BC, CE, eſt ce dont le quarré de la compoſée BAC eſt plus grand que le quarré de BC : donc cet eſpace là duquel le quarré de la compoſée BAC eſt plus grand que le quarré de BC à raiſon donnée au triangle ABC.

SCHOLIE.

† *L'ancien Interprete pretendant enſeigner à conſtruire l'angle DEB égal à l'angle ADC, dit qu'on faſſe ſur la ligne droite BD, & au poinct D, l'angle BDE égal à*

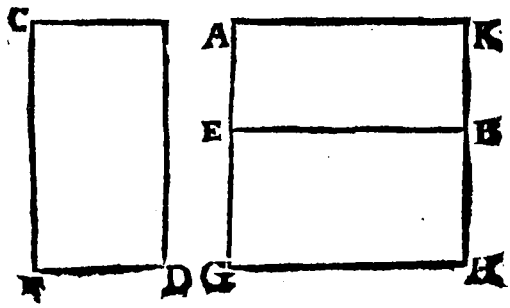
l'angle BCD, & qu'on tire les lignes BC, DE jusques à ce qu'elles s'entrecouppent en E : tellement qu'il suppose l'angle BCD être donné, & il ne l'est pas.

Le même Interprete enseigne puis aprés comment on peut universellement d'un poinct donné mener à une ligne droite donnée par position une ligne droite faisant angle égal à un angle donné, mais nous delaissons aussi ce moyen là pource que nous en avons enseigné un autre beaucoup plus bref & aisé au 44. de nos Probl. Geometriques. Car par exemple, voulant du poinct donné D mener à la ligne BC donnée par position une ligne droite faisant angle égal à l'angle donné ADC, ainsi qu'il est icy requis ; il n'y a qu'à prendre en icelle BC quelconque poinct K, & à iceluy faire l'angle CKL égal à l'angle donné ADC : Que si la ligne KL rencontre le poinct D, elle sera la ligne requise, mais ne le rencontrant pas, soit menée d'iceluy poinct D la ligne DE parallele à icelle KL couppant BC prolongé en E, & l'angle DEC sera égal au donné ADC. Car sur les deux lignes paralleles LK, DE tombe la ligne BE, & partant l'angle DEC i est égal à l'angle LKC, qui a été fait égal au donné ADC; & par consequent iceluy DEC est aussi égal à ADC. i 29. 1.

PROP. LXVIII.

Si deux parallelogrammes équiangles ont entr'eux une raison donnée, & qu'un côté ait aussi une raison donnée à un côté ; l'autre côté aura pareillement une raison donnée à l'autre côté.

Soient deux parallelogrammes équiangles AB, CD ayans entr'eux une raison donnée, & qu'un côté ait à un côté une raison dõ-



née, & ſoit la raiſon de BE à FD donnée : Je dis que la raiſon de AE à FC eſt auſſi donnée.

Car à la ligne droite EB ſoit appliqué le parallelogramme EH égal à iceluy CD, & conſtitué de ſorte que AE & EG faſſent une ligne droite : † donc KB, BH feront auſſi une ligne droite. Et d'autant que la raiſon de AB à CD eſt donnée, & que EH eſt égal à iceluy CD ; la raiſon de AB à EH eſt donnée ; & partant la raiſon de AE à EG [l] eſt auſſi donnée. Vû donc que EH eſt égal & équiangle à CD, comme [m] EB à FD, ainſi FC à EG. Mais la raiſon de EB à FD eſt donnée : donc auſſi la raiſon de FC à EG eſt donnée. Mais la raiſon de AE à la même EG eſt auſſi donnée : donc la raiſon de AE à FC eſt donnée.

l 11. 6.

m 14. 6.

SCHOLIE.

† *Euclide ayant poſé AE, EG directement en une ſeule ligne droite, conclud auſſi-toſt que KB & BH feront auſſi une ligne droite, mais nous le demontrerons ainſi. D'autant que les lignes droites AE, EG ſont poſées directement les angles AEB, BEG, [a] ſont égaux à deux droits. Et puis que AB eſt un parallelogramme, les lignes AK, EB ſont paralleles, ſur leſquelles tombe la ligne AE, & partant les deux angles interieurs A, BEA [b] ſont auſſi égaux à deux droits ; & ôtant l'angle commun BEA, demeurera l'angle A égal à l'angle BEG, & conſequemment leurs oppoſez EBK & H ſont auſſi égaux entr'eux. Derechef, puis que BG eſt un parallelogramme les deux lignes EE, HG ſont paralleles ſur leſquelles tombe BH : & partant les deux angles interieurs H, EBH [b] ſont égaux à deux droits. Mais il a été demontré que H eſt égal à EBK : donc les deux angles EBK, EBH ſont auſſi égaux à deux droits ; & partant [c] les deux lignes KB, BH ſe rencontrent directement comme ledit Euclide.*

a 13. 1.

b 29. 1.

c 14. 1.

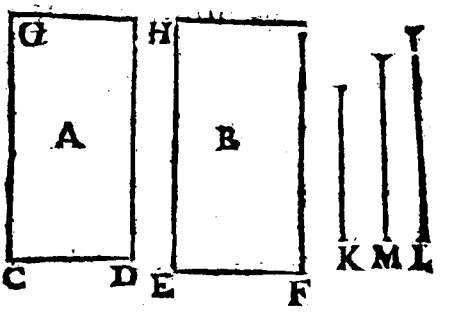
AVTREMENT.

Soit expoſée la ligne droite donnée k : & puis que la raiſon de A a B eſt donnée, ſoit faite la même de K à L : donc la raiſon de K à L eſt auſſi donnée. Mais K eſt donnée : donc [n] L eſt auſſi donnée. Derechef,

n 2. *pr.*

puis que la raiſon de CD à EF eſt donnée ſoit faite la même de K à M : donc la raiſon de K à M eſt donnée. Mais K eſt donnée : donc ○ M eſt auſſi donnée: & partant la raiſon de L à M eſt donnée. Or d'autant que A eſt équiangle à B ℙ la raiſon d'iceluy A à B, eſt compoſée de celle des côtez, c'eſt-à-dire de CD à EF, & de CG à EH. Mais auſſi la raiſon de K à L eſt compoſée de K à M, & de M à L : donc la raiſon compoſée de CD à EF, & de CG à EH, eſt la même que la compoſée de K à M, & de M à L. (la raiſon de K à L étant la même que de A à B.) Mais la raiſon de CD à EF eſt la même que de K à M : donc l'autre raiſon de CG à EH eſt auſſi la même que de M à L. Mais icelle raiſon de M à L eſt donnée : donc auſſi la raiſon de CG à EH eſt donnée.

○ 1. *pr.*

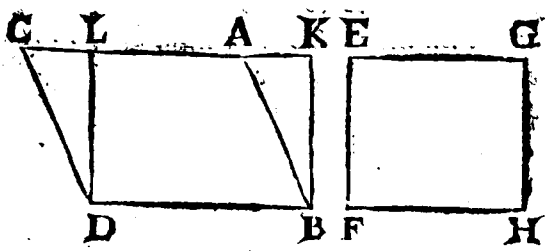


P 23. 6.

PROP. LXIX.

Si deux parallelogrammes ayans les angles donnez, ont entr'eux une raiſon donnée, & qu'un côté ait auſſi une raiſon donnée à un côté ; pareillement l'autre côté aura une raiſon donnée à l'autre côté.

Que les deux parallelogr. CB, EH ayãs les angles aux poincts D & F donnez, ayẽt entr'eux une raiſon donnée, &



que la raiſon de DB à FH ſoit auſſi donnée : Je dis que la raiſon de AB à EF eſt donnée.

Car ſi CB eſt équiangle à HE, il eſt manifeſte par la prec. prop. Mais s'il n'eſt équiangle, ſoit conſtitué ſur la ligne droite DB, & au poinct B donné en icelle l'angle DBK égal à l'angle EFH, & ſoit achevé le parallelogramme DK. D'autant que chacun des angles BKL, BAK eſt donné, † l'autre angle KBA,
r 40.p. eſt donné : Parquoy le triangle r ABK eſt donné par eſpece ; & partant la raiſon de AB à BK eſt donnée. Mais la raiſon de CB à EH eſt ſuppoſée donnée, &
s 35.p. s CB eſt égal à DK : donc la raiſon de DK à EH eſt donnée. Et pource que DK eſt équiangle à EH, & la raiſon d'iceluy DK à EH eſt donnée, comme auſſi
t 68.p. celle de DB à FH ; t la raiſon de BK à FE eſt donnée. Mais la raiſon d'icelle BK à BA eſt auſſi donnée ; donc x la raiſon de AB à FE eſt donnée.

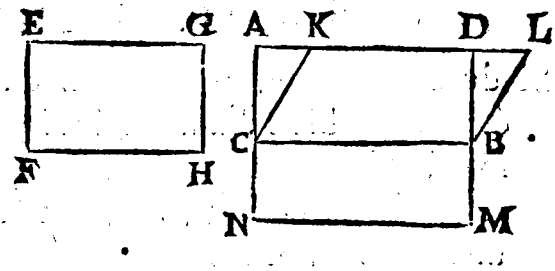
SCHOLIE.

† *Euclide ſuppoſe icy qu'un parallelogramme ayant un angle donné, tous les autres angles ſont auſſi donnez : & tant l'ancien Interprete que le ſieur Hardy en déduiſent les raiſons, qui font que l'angle F étant donné, l'autre angle E ſera auſſi donné, étant le reſte de deux droits, pource que ſur les lignes droites paralleles EG, FH tombe la ligne*
x 29.1. *EF, qui fait x les deux angles interieurs de meſme part F & E égaux à deux droits : Mais à iceux angles ſont égaux*
y 34.1. *y les oppoſez G & H, & partant ils ſont auſſi donnez.*

Dont s'enſuit que les angles BDC & F eſtans donnez par l'hypotheſe, tous les autres angles des deux parallelogrammes CB, EH ſont auſſi donnez : partant l'angle DBK ayant eſté fait égal à l'angle F, l'angle K ſera égal à l'angle E, & donné comme iceluy : Mais l'angle BAL, qui eſt oppoſé au donné BDC eſt auſſi donné ; & partant BAK qui eſt le reſte de deux droits ſera auſſi donné, tellement qu'au triangle ABK les deux angles BAK & BKA ſont donnez, ainſi qu'Euclide le dit icy.

PROP. LXX.

Si de deux parallelogrammes, les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'autour des inégaux, toutesfois donnez, ont entr'eux une raiſon donnée; auſſi les mêmes parallelogrammes auront entr'eux une raiſon donnée.



Soient deux parallelogr. AB, EH deſquels les côtez d'autour les angles égaux des poincts F, C, ou d'autour des inégaux, toutefois donnez ayent entr'eux une raiſon donnée, c'eſt-à-dire que la raiſon de AC à EF ſoit donnée, & auſſi celle de CB à FH: Je dis que la raiſon de AB à EH eſt auſſi donnée.

Car ſoit *A*B équiangle à EH, & ſur la ligne droite CB ſoit appliqué le parallelogramme CM égal au parallelogramme EH, tellement que AC ſoit directement à CN, & par conſequent D*B* ſera directement [o] avec BM. D'autant donc que CM eſt équiangle & égal à EH, les côtez d'autour les angles égaux ſeront reciproquement [z] proportionnaux: Parquoy comme BC à HF, ainſi FE à NC. Mais la raiſon de *B*C à HF eſt donnée: donc la raiſon de FE à NC eſt auſſi donnée. Mais la raiſon de AC à la meſme EF eſt donnée: donc [a] la raiſon de AC à NC eſt auſſi donnée. Parquoy la raiſon de *AB* à CM eſt donnée: (car c'eſt la meſme [b] que de AC à CN.) Mais CM eſt égal à EH: donc la raiſon de AB à EH eſt donnée.

[o] *ſch.* 68. *p.*
[z] 14. 6.
[a] 8. *p.*
[b] 1. 6.

Maintenant, AB ne ſoit équiangle à EH, & ſur

la ligne droite CB, & au poinct C donné en icelle soit constitué l'angle BCK égal à l'angle donné F, & soit achevé le parallelogramme CL. D'autant que l'angle ACB est donné, & l'angle BCK aussi donné, le reste ACK est donné : donc le triangle ACK c est donné par espece ; & partant la raison de AC à CK est donnée : Mais la raison de AC à EF est aussi donnée : donc la raison de CK à EF est donnée. Mais la raison de BC à HF est aussi donnée, & l'angle BCK est égal à l'angle F : donc (par la premiere partie de cette prop.) la raison de CL à EH est donnée. Mais à iceluy CL est égal AB : donc la raison de AB à EH est donnée.

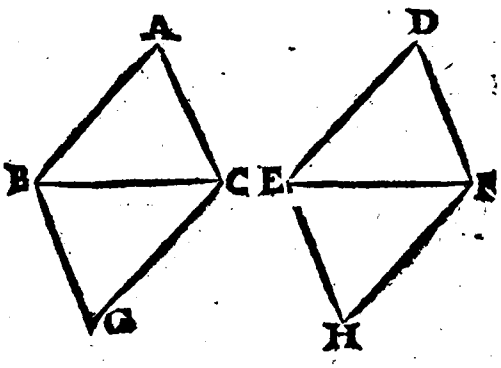
c 40. p.

PROP. LXXI.

Si de deux triangles les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'autour des inégaux, toutefois donnez, ont entr'eux une raison donnée; les mêmes triangles auront aussi entr'eux une raison donnée.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels les côtez d'autour les angles A & D égaux, ou bien inégaux, toutesfois donnez ayent entr'eux une raison donnée, c'est à sçavoir que la raison de AB à DE soit donnée, & aussi celle de AC à DF : Je dis que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée.

Car soient accomplis les parallelogrammes AG, DH. Donc puis que des deux parallelogrammes AG, DH, les côtez d'autour les angles égaux A & D, ou bien inégaux & toutesfois donnez,



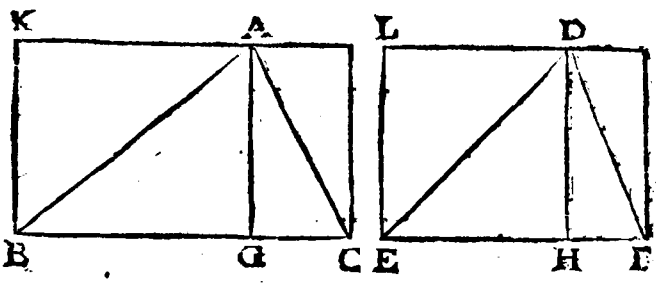
ont entr'eux raiſon donnée; [d] la raiſon d'iceluy AG à DH eſt donnée : Mais le triangle ABC eſt moitié de AG, [e] & le triangle DEF moitié de DH : donc la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnée.

[d] 70. 5.
[e] 34. 1.

PROP. LXXII.

Si de deux triangles, les baſes ſont en raiſon donnée, & que des angles ſoient tirées à icelles baſes des lignes droites faiſans angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, leſquelles ayent entr'elles raiſon donnée: iceux triangles auront auſſi entr'eux raiſon donnée.

Soient deux triangles ABC, DEF, & ſoient tirées aux baſes les lignes droites AG, DH, qui faſſent les angles AGC, DHF égaux, ou bien inégaux mais toutesfois donnez ; & ſoit la raiſon de BC à EF donnée ; mais la raiſon de AG à DH auſſi donnée : Je dis que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnée.



Car ſoient accomplis les parallelogrammes KC, LF, d'autant que les angles AGC, DHF ſont égaux, ou bien inégaux & toutesfois donnez, & que l'angle AGC [f] eſt égal à l'angle KBC, mais l'angle DHF à l'angle LEF : les angles aux points B, E ſont égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez. Et pource que la raiſon de AG à DH eſt donnée, & AG eſt

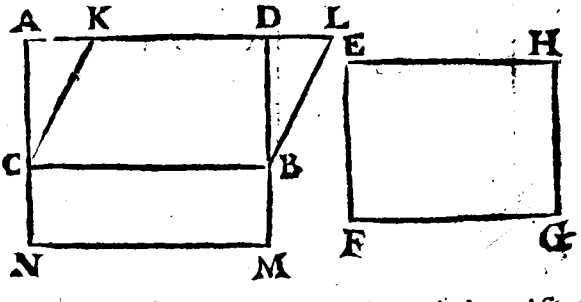
[f] 29. 1.

égale à KB mais DH à LE : auſſi la raiſon de K
LE eſt donnée. Mais la raiſon de BC à EF eſt
donnée, & les angles aux points B, E ſont égaux
f 70.p. bien inégaux, & toutesfois donnez : donc g la raiſ
du parallelogramme KC au parallelogramme LF e
donnée : & partant la raiſon du triangle ABC a
triangle DEF eſt donnée, attendu qu'iceux trian-
h 41.1. gles h ſont moitié des parallelogrammes.

PROP. LXXIII.

Si de deux parallelogrammes les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'alentour des inégaux, mais toutesfois donnez, ſont tellement entr'eux, que comme le côté du premier eſt au côté du ſecond, ainſi l'autre côté du ſecond, ſoit à quelque autre ligne droite, mais que l'autre côté du premier ait auſſi à la même ligne droite une raiſon donnée : iceux parallelogrammes auront auſſi entr'eux une raiſon donnée.

Soient deux parallelogrammes *AB*, EG, deſquels les coſtez d'autour les angles des points C, F égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, ſoient tellemẽt entr'eux que cõme CB à FG, ainſi EF à quelque autre ligne droite CN, mais la raiſon de AC à icelle CN ſoit donnée : Je dis que la raiſon du parallelogramme AB au parallelogramme EG eſt donnée.



Gar le parallelogramme AB ſoit premierement équiangle à EG, & ayant poſé CN directement à

AC, soit achevé le parallelogramme CM. D'autant que comme CB ou NM son égale est à FG, ainsi EE à CN, & que les angles N & F sont égaux; (car N est égal à l'angle ACB qu'on a posé est égal à F) les parallelogrammes CM, EG sont égaux. Mais comme AC à CN ainsi le parallelogramme AB à CM ou EG; partant puis que la raison de AC à CN est donnée; aussi la raison de AB à EG est donnée. i 14.6. 1 1. 6.

Maintenant, le parallelogramme AB ne soit équiangle au parallelogramme EG, & soit constitué à la ligne droite CB, & au poinct C donné en icelle, l'angle BCK égal à l'angle EFG, & soit parachevé le parallelogramme CL. Donc puis que chacun des angles ACB, KCB est donné, le reste ACK est aussi donné. Mais m l'angle CAK est donné, comme aussi le restant AKC: donc n le triangle ACK est donné par espece; & partant la raison de AC à CK est donnée. Mais la raison d'icelle AC à CN est aussi donnée: donc o la raison de CK à CN est donnée. Et puis que comme CB à FG, ainsi EF a la ligne droite CN, à laquelle l'autre côté KC a raison donnée, & que l'angle BCK est égal à l'angle F, la raison du parallelogramme CL au parallelogramme EG est donnée, (par la premiere partie de cette prop.) Mais le parallelogramme CL est égal au parallelogramme AB: donc la raison du parallelogramme AB au parallelogramme EG est donnée. m *sch.* 69. *pr.* n 40. *p.* o 8. *p.*

PROP. LXXIV.

Si deux parallelogrammes en angles égaux, ou bien en inégaux, mais toutesfois donnez ont une raison donnée; comme un côté du premier sera à un côté du second, ainsi l'autre côté du second sera à celle à laquelle l'autre côté du premier à raison donnée.

Que les deux parallelogrammes AB, EG ayans aux poincts C, F angles égaux ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, soient entr'eux en raison donnée:

Je dis que comme CB à FG, ainsi EF à celle que A a raison donnée.

Car ou AB est équiangle ou non : soit premiere ment équiangle, & à la ligne droite BC soit appliq le parallelogramme CM égal à EG, & tellemen posé que AC, CN soient directement : donc p DE BM seront aussi directement. Et puis que la raiso de AB à EG est donnée, & que CM est égal à EG la raison de AB à CM est aussi donnée : & partan la raison de AC à CN est donnée : (attendu que A q 1. 6. est à CM q comme AC à CN.) Et pource que CM r 14. 6 est égal & équiangle à EG : les côtez d'autour le angles égaux d'iceux CM, EG r sont reciproquemen proportionnaux ; & partant comme CB à FG, ainsi EF à CN : Mais la raison de AC à CN est donnée donc comme CB est à FG, ainsi EF est à celle que AC a raison donnée. (*Voyez la figure precedente.*)

p *sch.* 68. *p.*

Maintenant, AB ne soit équiangle à EG, & soit constitué à la ligne droite CB & au point C donné en icelle, l'angle BCK égal à EFG, & soit achevé le parallelogramme CL. Donc puis que la raison de AB s 36. 1. à EG est donnée, & s que AB est égal à CL ; aussi la raison de CL à EG est donnée & l'angle, BCK est égal à l'angle F : & partant CL t est équiangle à EG. Donc (par la premiere partie de cette prop) comme CB à FG, ainsi EF à celle à laquelle CK a raison donnée. Mais la raison de AC à CK est donnée : (ainsi qu'il appert par ce qui a esté demonstré à la derniere partie de la prec. prop.) donc comme CB à FG ainsi EF à celle que AC a raison donnée.

t *sch.* 69. *p.*

PROP. LXXV.

Si deux triangles en angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux une raison donnée ; comme le côté du premier sera au côté du second, ainsi l'autre côté du second sera à cette ligne droite-là à laquelle l'autre côté du premier a raison donnée.

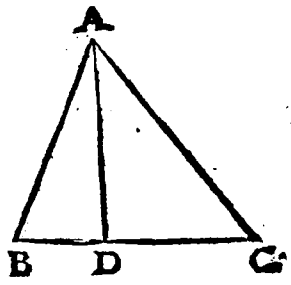
Soient deux triangles ABC, DEF, qui ayent entr'eux une raiſon donnée, & aux points *A*, D, ſoient angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez : Je dis que comme AB eſt à DE, ainſi DF eſt à celle que AC a raiſon donnée.

(*Voyez la figure de la page 88. cy-devant.*)

Car ſoient accomplis les parallelogrammes AG, DH. D'autant que la raiſon du triangle ABC au triangle DEF eſt donnée, auſſi la raiſon du parallelogramme AG au parallelogramme DH eſt donnée. Veu donc que les deux parallelogrammes AG, DH en angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux une raiſon donnée ; comme [x] AB eſt à DE, ainſi DF à celle à laquelle AC a raiſon donnée. [x] 74. *p.*

PROP. LXXVI.

Si du ſommet d'un triangle donné par eſpece eſt tirée à la baſe une ligne perpendiculaire, elle aura à la baſe une raiſon donnée.



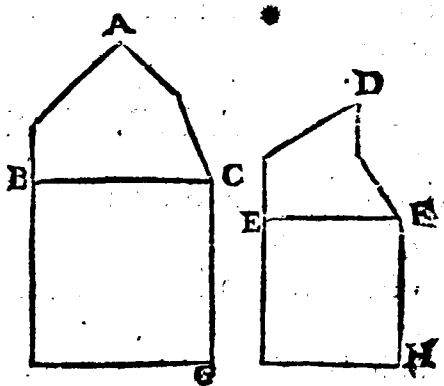
Soit le triangle ABC donné par eſpece, & du point A ſoit tirée à la baſe BC la perpendiculaire AD : Je dis que la raiſon d'icelle AD à BC eſt donnée.

Car puis que le triangle ABC eſt donné par eſpece, la raiſon de AB à BC eſt donnée, & l'angle B auſſi donné. Mais l'angle ADB eſt donné : Donc l'autre angle BAD eſt donné. Parquoy [a] le triangle ABD eſt donné par eſpece ; & partant la raiſon de AB à AD eſt donnée. Mais la raiſon de AB à BC eſt donnée : Donc [b] la raiſon de AD à BC eſt donnée. [a] 40. *p.* [b] 8. *pr.*

PROP. LXXVII.

Si deux figures données par eſpeces ont entr'elles une raiſon donnée ; auſſi ſera donnée la raiſon duquel on voudra des côtez de l'une d'icelles figures auquel on voudra des côtez de l'autre.

Que les deux figures ABC, DEF données par eſpece ayent entr'elles une raiſon donnée : Je dis que lequel que ce ſoit des coſtez de ABC a raiſon donnée auquel que ce ſoit des côtez DEF.



Car ſur les lignes droites BC, EF ſoient décrits les quarrez BG, EH. D'autant que ſur une même ligne droite BC ſont décrites deux figures ABC, BG données par eſpece [c] la raiſon d'icelle ABC à BG eſt donnée. Semblablement la raiſon de DEF à EH eſt donnée. Et puis que la raiſon de ABC à DEF eſt donnée, & auſſi celle de la même figure ABC à BG ; & encore la raiſon de DEF à EH : [d] la raiſon de BG à EH eſt donnée ; & partant la raiſon de BC à EF eſt auſſi donnée.

[c] 49. p.

[d] 8. pr.

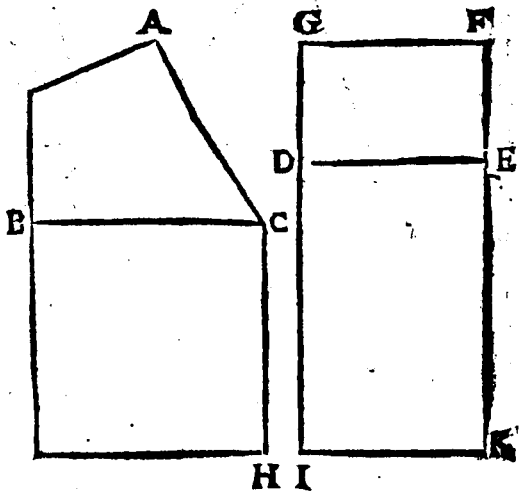
PROP. LXXVIII.

Si une figure donnée a raiſon donnée à quelque rectangle, & qu'un côté ait raiſon donnée à un côté ; le rectangle eſt donné par eſpece.

Que la figure donnée ABC ait raiſon donnée au rectangle DF, & ſoit donnée la raiſon de BC à DE : Je dis que le rectangle DF eſt donné par eſpece.

Car ſur la ligne droite BC ſoit décrit le quarré

BH, & à la ligne droite DE soit appliqué le parallelogramme DK égal à BH, de telle sorte que GD, DI soient posées directement [e], & par consequent FE, EK aussi directement. Donc puis que sur une même ligne droite BC sont décrits les deux rectilignes ABC, BH donnez par espece, [f] la raison de ABC à BH est donnée. Mais la raison d'icelle ABC à DF est aussi donnée : Donc [d] la raison de BH à DF est donnée. Mais BH est égal à DK : Donc la raison de DK à DF est aussi donnée. Et puis que BH est égal & équiangle à DK, l'un & l'autre étant rectangle; [g] les côtez d'iceux sont reciproquement proportionnaux, & comme BC à DE, ainsi DI à CH. Mais par l'hypothese la raison de BC à DE est donnée : Donc aussi la raison de DI à CH est donnée. Mais la raison de DI à DG est aussi donnée : (car DI est à DG [h] comme DK à DF) donc [i] la raison de DG à CH est donnée. Mais CH est égale à BC, attendu que BH est quarré : Donc la raison de BC à DG est donnée. Mais la raison de la même BC à DE est aussi donnée : Donc [i] la raison de DE à DG est donnée, & l'angle à D est droit : Donc [l] DE est donné par espece.

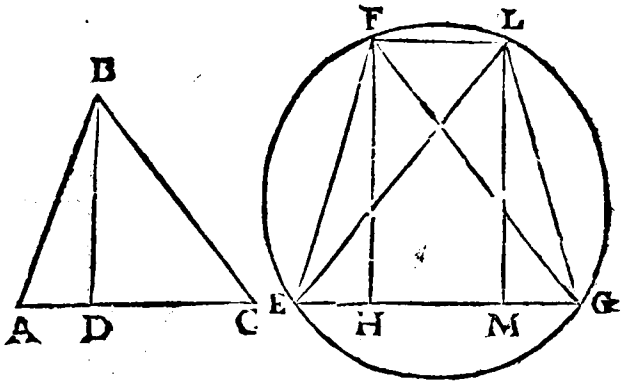


e *sch. 68. pr.*
f *49. p.*
g *14. 6.*
h *1. 6.*
i *8. pr.*
l *sch. 61. pr.*

PROP. LXXIX.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, mais des angles égaux soient tirées des perpendiculaires aux bases, & que comme la

baſe du premier triangle eſt à la perpendiculaire, ainſi auſſi la baſe de l'autre ſoit à la perpendiculaire: iceux triangles ſont équiangles.



Soient les triangles A B C, E F G, ayans les angles aux poincts B, F égaux, & d'iceux poincts B & F ſoient tirées les perpendiculaires BD, FH; & comme AC à BD, ainſi EG ſoit à FH: Je dis que le triangle A B C eſt équiangle au triangle E F G.

Car allentour du triangle EFG ſoit décrit le cercle EFLG, puis ſur la ligne droite EG, & au poinct E donné en icelle ſoit fait l'angle GEL égal à l'angle C, & ſoient tirées FL, LG, & la perpendiculaire LM. Veu donc que l'angle GEL eſt égal à l'angle C, & l'angle
m 21.3. ELG eſt égal à l'angle EFG, [m] iceux étãs en un même ſegment de cercle: le troiſiéme angle EGL eſt égal au troiſiéme angle A. Parquoy le triangle ABC eſt ſemblable au triangle ELG, & ſont tirées les perpendiculaires BD, LM: Donc † comme AC à BD, ainſi EG à LM. Mais par l'hypoteſe comme AC à BD, ainſi
n 7. 5. EG à FH: Donc [n] LM eſt égale à FH. Mais icelle
o 28. 1. LM eſt [o] parallele à FH: Donc [p] FL eſt auſſi paralle-
p 33. 1. le à EG; & partant l'angle FLE [q] eſt égal à l'angle
q 29. 1. LEG. Mais l'angle [r] eſt auſſi égal à iceluy angle LEG: & l'angle FLE à l'angle [m] FGE: Donc auſſi l'angle C eſt égal à l'angle FGE. Mais par l'hypoteſe l'angle ABC eſt égal à l'angle EFG: Dõc le troiſiéme angle BAC eſt égal au troiſiéme angle FEG. Parquoy le triangle ABC eſt équiangle au triangle EFG.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

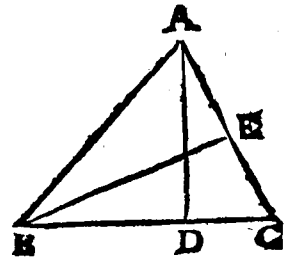
Or que comme AC à BD, ainſi EG ſoit à LM, le ſieur Hardy la demontré ainſi. D'autant que l'angle C eſt eſgal à l'angle GEL, & l'angle BDC à l'angle LME, chacun étant droit; l'autre angle CBD eſt eſgal à l'autre ELM: Donc r *comme EM à ML, ainſi CD à DB. Derechef, pource que l'angle ABC eſt eſgal à l'angle ELG, & l'angle CBD à l'angle ELM, le reſte ABD eſt eſgal au reſte MLG: mais l'angle ADB eſt auſſi eſgal à l'angle LMG, & partant le troiſieſme angle A eſt eſgal au troiſieſme LGM: Donc* r *comme AD à DB, ainſi GM à ML. Mais il a été demontré que comme CD à DB, ainſi EM à ML: Donc* s *comme AC à BD, ainſi EG à LM.*

r 4. 6.

s 24. 5.

PROP. LXXX.

Si un triangle a un angle donné, & que le rectangle ſous les côtez comprenans iceluy angle donné ait une raiſon donnée au quarré de l'autre côté; le triangle eſt donné par eſpece.



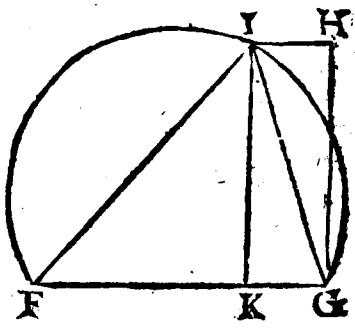
Soit le triangle ABC ayant l'angle A donné, & que le rectangle contenu ſous AB, AC ait raiſon donnée au quarré de la ligne droite BC: Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car des poincts A & B ſoient menées les perpendiculaires AD, BE. D'autant que l'angle BAE eſt donné, & auſſi l'angle AEB, le triangle ABE eſt donné t par eſpece: & partant la raiſon de AB à BE eſt donnée: Donc la raiſon du rectangle de AB, AC au rectangle de BE, AC eſt auſſi donnée. (Car c'eſt la même raiſon u que de AB à BE.) Mais le rectangle de AC, BE eſt égal au

t 40. p.

u 1. 6.

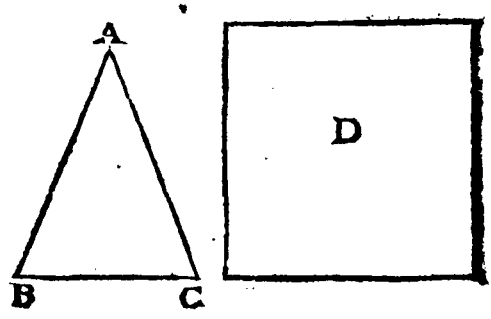
rectangle de BC, AD, pource que chacun d'ice
x 41. 1. rectangles eſt x double du triangle ABC : Donc
raiſon du rectangle de AB, AC au rectangle de
AD eſt auſſi donnée. Mais la raiſon du rectangl
y 8. *pr.* AB, AC au quarré de BC eſt donnée : Donc y a
la raiſon du rectangle de BC, AD au quarré de
eſt donnée ; & partant la raiſon de la ligne droite
à la ligne droite AD eſt donnée. (Pource que
rectangle eſt au quarré, comme AD à BC.) Main-
tenant ſoit expoſée la ligne droite FG donnée pa
poſition & par grandeur, & ſur icelle ſoit décrit
ſegment de cercle FIG capable d'un angle égal
l'angle A. Et puis que iceluy angle A eſt donné
auſſi ſera donné l'angle au ſegment FIG ; & partan
z 8. *def.* z iceluy ſegment eſt donné par poſition. Du poinct
G ſoit érigée à angles droits ſur FG la ligne GH
a 4. *def.* laquelle a eſt donc donnée par poſition. Soit fait que comme BC eſt à AD, ainſi FG ſoit à GH : & puis que la raiſon de BC à AD eſt donnée, auſſi le ſera celle de FG à GH. Mais FG eſt donnée : Donc
b 2. *pr.* b GH eſt donnée par grandeur. Mais elle eſt auſſi donnée par poſition, & le poinct G eſt



c 27. *p.* donné : Donc le poinct H eſt c auſſi donné. Maintenant par le poinct H ſoit menée HI parallele à
d 28. *p.* FG : & icelle ſera donnée d par poſition. Mais le ſegment de cercle FIG eſt auſſi donné par poſition :
e 25. *p.* Donc e le poinct I eſt donné. Soient tirées les lignes droites IF, IG, & la perpendiculaire IK : Donc IK eſt donnée par poſition. Mais le poinct I eſt donné, comme auſſi chacun des poincts F, G : Donc
f 26. *p.* f chacune des lignes, FG, FI, IG eſt donnée par
g 39. *p.* poſition & par grandeur. Parquoy g le triangle FIG eſt donné par eſpece. Et puis que comme BC à AE,
h 34. 1. ainſi FG à GH, & h qu'à icelle GH eſt égale IK,

comme BC à EA, ainſi FG à IK, & l'angle A eſt égal à l'angle FIG : Donc [i] le triangle ABC eſt équiangle au triangle FIG. Mais iceluy FIG eſt donné par eſpece : Donc auſſi le triangle ABC eſt donné par eſpece. i 79. pr.

AVTREMENT.



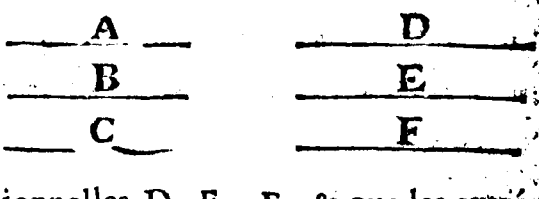
Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle A donné, & la raiſon du rectangle ſous AB, AC au quarré de BC ſoit donnée : Je dis que le triangle ABC eſt donné par eſpece.

Car puis que l'angle A eſt donné, cet eſpace là duquel le quarré de la compoſée BAC eſt plus grand que le quarré de BC [l] a raiſon donnée au triangle ABC : Or cet eſpace là ſoit D. Doné la raiſon d'iceluy D au triangle ABC eſt donnée. Mais la raiſon d'iceluy triangle ABC au rectangle de AB, AC eſt donnée, [m] vû que l'angle A eſt donné. Donc [n] la raiſon de l'eſpace D au rectangle de AB, AC eſt donnée. Mais la raiſon d'iceluy rectangle de AB, AC au quarré de BC eſt auſſi donnée : Donc [n] la raiſon de l'eſpace D au quarré de BC eſt donnée : Parquoy en compoſant, [o] la raiſon de l'eſpace D avec le quarré de BC à iceluy quarré de BC eſt donnée : Donc la raiſon du quarré de la compoſée BAC au quarré de BC eſt donnée ; (pource que l'eſpace D avec le quarré de BC eſt égal à iceluy quarré de la compoſée BAC) & partant [p] la raiſon d'icelle compoſée BAC à BC eſt donnée. Mais l'angle A eſt auſſi donnée : Donc [q] le triangle ABC eſt donné par eſpece.

l 67. pr.
m 66. pr.
n 8. pr.
o 6. pr.
p *ſch.* 52. pr.
q 46. pr.

PROP. LXXXI.

Si de trois lignes droites proportionnelles trois lignes droites proportionnelles, les extrémes ſont en raiſon donnée, auſſi les moyennes ſeront en raiſon donnée : Et ſi un extréme a raiſon donnée à un extréme, & la moyenne à la moyenne ; l'autre aura auſſi à l'autre une raiſon donnée.



Que les trois lignes droites A, B, C, ſoient proportionnelles à trois lignes droites proportionnelles D, E, F, & que les extrémes ſoient en raiſon donnée, c'eſt à ſçavoir que A ſoit à D, & C à F en raiſon donnée : Je dis que la raiſon de B à E eſt donnée.

Car d'autant que la raiſon de A à D, & de C à F eſt donnée le rectangle de A, D [r] aura raiſon donnée au rectangle de C, F. Mais le rectangle de A, D, eſt égal [f] au quarré de B; & le rectangle de C, F au quarré de E : Donc la raiſon du quarré de B au quarré de E eſt donnée, & partant [p] la raiſon de la ligne B à la ligne E eſt auſſi donnée.

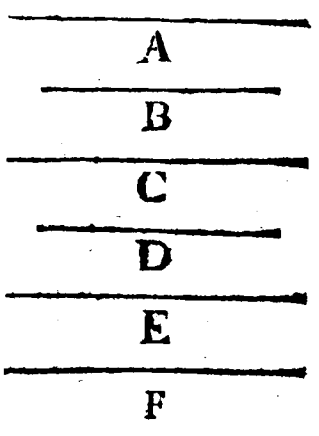
[r] 70 p.
[f] 17. 6.
[p] ſch. 52. pr.

Derechef, ſoit donnée la raiſon de A à D, & de B à E : Je dis que la raiſon de C à F eſt auſſi donnée. Car puis que la raiſon de A à D, & de B à E eſt donnée ; auſſi la raiſon du quarré de B [t] au quarré de E eſt donnée. Mais le quarré de B eſt égal au rectangle de A, C, & le quarré de E au rectangle de D, F : Donc la raiſon du rectangle de A, C au rectangle de D, F eſt donnée. Mais la raiſon d'un côté A à un côté D eſt donnée : Donc [u] la raiſon de l'autre côté C à l'autre côté F eſt auſſi donnée.

[t] 50. p.
[u] 68. p.

PROP. LXXXII.

S'il y a quatre lignes droites proportionnelles, comme la premiere ſera à celle à laquelle la ſeconde a raiſon donnée, ainſi la tierce ſera à celle à laquelle la quatriéme a raiſon donnée.



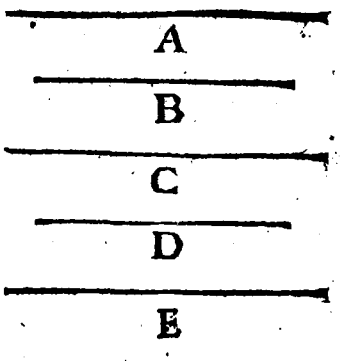
Soient quatre lignes droites proportionnelles A, *B*, C, D; & ſoit A à B, comme C à D: Je dis que comme A eſt à celle que B a raiſon donnée, ainſi C eſt à icelle à laquelle D a raiſon donnée.

Car E ſoit celle à laquelle B a raiſon donnée; & ſoit fait que comme B eſt à E ainſi D ſoit à F. Or la raiſon de B à E eſt donnée; Donc eſt auſſi donnée la raiſon de D à F. Et puis que comme A à B, ainſi C à D, & en outre comme B à E ainſi D à F; par raiſon égale comme A à E, ainſi C à F. Mais E eſt celle à laquelle B a raiſon donnée, & F celle à laquelle D a auſſi raiſon donnée: Donc comme A eſt à celle à laquelle *B* a raiſon donnée, ainſi C eſt à celle à laquelle D a raiſon donnée.

PROP. LXXXIII.

Si quatre lignes droites ſont tellement entr'elles, que de trois d'icelles qu'elles ſoient, & d'une quatriéme priſe proportionnelle à laquelle celle qui reſte des quatre lignes ait une raiſon donnée, ſe faſſent quatre lignes droites proportionnelles: comme la quatriéme ſera à la tierce, ainſi la ſeconde ſera à celle à laquelle la premiere a raiſon donnée.

Soient quatre lignes droites A, *B*, C, D, telles qu'ayant pris E quatriéme proportionnelle à trois quelconques d'icelles A, *B*, C, à laquelle D a raiſon donnée, icelles quatre lignes A, *B*, C, E ſont proportionnelles : Je dis que comme D à C, ainſi B à celle que A à raiſon donnée.

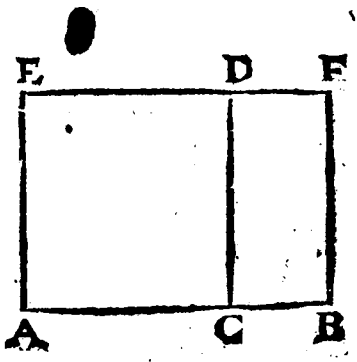


Car d'autant que comme A à B, ainſi C à E, le [a] 16.6. rectangle contenu ſous A, E eſt [a] égal à celuy compris ſous B, C. Et puis que la raiſon de D à E eſt donnée, auſſi ſera donnée la raiſon du rectangle de [b] 1. 6. A, D au rectangle de A, E. (car [b] c'eſt la même raiſon que de D à E.) Mais le rectangle de A, E, eſt égal à celuy de B, C : Donc la raiſon du rectangle de A, D à celuy de *B*, C eſt donnée. Parquoy [d] 74.p. [d] comme D eſt à C, ainſi *B* à celle à laquelle A a une raiſon donnée.

PROP. LXXXIV.

Si deux lignes droites comprenant un eſpace donné en angle donné, & que l'une ſoit plus grande que l'autre d'une donnée, auſſi chacune d'icelles ſera donnée.

Que les deux lignes droites AB, AE comprenant un eſpace donné AF en angle donné BAE, & ſoit AB plus grande que AE d'une donnée CB : Je dis que chacune des lignes AB, AE, eſt donnée.



Car puis que AB eſt plus grande que AE de la donnée CB, le reſte AC eſt

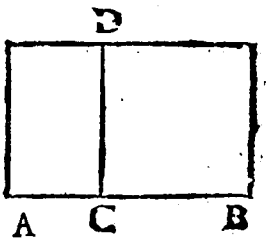
égal à AE: Soit accomply le parallelogramme AD. Donc puis que AE eſt égale à AC, la raiſon de AE à AC eſt donnée; & l'angle A eſt auſſi donné: Donc [e] AD eſt donné par eſpece. Parquoy l'eſpace donné AF eſt appliqué à la ligne droite donnée CB, excedant de la figure AD donnée par eſpece; & partant [f] la largeur de l'excez eſt donnée: Donc AC eſt donnée. Mais CB eſt auſſi donnée: Donc la toute AB eſt donnée. Mais AE eſt auſſi donnée: Donc chacune des lignes droites AB, AE eſt donnée.

e *ſch. 61. pr.*

f *59. p.*

PROP. LXXXV.

Si deux lignes droites comprenant un eſpace donné en angle donné, la compoſée d'icelles eſt donnée; auſſi chacune d'icelles ſera donnée.



Soient deux lignes droites AC, CD comprenant un eſpace donné AD en angle donné ACD, & la compoſée d'icelles lignes ACD ſoit donnée: Je dis que chacune deſdites lignes AC, CD eſt donnée.

Car ſoit prolongée AC, juſques au poinct B, & poſé CB égale à CD, puis par le poinct B ſoit menée BF parallele à CD, & achevé le parallelogramme CF. Veu donc que CB eſt égale à CD, & l'angle DCB eſt donné; car celuy qui eſt de ſuite eſt le donné; & partant [e] le parallelogramme DB eſt donné par eſpece: & en outre puis que la compoſée ACD eſt donnée; & CB eſt égale à CD; auſſi AB eſt donnée. Par ainſi à la ligne droite AB eſt appliqué l'eſpace donné AD defaillant de la figure DB donnée par eſpece; & partant [g] les largeurs du deffaut ſont données: Donc les lignes droites DC, CB ſont données. Mais la compoſée ACD eſt auſſi donnée: Donc [h] chacune des lignes AC, CD eſt donnée.

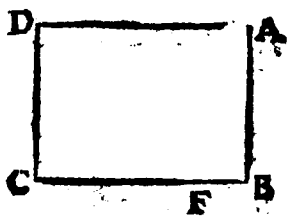
e *59. p.*

g *58. p.*

h *4. pr.*

PROP. LXXXVI.

Si deux lignes droites comprenant un espace donné en angle donné, le quarré de l'une est plus grand que le quarré de l'autre d'un donné, qu'en raison; aussi chacune d'icelles sera donnée.



Soient deux lignes droites AB, BC comprenant l'espace donné AC en angle donné ABC, & le quarré de la ligne BC soit plus grand que le quarré de AB d'un donné qu'en raison : Je dis que chacune des lignes AB, BC est donnée.

Car puis que le quarré de BC est plus grand que le quarré de AB d'un espace donné qu'en raison, soit osté le donné, c'est à sçavoir le rectangle sous CB, BE : Donc [i] la raison du reste, [d] qui est le rectangle sous BC, CE au quarré de AB est donnée. Et d'autant que le rectangle, † sous AB, BC est donné, & auſſi celuy de CB, BE; [m] leur raison est donnée. Mais comme le rectangle sous AB, BC au rectangle sous CB, EB, [n] ainsi AB à BE; & partant la raison de AB à BE est donnée : Parquoy est auſſi donnée la raison [o] du quarré de AB au quarré de BE. Mais la raison du quarré de AB au rectangle sous BC, CE est donnée: Donc [p] auſſi est donnée la raison du rectangle sous BC, CE au quarré de BE. Parquoy la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE au quarré de BE est donnée; & en composant, [q] la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE, avec le quarré de BE au quarré de BE est donnée. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE, avec le quarré de BE, [r] est le quarré de la composée BCE : Donc la raison du quarré de la composée BCE au quarré de BE est donnée; Parquoy [f] la raison de la composée de BC, CE à BE est donnée; & en composant, [q] la raison de la com-

i 11. d
d 2. 2.
m 1. p.
n 1. 6.
o 50. p.
p 8. pr.
q 6. pr.
r 8. 2.
f 54. p.

posée des lignes BC, CE, BE, c'est-à-dire le double de BC, à BE est donnée; & partant la raison de la seule BC à BE est aussi donnée. Mais comme BC à BE, [t] ainsi le rectangle sous BC, BE au quarré de BE: Donc la raison du rectangle sous BC, BE au quarré de BE est donnée. Mais le rectangle de BC, BE est donné: Donc [u] le quarré de BE est aussi donné, & consequemment la ligne BE est donnée. Parquoy BC est aussi donnée [v], puis que la raison de BE à BC est donnée. Mais l'espace AC est donné, & aussi l'angle B: Donc [x] AB est donnée. Parquoy chacune des lignes AB, BC est donnée.

[t] 1. 6.
[u] 2. pr.
[x] 57. p.

SCHOLIE.

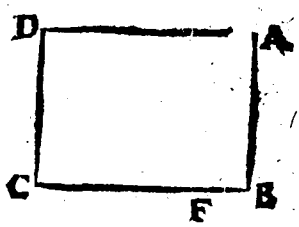
† *Au lieu de dire icy,* ce qui est sous, &c. *nous avons usé du mot* rectangle, *étant manifeste par la suite de cette demonstration que l'intention d'Euclide est telle, puis qu'il se sert en ladite demonstration des deux & huitiémes propositions du deuxiéme element: & aussi que l'espace ou parallelogramme donné n'étant rectangle, il y peut être reduit faisant sur BC, & au poinct de l'angle donné B, un angle droit CBA, tellement qu'on auroit deux parallelogrammes constituez sur une même base BC, & entre mesmes paralleles, ainsi qu'en la 69. prop. au moyen de laquelle se tireroit la conclusion de cette-cy.*

Cecy a aussi lieu à la proposition suivante.

PROP. LXXXVII.

Si deux lignes droites comprenant un espace donné en angle donné, le quarré de l'une est plus grand que le quarré de l'autre d'un donné; aussi chacune d'icelles sera donnée.

Soient deux lignes droites AB, BC, comprenant un espace donné AC en angle donné B, & le quarré de BC soit plus grand que le quarré de AB d'un donné: Je dis que chacune d'icelles AB, BC est donnée.



Car puis que le quarré de BC eſt plus grand que le quarré de AB d'un eſpace donné, ſoit ôté le donné, & ſoit le rectangle ſous BC, BE : Donc le reſte, [y] qui eſt le rectangle de BC, CE, eſt égal au quarré de AB. Et puis que le rectangle de BC, BE eſt donné, & auſſi l'eſpace ou rectangle AC ; la raiſon d'iceluy rectangle de BC, BE à AC eſt donnée. Mais comme [a] le rectangle de BC, BE au rectangle de AB, BC, ainſi BE à AB : Donc la raiſon de BE à AB eſt donnée ; & partant [b] eſt auſſi donnée la raiſon du quarré d'icelle BE au quarré de AB. Mais à iceluy quarré de AB eſt égal le rectangle de BC, CE : Donc la raiſon d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE eſt donnée ; & partant eſt auſſi donnée la raiſon du quadruple d'iceluy rectangle de BC, CE au quarré de BE. Et en compoſant, [c] la raiſon de quatre fois le rectangle de BC, CE avec le quarré de BE à iceluy quarré de BE eſt donnée. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE avec le quarré de BE [d] eſt le quarré de la compoſée BCE : Donc la raiſon du quarré d'icelle compoſée BCE au quarré de BE eſt auſſi donnée, & partant [e] la raiſon de la compoſée BCE à BE eſt donnée. Parquoy en compoſant, [f] eſt auſſi donnée la raiſon d'icelles BCE, EB, c'eſt-à-dire deux fois BC à BE : Donc la raiſon de la ſeule BC à BE eſt donnée. Mais la raiſon de la même BE à AB eſt auſſi donnée : Donc [g] la raiſon de AB à BC eſt donnée. Et puis que la raiſon de BC à BE eſt donnée, & que comme icelle BC à BE, ainſi le quarré de BC [h] au rectangle de BC, BE ; la raiſon du quarré de BC au rectangle de BC, BE eſt auſſi donnée. Mais iceluy rectangle de BC, BE eſt donné, car c'eſt ce qui a été ôté qui étoit donné : Donc le quarré de BC [h] eſt donné ; & partant eſt donnée la ligne BC. Mais la raiſon d'icelle BC à BA eſt donnée : Donc AB eſt auſſi donnée.

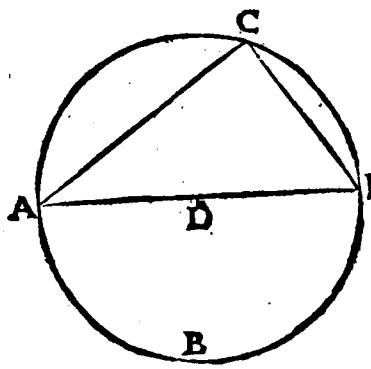
[y] 2. 2.
[a] 1. 6.
[b] 50. p.
[c] 6. pr.
[d] 8. 2.
[e] 54. p.
[f] 6. pr.
[g] 8. pr.
[h] 2. pr.

PROP. LXXXVIII.

Si en un cercle donné par grandeur est tirée une ligne droite laquelle oste un segment qui comprent un angle donné ; icelle ligne est donnée par grandeur.

Au cercle ABC donné par grandeur, soit tirée la ligne droite *AC* ostant le segment ABC qui comprent l'angle donné AEC : Je dis que la ligne AC est donnée par grandeur.

Car soit pris le centre du cercle D, tiré le diametre ADE, & joint EC. Donc l'angle ACE est donné, car [l] il est droit : Mais l'angle AEC est aussi donné ; & partant l'autre angle CAE est donné. Parquoy le triangle ACE [m] est donné par espece ; & partant la raison de EA à AC est donnée. Mais AE est donnée par grandeur, puis que le cercle ABC est donné par grandeur : Donc [n] *AC* est aussi donnée par grandeur.



[l] 31. 3.

[m] 40. *p.*

[n] 2. *pr.*

PROP. LXXXIX.

Si en un cercle donné par grandeur, est tirée une ligne droite donnée par grandeur ; elle ostera un segment comprenant un angle donné.

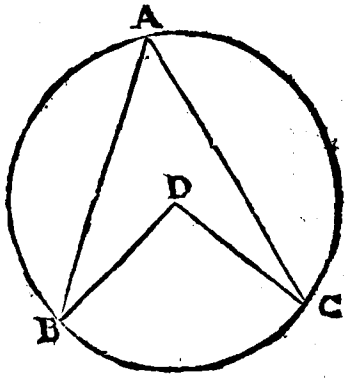
Au cercle ABC donné par grandeur soit tirée la ligne droite AC donnée par grandeur : (*Voyez la figure precedente.*) Je dis qu'elle ôte un segment qui comprent un angle donné.

Car ayant pris le centre du cercle D, soit tiré le diametre ADE, & la ligne droite EC. D'autant que chacune des lignes droites AE, AC est donnée, la
o 1. pr. raison d'icelle AE à AC o est donnée; & l'angle
p 43. p. ACE est droit: Donc p le triangle ACE est donné par espece, & partant l'angle AEC est donné.

PROP. XC.

Si en la circonference d'un cercle donné par position & par grandeur, on prend un point donné, & que d'iceluy point à la circonference du cercle se flechisse une ligne droite faisant un angle donné; l'autre extremité d'icelle ligne flechie sera donnée.

En la circonference du cercle ABC donné par position & par grandeur soit pris un point donné B, & d'iceluy point B soit flechie ou brisée à la circonference la ligne droite BAC, qui face l'angle BAC donné: Je dis que le point C est donné.

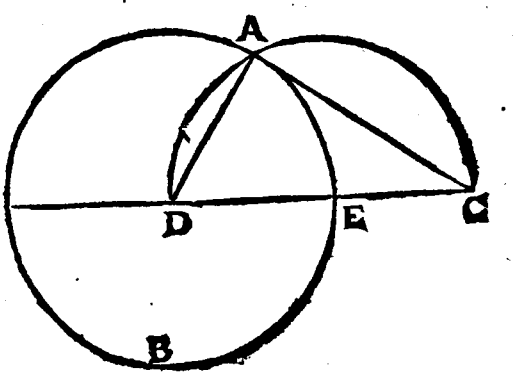


Car soit pris le centre du cercle D, & tirées les lignes BD, CD. D'autant que chaque point B, D est donné, la ligne
q 26. p. droite BD q est donnée par position: & vû que l'angle BAC est donné, l'angle BDC est aussi donné. Parquoy à la ligne droite BD donnée par position, & au point D donné en icelle est menée la ligne droite CD qui
r 29. p. fait l'angle donné BDC: & partant r la ligne DC est donnée par position. Mais le cercle ABC est donné
s 6. def. par position & grandeur: Donc s la ligne droite DC est donnée par position, & par grandeur. Mais le
t 27. p. point D est donné: Donc t le point C est aussi donné.

PROP. XCI.

Si d'un point donné eſt tirée une ligne droite qui touche un cercle donné par poſition; icelle ligne eſt donnée par poſition & par grandeur.

D'un poinct donnné C ſoit menée la ligne droite CA touchant le cercle AB donné par poſition : Je dis qu'icelle ligne droite AC eſt donnée par poſition & par grandeur.



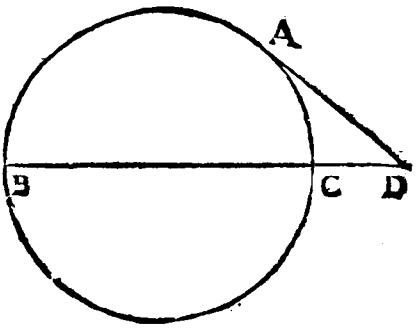
Car ayant pris le centre du cercle D, ſoient tirées les lignes droites DA, DC. D'autant que chaque point C, D eſt donné, la ligne droite CD [u] eſt donnée par poſition & par grandeur. Mais l'angle CAD [x] eſt droit ; & partant [z] le demy cercle décrit ſur CD paſſera par le poinct A : Qu'il y paſſe donc, & ſoit DAC : D'autant qu'iceluy DAC [y] eſt donné par poſition, & auſſi le cercle ABE, [a] le poinct A eſt donné. Mais le poinct C eſt auſſi donné : Donc [b] la ligne droite AC eſt donnée par poſition & par grandeur.

[u] 26. p.
[x] 18. 3.
[z] *ſch.* 31. 3.
[y] 6. *def.*
[a] 25. *p.*
[b] 26. *p.*

PROP. XCII.

Si hors un cercle donné par poſition, on prend quelque point, & d'iceluy point donné ſoit tirée quelque ligne droite couppant le cercle ; le rectangle compris ſous toute la ligne & la partie d'entre le point & la circonference convexe ſera donné.

Hors le cercle ABC donné par position soit pris quelque poinct, c'est à sçavoir D, duquel soit menée la ligne droite DB couppant le cercle : Je dis que le rectangle sous BD, DC est donné.

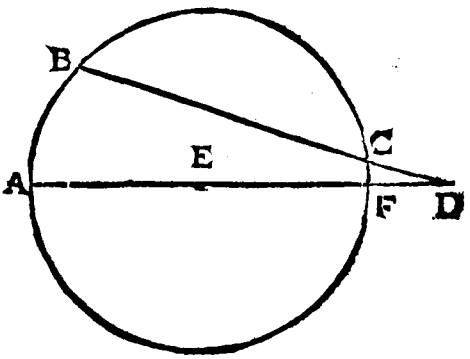


Car du poinct D soit menée la ligne droite DA qui touche le cercle en A : Donc icelle DA [c] est donnée par position & par grandeur ; & partant le quarré d'icelle DA [d] est donné. Mais iceluy quarré de DA est égal [e] au rectangle de BD, DC : Donc iceluy rectangle de BD, DC est aussi donné.

[c] 91. p.
[d] 52. p.
[e] 36. 3.

AVTREMENT.

Soit pris le centre du cercle E, & par iceluy soit tirée de D la ligne droite DA. D'autant que chaque point D, E est donné, la ligne droite DE [f] est donnée par position & par grandeur. Mais le cercle ABC est aussi donné par position & par grandeur: Donc chaque point A, F [g] est donné ; & le poinct D est aussi donné ; & partant [f] chaque ligne AD, FD est donné. Parquoy le rectangle d'icelles AD, DF est aussi donné. Mais iceluy rectangle de AD, DF est égal [h] au rectangle de DB, DC : Donc le rectangle de BD, DC est donné.

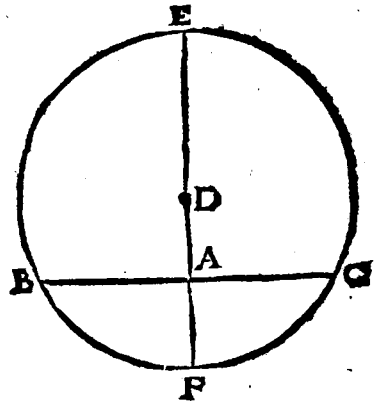


[f] 26. p.
[g] 25. p.
[h] Cor. 56. 3.

PROP. XCIII.

Si dans un cercle donné par position on prend quelque point donné, & par iceluy on tire

quelque ligne droite au cercle ; le rectangle compris ſous les ſegmens d'icelle ligne ſera donné.



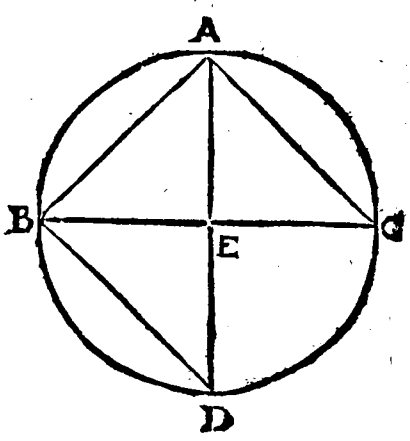
Dans un cercle donné par poſition ſoit pris quelque poinct donné A, & par iceluy ſoit tirée la ligne droite BC : Je dis que le rectangle contenu ſous AB, AC eſt donné.

Car ſoit pris le centre du cercle D, & ayant tiré la ligne droite AD ſoit prolongée juſques aux poincts E, F. D'autant que chaque poinct A, D eſt donné, la ligne droite AD [i] eſt donnée par poſition. Mais le cercle BEC eſt auſſi donné par poſition : donc chaque poinct E, F eſt auſſi donné par poſition ; & le poinct A eſt donné. Parquoy chaque ligne [l] AE, AF eſt donnée: Donc le rectangle d'icelles AE, AF eſt donné : & eſt égal au rectangle [l] de AB, AC ; partant iceluy rectangle de AB, AC eſt donné. [i] 26. p. [l] 55. 3.

PROP. XCIV.

Si dans un cercle donné par grandeur eſt tirée une ligne droite, laquelle ôte un ſegment qui comprenne un angle donné, & qu'iceluy angle eſtant au ſegment ſoit couppé en deux également : la compoſée des lignes droites qui comprenant l'angle donné aura raiſon donnée à la ligne qui couppe iceluy angle en deux également ; & le rectangle contenu ſous la compoſée d'icelles lignes

comprenant l'angle donné, & la partie d'icelle ligne couppante qui eſt au deſſous du ſegment entre la baſe & la circonference ſera donné.



Au cercle *ABC* donné par grandeur ſoit tirée une ligne droite *BC*, laquelle ôte un ſegment qui comprenne l'angle donné *ABC*, & iceluy angle ſoit couppé en deux également par la ligne droite AD : Je dis que la raiſon de la compoſée des lignes droites *BA*, AC, c'eſt-à-dire *BAC* à AD eſt donnée; & auſſi que le rectangle contenu ſous la compoſée *BAC* & la ligne droite ED eſt donné.

Soit menée *BD*. D'autant que dans le cercle *ABC* donné par grandeur eſt tirée la ligne droite *BC*, qui ôte le ſegment *BAC* comprenant un angle donné *BAC*; icelle ligne *BC* [m] eſt donnée : & partant *BD* eſt auſſi donnée : Donc la raiſon d'icelle BC à BD [n] eſt donnée. Et puis que l'angle donné BAC eſt couppé en deux également par la ligne droite AD ; [o] comme *BA* à CA, ainſi *BE* à CE ; & en compoſant, comme *BAC* à CA, ainſi *BC* à CE : & en permutant, comme BAC à *BC*, ainſi CA à CE. Et veu que l'angle BAE eſt égal à l'angle CAE, & l'angle ACE [p] à l'angle *BDE* ; l'autre angle AEC eſt égal à l'autre angle ABD ; & partant le triangle ACE eſt équiangle au triangle ABD : Donc [r] comme AC à CE, ainſi AD à BD. Mais comme AC à CE, ainſi la compoſée *BAC* à BC : Donc comme la compoſée BAC à *BC*, ainſi AD à BD ; & en permutant, comme la compoſée *BAC* à AD, ainſi BC à BD. Mais la raiſon d'icelle BC à BD eſt donnée : Donc la raiſon de la compoſée

m 88. *p.* 1. *pr.*
• 3. 6.
p 21. 3.
r 4. 6.

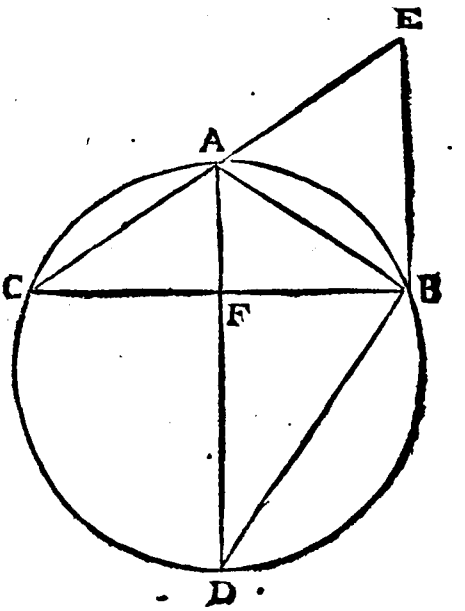
posée BAC à AD est aussi donnée. Je dis en outre que le rectangle sous icelle composée BAC & ED est donné. Car d'autant que le triangle AEC est équiangle au triangle BDE, (car l'angle ACE p est égal à l'angle BDE, & l'angle AEC q à l'angle BED) comme BD à DE, ainsi AC à CE. Mais comme AC à CF, ainsi est aussi la composée BAC à BC : Donc r comme la composée BAC est à BC, ainsi BD à DE. Parquoy le rectangle d'icelle composée BAC & DE s est égal au rectangle de BC, BD. Mais iceluy rectangle de BC, BD est donné : (pource qu'icelles lignes BC, BD sont données) donc le rectangle sous la composée BAC & ED est aussi donné.

p 29. 1.
q 15. 1.
r 16. 6.
s 16. 6.

AVTREMENT.

Soit prolongée CA jusques au point E, & posé AE égale à BA, & soient conjoints BE, BD. D'autant que l'angle BAC est double de chacun des angles CAD, AEB ; (car iceluy BAC est couppé en deux également par AD, & égal t aux deux angles ABE, AEB, qui sont u égaux) l'angle ABE est égal à l'angle CAD, c'est à dire x à l'angle CBD : adjoûtant donc l'angle commun ABC l'angle total ABD sera égal au total FBE. Mais l'angle ACB x est égal à l'angle ADB : Donc le troisiéme angle AEB est égal au troisiéme BAD ; & partant le triãgle CEB est équiangle au triangle ABD : Parquoy comme CE à CB, ainsi AD à BD. Mais la ligne

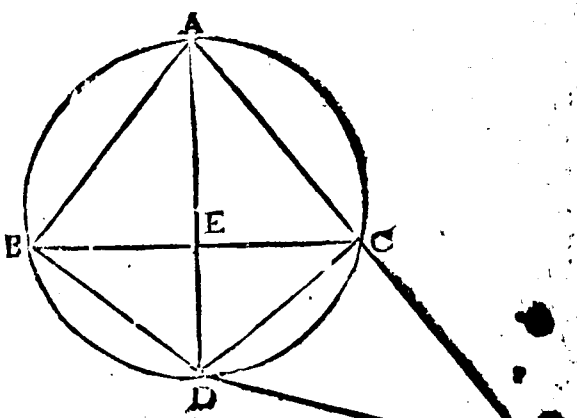
t 32. 1.
u 5. 1.
x 21. 3.



droite CE eſt compoſée des deux CA, AB : Donc comme la compoſée BAC eſt à CB ainſi AD à BD ; & en permutant, comme la compoſée BAC eſt à AD, ainſi CB à BD. Mais la raiſon de CB à BD eſt donnée, attendu que chacune d'icelles lignes eſt donnée : Donc la raiſon de la compoſée BAC à AD eſt auſſi donnée. Et puis que le triangle CEB eſt équiangle au triangle FBD : (car l'angle AFC eſt égal [y] à l'angle BFD & l'angle ECB [x] à l'angle ADB) comme EC à CB ainſi BD à DF. Mais EC eſt égale à la compoſée BAC : Donc comme la compoſée BAC eſt à CB, ainſi BD à DF. Parquoy [z] le rectangle de la compoſée BAC & DF eſt égal au rectangle de CB & BD. Mais iceluy rectangle de CB, BD eſt donné, attendu que chacune des lignes CB, BD eſt donnée : Donc le rectangle de la compoſée BAC & DF eſt donné.

y 15. 1.
x 21. 3.
z 16. 6.

AVTREMENT.



Soit prolongée *AC* juſques en F, & poſé CF égale à AB, & ſoient menées *BD*, DF. D'autant que *BA* eſt égale à CF, & *AB* à DC ; les deux côtez AB, BD ſont égaux aux deux CD, DF, chacun au ſien, & l'angle ABD eſt égal à l'angle DCF, puis que le quadrilatere ABDC eſt dans le cercle : Donc la baſe AD eſt égale à la baſe DF, & l'angle DAB à l'angle DFC. Mais iceluy angle BAD eſt donné : (car c'eſt la moitié du donné BAC.) Donc l'angle DFC l'eſt auſſi. Mais DAF eſt auſſi donné : Donc le triangle

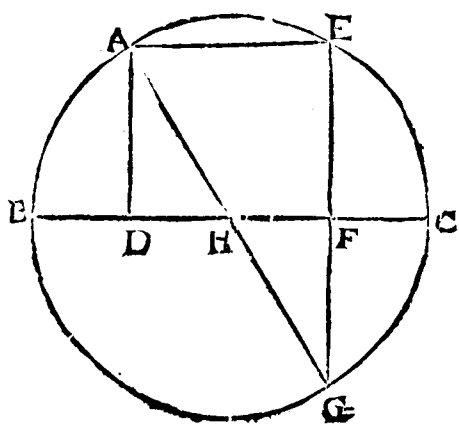
a 26. & 29. 3.
b 22. 3. & 13. 1.
c 4. 1.

ADF eſt donné par eſpece. Parquoy la raiſon de FA à AD eſt donnée. Mais AF eſt la compoſée de BA, AC, attendu que CF eſt égal à AB : Donc la raiſon de la compoſée BAC à AD eſt donnée. Or par même raiſon que deſſus nous demonſtrerons que le rectangle contenu ſous la compoſée BAC & ED eſt donné.

PROP. XCV.

Si au diametre d'un cercle donné par poſition on prend un point donné, & que d'iceluy point on tire quelque ligne droite à la circonference du cercle, mais que de la ſection d'icelle on mene une ligne droite perpendiculaire à cette-là, & par le point auquel cette perpendiculaire rencontrera la circonference on mene une parallele à la premiere ligne tirée : ce point là auquel la parallele rencontre le diametre eſt donné, & le rectangle contenu ſous les lignes paralleles eſt auſſi donné.

Soit le cercle ABC donné par poſition, & ſon diametre AC, auquel ſoit pris le poinct donné D, & d'iceluy ſoit tirée la ligne dorite DA coupant la circonference en A, duquel ſoit menée la ligne droite AE perpendiculaire à DA, &



par le point E où elle rencontre la circonfere
menée EF parallele à AD : Je dis que le point F
donné, & auſſi le rectangle compris ſous AD, EF,

Car ſoit prolongée la ligne droite EF juſques à
point G, & tirée la ligne droite AG. D'autant q
l'angle AEG eſt droit, la ligne droite AG eſt di
metre du cercle. Mais AB eſt auſſi diametre : Don
point H eſt le centre du cercle. Or le point D eſt d
d 26. p. né : & partant [d] la ligne DH eſt donnée par grandeu
Mais puis que AD eſt parallele à EG, & AH égale
e 26. p. GH ; [e] DH eſt égale à FH & AD à FG : (car les an
f 15. 1. gles AHD, FHG [f] ſont égaux, & DAH, FGH
g 29. 1. [g] auſſi égaux.) Mais la ligne DH eſt donnée : Don
FH eſt auſſi donnée. Mais une chacune d'icelles li
gnes DH, HF eſt auſſi donnée par poſition, & l
h 27. p. point H eſt donné : Donc [h] le point F eſt auſſi donné
Et puis que dans le cercle ABC donné par poſition eſ
pris un point donné F, & par iceluy eſt tirée la ligne
i 93. p. droite EFG ; le rectangle ſous EF, FG [i] eſt donné.
Mais FG eſt égale à AD : Donc le rectangle com-
pris ſous AD, EF eſt donné : Ce qu'il falloit de-
monſtrer.

Fin des Donnez d'Euclide.