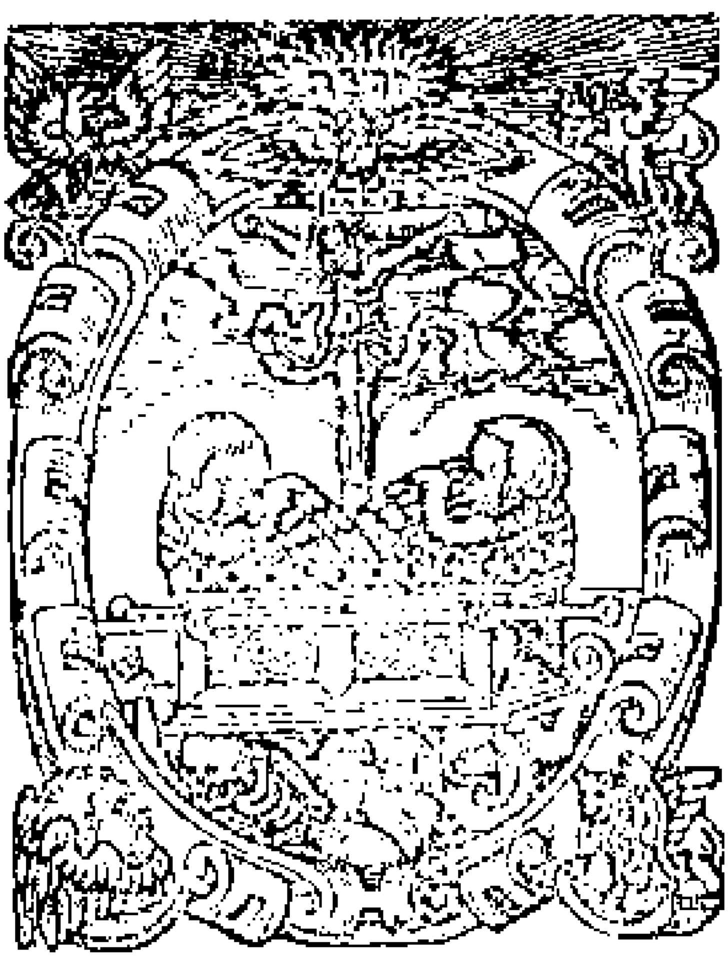
Εὐκλείδου στοιχείων
βίβλια ἕξ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBRI SEX

conuersi in latinum sermonem à
Ioach. Camerario.

QVIBVS ADIECTÆ SVNT
trium priorum librorum Demonstrationes, atque
editæ in gratiam & vtilitatem studiosorum Mathematices in Acad. Lips. à

Mauritio Steinmetz Gersb.
Medicinæ Licentiato.



LIPSIÆ

Anno M. D. LXXVII.

B

tempo
& eiec
Geom
scripta
tios suo
uos sese
us esse d
um sese
sapien
aliter

NOBILITATE GENERIS SAPIENTIA VIRTVTE AC DOCTRINA

præſtantiſs. viro Dn. HEINRICO à BILA in Hegenroda & Staplenburgk, I. V. Doctori celeberrimo &c. Domino & amico ſuo obſeruando.

NARRATVR DE Ariſtippo Cyrenaico auditore ac diſcipulo philoſophorum omnium ſapientiſsimi Socratis, cum naue tempeſtatibus fracta expulſus eſſet, & eiectus ad Syracuſarum litus, ac Geometricam figuram in arena deſcriptam vidiſſet, exultantem & ſocios ſuos cõſolantem dixiſſe, ad doctos ſeſe & ſapientes non ad Barbaros eſſe delatos. Neq; verò ſpes iſta eum fefellit, ſiquidem à præcipuis ac ſapientioribus loci illius viris liberaliter exceptus, & honorificè

Chria, de mathemat: um utilitat

 habi-

habitus, omnibuſque rebus neceſſarijs rurſus inſtructus & donatus fuit. Paulò poſt cum Syracuſis quidam in patriam nauigaturi ex eo quærerent, nunquid familiæ ſuæ mandari vellet, ſignificari ſuis atq; in mandatis dari iuſsit, vt ſibi res & opes eas pararent, quæ cum poſſeſſore de naufragio ſimul enatare poſſent. Hoc Ariſtippi conſilium & præceptum, etſi de vniuerſis ac ſingulis optimarum artium ac virtutũ ſtudijs rectè & meritò vſurpari ac dici poſſit: tamen ex naufragij iſtius hiſtoria apparet, eum præcipuè ſuos, diſciplinas ſibi Mathematicas ac Geometricas commendatas habere voluiſſe, vt quæ omnium præſtantiſſimorum philoſophorum con ſenſu & iudicio alijs diſciplinis omnibus præferri ſolent. Neque illas quidem immerito, quippe per quas ſolas principia illa & noticiæ quæ menti noſtræ ſunt impreſſæ, inq; ea latent quaſi retuſæ & abſconditæ, exuſci-

exuſcitantur, excoluntur, confirmantur, atq; euidentiores fiunt, quibus ita excultis ac confirmatis, homo verè naturam ſuam conſequitur, vt ſecundum philoſophum poſſit rectè & verè perhiberi & eſſe ζῶον λογικὸν, hoc eſt, eiuſmodi animal quod à cæteris animantibus & brutis, differt intelligentia, ratiocinatione, & bonorum à malis diſcretione. Neq; ſcientia aut ars vlla eſt tam efficax idonea & vtilis ad confirmandam & augendam doctrinæ intelligentiam, quam ea quæ circa numeros, magnitudines, comparationes, proportioneſq; verſatur. Neque illud non exploratum eſt, hanc abſq; cogitationis vſu eſſe non poſſe, cogitationem verò multo minus abſque vi rationis & ordinis. Quid enim ratiocinabitur aut ordinabit animal numerorum expers? Quare merito eam diſciplinam quæ Mathematica vocatur inprimis, & ante cæteras omnes conſtitui & teneri oportet, si modo præstantiam & dignitatem naturæ nostræ tueri & conseruare, & quicquid præterea est artium liberalium retinere volumus. Quo nimirũ respexisse videntur, præstantissimi philosophi, Plato, Aristoteles, & cæteri, qui neminem Geometriæ expertem, ad suas scholas admisere, easq; adire sunt passi, id quod ex multis apud Platonem locis ostendi à me posset, nisi symbolum illud quod scholæ suæ foribus præscripsisse legitur, satis ad probandũ haberet momenti, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Neq; parum facit ad commendationem disciplinarum Mathematicarum argumentationum, quæ ex his artibus extruuntur, & à Græcis ἀποδείξεις vocantur, πληροφορία certitudo, & veritas immota atque illustris. Cuius sanè veritatis atque euidentiæ respectũ, πίστεις μαθηματικαὶ tantum aliarum artium collectiones & consequentias, quantumuis speciosas superant,

quantum

quantũ necessaria contingentibus, & ea quæ natura insunt, ijs quæ extrinsecus accedunt, & perpetua corruptioni obnoxijs, denique propria alienis & peregrinis præstant & præponderant. Quæ res fecit vt eximia appellatione πίστεις nominarentur, in qua voce scilicet est fidei significatio, quod nimirum solæ illæ sint ἀξιόπιστοι & αὐτόπιστοι, hoc est, fidem & assensum apud omnes mereantur & dubitationes omnes euincant & animis hominũ eximant. Quocirca veteres illi sapientes, ex hac scientia sola siue de naturæ obscuritate, siue de vita & moribus disputandum & conferendum esset, similitudines & exempla commodè depromi & afferri statuerunt. Quod & Galenum principem Medicorum, quo nullus rebus præsertim Dialecticis videtur instructior, sensisse apparet ex eo opere quod de libris proprijs inscripsit, id quod cuiuis de ipsius confessione facile est atq; in promtu iudicare. Poſtquam enim (vt de ſeipſo ſcribit) omnium peripatheticorum & ſtoicorũ ſcholas perluſtraſſet, omniaq́ue logica theoremata ſingulari diligentia & ſtudio perdidiciſſet, non modo pleraque controuerſa, non etiam nulla à ratione diſſentanea ab illis aſſeri, ſe depræhendiſſe ſcribit, ſed etiam quorũ cauſa ſe illis quaſi mancipauerat, quid eſſet ἀπόδειξις, ac eſſet ne aliqua inueſtigare & intelligere non potuiſſe, priuſquam ad Geometricas diſciplinas, quibus ab auo, proauoq́ue acceptis, eum parens à teneris annis inſtituerat, reuerſus, ex iſta tum varietate & incertitudine tum obſcuritate præceptorum, tanquam denſa nebula qua in pyrrhoniorum hæſitantiam ferè prolapſus eſſet, luce illarum artium perſpicua & clara, ſeſe explicaret, atque euolueret. Hæc & id genus alia, ſi quis diligenter perpenderit, non modo non improbabit ſapiens

Ariſtippi

Ariſtippi conſilium, & aliorum philoſophorum, de diſciplinis Mathematicis præcipuo ſtudio addiſcendis iudicium exquiſitum & conſenſum ſingularem, ſed etiam teneræ iuuentuti ac diſcentibus, noſtro inprimis ſeculo, quod eſt omni ferè genere illecebrarum, ac voluptatum libidinibus corruptum ac contaminatum, & ad labores honeſtorum ſtudiorum ſubeundos, minus alacre, huiuſmodi virorum ſapientum ſubiectiones, proponi crebro, & iterum atque iterum inculcari vtile iudicabit & neceſſarium, vt tantorum virorum iudicijs & admonitionibus adoleſcentes incitati atq; confirmati, maiori cum diligentia atque contentione diſciplinarum Mathematicarũ ſtudijs incumbant. Quæ vt demonſtrationes gignunt, id eſt, probationes immotas & euidentes & diſtinguunt nõ modo vera & falſa, ſed etiam certa & incerta, & perſpicuè refutant pyrrhonios qui omnia incerta esse cōtendunt: ita hominem vera scientia imbuunt, & nobilissimam illius partem, intelligentem scilicet ad perfectionem & ad optatum finem, contemplationem, inquam, naturæ, & veram virtutis cognitionem perducunt, & in piorum animis ardens desiderium æternæ consuetudinis cum Deo, in qua omnibus quod dici solet numeris absoluetur, quæ hîc inchoatur sapientia, & ad quam conditus est homo, accendunt. De his tantis rebus, cum sæpe multúmque mecum ipse cogitarem, atque ante biennium libros elementorum Geometricorum Euclidis explicaturus, cognoscerem nulla ferè vel Græcè vel Latinè edita exemplaria in bibliopolijs prostare amplius, quorum defectus, quod & in cæteris opt. artium studijs vsu venire animaduertimus, non solum studiosos atque discentes negligentiores reddit, verum etiam artes ipsas quasi

tene-

tenebris inuoluit, quibus nisi maturè aut commodè eruantur, tandem penitus opprimi ac demergi solent, qua potui diligentia, pro ingenij mei mediocritate, conscripsi ac auditoribus meis proposui, explicationes & demonstrationes, omnium propositionum, primi, secundi, & tertij libri Euclidis. Quas cum quidam docti viri & amici mei, harum disciplinarum vt studiosissimi, ita in illis præclarè versati cognouissent & probassent, admonendo & inuitando ad editionem illarum me vrgere non destiterunt, rationibus quibusdam mihi ostendentes, & probantes, me rem prorsus gratam atque vtilem studiosis omnium disciplinarum, hac commentationum mearum publicatione facturũ esse. Quorum consilio & admonitionibus morem gesturus, curaui vt lineares descriptiones atq; figuræ ad singularum propositionum demonstrationes accommodatæ, exsculptæ

atque

atque depictæ apponerentur, & ita vela ventis dedi.

Tibi autem generis nobilitate, ſapientia, virtute, ac doctrina vir præſtantiſsime, hunc meum laborem & ſtudium, quod huic editioni impendi, dedicare & inſcribere volui, quod non modo animum tuum cum erga cæterarum artium liberalium ſtudioſos, tum inprimis harum diſciplinarum cultores, perſpectum haberem, ſed quod teipſum quoq; huic ſcientiæ ineuntis adoleſcentiæ annis mirifico ac flagranti ſtudio deditum fuiſſe, atq; etiamnum ſi quando à grauioribus ſtudijs atq; negocijs, quibus quotidie obrueris reſpirare licet, artium iſtarum tractatione te oblectare & animum tuum quaſi recreare ſolere non ignorarem. Quibus accedit etiam illud, quod eius quam in pueritia ſtudiorum & vitæ ſocietate contraximus, & multos hactenus annos aluimus, amicitiæ, in poſterum quoq; firmiter re-ter retinendæ & tuendæ, atque debitæ simul obseruantiæ tibi declarandæ, vt par est, studiosum me esse, ac certam de constanti tuo erga me fauore ac beneuolentia spem concepisse, hac ipsa dedicatione, testatum tibi facere cupiam. Hoc igitur meum factum vt tibi gratum & iucundum accidere patiaris, pro veteri nostra amicitia, quo par est studio ac reuerentia peto & contendo. Datæ Lipsiæ ex ædibus meis VIII. Cal. Sext. Anno. M. D. LXXVII.

T. Excel. stud.

Mauricius Steinmetz
Medicinæ Licent.

TYPOGRAPHVS Lectori Salutem.

CVm in officinã mea adornandam suscepissem, atq; typis publicandam, editionem librorum sex Elementorum Geometricorum Euclidis, quos in latinum sermonem, ante annos XXVIII. conuertit eruditorum ocellus, atq; totius Europæ decus & ornamentum singulare Ioachimus Camerarius, operæ pretium me facturum putaui, si proœmium quoq; de dignitate ac præstantia artis Geometricæ ab illo alterius nomine perscriptum, hoc loco subijcerem. Quod factum meum quin probaturi essent, non modo disciplinæ Mathematicæ amantes, sed & doctrinæ eruditæ studiosi minime dubitabam. Atq; idcirco quod in hanc partem mihi impendendum fuit operæ & laboris, subij libentius & maturaui studiosius. Hoc volebam, candide lector, nescius ne esses. Tu illis fruere & vale.

IN

IN LIBROS SEX ELEMENTORVM GEOMETRIcorum Euclidis Procœmium ſcriptum à Ioachimo Camerario Pabeperg.

FERVNTVR verſus Epicharmei de fabula cui nomen indidit ille πολιτείαν, hi,

Χρεῖα et necessitas artis numerandi.

ὁ βίος ἀνθρώποις λογισμοῦ κἀριθμοῦ δεῖται πάνυ,
ζῶμεν δ' ἀριθμῷ καὶ λογισμῷ, ταῦτα γὰρ σώζει βροτούς.

Quorum quidem ſententia manifeſta eſt, nihil æque neceſſarium eſſe hominibus, atque ratiocinandi & numerandi artem,& hac ipſa vitam humanam contineri. Sed qua conſideratione ſapientiſsimus Poëta, de cuius fabulis nonnulla & Platonem tranſtuliſſe perhibent,hoc fecerit,non indignum fuerit ſtudijs noſtris paulò accuratius exquirere. Nam ſi nullam aliam ratiocinandi & numerandi artem indicauit, quàm eam quæ vulgò nota & vſitata eſt, nihil ille quidem ſingulare, neque quod famam ſapientiæ tantæ tueatur, protulit. Nam quod & Plato ridiculum futurum fuiſſe Agamemnonem Imperatorem putat, abſque numerorum cognitione, ſi ne pedes quidem quam multos haberet, dicere potuiſſet, quam ſit non admodum, ſi quis minus attentè audiat, facetum, quis non videt? cum & Therſitæ talis cognitio concedenda eſſe videatur. Sed Plato profectò, vir non modò eloquentia, ſed etiam ſapientia extia excellens, festiua ironia notauit temporis & ciuium suorum studia, non illa in veritate cognoscenda occupata, sed vitæ huius illiberalibus plerunque commodis seruientia. Quemadmodum & Latinus Poëta Arithmeticam discere ait Romanos pueros, nimirum, longis rationibus assem in partes centum deducere. Hæc enim & fuit & erit semper curæ plurimorum, de qua plura hoc loco dicenda non sunt. Sed ad hanc certè, ad quam per se ingenia hominum procliuia sunt, non voluit excitare Poëta animos ciuium suorum, cum optimam formam, vt videtur, Reipublicæ proponeret. Atq; aliud monuit ac subiecit melius & magis præclarum ac salutare: De quo par est cogitare diligentius eos, quibus doctrina bonarum artium cordi est. Cum autem sit natura homo intelligens, & hac præstantia à cæteris animantib. distinguatur, si naturam suam conseruare velit, intelligentiam illum colere & augere necesse fuerit. Intelligentia autem quæ absq; cogitationis vsu futura sit, ne singi quidem potest. Sed cogitatio profectò rationis vi continetur. Ratio autem ordinis est, in quo iam numerus conspicitur. Ita fit, vt homo qui est ζῶον λογικὸν, si se & vitam suam saluam atq; incolumem esse, id est, conseruari & durare præstantiam naturæ suæ cupiat, ratiocinandi & numerandi scientiam exercere & tenere & custodire necesse habeat. Constat autem omnem naturam cupidam esse dam eſſe ſalutis & incolumitatis ſuæ, & circumſpicere omnia, quibus tuta & defenſa eſſe poſsit. Itaque hanc artem inprimis conſtitui oportuit, qua ſola, vt diximus, conſeruaretur & ſtaret vita humana. Artem autem non firmatam neq; fultam ſcientia, vel nullam vel futilem eſſe fatendū eſt. Quare opus fuit & huic arti vitæ fundamento iſto & ſtabilimento ſcientiæ. Ea cauſſarum demonſtrationibus continetur, quæ mirifica conſenſione & ſerie communi ordinis & rationis, per linearum deſcriptiones & figuras tota explicatur atque perficitur, eaſq; Græci γραμμικὰς ἀποδείξεις nominant, quarum ſcientia, quicquid eſt certum & notum & immutabile in terris, ſola & deprehendi & comprehendi poteſt. Huius ſcientiæ nomen eſt Geometria. Non illa quidem ductib. linearum, & figurarum picturis ocioſè ludens, ſed hoc agens atque efficiens, vt mens & intelligentia humana reperiat & habeat, quo ſubſiſtat & nitatur in hac vita, néue aut opinionum vanitate, aut errorum falſitate circumuenta intereat. Omnia enim quæ alicui naturæ contraria ſunt, ſi inualeſcant & corroborentur, illam deprimere & delere conſueuerunt, vt æſtum, frigus, & ariditatem, humiditas. Itaque & mens atque intelligentia, in ſtoliditatis & deſipientiæ dominatione, exterminetur neceſſe eſt. Hæc autem dominatio & hoc regnum conſtituitur opinionum inanitate, & errorum mendacijs, ne-

Geometriæ finis

glecta aut etiam omiſſa cognitione cauſarum, quibus vnaquæque res conſtat, & ad quas referri omnia tanquam originem ſuam, & vbi veluti in ſede ſua collocari oportet, vt quieſcat quærendi & veſtigandi ſtudium ac labor. Ex his aliquo modo perſpici poſſe exiſtimo, quàm numerandi & ratiocinandi artem neceſſariam hominibus, & quo pacto illa conſeruari vitam cenſuerit Epicharmus. Quod ſi cui libeat minus ſubtiliter de

Utilitas Geometriæ.

his, quaſi ad populū verba facere, in promtu fuerit cōmemorare quàm plurima, quorum expers vita humana, nullo, vel pertenui diſcrimine, diuerſa à beſtiarum vita futura eſſe videatur, quę omnia opera ſunt huius de qua loquimur ſcientiæ. Nam ſi nulla ſit temporum diſtinctio, non anni certa definitio, non labentis diei & horarū obſeruatio, quæſo qualis hæc vita futura ſit? At eſſe nequit, ſine cœli, vt ita dicam, limitatione, & ſiderum notatione, vbi ferantur, quomodo ꝑcedant, quædam etiam retrocedant & inſiſtant, & vtrinq; de via recedant, & ad metas ſuas retorqueantur. Hinc & ortus & occaſus illorum indicantur, longe etiam antequam oculis appareant. Geſtit animus immorari huic diſputationi, ſed veniendum ad alia eſt. Non habeat neceſsitatem hæc cognitio, quàm certè habet: At vtilitas eſt manifeſta, de qua & ipſa ſi quis dubitet, quid illo agas? Non attingam nunc eam, quæ quaſi peculiari nomine à quibuſdam Aſtrologia dicitur,

dicitur, complectens præsensiones quasdam, quarum indicatio à sideribus proficiscitur. Itaq; Ptolemæo est hoc προγνωστικὸν δὶ ἀςρολογίας. Etsi enim & studium hoc liberale, & quod profitetur vtile esse oportet, cum nitatur cognitionè motuum,& multa ad valetudinem & rem familiarem tuendam accommodata demonstret, qualis est humorum in corporib. confluxus & redundantia,& tempestatum mutatio, & huius circumfusi aëris status: Etsi autem hoc, vt aiebam, liberale, & vsu compertum, & veterum cura excultum studium est: tamen in præsentia mentionem istam omittam, propterea quod aliter alijs sentientibus & iudicantibus de hac parte,ad explicationem rei noua esset dispu tatione opus, quam alio magis idoneo tempore ac loco fortasse exequemur. Sed hæc obseruatio cœli, & motuum,quibus illud,& in ipso sidera conuertuntur, explicatio, de qua & tempora diuiduntur, & anni constituuntur(quæ à Græcis Astrologia seu Astronomia nominatur) profectò neq; esse neq; consistere absq; scientia Geometriæ potest. Verum neq; ista magna pars hominum intelligit, neq; magnifacit. Quasi verò nobis negociũ cum ijs sit, qui figura & habitu tantũ oris homines sunt. Agamus tamẽ, pingui, vt dicitur,Minerua,et incurrentia in oculos, quęq; inter manus sunt,cõmoda ab huius scientiæ non tam operib. quam parergis,ostendamus. In his sit prima tota architectonica.

Πρόληψις

Demonstratio Utilitatis ex parergis

Putant autem pleriq; felicitatis non eſſe poſtremam partem, bene habitare, vt de publicis extructionibus, & munitionibus vrbium nihil dicamus. Vbi amuſsis, vbi decempeda, vbi libella, vbi regula, ſublata hac ſcientia? Quid pictura & ſtatuaria, quid ſpeculorum fabricatio, quid compoſitio Muſicorũ organorum, ſine hac ſcientia? ſi neq; dimenſionis, neq; radiorum, neq; conſonantiæ ratio conſtet, quorum certè omniũ ſola Geometria profitetur demonſtrationem. Quid dicam de orbis terrarum deſcriptione, de locorum interuallis, de regionum deſignatione, quæ eſt κοσμογραφία complectens γεωγραφικὰς & χωρογραφικὰς πραγματείας. Non profectò latum digitum, in his progredi ratio poſsit, abſq; Geometriæ ductu. Ac redeat hoc loco pauliſper oratio ad liberales & ingenioſas naturas, neq; diſputemus quantũ vtilitatis in deſcriptionibus huiuſmodi inſit, quales veteres quondã Imperatores ac Duces exquiſiuiſſe ſtudioſiſs. conſtat. Herodotus etiam Ariſtagoram Mileſium de tabula ærea Aſiæ ſitum & loca demonſtrantem Cleomeni, introducit. Sed vt aiebam, vtilitatis prædicatio recedat. Et ſit cum ijs nobis res, qui honeſta & pulcra, per ſe, non propter acceſsionem vtilitatis, magnifaciunt, quibus profectò nihil poteſt eſſe iucundius, nulla maior voluptas, quàm contemplatio talium operum, per quæ animis & oculis peregrinari, atq; terras ac maria obire conceditur.

ceditur. Hac tamen ipſa maxima voluptate, maior & ſuauior eſt explicatio difficilium quæſtionum, ſiue de rerum & huius vniuerſi natura, ſeu de Rerumpub. mutationibus, ſeu etiam de vitæ & ſocietatis ciuilis diſtinctione, ordine, ratione, modo. Quis enim ex hoc quidem genere humanitate politorum hominum, non maiorem delectationẽ percepturus ſit, quàm alius quiſpiá de quocunq; fortunæ beneficio ambitioſus aut auarus, perſpiciens intelligentia animi ſui, vel quid non illorum fortuitorum potius impenſurus ſit, vt perſpicere poſsit, verbi cauſa, ædificationem mundi in Timæo, & alibi cõuerſiones Rerumpub. indicatas diagrammatis variatione, de quo & Ariſtoteles in Politicis cum Socrate Platonico contendit: Et illam ſpecioſiſs. diſtinctionem totius ciuilis ſocietatis, per rationum duplicem comparationem, expoſitam in V. Ethicorum Nicomacheorum? Sed plerique ὑηνεῖς ſunt, ſecundum Platonem homines, qui has & his ſimiles ſuauiſs. affectiones neq; ſentiunt neque expetunt: Voluptatibus enim corporis indulgent, pecudum ritu. hoc loco igitur inſiſtat de veris voluptatibus oratio, & pergat ad alia. Ac iam deducamus etiam propius ad ſe vulgus, & cogitare tamẽ iubeamus, cui arti debeant quod veſtimenta & calceos reperiunt, dicent nimirum ijs, quos vocamus ſartores & ſutores. Sed hi an non dimenſionib. vtuntur? Non collocatione partium?

tium? Non figurarum exacta notatione? Quæ sunt profectò omnia Geometrica. Nam illa quæ vocatur γεωδαιτικὴ, ratio agrorum & quorumcunq; locorum spatia apta distributione inueniendi, quin vtilitatem præcipuam habeat, negari non potest. In ciuitatibus ipsis nonne hinc pes, digitus, vlna, amphora, modius, & similia fluxerunt? quorũ vsu & beneficio publicæ & priuatæ rei administratio integra permanet. Nam imperatoria ars, in qua est præcipua ea, quam Græci τακτικὴν nominant, quin Geometrica sit, nemo negauerit, nisi qui neq; acies, neq; agmen quadratum, neq; metatio quid sit, scire se fateatur. Itemque aliæ διαμετρήσεις, quibus admirabilia imperitis opera efficiuntur, siue sint hæc distantium spatiorum, quæ interualla vocantur, seu incertorum & confusorum definitiones expediantur, seu etiam in organis machinationum, & ponderationum librationes mensura consentanea & proportione dirigantur. Quale est, quod de Thaletis Scipione traditur, & de Archimedis exploratione, quantum in corona auri sinceri esset? De quo & hoc memorabile accepimus. Hiero rex, qui, vt Polybius ait, in societate Romanorum florens opibus, φιλοδοξῶν καὶ φιλοστεφανῶν εἰς τοὺς ἕλληνας διετέλει, nauem magnitudine ingentem & forma spectabilem extruxerat, magnis velis tribus insignem. Hæc omnium Syracusanorum coniuncta multitudine, nõ potuit vlla molitione

Archimedis nauis

in mare

in mare deduci. Quod rex cum admodum molestè ferret, accedit ad eum Archimedes, & certo die aduocato populo vniuerso, illum adesse ad nauem in littore iubet, futurũ enim vt ipse sua solus manu nauem in mare deducat. Regi res ea incredibilis videri, & tamen periculum faciendũ esse statuit. Cum igitur successisset (nam ita trochlearum consertionem ad pondus & molem nauis disposuerat Archimedes, vt nullo negotio illa commoueretur, & subiectionem rotularum conuenientem accommodarat:) Ibi Rex & gaudio euentus, & admiratione artis, exclamasse dicitur: Ex eo die, de nulla se re dubitaturum esse, quam fieri posse affirmasset Archimedes. Atq; hæc est Procli narratio. Athenæus autem libro V. Moschionis cuiusdam narrationem exposuit, qua copiosè explicatur totius nauis illius fabricatio & forma atq; capacitas. Is tantam fuisse ait, vt primi mali, fuit enim, vt diximus, τριάρμενος, materia, diu quæsita, ægrè tandem in montibus Britannicis reperta fuerit. Hanc, ibi dicitur, de fundamentis Carinæ ad dimidiũ totius altitudinis extructam, cũ placuisset in mare deduci, vt ibi absolueretur, omnib. dubitantibus, qua ratione hoc fieri posset, Archimedem, qui & Architectus illius erat, parua admodũ hominum manu hoc perfecisse, adminiculo volutæ, quæ est ἕλιξ, cuius ipse primus rationem explicuisse traditur. Hanc nauẽ dono misit Hiero Ptolemęo regi

 Alexan-

Alexandrino onuſtam frumento, cum eſſet annonæ magna in Ægypto caritas. Quod autem illam Epigrammate ornaſſet Archimelus Poëta, miſit ei Hiero honoris cauſſa, medimnos tritici mille, quos ſuo ſumtu deferri in Pireum curauit. Epigramma autem refertur ab Athenæo. Plura hoc in genere commemorare eſſet in promtu, vt Dioclidis Helepolim, adductam à Demetrio rege ad Rhodi mœnia, quam cepit Diognetus arte verè Geometrica, cum ſolum qua agenda erat machina, corrupiſſet, vt ita illa ſubſideret & hæreret. hoc enim certè ἀναλογίας conſideratio ſubiecit. Item rogum Timæi, & candelabrum Polycleti: ſed nimis diu iam his me immorari intelligo. Et his rebus illi reges atq; homines capiebantur. Nos autem, etſi ſcimus incurrere tales prædicationes artis in dicta quorundam, qui vrbani videri volunt, qui etiam iſtas linearum & punctorum minutias derident: non poſſumus tamen neq; debemus, id quod ratio euincit, præterire ſilentio, fortaſſe hæc alicuius nunc etiam animum mouebit oratio. Affirmamus igitur hanc ſcientiam non inuentam, neque de ijs quæ poſtea extiterunt excogitatam, ſed cum ipſa natura extitiſſe, & omnium mentibus inſitam, & cum omnibus hominibus cognatam eſſe. Id puerorum etiam luſus indicant, qui priuſquam loqui didicerint, aliquid architectari, & extruere, & collocare, & diſponere, & ordinare conantur, & ab

eometria
nã nobis
ingenita.

& ab alijs hoc fieri cernentes gaudent. Artificium autem est rationis perfectæ, cuius scientia absoluitur doctrina Geometrica. Diuinarum quidem rerum veritas non includitur angustia ingenij humani, neq; grauitate illius explicatur: Hoc tamen verè affirmari posse videor, præparari etiam hac scientia animos ad cognitioné illius, vt Plato suspicatus fuit, de eo quod celebrat sæpe disputationibus suis ὡς ὄντως ὄν. Sunt enim profecto huius scientiæ discipuli neq; tumultuatores, neq; inflati opinionibus, neq; contentiosi, neq; futiles, neque leues, multò minus rabiosi aut immanes, quod hominum genus à pietate non solet abhorrere. Sed veritas tamen cœlestis & doctrina huius, & vita illi consentanea, longè alia res est, Neque nos diuina & humana cõfundenda esse censemus: De concesso & donato hominibus bono rationis, & mentis, & cogitationum, & memoriæ, & consilij, loquimur, quæ sunt huius scientiæ & subiectum quoddam & informatio, siquidem reperitur ad omnes res pertingere huius consideratio, & ipsa omnium rerum formas complecti. Sunt autem quasi tres quidam gradus ipsius. primus & summus, qui est purissimæ & sincerissimæ intelligentiæ & sapientiæ, exhibet contemplationem simplicium naturarum, & eorum, quæ, vt diximus, à Platone τὰ ὄντως ὄντα, vocantur, in his insunt & abstractæ à consortio corporum species, & res à fluxis atq; caducis

Subiecta, doctrinarū

Tres gradus subiectorum huius arte.

caducis & mutabilibus ad ea quæ perpetua & inuariabilia & vnius ſemper modi ſunt abductæ. Et horum exempla atq; imagines. Medius gradus habet & ille quidem cogitationes & rationes animi, ſed implicatas quodammodo in ſubiectam veluti materiam operum quorundam, quæ non magis illam ſimplicitaté & conſtantiam retinere poſſunt, Sed & varietatem & aliquid apparentiæ aſſumunt, vnde & φανταστικαὶ διαμορφώσεις appellatæ fuerunt. In his iam collationes & ſimilitudines, & diuerſorum ſeparationes, & deſignationes figurarum, & finitæ deſcriptiones harum inueniuntur. In tertio & infimo gradu excurrit hæc ſcientia, & effunditur in molem, & naturam principiorum iam ſenſibus expoſitam. Tum ea quæ inter homines fiunt ac geruntur diſponit, & actionum genera per officiorum modos definit, & orationis copiam atque facultatem attemperat. Itaq; huius ſunt effectiones, & ea doctrina quæ propriè φυσικὴ dicitur, & quæ πολιτικὴ, ad quam diſputationes de moribus, & præcepta gubernationum, & tota oratoria facultas pertinet. Hinc iam illa omnia manant, de quibus & ante nonnihil dictum eſt, quæ vitam hominum cóſeruant, augent, ornant, Terrarum locorumq́; diſtinctio, machinarum & munitionum extructiones, horologiorum fabricationes, itinerum dimenſio, interuallorum indicatio, menſurarũ expoſitio, libræ exæquatio, contractuum & ne-

gotiorum

gotiorum æſtimatio atq; peritia, prçmiorum & pœnarum exquiſitio, denique Iuris ipſius moderatio & æquitas, vnde iuſticia integra & perfecta exiſtit, & ita demum illuſtri ſpecie quadam eminet atq; conſpicitur. Quæ cũ ita ſe habeant, cumque hæc ſcientia tantas commoditates, & hæc ornamenta conciliet hominibus: Nihilo tamẽ minus profeſſores huius præcipuos, id eſt, eximios Geometras ſeu Mathematicos (nihil enim refert, nam ſecundũ noſtram collectionem, omnia quæ Mathematum nomine comprehenduntur, ad Geometriæ principia & fundamenta reducuntur, & demonſtrationibus linearum confirmantur) Mathematicos igitur excellentes videmus plerunq; negligi atq; parui pendi, immò etiam vulgò irrideri, vt imprudentes & malè gerentes negociorum ſuorũ, neq; rei ac dignitati ſtudentes. Hoc verò iam commune & probrum, quo indocti totam Philoſophiam infamare conantur, qui neminem ſapientem eſſe ſentiunt, qui ipſi ſibi nõ ſapit: Sibi autem ſapere neminem cenſent, niſi eum qui conſecutus hoc ſit, vt argentũ, quoties velit, ꝓferre poſsit. Sed ideo tamen nihilo minus de hac profeſsione, iſta commoda vitæ communi ſuppeditantur, quæ commemoraui. Nam qui remum ſcitè fecit, & domum præclarè extruxit, non ideo etiam nauta & paterfamilias eſſe debet. Immo operibus artificum alij ferè omnes magis & maiore cum fructu vtuntur atq; vti norunt, quam

Mathesis contempta cur

quam ipsi qui illa elaborauerunt. Quare & professores huius artis, conferunt beneficio studij sui in genus humanum, omnia sapientiæ & prudentiæ & commoditati vitæ necessaria & vtilia, quibus si alij instruuntur, aut ipsi minus ex illis lucri percipiunt, hominum hoc miseriæ, non artis futilitati asscribatur. Est autem maxima hæc generosi & magni animi significatio, inuentione & opere virtutis ac sapientiæ gaudere, emolumenta libenter alijs concedere, vt optimæ nationis canes, lepores illi quidem aut alias bestias strenuè persequuntur, & intrepidè adoriuntur, & omnibus viribus inuadunt vt capere posint, prostratas autem & oppressas non lacerant neq; deuorant. Sed obtrectationes hæ sunt eorum, qui hoc tantum curant, vt cistam nummi flagellent. Quibus nulla responsio vnquam satisfecerit. Par enim est, secundum Theocritum, labor,

ἐπ' ἀΐονι κύματα μετρεῖν
ὅσ' ἄνεμος χέρσονδε μετὰ γλαυκᾶς ἁλὸς ὠθεῖ.
ἢ ὕδατι νίζειν δολερὰν διαειδέϊ πλίνθον,
καὶ φιλοκερδείῃ βεβλαμμένον ἄνδρα παρελθεῖν.

Illi igitur valeant, vt inquit idem Theocritus, & percepta ac reditura numerent atq; computent, in hoc saltem ipso discipuli artis huius, veritatem autem & scientiam derideant & negligant: Nobis autẽ nihil hac prius aut potius expetendum, nihil attentius & vigilantius custodiendum esse videatur. Siquidem & fundamenta scientiarum & explicatio

catio artium, omnisq; sapientiæ & doctrinæ humanæ veritas, & tot communis vitæ adminicula, commoda, ornamenta, denique ipsius naturæ & generis humani in terris conseruatio, ad hanc vnam primam & solam scientiam referuntur. Id quod facilè non stulto, neq; penitus mentis lumine priuato, cum eæ rationes persuadebunt, quæ à nobis relatæ sunt, tum alia etiam, quæ ex illis vnicuiq; cogitanti venire in mentem poterunt. Est autem & hoc beneficium scientiæ huius, vt cogitare animus, & ad intuitum atque aspectum refulgentis veritatis, tanquam Solis, conuertere & intendere aciem suam possit. Sed de hoc neq; opus est vt plura dicantur, cum si cui hæc non probantur quæ diximus, frustra dicerentur, & sic satis longè hanc disputationem produximus, vt illa iam tandem concludenda esse videatur. Quod autem attinet ad studium impensum à nobis huic editioni, de eo etiam nonnihil verborũ faciendum hoc loco esse duximus. Elementa huius scientiæ ab Euclide collecta & publicata esse, quibus in formam quondam artis tota res redacta fuerit, est in confesso, neque orationem longiorem requirit. Sed illorum ipsorum elementorum huius scientiæ, quæ ab Euclide libris XIII. exposita sunt, sex primi verè elementa appellari possunt. Itaq; omnibus discipulis Mathematicæ necessaria est horum exquisita cognitio, non aliter quàm discipulis Grammaticæ, illa series lite-

De praesenti libro.

Elementa

ries literies literarum & syllabarum, quàm nisi memoria penitus comprehenderint, & animo atq; cogitatione explicata, & ad omnem vsum in promtu habeant, fieri nequit, vt progreßiones luculentas in arte illa facere poßint. Similiter & nisi ediſcendo & meditando hos VI. libros Euclidis Mathematum ſtudioſi, tam familiares ſibi fecerint, vt nulli fabro ſuæ officinæ inſtrumenta notiora ſint, nihil præclari operis vnquam elaboraturi ſunt. Quapropter verè poſſumus, vt aiebam, hos VI. libros Elementorum Geometricorum, Elementa nominare. Ad conuerſionem quod attinet, vſus ſum opera amici noſtri Ioachimi Camerarij, quem hoc conſecutũ, longi quidem temporis aßiduo ſtudio ſcirem, vt cognitione linguæ Græcæ, non vlli poſtponendus eſſe videatur. Idem & Mathematicas diſciplinas inprimis admiratur & magnifacit. Sed nobis hoc potißimum in adornanda interpretatione noua conſilium fuit, vt ſtudioſi harum diſciplinarũ ad Græcam linguam diſcendam inuitarentur, Cuius conſtat proprium eſſe donum, diuinitus ad culturam artium bonarum illi attributũ, vt intelligentiæ & rationis inuenta, verbis ſignificantibus, & oratione diſerta enuntiare, & cogitationum quaſi theſauros, non ſolum promere, ſed etiam explicare poßit. Mißimus autem ad te Chriſtophore Carolouicie, & tibi dedicauimus hanc opellãm editionis noſtræ peculiariter: quem comperiſſem,

Ratio conversionis

ſem, non modo ſapientiæ & virtutis communis ac ciuilis laude & dignitate excellere, id quod eſt pulcerrimum & præclariſsimum in hac vita, ſed ad cauſſas & fontes etiam reſpicere, omnium eorum quæ honeſta, laudabilia, recta, bona, Reipublicæ ſalutaria, & eſſe perhibentur, & verè ſunt. Quam curam & diligentiam Græci Philoſophiæ vno nomine vniuerſam indicare atq; oſtendere voluerunt. Peto autē ab humanitate tua, quam in iſta prudentia & doctrina neceſſe eſt eſſe eximiam, vt & conſilium & factum hoc editionis & dedicationis noſtræ, gratum acceptumq́; habere, Et me atque ſtudia iſta, quibus profectò ſubleuatione & patrocinio, in hac ſeculi peruerſitate, admodum opus eſt, cum fauore tuo tueri, tum autoritate defendere, tum etiam ſtudio & commendatione augere atq; ornare velis. Hoc ad poſteritatem, à qua ſcis ſinceram gloriam contingere meritis, tibi ſplendidius eſt futurum, quàm multis alijs & opulentiæ, & diuitiarum fama, & ſi qua alia ſunt eorum, quæ vulgus ſuſpicit & prædicat.

Perſcriptum Lipſiæ, v. Id. Nouemb.

Εὐκλείδῃ

Primus liber habet principia decem librorum communia, et ut Proclus ait, principia nobiliora in triangulis et parallelogrammis.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ά.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER PRIMVS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

Α

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐδέν.

I.

Punctum est cuius pars nulla est.

Β

Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

II.

Linea vero longitudo latitudinis expers.

Γ

Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

III.

Lineam autē terminant puncta.

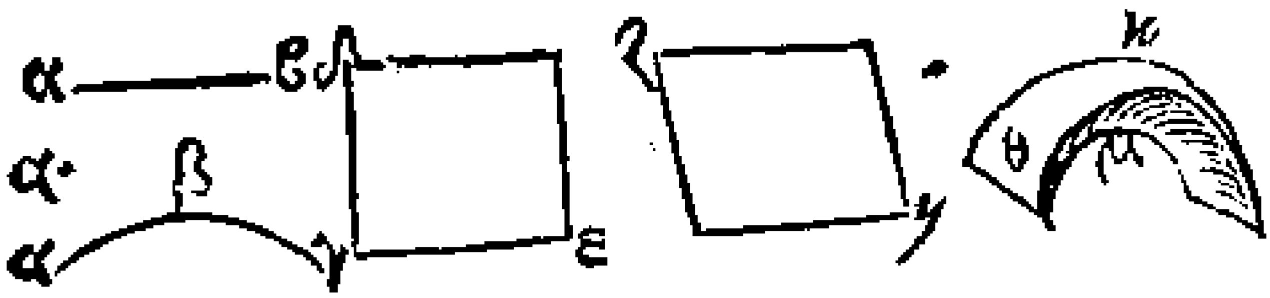
Δ

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

A

IIII.

Linea recta est quæ exæquatur punctis suis.



E

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

V.

Superficies est quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

ϛ

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

VI.

Hanc terminant lineæ.

Z

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

VII.

Plana superficies est quæ exæquatur rectis lineis suis.

H

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ, δύο

δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Non omnis angulus, sed tantum planus hic definitur, qui supponitur [illegible] anguli [illegible] Angulus.

VIII.

Angulus in planitie est, duarum linearum quarum altera alteram nō directe attingit, mutua inclinatio.

Θ

Ὅταν δὲ, αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

IX.

Cum autem includentes angulū lineæ rectæ fuerint, tum ille rectarum linearum angulus appellatur. Rectilineus.

Ι

Ὅταν δὲ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν.

X.

Cum autem recta rectæ insistens continuos angulos æquales inter se, fecerit, rectus erit vterq; æqualium angulorum. Rectus.

IA

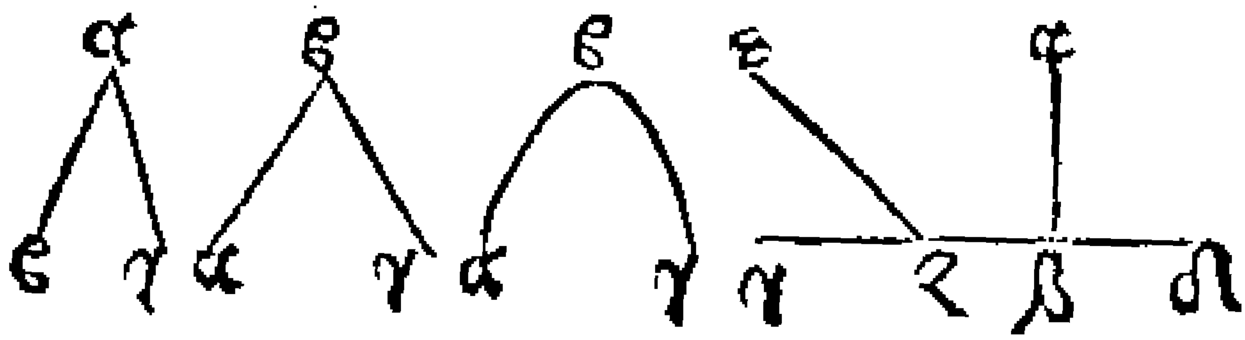
Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

X I.

Inſiſtentis autem illius rectæ nomen eſt perpendiculum, reſpectu illius cui inſiſtit.

IB

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.



X I I.

Obtuſus angulus is eſt, qui recto maior eſt.

IΓ

Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

X I I I.

Acutus verò, qui recto minor eſt.

IΔ

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

X I I I I.

Finis dicitur, qui alicuius terminus eſt.

Σχῆμα

IE

Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων, περιεχόμενον.

XV.

Figura est quam vnus aut plures fines includunt.

Iς

Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου, τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

XVI.

Circulus est figura in planitie, quam vna linea includit, quæ ambitus linea vocatur, ad quam, ab vno puncto, omnium quæ in hac figura reperiuntur, quæcunq; rectæ lineæ cadunt, illæ inter se æquales esse debent.

IZ

Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

XVII.

Atque hoc punctum centrum appellatur.

IH

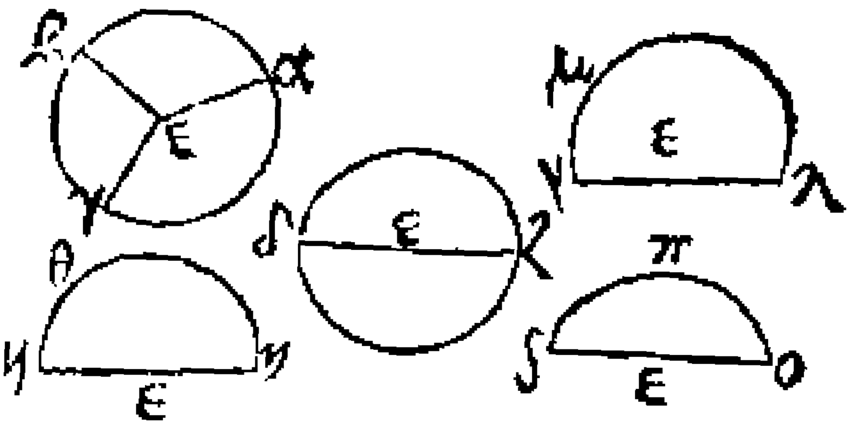
Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

XVIII.

Diameter autem circuli, eſt rectæ quidam lineæ ductus per centrum, cuius extrema vtrinque in lineam ambitus exeunt, atque hæc in duas æquales partes circulum ſecat.

IΘ

Ημικύκλιον δέ ἐστιν, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, ἀπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.



XIX.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de ambitu circuli abſumitur.

K

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον, ὑπό τε εὐ-

τε εὐτε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

X X.

Segmentũ circuli eſt, quod & recta & circuli ambitus linea includit.

K A

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

X X I.

Rectarum linearum figuræ ſunt, quas rectæ lineæ includunt.

K B

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

X X I I.

Figure Trium quidem laterũ, quas tres.

K Γ

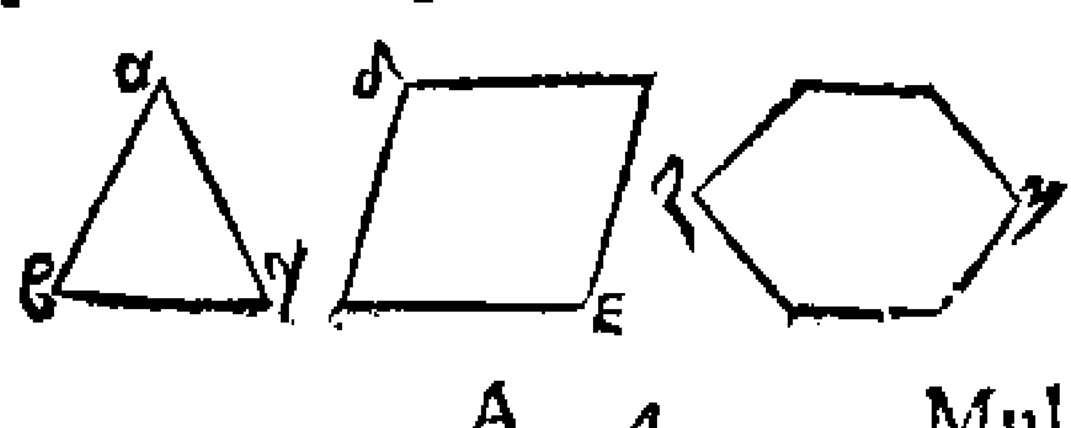
Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

X X I I I.

Quatuor verò laterũ, quas quatuor.

K Δ

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.



XXIIII.

Multorum autem laterum, quas plures quàm quatuor rectæ includunt.

KE

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

XXV.

Triangulũ æquilaterũm.

Ex figuris triquetris, Triangulum æqualium laterum illud est, quod tria æqualia latera habet.

Kϛ

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας, ἴσας ἔχον πλευράς.

XXVI.

Isoscelũ.

Duo autem æqualia crura habere illud dicitur, in quo sola duo latera sunt æqualia.

KZ

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς, ἀνίσας ἔχον πλευράς.

XXVII.

Varium verò in quo tria inæqualia latera sunt.

ΚΗ

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

XXVIII.

Præterea ex triquetris figuris, triangulum in quo angulus rectus est, nomen à recto angulo habet.

ΚΘ

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

XXIX.

Quod autem obtusum angulum ab obtuso.

Λ

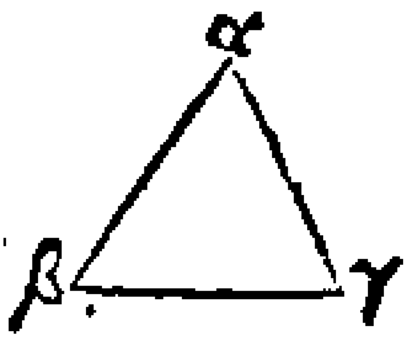
Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

XXX.

In quo verò tres anguli acuti sunt, huic acuti anguli appellatio tribuitur.

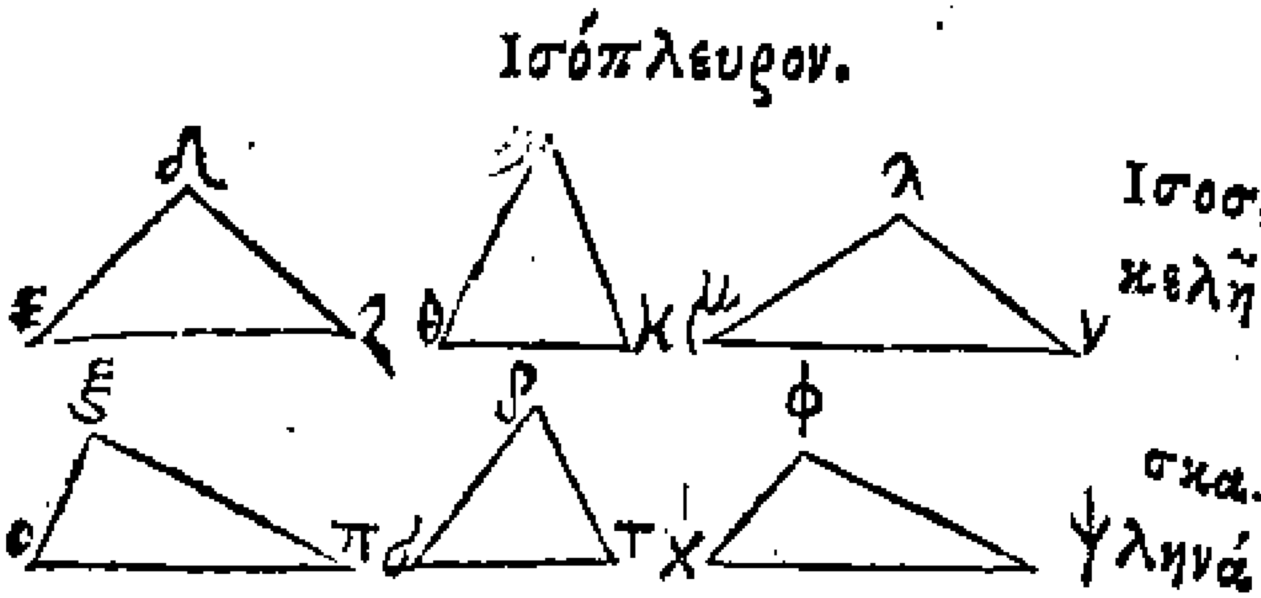
Ὀξυγώνια.

Ὀρθογώνια



Ἀμβλυγώνια.

 Ἰσόπλευ-



ΛΑ

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον.

Sed ex figuris quatuor laterum.

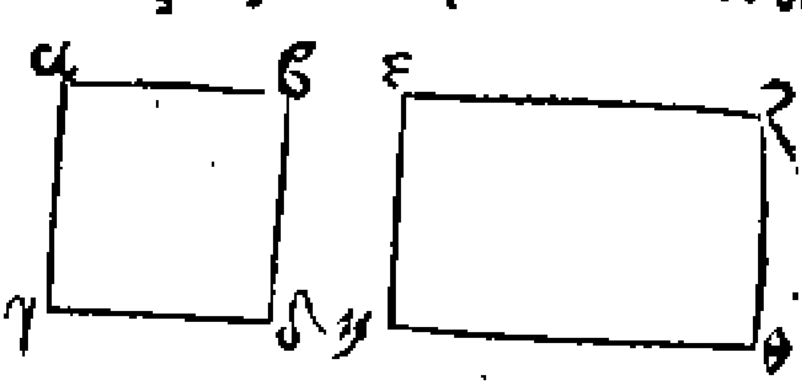
XXXI.

Quadratu

Quadratum, id est, in quo & æqualia latera & recti anguli sunt.

ΛΒ

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.



XXXII.

Altera verò parte longius, in quo recti quidem anguli sunt, latera autem æqualia non sunt.

ΛΓ

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

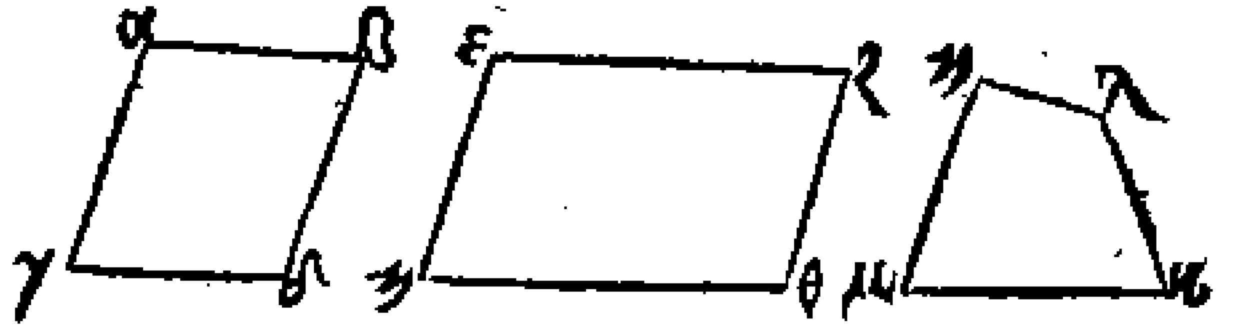
Verum

XXXIII.

Verum rhombi nomen habet, in quo latera quidem æqualia sunt, sed recti anguli non sunt. Rhomboides.

ΛΔ

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.



XXXIIII.

Est rhombi figura similis, in qua contraria quidem latera & anguli æqualitatem inter se retinent, sed figura neque laterum neque angulorum æqualium est.

ΛΕ

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

XXXV.

Præter has aliæ quatuor laterum figuræ mensulæ vocentur.

Παράλλη-

Λϛ

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

XXXVI.

Aequabiliter ductæ lineæ sunt rectæ, quæ super vna planitie productæ, per infinitum etiam spaciũ, versus vtranque partem, in neutro sibi mutuo incidunt.

Altera pars huius libri.

Αἰτήματα.

PETITA.

A

Ητήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου, ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

I.

Petatur, vt ab vnoquouis puncto, ad vnumquoduis punctum, recta linea ducatur.

B

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς, ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

II.

Item, finitam rectam lineam conti-

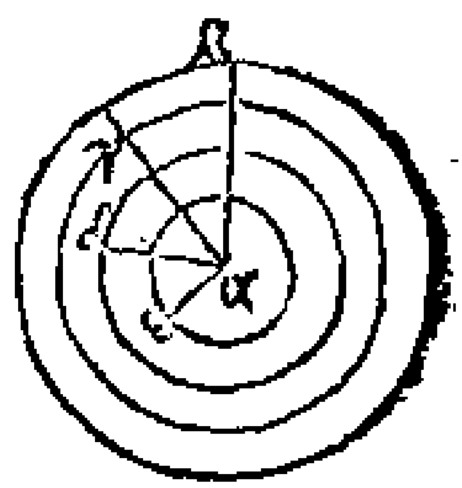
continuata directione producere.

Γ

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

III.

Item, ad quoduis centrum & interuallum circulum describere.



Κοιναὶ ἔννοιαι.

COMMVNES NOTITIÆ.

A

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Hæc logica st axiomata.

I.

Quæ sunt æqualia vni, æqualia sunt illa & inter se.

B

Καὶ ἐὰν ἴσοις, ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

II.

Item, si æqualibus æqualia adiecta sint, etiam tota illa æqualia sunt.

Γ

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων, ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

Item

III.

Item, ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, æqualia etiam ſunt quæ relinquuntur.

Δ

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προςεθῇ, τὰ ὅλα ἐςὶν ἄνισα.

IIII.

Item, ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota etiam illa inæqualia ſunt.

E

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων, ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐςὶν ἄνισα.

V.

Item, ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua etiam inæqualia ſunt.

ϛ

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

VI.

Item, duplicia eiuſdem, inter ſe æqualia ſunt.

Z

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

Item,

VII.

Item, vnius partes dimidiæ, inter se æquales sunt.

H

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

VIII.

Item, quæ apta inter se mutuo & conuenientia sunt, ea inter se æqualia sunt. Magnitu: dinis con: gruæ st [illegible] les. 9.1.

Θ

Καὶ τὸ ὅλον, τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

IX.

Item, totum maius est parte sua.

I

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

X.

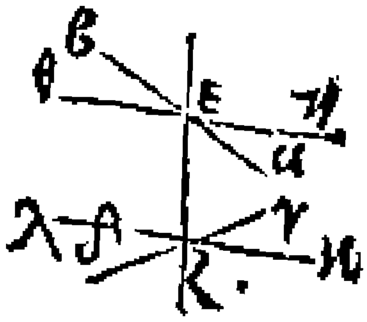
Item, omnes anguli recti inter se æquales sunt.

IA

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν, ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι

αἱ δύο

αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι, ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν, αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.



X I.

Intellige in eodem plano.

Item, si in duas rectas altera recta incidens, interiores in ijsdem partibus angulos, duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ infinito spacio productæ secum concurrent, illis in partibus vbi sunt, anguli duobus rectis minores.

Inscitiarum [illegible] definitionem parallelarum, q communib. perpendicularibus dividuntur

IB

Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

X I I.

Item, duæ rectæ locum nullum includunt.

Προτάσεις.

PROBLEMATA.

THEOREMATA.

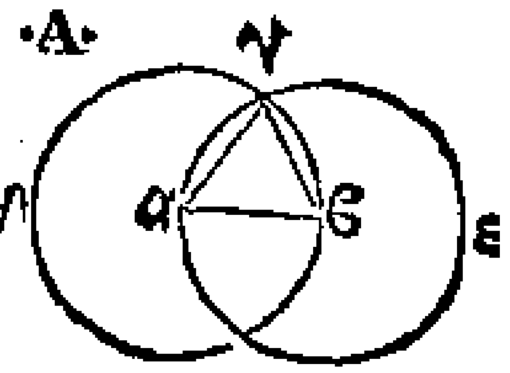
PROBLEMATA III.

Ἐπὶ τῆς

Tantum duae fabricae in Euclide demonstrantur, trianguli aequilateri & quadrati.

A

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Fabrica trianguli aequilateri.

I.

Super data recta finita triangulũ æqualium laterum conſtituendum eſt.

Triangula aliqua moles in solida quadam [illegible] data, & sine [illegible] non habebit locum.

DEMONSTRATIO.

Sit data recta finita α β, ſuper qua triangulum æqualium laterum conſtituendum eſt. Centro quidem α, diſtantia verò α β deſcribatur circulus, β γ δ, item centro β interuallo β α deſcribatur circulus α γ ε, & à puncto γ, in quo ſe circuli ſecant, deducantur in α β puncta rectæ γ α, γ β. Dico γ α β eſſe triangulum æqualium laterum. Quoniam itaq; α punctum eſt centrum β γ δ circuli, æqualis erit α γ, ipſi α β. Rurſus quia β punctum eſt centrum circuli γ α ε, æqualis erit β γ ipſi β α. Sicut autem demonſtratum, γ α æqualis eſt ipſi β α, vtraq; igitur rectarum γ α, γ β, ipſi α β æqualis eſt. Quæ verò ſunt æqualia vni, æqualia ſunt illa & inter ſe. Quare & γ α ipſi γ β æqualis erit. Tres igitur rectæ γ α, α β, β γ, æquales inter ſe ſunt. Proinde α γ β triangulum eſt æqualium la-

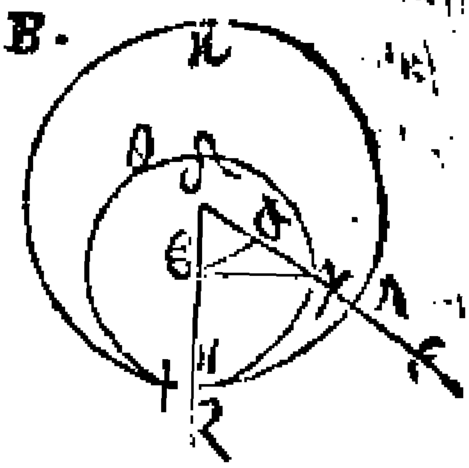
 terum.

terum, & est constitutum super datam rectam finitam, quod faciendum erat.

demonstro hac
... beneficio
... manifesta
... linea
... opilatim recta linea ma...
... problema

B

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, B. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



II.

Ad datum punctũ, datæ rectæ lineæ, æqualis recta apponenda est.

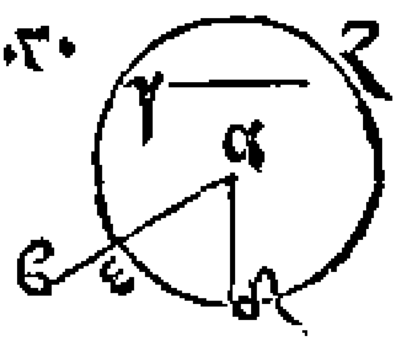
DEMONSTRATIO.

Sit datum punctum α, data verò recta β γ, petatur autem vt ad punctum α ipsi rectæ β γ æqualis apponatur. Ducatur ab α puncto ad β punctum recta α β, & super eam constituatur triangulum æqualium laterum δ α β (per præcedentem.) Item recta δ α continuata directione producatur in ε, & δ β in ζ, & centro β, distantia verò β γ, describatur circulus γ η θ: Et rursus centro δ, interuallo verò δ η describatur circulus η κ λ. Quoniam igitur β punctum centrum est circuli γ η θ æqualis est β γ (per 16. definit.) ipsi β η. Item, quia δ punctum centrum est circuli η κ λ, æqualis est recta δ λ, rectæ δ η. Sed quia δ α & δ β sunt æquales (per κατασκ.) erit reliqua β η, reliqua α λ æqua-

α λ æqualis. At β γ ipsi β η æqualis est, quia sunt ea quæ ex centro in lineam ambitus circuli γ η ϑ ducta. Vtraq; igitur rectarum α λ, β γ, ipsi β η æqualis est. Quæ verò vni sunt æqualia, & inter se sunt æqualia. Recta igitur α λ æqualis est ipsi β γ rectæ. Ad punctum igitur α datæ lineæ rectæ β γ, æqualis recta α λ apposita est, quod fieri debuit.

Γ

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν, ἀφελεῖν.



Geometrica [illegible] gulas lineas hic suffer[illegible] sicuti in sequenti proble- mate.

III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de maiore, minori æqualis recta auferenda est.

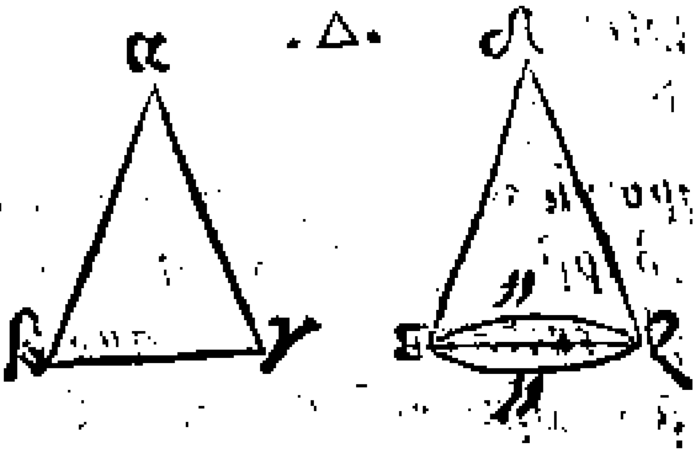
DEMONSTRATIO.

Sint α β, γ duæ rectæ & inæquales, quarum maior sit α β, de qua minori æqualis recta auferenda est. Ad punctum α lineæ α β apponatur recta æqualis ipsi γ (per secundam primi.) & sit α δ. Deinde centro α, interuallo verò α δ, describatur circulus δ ε ζ. Dico quod α ε sit æqualis γ rectæ. Recta α ε, α δ tanquam eæ quæ ex centro, sunt æquales, & α δ ipsi γ, æqualis constituta est (per κατασκ.) Erit igitur recta α ε, quæ *per lineam ambitus δεζ circuli, de αβ auferatur æqualis recta γ. Igitur de αβ recta maiori, abstulimus rectam αε æqualem rectæ γ, quod faciendum erat.*

THEOREMATA V.

Δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν, τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει, ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον, τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς, αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



IIII.

Triangula quia, æqui. ...nea angu. æquilatera sunt, ideoq; æquangula.

Si duorum triangulorum vnum latera duo lateribus duobus alterius æqualia habuerit, sic, ~~vtrunq; vtriq;~~ altera alteri vt respondeat: siq; angulus angulo æqualis

His simplex ... sufficit, cum præcedentes vero eadem convenientia multo verius et certius demonstrari poterint.

æqualis fuerit, is quem æquales illæ rectæ includunt: Basim hæc etiam basi æqualem habebunt, eritq; triangulum triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, sic, vterq; vtriq; vt respondeat, subter quos æqualia latera subtendunt.

DEMONSTRATIO.

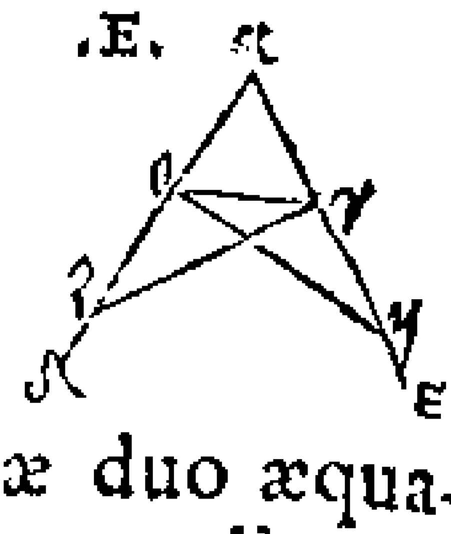
Sint duo triangula α β γ, δ ε ζ, & α β, γ α latera trianguli α β γ, æqualia duobus lateribus δ ε, δ ζ alterius trianguli, sic vtrumq; vtriq; vt respondeat, & α β quidem æqualis sit δ ε, α γ verò ipsi δ ζ, & anguli β α γ, ε δ ζ quos æquales illæ rectæ includunt, quoq; æquales. Dico basin β γ, æqualem esse basi ε ζ, & triangulum α β γ, triangulo δ ε ζ, & reliquos angulos reliquis angulis æquales, sic vterq; vtriq; vt respondeat, subter quos æqualia latera subtendunt, veluti α β γ angulus æqualis erit δ ε ζ angulo, & α γ β angulus δ ζ ε angulo.

Sint α β γ & δ ε ζ apta & connexa inter se, & ponatur α super δ & α β recta super δ ε rectam. Quia igitur α β recta æqualis est δ ε rectæ, (per 8. com. sent.) conueniet terminus β cum termino ε, & quia apta & conueniens est α β recta, δ ε rectæ, & angulus β α γ angulo ε δ ζ:

apta & conueniens erit α γ recta δ ζ rectæ, & γ terminus concursum faciet cum termino ζ. Sed & β conuenit cum ε puncto, vt demonstratum est, quare & basis β γ basi ε ζ apta & conueniens est Sin autem β γ basin non esse aptam & conuenientem ε ζ aliquis contendat, cum tamen β terminus ε termino, & γ terminus ζ termino conueniat, is necesse est admittat duas rectas locum includere, quod cum fieri nequeat (per vltimam notionem) bases β γ, ε ζ aptas & conuenientes inter se mutuò esse necesse est, quapropter etiam æquales (per octauam notionem.) Proinde & totum triangulum α β γ toti triangulo δ ε ζ aptum & conueniens est, atq; ideo æquale, nec non & reliqui anguli reliquis angulis. sicut α β γ angulus δ ε ζ angulo, α γ β verò δ ζ ε æqualis est. Si igitur duorum triangulorum &c. quod demonstrandum erat.

E

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



V.

In his triangulis quæ duo æqualia crulia crura habent, anguli iuxta basim inter se æquales sunt, & si vlterius productæ sint rectæ illæ lineæ æquales, erunt etiam anguli infra basim inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

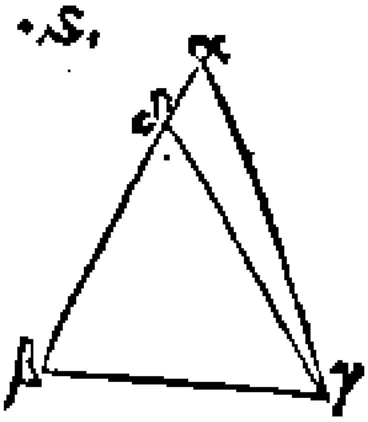
Sit triangulum α γ β, quod duo æqualia crura habeat, & α β latus æquale sit α γ lateri, & continuata directione producantur α β in δ, & α γ in ε. Dico α β γ, α γ β angulos iuxta basin esse æquales, & angulum quoq; δ β γ, angulo ε γ β, infra basin æqualem esse. In β δ namq; sumatur fortuitum punctum ζ, & recta α ζ constituatur, æqualis α η rectæ, & connectantur lineis rectis puncta ζ γ, η β. In duobus igitur triangulis α ζ γ, α η β, duo latera vnius æqualia sunt, duobus lateribus alterius, sic vtrumq; vtriq; vt respondeat α ζ quidem ipsi α η, & α γ ipsi α β, ac γ α ζ angulus æqualis est, η α β angulo (quia est idem angulus vel vtriq; communis.) Basis itaq; ζ γ æqualis est basi η β, & α ζ γ triquetrum, α η β triquetro, & angulus α γ ζ æqualis angulo α β η. Item angulus α ζ γ angulo α η β. (per quartam propositionem.) Porrò in triangulis γ β ζ, β γ η, duo latera β ζ, ζ γ, æqualia sunt duobus lateribus, γ η, β η, & β ζ respondet ipsi η γ, & ζ γ ipsi η β, & anguli γ η β, β ζ γ, æquales sunt, vt demon-

 stratum

stratum est. Basis igitur β γ æqualis est basi γ β, & totum triquetrum β ζ γ, toti triquetro β η γ, & angulus ζ β γ, angulo η γ β. Sed demonstratum est angulũ η β α, æqualem esse angulo ζ γ α, ab illo auferatur η β γ, ab hoc ζ γ β, qui etiam æquales sunt, & relinquentur γ β α, β γ α anguli, qui sunt iuxta basin, æquales. Si enim ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent sunt æqualia (per tertiam notionem.) Demonstratum etiam est ζ γ β, η β γ angulos æquales esse. In triangulis igitur quæ duo æqualia &c. quod demonstrandum erat.

alterum æqualitas ex æqualitate angulorum hic [illegible] conversa [illegible]

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



V I.

Si triangulum duos angulos æquales inter se habeat, erunt etiam latera æqualia, quæ subter æquales angulos subtendunt.

DEMONSTRATIO.

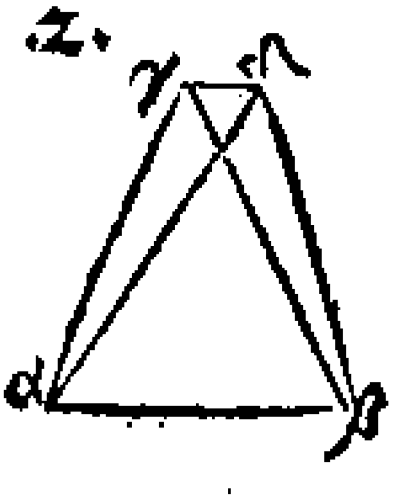
Sit triangulum α β γ, quod angulum α β γ æqualem habeat α β γ angulo, Dico α β latus

æquale

æquale esse lateri α γ. Sin verò quispiam hæc latera inæqualia esse dixerit, alterum eorum maius erit, & sit α β maius, de maiori autem α β auferatur recta β δ, æqualis minori α γ (per tertiã) & ducatur recta δ γ. In duobus igitur triangulis α β γ, δ β γ, latera duo vnius β γ, β δ, æqualia sunt duobus lateribus γ β, γ α, & β δ, ipsi α γ, ac β γ vtriq; communis. Et angulus δ β γ, qui scilicet duobus rectis æqualibus, includitur angulo α γ β æqualis est, ex hypothesi. Basis igitur α β, æqualis est δ γ basi (per proposit. 4.) & totum triangulum α γ β, toti triangulo δ γ β, maius minori quod est absurdum. Si igitur triangulum duos angulos &c. quod demonstrandum erat.

Z

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα, οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Negata est positio, quod si affirmetur incidit in co... uam.

VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis, aliæ duæ rectæ æquales, sic, vtraq; vtriq; vt respondeat, nun-

 quam

quam componentur, in alio atque alio puncto, ad easdem partes, vt extrema habeant eadem cum propositis rectis.

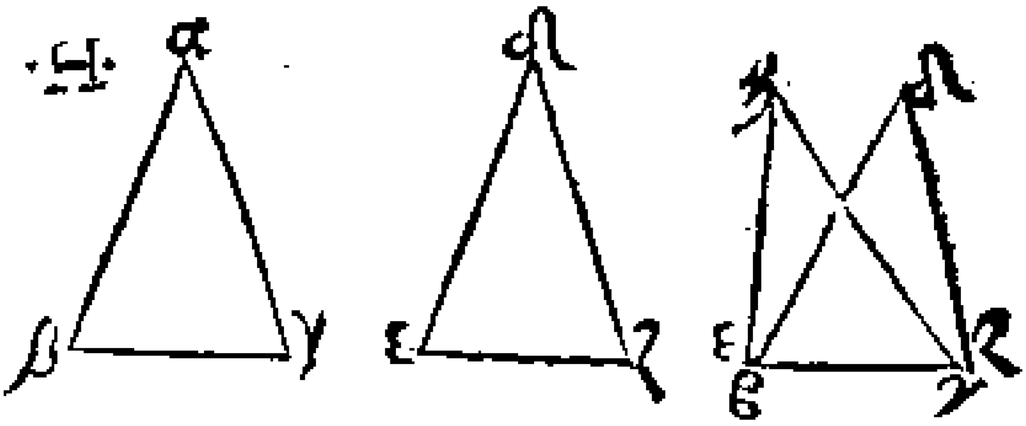
DEMONSTRATIO.

A terminis rectæ α β, deducantur duæ rectæ, quæ in γ puncto concurrant, & sint illæ duæ rectæ α γ, β γ. Dico non fieri posse, vt aliæ duæ rectæ ab ijsdem terminis α, β, & α γ, β γ. rectis æquales in also atq; alio puncto, quam in γ puncto easdem partes versus componantur. Si verò hoc fieri posse quispiam affirmabit componantur α γ, γ β lineæ easdem partes versus in puncto δ & α δ recta æqualis esto α γ rectæ. Item β δ recta, β γ rectæ. Connectantur puncta γ δ per lineam rectam. Quoniam α γ, α δ rectæ æquales sunt (ex hypothesi) erit angulus α γ δ, angulo α δ γ æqualis, (per quintam) sed β δ γ angulus est maior angulo α δ γ (per nonam notionem.) Maior itaq; est & β δ γ, angulus α γ δ, angulo eò quod demonstrabatur æqualis α δ γ angulo. Item α δ γ angulus maior est angulo β γ δ, (per nonam notionem.) ac β δ, β γ rectæ ex hypothesi sunt æquales. Angulus igitur β δ γ, β γ δ sunt æquales (per quintam.) Est igitur β δ γ angulus, & longè maior angulo β γ δ, & eidem æqualis quod est absurdum. Super eadem igitur recta &c. quod demonstrandum erat.

Ἐὰν δύο

Η

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, ſic, vtrunq; vtriq; vt reſpondeat, Siq́ue baſin quoque habuerint baſi æqualem, tum etiam angulum angulo æqualem habebunt, eum quem æquales rectæ includunt.

Triangul... inter se ... latera ... æquiang...

DEMONSTRATIO.

Sint duo triangula α β γ, δ ε ζ, quæ habent duo latera α β, α γ, duob. lateribus δ ε, δ ζ æqualia, ſic vtrumq; vtriq; vt reſpondeat, & baſin β γ æqualem baſi ε ζ, Dico angulum β α γ æqualem

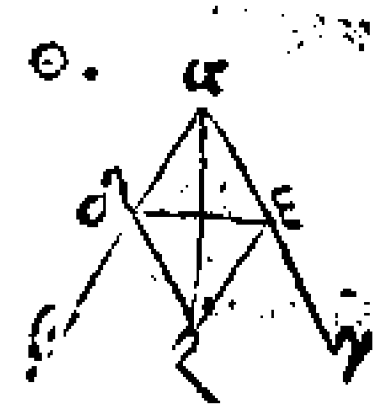
eſſe

esse angulo $\epsilon\delta\zeta$. Sint enim $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$ apta inter se mutuò, & conuenientia triangula, & β punctum ponatur super ϵ, & recta $\beta\gamma$ super $\epsilon\zeta$ rectam, & quia æquales sunt, γ punctum concurret cum ζ puncto. Quando verò $\beta\gamma$ apta & conueniens est $\epsilon\zeta$ rectæ, erunt $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ rectis, $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$ aptæ & conuenientes. Sin autem $\beta\gamma$ est apta & conueniens rectæ, $\epsilon\zeta$ & latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, non conuenient lateribus $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$, sed deerrant vt $\epsilon\eta$, $\eta\zeta$, tunc super eadem recta $\epsilon\zeta$, duabus eisdem rectis $\epsilon\delta$, $\delta\zeta$, aliæ duæ rectæ æquales, $\epsilon\eta$, $\eta\zeta$, ab ijsdem terminis $\epsilon\zeta$, & $\epsilon\eta$, quidem æqualis rectæ $\epsilon\delta$, & $\eta\zeta$ rectæ $\delta\zeta$ ad aliud punctum quam ad δ easdem partes versus videlicet ad η componentur. Sed hoc vt demonstratum est (in 7. proposit.) fieri nequit. Si igitur duo triangula duo latera &c. quod demonstrandum erat.

PROBLEMATA IIII.

Θ

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, δίχα τεμεῖν.



I X.

Datus angulus rectarum linearum, æqualiter dissecandus est.

DEMONSTRATIO.

Sit

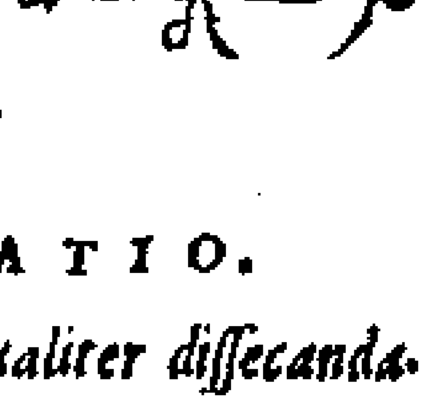
Sit datus angulus rectarum linearum β α γ in duas æquales partes secandus. In α β recta sumatur fortuito punctum δ, & fiat α ε, pars rectæ α γ, æqualis rectæ α δ. Et puncta δ ε per lineam rectam connectantur. Item super δ ε rectam, triangulum æqualium laterum δ ζ ε constituatur. (per primam) & ducatur α ζ recta. Dico rectam α ζ, angulum qui sub β α γ est, in duas æquales partes secare, Recta α δ, rectæ α ε, æqualis est, & α ζ communis. Duæ igitur rectæ, α δ, α ζ, duabus rectis, α ε, α ζ æquales sunt, sic vtraq; vtriq; vt respondeat. Et basis δ ζ, basi ε ζ æqualis est, per κατασκευὴν. Angulus igitur δ α ζ, æqualis est angulo ε α ζ (per octauam propositionem.) Proinde angulus, qui sub β α γ, in duas æquales partes per α ζ rectam sectus est, quod fieri debuit.

I

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

X.

Data recta finita, æqualiter dissecanda est.



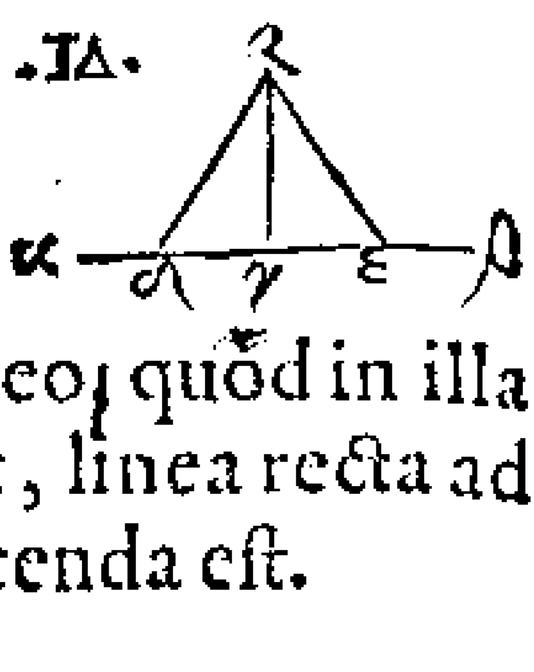
DEMONSTRATIO.

Sit data recta finita α β æqualiter dissecanda. Constituatur super eam triangulum æqualium laterum α β γ, & angulus qui sub α γ β, secetur æqualiter,

æqualiter, per rectam γ δ. Dico quod recta α β in δ puncto, æqualiter sit dissecta. Quoniam igitur recta α γ, æqualis est rectæ γ β, communis autem γ δ recta, erunt duæ rectæ α γ, γ δ, duabus rectis β γ, γ δ æquales, sic vtraq; vtriq; vt respondeat, & angulus qui sub α γ δ, æqualis est angulo β γ δ (per nonam.) Basis itaq; α δ, basi β δ æqualis est (per quartam.) Data igitur recta finita α β æqualiter in puncto δ dissecta est, quod fieri debuit.

ΙΑ

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



X I.

A data recta, ex eo quod in illa datum punctum fuit, linea recta ad angulos rectos educenda est.

DEMONSTRATIO.

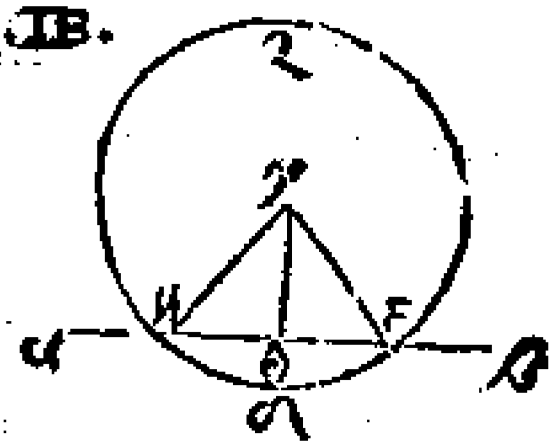
Sit data recta α β, datum autem in ea punctum γ, ex quo linea recta ad angulos rectos, recta α β educenda est. In α γ sumatur fortuitò punctum δ, & rectæ γ δ fiat γ ε æqualis. Item super δ ε rectam, constituatur triangulum æqualium laterum ζ δ ε, & ducatur ζ γ recta. Dico

quod

quod data recta α β, ex puncto γ, quod in illa datum est, ad angulos rectos educta sit recta γ ζ. Quoniam enim recta δ γ, æqualis est rectæ ε γ, & ζ γ recta communis. Duæ itaq; δ γ, γ ζ, duabus ε γ, ζ γ æquales, sic vtraq; vtriq; vt respondeat, & basis δ ζ æqualis est basi ε ζ, (per κατασκ.) *Angulus igitur δ γ ζ æqualis est angulo ε γ ζ, & sunt anguli continui. Vterq; igitur angulorum δ γ ζ, ε γ ζ est rectus. A data igitur recta &c. quod fieri debuit.*

IB

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



XII.

Ad datam rectam infinitam, de dato puncto, quod in ipsa non est, perpendicularis recta linea ducenda est.

Datam rectā finitam bisecare.

DEMONSTRATIO.

Sit data recta infinita α β, datum verò punctum γ, quod in ipsa non est, à quo in α β perpendicularis recta linea ducenda est. Super γ describatur

ſcribatur circulus $\delta\zeta$ tanti interualli, vt $\alpha\beta$ rectam ſecet fortuito in punctis $\eta\ \epsilon$, & $\epsilon\ \eta$, recta diuidatur in duas partes æquales, in puncto ϑ, (per 10. propoſit.) Connectantur $\gamma\eta$, $\gamma\vartheta$, $\gamma\epsilon$ lineis rectis. Dico quod ad datam rectam infinitam $\alpha\ \beta$, de dato puncto γ, quod in ipſa non eſt, perpendiculum deductum ſit $\gamma\vartheta$. In duobus igitur triangulis $\gamma\vartheta\eta$, $\gamma\vartheta\epsilon$, duo latera $\eta\vartheta$, $\vartheta\gamma$, æqualia ſunt duobus lateribus $\epsilon\vartheta$, $\vartheta\gamma$, ſic vtrumq; vtriq; vt reſpondeat. Et baſis $\gamma\eta$ æqualis eſt baſi $\gamma\epsilon$ (quia ſunt ea quæ ex centro.) Angulus itaq; $\gamma\vartheta\eta$, æqualis eſt angulo $\gamma\vartheta\epsilon$ (per 8. propoſi.) Et ſunt anguli continui, vterq; itaq; eſt rectus, & $\gamma\vartheta$ recta perpendiculum eſt ſuper $\alpha\beta$ rectam infinitam, per definitionem perpendiculi, quæ eſt vndecima. Ad datam igitur rectam &c. quod faciendum & demonſtrandum erat.

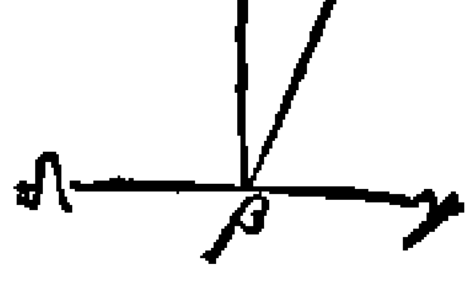
THEOREMATA IX.

ΙΓ

Si recta insistit / in rectam, æquales / ... angulos / ... duob. rectis

Ὡς ἂν εὐθεῖα, ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

XIII.

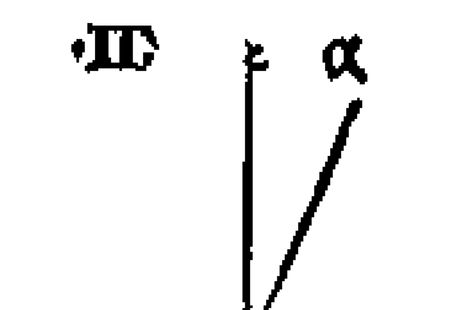


Si rectam ſuper recta quocunque modo collocaueris, ita vt anguli fiant, erunt *scribatur circulus δ ζ tanti interualli, vt α β rectam secet fortuito in punctis η ε, & ε η, recta diuidatur in duas partes æquales, in puncto ϑ, (per 10. proposit.) Connectantur γ η, γ ϑ, γ ε lineis rectis. Dico quod ad datam rectam infinitam α β, de dato puncto γ, quod in ipsa non est, perpendiculum deductum sit γ ϑ. In duobus igitur triangulis γ ϑ η, γ ϑ ε, duo latera η ϑ, ϑ γ, æqualia sunt duobus lateribus ε ϑ, ϑ γ, sic vtrumq; vtriq; vt respondeat. Et basis γ η æqualis est basi γ ε (quia sunt ea quæ ex centro.) Angulus itaq; γ ϑ η, æqualis est angulo γ ϑ ε (per 8. proposi.) Et sunt anguli continui, vterq; itaq; est rectus, & γ ϑ recta perpendiculum est super α β rectam infinitam, per definitionem perpendiculi, quæ est vndecima. Ad datam igitur rectam &c. quod faciendum & demonstrandum erat.*

THEOREMATA IX.

ΙΓ

Ὡς ἂν εὐθεῖα, ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



XIII.

Si rectam super recta quocunque modo collocaueris, ita vt anguli fiant, erunt

erunt anguli duo recti aut duobus rectis æquales.

DEMONSTRATIO.

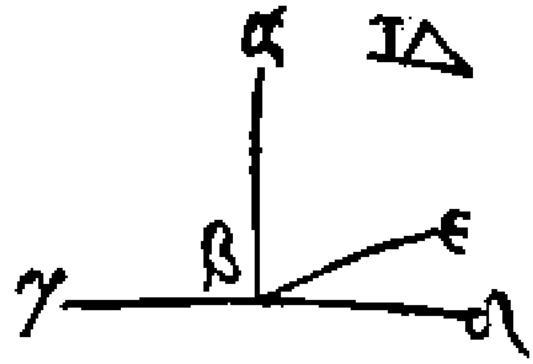
Recta quædam α β insistat rectæ γ δ, & cum ea faciat angulos γ β α, α β δ. Dico hos angulos aut duos rectos esse, aut duobus rectis æquales. Si enim γ β α, α β δ æquales sunt, erunt & recti, quia continui. Sin verò inæquales fuerint ex β puncto educatur perpendiculum β ε, super γ δ. Anguli igitur γ β ε, ε β δ sunt duo recti. Item quia γ β ε æqualis est duobus angulis γ β α, α β ε, assumatur angulus ε β δ. Duo itaq; γ β ε, ε β δ anguli æquales sunt tribus angulis γ β α, α β ε, ε β δ. Rursus quia angulus δ β α, æqualis est duobus δ β ε, ε β α, assumatur angulus α β γ. Duo igitur δ β α, α β γ æquales sunt tribus δ β ε, ε β α. α β γ angulis. Sed & demonstratum est γ β ε, ε β δ angulos, ijsdem trib. æquales esse. Quæ verò sunt æqualia vni, & inter se æqualia sunt. Angulis igitur γ β ε, ε β δ æquales sunt anguli δ β α, α β γ. At γ β ε, ε β δ sunt duo recti (per apparatum.) Proinde δ β α, α β γ anguli duobus rectis sunt æquales. Igitur si rectam super rectam &c. quod demonstrandum fuit.

ΙΔ

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ,

C

μείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



XIIII.

Si ad aliquam rectam & punctum in illa, duæ rectæ non easdem partes versus sitæ, continuos angulos duobus rectis æquales fecerint, directa extensio illarum rectarū futura est.

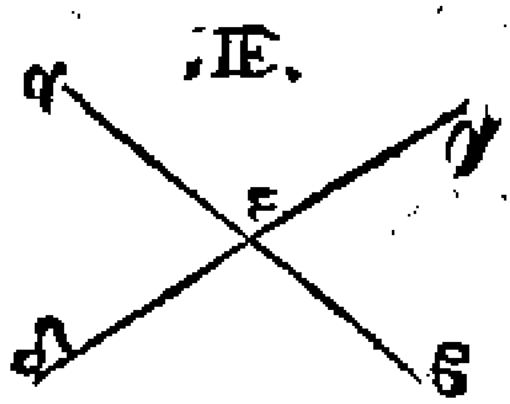
DEMONSTRATIO.

Ad datam rectam α β, & ad punctum eius β duæ rectæ β γ, β δ non easdem partes versus sitæ sint, & continuos angulos α β γ & α β δ faciant duobus rectis æquales. Dico γ β & β δ rectarum, extensionem esse directam. Quod si γ β non est in directa extensione, rectæ β δ, esto quod β ε cum γ β, sit in directa extensione, Quoniam itaq; α β recta, γ β ε rectæ insistit, facit duos angulos γ β α, α β ε duobus rectis æquales (per 13.) sed & α β γ, α β δ duobus rectis sunt, per hypothesin æquales. Anguli igitur γ β α, α β ε æquales sunt, angulis α β γ, α β δ, auferatur angulus communis α β γ. Reliquus igitur angulus α β ε æqualis est angulo α β δ.

α ϐ δ. Minor videlicet angulus, maiori, quod fieri nequit. Proinde ϐ δ cum γ ϐ est in directa extensione. Si igitur ad aliquam rectam &c. quod demonstrandum erat.

IE

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.



XV.

Cum duæ rectæ sese mutuo secant, fit vt fastigiorum anguli sint inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

Duæ enim rectæ α ϐ, γ δ se mutuo in ε puncto intersecent. Dico angulum α ε γ æqualem esse angulo δ ε ϐ. Item angulum γ ε ϐ, æqualem esse angulo α ε δ. Quoniam enim recta α ε insistit rectæ δ γ: & cum ea facit γ ε α, α ε δ angulos, erunt anguli γ ε α, α ε δ, duobus rectis æquales (per 13.) Rursus quoniam recta δ ε insistit rectæ α ϐ, & cum ea angulos α ε δ, δ ε ϐ facit, erunt α ε δ, δ ε ϐ anguli duobus rectis æquales. Duo igitur γ ε α, α ε δ anguli æquales sunt, duobus α ε δ, δ ε ϐ angulis. Auferatur α ε δ angulus communis, reliquus igitur γ ε α reliquo δ ε ϐ æqualis. Similiter

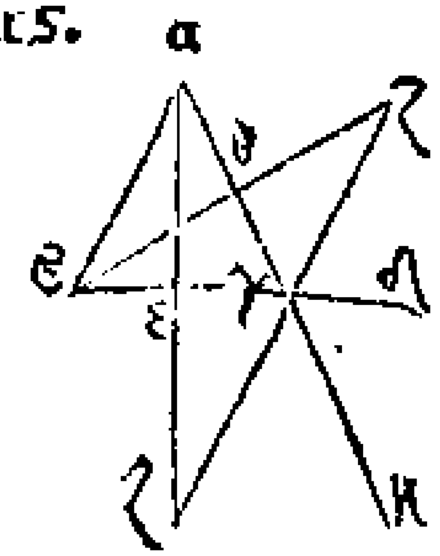
 demon-

demonstrabitur angulum γ ε β æqualem esse angulo δ ε α. Quando itaq; duæ rectæ &c. quod demonstrandum fuit.

ις

Παντὸς τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστί.

ις.



X V I.

Vniuscuiusque trianguli, producto aliquo latere illius, angulus exterior, vtrouis eorum qui intus & ex aduerso sunt, maior est.

DEMONSTRATIO.

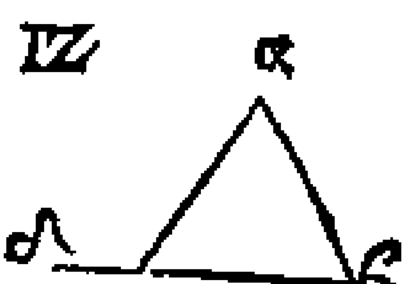
Sit triangulum α γ β, cuius latus β γ producatur in δ. Dico angulum α γ δ exteriorem, vtrouis eorum, qui intus & ex aduerso sunt angulorum γ β α, γ α β maiorem esse. Secetur latus α γ æqualiter in puncto ε (per 10. proposit.) & ducatur β ε, ac producatur in ζ, & fiat ε ζ recta, æqualis rectæ β ε, & connectantur per lineam rectam ζ γ puncta. Item α γ in η extendatur. Quoniam α ε recta æqualis est, rectæ ε γ (per κατασκ.) & β ε recta, ε ζ rectæ. In triangulis igitur α ε β, ζ ε γ, duo latera, α ε, β ε æqualia sunt

duobus

duobus lateribus ε γ, ε ζ, sic vtrumq; vtriq; vt respondeat, & angulus α ε β æqualis est angulo ζ ε γ. Sunt enim fastigiorum anguli. Basis igitur α β, æqualis est basi ζ γ, & α β ε triquetrum, ζ ε γ triquetro, & reliqui anguli reliquis angulis, alter alteri quos æqualia latera subtendunt æquales, igitur ζ γ ε, angulus, β α ε angulo, est æqualis. Proinde α γ δ angulus, maior est β α γ angulo. Similiter si æqualiter β γ secetur, & fiat apparatus, vt prius, de angulo β α γ demonstrabimus, β γ η angulum maiorem esse angulo α β γ, sed β γ η, α γ δ fastigiorum anguli sunt æquales. Maior igitur α γ δ angulus est α γ β angulo, sed & β α γ angulo maiorem esse α γ δ demonstratum est. Vniuscuiusq; igitur trianguli &c. quod demonstrandum fuit.

IZ

Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Principium [illegible], aut ex principio hoc demonstratum, quod cuiuslibet trianguli duo anguli [illegible].

XVII.

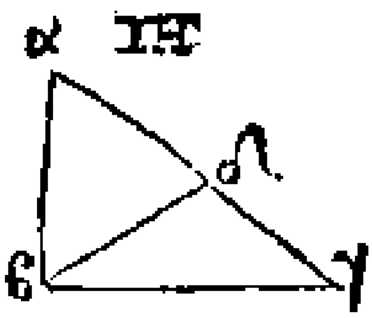
Vniuſcuiuſq; trianguli, duo anguli duobus rectis minores ſunt, quacunque ratione permutentur.

DEMONSTRATIO.

Sit triangulum αβγ, Dico quod αβγ trianguli, duo anguli, minores sint duobus rectis quomodocunq; permutentur. Producatur βγ latus, in δ punctum. Quoniam igitur αγδ angulus est exterior, maior est αβγ interiori & ex aduerso (per 16. proposit.) Assumatur αγβ angulus communis, anguli igitur αγδ, αγβ maiores sunt angulis αγβ, αβγ, sed anguli αγδ, αγβ duobus rectis sunt æquales (per 13. proposit.) Proinde αγβ, αβγ anguli duobus rectis minores sunt, similiter constat βαγ, αγβ angulos, Item αγβ, αβγ angulos duobus rectis minores esse. Vniuscuiusq; igitur trianguli &c. quod demonstrandum fuit.

IH

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.



X V I I I.

Vniuſcuiuſq; trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

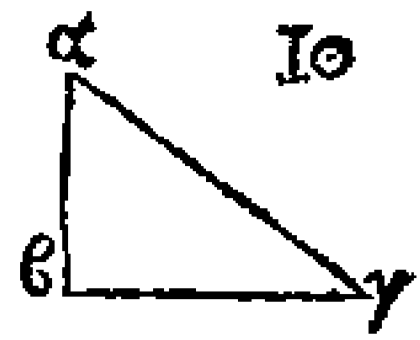
D E M O N S T R A T I O.

Sit triangulum αβγ, cuius αγ latus maius sit lateri αβ. Dico αβγ angulum maiorem esse angulo αγβ, quia αγ latus maius est lateri αβ, de αγ abscindatur recta αδ æqualis rectæ αβ, & conectan-

connectantur β δ. Quoniam trianguli β δ γ, δ γ latus productum est in α, angulus β δ α exterior, maior est δ γ β interiori, & ex aduerso, aequalis autem est α β δ angulus α δ β angulo, propter α β, α δ latera aequalia (per 5. proposit.) Erit igitur α β δ angulus, maior α γ β angulo, quare & α β γ angulus, longè maior erit α γ β angulo. Vniuscuiusque itaq; trianguli maius latus &c. quod demonstrandum fuit.

IΘ

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



XIX.

Vniuscuiusque trianguli maius latus subter maiorem angulum subtendit.

DEMONSTRATIO.

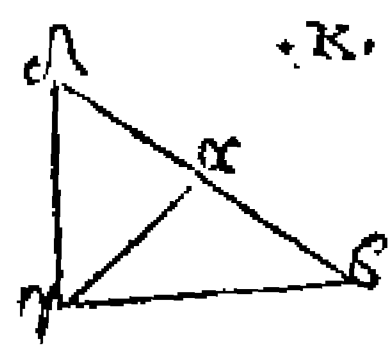
Esto quod triangulum α β γ, maiorem α β γ angulum, habeat α γ β angulo. Dico quod latus α γ maius sit quam α β latus. Quod si α γ latus non est maius α β latere, necesse est, vt ei sit aut aequale, aut minus. Anguli verò α β γ, α γ β non sunt aequales (per hypothesin.) Latera igitur α β, α γ non sunt aequalia. Aequalia enim latera aequales angulos subtendunt per consequentiam 18. propositionis. Item α γ latus, non est minus quam α β

 latus.

latus. Si enim esset minus tunc etiam $\alpha\beta\gamma$ angulus, minor esset $\alpha\gamma\beta$ angulo, quod est contra hypothesin. Non est igitur $\alpha\gamma$ latus minus quam $\alpha\beta$. Demonstratum autem est, quod neq; inter se sint æqualia. Proinde $\alpha\gamma$ latus maius erit latere $\alpha\beta$. Vniuscuiusq; igitur trianguli &c. quod demonstrandum fuit.

K

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς, μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



X X.

Vniuſcuiuſq; trianguli, duo latera maiora ſunt reliquo quacunq; ratione permutentur.

[illegible] hoc ostendi & definitione lineæ rectæ.

DEMONSTRATIO.

Sit $\alpha\beta\gamma$ triangulum. Dico quod eius duo latera quomodocunq; permutentur maiora sint reliquo. Veluti $\beta\alpha$ & $\alpha\gamma$ latera maiora sunt latere $\beta\gamma$. Item $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ latera, $\alpha\gamma$ latere, & $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, latera $\alpha\beta$ latere. Producatur $\beta\alpha$ continuata directione in δ, & fiat rectæ $\alpha\gamma$ equalis, $\alpha\delta$ recta. Connectantur per lineam rectam puncta $\delta\gamma$. In triangulo igitur $\delta\alpha\gamma$ (quia $\alpha\delta$, $\alpha\gamma$ latera sunt æqualia) erunt (per 5.) anguli iuxta basin $\alpha\delta\gamma$, $\alpha\gamma\delta$ æquales. Sed & $\beta\gamma\delta$ angulus maior est

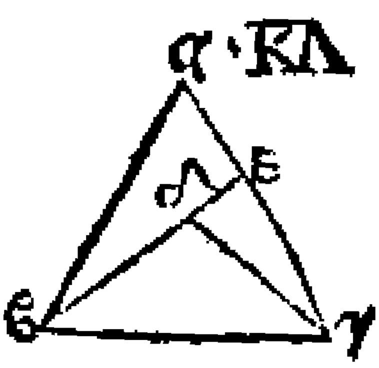
angulo

angulo α γ δ, Maior itaq; & qui alteri æqualis α δ γ angulo. Et quia δ γ β est figura triquetra, cuius β γ δ angulus maior est β δ γ angulo. Vniuscuiusque verò trianguli maius latus maiorem angulum subtendit (per 18.) Latus δ β maius est latere β γ. At δ β recta, æqualis est β α, α γ lateribus, Maiora igitur sunt β α, α γ latera, β γ latere. Similiter demonstrabimus quod tum α β, β γ, maiora sint α γ latere, tum etiam β γ, γ α maiora α β latere. Vniuscuiusq; igitur &c. quod demonstrandum erat.

ΚΑ

Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν, ἀπὸ τῶν περάτων, δύο εὐθεῖαι, ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

ΚΑ



XXI.

Cum super trianguli vno latere, inde vbi illius termini sunt, duæ rectæ interius ductæ compositæ fuerint, illæ sic compositæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, sed angulum includent maiorem.

Ambitus
contenti tr-
guli, amb-
continentis
minor est

 Demon-

DEMONSTRATIO.

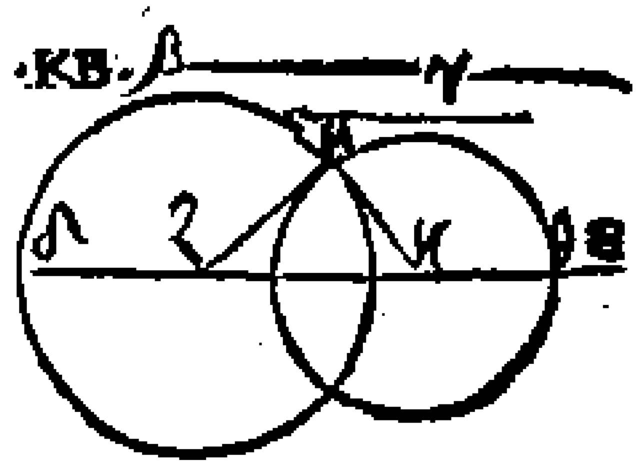
Super trianguli enim vno latere $\beta\gamma$, inde vbi illius extrema sunt $\beta\gamma$, duæ rectæ $\beta\delta$, $\delta\gamma$ interius ductæ componantur in puncto δ. Dico quod rectæ $\beta\delta$, $\delta\gamma$, sic compositæ reliquis trianguli lateribus $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ minores quidem sunt, sed angulum $\beta\delta\gamma$ quem includunt, maiorem esse $\beta\alpha\gamma$ angulo. Producatur $\beta\delta$ in ε. Quoniam vniuscuiusq; trianguli duo latera, reliquo maiora sunt (per præcedentē.) erunt trianguli $\alpha\varepsilon\beta$ duo latera $\alpha\varepsilon$, $\alpha\beta$ maiora latere $\beta\varepsilon$. Assumatur $\gamma\varepsilon$ recta communis. Rectæ igitur $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ maiores sunt rectis $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$ (per 4. not.) Rursus, quoniam in triangulo duo latera $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ maiora sunt $\delta\gamma$ latere, assumatur communis recta $\delta\beta$. Rectæ igitur $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\beta$, maiores sunt rectis $\delta\beta$, $\beta\gamma$. Sed demonstratum est $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$ rectas, minores esse $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ rectis, igitur $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ rectæ longè maiores sunt $\beta\delta$, $\delta\gamma$ rectis. Porrò quia vniuscuiusq; trianguli angulus exterior maior est vtrouis eorum angulorum, qui intus & ex aduerso sunt, (per 16.) trianguli igitur $\gamma\delta\varepsilon$ angulus exterior, $\beta\delta\gamma$ maior est angulo $\gamma\varepsilon\delta$. Eadem de causa trianguli $\alpha\beta\varepsilon$ angulus exterior $\gamma\varepsilon\beta$, maior est $\beta\alpha\varepsilon$ angulo. Sed $\gamma\varepsilon\beta$ angulo maior est $\gamma\delta\beta$ angulus. Angulus igitur $\beta\delta\gamma$ longè maior est angulo $\beta\alpha\gamma$. Cum igitur &c. quod demonstrandum erat.

PROBLEMATA II.

Ἐκ τριῶν

KB

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι.



·KB·

Δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς, μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

XXII.

Ex tribus rectis quæ ſint tribus rectis datis æquales, triangulum conſtituendum eſt. Cæterum duas maiores eſſe reliqua oportet quacunq; ratione permutentur, propterea quod cuiuſcunque trianguli duo latera quacunq; ratione permutentur reliquo ſint maiora.

DEMONSTRATIO.

Sint propoſitæ α, β, γ, tres lineæ rectæ, quæ hac inter ſe ratione ſint, vt duæ quæq; quacunq; ratione permutentur, tertia ſint longiores, veluti α & β ſint longiores γ, vel β & γ longiores α, vel α &

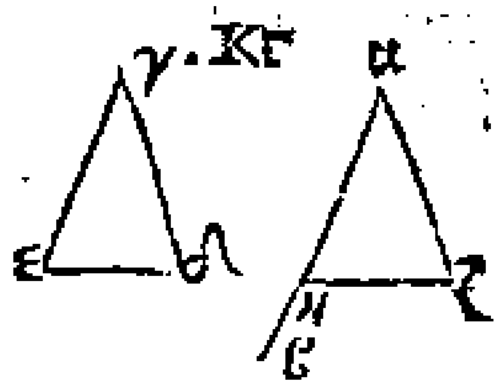
γ ſint

γ sint longiores β. Constituendum sit triquetrum quod tria latera æqualia habeat, α, β, γ, rectis, sic vt singula singulis respondeant. Sumatur $\delta\varepsilon$ recta finita quidem ad δ partes, Infinita verò ad ε. De $\delta\varepsilon$ recta abscindatur $\delta\zeta$ recta æqualis α rectæ (per tertiam.) & de $\zeta\varepsilon$ abscindatur $\eta\vartheta$ æqualis γ rectæ, facilis est æstimatio, si $\zeta\delta$ & $\eta\vartheta$, ad commune punctum componantur, fieri requisitum triquetrum. Hoc autem Geometricè sic fit. Centro ζ & interuallo $\zeta\delta$ describatur circulus $\delta\kappa\lambda$ per tertium petitum. Sic & centro η, interuallo $\eta\vartheta$ describatur circulus $\kappa\vartheta\lambda$. Horum duorum circulorum communes sectiones, veluti κ ostendunt punctum, ad quod prædictæ lineæ componi poterant. Connectantur igitur per lineam rectam $\zeta\kappa$, $\eta\kappa$, dico $\zeta\eta\kappa$ triquetrum habere tria latera æqualia $\alpha\beta\gamma$ rectis, sic vt singula singulis respondeant. Respondet enim $\zeta\kappa$ latus rectæ α, $\zeta\eta$ latus rectæ β, Item $\eta\kappa$, γ, quæ ex prima notione manifesta sunt. Cum enim punctum ζ centrum sit circuli $\delta\kappa\lambda$ erit recta $\zeta\delta$ æqualis rectæ $\zeta\kappa$ (per 16. definit.) recta autem $\zeta\delta$, æqualis est rectæ α, (per κατασκ.) Igitur & $\kappa\zeta$ æqualis est rectæ α. Rursus quia punctum η centrum est circuli $\kappa\lambda\vartheta$. Igitur recta $\eta\vartheta$ est æqualis rectæ $\eta\kappa$, $\eta\vartheta$ autem æqualis est γ rectæ. Ergo & $\eta\kappa$ æqualis est eidem rectæ γ, & cum $\zeta\eta$ æqualis sit rectæ β (per κατασκευήν.) erunt tres rectæ $\kappa\zeta$, $\kappa\eta$, $\eta\zeta$, constituentes triangulũ trib. rectis datis $\alpha\beta\gamma$ æqualis, quod faciendum erat.

Πρὸς

ΚΓ

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



XXIII.

Ad datam rectam & certum punctum illius, angulus linearum rectarum, æqualis angulo dato rectarum linearum, constituendus est.

DEMONSTRATIO.

Si ad datam α β rectam, & ad eius α punctum datũ, constituendus sit angulus æqualis ei, quem ε γ, δ γ recta includunt, Rectarum γ ε, γ δ, puncta, per lineam rectam connectantur. Et ad α β rectam constituatur α η ζ triangulum, vt α η recta, sit æqualis γ ε recta, & α ζ recta, γ δ recta, ac η ζ, basis, ε δ basi (per 22. proposit.) Erit igitur η α ζ angulus æqualis ε γ δ angulo (per octauam propositionem.) quod faciendum & demonstrandum erat.

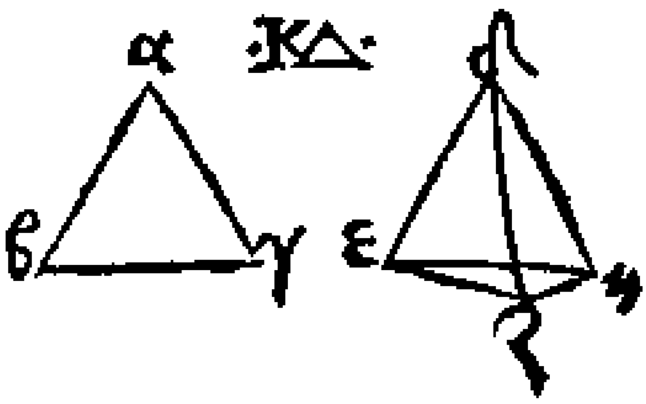
THEOREMATA VII.

ΚΔ

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς

δυσὶ

δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.



X X I I I I.

Si duo triangula, duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, ſic, vtrunq; vtrique vt reſpondeat, angulum autem angulo maiorem habuerint, eum quem æquales illæ rectæ includunt, maiorem etiam baſim baſi habebunt.

DEMONSTRATIO.

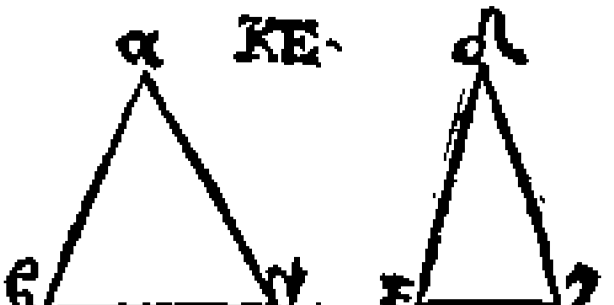
Sint duo triangula α ϐ γ, δ ε ζ, in quibus duo latera α ϐ, α γ æqualia ſint duobus lateribus, alterius ſcilicet δ ε, δ ζ, ſic vtrumq; vtriq; vt reſpondeat, angulus autem ϐ α γ, maior ſit ε δ ζ angulo. Dico baſin quoq; ϐ γ maiorem eſſe baſi ε ζ. Quoniam α ϐ γ trianguli, ϐ α γ angulus maior eſt ε δ ζ angulo trianguli δ ε ζ, & α ϐ latus æquale eſt δ ε lateri, item α γ latus δ ζ lateri, ad punctum δ recta δ ε conſtituatur, ε δ η angulus æqualis

lis

lis β α γ angulo (per 23.) & fiat δ η recta vtriq; α γ, δ ζ rectæ æqualis, & ε η, ζ η puncta per lineas rectas connectantur. Est igitur trianguli ε δ η basis, ε η æqualis β γ basi (per 4. proposit.) & δ η ζ, δ ζ η anguli sunt æquales (per 5. proposi.) Cum igitur δ ζ η angulus maior sit ε η ζ (quia totum est maius parte) ε ζ η angulus longe maior erit ε η ζ angulo, quare recta ε η maior est ε ζ recta (per 19. proposit.) quamobrem & β γ basis, maior est ε ζ basi. Si duo igitur triangula duo latera &c. quod demonstrandum erat.

KE

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα



ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

XXV.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia, sic, vtrunq; vtriq; vt respondeat, basim verò basi maiorẽ habuerint, angulum etiam habebunt maiorem angulo eo, quem æquales illæ rectæ includunt.

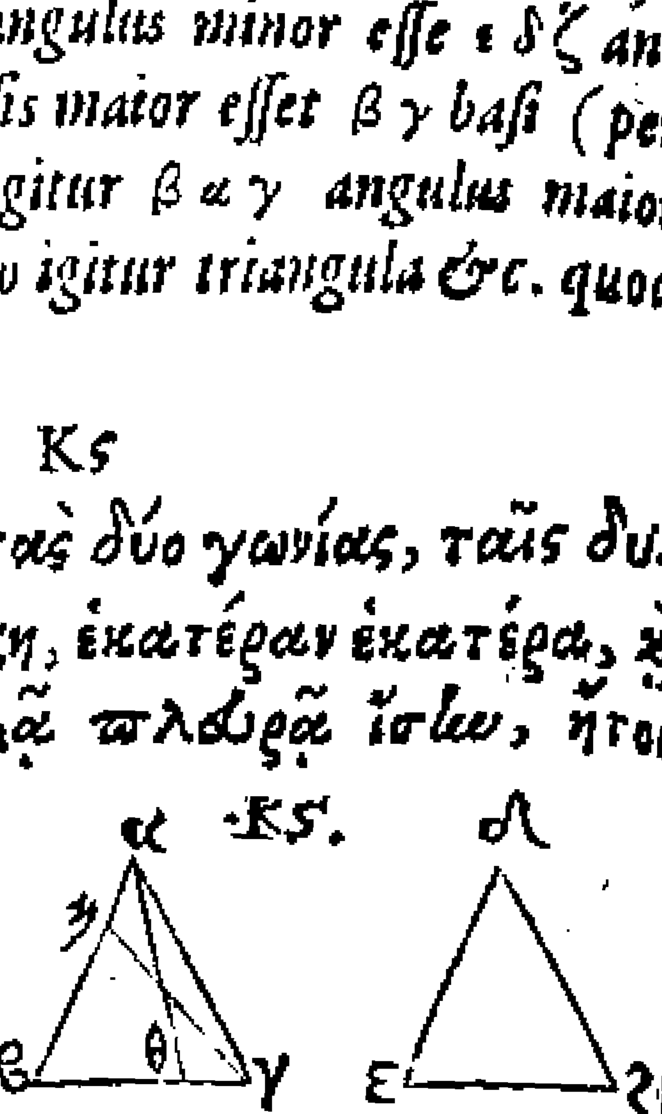
D E-

DEMONSTRATIO.

Si β α γ trianguli, α β latus æquale sit δ ε lateri, δ ε ζ trianguli; & α γ latus, δ ζ lateri, basis verò β γ maior sit ε ζ basi, angulus β α γ non potest esse æqualis ε δ ζ angulo, quia (per 4. prop.) β γ basis æqualis esset ε ζ basi, quod est contra hypothesin, neq; β α γ angulus minor esse ε δ ζ angulo, sic enim ε ζ basis maior esset β γ basi (per 24. proposit.) Est igitur β α γ angulus maior ε δ ζ angulo. Si duo igitur triangula &c. quod demonstrandum erat.

Κϛ

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις, ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων



γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς, ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

XXVI.

Si duo triangula, duos angulos duobus angulis æquales habuerint,

sic

ſic, vterque vtrique vt reſpondeat, & latus vnum vni lateri æquale, ſiue id quod æquales illos angulos attingit, ſeu ſubtendens ſub vnum ex æqualibus angulis: reliqua etiam latera reliquis lateribus æqualia habebunt, ſic, vtrunque vtrique vt reſpondeat. Itemq́ue angulum reliquum reliquo angulo.

DEMONSTRATIO.

Triangulorum $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$ anguli $\beta\epsilon$, item $\gamma\zeta$ ſint æquales, & initio habeant æqualia latera ea quæ æquales attingunt angulos, videlicet $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$. Dico quod & reliqua latera reliquis lateribus habebunt æqualia, ſic vtrunq; vtriq; vt reſpondeat, latus $\alpha\beta$ lateri $\delta\epsilon$, & latus $\alpha\gamma$ lateri $\delta\zeta$, & angulum reliquũ videlicet $\beta\alpha\gamma$ angulo reliquo $\epsilon\delta\zeta$ æqualem. Si enim $\beta\alpha$ latus non eſt æquale $\delta\epsilon$ lateri, abſumatur de $\beta\alpha$ latere $\beta\eta$ recta æqualis $\delta\epsilon$ lateri. Et $\gamma\eta$ puncta per lineam rectam connectantur. Eſt igitur $\beta\gamma\eta$ angulus æqualis $\epsilon\zeta\delta$ angulo (per 4. propoſit.) Sed ex hypotheſi angulo $\epsilon\zeta\delta$ æqualis eſt $\beta\gamma\alpha$ angulus. Ergo $\beta\gamma\eta$ angulus æqualis eſt $\beta\gamma\alpha$ angulo, (per primam notio.) minor maiori, quod cum fieri nequeat latus $\beta\alpha$ æquale eſt $\delta\epsilon$ lateri. Quapropter baſis $\alpha\gamma$ æqualis

 eſt baſi

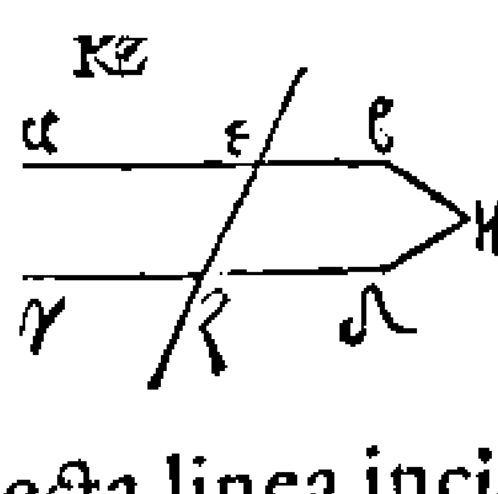
est basi δζ, ac reliquus βαγ angulus, reliquo εδζ angulo (per 4. proposi.) Porrò in expositis αβγ, δεζ triangulis sit vnum latus vni lateri æquale, quod sub vnum ex æqualibus angulis subtendit, & sit αβ latus æquale εδ lateri. Si itaq; βγ latus non est æquale ζε lateri, absumatur de βγ latere βϑ recta æqualis, εζ rectæ, & connectantur αϑ puncta per lineam. Est igitur βϑα angulus, εζδ angulo (per 4. proposit.) & βϑα angulus βγα angulo æqualis (per primam notionem.) exterior interiori, & ex aduerso, quod cum fieri nequeat (per 16. proposit.) manifestum est, & βγ latus æquale esse εζ lateri. Quamobrem & αγ latus æquale erit δζ lateri, & reliquus βαγ angulus reliquo εδζ angulo. Si duo igitur triangula duos angulos &c. quod demonstrandum erat.

IIII Pars huius libri.

KZ

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις, αἱ εὐθεῖαι.

KZ



XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens, vicissitudinem æqualium angulorum efficiat, illarum rectarum ductus æquabiles erunt.

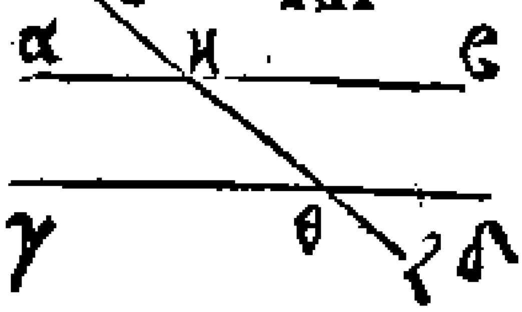
DEMONSTRATIO.

In duas rectas α β, γ δ, incidat ε ζ recta, & angulos in vicissitudine α ε ζ, ε ζ δ efficiat æquales. Dico rectarum α β, γ δ ductus esse æquabiles. Si verò α β, γ δ rectæ ad β δ partes sibi mutuò incidant, fiet illud ad κ punctum. Est itaq; α ε ζ angulus maior ε ζ δ angulo (per 16. proposit.) Sed & ex hypothesi eidem æqualis est, quod cum fieri non possit, ad β δ partes non concurrent. Similiter demonstrabimus, quod neq; ad α γ partes, sibi mutuo incidant. Sunt igitur α β, γ δ rectæ æquabiliter ductæ (per 36. defin.) quod demonstrandum erat.

ΚΗ

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς, ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις, αἱ εὐθεῖαι.

ΚΗ



XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens, exteriorem angulum interiori, qui & ex aduerso & ad easdem partes tendit, æqualem faciat, aut interiores angulos easdem partes versus duobus rectis æquales faciat, illarum rectarum ductus æquabiles erunt.

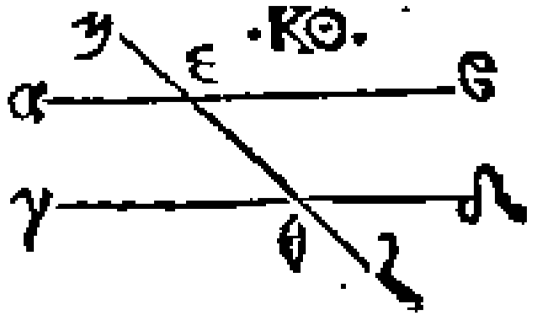
DEMONSTRATIO.

In duas α β, γ δ rectas ζ ε recta incidat, & ε η β angulum exteriorem η θ δ angulo interiori, & ex aduerso ad easdem partes æqualem faciat, & duos interiores β η θ, η θ δ duobus rectis æquales. Dico rectarum α β, γ δ ductum esse æquabilem. Quia igitur ε η β angulo æqualis est α η θ angulus (per 15.) & α η θ angulus η θ δ angulo æqualis erit (per primam notionem.) Proinde α β, γ δ rectæ sunt æquabiliter ductæ (per 27. proposit.) Item si β η θ, η θ δ anguli duobus rectis sunt æquales (ex hypothesi.) & α η θ, β η θ anguli, similiter duobus rectis sunt æquales (per 13. proposit.) sequetur quod α η θ angulus æqualis sit η θ δ angulo (per tertiam notionem.) auferatur angulus β η θ communis, relinquuntur α η θ, η θ δ anguli in vicissitudine æquale. Quare rectarum α β, γ δ ductus æquabiles erunt, (per præcedentem.) Si igitur in duas rectas recta &c. quod demonstrandum erat.

ΚΘ

Εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις

ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



XXIX.

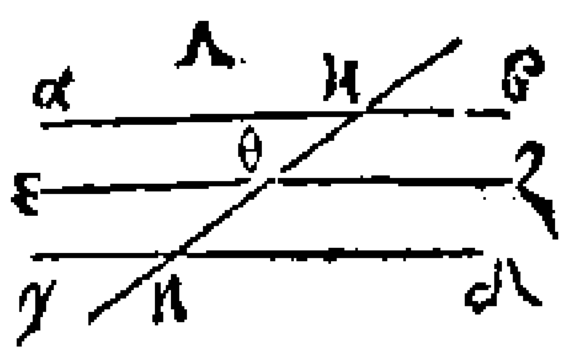
In lineas æquabiliter ductas rectas recta incidens, & vicissitudine angulorum æqualitatem efficit, & exteriorem interiori qui ex aduerso & ad easdem partes tendit æqualem, & interiores easdem partes versus, duobus rectis æquales facit.

DEMONSTRATIO.

Sint duæ lineæ rectæ æquabiliter ductæ α β, γ δ, in quas incidit recta ε ζ. Dico primum quod angulos α η θ, η θ δ vicissitudinis æquales faciat, deinde quod angulum exteriorem ε η β, angulo interiori η θ δ qui ex aduerso, & ad easdem partes tendit æqualem, & tertiò, angulos interiores β η θ, η θ δ easdem partes versus, duobus rectis æquales faciat. Si enim α η θ angulus maior est η θ δ angulo, adijciatur β η θ angulus communis. Ergo α η θ, β η θ anguli maiores sunt β η θ, η θ δ angulis, sed illi sunt duobus rectis æquales (per 13. proposit.) Ergo hi erunt duobus rectis minores. Quare rectæ *α β, γ δ, vlterius productæ concurrent ad β δ partes (per 11. notionem.) Non autem concurrunt etiam infinito ſpacio productæ, cum æquabiliter ductæ ponantur. Igitur α η θ, η θ δ anguli non ſunt inæquales, ſed æquales, quod primo loco demonſtrandum fuit. Deinde, quia ε η β, α η θ anguli ſunt æquales (per 15.) & α η θ, η θ δ anguli quoq; æquales, vt iam eſt demonſtratum. Igitur & ε η β exterior η θ δ interiori erit æqualis (per 1. notionem.) Tertio, quia ε η β, η θ δ anguli æquales ſunt, adijciatur vtriq; communis β η θ angulus, erunt anguli ε η β, β η θ æquales β η θ, η θ δ angulis. Sed illi ſunt duob. rectis æquales (per 13.) Ergo & hi duo qui interiores eaſdem partes verſus ſunt, duobus rectis æquales erunt. In lineas igitur æquabiliter ductas &c. quod demonſtrandũ fuit.*

Λ

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



X X X.

In quibus lineis rectis æquabilitas alteri reſponderit, illarum inter ſe ductus æquabiles erunt.

DEMONSTRATIO.

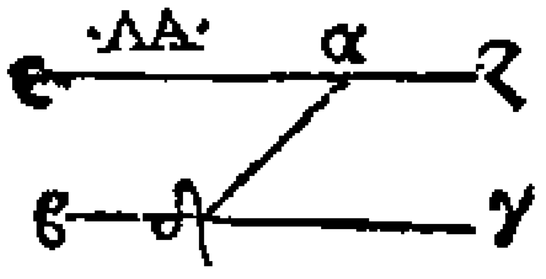
Quia

Quia α β, ε ζ linearum ductus est æquabilis, item ε ζ, γ δ linearum ductus est æquabilis. Dico & α β, γ δ linearum ductus esse æquabiles. Inducatur in eas η θ κ. Sunt igitur α η θ, η θ ζ anguli inter se æquales (per primam partem 29.) Item η θ ζ, θ κ δ anguli inter se sunt æquales (per secundam partem 29. proposit.) Ergo per primam notionem α η κ, η κ δ anguli inter se sunt æquales. Quapropter α β, γ δ linearum ductus sunt æquabiles (per 27. proposit.) In quibus igitur lineis rectis &c. quod demonstrandum fuit.

PROBLEMA I.

ΛΑ

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



XXXI.

A dato puncto, datæ lineæ rectæ, recta linea æquabiliter respondens ducenda est.

DEMONSTRATIO.

Per α punctum datum ducenda recta, quæ æquabilis sit β γ rectæ. Sumatur in β γ recta fortuito δ punctum, & α δ puncta, per lineam rectam

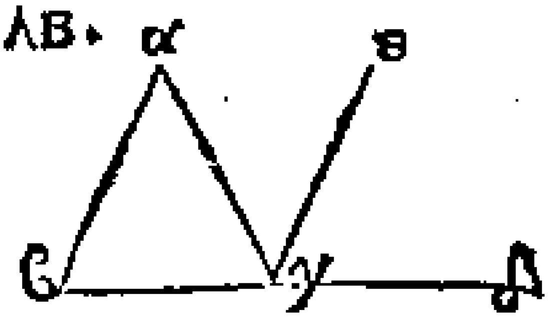
 connectan-

connectantur. Item ad rectam α δ & ad eius punctum α (per 23.) conſtituatur angulus ε α δ æqualis α δ γ angulo. Item rectæ ε α ad directam extenſionem adÿciatur α ζ. Quia in duas β γ, ε ζ incidit α δ recta, & facit viciſsitudinum angulos ε α δ, α δ γ æquales. Sunt igitur rectarum β γ, ε ζ ductus æquabiles (per 27. propoſit.) à dato igitur puncto &c. quod demonſtrandum erat.

THEOREMATA X.

ΛΒ

Παντὸς τριγώνου, μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ΛΒ. ἴση ἐστί. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



XXXII.

Si vnum latus cuiuſcunque trianguli vlterius productum fuerit, angulus exterior duobus, qui intus & ex aduerſo ſunt, æqualis eſt, & interiores tres anguli in triangulo, duobus rectis æquales ſunt.

DEMONSTRATIO.

Trianguli

Trianguli α β γ latus β γ directè extendatur in δ. Dico α γ δ angulum æqualem esse duob. β α γ, α β γ angulis. Item tres interiores trianguli angulos, α β γ, β γ α, γ α β duobus rectis esse æquales. Per γ punctum ducatur γ ε recta, quæ sit æquabilis α β rectæ (per præcedentem.) Sunt igitur (per primam partem 29.) β α γ, α γ ε anguli æquales, & (per secundam partem 29.) α β γ, ε γ δ, anguli æquales. Totus igitur α γ δ angulus æqualis est interioribus triquetri angulis & ex aduerso positis, videlicet β α γ, α β γ. Item tam α γ δ angulo quam α β γ, β α γ angulis, adijciatur communis α γ β angulus. Sunt igitur illi duo his tribus æquales (per 3. notionem.) Sed illi duo æquales sunt duobus rectis (per 13.) Ergo & hi tres α β γ, β α γ, γ α β duobus rectis sunt æquales, (per primam notionem.) Si vnum igitur latus cuiuscunque trianguli &c. quod demonstrandum erat.

ΛΓ

Αἱ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

XXXIII.

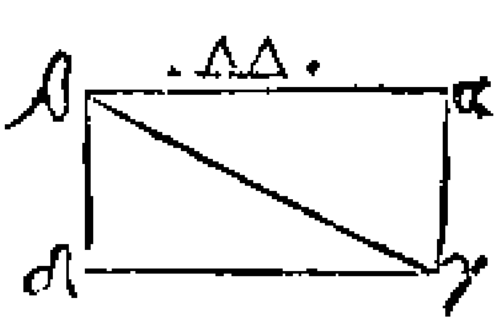
Illæ lineæ rectæ, quæ ad easdem partes æquabiliter ductas æquales coniungunt, & ipsæ æquales sunt, & æquabiles ductus habent.

DEMONSTRATIO.

Rectæ α ϐ, δ γ, sint æquales & æquabiles, & aliæ duæ rectæ ϐ δ, α γ ad easdem partes illas coniungant. Dico α γ, ϐ δ rectas æquales & æquabiles esse. Puncta ϐ γ per lineam rectam connectantur. In duobus α β γ, β γ δ triquetris duo α ϐ, γ ϐ latera æqualia sunt duobus γ δ, β γ lateribus, sic vtrunq; vtriq; vt respondeat. Item α β γ, ϐ γ δ anguli, quem æquales illæ rectæ includunt, sunt æquales (per primam partem 29.) Ergo (per 4.) α γ basis æqualis est β δ basi, item α γ β angulus γ ϐ δ angulo, propter æqualitatem α β, γ δ rectarũ. Quare α β, γ δ rectæ sunt æquabiles (per 27.) Illæ igitur lineæ rectæ quæ ad easdem partes &c. quod demonstrandum fuit.

Λ Δ

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ διάμετρος, αὐτὰ δίχα τέμνει.



XXXIIII.

Eorum locorum quæ æquabilibus libus lineis descripta sunt, ex aduerso tam latera quam anguli æqualitatem inter se habent, & diameter illa in duas æquales partes secat.

DEMONSTRATIO.

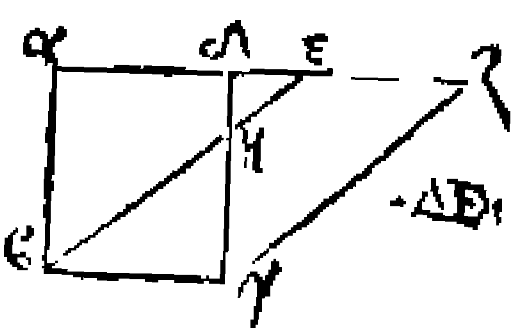
Sit α ϐ, δ γ figura æquabilium linearum, diameter autem eius sit ϐ γ. Dico, tum α ϐ, γ δ. Item α γ, β δ latera ex aduerso, tum ϐ α γ, ϐ δ γ. Item α ϐ δ, α γ δ angulos ex aduerso inter se æqualitatem habere. In duobus α ϐ γ, ϐ γ δ triquetris duo anguli α ϐ γ, α γ ϐ æquales sunt duobus angulis ϐ γ δ, γ ϐ δ, sic vtrunq; vtriq; vt respondeat. (per primam partem 29.) (Sunt enim α β γ, ϐ γ δ in vicißitudine anguli respectu α ϐ, γ δ æquabilium rectarum & incidentis in eas ϐ γ recta. Item, α γ ϐ, γ ϐ δ sunt anguli in vicißitudine, respectu α γ, β δ rectarum æqualium, & incidentis in eas ϐ γ rectæ.) Deinde æqualibus angulis idem ϐ γ latus adiacet. Ergo per primum casum 26. reliqua latera α ϐ, α γ, reliquis lateribus γ δ, ϐ δ æqualia habebunt. Sic vtrunq; vtriq; vt respondeat, & ϐ α γ angulum ϐ δ γ angulo æqualem habebunt. Cumq; α ϐ γ, ϐ γ δ æqualibus angulis, æquales anguli adijciantur illi quidem γ ϐ δ, huic verò α γ ϐ (per 2. notionem.) α ϐ δ totus angulus æqualis erit toti α γ δ angulo, qui sunt reliqui duorum ex aduerso angulorum, in α ϐ, γ δ æquabilium

lium

lium linearum figura, quod demonstrandum erat primo loco. Rursus quia latus α β est æquale lateri γ δ. Latus β γ commune vtrique triquetris. Duo igitur latera α β, β γ duobus lateribus γ δ, β γ sunt æqualia, sic vtrunq; vtriq; vt respondeat, & angulus α β γ angulo β γ δ, quos videlicet æquales includunt est æqualis, & totum triangulum α β γ, toti triangulo β γ δ æquale. Diameter igitur β γ locum qui æquabilibus lineis descriptus est, in duas partes æquales secat, quod secundo loco demonstrandum fuit. Eorum igitur locorum quæ æquabilibus &c. quod demonstrandum erat.

ΛΕ

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.



XXXV.

Figuræ lineis æquabilibus descriptæ, si super eadem basi & in ijsdem æquabilitatis lineis sint, & ipsæ inter se æquales sunt.

DEMONSTRATIO.

Sint duæ æquabilium linearum figuræ α β γ δ, ε β ζ γ super eadem β γ basi, & in ijsdem α ζ, β γ æquabili-

æquabilitatis lineis. Dico α ϐ, γ δ æquabilium linearum figuram æqualem esse ε ϐ, ζ γ æquabilium linearum figuræ. In duobus α ε β, ζ δ γ triquetris duo latera α ε, α ϐ æqualia sunt duobus lateribus δ ζ, δ γ, sic vtrunque vtrique vt respondeat. (cum enim α δ recta æqualis sit ϐ γ rectæ (per 34.) & per eandem ε ζ recta, β γ recta, per primam notionem erit α δ recta æqualis, ε ζ recta, vtrique autem adiecta δ ε recta, per 2. notionem α ε, δ ζ rectas æquales facit, & α β, δ γ æquales sunt, (per 34.) Deinde ε α ϐ angulus ζ δ γ angulo æqualis est (per 2. partem 29.) Ergo (per secundam partem 4. proposit.) ε α ϐ triquetrum æquale est ζ δ γ triquetro. Commune vtrique triquetro si auferatur δ ε η triquetrum, relinquitur (per tertiam notionem.) mensula α ϐ η δ æqualis ε η ζ γ mensulæ. Tandem si æqualib. mensulis adijciatur β γ η, triquetrum, per secundam notionem manifestum erit, α ϐ γ δ, ε β ζ γ æquabilium linearum figuras æquales esse. Figuræ igitur lineis æquabilibus &c. quod demonstrandum erat.

ΛϚ

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

XXXVI.

Figuræ

Figuræ æquabilibus lineis descriptæ, si super æqualibus basibus & in ijsdem æquabilitatis lineis sint, inter se quoque æquales erunt.

DEMONSTRATIO.

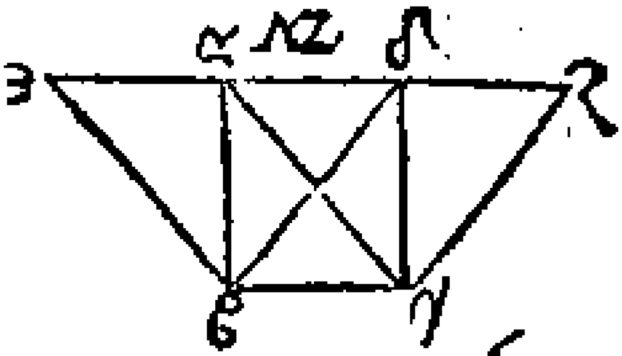
Sint α β γ δ, ε ζ η θ æquabilium linearum figuræ super æqualibus basibus β γ, ζ η, & in ijsdem α θ, β η æquabilitatis lineis. Dico quod α β γ δ æquabilium linearum figura æqualis sit ε ζ η θ æquabilium linearum figuræ. Connectantur lineis rectis β ε γ θ puncta. Quia rectæ β γ ζ η ex hypothesi sunt æquales, & recta ζ η æqualis est, ε θ rectæ, (per 34.) Ergo (per primam notionem.) β γ, ε θ rectæ sunt æquales. Et quia ex hypothesi etiam sunt æquabiles, erunt (per 33. huius) ε β, θ γ rectæ æquales & æquabiles, & ε β γ θ figura est æquabilium linearum & æqualis α β, γ δ figuræ æqualium linearum (per 35.) propter β γ communem basin. Cum in ijsdem α θ β γ æquabilitatis lineis sint. Sed cum simili ratione ε ζ η θ æquabilium linearum figura, æqualis sit ε β γ θ figuræ sequitur (per primam notionem.) α β γ δ, ε ζ η θ æquabilium linearum figuras æquales esse. Figuræ igitur æquabilibus lineis descriptæ &c. quod demonstrandum fuit.

ΛΖ

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα,

καὶ

καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.



XXXVII.

Triangula, quæ ſuper eadem baſi & in ijſdem æquabilitatis lineis ſunt, illa inter ſe æqualia ſunt.

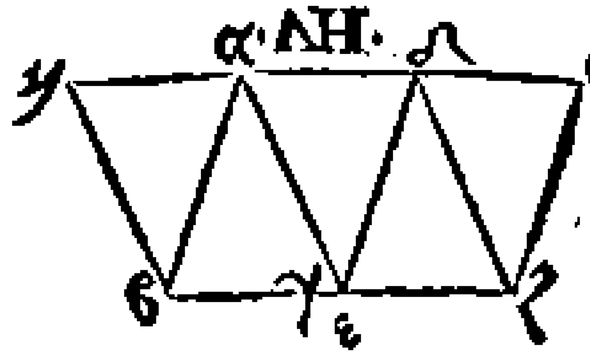
DEMONSTRATIO.

Sint duo triangula α β γ, δ ϐ γ ſuper eadem β γ baſi & in ijſdem α δ ϐ γ æquabilitatis lineis. Dico α ϐ γ, δ γ ϐ triangula æqualia eſſe. Recta α δ vtrinq; continuata directione producatur ad ε ζ puncta (per ſecundum petitum) Deinde per ϐ quidem punctum ducatur β ε recta æquabilis, γ α recta, per γ verò punctum γ ζ recta æquabilis β δ recta. Vtraq; igitur ε β α γ, δ ϐ γ ζ figurarum erit æquabilium linearum, & ſunt inter ſe æquales. (per 35.) Aequabilium verò linearum figura ε ϐ α γ dimidium eſt α ϐ γ triangulum (per 34.) & δ β γ ζ figuræ dimidium δ β γ triangulum (per eandem.) Et quia α ϐ γ, δ ϐ γ triangula inter ſe ſunt æqualia (per 7. notionem.) & ſuper eadem baſi conſtituta, igitur triangula &c. quod demonſtrandum fuit.

ΛΗ

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα

ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.



XXXVIII.

Triangula quæ ſuper æqualibus baſibus, & in ijſdem æquabilitatis lineis ſunt, illa inter ſe æqualia ſunt.

DEMONSTRATIO.

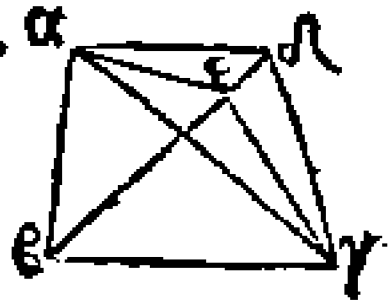
Sint triangula α β γ, δ ε ζ ſuper æqualibus baſibus β γ, ε ζ, & in ijſdem æquabilitatis lineis α δ β ζ. Dico triangulum α β γ eſſe æquale δ ε ζ triangulo. Producatur linea recta α δ continuata directione vtrinq; ad η θ vſq;. Deinde ex β puncto ducatur β η recta æquabilis γ α rectæ, & ex puncto ζ ducatur recta ζ θ æquabilis ε δ rectæ (per 31. propoſit.) Quia figuræ æquabilium linearum η β γ α, ε δ ζ θ æquales ſunt (per 36.) & α β γ triangulum dimidium eſt η β γ α figuræ, & ζ ε δ triangulum dimidium δ ε ζ θ figuræ (per 34.) Igitur triangula α β γ, δ ε ζ (per 7. notionem.) ſunt æqualia. Triangula ergo quæ *ſuper æqualibus baſibus &c. quod demonſtrandum fuit.*

ΛΘ

Τὰ ἴσα τρίγωνα, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βά-

σεως

σεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί.



XXXIX.

Triangula æqualia, quæ sunt super eadem basi, easdem versus partes, illa & in ijsdem æquabilitatis lineis sunt.

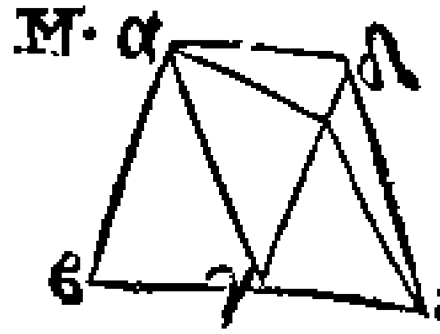
DEMONSTRATIO.

Sint α ϐ γ, δ β γ triquetra æqualia super eadem ϐ γ basi. Dico ea etiam esse in ijsdem æquabilitatis lineis. Connectantur α δ puncta per lineam rectam. Dico α δ rectam æquabilem esse β γ rectæ. Sin autem α δ non est æquabilis β γ rectæ, ponatur α ε æquabilem esse ϐ γ rectæ. Connectantur per lineam rectam ε γ. Erunt igitur α ϐ γ, ε ϐ γ triquetra æqualia (per 37.) Sed α ϐ γ triquetro ex hypothesi etiam æquale est ϐ δ γ triquetrum. Ergo (per primam notionem.) δ β γ triquetrum æquale est ε ϐ γ triquetro, maius minori quod fieri nequit. Ad similem absurditatem perducemus aduersarium, quamcunque sumserit æquabilem ipsi ϐ γ, præter α δ rectam. Est igitur α δ recta æquabilis ϐ γ rectæ, & nulla alia. Triangula igitur æqualia &c. quod demonstrandum fuit.

M

E Τὰ

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



XL.

Triangula æqualia, quæ sunt super æqualibus basibus easdem versus partes, illa etiam in ijsdem æquabilitatis lineis sunt.

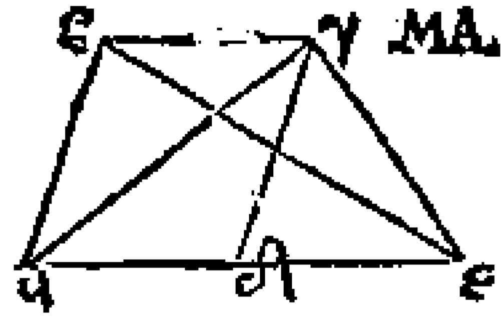
DEMONSTRATIO.

Sint duo α ϐ γ, γ δ ε æqualia triangula super æqualibus ϐ γ, γ ε basibus. Dico quod sint & in ijsdem æquabilitatis lineis. De α puncto in δ punctum ducatur recta α δ. Dico α δ rectam æquabilem esse ϐ ε rectæ. Si α δ recta non est æquabilis ϐ ε rectæ, per α punctum, ducatur recta ζ α, ita vt æquabiliter respondeat ϐ ε rectæ, & connectantur ζ ε puncta per lineam rectam. Est igitur α ϐ γ triangulum æquale ζ γ ε triangulo (per 38.) sed α ϐ γ triangulum, δ γ ε triangulo æquale est ex hypothesi. Est igitur δ γ ε triangulum æquale ζ γ ε triquetro (per primam notionem.) maius minori quod fieri nequit. Proinde neq; α ζ recta, neque alia vlla præter α δ rectam æquabilis est ϐ ε rectæ. Triangula igitur æqualia &c. quod demonstrandum fuit.

Ἐὰν

MA

Ἐὰν παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



XLI.

Si figura æquabilibus descripta lineis, cum triangulo eandem basim habuerit, & in ijsdem fuerit æquabilitatis lineis, duplex æquabilitatis figura ad triangulũ futura est.

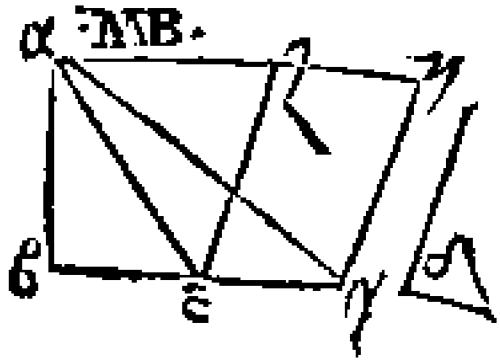
DEMONSTRATIO.

Figura æquabilium linearum α ϐ γ δ, & ε ϐ γ triangulum sint super eadem ϐ γ basi, & in ijsdem ϐ γ, α ε æquabilitatis lineis. Dico α β γ δ figuram æquabilium linearum esse duplicem ad triangulum ε ϐ γ. Ducatur α γ recta, quoniam α ϐ γ, ε β γ triquetra sunt æqualia (per 37.) & α ϐ γ δ æquabilium linearum figura duplex est ad α ϐ γ triquetrum (per 34.) Est igitur eadem ad ε β γ triquetrum duplex. Si igitur figura æquabilibus &c. quod demonstrandum erat.

PROBLEMA I.

MB

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



XLII.

Dato triangulo constituenda est æqualis æquabilium linearum figura, de dato rectarum linearum angulo.

DEMONSTRATIO.

Sit datum triangulum α β γ, datus verò angulus rectarum linearum δ. Huic triangulo dato constituenda est æqualis æquabilium linearum figura de dato angulo δ. Trianguli α β γ, basis β γ secetur æqualiter in ε puncto (per 10.) & per α ducatur α η recta, quæ æquabiliter respondeat β γ rectæ, (per 31.) item fiat angulo δ æqualis ζ ε γ angulus, (per 23.) & γ η recta æquabiliter respondeat ε ζ rectæ ac connectantur α ε puncta. Quoniam β ε æqualis est ε γ. Igitur triangulum α β ε æquale est triangulo α ε γ (per 38.) & erit α β γ triangulum duplex ad α ε γ triangulum. Quia verò ζ ε γ η æquabilium linearum figura etiam est duplex ad triangulum α ε γ (per 41.) Quare ζ ε γ η figura æqualis est α β γ triangulo (per 6. notionē.) & est angulus ζ ε γ constitutus æqualis δ angulo dato. Dato igitur triangulo α β γ constituta est

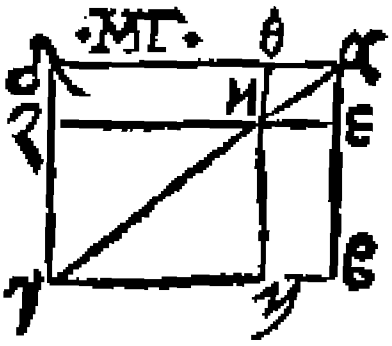
æqualis

æqualis æquabilium linearum figura ζ ε γ η, de dato rectarum linearum angulo, quod faciendum erat.

THEOREMA I.

ΜΓ

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.



XLIII.

In omni æquabilium linearum figura, si quæ circa diametrum æquabilibus lineis descriptæ figuræ fuerint, eorum complementa sunt inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

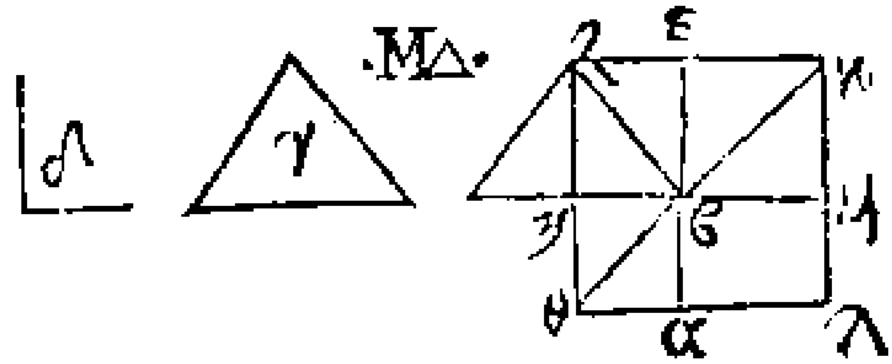
Circa diametrum α γ figuræ æquabilium linearum α β γ δ, sint descriptæ α ε κ θ, κ η γ ζ æquabilium linearum figuræ. Dico β κ, κ δ complementa inter se esse æqualia. α β γ triangulum æquale est α δ γ triangulo (per 34.) Item α ε κ triangulum æquale est α θ κ (per eandem.) Similiter κ η γ triangulum æquale est κ ζ γ triangulo. Si igitur α ε κ, κ η γ auferātur ab α β γ triangulo, remanebit κ β, & si à triangulo α δ γ auferatur α θ κ, κ ζ γ remanebit κ δ. Ergo (per 3. notio.)

κ β complementum κ δ complemento æquale erit. In omni igitur æquabilium linearum &c. quod demonstrandum fuit.

PROBLEMATA TRIA.

ΜΔ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



XLIIII.

Ad datam lineam, dato triangulo, figura æquabilium linearum, æqualis conferenda est, in dato rectarum linearum angulo.

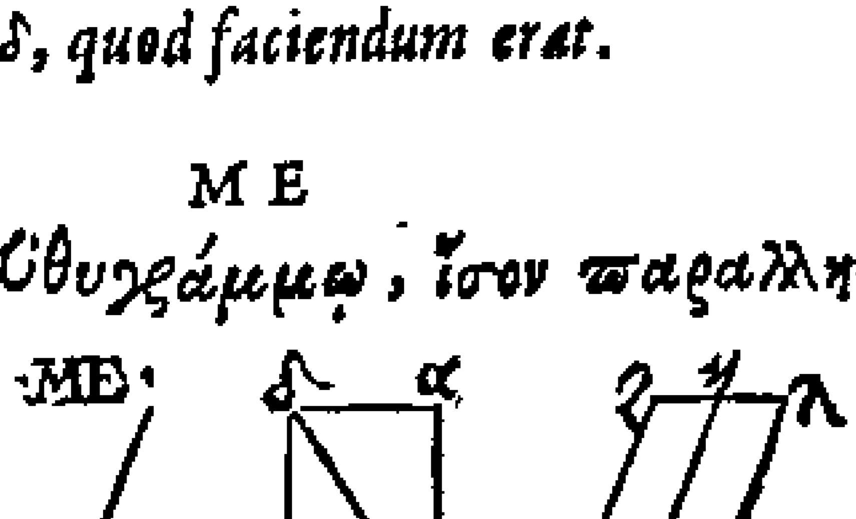
DEMONSTRATIO.

Fiat triquetro γ æquabilium linearum figura β ε ζ η æqualis, de dato ε β η angulo, æquali δ angulo (per 42.) & ε β rectæ directè apponatur α β recta, ad quam conferenda est, æquabilium linearum figura, quæ æqualis sit triquetro γ, ad angulum æqualem δ. Per α ducatur α θ recta, quæ æquabilis sit tam η β quam ζ ε rectæ (per 31. proposi.) & con-

& connectantur θ β puncta. Quoniam autem α θ ζ, θ ζ ε anguli duobus rectis sunt æquales (per tertiam partem 29.) anguli β θ η, η ζ ε duobus rectis sunt minores. Ideo θ β, ζ ε rectæ ad ε β partes productæ (per 11. notio.) concurrent, producantur & concurrant in κ, & compleatur figura æquabilium linearum ζ θ κ λ, circa cuius diametrum θ κ, sunt figuræ æquabilium linearum α η, μ ε, complementa verò β ζ, β λ, quæ inuicem sunt æqualia (per 34.) Quia verò β ζ complementum æquale est triangulo γ dato, (per κατασκ.) Ergo & β λ complementum eidem æquale est, (per primam notionem.) & rursus quia η β ε angulus est æqualis α β μ angulo (per 15.) & ille æqualis angulo δ (per κατασκ.) Igitur & angulus α β μ est æqualis angulo δ. Ad datam igitur lineam α β, dato triangulo γ, figura æquabilium linearum β λ æqualis constituta est, in angulo α β μ, æquali angulo δ, quod faciendum erat.

ΜΕ

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



XLV.

Datæ figuræ rectarum linearum, figura æquabilium linearum constituenda est æqualis, in dato rectarum linearum angulo.

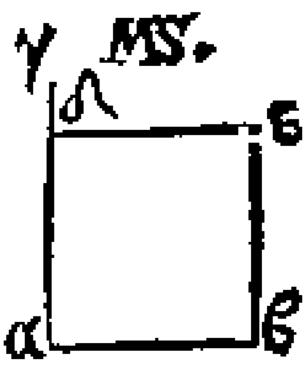
DEMONSTRATIO.

Sit rectarum linearum figura $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, datus autem angulus rectarum linearum ε. Constituenda est æquabilium linearum figura, quæ æqualis sit rectarum linearum figuræ $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, ad angulum æqualem ε angulo. Connectantur $\delta\ \beta$ per lineam rectam. Triquetro $\alpha\ \beta\ \delta$ constituatur æqualis æquabilium linearum figura de dato ε rectarum linearum angulo (per 42.) & sit hæc $\zeta\ \eta\ \theta\ \kappa$, cuius $\theta\ \kappa\ \zeta$ angulus æqualis sit ε angulo dato. Deinde ad $\eta\ \theta$ rectam conferatur æquabilium linearum figura æqualis $\delta\ \beta\ \gamma$ triquetro, in dato rectarum linearum angulo ε, (per 44.) & sit hæc $\eta\ \theta\ \mu\ \lambda$, cuius $\eta\ \theta\ \mu$ angulus æqualis sit ε angulo dato. Dico $\zeta\ \kappa\ \lambda\ \mu$, figuram esse æquabilium linearum, & æqualem $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ rectarum linearum figuræ, cum $\mu\ \kappa\ \zeta$ angulo æquali ε angulo dato. $\kappa\ \theta\ \mu$ rectarum, esse directam extensionem patet, Cum enim $\zeta\ \kappa\ \theta$, $\eta\ \theta\ \mu$ anguli per apparatum sint æquales, erunt duo $\zeta\ \kappa\ \theta$, $\eta\ \theta\ \kappa$ anguli æquales duobus $\eta\ \theta\ \kappa$, $\eta\ \theta\ \mu$ angulis (per 2. notionem.) sed illi duobus rectis sunt æquales (per tertiam partem 29.) Ergo (per 1. notionem.) etiam hi duobus rectis sunt æquales, & pro-

& propterea (per 14.) κ θ μ sunt lineæ directa extensione productæ. Similiter constat, ζ η λ rectas esse in continuata directione. Nam cum ζ η θ, η θ μ anguli sint æquales (per primam partē 29.) erunt (per 2. notionem.) duo ζ η θ, λ η θ anguli, æquales duobus λ η θ, η θ μ angulis, sed hi sunt æquales duobus rectis (per tertiam partem 29.) Ergo & illi duobus rectis erunt æquales (per conuersionem primæ notionis.) ideóq; (per 14.) ζ η λ est linea recta. Porrò κ ζ recta æqualis est & æquabilis (per 34.) η θ rectæ, sed & η θ rectæ æqualis & æquabilis est λ μ recta (per eandem.) Ergo (per primam notionem.) ζ κ æqualis est & æquabilis λ μ rectæ, & (per 33.) ζ λ, κ μ rectæ, æquales et æquabiles sunt. Est igitur κ ζ λ μ figura æquabilium linearum, & æqualis α β γ δ rectarum linearum figuræ. Datæ igitur figuræ rectarum linearum, figura æquabilium linearum constituta est æqualis, in dato rectarum linearum angulo, quod faciendum erat.

Μς

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι.



XLVI.

A data recta linea quadratum describendum est.

DEMONSTRATIO.

Sit data linea recta α β, à qua describend[um] est quadratum. Ducatur ex puncto α linea re[cta] α γ, quæ sit ad angulos rectos, lineæ α β, & [ex] rectæ α β æqualis α δ, ex puncto δ ducatur lin[ea] recta δ ε æquabilis rectæ α β. Deniq; per punct[um] ducatur recta β ε æquabilis α δ (per 31.) Qu[o]-igitur α β δ ε est figura æquabilium linearum, er[it] α β æqualis δ ε, & α δ recta, β ε recta (per 34 [.]) sed & α β est æqualis rectæ α δ (per κατασκ[ευήν]) Quatuor igitur rectæ, α β, α δ, δ ε, ε β, quæ fig[u]-ram æquabilium linearum constituunt, inuic[em] sunt æquales. Huius angulos quoq; esse æquales [sic] demonstratur. Quia in duas rectas æquabiles α [β] δ ε recta quædam α δ incidit, anguli β α δ, α δ [ε] duob. rectis sunt æquales (per tertiam partẽ 29.) Angulus autem β α γ est rectus. Igitur & α ε [δ] rectus erit. Cum verò locorum quæ æquabilibus li-neis descripta sunt, ex aduerso tam latera quam anguli æqualitatem inter se habeant (per 34.) vterq; oppositorum angulorum α β ε, ε β δ est re-ctus. Igitur α δ ε β figura æquabilium linearum æquilatera, habet quoq; angulos quatuor æquale[s] & rectos, & est quadratum descriptum à line[a] recta α β data, quod faciendum & demonstran-dum erat.

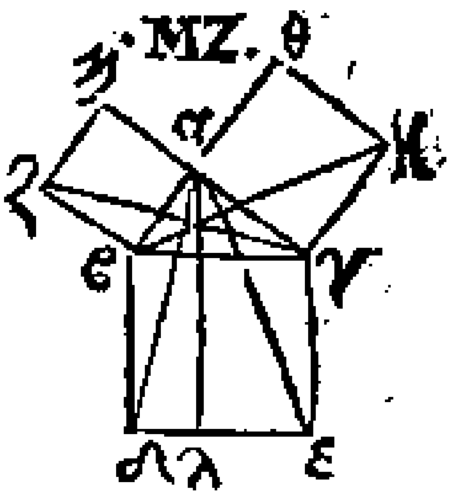
THEOREMATA II.

MZ

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τ[ῆς]

τῆ

τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς, ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τετραγώνοις.



XLVII.

In triangulis in quibus anguli recti sunt, descriptum quadratum à latere subtendente angulum rectum, æquale est descriptis quadratis ab his lateribus, quæ rectum angulum includunt.

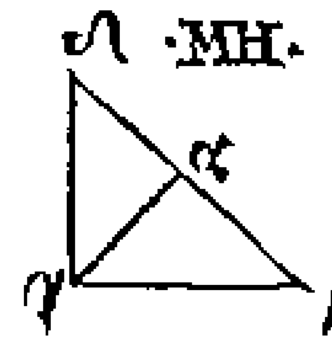
DEMONSTRATIO.

A datis α β, α γ, β γ lateribus trianguli cum α γ angulo recto, describantur quadrata η β, θ γ, β ι, & per α ducatur α λ recta, ita vt vtriq; β δ, γ ι rectis æquabiliter respondeat, & connectantur per lineas rectas α δ ζ γ. Anguli igitur ζ β γ, α β δ sunt æquales (per 10. notio. & 2.) Quare ζ β γ triangulum æquale est α β δ triangulo (per 4. proposi.) & quia rectarũ η α, α γ extensio est directa (per 14. propo.) quadratum η β duplex est, ad ζ β γ triangulum. Est & æquabilitatis figura β λ duplex ad α β δ triangulum (per 41. propo.) Proinde quadrato η β, æqualis est β λ æquabilium linearum figura (per 6. notionem.) Eodem modo κ ι & β κ rectis, demonstrabimus θ γ quadrato, æqualem

æqualem esse γ λ æqualilium linearum figuram. Quadratum igitur β δ ε γ, quod ad β γ latus subtendens angulum rectum, descriptum est, æquale est quadratis η β, θ γ ad latera α β, α γ, quæ rectũ angulum includunt, descriptis. In triangulis igitur in quibus anguli recti sunt &c. quod demonstrandum fuit.

MH

Ἐὰν τριγώνου, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ, τοῖς, ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία, ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.



XLVIII.

Si ab vno trianguli latere descriptum quadratum, æquale sit his quadratis, quæ à reliquis duobus lateribus descripta fuerint, is angulus qui à reliquis duobus lateribus includetur rectus erit.

DEMONSTRATIO.

Sit datum triangulum α β γ, cuius quadratum ad β γ latus descriptum æquale est quadratis ad α β, α γ latera descriptis. Dico angulum β α γ esse rectum. Ad latus α γ de puncto α excitetur perpendi-

pendiculum $\alpha\ \delta$*, quod æquale fiat* $\alpha\ \beta$ *rectæ, & connectantur* $\delta\ \gamma$ *puncta. Quia recta* $\alpha\ \delta$ *æqualis est rectæ* $\alpha\ \beta$*, erunt vtraq; quadrata ad has rectas descripta æqualia, vtrisq; addatur commune quadratum* $\alpha\ \gamma$*. Igitur quadrata* $\delta\ \alpha$*,* $\alpha\ \gamma$ *sunt æqualia quadratis* $\alpha\ \gamma$*,* $\alpha\ \beta$*, quadratis autem* $\alpha\ \gamma$*,* $\alpha\ \delta$ *æquale est quadratum rectæ* $\gamma\ \delta$ *(per 47.) quadratis verò* $\alpha\ \beta$*,* $\alpha\ \gamma$ *æquale est quadratum* $\gamma\ \beta$*, (per hypothes.) Igitur quadratum* $\delta\ \gamma$ *æquale est quadrato* $\beta\ \gamma$*, vnde etiam latus* $\delta\ \gamma$ *lateri* $\beta\ \gamma$ *est æquale, & quia* $\delta\ \alpha$ *æqualis est* $\beta\ \alpha$*, communis autem* $\alpha\ \gamma$*, duæ* $\delta\ \alpha$*,* $\alpha\ \gamma$*, duabus* $\beta\ \alpha$*,* $\alpha\ \gamma$ *æquales sunt, & basis* $\delta\ \gamma$ *æqualis est basi* $\gamma\ \beta$*. Angulus igitur* $\delta\ \alpha\ \gamma$*, angulo* $\beta\ \alpha\ \gamma$ *est æqualis. Rectus autem est angulus* $\delta\ \alpha\ \gamma$*, igitur &* $\beta\ \alpha\ \gamma$ *rectus erit. Si igitur ab vno trianguli latere descriptum quadratum, æquale sit his quadratis &c. quod demonstrandum fuit.*

FINIS LIBRI PRIMI ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

Εὐκλείδου

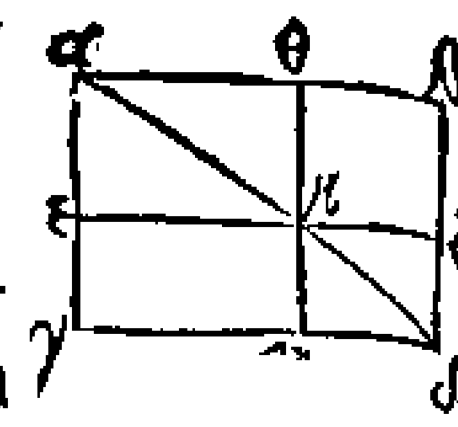
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ β'.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER SECVNDVS.

ΟΡΟΙ.
DEFINITIONES.

A

Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται, ὑπὸ δύο, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.



I.

Omnis figura æquabilium linearum cum angulo recto, includi dicitur duabus rectis ijs quæ rectum angulum includunt.

B

Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, ἓν παραλληλόγραμμον

γραμμον ὁποῖον οὖν, σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

II.

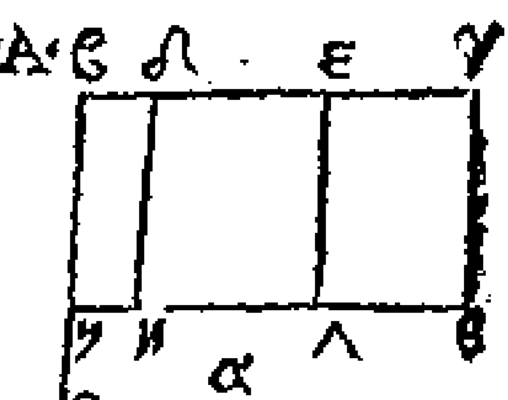
In omni autem æquabilium linearum loco, ex his figuris quæ circa diametrum æquabilibus lineis descriptæ fuerint, vna quælibet cum duobus complementis, norma vocetur.

Προτάσεις.

THEOREMATA X.

A.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν, εἰς ὅσα δήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.



I.

Si fuerint duæ lineæ rectæ, & secetur altera illarum in segmenta quotcunque, locus quem duæ illæ

rectæ

rectæ cum angulo recto includent, æqualis erit his locis, quæ & non secta linea & segmentorum quodlibet cum recto angulo incluserit.

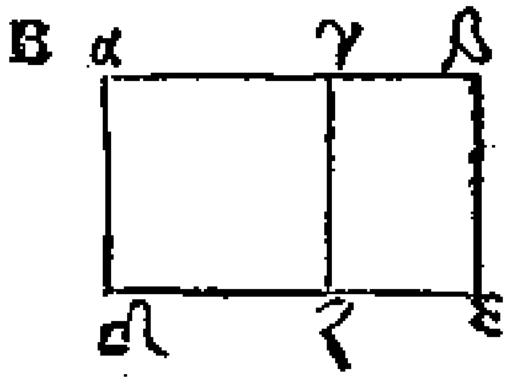
DEMONSTRATIO.

Sint duæ rectæ α & βγ, quarum βγ fortuito in δε punctis secetur. Dico æquabilium linearum figuram cum angulo recto, quam α recta cum βγ includit æqualem esse figuris æquabilium linearum, quas α recta cum βδ, & δε, & εγ cum angulis rectis includit. De puncto β rectæ βγ normalis recta βζ excitetur (per 11. primi.) & fiat βη æqualis rectæ α (per 3. primi.) & per η punctum ducatur ηθ recta æquabiliter respondens βγ rectæ, (per 31. primi.) Item per δεγ puncta ducantur similiter rectæ δκ, ελ, γθ, quæ æquabiliter respondeant βη rectæ. Aequabilium linearum locus βδ includitur à βγ, βη, hoc est, ab α & βγ rectis (per apparatum & primam definit. huius.) Et βδ locus æqualis est βκ, δλ, εθ æquabilium linearum locis, tanquam totum omnibus suis partibus simul acceptis, sed βκ, δλ, εθ loca includuntur ab α recta, & βδ, δε, εγ segmentis βγ rectæ. Est enim βη æqualis α rectæ, & δκ, ελ, γθ (per 34. primi.) βη rectæ æquales sunt. Quare & α rectæ æquales sunt. Patet igitur si fuerint duæ rectæ lineæ &c. quod demonstrandum erat.

Ἐὰν δ-

B

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.



II.

Si recta linea fortuito secetur, illa loca, quæ tota linea & vtrumlibet segmentum cum recto angulo includit, æqualia sunt quadrato, quod ad totam lineam descriptum fuerit.

DEMONSTRATIO.

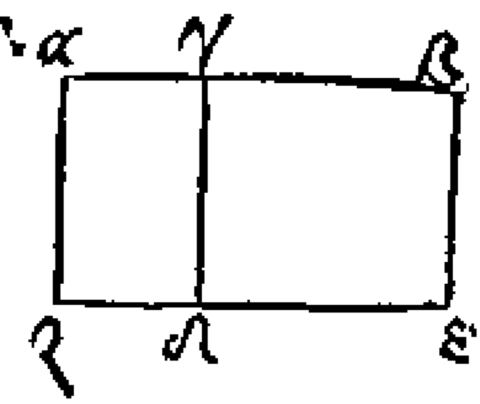
Sit data recta α β, quæ fortuito secetur in γ puncto. Dico loca quæ includit α β recta cum recto angulo α γ, item γ β rectis, æqualia esse quadrato descripto ad α β rectam. Describatur (per 46. primi.) ad α β rectam quadratum α ε, δ ε, & per γ punctum ducatur γ ζ recta, vtriq; α δ, β ε æquabiliter respondens (per 31. primi.) Locus α ε, æqualis est α ζ γ ε locis, sed α ε est quadratum ad α β descriptum, & α ζ quidem locus includitur ad α β, α γ, siquidem α δ (per 31. defi. primi.) æqualis est α β rectæ. Locus verò γ ε continetur à rectis

$\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, ſiquidem & $\gamma\zeta$, $\beta\epsilon$ recta $\alpha\beta$ æqualis. Locus igitur quem includunt $\alpha\beta\gamma$ vna cum loco quem includunt $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, cum angulis rectis æqualis eſt quadrato ad $\alpha\beta$ deſcripto, quod demonſtrandum erat.

Γ

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Γ.



III.

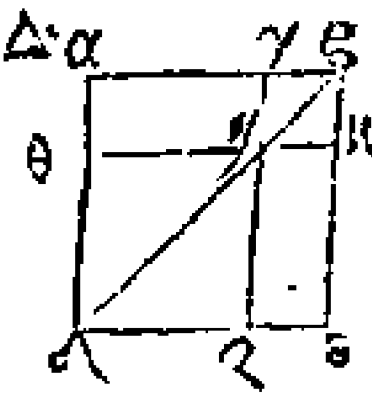
Si recta linea fortuito ſecetur, ille locus quem tota linea & vnum ſegmentum cum recto angulo includit, æqualis eſt, & illi quem ſegmenta cũ recto angulo includunt, & deſcripto ad prædictum ſegmentum quadrato.

DEMONSTRATIO.

Recta $\alpha\beta$ ſecetur fortuito in γ puncto. Dico quod locus cum angulo recto, quem $\alpha\beta$, $\gamma\beta$ rectæ includunt æqualis ſit loco cum angulo recto ab $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ rectis γβ rectis incluso, & quadrato ad βγ descripto. Describatur enim quadratum ad γβ (per 46. primi.) γβεδ & εδ continuata directione producatur in ζ, (per secundum petitum.) & per α punctum ducatur recta αζ, quæ æquabiliter respondeat vtrique γδ, βε rectis (per 31.) Locus αε æqualis est αδ, γε locis, sed αε quidem locum cum angulo recto includunt αγ, βγ rectæ, siquidem eum αβ, βε includunt, & βε, βγ rectæ sunt æquales (per 31. defin. 1.) quæ est quadrati. Locum verò αδ includunt αγ, γβ, siquidem δγ recta æqualis, γβ rectæ (per 31. defi. primi.) Item γε locus est quadratum descriptum ad γβ. Proinde locus cum angulo recto quem αβ, βγ rectæ includunt æqualis est loco cum angulo recto quem αγ, γβ rectæ includunt cum quadrato ad γβ descripto, quod demonstrandum erat.

Δ

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσαι, τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνά ἐστι.

IIII.

Si recta linea secetur fortuito, id quadratum, quod ad totam describetur, æquale futurum est, quadratis ad segmenta descriptis, & illi simul loco, quem segmenta, bis cum recto angulo includunt.

ACQVISITVM.

Atque ex huius theorematis demonstratione manifestum fit, quod in locis quadratis, æquabilibus lineis circum diametrum descriptæ figuræ, sint quadratæ.

DEMONSTRATIO.

Recta enim α β secetur fortuito in γ. Dico quod quadratum ad α β descriptum æquale est quadratis α γ, β γ descriptis, & bis illi loco quem α γ, β γ cum angulo recto includunt. Describatur ad α β rectam quadratum (per 46. primi,) α δ ε β & β δ puncta per lineam rectam connectantur (iuxta primum petitum.) & per γ punctum ducatur γ ζ vtrique α δ, ε β æquabiliter respondens, per η verò ducatur θ κ vtrique α β, δ ε æquabiliter

æquabiliter respondens (per 31. primi.) Quoniam γ ζ recta æquabilis est α δ rectæ, & in eas β δ recta incidit, exterior β η ζ angulus, æqualis est interiori, & ex aduerso α δ β angulo (per secundam partem 29.) Sed α δ β angulus æqualis est α β δ angulo (per 5. primi.) siquidem β α latus α δ lateri æquale est (per 31. defin. primi.) Angulus igitur γ η β æqualis est η β γ angulo (per primam notionem.) Quapropter β γ latus γ η lateri æquale est (per 6. primi.) sed lateri γ β æquale est η κ latus, et γ η lateri κ β latus (per 34. primi.) Quare etiam η κ latus κ β lateri æquale est (per 1. notionem.) Est igitur locus γ η, κ β æqualium laterum. Dico quod etiam sit cum angulo recto. Quoniam enim γ η, β κ rectæ sunt æquabiliter ductæ, & in eas incidit γ β recta. Duo κ β γ, η γ β anguli duobus rectis sunt æquales (per 3. partem 29. primi.) Est autem κ β γ rectus (per 31. defi. primi.) Ergo & η γ β angulus rectus erit. Cumq; anguli his ex aduerso γ η κ, η κ β sint æquales (per 34. primi) & ipsi recti erunt. Patet igitur γ η, κ β loci angulos omnes esse rectos. Sed vt demonstratum est. Est etiam æqualium laterum. Proinde (per conuersionem 31. defin. primi.) est quadratum & ad γ β descriptum. Simili ratiocinatione & θ ζ locus est quadratum, ad θ η descriptum, hoc est, ad α γ rectam (per 34. primi.) Quadrata igitur θ ζ, γ κ ad α γ, γ β descripta sunt. Quia autem α η, η ε cõplementa sunt æqualia (per 43. primi.)

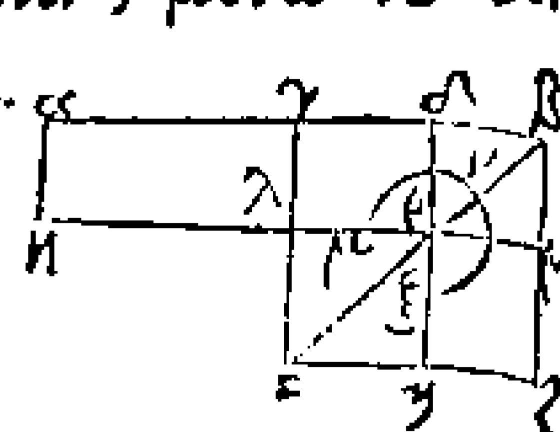
 Et

Et α η locum includunt α γ, γ β rectæ, æqualis enim est η γ recta γ β rectæ. Quare & η ε locus æqualis est loco quem α γ, γ β rectæ includunt. Proinde loca α η, η ε æqualia sunt. Bis ei loco quem α γ, γ β includunt. Sunt autem θ ζ, γ κ quadrata descripta ad α γ, γ β rectas. Quatuor igitur loca θ ζ, γ κ, α η, η ε, æqualia sunt quadratis ad α γ, γ β descriptis, & ei loco bis quem α γ, γ β rectæ includunt. Si igitur recta linea &c. quod demonstrandum fuit.

E

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

E.



V.

Si recta linea secetur in partes æquales & inæquales, is locus quem inæqualia totius lineæ segmenta cũ angulo recto includunt, vna cum eo quadrato quod ad portionem sectionibus interpositam describitur, æqualis

æqualis est quadrato ad dimidiatam illam lineam descripto.

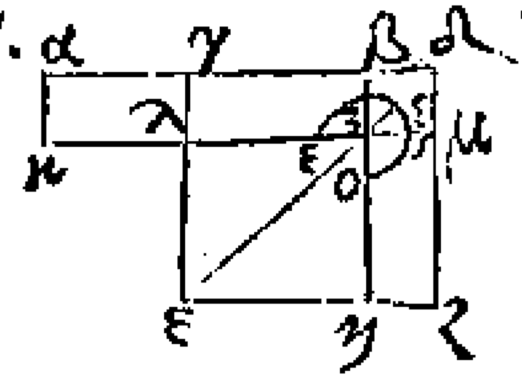
DEMONSTRATIO.

Recta $\alpha\beta$ secetur æqualiter quidem in γ puncto, inæqualiter verò in δ puncto. Dico locū quem $\alpha\delta$, $\delta\beta$ rectæ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad $\gamma\delta$ descripto, æqualem esse quadrato, ad $\gamma\beta$ rectā descripto, describatur enim ad $\gamma\beta$ rectam, quadratum $\gamma\epsilon$, $\zeta\beta$, & connectantur per lineam rectam $\beta\epsilon$ puncta, & per δ quidem vtrisq; $\gamma\epsilon$, $\beta\zeta$ rectis, ducatur æquabiliter respondens $\delta\eta$ recta. per ϑ verò ducatur $\kappa\mu$, quæ æquabilis sit $\gamma\beta$, $\epsilon\zeta$ rectis. Item per α ducatur $\alpha\kappa$ æquabiliter respondens $\gamma\lambda$, $\beta\mu$ rectis. Quoniam $\gamma\vartheta$ complementum æquale est $\vartheta\zeta$ complemento (per 43. primi.) adijciatur communiter vtrisq; $\delta\mu$ locus. Totus igitur $\gamma\mu$ locus, toti $\delta\zeta$ loco æqualis est, sed $\gamma\mu$ locus æqualis est $\alpha\lambda$ loco. Quoniam $\alpha\gamma$ recta per apparatum $\gamma\beta$ rectæ æqualis est. Proinde $\alpha\lambda$ locus æqualis est $\delta\zeta$ loco. Adijciatur vtrisq; communiter $\gamma\vartheta$ locus. Totum igitur $\alpha\vartheta$ æquale est $\delta\zeta$ loco cum $\delta\lambda$ loco, sed $\alpha\vartheta$ locus æqualis est loco, quem $\alpha\delta$, $\delta\beta$ includunt, siquidem $\delta\vartheta$ recta æqualis $\delta\beta$ rectæ. Est autem $\zeta\delta$, $\delta\lambda$ norma $\mu\nu\xi$. Quamobrem $\mu\nu\xi$ norma, æqualis est loco cum angulo recto, quem $\alpha\delta$, $\delta\beta$ includunt, vtrisq; adijciatur communiter $\lambda\eta$ quadratum quod æquale est quadrato descripto ad $\gamma\delta$. Norma igitur $\mu\nu\xi$

cum quadrato λ η æqualis est loco cum angulo re-cto quem α δ, δ ζ includunt, vna cum quadrato ad γ ζ descripto. Sed μ ν ξ norma cum λ η quadrato est totum γ ε, ζ ϛ, quadratum, quod ad γ β est descriptũ. Locus igitur cum angulo recto quem α δ, δ β includunt, vna cum γ δ quadrato, æqualis est quadrato ad γ β descripto. Si igitur linea recta &c, quod demonstrandum erat.

ϛ

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης, περιεχόμενον S. ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης, ἔκ τε τῆς ἡμισείας, καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



V I.

Si recta linea secetur in duas æquales partes, & illi recta alia continuata directione adijciatur, is locus quem illa tota vna cum apposita, & apposita ipsa cũ angulo recto inclu-

includit, ſimul & quadratum ad dimidiatam deſcriptum, æqualis eſt quadrato ad dimidiatam ſimul cum appoſita, tanquam ad vnum latus deſcripto.

DEMONSTRATIO.

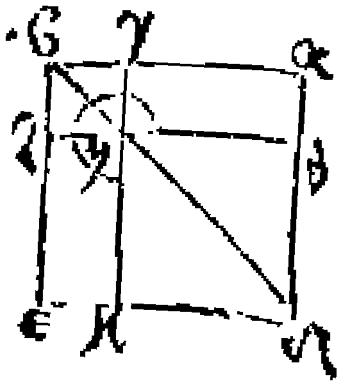
Recta enim α β ſecetur æqualiter in γ puncto, & ei continuata directione adijciatur recta β δ. Dico locum quem α δ, δ β rectæ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad γ β deſcripto æqualem eſſe quadrato ad γ δ deſcripto. Deſcribatur ad γ δ rectam quadratum γ ε, ζ δ, & connectantur δ ε puncta, & per β punctum ducatur ε γ, δ ζ rectis æquabiliter reſpondens, β η recta, per θ verò vtriq; α β, ε ζ æquabiliter reſpondens ducatur recta κ μ, per α autem ducatur vtrique γ λ, δ μ æquidiſtans recta α κ. Quoniam α γ recta æqualis eſt, γ β rectæ, æqualis eſt, & α λ locus γ θ loco (per 36. primi.) ſed γ θ locus, θ ζ loco æqualis eſt (per 43. primi.) Quare & α λ locus æqualis erit θ ζ loco (per 1. notionem.) vtriq; adijciatur communiter β μ locus. Totus igitur α μ locus eſt quem α δ, δ β rectæ includunt (ſiquidem δ μ recta æqualis eſt δ β rectæ (per 34. propoſit. & quartæ huius acquiſitum.) & ν ξ ο norma quoque æqualis eſt loco quem α δ, δ β rectæ includunt cum angulo recto, vtriſq; communiter adijciatur λ η

locus,

locus, qui æqualis est quadrato ad γ β descripto, (per 34. primi, & acquisitum quartæ huius.) Proinde locus quem α δ, δ β cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad γ β descripto æqualis est ι ξ ο normæ, & λ ν quadrato. Sed ι ζ ο norma & λ ν quadratum, totum sunt γ ι ζ δ quadratum, quod est ad γ β descriptum. Locus igitur quem α δ, δ β rectæ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad γ β descripto, æqualis est quadrato ad γ β dimidiam, & β δ appositam descripto. Si igitur linea recta &c. quod demonstrandum erat.

Z

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσας ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



V I I.

Si recta linea secetur fortuito, id quod ad totam illam, & quod ad vnum segmentorum descriptum fuerit: ambo quidem illa quadrata simul æqualia sunt loco, quem tota illa

illa bis & dictum segmentum cum angulo recto includit, vna cum quadrato ad reliquum segmentum descripto.

DEMONSTRATIO.

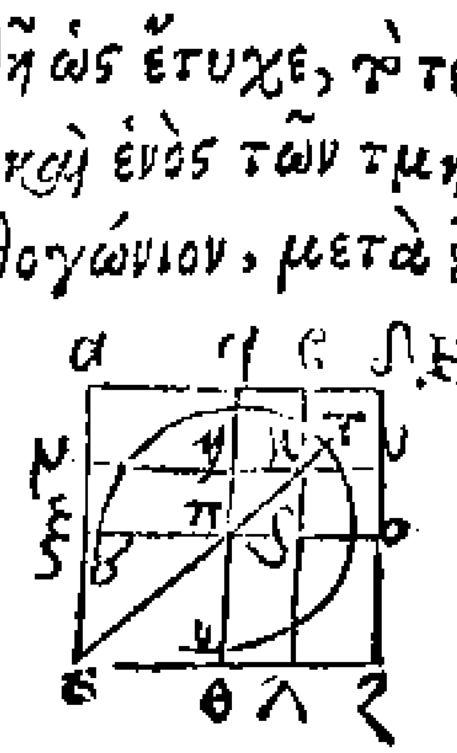
Recta α β secetur fortuito in γ puncto. Dico quadrata ad α β, β γ descripta, aequalia esse, Bis & loco quem α β, β γ rectae cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad α γ descripto. Describatur ad α β rectam quadratum α δ, ε β, & constituatur figura, vt in praecedentibus factum est. Quoniam complementum α η aequale est η ε complemento (per 43. primi.) quadratum γ ζ communiter vtriq; adijciatur. Totus igitur α ζ locus aequalis est γ ε loco. Loca igitur α ζ, γ ε duplicia sunt ad α ζ locum, sed α ζ, γ ε loca sunt κ λ μ norma, & γ ζ quadratum. Norma igitur κ λ μ & γ ζ quadratum duplicia sunt α ζ loco. Verum ad α ζ locum duplicem, est bis ille locus quem α β, β γ rectae cum angulo recto includunt. Est enim β ζ recta aequalis β γ rectae. Norma igitur κ λ μ & γ ζ quadratum aequalis est ei loco bis quem α β, β γ rectae cum angulo recto includunt, adijciatur vtrisque communiter quadratum δ η, quod est quadratum descriptum ad α γ rectam, norma igitur κ λ μ & β η, η δ quadrata aequalia sunt, bis ei loco quem α β, β γ rectae cum angulo recto includunt, & quadrato ad α γ descripto. Sed κ λ μ norma, &

β η, η δ

β η, η δ quadrata ſunt totum α δ ε β quadratum, vna cum γ ζ quadrato, quæ quidem ſunt quadrata ad α β, β γ deſcripta quadrata igitur ad α ϛ, ϛ γ deſcripta æqualia ſunt ei loco bis quem α β, ϛ γ rectæ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad α γ deſcripto. Si igitur &c. quod demonſtrandum fuit.

H

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ



V I I I.

Si linea recta fortuito ſecetur, locus quem illa tota & vnum ſegmentorum cum angulo recto quater includit, vna cum reliqui ſegmenti quadrato: is æqualis eſt quadrato ad lineam totam & ſimul ad prædictum ſegmentum, tanquam lineam vnam deſcripto.

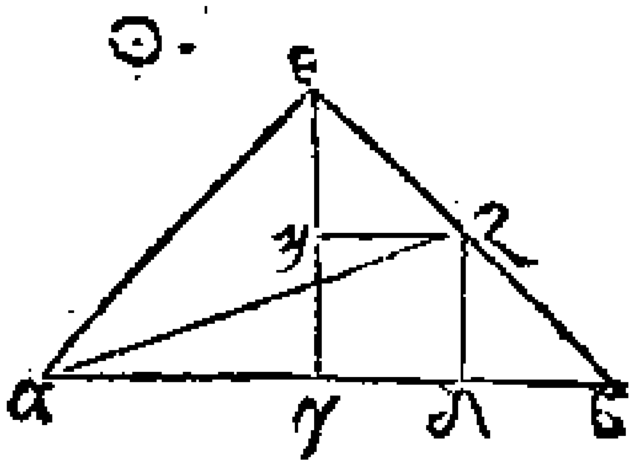
DEMONSTRATIO.

Recta enim $\alpha\beta$ secetur fortuito in γ puncto. Dico locum quem $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ cum angulo recto quater includunt, vna cum quadrato ad $\alpha\gamma$ descripto, æquale esse quadrato ad lineam scilicet $\alpha\beta$ totam, & simul prædictum $\beta\delta$ segmentum, tanquam lineam vnam descripto. Producatur directè $\alpha\beta$ recta, vt sit $\beta\delta$, & constituatur $\beta\delta$ æqualis $\gamma\beta$ rectæ, & ad $\alpha\delta$ rectam, describatur quadratum $\alpha\epsilon$, $\zeta\delta$, & constituatur duplex figura. Quoniam $\gamma\beta$ recta $\beta\delta$ rectæ (per κατασκ.) æqualis est, sed & $\beta\gamma$ recta, $\eta\kappa$ rectæ est æqualis, nec non $\beta\delta$ rectæ $\kappa\nu$ recta æqualis est (per 34. primi.) Erit igitur $\eta\kappa$ recta æqualis $\kappa\nu$ (per notionem primam.) Simili ratione concludemus $\pi\varrho$, ϱo rectas æquales esse. Item quia $\beta\gamma$ recta æqualis est $\beta\delta$ rectæ, & $\eta\kappa$ recta $\kappa\nu$ rectæ, æqualis erit $\gamma\kappa$ locus $\kappa\delta$ loco. Sed $\gamma\kappa$ locus æqualis est $\varrho\nu$ loco (per 43. primi.) Sunt enim complementa γo loci æquabilium linearum. Est igitur $\kappa\delta$ locus æqualis $\eta\varrho$ loco. Quatuor igitur hæc loca, $\delta\kappa$, $\gamma\kappa$, $\eta\varrho$, $\varrho\nu$, inter se mutuo sunt æqualia, quare & quadruplicia sunt ad $\gamma\kappa$ locum. Rursum quia $\gamma\beta$ recta æqualis est $\beta\delta$ rectæ, æqualis est & $\beta\kappa$ rectæ, hoc est, $\gamma\eta$ rectæ, recta etiam $\gamma\beta$, rectæ $\eta\kappa$, hoc est $\eta\gamma$ recta æqualis est, & $\gamma\eta$ recta $\eta\pi$ rectæ. Item, quia $\gamma\eta$ recta $\eta\pi$ recta æqualis est, & $\pi\varrho$ recta ϱo rectæ æqualis est. Item $\alpha\eta$ quidem locus $\mu\pi$, & $\pi\lambda$ locus, $\varrho\zeta$ loco æqualis est. Sed $\mu\pi$ locus æqualis est $\pi\lambda$ loco.

loco. Sunt enim complementa μ λ æquabilium lineարum figuræ. Locus itaq; α ν, æqualis est ξ ζ loco. Quatuor igitur hæc loca, α ν, μ π, π λ, ξ ζ, inter se sunt æqualia. Quapropter & quadruplicia sunt ad α ν locum. Demonstratum autem est & quatuor loca γ κ, κ δ, ν ξ, ξ ν, quadruplicia esse ad γ κ locum. Octo igitur loca quæ comprehendit σ τ υ norma quadruplicia sunt ad α κ locũ. Item, Quia α κ locus æqualis est loco quem α β, β δ rectæ includunt, siquidem ϐ κ recta β δ rectæ æqualis est. Locus igitur quem α β, ϐ δ rectæ cum angulo recto includunt quater, est quadruplex, ad α κ locum. Demonstratum autem est α κ loco normam esse quadruplicem. Locus igitur quem α β, ϐ δ rectæ includunt quater, æqualis est σ τ υ normæ, vtrisq; adijciatur communiter ξ ϑ quadratum, quod est æquale quadrato ad α γ descripto. Locus igitur quem α β, β δ rectæ cum angulo recto includunt quater, vna cum quadrato ad α γ descripto, æqualis est σ τ υ normæ, & ξ ϑ quadrato, sed σ τ υ norma, & ξ ϑ quadratum, est totum α ι ζ δ quadratum, quod est ad α δ descriptum. Quamobrem locus quem α ϐ, β δ cum angulo recto quater includunt, vna cum quadrato ad α γ descripto, æqualis est, quadrato ad α δ descripto, hoc est, quadrato ad α β, β γ, tanquam ad lineam vnam descripto. Si igitur linea recta fortuito secetur &c. quod demonstrandum fuit.

Ἐὰν εὐ-

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.



IX.

Si recta linea secetur in partes æquales & inæquales, quadrata quæ ad totius inæqualia segmenta describuntur, ea sunt duplicia quadrati eius, quod ad dimidiatam illam, & eius quod ad portionem sectionibus interpositam, describitur.

DEMONSTRATIO.

Recta α β secetur primò æqualiter in puncto γ, (per 10. primi.) deinde inæqualiter in puncto δ. Dico quadrata ad α δ, δ β rectas descripta esse duplicia quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Ad punctum γ rectæ α β perpendiculum γ ε erigatur (per 11. proposit. primi.) quod vtriq; rectarum, α γ, γ β fiat æquale, & ε α, ε β puncta lineis rectis connectantur. Item per δ punctum ducatur δ ζ rectæ æquabiliter ε γ rectæ respondens (per 31. primi.)

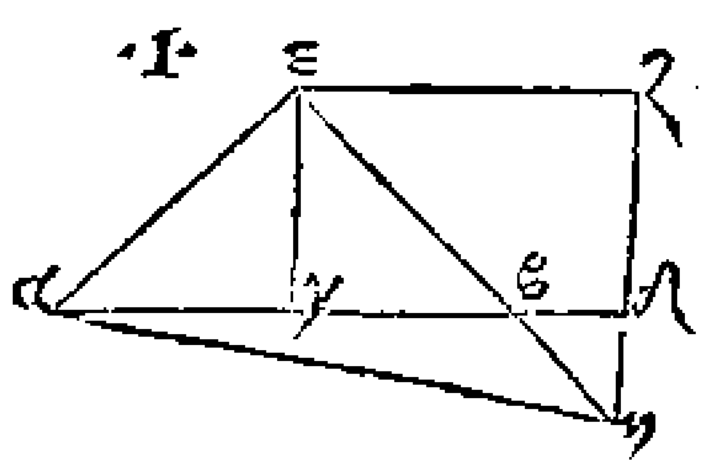
& per

& per ζ punctum recta ducatur $\zeta\eta$ æquabilis $\alpha\beta$ rectæ, & connectantur $\alpha\zeta$ puncta per lineam rectam. Quia recta $\alpha\gamma$ æqualis est $\gamma\epsilon$ rectæ, erit $\epsilon\alpha\gamma$ angulus $\alpha\epsilon\zeta$ angulo æqualis (per 5. primi.) Et cum angulus ad γ rectus sit, reliqui $\alpha\epsilon\gamma$, $\epsilon\alpha\gamma$ anguli vni recto æquales sunt (per 32. primi.) Vterq; igitur $\alpha\epsilon\gamma$, $\epsilon\alpha\gamma$ dimidius recti est. Eadem ratione vterq; $\gamma\epsilon\beta$, $\epsilon\beta\gamma$ angulorum, dimidius recti est. Quapropter totus $\alpha\epsilon\beta$ angulus rectus est. Item, quia $\eta\epsilon\zeta$ angulus dimidius est recti, ac $\epsilon\eta\zeta$ rectus, (est enim æqualis, per 29. primi interiori, & ex aduerso $\epsilon\gamma\beta$ angulo.) Reliquus igitur $\epsilon\zeta\eta$ dimidius est recti. Quare $\eta\epsilon\zeta$ angulus æqualis est $\epsilon\zeta\eta$ angulo. Atq; ideo $\epsilon\eta$ latus æquale est $\zeta\eta$ lateri (per 6. primi.) Rursum quia angulus ad β dimidius est recti, ac $\zeta\delta\beta$ rectus (est enim similiter interiori et ex aduerso $\epsilon\gamma\beta$ angulo æqualis) reliquus igitur $\beta\zeta\delta$ dimidius est recti. Quare angulus ad β æqualis $\delta\zeta\beta$ angulo, et propterea $\delta\zeta$ latus, $\delta\beta$ lateri æquale est. (per 6. primi) Porrò quia recta $\alpha\gamma$ æqualis est $\gamma\epsilon$ rectæ, æquale est & quadratum ad $\alpha\gamma$ descriptum, quadrato ad $\gamma\epsilon$ descripto. Vtraq; igitur quadrata ad $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ descripta, duplicia sunt quadrato ad $\alpha\gamma$ descripto, sed quadratis ad $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ descriptis, æquale est quadratū ad $\epsilon\alpha$ descriptum, (per 47. primi.) siquidem $\alpha\gamma\epsilon$ angulus rectus est. Proinde quadratum ad $\epsilon\alpha$ descriptum duplex est quadrato ad $\alpha\gamma$ descripto. Rursum quia $\epsilon\eta$ rectæ æqualis est $\eta\zeta$ rectæ, qua-

dratum

dratum ad ε η descriptum, æquale est quadrato ad η ζ descripto, Quadrata igitur ad ε η, η ζ descripta, duplicia sunt quadrato ad η ζ descripto, sed quadratis ad ε η, η ζ descriptis, æquale est quadratum ad ε ζ descriptum. Quare quadratum ad ε ζ duplex est quadrato ad η ζ descripto. Est autem η ζ recta, æqualis γ δ rectæ, quare ε ζ quadratum duplex est quadrato ad γ δ descripto. Est autem quadratum ad α ε duplex quadrato ad α γ. Quadrata igitur ad α ε, ε ζ descripta, duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ, sed quadratis ad α ε, ε ζ æquale est quadratum ad α ζ descriptum. Est enim α ε ζ angulus rectus. Proinde quadratum ad α ζ duplex est quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Verum enimuero quadratum ad α ζ æquale est quadratis ad α δ, δ ζ descriptis. Angulus enim ad δ rectus est. Quadrata igitur ad α δ, δ ζ duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Cum autem δ ζ recta æqualis sit δ β rectæ, quadrata ad α δ, δ β descripta, duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Si recta igitur linea &c. quod demonstrandum fuit.

I



ὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμηθῇ δίχα, ροστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης, ἔκ τε τῆς ἡμισείας, καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου.

X.

Si recta linea secetur in duas partes æquales, & recta illi continuata directione apponatur, id quod ad totam illam vna cum apposita, & id quod ad appositam descriptum fuerit, ambo illa quidem quadrata duplicia sunt, eius quadrati quod ad dimidiatam illam, & eius quod ad compositam de dimidiata & apposita, tanquam ad vnam lineam descriptum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Recta enim α β secetur æqualiter in γ puncto, & adijciatur ei continuata directione, β δ recta. Dico quod quadrata descripta ad rectas α δ, δ β duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Ducatur enim de puncto γ, rectæ α β, normalis recta γ ε, quæ vtriq; rectarum α γ, γ β æqualis fiat. Ac punct puncta α ϵ, ϵ ζ lineis rectis connectantur, deinde per ϵ quidem punctum, rectæ α δ, æquabilis recta ϵ ζ, per δ autem rectæ γ ϵ æquabilis recta δ ζ ducatur. Quoniam in æquabiles rectas γ ϵ, ζ δ, recta ϵ ζ incidit, duo γ ϵ ζ, ϵ ζ δ anguli, duobus rectis sunt æquales. Erunt igitur duo ζ ϵ β, ϵ ζ δ anguli duobus rectis minores. Sed cum duæ rectæ, quæ cum alia recta interiores angulos in iisdem partibus duobus rectis minores facit infinito spacio productæ, secum concurrant, illis in partibus vbi sunt anguli duobus rectis minores. Rectæ igitur ϵ β, ζ δ productæ ad β δ partes concurrent. Producantur ergo & concurrant in η puncto, & α η puncta per lineam rectam connectantur. Quia α γ recta, æqualis est γ ϵ rectæ, æqualis est, & α ϵ γ angulus, ϵ α γ angulo. At angulus α γ ϵ rectus est, vterque igitur ϵ α γ, α ϵ γ angulorum dimidius recti est. Eadem ratione vterque γ ϵ β, ϵ β γ angulorum dimidius recti est. Proinde α ϵ β angulus est rectus. Item, quia ϵ β γ angulus est dimidius recti. Est & δ β η (per 15. primi) recti dimidius, sed β δ η angulus est rectus, est enim æqualis δ γ ϵ angulo, cum illi sit in vicissitudine. Reliquus igitur δ η β dimidius est recti. Quare δ η β angulus, æqualis est δ β η angulo, & ideo β δ latus, η δ lateri æquale est. Rursum quia ϵ η ζ dimidius est recti, & angulus ad ζ rectus (æqualis enim est angulo γ ex aduerso.) Reliquus igitur ζ ϵ η dimidius est recti. Quare ϵ η ζ angulus, ζ ϵ η angulo æqualis, & inde

 η ζ latus,

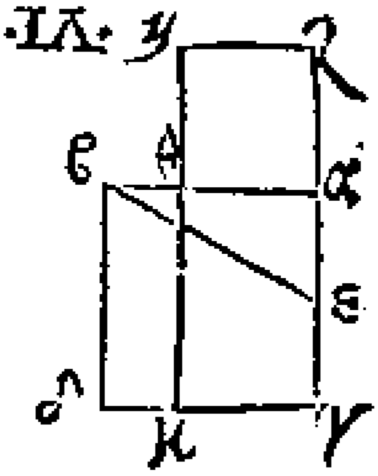
η ζ latus, ε ζ lateri æquale est. Porrò quia ε γ recta, æqualis est γ α rectæ, æquale est & quadratum ad α γ descriptum, quadrato ad ε γ descripto. Vtraq; igitur ad ε γ, γ α quadrata, duplicia sunt quadrato ad γ α descripto, sed quadratis ad ε γ, γ α descriptis, æquale est quadratum ad ε α descriptum. Quadratum igitur ad ε α descriptum, duplex est quadrato ad α γ descripto. Item, quia η ζ recta, æqualis est ε ζ rectæ, æquale est & quadratum ad ζ η, quadrato ad ζ ε descripto. Duo igitur ad ζ η, ζ ε quadrata duplicia sunt, quadrato ad ε ζ descripto. Est autem ε ζ recta, æqualis γ δ rectæ, (per 33. primi, quæ æquabiliter ductas δ ζ, γ ε coniungunt.) Quadratum igitur ad ε η descriptũ, duplex est quadrato ad γ δ descripto. Sed demonstratum est, quadratum ad ε α duplex esse quadrato ad α γ descripto. Quadrata igitur ad α ε, ε η duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Verum ad α ε, ε η quadratis, æquale est quadratum ad α η descriptum. Quadratum igitur ad α η, duplex est quadratis ad α γ, γ δ descriptis, sed quadratum ad α η, æquale est quadratis ad α δ, δ η descriptis. Quadrata igitur ad α δ, δ η duplicia sunt quadratis ad α γ, γ δ. Cumq; δ η recta, æqualis sit δ ϐ rectæ, quadrata ad α δ, δ ϐ duplicia sunt, quadratis ad α γ, γ δ descriptis. Si igitur recta linea &c. quod demonstrandum erat.

PROBLEMA I.

τὴν

IA

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι, τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



XI.

Data recta linea secanda est, vt id quod illa tota & alterum segmentorum cum recto angulo includet, æquale sit quadrato ad reliquum segmentum descripto.

DEMONSTRATIO.

Data recta α β secanda est hac ratione, vt locus cum angulo recto quem tota cum altero segmentorum includit, æqualis sit quadrato ad reliquum segmentum descripto. Describatur ad α ϐ rectam, quadratum α ϐ, γ δ, & secetur α γ æqualiter in ε puncto, & connectantur ϐ ε puncta, per lineam rectam ϐ ε, & continuata directione γ α producatur in ζ, & fiat recta β ε æqualis ε ζ, & ad α ζ describatur, quadratum ζ θ, & η θ producatur directè in κ. Dico rectam α ϐ in δ puncto secari, ita vt locus cum angulo recto, quem α ϐ, β θ, includunt, æqualis sit quadrato ad α θ descripto.

scripto. Quia $\alpha\gamma$ æqualiter in ε puncto secatur, & ei directè adiecta est $\alpha\zeta$ recta. Locus quem $\gamma\zeta$, $\zeta\alpha$ rectæ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad $\alpha\varepsilon$ descripto, æqualia sunt quadrato ad $\varepsilon\zeta$ descripto. At $\varepsilon\zeta$ recta, æqualis est $\varepsilon\beta$ rectæ. Locus igitur quem cum angulo recto $\gamma\zeta$, $\zeta\alpha$ includunt, vna cum quadrato ad $\alpha\varepsilon$, æqualis est quadrato ad $\varepsilon\zeta$ descripto, sed ad $\varepsilon\beta$ quadrato descripto, æqualia sunt quadrata $\beta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, angulus n. ad α rectus est. Locus igitur quem includunt $\gamma\zeta$, $\zeta\alpha$, cum quadrato ad $\alpha\varepsilon$, æqualia sunt quadratis ad $\beta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, auferatur vtrisq; quadratum ad $\alpha\varepsilon$. Reliquus igitur locus quem $\gamma\zeta$, $\zeta\alpha$ cum angulo recto includunt, æqualis est quadrato ad $\alpha\beta$. Sed locus quem $\gamma\zeta$, $\zeta\alpha$ cum angulo recto includunt, æqualis est $\zeta\kappa$ loco. Est enim $\alpha\zeta$ æqualis $\zeta\eta$. Item quadratum ad $\alpha\beta$ æquale est loco ad $\alpha\delta$ descripto. Est igitur $\zeta\kappa$ locus æqualis $\alpha\delta$ loco. Locus $\alpha\kappa$ vtriq; communis auferatur. Reliquus igitur $\zeta\vartheta$ locus, reliquo $\vartheta\delta$ loco æqualis est, sed $\vartheta\delta$ est quem $\alpha\beta$, $\vartheta\beta$ includunt. Aequalis enim est $\alpha\beta$ recta, $\beta\delta$ rectæ, item $\zeta\vartheta$ est quadratum ad $\alpha\vartheta$ descriptum. Locus igitur quem $\alpha\beta$, $\beta\vartheta$ cum angulo recto includunt, æqualis est quadrato ad $\vartheta\alpha$ descripto. Data igitur $\alpha\beta$ recta, secta est in ϑ puncto, ita vt locus cum angulo recto, quem $\alpha\beta$, $\beta\vartheta$ includunt, æqualis sit quadrato ad $\vartheta\alpha$ descripto, quod faciendum erat.

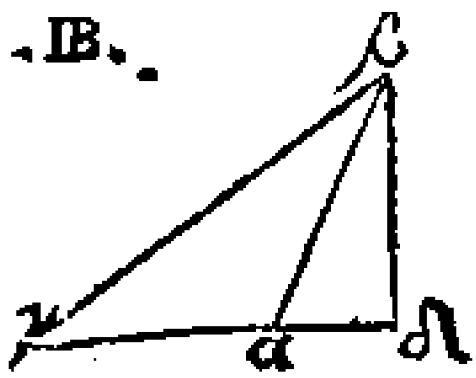
THEO-

THEOREMATA II.

IB

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν,

IB.



ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν, ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου, πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

XII.

In triangulo cum obtuſo angulo, id quadratum quod deſcribitur ad latus ſubtendens angulũ obtuſum, maius eſt quadratis deſcriptis ad latera obtuſum angulum includentia, bis tanto, quantum eſt id quod includit vnum circum obtuſum angulum latus, in quod productum perpendiculum incidit, & id quod exterius perpendiculum abſumit verſus angulum obtuſum.

DEMONSTRATIO.

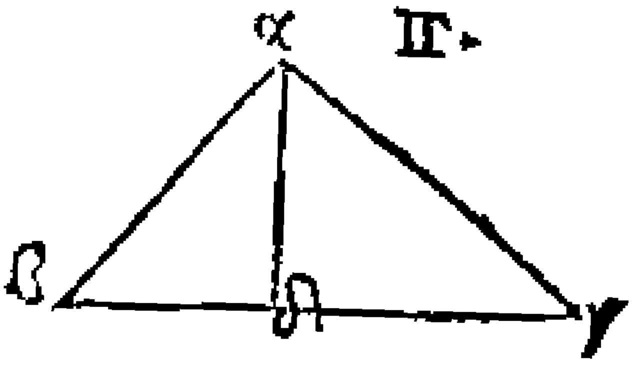
Sit triangulum cum angulo obtuso γβα, quod βαγ angulum obtusum habeat, & de β puncto demittatur βδ perpendiculum in γα latus productum. Dico quadratum ad βγ, maius esse quadratis descriptis ad βα. αγ, bis tanto quantum est id quod γα, αδ rectæ cum angulo recto includunt. Quia γδ recta in α puncto secatur fortuito, quadratum ad δγ, tanquam totam lineam descriptũ, æquale est quadratis ad γα, αδ, tanquam segmento, & ei loco bis, quem γα, αδ cum angulo recto includunt (per quartam huius) adijciatur bis commune quadratum βδ, quadrata igitur γδ, δβ æqualia sunt quadratis ad γα, αδ, δβ descriptis, & ei loco bis, quem γα, αδ cum angulo recto includunt. Sed quadratis γδ, δβ æquale est quadratum ad γβ descriptum. Angulus enim ad δ rectus est. Quadratis verò αδ, δβ æquale est quadratum αβ (per 47. primi.) Quadratum igitur βγ æquale est quadratis ad γα, αβ descriptis, & bis ei loco quem αγ, αδ rectæ includunt. Quapropter quadratum ad γβ, quadratis ad γα, αβ maius est, bis ei loco quem γα, αδ cum angulo recto includunt. In triangulo igitur cum obtuso angulo &c. quod demonstrandum erat.

ΙΓ

Εν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον,

τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς, τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν, ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς, ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

II.



XIII.

In Triangulis, quorum sunt acuti omnes anguli, id quadratum quod describitur ad latus subtendens angulum acutum, minus est quadratis descriptis ad latera acutum angulũ includentia, bis tanto, quantum est id quod includit vnum circum acutum angulum latus, in quod incidit perpendiculum, & id quod interius perpendiculum absumit versus angulum acutum.

DEMONSTRATIO.

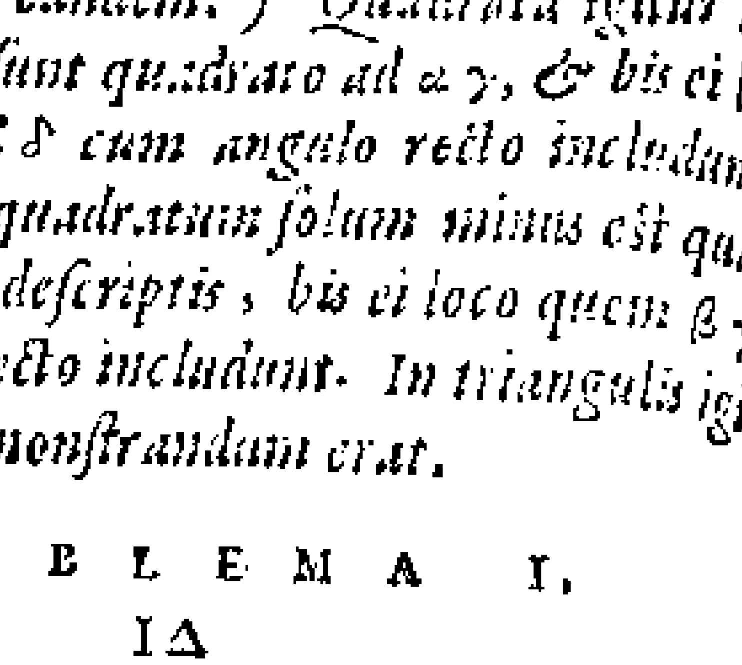
Sit α β γ triangulum cum angulo acuto α β γ, cuius ad β angulus sit acutus, & de α puncto in β γ *rectam demittatur perpendiculũ α δ (per 12. pr.) Dico quadratum ad α γ descriptum, minus esse quadratis ad γ β, β α, bis ei loco quem γ ϐ, β δ cũ angulo recto includunt. Quia enim recta γ ϐ fortuito secatur in δ puncto, quadrata ad γ β, β δ descripta æqualia sunt, bis ei loco quem γ β, β δ cum angulo recto includunt, & quadrato ad δ γ (per 7. huius.) Adijciatur bis commune ad α δ quadratum. Quadrata igitur γ ϐ, ϐ δ, δ α, æqualia sunt bis ei loco, quem γ ϐ, β δ cum angulo recto includunt, & quadratis ad α δ, δ γ descriptis. Sed quadratis ad β δ, δ α æquale est ad α ϐ quadratum, (per 47. primi.) Angulus enim ad δ rectus est quadratis autem ad α δ, δ γ æquale est ad α γ quadratum (per eandem.) Quadrata igitur ad γ β, ϐ α æqualia sunt quadrato ad α γ, & bis ei loco quem γ ϐ, ϐ δ cum angulo recto includunt. Quamobrem α γ quadratum solum minus est quadratis ad γ β, β α descriptis, bis ei loco quem β γ, β δ cum angulo recto includunt. In triangulis igitur &c. quod demonstrandum erat.*

PROBLEMA I.

ΙΔ

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

XIIII.



Datæ

Datæ figuræ rectarum linearum, æquale quadratum constituendum est.

DEMONSTRATIO.

Sit rectarum linearum figura α. Constituendum autem est quadratum, quod æquale sit α rectarum linearum figuræ. Constituatur α rectarum linearum figuræ, æqualis æquabilium linearum figura (per 42. & 44. primi) cum angulo recto, β δ. Si igitur β ε latus æquale est, ε δ lateri, β δ erit quadratum constitutum de rectarum linearum figura data. Sin verò β ε, ε δ sint inæquales rectæ, sit β ε maior, quæ continuata directione producatur in ζ, & recta ε δ æqualis fiat, ζ ε recta, & ζ β secetur æqualiter in η puncto. Deinde centro η intervallo alterius vel η β, vel η ζ rectæ, describatur semidiatus circulus β θ ζ, & δ ε directè producatur in θ punctum ambitus, & η θ puncta per rectam connectantur. Dico ε θ rectam, esse latus quadrati, quod æquale sit β δ loco & per consequens triquetro α. Quia enim recta β ζ æqualiter quidem in η puncto, inæqualiter verò in ε puncto secta est, locus quem β ε, ε ζ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato intermedio ε η, æqualia sunt, quadrato ad η ζ tanquam ad mediam lineam. Sed η ζ, η θ rectæ sunt æquales (per defin. circuli.) Locus igitur quem β ε, ε ζ cum angulo recto

recto includunt, vna cum quadrato ad η ε, æqualis est quadrato ad η θ descripto, cum sit æqualis η ζ, sed quadratum ad η θ æquale est quadratis ad θ ε, η ε, (per 47. primi.) Auferatur commune vtrique ad η ε quadratum, qui relinquitur igitur locus quem β ε, ε ζ cum angulo recto includunt, æqualis est quadrato ad ε θ descripto, sed locus quem β ε, ε ζ includunt, est ϐ δ figura, siquidem ε ζ recta, æqualis est ε δ rectæ. Proinde æquabilium linearum figura β δ, æqualis est quadrato, ad θ ε descripto, sed ϐ δ figura æqualis est rectarum linearum figuræ, α. Figura igitur rectarum linearum α æqualis est quadrato ad ε θ descripto. Datæ igitur figuræ rectarum linearum α, æquale quadratum constituitur. id, quod ad ε θ descriptum fuerit, quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SECVNDI ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ γ'.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER TERTIVS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

A

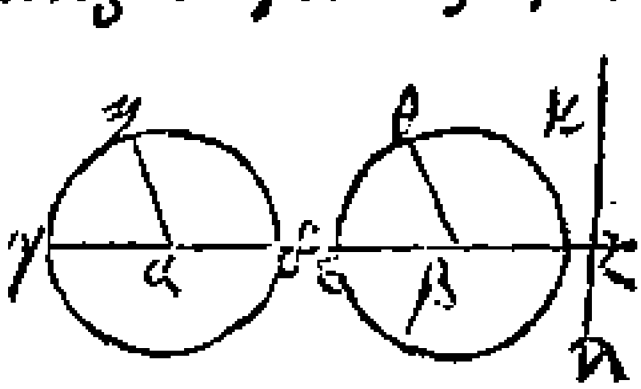
Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι, εἰσὶν ἴσαι. Ἢ ὧν, αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἴσαι εἰσίν.

I.

Aequales circuli ſunt, quorum vel diametri vel ex centro ductæ, æquales ſunt.

B

Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον.



II.

Recta linea dicitur attingere circulum, quæcunque tangendo circulum,

culum, dum producitur, non ſeca[t] circulum.

Γ

Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

III.

Circuli attingere ſeſe mutuo dicuntur, quicunque ſeſe mutuo tangendo, ſeſe mutuo non ſecant.

Δ

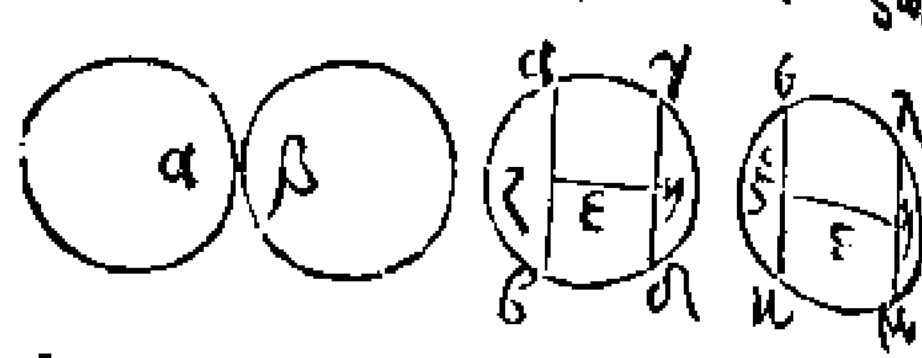
Ἐν κύκλῳ, ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου, εὐθεῖα[ι] λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἐπ' αὐτὰ[ς] κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσιν.

IIII.

In circulo æqualiter à centro rectæ lineæ abeſſe dicuntur cum æqualia fuerint perpendicula, quæ de centro ad ipſas ducuntur.

E

Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.



V.

Longius autem abeſſe ea dicitur, in quam in quam longius perpendiculum incidit.

ς

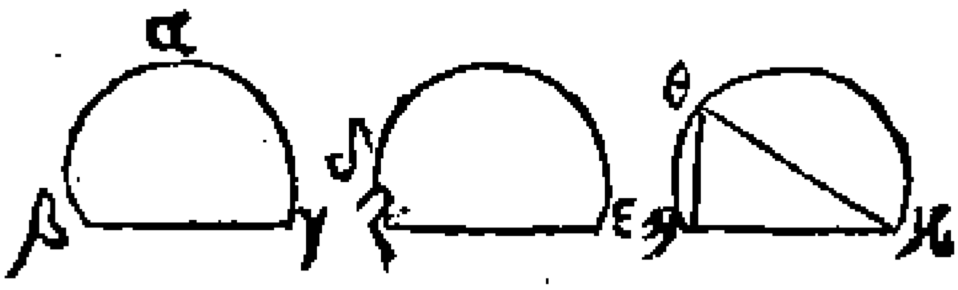
Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

VI.

Segmentũ circuli eſt, quod & recta & circuli ambitus linea includit.

Z

Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη, ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.



VII.

Segmenti autem angulus eſt, quem recta & circulum ambiens linea includit.

H

Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος, ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ, ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία, ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

In ſeg-

VIII.

In ſegmento autem angulus eſt, cum in ambiente ſegmentum linea ſumtum punctum quodpiam, & de illo ad terminantia puncta lineam rectam, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ rectæ lineæ fuerint: Is igitur angulus in ſegmento eſt, quem adiunctæ illæ lineæ includunt.

Θ

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν, ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

IX.

Quam verò ambientis lineæ partem lineæ includentes angulum abſumunt, illam obire angulus dicitur.

I

Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου, σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

X.

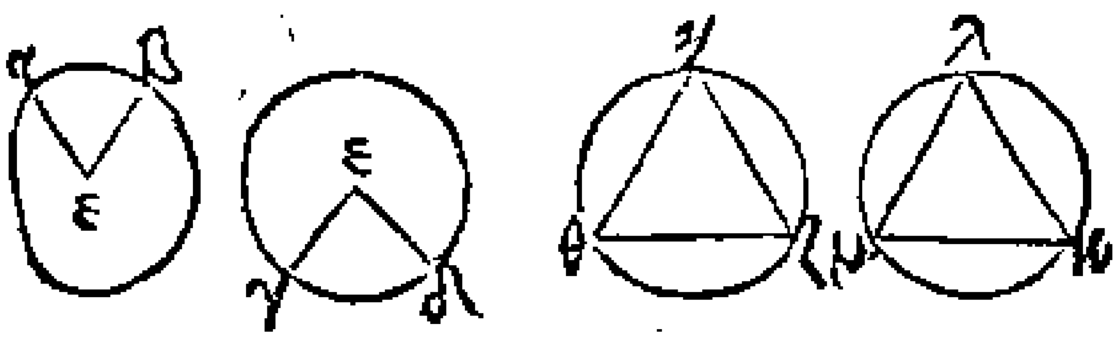
Circuli ſector eſt, cum ad ipſius

circuli

circuli centrum constitutus fuerit angulus, illa figura quæ includitur & à lineis angulum includentibus, & ea ambientis lineæ parte, quæ ab ipsis absumitur.

IA

Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶν, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. Ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



XI.

Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt angulos æquales: vel in quibus anguli inter se æquales sunt.

Προτάσεις.

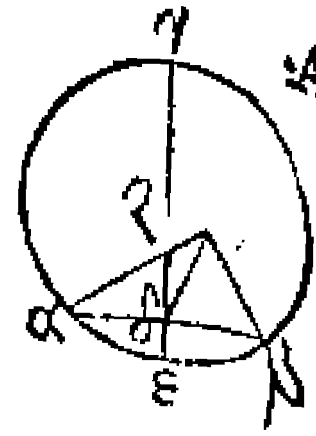
PROBLEMA I.

A

Τοῦ δοθέντος κύκλου, τὸ κέντρον εὑρεῖν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ, τις εὐθεῖα, εὐθεῖάν τινα, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



I.

Reperiundum est centrum in dato circulo.

ACQVISITVM.

De huius problematis explicatione reperitur & hoc: Si qua in circulo recta linea rectam alteram mediam ad angulos rectos secet, in secante semper circuli centrum inueniri.

DEMONSTRATIO.

Sit datus circulus α β γ, cuius centrum sit inuestigandum. Ducatur in eo linea fortuito vtring ambitus lineam attingens, quæ sit α β. Hæc secetur in duas partes æquales, in puncto δ (per 10. primi.) à quo educatur ad angulos rectos ipsi α β, δ γ recta, quæ directa extensione producatur in deorsum, diuidaturq; bifariam in ζ puncto. Dico ζ punctum esse centrum circuli α β γ propositi. Si non est, erit alibi aut in linea ε γ, vt in puncto ξ,

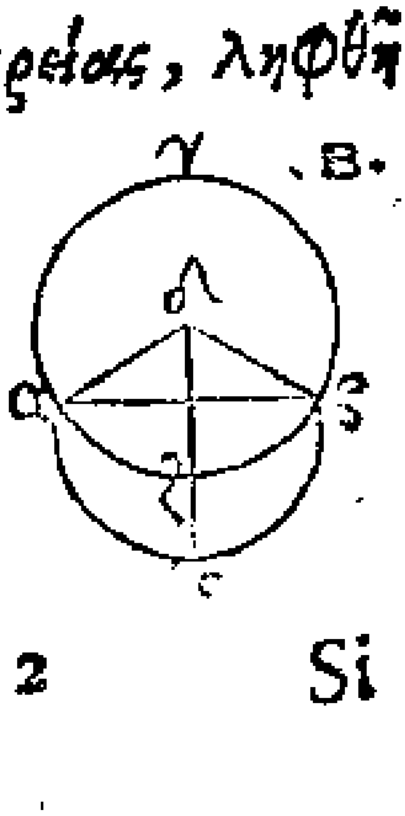
erit

erit itaq; ι ζ æqualis ε θ, quod est contra κατασκευὴν: aut extra eam, vt in η. Conuertantur η α, η δ, η β, Quia verò α δ æqualis est δ β (per κατασκευὴν) communis vtrisq; δ η, & basis η α æqualis basi η β (per 15. defin. primi. Sunt enim ex centro.) Igitur (per 8. primi) angulus α δ η æqualis est angulo β δ η. Cum autem recta rectæ insistens continuos angulos æquales inter se fecerit, (per 10. defin. primi.) Rectus est vterq; æqualium angulorum. Angulus β δ η rectus est, at β δ ζ angulus quoq; rectus. Igitur angulus ζ δ β, æqualis est β δ η angulo, maior minori quod fieri nequit. Quare η non est centrum circuli. Similiter ostendi potest, nullum aliud punctum præter ζ esse. Igitur ζ est centrum circuli α β γ dati, quod facere oportuit.

THEOREMATA XV.

B

Ἐὰν κύκλου, ἐπὶ τῆς περιφερείας, ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



II.

Si in circuli ambitu duo quælibet puncta sumantur, ea linea quæ ad illa ipsa adiuncta fuerit, intra circulum cadet.

DEMONSTRATIO.

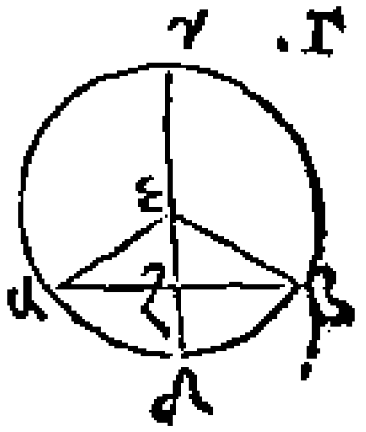
Sit circulus α β γ, in cuius ambitu sint duo puncta α β. Dico quod recta linea quæ duo ista puncta coniungit, intra circulum cadet: si non, cadet extra, & sit α ε β sumatur centrum circuli α β γ, & sit δ punctum inuentum (per 1. tertij.) Connectantur δ α, δ β puncta, & δ ζ ducatur in ε. Quoniam igitur æqualis est δ α ipsi δ β (per defin. circuli, id est, 16. primi) æqualis est angulus δ α ε, δ β ε angulo (per 5. primi.) Quia verò trianguli δ α ε vnum latus producitur scilicet α ε β, igitur (per 16. primi) angulus δ ε β scilicet exterior, angulo δ α ε interiori, & ex aduerso maior erit. Aequalis autem est angulus δ α ε, angulo δ β ε. Maior itaq; est & angulus δ ε β, angulo δ β ε. Subter maiorem autem angulum maius latus subtendit (per 10. primi.) Maior itaq; aut longior est δ β, quam δ ε. Aequalis autem est (per 15. defin. primi.) δ β ipsi δ ζ. Maior itaq; erit & δ ζ, quam δ ε minor maiore, quod fieri nequit. Non igitur à puncto α ad β ducta linea cadet extra circulum. Similiter demonstrabimus neq; in ipsam circumferentiam cadere. Si enim in ipsam circumferentiam

ferentiam caderet, sequeretur angulum δζε, maiorem esse angulo δαζ (per 16. primi) hoc est angulo δεζ, cui est (per 5. primi) æqualis, & propterea (per 18. primi) latus δε, latere δζ maius esset, & eidem etiam æquale quod fieri non potest. Recta igitur linea coniungens puncta existentia in circumferentia, cadit intra circulum, quod demonstrandum fuit.

Γ

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις, διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖάν τινα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

.Γ



III.

Si in circulo recta quæpiam per centrum ducta, secet alteram mediam quæ per centrum ducta non sit, ad angulos rectos eam secabit: & si ad angulos rectos eam secet, etiam mediam secabit.

DEMONSTRATIO.

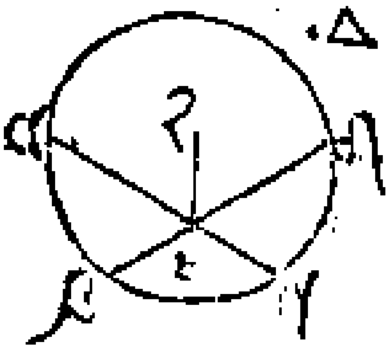
Sit circulus αβγ, & recta in eo γδ per centrum ducta, secet aliam rectam αβ non per centrum ductam, in duas æquales partes, in puncto ζ.

Dico quod & ad angulos rectos eam secet. Sumatur autem centrum ϵ, connectantur $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$. Quia igitur in triquetro $\alpha\epsilon\zeta$, $\alpha\zeta$ æqualis est ipsi $\zeta\beta$, triquetri $\epsilon\zeta\beta$, communis vtriq; $\zeta\epsilon$, sic vnum latus alteri vt respondeat, et basis $\epsilon\alpha$, basi $\epsilon\beta$ (per 15. defi. primi) est æqualis. Sequitur (per 8. defi. pri.) quod angulus $\alpha\zeta\epsilon$, angulo $\beta\zeta\epsilon$, sit æqualis. Cum autem recta linea super rectam consistens vtrobiq; angulos sibi inuicem æquales fecerit (per 10. defi. primi) vterq; ipsorum rectus erit. Igitur & dicti anguli ambo $\alpha\zeta\epsilon$, $\beta\zeta\epsilon$ recti erunt. Vnde concluditur quod $\gamma\delta$ linea per centrum ducta, ipsam $\alpha\beta$ non ductam per centrum in duas partes æquales secans, eandem etiam ad angulos rectos secet. Quod si $\gamma\delta$ ipsam $\alpha\beta$ ad angulos rectos secat. Dico quod & in duas partes æquales secet eam, ita vt $\alpha\zeta$ ipsi $\zeta\beta$ sit æqualis, obseruata enim eadem dispositione & κατασκευῇ, vt prius. Quia $\epsilon\alpha$ ipsi $\epsilon\beta$ est æqualis (per 15. defin. primi) æqualis erit & $\epsilon\alpha\zeta$ angulus, $\epsilon\beta\zeta$ angulo. Angulus autem $\epsilon\zeta\alpha$, $\epsilon\zeta\beta$, vterq; est rectus (ex prius demonstratis.) Duo igitur triangula $\epsilon\zeta\alpha$, $\epsilon\gamma\beta$ duos angulos duobus angulis æquales habent, vnumq; latus vni lateri æquale, $\epsilon\zeta$ commune scilicet vtrisq;, quod subtenditur vni æqualium angulorum. Ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt (per 26. primi) eritq; $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$ æqualis, quod demonstrandum fuit. Si igitur in circulo recta &c.

Ἐὰν ἐν

Δ

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι, τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



IIII.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non illæ quidem per centrum ductæ, haud ſeſe medias ſecant.

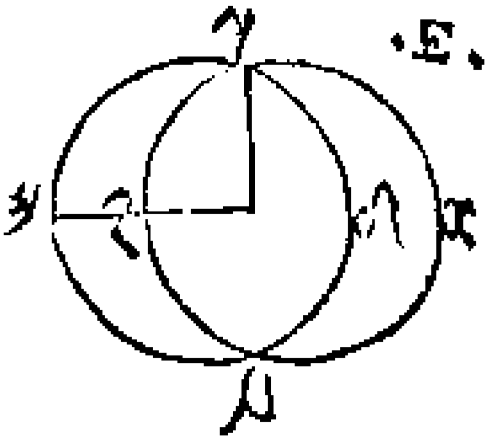
DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ δ, & in eo duæ rectæ lineæ α γ, β δ, ſeſe mutuò ſecent in puncto ε, non per centrum ductæ. Dico quòd ſeſe non in partes duas æquales ſecent, ita vt α ε æqualis ſit ε γ, & β ε ipſi ε δ. Sumatur centrum circuli ζ, & connectantur ζ ε. Quoniam igitur (vt vult aduerſarius) recta ζ ε per centrum ducta, rectam lineam quandam α γ non ductam per centrum, mediam ſecat, etiam ad rectos angulos ſecabit (ex 3. huius) quare angulus ζ ε α rectus eſt. Rurſus quoniam recta linea ζ ε, rectam quandam β δ non ductam per centrum ſecat mediam, ad angulos rectos, eam quoque ſecabit (per antecedentem.) Rectus igitur angulus eſt ζ ε β. Demonſtratum autem eſt & ζ ε α eſſe rectum. Ergo ζ ε α angulus ipſi ζ ε β angulo æqualis erit, minor maiore quod fieri nequit.

Non igitur rectæ α γ, ϐ δ sese medias secant. Quare si in circulo &c. quod demonstrandum erat.

E

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



V.

Quicunq; circuli sese mutuo secant, illi idem centrum non habebunt.

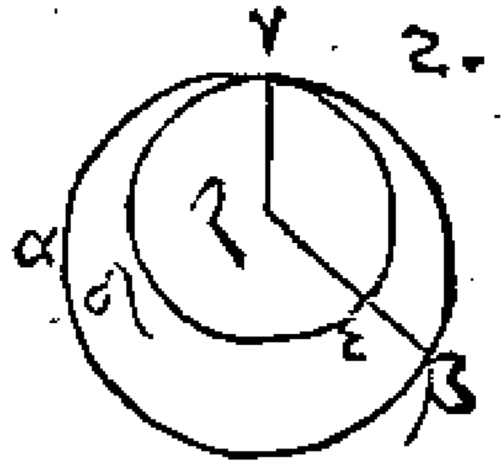
DEMONSTRATIO.

Sint duo circuli α ϐ γ, β γ η sese mutuò secantes in punctis γ & ϐ. Dico illos non habere idem centrum. Sin fieri posse quispiam affirmarit, sit centrum ε, & connectantur ε γ, ducaturq́; ε ζ η. Quia igitur ε punctum centrum est circuli α β γ, æqualis est ε γ ipsi ε ζ (per 16. defin. primi) Rursus quoniam ε punctum centrum est circuli γ ϐ η, æqualis est ε γ, ε η. Demonstratum verò est ε γ esse æquale ε ζ. Igitur (per 1. communem sententiam) erit & ε η æqualis, minor maiori, quod fieri nequit. Igitur ε punctum non est centrum propositorum circulorum. Si igitur duo circuli &c. quod demonstrandum erat.

ϛ

Ἐὰν δύο

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν, τὸ αὐτὸ κέντρον.



VI.

Quicunque circuli sese mutuo interius attingunt, illi idem centrum non habebunt.

DEMONSTRATIO.

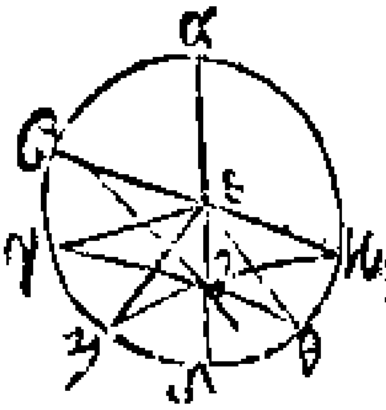
Sint duo circuli α β γ, & γ δ ε, qui se tangant in puncto γ. Dico illos non habere idem centrum. Si enim habuerint, sit ζ connectantur ζ γ linea recta, in puncto contactus, & ducatur ζ ε β linea utcunque, ad circumferentiam exterioris circuli. Quia igitur ζ punctum centrum est circuli α β γ, æqualis est ζ γ ipsi ζ β. Rursus quia idem punctum ζ est centrum circuli δ ε γ interioris, æqualis est ζ γ ipsi ζ ε. Demonstrauimus autem quod ζ γ ipsi ζ β erat æqualis. Igitur ζ ε, ζ β erit æqualis (per primam notionem) minor videlicet maiori, quod fieri nequit. ζ igitur punctum, non est centrum circulorum α β γ, γ δ ε. Si igitur duo circuli &c. quod demonstrandum erat.

Z

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ

 σημείου,

σημείου, προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον, μείζων ἐστί. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται, πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.



VII.

Si in circulo ſuper linea diametri ſumatur punctum quodpiam, quod centrum circuli non ſit, & ab eo puncto rectæ aliquæ in circulum decidant, ea quidem maxima erit, ſuper qua centrum reperietur, minima vero reliqua, aliarũ verò, quæ propius ad traductam per centrum lineam acceſſerit, ea ſemper maior eſt longius diſtante. Duæ autem tantummodo rectæ æquales ab eodem puncto decident in circulum ab vtraque minimæ parte.

DEMONSTRATIO.

Sit circu-

Sit circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, cuius diameter $\alpha\delta$, in quo sumatur aliquod punctum vt ζ, quod non sit centrum circuli. Centrum verò circuli sit ε & à puncto ζ, in circulum datum cadant quædam rectæ lineæ $\zeta\beta$, $\zeta\gamma$, $\zeta\eta$. Dico $\zeta\alpha$ maximam esse, & $\zeta\delta$ minimam, ex alijs verò $\zeta\beta$ esse maiorem $\zeta\gamma$, & $\zeta\gamma$ maiorem quam $\zeta\eta$. Iungantur enim, $\beta\varepsilon$, $\gamma\varepsilon$, $\eta\varepsilon$. Quoniam igitur omnis trianguli duo latera sunt reliquo maiora (per 20. primi) erunt $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ maiores quam $\beta\zeta$. Est autem $\alpha\varepsilon$ æqualis $\varepsilon\beta$ (per defin. circuli.) Igitur $\beta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, ipsi $\alpha\zeta$ sunt æquales, maior itaq; est $\alpha\zeta$ quam $\zeta\beta$. Rursus quoniam $\beta\varepsilon$ est æqualis $\varepsilon\gamma$, communis autem $\zeta\varepsilon$, duæ $\beta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon$ duabus $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ æquales sunt, sed $\beta\varepsilon\zeta$ angulus, maior est angulo $\gamma\varepsilon\zeta$. Basis igitur $\beta\zeta$, basi $\zeta\gamma$ est maior (per 24. proposit. primi.) Eadem ratione & $\gamma\zeta$ maior est quam $\zeta\eta$. Rursus quoniam $\eta\zeta$, $\zeta\varepsilon$ maiores sunt quam $\varepsilon\eta$ (per 20. primi) æqualis autem $\eta\varepsilon$, ipsi $\varepsilon\delta$ (per definit. circuli) erunt $\eta\zeta$, $\zeta\varepsilon$ maiores quam $\varepsilon\delta$, communis auferatur $\varepsilon\zeta$, ergo reliqua $\eta\zeta$ maior est quam reliqua $\zeta\delta$. Maxima igitur est $\zeta\alpha$, & $\zeta\delta$ minima. Maior verò $\beta\zeta$ quam $\zeta\gamma$, & $\zeta\gamma$ quam $\zeta\eta$. Dico quod à puncto ζ duæ tantum rectæ lineæ cadant in circulum datum, ad vtrasq; partes minimæ æquales. Constituatur enim ad lineam $\varepsilon\zeta$ atq; ad datum punctum in ea ε angulus $\zeta\varepsilon\vartheta$, æqualis angulo $\eta\varepsilon\zeta$ (per 23. primi) & $\zeta\vartheta$ iungantur. Quoniam igitur $\eta\varepsilon$ est æqualis $\varepsilon\vartheta$, communis autem $\varepsilon\zeta$, duæ

$\eta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$,

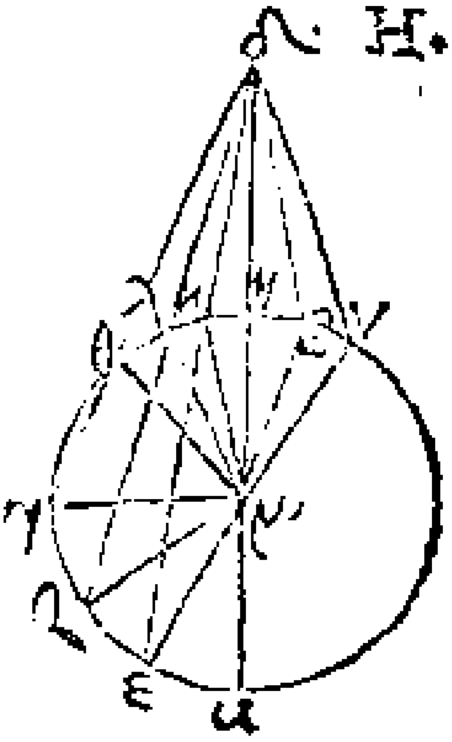
η ε, ε ζ, duabus ϑ ε, ε ζ æquales sunt, & angulus η ε ζ est æqualis angulo ϑ ε ζ (per 23. primi sic factus.) Basis igitur ζ η, basi ζ ϑ æqualis est. Dico porrò à puncto ζ in circulum non cadere, aliam ipsi η ζ æqualem. Sin fieri potest sit ζ κ. Quoniam ζ κ est æqualis ζ η (per hypothesin aduersarij.) estq; ipsi ζ η æqualis ζ ϑ, erit & ζ κ ipsi ζ ϑ æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remotiori, quod fieri non potest. Vel hac ratione, iungatur ε κ, & quoniam η ε ipsi ε κ est æqualis, commune autem ε ζ, & basis η ζ æqualis est ζ κ, (per hypothesin aduersarij) erit & angulus η ε ζ æqualis angulo κ ε ζ (per 8. primi.) Sed angulus η ε ζ, angulo ϑ ε ζ est æqualis (per 23. primi.) Angulus igitur ϑ ε ζ ipsi κ ε ζ æqualis erit, minor maiori quod fieri nequit. Quare à puncto ζ in circulum non cadet, alia recta linea æqualis ipsi η ζ versus eandem partem. Si igitur in circulo &c. quod demonstrandum erat.

H

Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, πρὸς τὸν κύκλον, διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου. Τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώ-

τερον

τερον μείζων ἔσται. Τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν, ἡ μεταξὺ, τοῦτε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου. Τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου, πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.



VIII.

Si capiatur punctum quodpiam extra circulum, deque puncto illo traducantur ad circulum rectæ aliquæ lineæ: vna quidem per centrũ, reliquæ verò fortuito, ex his quidem rectis quæ in cauum ambitum decident. maxima erit ducta per centrum, sed aliarum, quæ propius ad hanc accesserit, ea longius distante semper maior erit. Ex his verò rectis quæ in gibbum ambitus decident, minima est quæ inter punctũ & diametrum interponitur.

Alia-

Aliarum verò quæ propius ad minimam accedit, ea semper longius distante minor est. Duæ autem tantummodo rectæ lineæ æquales decident à puncto illo in circulum ab vtraque minimæ parte.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, extra eum sumatur punctum δ, à quo traducantur rectæ aliquæ lineæ ad circulum, sintq; $\delta\alpha$, $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$, $\delta\gamma$, & sit $\alpha\delta$ per centrũ ducta. Dico quod ex his rectis, quæ in cauum ambitum circuli decidunt, maxima sit ea quæ per centrum ducta est, videlicet $\delta\alpha$, aliarum verò ad eundem ambitum ductarum, $\delta\epsilon$ quidem maior est $\delta\zeta$, & $\delta\zeta$ quam $\delta\gamma$. Ex ijs verò rectis, quæ in gibbum ambitus decidunt minima, quæ inter punctum δ et diametrum $\alpha\eta$ interponitur videlicet $\delta\eta$ & ex reliquis $\delta\kappa$ breuior est quam $\delta\lambda$, & $\delta\lambda$ quam $\delta\vartheta$. Sit centrum circuli μ notum, vel per 1. huius inuentum, connectantur $\mu\epsilon$, $\mu\zeta$, $\mu\gamma$, $\mu\vartheta$, $\mu\lambda$, $\mu\kappa$. Quia $\alpha\mu$ ipsi $\epsilon\mu$ est æqualis, apponatur communis $\mu\delta$. Igitur $\alpha\delta$, ipsis $\epsilon\mu$ & $\mu\delta$ est æqualis, sed $\epsilon\mu\delta$ maiores sunt $\epsilon\delta$ (per 20 primi.) Igitur & $\alpha\delta$ maior est $\epsilon\delta$ (per 1. com. senten.) Rursus quia $\mu\epsilon$ æqualis est $\mu\zeta$ (per defin. circuli) apponatur communis $\mu\delta$, igitur $\epsilon\mu$, $\mu\delta$ ipsis $\zeta\mu$, $\mu\delta$ sunt æquales, & angulus qui sub $\epsilon\mu\delta$ maior

est an-

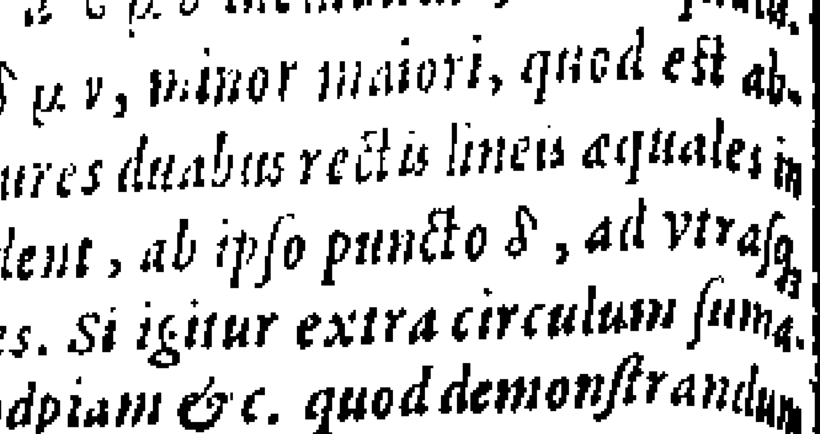
est angulo qui sub $\zeta \mu \delta$. Igitur (per 24. primi) basis $\epsilon \delta$ basi $\zeta \delta$ maior est. Eadem ratione demonstrari potest $\zeta \delta$ maiorem esse $\gamma \delta$. Maxima igitur est $\delta \alpha$, & maior $\delta \epsilon$ quam $\delta \zeta$, & $\delta \zeta$ quam $\delta \gamma$. Et quia (per 20. primi) $\mu \kappa$, $\kappa \delta$ sunt maiores, quam $\mu \delta$. Aequales autem est $\mu \eta$, $\mu \kappa$, (per 16. defin. primi) Reliqua igitur $\kappa \delta$ maior est quam altera $\eta \delta$. quare $\eta \delta$ minima est inter eas quæ in gibbum ambitus decidunt. Et quoniam super trianguli $\mu \lambda \delta$ vno latere, scilicet $\mu \delta$, duæ rectæ $\mu \kappa$, $\kappa \delta$ interius ductæ ad μ & δ terminos componuntur, erunt (per 21. primi) $\mu \kappa$, & $\kappa \delta$ ipsis $\mu \lambda$, $\lambda \delta$ minores, & quia $\mu \kappa$ æqualis est $\mu \lambda$, reliqua igitur $\delta \kappa$ minor est, quam reliqua $\delta \lambda$. Eadem ratione demonstratur, & quod $\delta \lambda$ minor sit $\delta \vartheta$, minima igitur est $\delta \eta$, ipsa verò $\delta \kappa$ minor quam $\delta \lambda$, & $\delta \lambda$ quam $\delta \vartheta$. Dico porrò quod duæ tantum lineæ rectæ, æquales decidant, à puncto δ in circulum ad minimæ partes. Constituatur ad rectam lineam $\mu \delta$ & ad punctum in ea datum μ, $\kappa \mu \delta$ angulo æqualis angulus, $\delta \mu \beta$ (per 23. primi) connectanturq́ue $\beta \delta$. Quoniam $\mu \beta$, æqualis est $\mu \kappa$, communis autem $\mu \delta$. Duæ igitur $\mu \kappa$, & $\mu \delta$, duabus $\beta \mu$, $\mu \delta$ sunt æquales, altera alteri, & angulus $\kappa \mu \delta$, angulo $\beta \mu \delta$ æqualis. Igitur (per 4. primi) basis $\delta \kappa$ basi $\delta \beta$ erit æqualis. Dico rectam nullam aliam æqualem ipsi $\delta \beta$ à δ puncto cadere in circulum. Sin fieri posse quispiam putauerit, cadat sanè aut sit $\delta \gamma$.

Quia

Quia igitur ipsi βκ, δγ est æqualis (per hypothesin aduersarij) & δκ, δβ est æqualis, sequetur (per 1. communem sententiam) & δζ, δγ esse æqualem, propinquior videlicet minimæ, æqualis remotiori, quod fieri non posse, est demonstratum. Vel hac ratione. Coniungantur μν, quia æqualis est κμ ipsi μν (per definitionem circuli.) Communis autem μδ & basis δκ basi δν (per hypothesin) est æqualis. Igitur angulus κμδ, angulo δμν est æqualis (per 8. proposit. primi.) Sed angulus κμδ ei qui à ζμδ includitur, est æqualis. Ergo & angulo δμν, minor maiori, quod est absurdum. Igitur plures duabus rectis lineis æquales in circulum non cadent, ab ipso puncto δ, ad vtrasque minimæ δη partes. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam &c. quod demonstrandum erat.

Θ

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.



I X.

Si sumatur punctum quodpiam intra

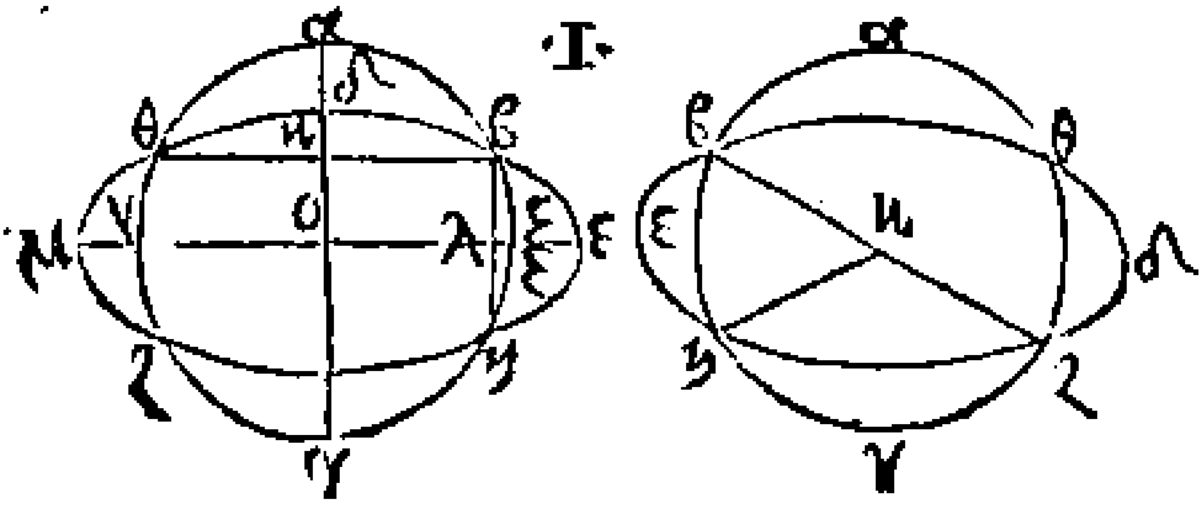
intra circulum, deq; puncto illo in circulum decidant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod sic sumtum fuerit, centrū circuli est.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, & intra ipsum sumtum punctum δ, à quo in circulum decidant plures quam duæ rectæ æquales, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. Dico δ punctum esse centrum circuli. Coniungantur $\alpha\beta$ & $\beta\gamma$, secenturq; æqualiter in puncto ϵ & ζ. per quæ ex δ ducantur rectæ vsq; ad ambitum circuli, $\delta\epsilon\eta$, & $\delta\zeta\lambda$. Quoniam igitur $\alpha\epsilon$ æqualis est $\epsilon\beta$, communis autem $\epsilon\delta$, erunt duæ $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$ duabus $\beta\epsilon$, $\epsilon\delta$ æquales, & basis $\delta\alpha$ est æqualis basi $\delta\beta$ (per hypothesin.) Angulus igitur $\alpha\epsilon\delta$, angulo $\beta\epsilon\delta$ æqualis erit (per 8. primi) & idcirco vterq; angulorum est rectus (per 13. primi.) Et quoniam si in circulo recta linea rectam alteram mediam ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum (per acquisitum primum huius) erit in $\eta\kappa$ centrum circuli. Eadem ratione & in $\vartheta\lambda$ centrū est circuli, & nullum aliud punctum commune habent rectæ $\eta\kappa$, $\vartheta\lambda$, quam punctum δ. Ergo δ est centrum circuli propositi $\alpha\beta\gamma$. Si igitur punctum quodpiam intra circulum sumatur &c. quod demonstrandum erat.

I

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



X.

Circulus circulum non secat pluribus in punctis quam duobus.

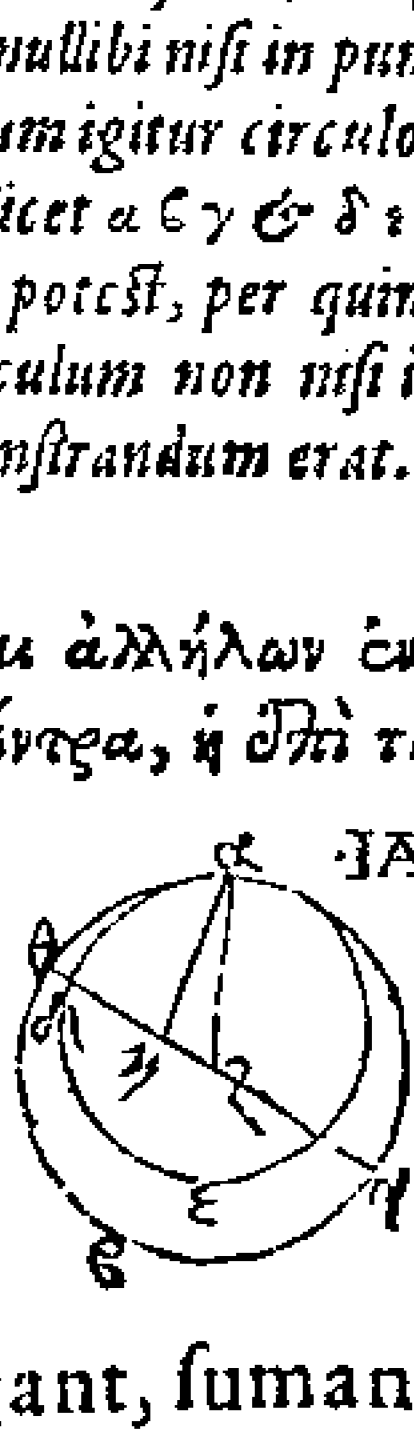
DEMONSTRATIO.

Si enim fieri potest, circulus α β γ, circulum δ ε ζ in pluribus punctis quam in duobus secet, nimirum in β η, θ ζ, & iunctæ β η, β θ bifariam secentur in κ λ, & à punctis κ λ, ipsis β η, β θ ad rectos angulos ductæ κ γ, λ μ, in puncta α & ε extendantur. Quoniam igitur in circulo α β γ, recta α γ alteram rectam lineam β θ mediam, & ad angulos rectos secat, in ipsa α γ, circuli α β γ erit centrum (per acquisitum primum huius.) Rursus quoniam in eodem circulo α β γ recta, ν ξ rectam alteram β η mediam secat, & ad rectos angulos, in ipsa ν ξ erit centrum circuli (per acquisitum primum huius.) Demonstratum autem est, & in ipsa α γ, centrum esse, nec in vllo alio puncto, conueniunt

ueniunt inter se recta α γ, ν ξ, quam in ο. Igitur ο punctum est centrum circuli, α ϐ γ. Similiter quoque demonstrabimus punctum ο centrum esse circuli δ ε ζ. Quia in circulo δ ε ζ recta δ ο, alteram rectam μ ε mediam, & angulós rectos secat in ipsa δ ο est centrum, & rursus quia in eodem circulo ε μ recta, alteram rectam α γ mediam secat, in ε μ erit centrum, conueniunt autem nullibi nisi in puncto ο. Ergo ο est centrum. Duorum igitur circulorum sese inuicem secantium, scilicet α ϐ γ & δ ε ζ idem est centrum, quod fieri non potest, per quintam huius. Circulus igitur circulum non nisi in duobus punctis secat, quod demonstrandum erat.

ΙΑ

Ἐὰν δύο κύκλοι, ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.



XI.

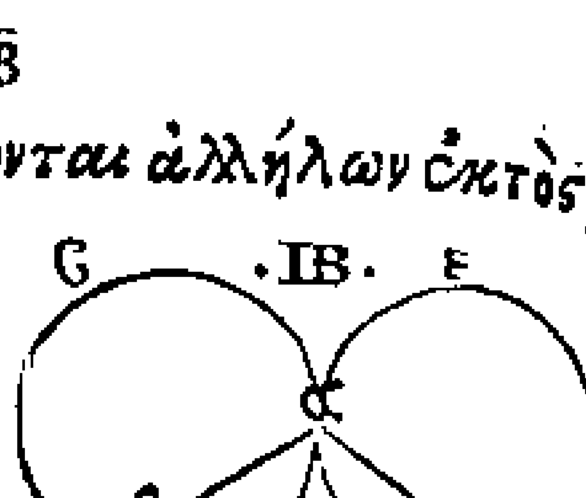
Si duo circuli sese mutuo interius contingant, sumanturque centra illorum, ea recta linea, quæ ad centra ipsorum adiungitur, si producatur, cadet in circulorum contactum.

DEMONSTRATIO.

Sint duo circuli α β γ, α δ ε sese mutuò interius tangentes in puncto α, & sit ζ centrum circuli α β γ, alterius verò η. Dico rectam lineam à puncto ζ ad η ductam si producatur, in punctum α cadere. Sin minus, cadat ergo si fieri potest, vt ζ η, δ θ. Connectantur α ζ & α η. Quia igitur α η, η ζ maiores sunt quam ζ α (per 20. primi) hoc est, quam ζ θ (Sunt enim ambæ hæ ex centro æquales) communis ζ η auferatur, reliqua igitur α η, est maior quam reliqua η θ, sed η α æqualis est η δ, (tanquam quæ ex centro circuli interioris) ergo η δ maior est η θ, minor maiori, quod est absurdum. Non igitur à puncto ζ ad η ducta recta linea extra circulorum contactum, quæ ponitur in α cadet. Sed in ipsum, vt cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese mutuo &c. quod demonstrandum erat.

IB

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



XII.

Si duo circuli sese mutuo tangant exterius, linea recta quæ ad

centra

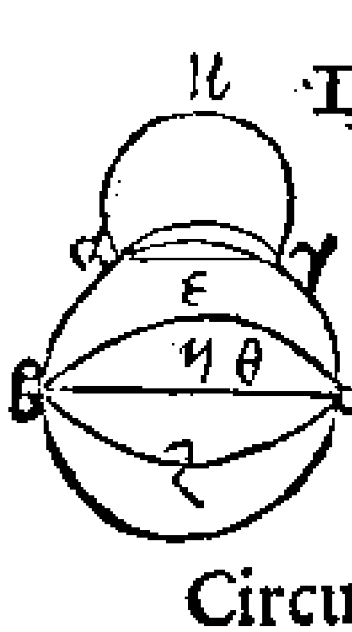
centra eorum adiungitur per attactum illum transibit.

DEMONSTRATIO.

Sint duo circuli α β γ, & α δ ε, qui sese mutuo tangant exterius in puncto α. Sumaturq; centrum circuli α β γ, ζ, & α δ ε circuli η. Dico quod recta quæ á centro ζ ad centrum η ducitur, etiam per α punctum contactus transeat. Sin hoc non esse necesse quispiam existimauerit, transeat sicut ζ γ, δ η. Coniungantur α η, α ζ. Quia igitur ζ est centrum circuli α β γ, erunt ζ α, ζ γ inuicem æquales (per definit. circuli.) Rursus quia η est centrum circuli α δ ε, erunt α η, δ η inuicem æquales. Demonstratum autem est quod ζ α ipsi ζ γ sit æqualis. Igitur ζ α, α η ipsis ζ γ, η δ sunt æquales. Quare tota ζ η maior est duabus ζ α, α η. Est autem & minor (per 20. primi) quod est absurdũ. Igitur linea ducta ex ζ in η per ipsum punctum contactus α transit. Si duo igitur circuli sese mutuo tangant exterius, linea recta &c. quod demonstrandum erat.

ΙΓ

Κύκλος, κύκλου οὐκ ἐφάπτεται, κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς, ἐφάπτηται.



II.

XIII.

Circu-

Circulus non attingit circulum pluribus in punctis quàm vno, siue interius seu exterius attingat.

DEMONSTRATIO.

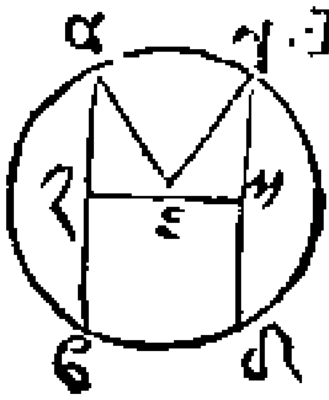
Ponatur quod $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ circulus, alium circulum $\epsilon\,\beta\,\delta\,\zeta$ tangat pluribus in punctis quam vno, interius videlicet in punctis δ & β. Sumatur centrum circuli exterioris η, interioris verò ϑ. Cum igitur recta linea ducta ex η in ϑ cadat in puncta cõtactus (per 11. huius) cadet sicut $\beta\,\eta$, $\vartheta\,\delta$. Et quia η punctũ centrum est circuli $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, erit $\beta\,\eta$ æqualis $\eta\,\delta$ (per 16. defin. primi.) Maior itaq; est $\beta\,\eta$ quam $\vartheta\,\delta$, & $\beta\,\vartheta$ multo maior quam $\vartheta\,\delta$. Rursus, Quoniam ϑ centrum est circuli $\epsilon\,\beta\,\delta\,\zeta$, æqualis erit $\beta\,\vartheta$ ipsi $\vartheta\,\delta$ (per eandem definit. primi) quæ antea demonstrata fuit multo minor ipsa $\beta\,\vartheta$. Cum igitur absurdum sit aliquam lineam esse maiorem altera, & eidem æqualem: circulus circulum interius non attingit pluribus in punctis quam vno. Dico quoq; neq; exterius fieri posse, quod si quis fieri posse affirmarit, tangat sanè circulus $\alpha\,\gamma\,\kappa$, circulũ $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ exterius in pluribus quam vno punctis, videlicet in $\alpha\,\gamma$. Coniungantur $\alpha\,\gamma$ per lineam rectam (per 1. postul.) Quoniam igitur in ambitu vtriusq; circuli $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, & $\alpha\,\gamma\,\kappa$ sunt sumpta duo puncta, $\alpha\,\gamma$ linea ea recta, quæ ad illa ipsa puncta adiuncta fuerit, intra circulum cadet, (per 2. proposit. huius) cadet autem & quidem intra circulum $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$,

sed ex-

sed extra circulum α γ η, quod est absurdum, & contra prius demonstrata in proposi. secunda huius. Circulus igitur circulum exterius non attingit pluribus in punctis quam vno, estq; ostensum quod neq; interius hoc fiat. Circulus igitur circulum non attinget pluribus in punctis quam vno, siue exterius siue interius attingat, quod demonstrandum erat.

ΙΔ

Ἐν κύκλῳ, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



XIIII.

In circulo rectæ lineæ æquales æqualiter à centro absunt, & quæ æqualiter à centro absunt, inter se æquales sunt.

DEMONSTRATIO.

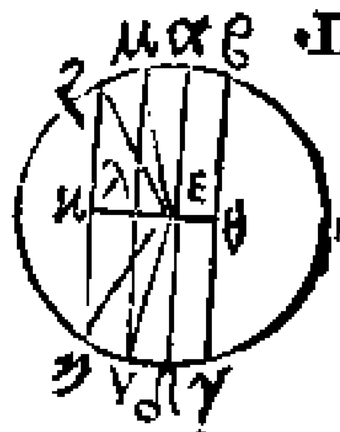
Sit circulus α β γ δ, cuius centrum ε, & in eo æquales duæ rectæ α β & γ δ. Dico quod æqualiter absunt à centro. Ducatur à centro in vtranq; rectam perpendicularis recta, scilicet ε ζ & ε η (per 12. proposit. primi) Coniunganturq; α ε, & ε γ. quia igitur recta quædam ε ζ, per centrum ducta secat alteram rectam, quæ per centrum non ducta est, scilicet α β ad angulos rectos, & mediam (per 3. huius) æqualis igitur est α ζ ipsi ζ ϛ, vnde α β duplo maior est quam α ζ, & ob eandem causam γ δ dupla est ad γ η. Estq́; α ϛ æqualis γ δ (per hypothesin) igitur & α ζ ipsi γ η. Et quoniam α ε æqualis est ε γ (per 16. definitio. primi) æquale erit quadratum, quod ad ε γ describitur ei quod ad α ε. Huic autem quadrato æqualia sunt quadrata ea, quæ ad α ζ, ζ ε describuntur, cum angulus qui ad ζ est, rectus sit (per 47. primi) Eadem ratione demonstratur quadratum ad ε γ descriptum esse æquale duobus ad ε η, η γ descriptis quadratis. Igitur quadrata ad α ζ & ζ ε descripta, æqualia sunt ijs quæ ad ε η, η γ, describuntur, & quod ad α ζ quidem describitur æquale est ei quod ad γ η, cum α ζ recta ipsi γ η sit æqualis demonstrata. Reliquum igitur quadratum videlicet ζ ε, erit æquale reliquo quod ad ε η describitur (per 3. communem sentent.) æqualis igitur est & ζ ε recta, ε η rectæ. In circulo autem æqualiter à centro rectæ lineæ abesse dicuntur cum æqualia fuerint perpendicula, quæ de centro ad ipsas ducuntur (per 4. defin. huius.) Igitur α β, γ δ rectæ æqualiter absunt à centro. Cum igitur α ϛ, γ δ æqualiter absint à centro, erit ε ζ æqualis ε η. Dico quod α ϛ quoq; sit æqualis γ δ, manente namq; eodem apparatu, ostenditur, α ϛ duplo maiorem esse α ζ & γ δ, γ η. Quia verò α ε æqualis est ε γ (per 16. definit. primi) æquale erit quadratum, quod ad α ε describitur, ei quod ad ε γ, illi verò æqualia sint

quadrata

quadrata ambo ad $\epsilon\zeta$ & $\zeta\alpha$ descripta. Huic verò scilicet ad $\epsilon\gamma$ descripto, æqualia quæ ad $\epsilon\eta$, $\eta\gamma$ describuntur (per 47. primi.) Quadrata igitur descripta ad $\epsilon\zeta$ & $\zeta\alpha$, æqualia sunt ijs quæ ad $\epsilon\eta$, & $\eta\gamma$ describuntur, & quidem quod ad $\epsilon\eta$, ei quod ad $\epsilon\zeta$ cum $\epsilon\zeta$ recta æqualis sit, $\epsilon\eta$ rectæ. Reliquum igitur quadratum, quod describitur ad $\alpha\zeta$ æquale est reliquo ad $\gamma\eta$ descripto, æqualis igitur est $\alpha\zeta$ recta, ipsi $\gamma\eta$ rectæ. Est autem $\alpha\beta$ recta duplo maior $\alpha\zeta$ recta, & $\gamma\delta$ quam $\gamma\eta$. Igitur $\alpha\beta$ æqualis est $\gamma\delta$ rectæ. In circulo igitur lineæ rectæ æquales æqualiter à centro absunt, & quæ æqualiter absunt à centro, inter se sunt æquales, quod demonstrandum erat.

ΙΕ

Ἐν κύκλῳ, μεγίστη μέν ἐστιν, ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστιν.



·IE·

XV.

In circulo linea Diametri semper maxima est: aliarum autem, quæ propius ad centrum accesserit, ea semper longius distante maior est.

DEMONSTRATIO.

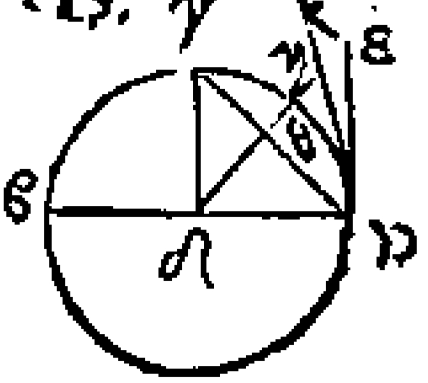
Sit circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, diameter eius $\alpha\delta$, centrum ε, & $\beta\gamma$ propius ad centrum accedat quam $\zeta\eta$. Dico quod $\alpha\delta$ maxima sit, maior autem $\beta\gamma$ (per 12. proposit. primi) quam $\zeta\eta$. Ducantur à puncto ε in $\beta\gamma$, & $\zeta\eta$ perpendiculares rectæ, $\varepsilon\vartheta$, $\varepsilon\kappa$. Et quia propior est centro $\beta\gamma$, quam $\zeta\eta$, maior erit $\varepsilon\kappa$ quam $\varepsilon\vartheta$ (per 4. definitionem huius.) Ponatur autem $\varepsilon\lambda$ ipsi $\varepsilon\vartheta$ æqualis, & per λ ipsi $\varepsilon\kappa$ ad angulos rectos ducta $\lambda\mu$ extendatur in ν (per 11. primi.) Iungaturq; $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$, $\varepsilon\zeta$, & $\varepsilon\eta$. Quoniam igitur æqualis est $\varepsilon\vartheta$ ipsi $\varepsilon\lambda$, æqualis est $\beta\gamma$ ipsi $\mu\nu$ (per 14. huius.) Rursus quoniam $\alpha\varepsilon$ æqualis est $\varepsilon\mu$ (per definit. circuli) & $\varepsilon\delta$ ipsi $\varepsilon\nu$, igitur $\alpha\delta$ ipsis ambabus $\varepsilon\mu$ & $\varepsilon\nu$ est æqualis. Verum $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$ sunt maiores $\mu\nu$ (per 20. primi.) Igitur $\alpha\delta$ maior quoque est quam $\mu\nu$. Et quoniam duæ $\mu\varepsilon$, $\varepsilon\nu$, duabus $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\eta$ sunt æquales (per defi. circuli) & angulus qui sub $\mu\varepsilon\nu$, angulo $\zeta\varepsilon\eta$ maior est. Basis igitur $\mu\nu$ basi $\zeta\eta$, quoque maior erit (per 24. primi.) Sed $\mu\nu$ ipsi $\beta\gamma$ demonstrata est æqualis. Igitur & $\beta\gamma$ maior est $\zeta\eta$. Maxima igitur est $\alpha\delta$ linea diametri, maior autem $\beta\gamma$ quam $\zeta\eta$. In circulo igitur linea diametri semper maxima est, aliarum autem quæ propius ad centrum accesserit, ea semper longius distante maior est, quod demonstrandum erat.

Ις

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας

ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου Καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα, οὐ παρεμπεσεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου, μείζων ἐστίν. ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

ιϛ.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας, ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα, ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

XVI.

Quæ ab extrema in circulo diametri linea ad angulos cum hac rectos educitur, ea extra circulum cadet, & in locum, positum inter hanc rectam & ambitus lineam, recta præterea nulla incidet. atq; dimidiati quidem circuli angulus, quouis acuto rectarum linearum angulo maior est, reliquus autem quisq; minor.

Acqui-

ACQVISITVM.

Ex huius theorematis demonstratione, manifeſtum fit, quod quæ ab extrema diametri in circulo linea, ad angulos cum hac rectos ducitur, ea circulum attingat, & quod recta linea circulum attingat vno ſolo in puncto: Quandoquidem eam quæ in duobus cum illo committitur, intra illum cadere demonſtratum eſt.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ, cuius centrum δ, linea diametri α β, Dico quod linea recta quæ ab α, ad angulos rectos cum diametri linea α β educitur, cadat extra circulum. Sin quiſpiam hoc impugnauerit, cadat interius vt α γ coniungatur γ δ. Quia δ α æqualis eſt δ γ (per definit. circuli) æqualis eſt angulus δ α γ, angulo δ γ α (per 5. primi.) Angulus autem δ α γ rectus eſt (per hypotheſin aduerſarij) igitur & δ γ α angulus rectus erit, & ſic ambo hi anguli duobus rectis erunt æquales, quod fieri non poteſt (per propoſitio. 17. primi.) Non igitur cadit intra circulum recta à puncto α ad angulos rectos ipſi α β educta. Similiter oſtendi poteſt, neq; in circumferentiam cadere poſſe. Cadet igitur extra circulum vt α ε. Dico in locum

poſitum

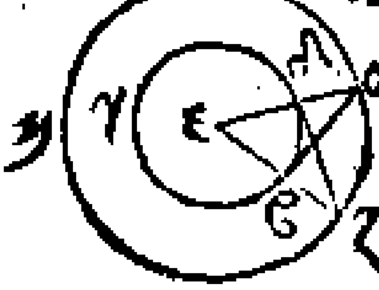
positum inter hanc rectam α ε, & ambitus lineam α β γ nullam aliam rectam cadere. Sin fieri potest, cadat sicut ζ α, & à puncto δ, ducatur recta perpendicularis δ η in ζ α rectam. Quoniam igitur rectus est angulus α η δ, minor autem recto δ α η angulus, maior igitur erit (per 19. primi) α δ quam δ η, æqualis autem est δ α ipsi δ θ. maior itaque est δ θ quam δ η, minor maiore quod est absurdum. In locum igitur positum inter rectam & ambitus lineam nulla alia linea cadit. Dico & dimidiati circuli angulum quem includit α β recta, & γ θ α ambitus linea, quouis acuto rectarum linearum angulo maiorem esse, reliquum verò quem includit recta linea α ε, & ambitus linea γ θ α quouis acuto esse minorem. Si namque est angulus aliquis rectarum linearum maior eo qui ab β α recta & linea ambitus γ θ α includitur, minor verò eo qui ab γ θ α ambitus linea & α ε recta includitur in locum positum inter γ θ α ambitus lineam & α ε rectam, altera linea cadet recta, quæ efficiat quidem angulum comprahensum sub rectis lineis maiorem eo qui à recta α β, & linea ambitus γ θ α includitur. minorem autem eo qui ab γ θ α ambitu, & α ε recta includitur. Non cadit autem vt antea est demonstratum. Non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulò comprahenso à recta linea α β, & ambitus lineá γ θ α, neque minor comprahenso ab γ θ α ambitus linea, & α ε recta. Quæ igitur ab extrema in circulô *culo diametri linea ad angulos rectos cum hac educitur &c. quod demonstrandum erat.*

PROBLEMA I.

IZ

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

.IZ.



XVII.

A dato puncto, ducenda recta linea est, quæ datum circulum attingat.

DEMONSTRATIO.

Sit punctum datũ α, datus verò circulus β γ δ, ad quem è dato puncto ducenda est linea recta, vt circulum attingat. Ponatur centrum circuli ε, & coniungantur α δ ε. Super hoc verò centro interuallo α ε describatur circulus α ζ η, & ab ipso δ ducatur recta (per 12. primi.) δ ζ quæ ε α ad angulos rectos secet, & coniungantur ε β ζ & α β. Dico ab α signo ductam esse α β rectam, quæ attingat circulum. Quia enim ε punctum, centrum est vtriusq; circuli β γ δ, α ζ η, æqualis est ε α (per 16. definit. primi) ipsi ε ζ, & ε δ ipsi ε β. Duæ igitur α ε, ε β duabus ε ζ, ε δ sunt æquales, & habent angulum communem ad ε. Basis igitur δ ζ, (per 4. primi) basi α β est æqualis, & triangulum δ ε ζ triangulo ε β α æquale, & reliqui anguli,

reliquis

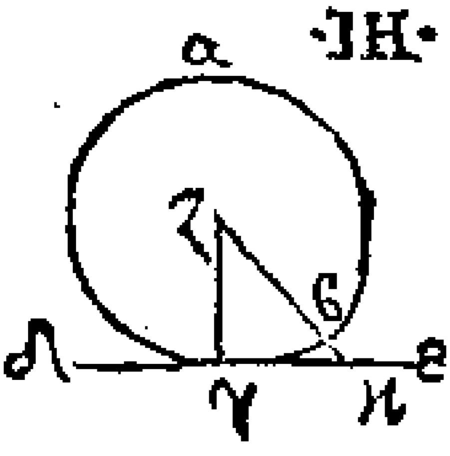
reliquis angulis. Aequalis igitur est angulus ε δ ζ, angulo ε β α. Rectus autem est ε δ ζ, igitur & ε β α angulus rectus erit, estque ε β ex centro ducta. Cum autem ab extrema in circulo diametri linea ad angulos rectos ducta cum altera tangat circulum (vt est demonstratum propositione 16. huius) ipsa α β attinget circulum. A dato igitur puncto α, dato circulo β γ δ recta linea ducta est, quæ datum circulum attingat, quod faciendum erat.

THEOREMATA VII.

IH

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου, ἐπὶ τὴν ἁφὴν, ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην.

·IH·



XVIII.

Si recta linea quæpiam circulum attingat, & ducta à centro recta ad tactum adiungatur, quæ ita adiuncta fuerit, perpendiculum erit ad illam tangentem.

DEMONSTRATIO.

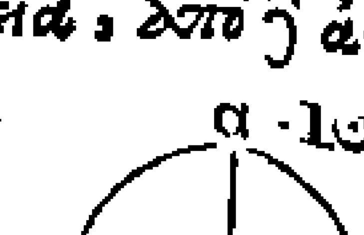
Sit datus circulus α β γ, quem tangat recta linea δ ε in puncto γ, & circuli centrum ζ, à quo ducatur recta in γ. Dico ζ γ perpendiculum

esse ad

esse ad illam tangentem δε. Si non est ducatur perpendiculum aliud ex ζ in δε, sitq; ζη (per 12. primi.) Quia igitur angulus ζηγ rectus est (per hypothesin aduersarij) igitur ηγζ erit acutus. Maior ergo est ζηγ angulus quam ηγζ, subter maiorem autem angulum maius latus subtendit. (per 19. primi) Igitur ζγ latus erit maius quam ζη. Aequalis autem est (per 16. definit. primi) ζγ ipsi ζβ. Maior itaq; est ζβ quam ζη, minor maiore quod est absurdum. Igitur ζη ad δε non est perpendiculum. Idem demonstrari potest de omnibus lineis ductis ex ζ ad δε, quod non sint perpendiculares. Igitur sola ζγ, quæ ducta à centro, ei quæ circulum attingit ad tactum adiuncta, perpendiculum constituit. Si igitur recta &c. quod demonstrandum erat.

ΙΘ

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς, τῇ ἐφαπτομένῃ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης, ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



XIX.

Si recta quæpiam linea circulum attingat, & ducatur de tactu, recta linea ad angulos rectos cum attingente,

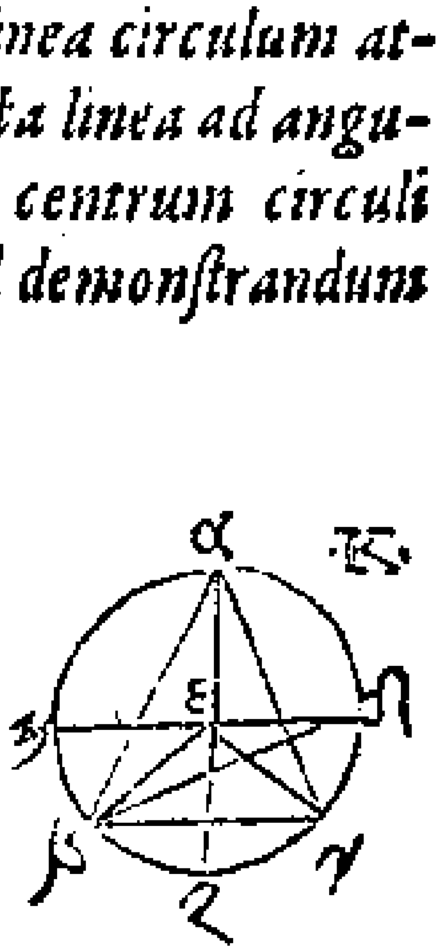
gente, erit centrum circuli super linea hoc modo ducta.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ, quem tangat δ ε recta in puncto γ, à quo educatur ad angulos rectos (per 11. primi) cum δ ε linea attingente α γ recta. Dico in α γ existere centrum circuli. Sin minus sit alibi vt in ζ iungatur γ ζ. Quia igitur circulum α β γ recta quædam linea δ ε attingit, à centro autem in punctum contractus ducta est γ ζ (per 18. tertij) erit hæc perpendiculum ad δ ε. Igitur angulus ζ γ ε rectus erit. Sed angulus α γ ε quoq; rectus est. Igitur æqualis est angulus ζ γ ε ei qui ab α γ ε includitur, minor maiori, quod est absurdum. Non igitur erit punctum ζ centrum circuli. Similiter ostendi potest, quod nusquam quam in α γ illud consistere poßit. Si igitur recta quapiam linea circulum attingat, & ducatur de tactu recta linea ad angulos rectos cum attingente, erit centrum circuli super linea hoc modo ducta, quod demonstrandum erat.

K

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ, τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.



K In cir-

XX.

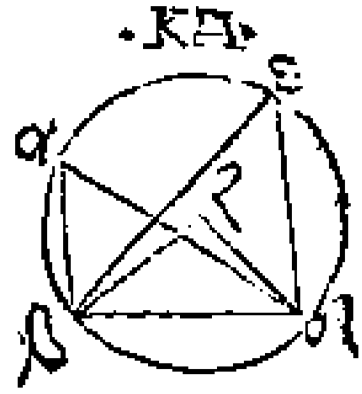
In circulo, angulus ad centrum, duplex est angulo ad ambitum, cum quidem fuerit idem ambitus basis angulorum.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ, ad cuius centrum ε sit angulus β ε γ, ad ambitum verò angulus ϛ α γ, quorum angulorum basis sit ambitus β γ. Dico ϛ ε γ angulum esse duplicem ad ϛ α γ angulum. Ducta enim α ε extendatur in ζ. Quia igitur æqualis est α ε ipsi ε β (per 16. desi. primi) æqualis est angulus ε α ϛ, angulo ε ϛ α (per 5. primi.) Anguli igitur ε α β & ε β α duplices sunt ad angulum ε α β. Aequalis autem est angulus β ε ζ, tanquam exterioribus duobus qui intus sunt, & ex aduerso, videlicet ε α β, & ε ϛ α angulis (per 32. primi.) Igitur β ε ζ angulus duplex est ad ε α β angulum. Eadem ratione ζ ε γ angulus duplex est ad ε α γ angulum. Totus igitur ϛ ε γ angulus duplex est ad totum β α γ angulum. Rursus constituatur, alter angulus β δ γ ducaturq; δ ε recta, & producatur in η vsq;. Similiter quoq; demonstrabimus η ε γ angulum esse duplum, anguli ε δ γ. Quia η ε β angulus duplus est ad ε δ β angulum. Igitur reliquus β ε γ angulus duplex est ad ϛ δ γ reliquum. In circulo igitur angulus ad centrum, duplex est angulo ad ambitum,

ambitum, cum quidem fuerit idem ambitus baſis angulorum, quod demonſtrandum erat.

K A



Ἐν κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

X X I.

In circulo, anguli omnes in eodem ſegmento, ſunt inter ſe æquales.

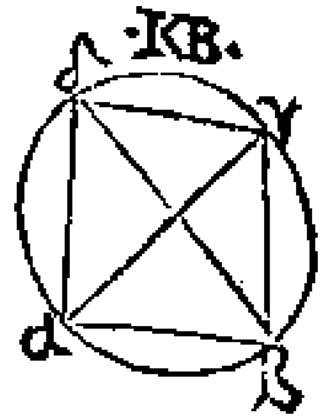
DEMONSTRATIO.

Sint in circuli α β γ δ, ſegmento β α ε δ, anguli dati β α δ & β ε δ. Dico quod hi anguli inter ſe ſunt æquales. Sumatur centrum circuli, punctum ζ ducanturq́; rectæ β ζ & δ ζ. Quia igitur angulus β ζ δ eſt centrum, angulus verò β α δ ad ambitum, & habent eandem baſin, ambitum videlicet β γ δ erit angulus β ζ δ duplex angulo β α δ (per 20. tertij) & eadem ratione idem angulus duplex β ε δ angulo. Aequalis igitur eſt angulus β α δ angulo β ε δ (per 7. commun. ſentent.) In circulo igitur anguli omnes qui in eodem ſegmento, ſunt inter ſe æquales, quod demonſtrandum erat.

K B

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ

ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



XXII.

Figurarum quatuor laterum in circulo anguli aduersi, duobus rectis æquales sunt.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ δ, & in eo figura quatuor laterum. Dico quod anguli aduersi duobus rectis sunt æquales. Coniungantur puncta α γ, & β δ lineis rectis. Quia igitur in omni triangulo tres anguli duobus rectis sunt æquales (per 32. primi) erunt in triangulo α γ β tres anguli, nempe α γ β, γ β α, β α γ duobus rectis æquales. Angulus autem γ α β, angulo β δ γ est æqualis (per 21. tertij.) Sunt enim in eodem segmento, & angulus α γ β æqualis est angulo α δ β, cum sint in eodem segmento, videlicet α δ, γ β. Totus igitur angulus quem α δ, δ γ includunt, angulis duobus β α γ, α γ β est æqualis. Addatur angulus communis α β γ. Igitur anguli tres quos α β γ, β α γ, & α γ β constituunt, æquales sunt α β γ & α δ γ angulis (per 32. primi.) Verum illi tres duobus rectis sunt æquales. Igitur & hi duo, videlicet α β γ, & α δ γ, qui sunt anguli aduersi, erunt duobus rectis æquales. Simili ratione demonstrari potest etiam angulos β α δ, δ γ β aduersos esse æquales duobus rectis.

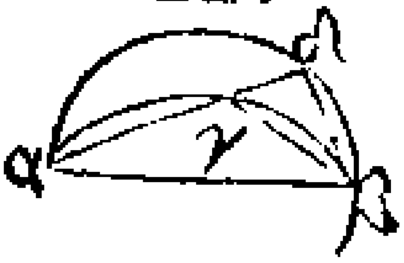
In cir-

In circulis igitur figurarum quatuor laterum, anguli aduersi duobus rectis sunt aequales, quod demonstrandum erat.

K Γ

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων, ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

.KΓ.



XXIII.

Super linea recta vna & eadem, nunquam constituentur segmenta duo similia & inaequalia, ad easdem quidem partes.

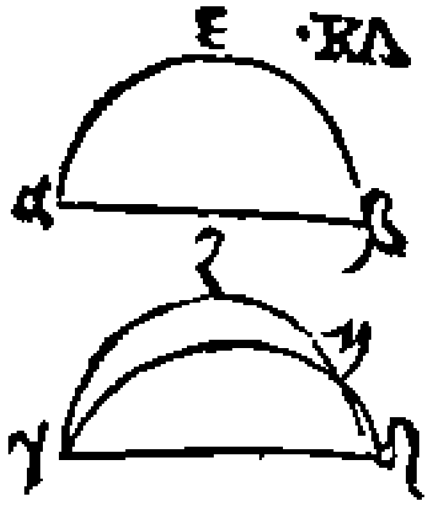
DEMONSTRATIO.

Sit recta linea α β, super quam constituatur segmentum α γ β. Dico quod super eandem lineam, ad easdem quidem partes non possit aliud constitui segmentum, quod simile sit priori, & eidem inaequale, hoc est maius vel minus. Sin fieri posse quispiam existimauerit constituatur, & sit α δ β. Ducatur recta α γ δ, & connectantur γ β, δ β. Quia igitur segmentum α γ β simile est segmento α δ β (per hypothesin aduersarij) & sunt segmenta illa similia, quae capiunt angulos aequales, erit angulus α γ β aequalis angulo α δ β (per 11. defin. tertij) exterior interiori quod pugnat cum 16. propositione primi. Super eadem igitur linea recta nunquam constituentur segmenta duo similia &

inæqualia ad eaſdem partes, quod demonſtrandum erat.

KΔ

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.



XXIIII.

Reperta ſegmenta circulorum ſimilia ſuper lineis rectis ijſdem, æqualia inter ſe erunt.

DEMONSTRATIO.

Sint duæ æquales rectæ α β & γ δ, ſuper quas ſimilia ſegmenta circulorum α ε β, γ ζ δ conſtituantur. Dico hæc ſegmenta inuicem quoq; eſſe æqualia. Quia ſegmentum α ε β, aptum & conueniens eſt ſegmento γ ζ δ, erit eidem & æquale (per 8. commu. ſentent.) Sin minus vnum erit altero maius, & poterunt ſuper linea α β, quæ eſt vna, & eadem cum γ δ duo ſegmenta ſimilia & inæqualia conſtitui, quod pugnat cum præcedenti propoſitione. Reperta igitur ſegmenta ſuper lineis rectis ijſdem, æqualia inter ſe ſunt, quod demonſtrandum erat.

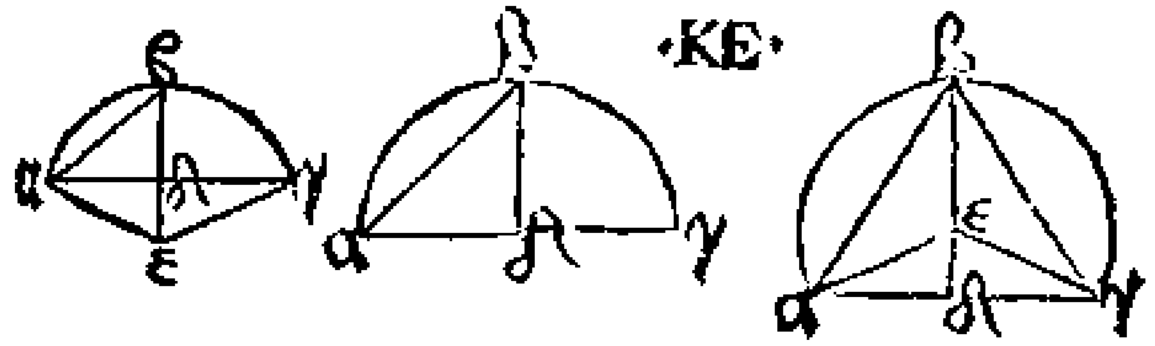
PROBLEMA I.

KE

Κύκλου

κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

·KE·

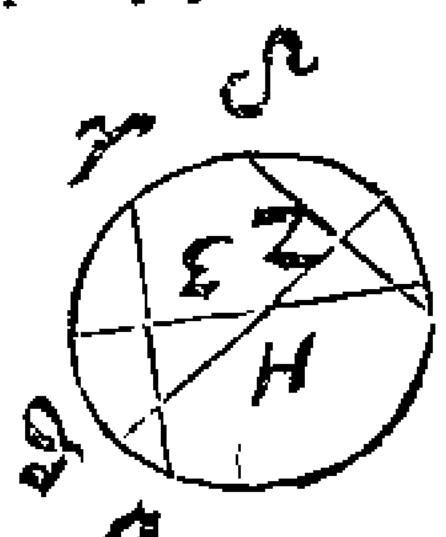


X X V.

Segmento circuli dato, descriptione complendus est circulus, cuius illud est segmentum.

DEMONSTRATIO.

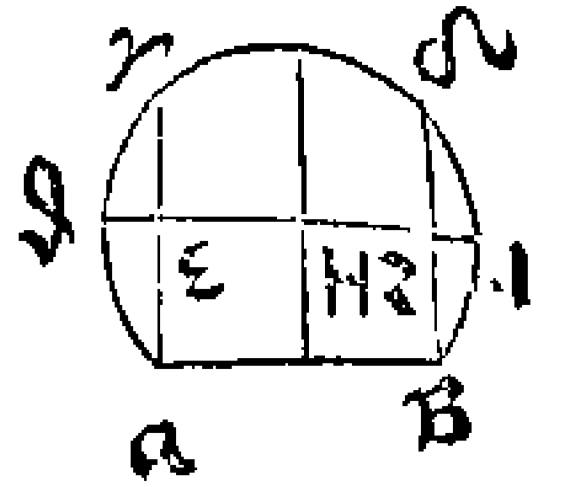
Sit segmentum circuli datū α β γ, ad cuius descriptionem est complendus circulus. Ducantur in ei duæ rectæ lineæ fortuito α γ, δ β, quæ dissecentur æqualiter (per 10. primi) in punctis ε, & ζ, & ad vtraq; puncta sectionis educantur ζ θ, ε ι, ad angulos rectos (per 11. primi) quæ se mutuò secent in puncto η. Dico per acquisitum primæ propositionis huius η esse centrum, ex quo ad datum segmentum circulus compleri possit. Si verò hæ duæ rectæ se mutuò non secent, sed vna fuerint linea recta, quod fit cum α γ, δ β sunt æquidistantes applicetur illa linea ad ambitum ex vtraq; parte in θ & ι, punctum η, in



·I·

B

quo per medium diuiditur erit centrum, ex quo complendus est circulus segmenti dati (per idem acquisitum) vt apparet in subiecto schemate, & hæc est generalis demonstratio & ratio complendi circulum, ad quodcunque segmentum datum. Si quis verò huius in singulis speciebus segmentorum datorum, velit demonstrationem et rationẽ



habere complendi circulum. Primum considerabit. Segmenta circulorum quæ dantur vel esse semicirculos, vel eo maiores, vel minores. Si semicirculus, erit (per definit. huius) α γ linea diametri. Ea igitur diuisa per medium in puncto δ, erit δ centrum, ex quo completur circulus. Sin segmentum α β γ semicirculo maius est cuius subtensa α γ, diuido eam per medium, in puncto δ (per 10. pr.) ex quo educo ad angulos rectos rectam δ ε (per 11. primi) quæ transibit per centrum (per acquisitum 1. huius) Coniungo α β puncta, linea recta. Quia igitur linea α γ minor est diametro, cum sit α β γ segmentum maius semicirculo, erit α δ minor, & δ ε maior semidiametro, & per consequens δ ε maior δ α. Igitur angulus ε α δ, maior est angulo α β δ. (per 19. primi) Constituatur igitur ad α angulus æqualis, angulo α β δ (per 23. primi) ducta α ι, quæ secet lineam δ β in puncto ι. Dico ι punctum

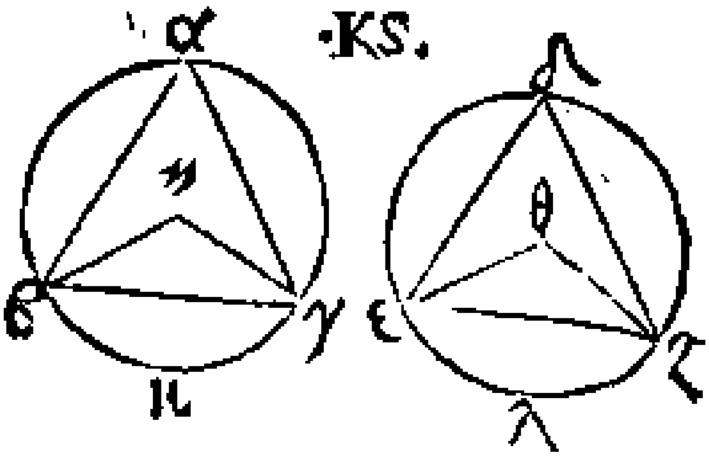
punctum esse centrum, ex quo compleri potest circulus. Coniungo puncta $\varepsilon\,\gamma$. Quia igitur $\alpha\,\varepsilon$, $\varepsilon\,\beta$, sunt æquales cum ambo anguli iuxta basin $\alpha\,\beta$ sint æquales, & $\alpha\,\varepsilon$, $\varepsilon\,\gamma$ quoque æquales (propterea quod in triangulo $\alpha\,\varepsilon\,\delta$ duo latera $\alpha\,\delta$, $\delta\,\varepsilon$ sint æqualia duobus lateribus $\delta\,\gamma$, $\delta\,\varepsilon$ in triangulo $\delta\,\varepsilon\,\beta$.) Tres igitur rectæ, $\alpha\,\varepsilon$, $\varepsilon\,\gamma$, $\varepsilon\,\beta$ ex puncto ε decidunt in circulum æquales, quare punctum ε centrum erit (per 9. tertij) ex quo complendus circulus, quod demonstrandum erat. Sin verò segmentum $\alpha\,\beta\,\gamma$ minus est semicirculo, subtensa $\alpha\,\gamma$ diuidatur per medium in puncto δ, à quo producatur linea recta, ad angulos rectos, ipsi $\alpha\,\gamma$, sitq; $\beta\,\delta\,\varepsilon$, in qua erit, per acquisitum prius centrum, ex quo complendus est circulus. Ducatur linea $\alpha\,\beta$ erit angulus $\alpha\,\beta\,\delta$, maior angulo $\beta\,\alpha\,\delta$, si enim angulus equalis esset, segmentum semicirculus, si minor, segmentum maius semicirculo esset, quod vtrumq; est contra hypoth. Constituatur igitur ad α angulus equalis, angulo $\alpha\,\beta\,\delta$ ducta linea $\alpha\,\varepsilon$, quæ secet $\beta\,\zeta$ lineam in puncto ε, quod iungatur ipsi γ. Dico ε punctum esse centrum circuli. Quia enim angulus ad α æqualis est angulo ad γ, erit linea $\varepsilon\,\alpha$ æqualis, lineæ $\varepsilon\,\gamma$ (per 6. primi) & quia rursus $\varepsilon\,\beta$, est æqualis lineæ $\varepsilon\,\alpha$, (per 4. primi) erunt tres lineæ rectæ $\varepsilon\,\alpha$, $\varepsilon\,\gamma$, $\varepsilon\,\beta$, de puncto ε decidentes, in circulum æquales. Igitur punctum illud erit centrum, ex quo segmento circuli dato, descriptione compleri potest circulus cuius illud est segmentum, quod faciendũ erat.

 Theo-

THEOREMATA IIII.

Κϛ

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις, ὦσι βεβηκυῖαι.



XXVI.

In circulis æqualibus, æquales ambitus anguli æquales obeunt, siue super centris seu super ambitus lineis forte obierint.

DEMONSTRATIO.

Sint circuli duo α β γ, δ ε ζ æquales, & in his anguli æquales super centris quidẽ obeuntes β η γ, ε θ ζ, super ambitus verò lineis β α γ & ε δ ζ. Dico ambitum β κ γ esse æqualem ambitui ε λ ζ. Coniungantur β γ & ε ζ. Quoniam circuli β α γ, ε δ ζ sunt æquales, etiam ex centro ductæ erunt æquales (per 1. definit. tertij.) Duæ igitur rectæ β η, η γ duabus ε θ, θ ζ erunt æquales, & angulus qui ad η angulo ad θ æqualis est (per 4. primi.) Igitur & basis β γ basi ε ζ erit æqualis. Et quia angulus ad α æqualis est angulo ad δ, segmentum β α γ, simile erit segmento ε δ ζ (per 11. defi. 3.)

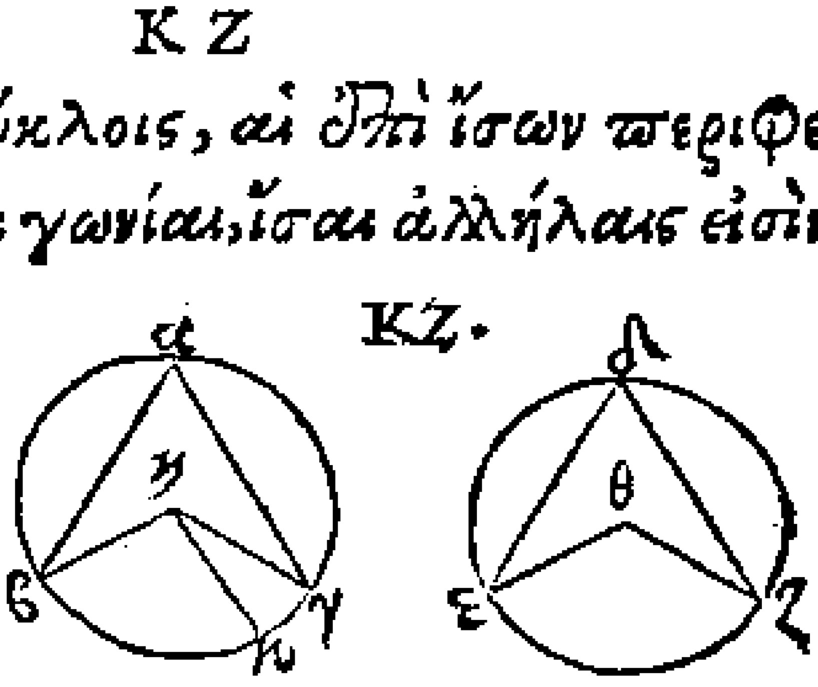
& quia

& quia ſunt ſuper æqualibus rectis lineis β γ, ε ζ, erunt inter ſe æqualia ſegmenta β α γ, ε δ ζ (per 24. tertij.) Eſt autem totus circulus β α γ toti ε δ ζ circulo æqualis. Reliquus igitur ambitus β κ γ, reliquo λ ε ζ eſt æqualis (per 3. com. ſent.) In circulis igitur æqualibus æquales ambitus angulis æquales obeunt, ſiue ſuper centris, ſiue ſuper ambitus lineis obierint, quod demonſtrandum fuit.

KZ

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις, ὦσι βεβηκυῖαι.

KZ.



XXVII.

In circulis æqualib. anguli æquales ambitus obeuntes, ſunt inter ſe æquales, ſiue ſuper centris ſeu ſuper ambitus lineis forte obierint.

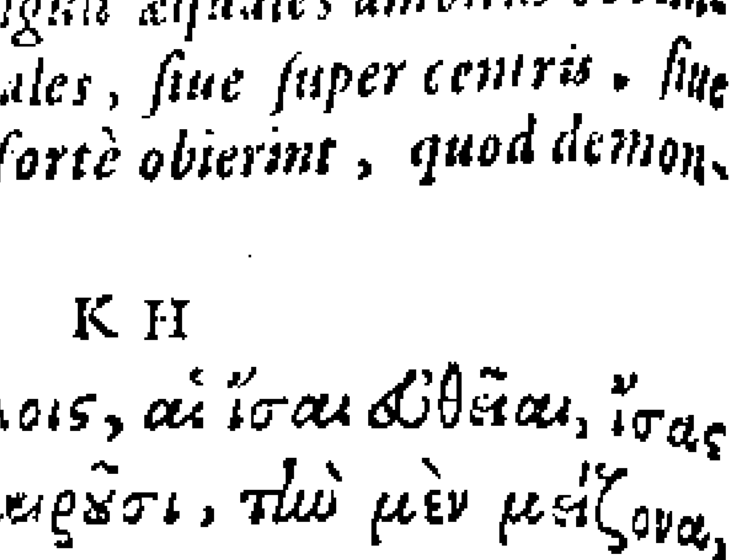
DEMONSTRATIO.

Sint in circulis æqualibus α β γ, δ ε ζ, ambitus æquales β γ et ε ζ, quos obeunt ſuper centris quidē anguli, β η γ, ε θ ζ, ſuper ambitus vero lineis β α γ, ε δ ζ.

ε δ ζ. Dico angulum β η γ angulo ε θ ζ, & angulũ β α γ, ε δ ζ angulo esse æqualem. Si autem β η γ angulus, non est æqualis ε θ ζ angulo, sit angulus ad η maior. Constituatur igitur hic angulus æqualis angulo ad θ, & sit β η κ. In circulis æqualibus anguli æquales, obeunt ambitus æquales. Igitur ambitus β κ æqualis erit ambitui ε ζ. sed ε ζ ipsi β γ est æqualis, igitur & β γ ipsi β κ erit æqualis, minor maiori quod est absurdum. Angulus igitur β η γ non [illegible] sed æqualis ε θ ζ angulo. Et quia α [illegible] plex est angulo ad α, & angulus ε θ ζ similiter δ angulo (per 20. tertij) Igitur angulus ad α æqualis est angulo ad δ. In circulis igitur æqualibus, anguli æquales ambitus obeuntes sunt inter se æquales, siue super centris, siue super ambitus lineis fortè obierint, quod demonstrandum erat.

KH

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα, τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι.



XXVIII.

In circulis æqualibus, lineæ rectæ æquales, auferunt ambitus æquales, maio-

rem

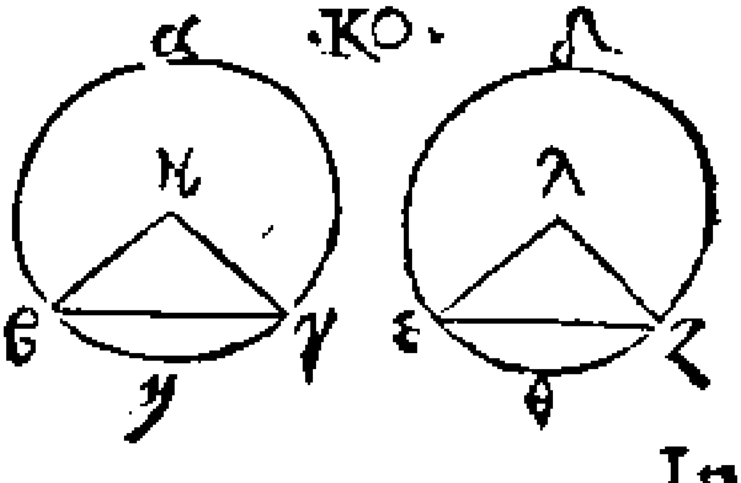
rem quidem maiori, minorem verò minori.

DEMONSTRATIO.

Sint æquales circuli α β γ, ε δ ζ, & in ipsis æquales rectæ lineæ β γ, ε ζ, quæ ambitus quidem β α γ, ε δ ζ maiores, β η γ verò, & ε θ ζ minores auferunt. Dico ambitum vnum maiorem, alteri maiori, & minorem minori esse æqualem. Sumantur centra circulorum κ & λ, iunganturq; β κ, κ γ, ε λ, & λ ζ. Quia igitur circuli sunt æquales, erunt & ex centro ductæ æquales (per 1. definit. tertij.) Duæ igitur β κ, κ γ duabus ε λ, λ ζ, sunt æquales, & basis β γ æqualis basi ε ζ (per hypot.) Igitur angulus β κ γ angulo, ε λ ζ erit æqualis. Aequales autem anguli obeunt æquales ambitus. Igitur ambitus β η γ æqualis est ε θ ζ ambitui. Quia verò totus circulus α β γ, toti circulo δ ε ζ est æqualis, erit reliquus ambitus β α γ maior videlicet reliquo ε δ ζ maiori quoq; æqualis. In circulis igitur æqualibus, lineæ rectæ æquales auferũt ambitus æquales &c. quod demonstrandum erat.

ΚΘ

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.



In

XXIX.

In circulis æqualib. ſubter æquales ambitus, æquales lineæ rectæ ſubtendunt.

DEMONSTRATIO.

Sint æquales circuli α β γ, δ ε ζ, & in ipſis ſumantur æquales ambitus β η γ, ε θ ζ. Dico lineam rectam β γ æqualem eſſe ε ζ rectæ. Ponantur centra amborum circulorum κ & λ, & iungantur β κ, κ γ, & ε λ, λ ζ. Quia igitur ambitus β η γ eſt æqualis ambitui ε θ ζ, erit angulus β κ γ, æqualis angulo ε λ ζ, & quia circuli ſunt æquales, erunt & quæ ex centro ducuntur rectæ æquales (per 1. deſ. tertij.) Duæ igitur β κ, κ γ æquales ſunt duabus ε λ, λ ζ, & cum æquales angulos includant baſis quoq; β γ (per 4. primi) æqualis erit baſi ε ζ. In circulis igitur æqualibus ſubter æquales ambitus, æquales lineæ rectæ ſubtendunt, quod demonſtrandum erat.

PROBLEMA I.

Λ

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, δίχα τεμεῖν.

XXX.

Datus ambitus in duas partes æquales ſecandus eſt.

DE-

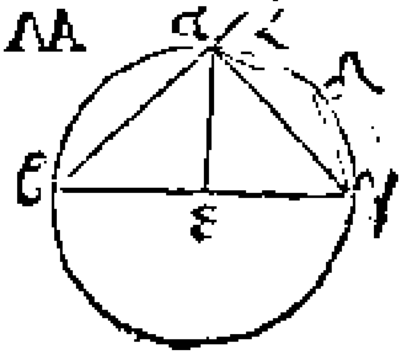
DEMONSTRATIO.

Sit datus ambitus α δ β, qui in duas partes æquales secandus est. Coniungantur α β recta linea, dissecetur illa æqualiter in γ puncto, à quo recta γ δ ad angulos rectos educatur. Dico hanc rectam datum ambitum in duas partes æquales secare. Iungantur α δ, β δ, quoniam α γ æqualis est γ β, communis autem γ δ. Duæ igitur α γ, γ δ duabus γ β, γ δ sunt æquales, & angulus α γ δ, angulo β γ δ est æqualis cum vterque sit rectus factus (per κατασκευὴν.) Basis igitur α δ basi δ β est æqualis. (per 4. primi) Aequales autem rectæ lineæ, æquales auferunt ambitus (per 28. tertij) maiorem quidem maiori, minorem verò minori, & est vtraque ipsarum α δ, δ β circumferentiarum minor semicirculo. Aequalis igitur est ambitus α δ, δ β ambitui. Datus igitur ambitus in duas partes sectus est, quod faciendum erat.

THEOREMA II.

ΛΑ

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, ὀρθή ἐστιν. Ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ἐλάττων ὀρθῆς. Ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι, ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν



ὀρθῆς

ὀρθῆς. Ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία, δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν, διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς, ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσι, ὀρθαί εἰσιν.

XXXI.

In circulo, qui in hoc dimidiato angulus eſt, is quidem rectus eſt, in maiore vero ſegmento minor recto, & minore maior recto. Præterea maioris ſegmenti angulus recto maior eſt, ſed minoris ſegmenti angulus, minor eſt recto.

ACQVISITVM.

De huius Theorematis demonſtratione manifeſtum fit, quod vnus trianguli duobus æqualis angulus, rectus ſit. Propterea quod continuus huius pariter duobus æqualis ſit. cum autem continui anguli æquales fuerint, tum recti ſunt.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ, centrum ε, diameter β γ. sumatur in semicirculo punctum fortuito, & sit α. Coniungantur β α, α γ. Similiter sumatur aliud punctum δ, iunganturq́; α δ & δ γ. Dico angulum in semicirculo β α γ, quem includunt β α, α γ esse rectum. Angulum verò in α β γ segmento maiore semicirculo, quem includunt α β, β γ rectæ, esse minorem recto, & angulum in α δ γ segmento minore semicirculo, quem includunt α δ, δ γ rectæ, esse maiorem recto. Iungantur α ε, producatur β α in ζ. Quoniam β ε æqualis est ε α, angulus ε α β æqualis erit angulo ε β α. Rursus quia α ε æqualis est ε γ, angulus α γ ε erit æqualis angulo ε α γ. Totus igitur angulus β α γ, duobus angulis α β γ, α γ β æqualis erit. Angulus verò ζ α γ externus triangulum α β γ, duobus angulis α β γ, α γ β, qui intus & ex aduerso sunt, est æqualis. Aequalis igitur est angulus β α γ, angulo ζ α γ, & erit vterque rectus. In semicirculo igitur angulus quem β α, α γ includunt, rectus est, quoniam in triangulo α β γ, duo anguli α β γ, β α γ duobus rectis sunt minores (per 17. primi.) & angulus β α γ rectus est, erit angulus alter α β γ minor recto, qui consistit in segmento maiore semicirculo. Rursus quia in circulo est figura quatuor laterum α β γ δ, erunt anguli α β γ & α δ γ aduersi duobus rectis æquales. At angulus α β γ minor est recto, erit igitur reliquus α δ γ maior recto, qui consistit in segmento

mento minore semicirculo. Dico porrò angulum segmenti maioris quem includunt α β γ ambitus & α γ recta linea, angulo recto maiorem esse: & angulum segmenti minoris quem includunt, α δ γ ambitus & α γ recta linea minorem esse recto. Quia angulus quem includunt, β α, α γ rectæ rectus est, erit is qui comprehenditur ab ambitus linea α β γ, & recta α γ maior recto. Rursus quia angulus quem includunt, α γ & α ζ rectæ rectus est, erit angulus inclusus ab α δ γ ambitu, & α γ recta, minor recto. In circulo igitur qui in hoc dimidiato angulus est, is quidem rectus est &c. quod demonstrandum erat.

ΛΒ

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς, ἐπὶ τὸν κύκλον, διαχθῇ τις εὐθεῖα, τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας, πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται, ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

XXXII.

Si recta linea circulum attingat & ducatur de tactu alia recta quæ circulum secet, quos quidem hæc in attingente angulos fecerit, ij angulis

gulis erunt segmentorum in vicissitudine æquales.

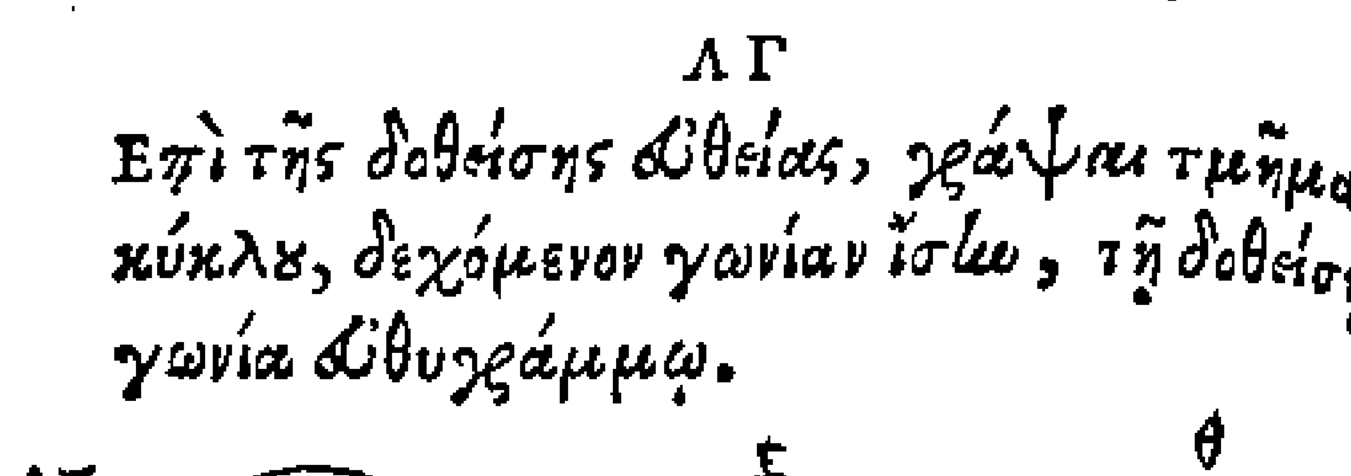
DEMONSTRATIO.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, quem attingat recta linea $\iota\zeta$ in puncto ϵ, à quo ducatur alia recta $\epsilon\delta$ circulum secans. Dico angulos quos $\epsilon\delta$ in attingente $\iota\zeta$ fecerit esse æquales angulis in vicissitudine segmentorum constitutis, hoc est angulum $\zeta\beta\delta$ esse æqualem angulo in $\epsilon\alpha\delta$ segmento existenti. Et angulum $\iota\beta\delta$ esse æqualem angulo in $\beta\gamma\delta$ segmento altero existenti. Constituatur ex puncto ϵ recta, $\epsilon\alpha$ ad angulos rectos, sumaturq; in $\epsilon\delta$ ambitu fortuito punctum γ. Connectantur $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\epsilon$. Quia circulum recta $\iota\zeta$ in puncto ϵ attingit, & ex puncto contactus educta est recta, ad angulos rectos cum attingente, erit in ipsa $\beta\alpha$ centrum circuli (per 19. tertij) quare $\alpha\beta$ erit diameter, & angulus $\alpha\delta\epsilon$ in semicirculo rectus. Reliqui igitur anguli $\epsilon\alpha\delta$, $\alpha\beta\delta$, vni recto sunt æquales. Angulus autem $\alpha\epsilon\zeta$ rectus est, igitur & æqualis erit angulis duobus $\beta\alpha\delta$, $\alpha\beta\delta$. Auferatur communis angulus $\alpha\epsilon\delta$, erit reliquus angulus $\delta\beta\zeta$, æqualis reliquo $\delta\alpha\beta$ existenti in vicissitudine segmentorum circuli. Quia verò in circulo dato figura quatuor laterum est $\alpha\beta\gamma\delta$, erunt anguli aduersi duobus rectis æquales (per 22. tertij.) Anguli igitur $\delta\beta\zeta$, $\delta\epsilon\iota$ (qui æquant duos rectos angulos) erunt æquales $\epsilon\alpha\delta$, $\epsilon\gamma\delta$ angulis. Est verò *β α δ angulus demonstratus æqualis δ β ζ angulo. Reliquus igitur angulus δ β ι, angulo reliquo δ γ β existenti in vicißitudine segmentorum circuli erit æqualis. Si igitur recta linea circulum attingat & ducatur de tactu alia recta &c. quod demonstrandum erat.*

PROBLEMATA II.

ΛΓ

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



XXXIII.

Super data linea recta describendum est circuli segmentum, quod angulum capiat æqualem, dato angulo cum rectis lineis.

DEMONSTRATIO.

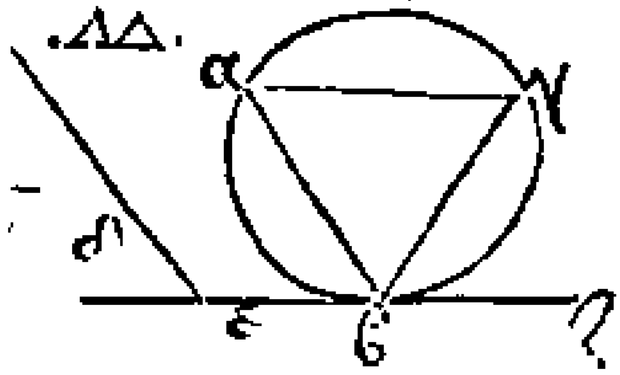
Sit data linea recta α β, datus verò angulus rectarum linearum γ describatur super data recta circuli segmentum, quod angulum capiat æqualem dato angulo γ. Quia verò angulus hic vel est rectus, vel ob-

vel obtusus, vel acutus, ponatur primo acutus. Constituatur ad $\alpha\beta$ rectam, & ad punctum in ea α, angulus $\delta\alpha\beta$ æqualis angulo γ. Quia igitur angulus $\delta\alpha\beta$ acutus est, educatur ex puncto α linea recta ad angulos rectos, quæ sit $\alpha\varepsilon$, seceturq; æqualiter in puncto ζ, $\alpha\beta$ recta, ex quo educatur rursus ad angulos rectos $\zeta\eta$ recta. Connectantur $\eta\beta$. Quia autem $\alpha\zeta$ æqualis est $\zeta\beta$, communis autem vtriq; triangulo $\zeta\eta$, duæ igitur rectæ $\alpha\zeta$ et $\zeta\eta$, duabus $\zeta\beta$ et $\zeta\eta$ sunt æquales, et angulus quem $\alpha\zeta$, $\zeta\eta$ includunt, æqualis est ei quem $\beta\zeta$, $\zeta\eta$ rectæ includunt. Vterq; enim rectus est. Basis igitur $\alpha\eta$ est æqualis basi $\beta\zeta$. Centro igitur η, interuallo verò $\eta\alpha$ descriptus circulus, transibit per β punctum, qui sit $\alpha\beta\varepsilon$, connectantur $\varepsilon\beta$ puncta. Quoniam igitur ab extrema diametri in circulo linea $\alpha\varepsilon$, ad angulos cum hac rectos, ducta est $\alpha\delta$, attinget $\alpha\delta$ circulum. Quia igitur circulum $\alpha\beta\varepsilon$, tangit quædam recta linea $\alpha\delta$, & de tactu ducta est recta alia $\alpha\beta$, quæ circulum secat. Angulus igitur $\delta\alpha\beta$ æqualis est angulo $\alpha\varepsilon\beta$, qui in segmentorum vicißitudine est. Angulus autem $\delta\alpha\beta$ est æqualis angulo dato γ, æqualis igitur est idem, & ei qui ab $\alpha\varepsilon\beta$ includitur. Super data igitur recta $\alpha\beta$, segmentum circuli descriptum est, quod capit angulum $\alpha\varepsilon\beta$ æqualem, dato angulo rectarum linearum γ. Sin datus angulus γ rectus fuerit constituatur rursus ad $\alpha\beta$ rectæ punctum α, dato angulo rectarum linearum angulus æqualis $\beta\alpha\delta$, *seceturq; æqualiter $\alpha\,\beta$ recta in ζ puncto.* Centro ζ, *interuallo $\zeta\,\alpha$, describatur circulus $\alpha\,\epsilon\,\beta$.* Coniungantur *$\epsilon\,\beta$ & $\epsilon\,\alpha$ puncta, attingit igitur recta $\alpha\,\delta$ circulum $\alpha\,\epsilon\,\beta$, propterea quod angulus $\beta\,\alpha\,\delta$ rectus est, & hic æqualis angulo, qui est in segmento $\alpha\,\epsilon\,\beta$. Angulus autem $\beta\,\alpha\,\delta$, æqualis est angulo dato γ. Descriptum igitur est iterum super $\alpha\,\beta$ recta segmentum circuli, quod capit angulum æqualem, dato angulo cum rectis lineis.* Si angulus deniq; γ, ponatur obtusus, constituatur ad rectā $\alpha\,\beta$ & punctum illius α, angulus ei æqualis $\beta\,\alpha\,\delta$, et de datæ $\alpha\,\delta$ rectæ, puncto α, educatur ad angulos rectos $\alpha\,\epsilon$ recta, seceturq; $\alpha\,\beta$ æqualiter in puncto ζ, & à datæ $\alpha\,\beta$ puncto ζ, educatur ad angulos rectos $\zeta\,\eta$, connectanturq; $\eta\,\beta$. Quoniam igitur $\alpha\,\zeta$ æqualis est $\zeta\,\beta$, & communis $\zeta\,\eta$. Duæ igitur $\alpha\,\zeta$, & $\zeta\,\eta$, duabus $\beta\,\zeta$ & $\zeta\,\eta$ sunt æquales, & angulus quem $\alpha\,\zeta\,\eta$ includunt, æqualis est angulo quem $\beta\,\zeta\,\eta$ includunt. Basis igitur $\alpha\,\eta$, basi $\eta\,\beta$ est æqualis. Centro igitur η interuallo $\alpha\,\eta$ circulus descriptus transibit per β. Quia igitur ab extrema diametri in circulo linea $\alpha\,\epsilon$ ad angulos rectos educitur $\alpha\,\delta$, attinget circulum ipsa $\alpha\,\delta$, & à tactu ducitur alia recta $\alpha\,\beta$, quæ circulum secat. Angulus igitur $\beta\,\alpha\,\delta$ æqualis est angulo $\alpha\,\vartheta\,\beta$ existenti in segmentorum vicissitudine, sed angulus $\beta\,\alpha\,\delta$ est æqualis ei, qui ad γ est datus. Igitur & angulus qui in segmento $\alpha\,\vartheta\,\beta$ est, æqualis erit ei angulo, qui ad γ. Super data igitur linea recta descriptum est segmen-

segmentum circuli, quod angulum capit æqualem, dato angulo cum rectis lineis, quod fieri oportuit.

Λ Δ

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου, τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



XXXIIII.

A dato circulo auferendum est segmentum, quod capiat angulum æqualem dato angulo cum rectis lineis.

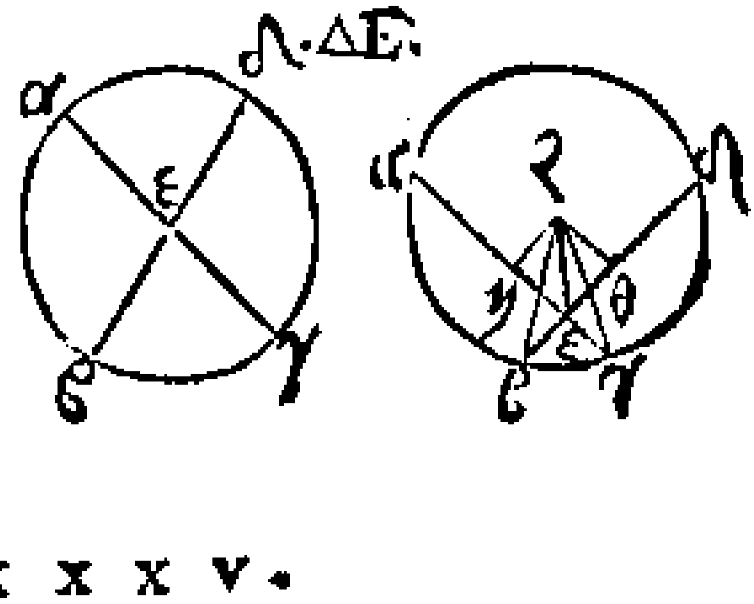
DEMONSTRATIO.

Sit datus circulus α β γ, datus verò angulus rectarum linearum δ. Auferendum est à dato circulo segmentum, quod capiat angulum æqualem angulo δ. Ducatur recta ε ζ, quæ tangat circulum in puncto β, & constituatur ad ε ζ rectam & punctum illud β, angulus rectarum linearũ ζ β γ æqualis angulo δ dato. Quia igitur circulum α β γ attingit recta ε ζ, & de tactu β ducta est alia recta β γ, quæ circulum secat, angulus ζ β γ æqualis erit β α γ angulo existenti in segmentorũ vicißitudine (per 32. huius.) Verum angulus ζ β γ ei qui est ad δ datus est æqualis. Igitur & huic erit æqualis, qui in *β α γ segmento existit. A dato igitur circulo ablatum est segmentum &c. quod fieri debuit.*

THEOREMATA III.

ΛΕ

Ἐὰν ἐν κύκλῳ, δύο εὐθεῖαι, τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



XXXV.

Si in circulo duæ lineæ rectæ sese mutuo secent, quod vnius segmenta lineæ spacium cum recto angulo includunt, id æquale est ei, quod alterius lineæ segmenta cum recto angulo includunt.

DEMONSTRATIO.

Sint in circulo α β γ δ duæ rectæ lineæ, α γ & β δ quæ sese mutuo secent in puncto ε. Dico spacium inclusum, ab α ε, ε γ cum angulo recto, æquale esse spacio quod δ ε, ε β rectæ, cum angulo recto includunt. Si enim α γ, β δ rectæ per centrum

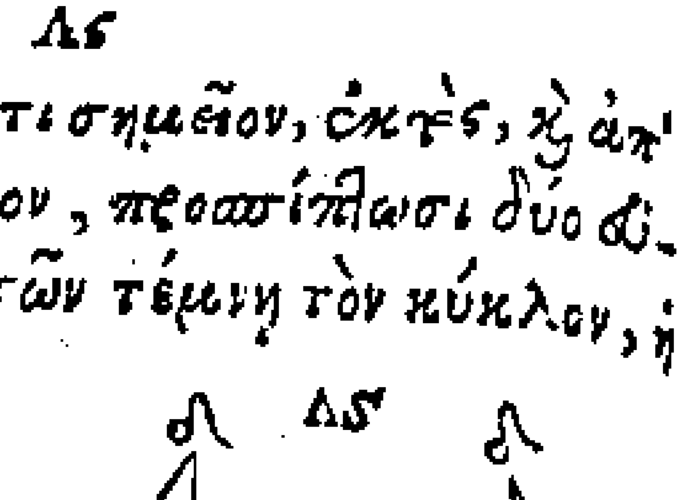
transeunt,

transeunt, ita vt ε sit centrum circuli, manifestum est æqualibus existentibus α ε, ε γ, & ε β, ε δ, & spacium inclusum ab α ε, ε γ æquale esse spacio ab ε ζ, ε δ comprahenso. Sint autem α γ, ζ δ non ductæ per centrum. Sumaturq; centrum circuli punctum ζ, de quo ducantur perpendiculares duæ rectæ ζ η, & ζ θ, in α γ & δ ζ rectas, connectanturque ζ β, ζ γ, & ζ ε. Quoniam igitur recta linea ζ η, per centrum ducta secat alteram quæ per centrum ducta non est α γ, ad angulos rectos, etiam mediam eam secabit (per tertiam huius) æqualis igitur est α η ipsi η γ. Et quia recta α γ secatur in partes æquales in η, & inæquales in ε, locus quem α ε, ε γ cum recto angulo includunt, vna cum quadrato, quod ad ε η describitur, æquale est ei quadrato, quod ad η γ, scilicet dimidiatum describitur (per 5. proposit. 2.) Apponatur commune quadratum quod ad η ζ describitur. Ergo locus quem α ε, ε γ, cum recto angulo includunt, vna cum quadratis descriptis ad ε η, η ζ æqualis est, quadratis descriptis ad γ η, & η ζ. Verum quadratis ex ε η, η ζ constitutis, æquale est quadratum ad ζ ε descriptum (per 47. primi) illis verò quadratis quæ describuntur ad γ η, η ζ æquale est quadratum ζ γ. Locus igitur quem α ε, ε γ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato ad ζ ε descripto, æqualis est quadrato, ad ζ γ descripto, æqualis autem est ζ γ ipsi ζ β recta. Igitur idem locus comprahensus ab α ε, ε γ vna cum quadrato de-

scripto ad ζ ε, æqualis est ei quadrato, quod ad ζ ϐ describitur. Eadem ratione locus quem δ ε, ε β includunt cum angulo recto, vna cum quadrato ζ ε, æqualis est quadrato ad ζ ϐ descripto. Igitur locus comprahensus ab α ε, ε γ, vna cum quadrato ζ ε, æqualis est quadrato ad ζ ϐ descripto. Ergo locus quem includunt α ε, ε γ, vna cum quadrato ex ζ ε, æqualis est loco comprahenso sub δ ε, ε β, vna cum quadrato ad ζ ε descripto. Auferatur quadratum commune quod ad ζ ε describitur, reliquum igitur parallelogrammon quod ab α ε, ε γ includitur æquale est ei, quod ab δ ε, ε β includitur. Si in circulo igitur duæ lineæ rectæ sese mutuo secant &c. quod demonstrandum erat.

λϛ

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον, προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ, τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας,



περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Si ca-

XXXVI.

Si capiatur extra circulum punctum quodpiam, atque ab illo incidant in circulum lineæ duæ rectæ quarum vna circulum secet, altera attingat, id spacium quod tota illa secans circulum linea & exterius absumta portio inter punctum & gibbum circuli cum angulo recto includit, æquale erit, quadrato ad lineam circulum attingentem descripto.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$ punctum extra ipsum δ, à quo in circulum incidant lineæ duæ rectæ $\delta\gamma\alpha$, & $\delta\beta$, & secet ex his $\delta\gamma\alpha$ circulum, $\beta\delta$ verò tangat ipsum. Dico spacium, quod tota illa secans circulum $\alpha\delta$, & exterius absumpta portio inter punctum, & gibbum circuli $\delta\gamma$, cum angulo recto includit, æquale esse quadrato, quod ad $\beta\delta$ lineam attingentem describitur. Recta autem linea $\delta\gamma\alpha$ aut est ducta per centrum, aut non. Ponatur primum ducta per centrum, quod sit ζ coniungantur $\zeta\beta$. Angulus igitur $\zeta\beta\delta$ rectus est, quia verò $\alpha\gamma$ linea, æqualiter secta est in ζ puncto, & illi recta alia, continuata directione adÿcitur $\gamma\delta$ locus, quem

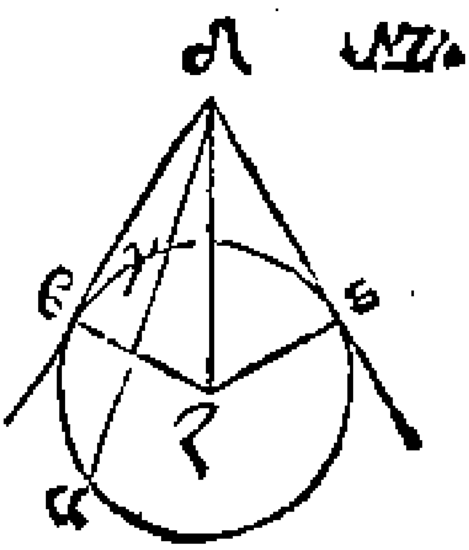
quem tota $\alpha\delta$, & apposita $\gamma\delta$ cum angulo recto includit, vna cum quadrato, quod ad dimidiatam $\zeta\gamma$ describitur, æquale eſt quadrato quod ad dimidiatam ſimul cum apposita, ſcilicet $\zeta\delta$ describitur. Aequalis autem eſt $\zeta\gamma$ ipſi $\zeta\beta$. Igitur quod continetur ſub $\alpha\delta$ & $\delta\gamma$, vna cum eo quadrato quod ex $\zeta\beta$, ſit æquale eſt ei quadrato, quod ad $\zeta\delta$ deſcribitur. Aequale autem eſt hoc quod ex $\zeta\delta$, quadratis ad $\zeta\beta$, $\beta\delta$ deſcriptis. Locus igitur quem $\alpha\delta$, $\delta\gamma$ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato deſcripto ad $\zeta\beta$ æqualis eſt quadratis ad $\zeta\beta$, $\beta\delta$ deſcriptis. Auferatur quadratum cõmune $\zeta\beta$, reliquus igitur locus, quem $\alpha\delta$, $\delta\gamma$ includunt æqualis eſt quadrato, quod ad $\beta\delta$ lineam attingentem circulum deſcribitur. Ponatur recta linea $\delta\gamma\alpha$, quod non ſit ducta per centrum, quod ſit ε, de quo in $\alpha\gamma$ ducatur perpendiculum $\varepsilon\zeta$. Connectantur $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$, & $\varepsilon\delta$. Rectus igitur eſt angulus $\varepsilon\zeta\delta$. Quoniam recta linea $\varepsilon\zeta$ per centrum ducta ſecat alteram $\alpha\gamma$ non per centrum ductam, ad angulos rectos, etiam eam mediam ſecabit (per tertiam huius.) Igitur $\alpha\zeta$ æqualis eſt $\zeta\gamma$, & quia $\alpha\gamma$ æqualiter diuiditur in ζ puncto, cui apponitur $\gamma\delta$. Locus igitur quem $\alpha\delta$, & $\delta\gamma$ cum angulo recto includunt, vna cum quadrato, ad $\zeta\gamma$ tanquam mediam deſcripto, æqualis eſt ei quadrato, quod ad $\zeta\delta$ deſcribitur (per 6. ſec.) Commune quadratum $\zeta\varepsilon$ apponatur. Spacium igitur quod includit $\delta\alpha$, & $\delta\gamma$ vna cum quadratis $\zeta\varepsilon$ & $\zeta\gamma$

æquale

æquale est quadratis, quæ fiunt ex $\zeta\delta$, $\zeta\epsilon$. His autem æquale est quadratum descriptum ad $\epsilon\delta$ (angulus enim ab $\epsilon\zeta$, $\zeta\delta$ inclusus, rectus est.) Eis verò quadratis, quæ fiunt ex $\gamma\zeta$, $\zeta\epsilon$, æquale est id quod fit ex $\gamma\epsilon$. Spacium igitur comprahensum sub $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, vna cum eo quadrato quod ad $\epsilon\gamma$ describitur, æquale est ei, quod ad $\epsilon\delta$, $\epsilon\gamma$ autem æqualis est ipsi $\epsilon\varsigma$. Quod igitur continetur sub $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, vna cum quadrato $\epsilon\varsigma$ æquale est ei quod ex $\epsilon\delta$. Ei vero rursus quod ex $\epsilon\delta$ fit quadrato, æqualia sunt quadrata ad $\epsilon\beta$, $\beta\delta$ (angulus enim sub $\epsilon\varsigma\delta$ rectus est.) Spacium igitur quod tota $\alpha\delta$ & $\delta\gamma$ includit, vna cum quadrato ad $\epsilon\varsigma$ descripto, æquale est quadratis, ad $\epsilon\varsigma$, & $\beta\delta$ descriptis. Auferatur commune quadratum, ad $\epsilon\beta$. Reliquum igitur spacium, quod includit tota $\alpha\delta$, & $\delta\gamma$ portio exterius absumpta, æquale est quadrato, quod ad $\delta\varsigma$ lineam circulum attingentem describitur. Si capiatur igitur extra circulum punctum quodpiam &c. quod demonstrandum fuit.

AZ

Ἐὰν κύκλου, ληφθῇ τι σημεῖον, ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, προσπίπτωσι, δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἦ δὲ



τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ, τοῦτε σημείου, καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης. ἡ προσπίπτουσα, ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

XXXVII.

Si capiatur extra circulum punctum quodpiam, & incidant à puncto illo rectæ lineæ duæ in circulū, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, atq; fuerit id spacium, quod tota circulum secans linea, & exterius absumta inter punctum & circuli gibbum portio, cum recto angulo includit, æquale ad incidentem lineam descripto quadrato, quæ ita linea incidet in circulum, ea hunc attinget.

DEMONSTRATIO.

Sit circulus α β γ, punctum extra eum positum δ, de quo in circulum incidant duæ rectæ δ γ α, & δ β, quarum illa quidem secet circulum, hæc vero incidat in eum, & sit spacium quod tota circulum secans linea α δ, & exterius absumpta, inter punctum & circuli gibbum, portio δ γ cum angulo recto includit æquale, quadrato quod describitur ad δ β. Di-

δβ. Dico δβ lineam incidentem in circulum eum attingere. Ducatur namq; linea recta attingens circulum δε, & ponatur centrum circuli ζ. Connectantur ζε, ζβ, ζδ. Angulus igitur ζεδ rectus est. Quia igitur recta δε circulum attingit, & δγα recta eum secat, spacium igitur quod δα tota, & δγ cõtinetur, æquale est quadrato descripto ad δε. Positum autem est spacium, quod tota αδ & exterius sumta portio δγ, cum recto angulo includunt, esse æquale quadrato ad δβ descripto, quadratum igitur ad δε æquale est quadrato ad δβ descripto. Aequalis igitur est δε linea δβ lineæ, æqualis autem est ζε, ipsi ζβ. Duæ igitur δε, εζ duabus δβ, ζβ sunt æquales, & habent basin δζ communem. Angulus igitur δεζ, angulo δβζ est æqualis (per 8. primi.) Rectus autem est angulus δεζ (per 18. huius.) Igitur & qui sub δβζ est, rectus erit. Et cum ζβ protracta diameter circuli sit. Quæ autem ab hac extrema in circulo diametri linea ad angulos rectos educitur, eum hac circulum tangit (per 16. huius.) Recta igitur linea δβ circulum αβγ attingit. Idem demonstrari potest, si αγ recta per centrum ducta fuerit. Si igitur extra circulum punctum quodpiam capiatur &c. quod demonstrandum fuit.

FINIS LIBRI TERTII ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

Fi
tur i
gura
inscr
iger

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ δ'.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER QVARTVS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

Α

Σχῆμα εὐθύγραμμον, εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν, ἑκάστης πλευρᾶς, τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

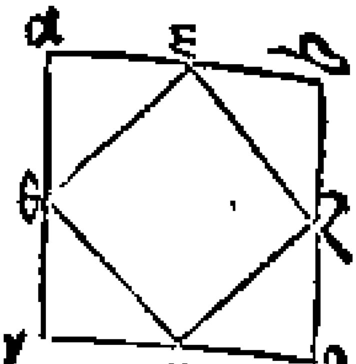
I.

Figura rectarum linearum dicitur inſcribi in rectarum linearum figuram, cum ſinguli eius figuræ quæ inſcribitur anguli, ſingula latera tetigerint eius in quam inſcribitur.

Β

Σχῆμα δὲ ὁμοίως, περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ, τοῦ

 περιγρα-



περιγραφομένου, ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

I I.

Similiter & figura circum figuram circumſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ inſcribitur, latera ſingulos angulos tetigerint, eius circum quam illa circumſcribitur.

Γ

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον, εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

I I I.

Figura autem rectarum linearum in circulum dicitur inſcribi, cum ſinguli anguli eius figuræ quæ inſcribitur, tetigerint ambitum circuli.

Δ

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον, περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ, τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ περιγραφομένου, ἐφάπτηται.

I I I I.

Figura

Figura verò rectarum linearum circum circulum dicitur circumſcribi, cum ſingula latera eius figuræ quæ circumſcribitur, attigerint circuli ambitum.

E

Κύκλος δὲ ὁμοίως, εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς, τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

V.

Similiter & circulus dicitur in figuram inſcribi, cum ambitus circuli ſingula tetigerit latera eius figuræ quæ inſcribitur.

Ϛ

Κύκλος δὲ, περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

VI.

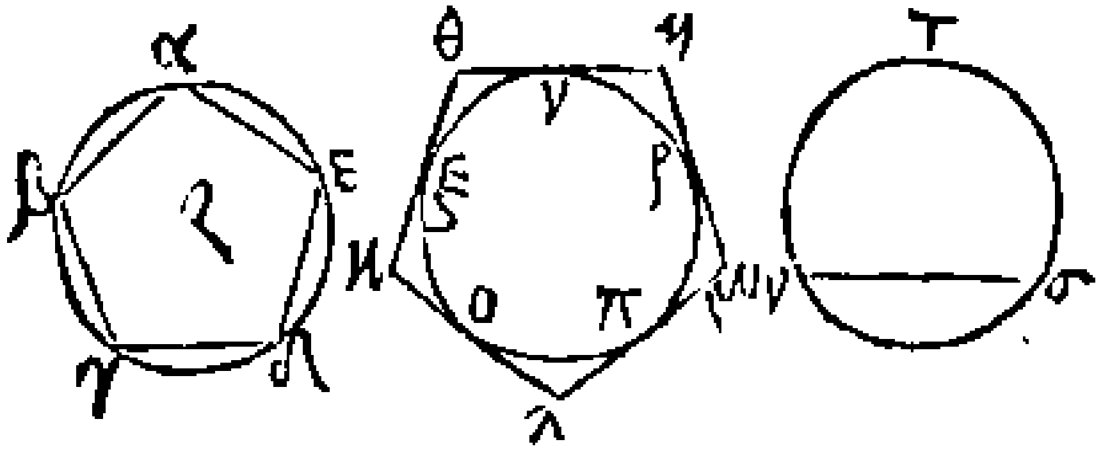
Sed circum figuram dicitur circulus circumſcribi, cum ambitus circuli ſingula tetigerit latera, eius figuræ circum quam circumſcribitur.

Z

Εὐθεῖα, εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς, ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

VII.

Recta linea in circulum apta descriptione induci dicitur, cum terminantia eam puncta in ambitu circuli reperta fuerint.

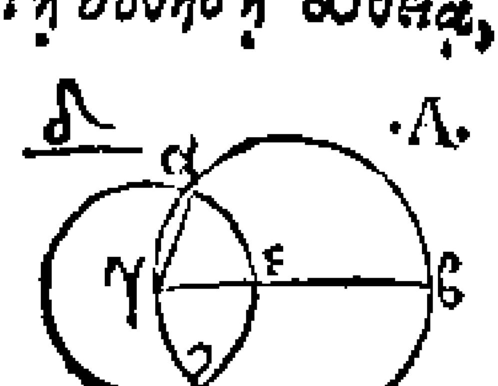


ΠΡΟΤΑ'ΣΕΙΣ.

PROBLEMATA XVI.

A

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ, τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



I.

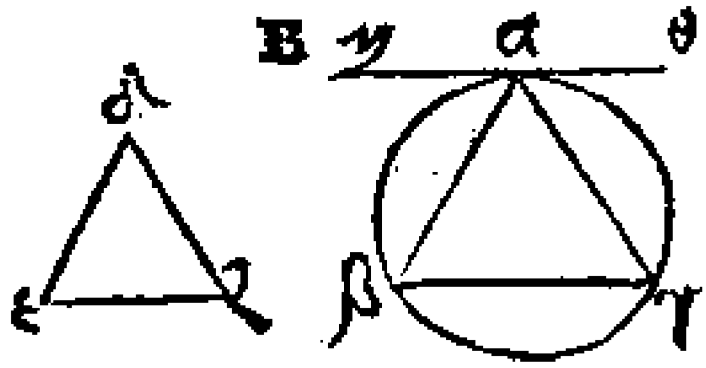
In circulum datum, inducenda est linea recta æqualis datæ rectæ, non maiori linea diametri in circulo.

Εἰς τὸν

B

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

B



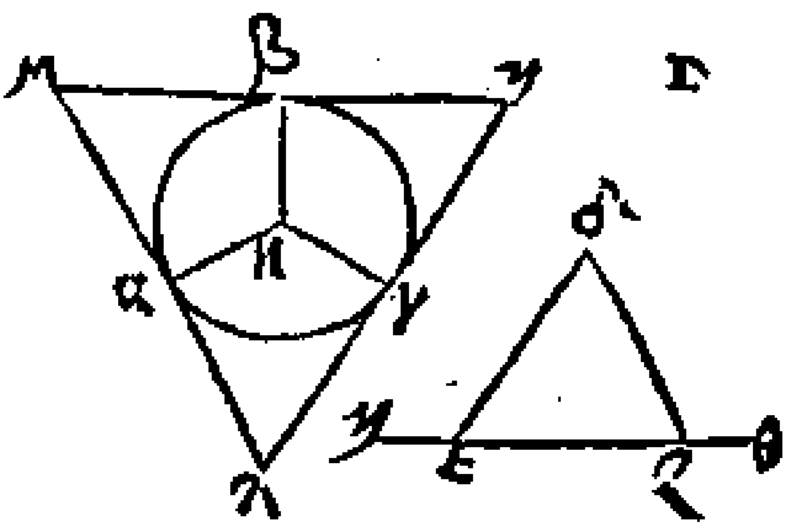
II.

In datum circulum inſcribendum triangulum eſt, quod æquales habeat angulos dato triangulo.

Γ

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Γ



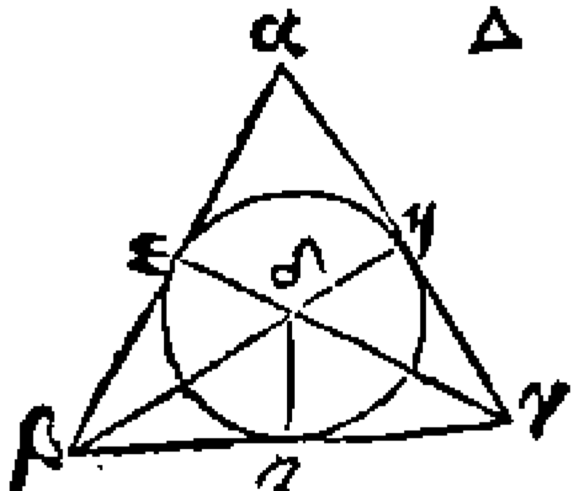
III.

Circum datum circulũ, triangulum quod triangulo dato æquales angulos habeat, circumſcribendum eſt.

Δ

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

Δ



IIII.

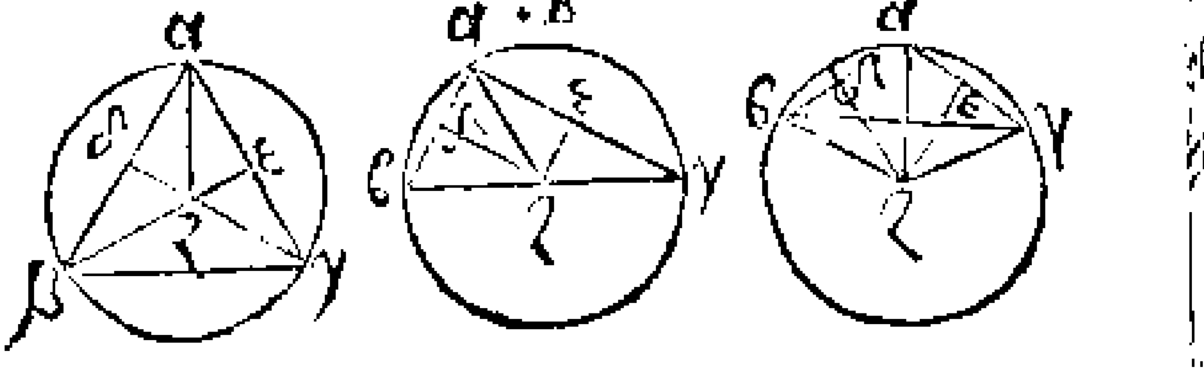
In datum triangulum inſcribendus circulus eſt.

E

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτῃ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ β α γ. γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅτι ἢ ἐπὶ τῆς β γ, ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐσται. ὅταν ἢ ἐκτὸς τῆς β γ, εὐθείαν τὸ κέντρον πίπτῃ, ἡ ὑπὸ β α γ, ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ δ ζ, ε ζ, ὅταν ἢ ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς β γ, ὅταν ἢ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς β γ.



V.

Circum datum triangulum circumſcribendus circulus eſt.

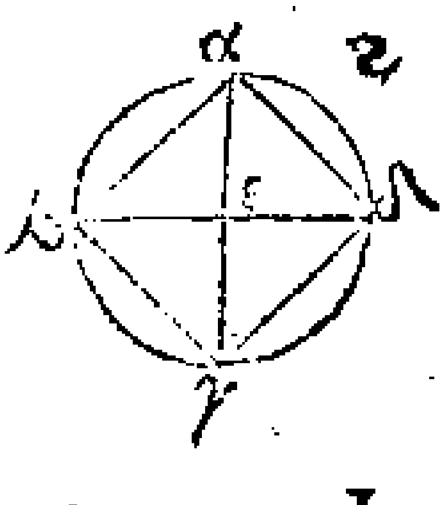
ACQVISITVM.

Ex de-

Ex demonſtratione fit manifeſtũ cum intra triangulum ceciderit centrum circuli, angulus qui reperitur ſub ϐ, α, γ, quoniam in maiore ſegmento quam dimidiatus circulus, eſt, quod minor ſit recto. Cum verò ſuper β, γ, ceciderit centrum, quia eſt angulus in dimidiato circulo, quod tum rectus ſit. Cum autem extra lineam β, γ, ceciderit centrum, quandoquidem angulus qui reperitur ſub β, α, γ, in minore ſegmento quam dimidiatus circulus, eſt, quod tum maior ſit recto. Proinde cum fuerit angulus datus recto minor, intra triangulum, lineæ δ, ζ, ε, ζ, cum autem rectus, ſuper β, γ, cum verò recto maior, extra β, γ, concurrent.

ς

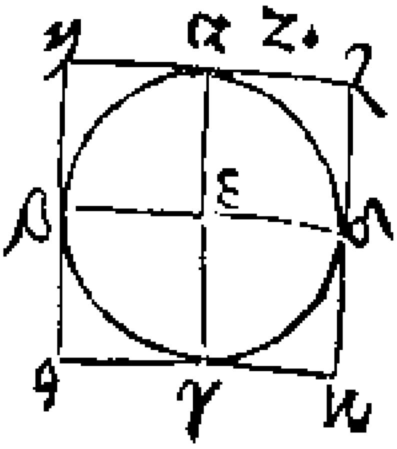
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.



VII.

In datum circulum quadratum eſt inſcribendum.

Z

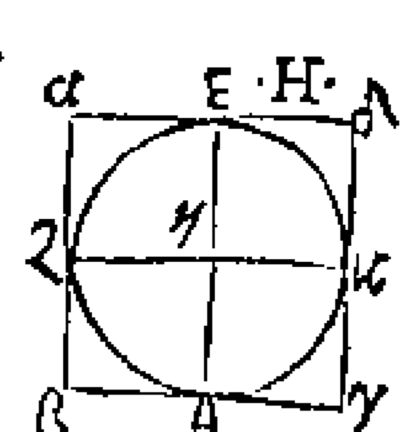


Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

VII.

Circum datum circulum, quadratum circumſcribendum eſt.

H

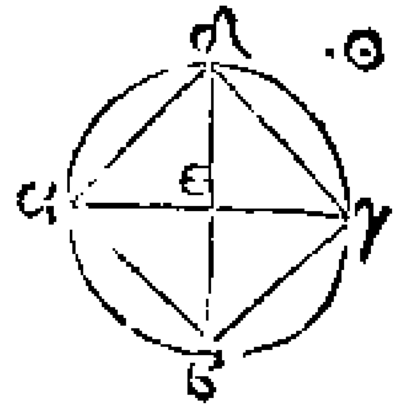


Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

VIII.

In datum quadratum inſcribēdus circulus eſt.

Θ



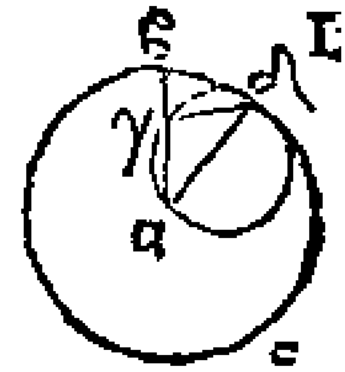
Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι.

IX.

Circa datum quadratum circulus eſt circumſcribendus.

I

Ισοσκεἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν, τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν, διπλασίονα τῆς λοιπῆς.



X.

Quod æqualia crura habeat triangulum ita conſtituatur, vt in eo ſit vterque iuxta Baſin angulus duplex ad reliquum.

IA

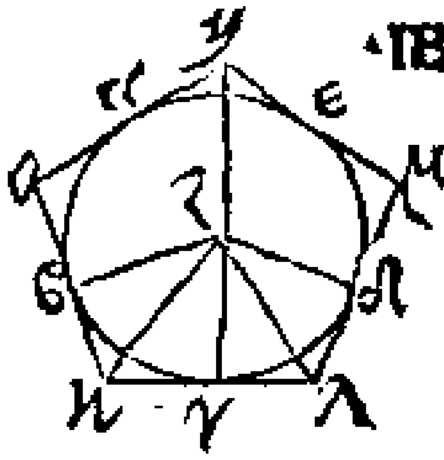
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

XI.

In circulũ datum quinquangulum æqualium tam laterũ quam angulorum inſcribendum eſt.

IB

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

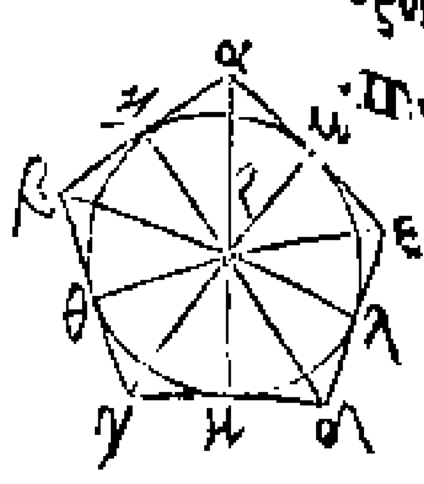


XII.

Circum datum circulum quinquangulum tam laterum quam angulorum æqualium, circumſcribendum eſt.

IΓ

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσοπλευρόν τε, καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

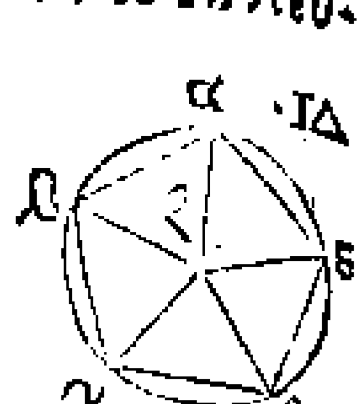


XIII.

In quinquangulum datum quod ſit æqualium tam laterum quam angulorum, circulus eſt inſcribendus.

IΔ

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.



XIIII.

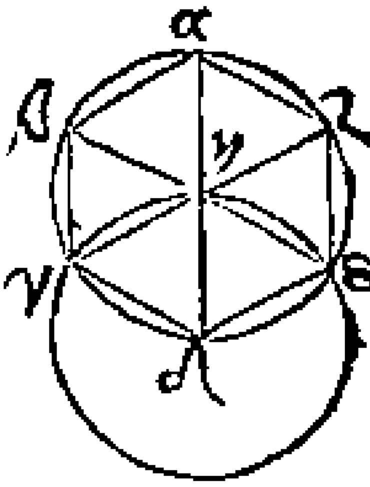
Circum datum quinquangulum quod ſit æqualium tam laterum quam angulorum, circulus inſcribendus eſt.

IE

Εἰς τὸ

εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.



Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴση ἐστὶ, τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν.

XV.

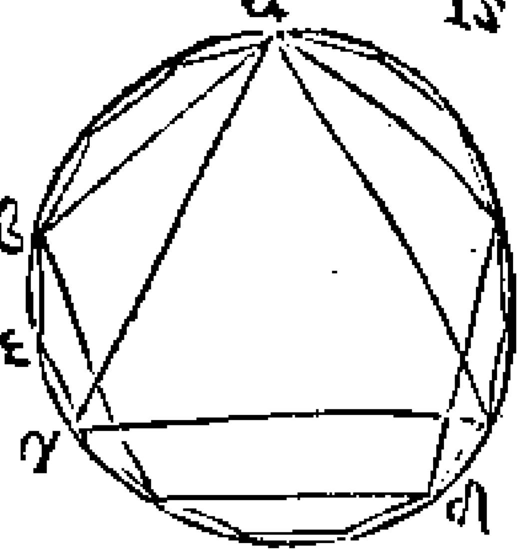
In circulum datum inſcribendũ eſt ſexangulum cum æqualibus tam lateribus quam angulis.

ACQVISITVM.

Ex demonſtratione manifeſtum fit quod in figura ſexangulorum æqualium vnumquodq; latus æquale ſit lineæ eductæ de centro. Etſi iam de punctis α β γ δ ε ζ, ducantur lineæ attingentes circulum, fore vt circum-cum circulum ſexangulum tam laterum, quam angulorum æqualium circumſcribatur, perinde atque de quinquangulo diximus. Inſuperq́ue ſimili obſeruatione eorum quæ dicta ſunt de quinquangulo, in datum ſexangulum, circulum inſcribemus.

Ις

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



XVI.

In datum circulum, quindecim angulorum æqualium, itemq; laterum, figura inſcribenda eſt.

FINIS LIBRI QVARTI ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ε΄.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER QVINTVS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

Α

Μέρος ἐστὶ, μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

I.

Pars eſt magnitudinis magnitudo, minor illa quidem maioris, ſed quæ maiorem dimetiatur.

Β

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

II.

Multiplex autem eſt, maior minoris, cũ minor fuerit menſura maioris.

Γ

Λόγος ἐστὶ, δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα, ποιὰ σχέσις.

III.

Ratio eſt duarum magnitudinum vnius generis, inter ſe quidam, ſecundum quantitatem, reſpectus.

Δ

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, μεγέθη λέγεται ἃ δύναται, πολλαπλασιαζόμενα, ἀλλήλων ὑπερέχειν.

IIII.

Rationem inter ſe habere magnitudines dicuntur eæ, quæ poſſunt ſe ſe mutuo in multiplicatione ſuperare.

E

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου, καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

V.

Magni-

Magnitudines dicuntur esse eiusdem rationis, tam prima ad secundam, quam tertia ad quartam, cum multiplicatio, qualiscunque hæc sit, primæ & tertiæ, multiplicationem secundæ & quartæ, vtraque vtranque, aut defecerit simul, aut simul adæquauerit, aut simul superauerit, si sumantur ordine & serie quadam inter se.

ς

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

VI.

Magnitudines autem quarũ fuerit eadem ratio eæ dicantur esse in proportione.

Z

Ὅταν δὲ, τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον, ὑπερέχῃ, τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Cum

VII.

Cum verò æqualiter multiplicũ, multiplex primæ ſuperauerit, multiplicem ſecundæ, At tertiæ multiplex quartæ multiplicem non ſuperauerit, tunc prima ad ſecundam, maiorem dicitur habere rationem, quam tertiæ ratio ſit ad quartam.

II

Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

VIII.

Proportio eſt rationũ comparatio.

Θ

Ἀναλογία δὲ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

IX.

Atque eſt proportio in tribus terminis paucíſs.

I

Ὅταν δὲ, τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

X.

Cum autem fuerint magnitudines tres in proportione, ſit vt prima ad ter-ad tertiam, rationem habeat duplo maiorem quam ad ſecundam.

IA

Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

XI.

Sed quatuor magnitudines cum n proportione fuerint, fit vt prima ad quartam, triplo maiorem habe-t rationem, quam ad ſecundam. tq; ita deinceps vno ſemper am-lius, donec proportio conſtabit.

IB

Ὁμόλογα μεγέθη, λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα, τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα, τοῖς ἑπομένοις.

XII.

Congruentes ratione magnitudines dicuntur eſſe, antecedentes quidem cum antecedentibus, conſequentes vero cũ conſequentibus.

IΓ

Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶν, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου, πρὸς τὸ ἑπόμενον.

XIII.

Ratio viciſſitudinis eſt, ſumtio antecedentis comparatæ ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

ΙΔ

Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον.

XIIII.

Ratio cõuerſionis eſt, ſumtio conſequentis tanquam antecedentis, & antecedentis tanquam cõſequentis.

ΙΕ

Σύνθεσις λόγου ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου, μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

XV.

Rationis compoſitio, eſt ſumtio antecedentis vna cum conſequente, comparatæ ad ipſam quæ conſequens erat.

Ις

Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ, λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἡ ὑπερᾗ ὑπερέχει, τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

XVI.

Diuiſio autem rationis, ſumtio eſt ſuperationis, qua ſuperat antecedens conſequentem, comparatæ ad ipſam quæ conſequens eſt.

IZ

Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει, τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

XVII.

Inuerſio rationis, eſt ſumtio antecedentis, comparatæ ad ſuperationem, qua ſuperat antecedens conſequentem.

IH

Δίισου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων, αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Η ἄλλως, λῆψις τῶν ἄκρων, καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

XVIII.

Exæquationis ratio eſt, ſi tres pluréſue magnitudines, & his aliæ numero pares, binæ quæque & eadem in ratione ſumantur, vbi, quemadmodum in primis magnitudinibus, prima ad poſtremam, ita & in ſecundis magnitudinibus, prima ad poſtremam ſeſe habuerit. Vel aliter, ſumtio eſt extremorum, ſubtractis medijs.

ΙΘ

Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον, πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

XIX.

Ordinata proportio, eſt cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem. Atq; etiam vt conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

Κ

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν

ὄντων

ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

X X.

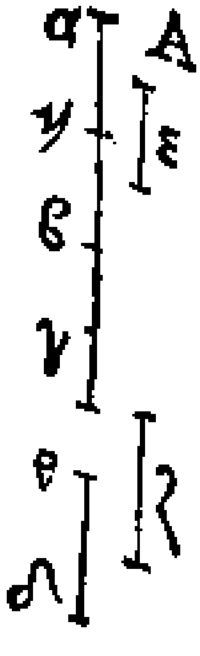
Perturbata autem proportio eſt, cum in tribus magnitudinibus, & alijs totidem, habet ſe quemadmodum quidem in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentẽ. Quemadmodum verò in primis magnitudinibus cõſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis magnitudinibus, alia quæpiam ad antecedentẽ.

ΠΡΟΤΆΣΕΙΣ.

THEOREMATA XXV.

A

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν, ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται, καὶ τὰ πάντα, τῶν πάντων.

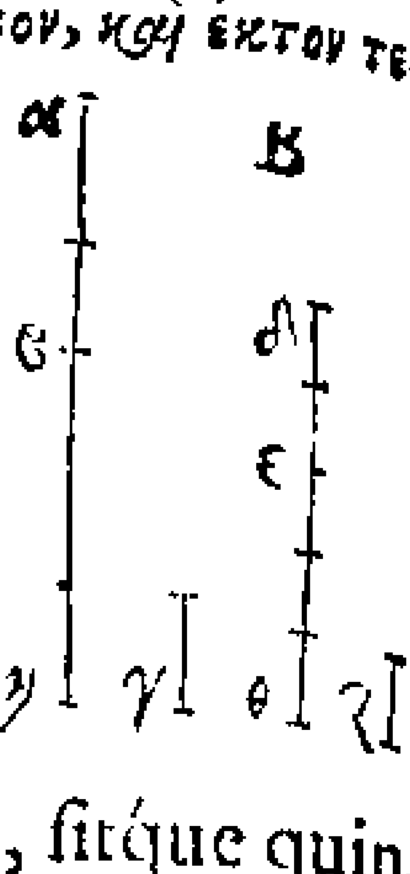


I.

Si ſint magnitudines quotcunq; magnitudinum quotcunq; numero pariũ, æqualiter ſingulæ ſingularum multiplices, quam multiplex vna alterius eſt, tam multiplices erũt omnes omniũ.

B

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου, ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου, ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον, καὶ πέμπτον, δευτέρου, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.



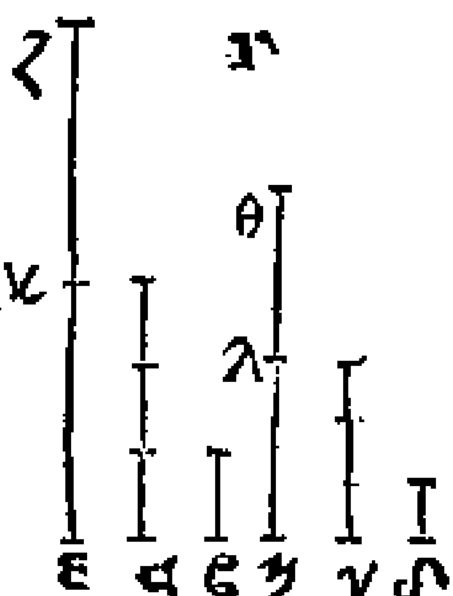
I I.

Si prima ſecundæ ſit æqualiter multiplex, & tertia quartæ, ſitque quinta ſecundæ multiplex æqualiter & ſexta

sexta quartæ, erit composita prima cum quinta æqualiter secundæ multiplex, & tertia ac sexta quartæ.

Γ

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου, ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δίισου, τῶν ληφθέντων, ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

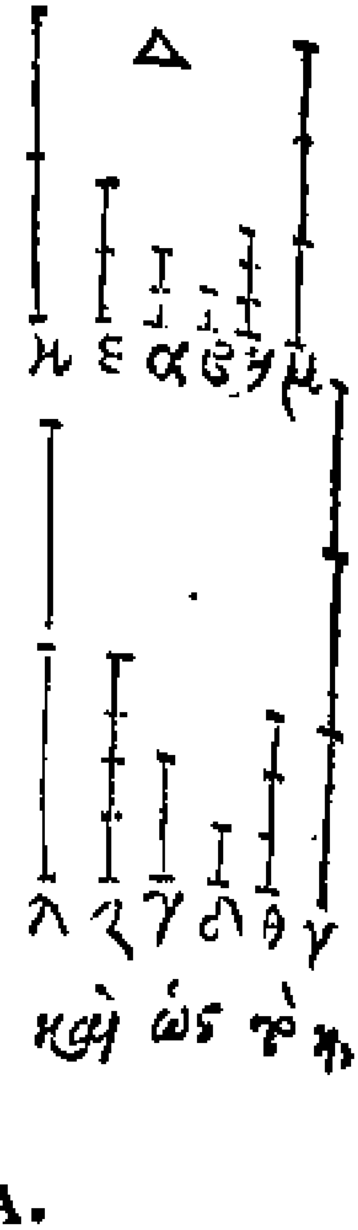


III.

Si sit æqualiter multiplex prima secundæ, & tertia quartæ, sumanturq; æqualiter multiplices primæ & tertiæ, Erunt etiam, in ratione exæquationis si sumantur, singulæ singularum, vna quidem multiplex secundæ, altera verò quartæ.

Δ

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.



ΛΗΜΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ κ τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον, δῆλον ὅτι, καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ μ τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται, καὶ ὡς τὸ η, πρὸς τὸ ε, οὕτω τὸ θ πρὸς τὸ ζ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι, ἐὰν τέσσαρα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

IIII.

Si prima ad ſecundã habeat eandem rationem, quam tertia ad quartam, etiam æqualiter multiplices primæ & tertiæ, ad æqualiter multiplices ſecundæ & quartæ, in cuiuſcunque multiplicationis ordine atque ſerie ſumtæ, eandem habebunt rationem.

Lem-

LEMMA.

Cum igitur demonſtratum ſit, ſi μ ſuperetur à κ, ſuperari etiam ν à λ. Et ſi ſit κ æquale μ, eſſe & λ æquale ν. Et ſi minus illud, eſſe minus & hoc: patet, etiam κ ſi ſuperetur à μ. ſuperari λ à ν. Et ſi ſit μ æquale κ. æquale etiam ν eſſe κ. & ſi minus illud, minus eſſe & hoc. Atq; ideo habebit ſe ϑ ad ζ, quemadmodum η & ε.

PORISMA.

Ex demonſtratione hac manifeſtum fit, ſi quatuor magnitudines in proportione ſint, conuerſas etiam in proportione fore.

E

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν, ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι, τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

V.

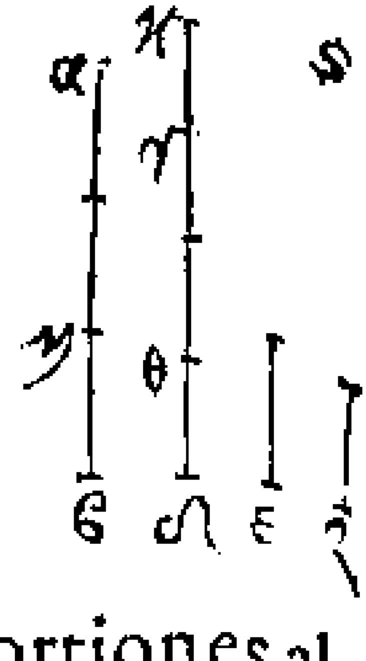
Si ſit magnitudo magnitudinis multiplex æqualiter, & portio inde ablata portioni: Etiam

 reliqua

reliqua reliquæ multiplex erit, ita vt tota totius.

ϛ

Ἐὰν δύο μεγέθη, δύο μεγεθῶν, ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ, τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

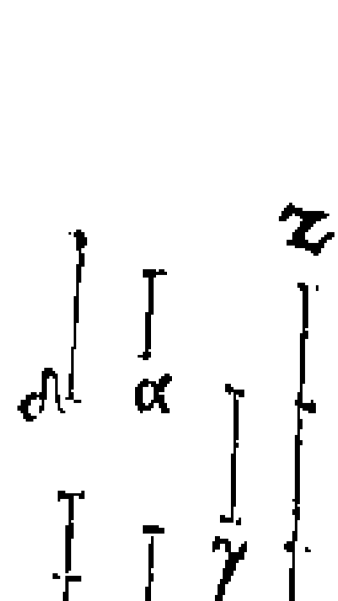


VI.

Si ſint duæ magnitudines æqualiter multiplices duarum, ſintq; portiones ablatæ quædam æqualiter multiplices earundem, etiam reliquæ aut æquales erunt ijſdem, aut æqualiter earundem multiplices.

Z

Τὰ ἴσα, πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.



VII.

Aequalia ad idem, rationem eandem habent, itemq; idem ad æqualia.

Τῶν

H

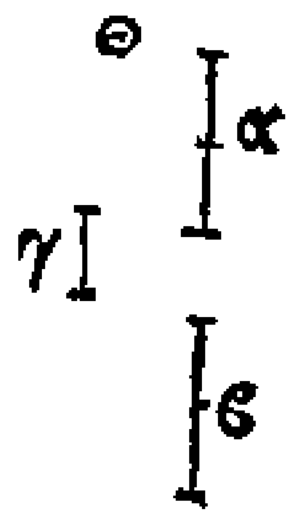
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. Καὶ τὸ αὐτὸ, πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

VIII.

Magnitudinum inæqualium, maior ad eandem maiorem rationem habet, quam minor. Et eadem ad minorem, habet rationem maiorem, quam ad maiorem.

Θ

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ πρὸς ἃ, τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



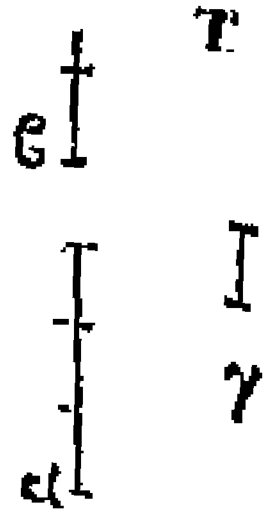
IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem, ea ſunt æqualia inter ſe. Et ad quæ idem eandem rationem habet, ea quoque inter ſe æqualia ſunt.

Τῶν

I

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ, λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ, τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐστί.



X.

Quæcunq; ad idem rationem habent, eorum id quod maiorem rationem habet, maius eſt. Id verò ad quod idem maiorem rationem habet, minus eſt.

I A

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

X I.

Quæ rationes eædem ſunt ijſdem, etiam ſunt eædem ſibi ipſis.

I B

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαν-

τα τὰ

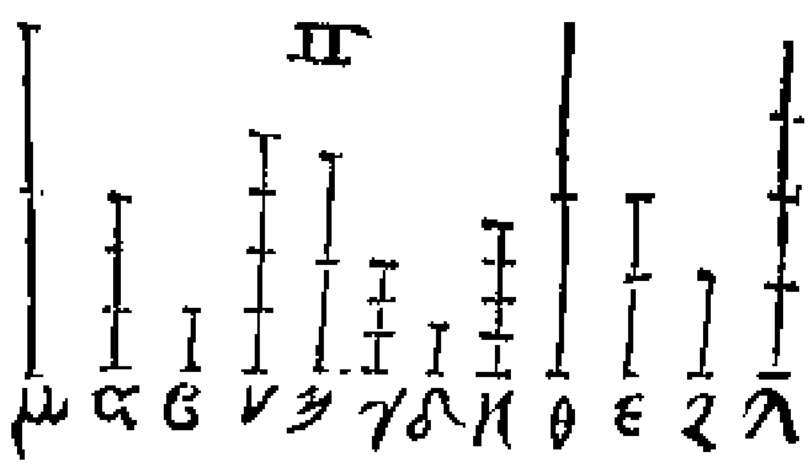
τα τὰ ἑπόμενα.

XII.

Si sint magnitudines quotcunque in proportione, quemadmodum se habuerit vna antecedens ad consequentem, ita habebunt antecedentes vniuersæ ad vniuersas consequentes.

ΙΓ

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον, μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ, πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον, μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.



XIII.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, Tertia autem ad quartam, maiorem habuerit rationem, quam quinta ad sextam,

ſextam, tum etiam prima ad ſecundam, maiorem habebit rationem, quam quinta ad ſextam.

I Δ

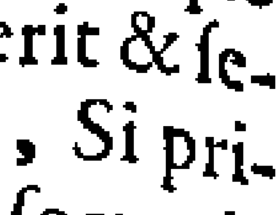
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου, μεῖζον ᾖ. καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου, μεῖζον ἔσται. Κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

X I I I I.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior quam tertia, erit & ſecunda maior quam quarta, Si prima fuerit æqualis tertiæ, & ſecunda æqualis quartæ, Sin minor, & minor erit.

I E

Τὰ μέρη, τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.



X V.

Partes in ijs quæ pariter multiplicia ſunt, ordine & ſerie

ſerie collocatæ, ad illa eandem habent rationem.

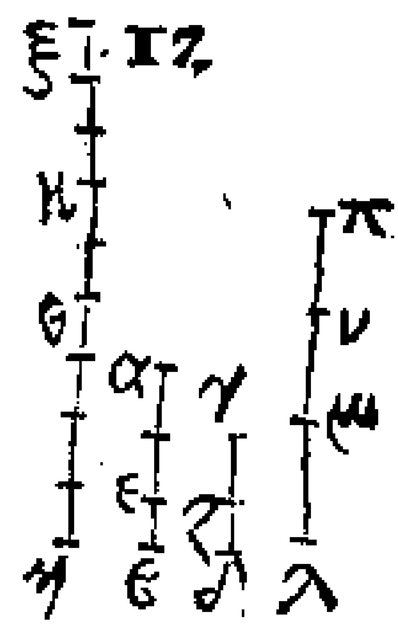
Iς

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

XVI.

Si quatuor magnitudines fuerint in proportione, etiam viciſſim in proportione erunt.

IZ

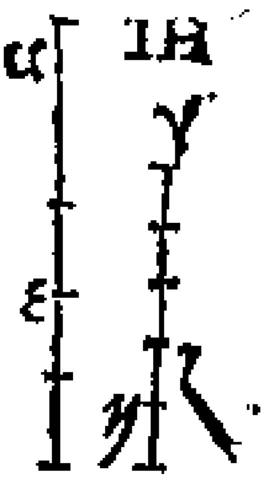


Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

XVII.

Si magnitudines compoſitæ fuerint in proportione, erunt in proportione & diuiſæ.

IH



Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

XVIII.

Si ma-

Si magnitudines diuisæ in proportione fuerint, erunt in proportione & composita.

ΙΘ

Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον, πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν, πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν, πρὸς τὸ λοιπὸν, ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

ΛΗΜΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ δὴ ἐδείχθη ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζδ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ. συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ αε, οὕτω τὸ γδ, πρὸς τὸ γζ, ἤπερ ὡς ἡγούμενον τὸ αβ, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ ἣν ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ εβ, καὶ ἔστιν ἀναστρέψαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται.

XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita se ablatum ad ablatum habuerit,

buerit, tum etiam reliquum ad reliquum, ita, quemadmodum totum ad totum se habebit.

LEMMA.

Cum autem demonstratum sit quemadmodum $\alpha\beta$, ad $\gamma\delta$, ita etiam se habere $\varepsilon\beta$, ad $\zeta\delta$, Ac vicissim vt $\alpha\beta$, ad $\beta\varepsilon$, sic $\gamma\delta$, quoque ad $\zeta\delta$, erunt iam magnitudines compositæ in proportione. Demonstratum autem est quemadmodum $\alpha\beta$, ad $\alpha\varepsilon$, ita se habere $\gamma\delta$, ad $\gamma\zeta$, (quippe cũ sit tanquam antecedens $\alpha\beta$, erga superationem suam qua superat cõsequens $\varepsilon\beta$,) atque eadem & inuersionis ratio est.

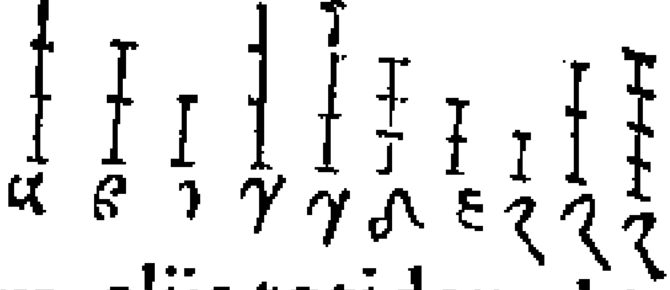
PORISMA.

Atque hinc fit manifestum, compositæ magnitudines, si in proportione fuerint, inuersas etiam in proportione fore.

K

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

K



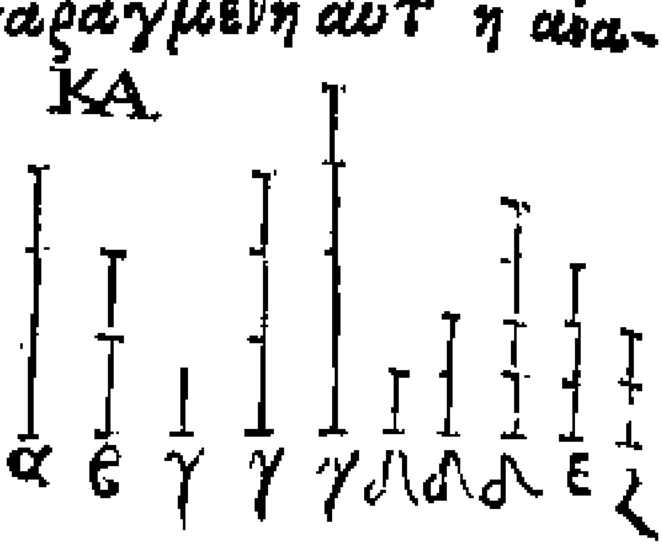
X X.

Si tres magnitudines, cum alijs totidem, binæ quæq; eiusdem rationis sumantur, & in ratione exæquationis, fuerit prima quam tertia maior, tam quarta etiã quam sexta maior erit, quod si illa illi par, etiam hæc par huic, sin minor, minor erit.

K A

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον, τοῦ ἕκτου, μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

KA



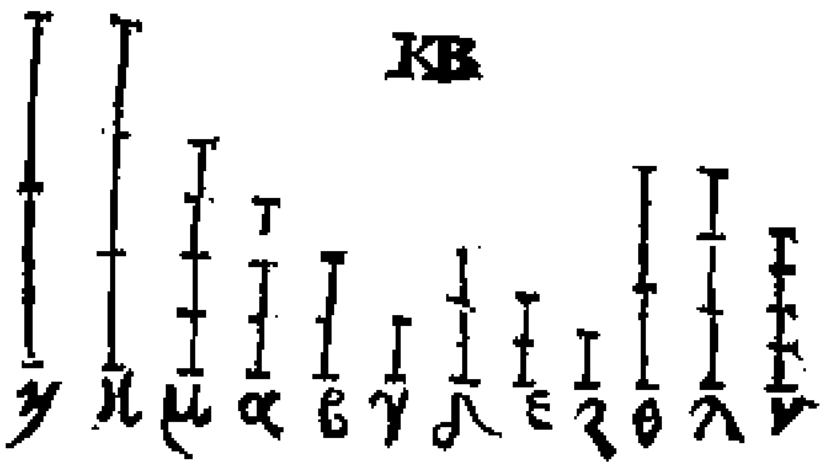
X X I.

Si tres magnitudines cum alijs totidem binæ quæq; eiusdem rationis, sumantur

ſumantur, & perturbata fuerit horum proportio, In ratione autem exæquationis maior prima quam tertia, tum & quarta maior quam ſexta erit. Sin illa illi par, hæc quoque par huic, ſin minor, minor erit.

KB

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ διίσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

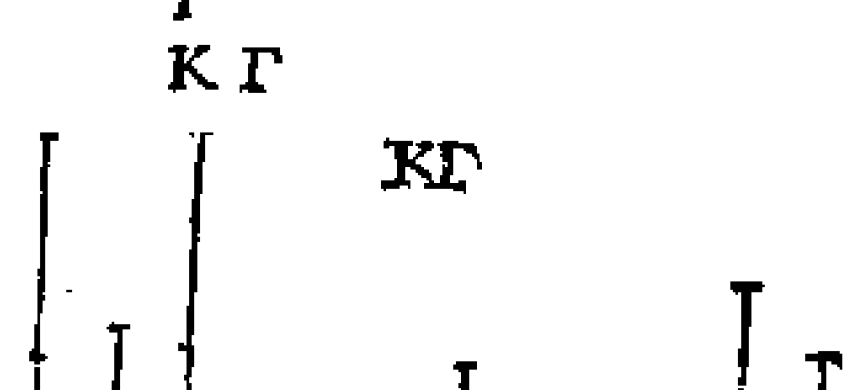


XXII.

Quotcunq; magnitudines cum alijs totidem, binæ quæque eiuſdem rationis, ſumantur, in ijs eadẽ quoq; exæquationis ratio erit.

KΓ

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ



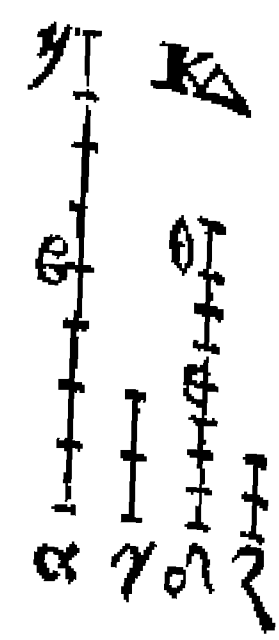
αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

XXIII.

Si fuerint maguitudines tres, & aliæ totidem, quarum binæ quæque eiuſdem rationis ſumantur, fueritq; harum proportio perturbata, tum in exæquationis quoq; proportione, eiuſdem rationis erunt.

ΚΔ

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ, καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.



XXIIII.

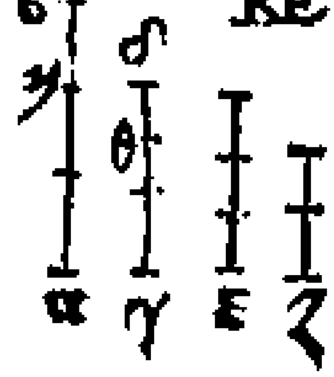
Cum primum ad ſecundum eandem rationem habuerit quam tertium ad quartum, cumque quintum ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam ſextum ad quartum, tum compoſitum quoq; primum ac quintum,

quintum, eandem rationem habebunt ad secundum, quam tertium ac sextum ad quartum.

KE

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη, ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον, καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστι.

KE



X X V.

Si fuerint quatuor magnitudines in proportione, tum harum duæ maxima & minima, reliquis maiores erunt.

FINIS LIBRI QVINTI ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ς.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM LIBER SEXTVS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

Α.

Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

I.

Figuræ rectarum linearum similes eæ ſunt, quæ angulos ſingulos ſingulis æquales, atq; etiam circum hos latera, in proportione habent.

Β

Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων, ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

II.

Sed

Sed figuræ retaliatæ ſunt, in quarum vtraq; tam antecedentes quam conſequentes rationes reperiuntur.

Γ

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον, εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

III.

Secundum extremam & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum quemadmodum tota ad ſegmentum maius, ita maius ad minus ſe habuerit.

Δ

Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, κάθετος ἀγομένη.

IIII.

Altitudo in quacunq; figura, eſt perpendiculum à vertice ad baſin deſcendens.

Ε

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα λόγον.

V.

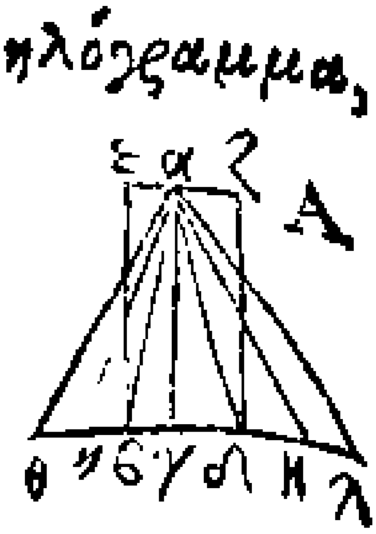
Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationũ quantitates multiplicatæ inter ſe aliquam effecerint.

ΠΡΟΤΑ'ΣΕΙΣ.

THEOREMATA VIII.

A

Τὰ τρίγωνα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

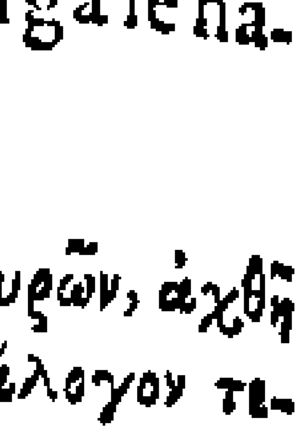


I.

Triquetræ, itemq; æquabilium linearum figuræ, ſubditæ eidem altitudini, ita ſe erga ſe habent, vt baſes ipſarum.

B

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν, ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ, τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ, ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν, παράλληλος.



Si ad

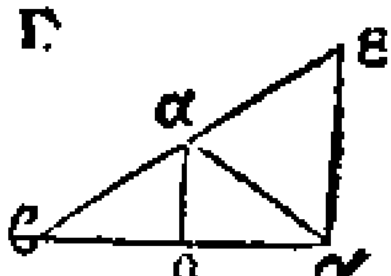
I I.

Si ad vnum trianguli latus ducta fuerit æquabiliter recta linea, secabit hæc proportione latera trianguli. Et si latera trianguli proportione secta fuerint, ea recta linea quæ ad sectiones adiungitur, ad reliquum trianguli latus æquabilitatem conseruabit.

Γ

Ἐὰν τριγώνου γωνία, δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν, εὐθεῖα, τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ταῖς λοιπαῖς, τοῦ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Γ

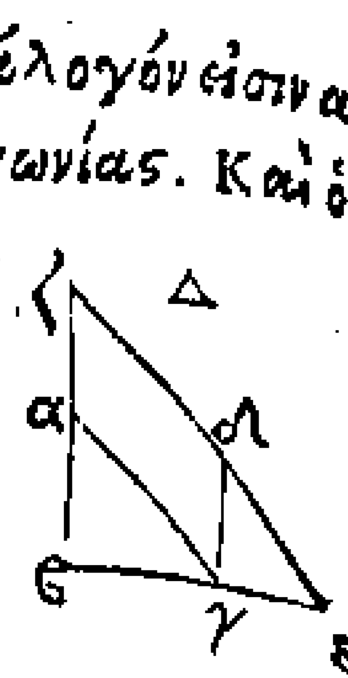


I I I.

Si trianguli in duas partes æquales sectus fuerit angulus, siq; eadem recta linea, quæ angulum secat, etiam basim secet, basis segmenta eandem rationem habebunt, quam reliqua latera trianguli. Et si hæc eandem rationem habuerint quam reliqua latera trianguli, linea recta quæ à vertice trianguli ad sectionem adiungitur, ea secat angulum illius in duas æquales partes.

Δ

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὁμόλογοι, αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας, ὑποτείνουσαι πλευραί.

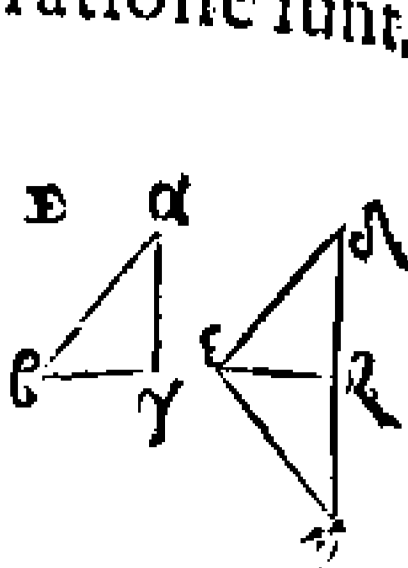


IIII.

Triangulorum æqualium angulorum, ea latera quæ æquales illos angulos includunt, in proportione, & latera quæ subter æquales illos angulos subtendunt, congruentia ratione sunt.

E

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



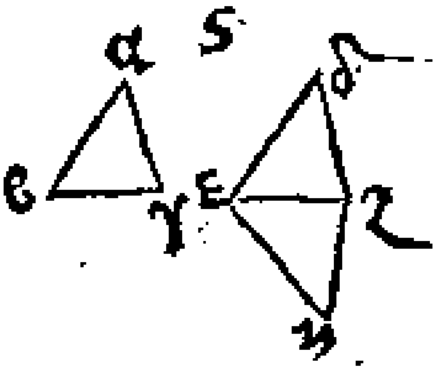
Cum

V.

Cum duo triangula in proportione latera habuerint, erunt æqualiũ angulorum illa triangula, habebuntque æquales eos angulos, subter quos congruentia ratione latera subtendunt.

ς

Ἐὰν δύο τρίγωνα, μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ, ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



V I.

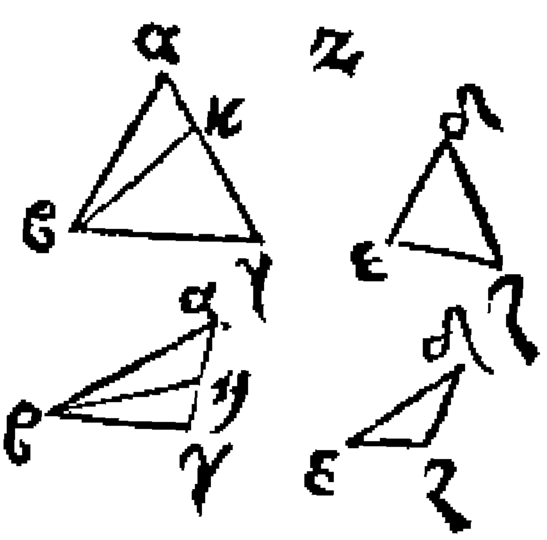
Cum duo triangula vnum angulũ vni æqualem, & includentia æquales angulos latera in proportione habuerint, erunt illa triangula æqualiũ angulorum, habebuntque æquales angulos eos, subter quos congruentia ratione latera subtendunt.

Z

Ἐὰν δύο τρίγωνα, μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ, ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας, τὰς

πλευρὰς

πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν, ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει, τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

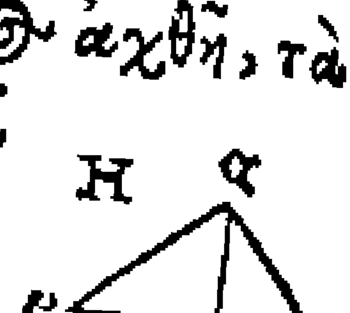


V I I.

Cum triangula duo vnum angulum vni æqualem, latera verò alios angulos includentia in proportione habuerint, reliquorũ autem vtrunque, aut ſimul minorem, aut non minorem recto, erunt illa triangula æqualium angulorum; habebuntq́; angulos æquales eos, circum quos ſunt in proportione latera.

H

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν, κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας

ἐπὶ

ἐπὶ τὴν βάσιν, κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, μέση ἀνάλογόν ἐστι, καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστι.

VIII.

Si in triangulo cum angulo recto ductum fuerit perpendiculum, ab angulo recto ad basim, ea quæ ad perpendiculum triangula ita designantur, cum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

ACQVISITVM.

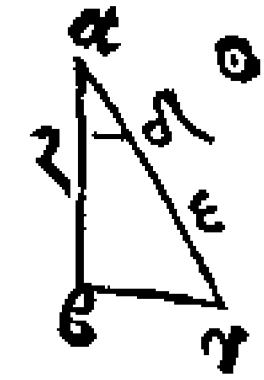
Ex demonstratione hac manifestum fit, si in triangulo cum recto angulo, ductum sit de recto angulo perpendiculum ad basim, quod ita deducti perpendiculi linea media futura sit proportione, ad segmenta basis: Quodque item ad basim & vtrunque segmentorum lateris adiuncta linea, media proportione futura sit.

PROBLEMATA V.

Τῆς

Θ

Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

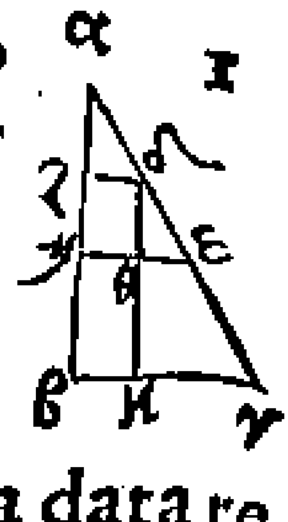


IX.

De data recta linea, pars imperata auferenda est.

I

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ, ὁμοίως τεμεῖν.

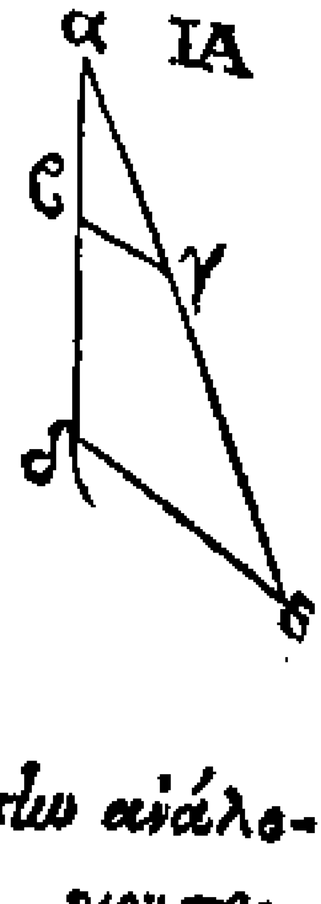


X.

Data linea recta integra similiter est secanda, vt alia data recta secta fuit.

IA

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



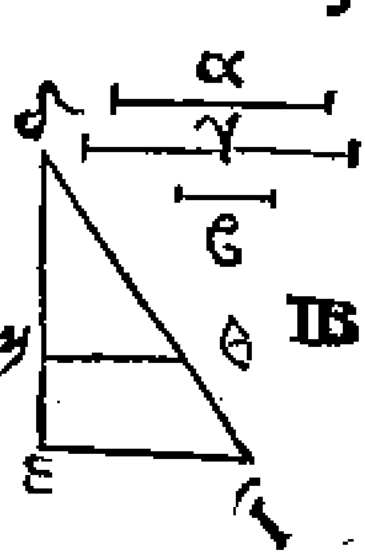
XI.

Duabus rectis lineis datis, tertia quæ in proportione sit ad has, inuenienda est.

IB

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλο-

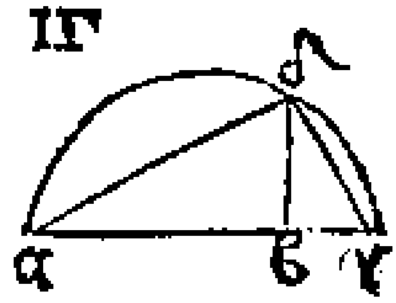
γον προγον προσευρεῖν.



XII.

Tribus rectis lineis datis, quarta quæ in proportione sit ad has, inuenienda est.

IΓ



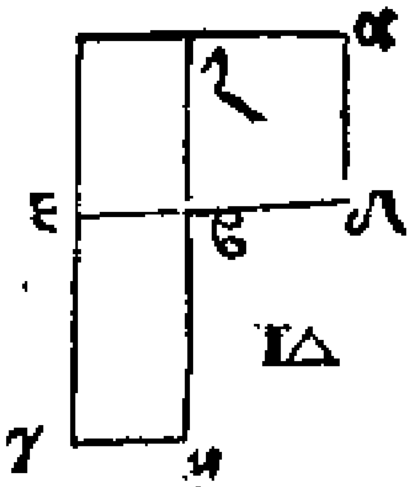
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον, προσευρεῖν.

XIII.

Duabus rectis lineis, media proportione ad has inuenienda est.

PROBLEMATA IIII.

IΔ



Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην, ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

In fi-

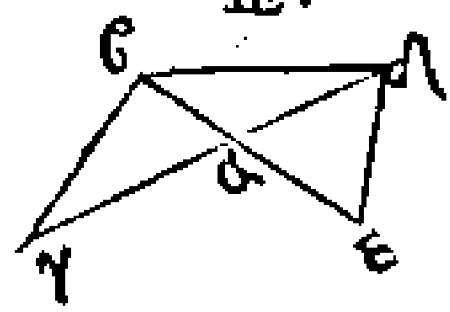
XIIII.

In figuris æqualibus & æquabiliū linearum, & in quibus angulus vnus vni æqualis est, retaliãtur latera ea, quæ iuxta æquales angulos sunt. Itemq́; in quib. figuris æquabilium linearum habentib. vnum angulum vni æqualem, latera ea quæ iuxta æquales angulos sunt retaliantur, eæ sunt æquales.

ΙΕ

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ, ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν μίαν μιᾷ, ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

·ΙΕ·



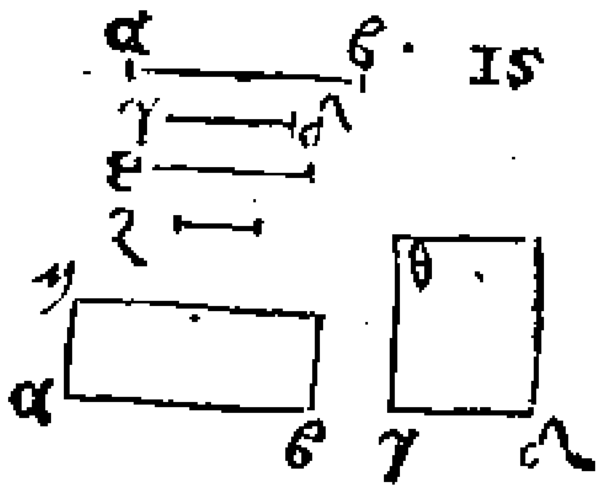
XV.

In triangulis æquabilibus, habentibus vnum angulum vni æqualem, retaliantur latera ea, quæ sunt iuxta angulos æquales. Et in quibus habentibus vnum angulum vni æqualem, latera retaliantur, ea quæ sunt

ſunt iuxta angulos æquales, illa æqualia ſunt.

Iϛ

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται.



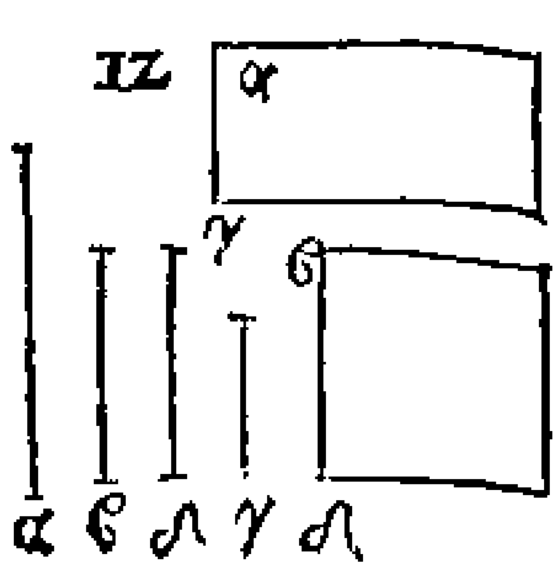
XVI.

Si rectæ lineæ quatuor in proportione ſint, illa figura, quam cum rectis angulis extremæ includunt, æqualis eſt ei, quam mediæ ſimiliter cum rectis angulis includunt. Itemque ſi rectorum angulorum figura incluſa ab extremis, æqualis fuerit figuræ rectorum angulorum, à medijs, incluſæ illæ quatuor rectæ lineæ in proportione, erunt.

IZ

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον, ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται.

IZ



XVII.

Si tres rectæ lineæ in proportione ſint, figura rectorum angulorum incluſa ab extremis, æqualis eſt quadrato ad mediam deſcripto. Itemq́; ſi figura rectorum angulorum incluſa ab extremis, æqualis fuerit quadrato ad mediam deſcripto, illæ tres lineæ rectæ in proportione erunt.

PROBLEMA I.

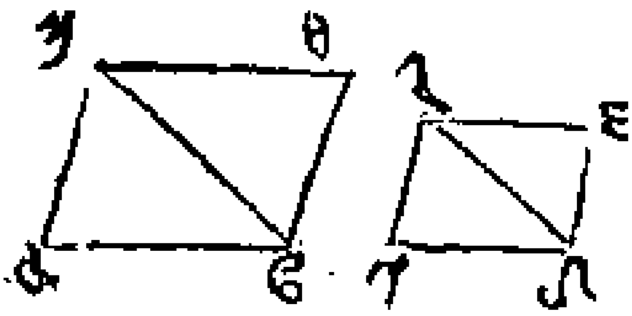
IH

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύ-

εὐθύγραμ-

εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

IH.



XVIII.

De data linea recta, datæ figuræ cum lineis rectis, similis figura cum rectis lineis & similiter sita, describenda est.

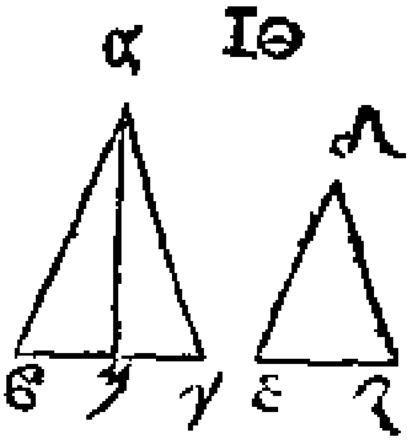
THEOREMATA VI.

IΘ

Τὰ ὅμοια τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

IΘ



Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ γ β, πρὸς τὴν β η, οὕτω τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ α β η, τρίγωνον, τουτέστι τὸ δ ε ζ.

XIX.

Similia triangula inter se, duplo

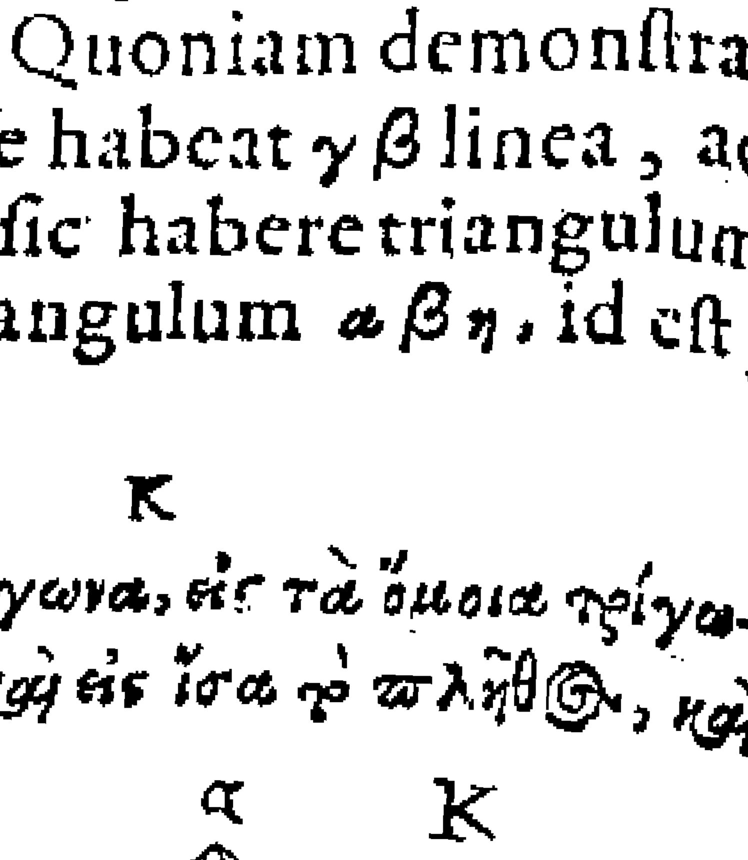
maiora in ratione sunt, quam latera congruentia ratione.

ACQVISITVM.

Ex demonstratione fit manifestum, quod tribus rectis lineis in proportione collocatis, quomodo se habuerit prima ad tertiam, ita se habiturum triangulum de prima descriptum, ad triangulum de secunda, simile illud quidem & similiter descriptum. Quoniam demonstratum fuit, vt se habeat $\gamma\beta$ linea, ad lineam $\beta\eta$, sic habere triangulum $\alpha\beta\gamma$. ad triangulum $\alpha\beta\eta$, id est, $\delta\epsilon\zeta$.

K

Τὰ ὅμοια πολύγωνα, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα, τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.



ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ Β.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ περὶ τῶν τριγώνων, ὥστε καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα, πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ ἐὰν τῶν α β, ζ η, τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν ξ, ἡ β α, πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν ζ η, ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ α β, πρὸς τὴν ζ η, ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων.

Ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

X X.

Figuræ plurium angulorum ſimiles, in triangula & ſimilia, & numeroparia, & congruentia ratione ad totas, diuiduntur, figuræq; plurium angulorum duplo maiore in ratione sunt, quam est latus ratione congruens ad alterum ratione congruens latus.

ACQVISITA DVO.

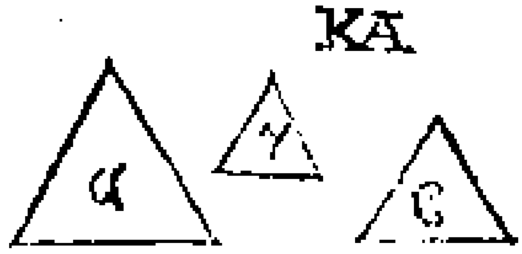
Pariter & in similibus figuris laterum quatuor, demonstrari poterit, esse illas in ratione duplo maiore quam latera ratione congruentia. Idque iam est in triangulis demonstratū, quare generaliter figuræ rectarum linearum in ratione erunt duplo maiore, quam latera ratione congruentia. Ac si capiatur linearū $\alpha\beta$, $\zeta\eta$, tertia quæ in proportione sit ξ habebit linea $\beta\alpha$, ad ξ, duplo maiorem rationem quam $\alpha\beta$, ad $\zeta\eta$. Habet autem & figura angulorum plurium, ad figuram alteram talem, & figura quatuor laterum ad alteram quatuor laterum figuram, duplo rationem maiorem, quam latus congruens cum congruente, hoc est, quam $\alpha\beta$, ad $\zeta\eta$. Idque & in triangulis demonstratum fuit.

Quare

Quare generaliter manifestum fit, si sint tres rectæ lineæ in proportione, quomodo se habuerit prima ad tertiam, ita se habituram figuram de prima, ad figuram de secunda similem & similiter descriptam.

KA

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

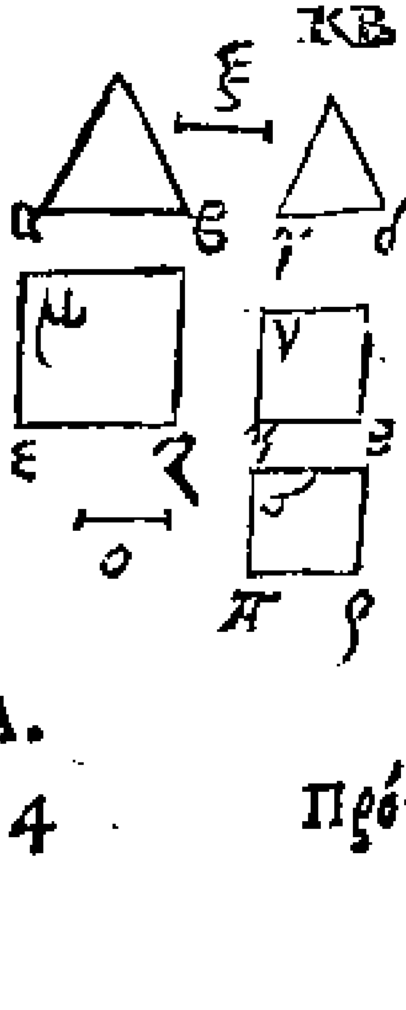


XXI.

Quæ sunt similia vni & eidem figuræ rectarum linearum, hæc & inter se similia sunt.

KB

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται.



ΛΗΜΜΑ.

Πρόσκειται ἐνταῦθα δεῖξις λήμματος τοιοῦδε. ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλοις εἰσί.

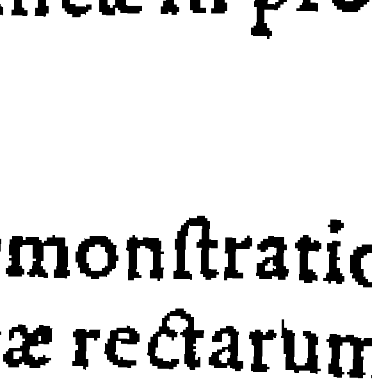
XXII.

Si quatuor rectæ lineæ in proportione fuerint, rectarum linearum quoque figuræ ſimiles, & de his ſimiliter deſcriptæ in proportione erunt. Cumque de rectis lineis ſimiles rectarum linearum figuræ ſimiliter deſcriptæ in proportione fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ in proportione erunt.

LEMMA.

Ad hanc additur demonſtratio talis λήμματος. Si figuræ rectarum linearum æquales & ſimiles fuerint, latera etiam ipſarum ratione congruentia, inter ſe æqualia erunt.

ΚΓ



Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

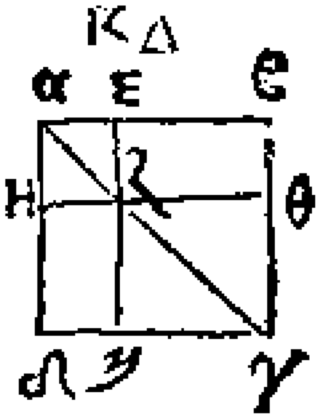
XXIII.

Figuræ

Figuræ æquabilium linearum cũ angulis æqualibus, rationem habent inter se, eam quæ de lateribus componitur.

ΚΔ

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.



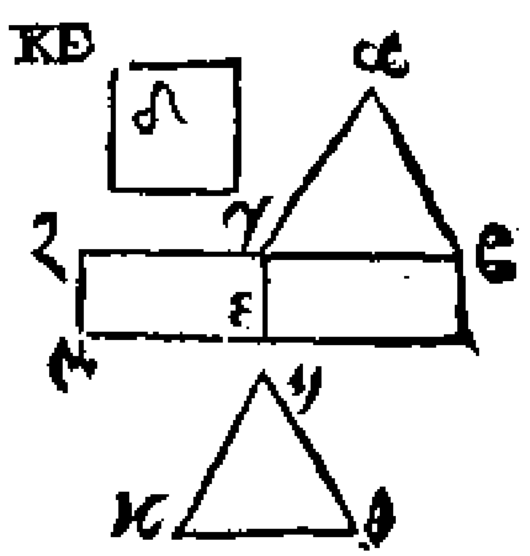
XXIIII.

In omni figura æquabilium linearum, figuræ æquabilium linearum circum diametri lineam descriptæ, tam toti, quam ipsæ inter se similes sunt.

PROBLEMA I.

ΚΕ

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.



XXV.

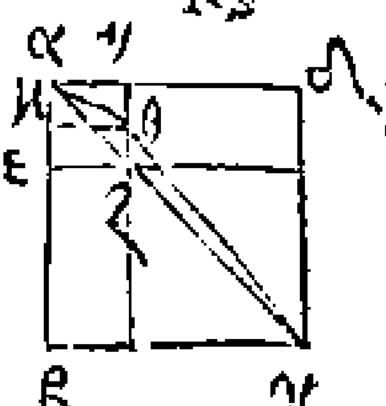
Datæ rectarum linearum figuræ similis, eademq́ue alteri datæ æqualis constituenda est.

THEOREMATA II.

ΚϚ

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

ΚϚ



XXVI.

Si à figura æquabilium linearum figura auferatur linearum & ipsa æquabilium, quæ & sit illi similis & similiter collocata, habeatq́; cum ea angulum communem, Hæc igitur est circa diametri lineam eandem circum quam tota.

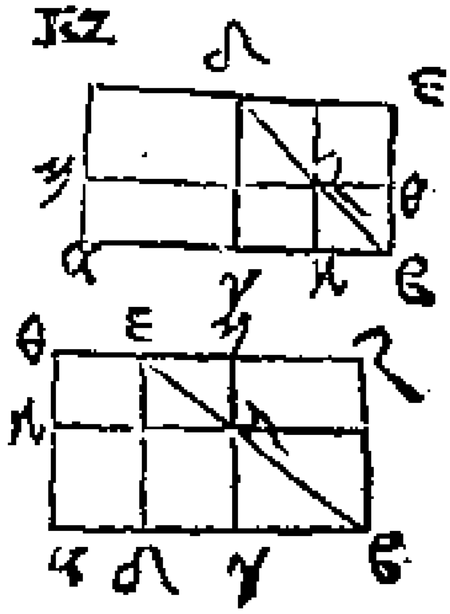
ΚΖ

Πάντων, τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε, καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι,

τὸ ἀπὸ

τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας πα-
ραβαλλόμενον παραλλη-
λόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ
ἐλλείμματι.

ΚΖ



XXVII.

Quotcunq; æquabilium linearum figuræ ad eandem lineam rectam conferantur, deficientes illæ quidem generibus figurarum æquabilium ei quod ad dimidiatam illam lineam deſcribitur ſimilibus & ſimiliter collocatis: Harum igitur omnium, maxima eſt collata æquabilium linearum figura, quæ deſcribitur ad illius lineæ dimidium, quæq́ue ſimilis ſit deficienti.

PROBLEMATA III.

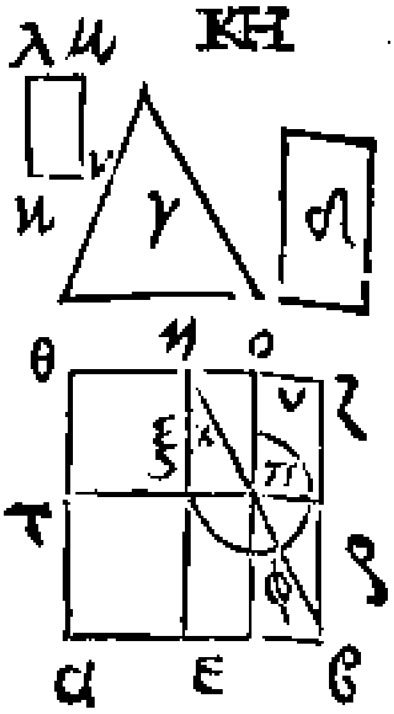
ΚΗ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει, παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον

εὐθύ-

εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ, ὅμοιον ἐλλείπειν.

ΚΗ



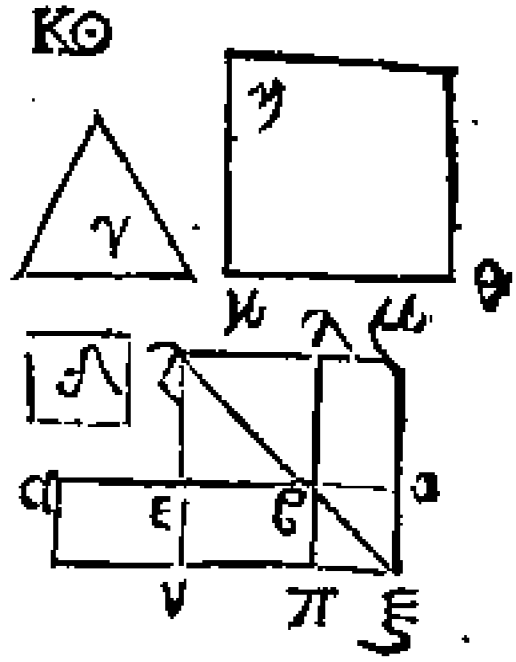
XXVIII.

Ad datam lineam rectam, conferenda eſt datæ figuræ rectarum linearum æqualis, æquabilium figura, genere figurarum æquabilium deficiens, quod ſimile ſit figuræ datæ. Verum rectarum linearum figuram quæ datur cuique æqualis illa conferenda eſt, non maiorem eſſe oportet, eo quod deſcriptum ad illam dimidiatam lineam confertur, ita vt deficientia etiam ſimilia ſint, tam illud quod ad dimidiatam lineam deſcribitur, quam quo deficere ſimile debet.

ΚΘ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, παραβα-

παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει, παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

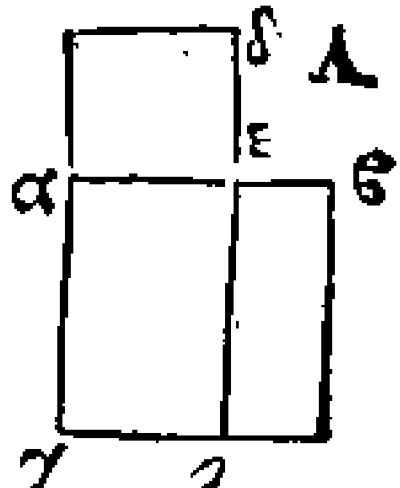


XXIX.

Ad datam rectam lineam figuræ recta rum linearũ datæ, conferenda est æquabilium linearum figura æqualis, quæ excedat genere æquabilium linearum simili quodam alteri dato.

Λ

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



XXX.

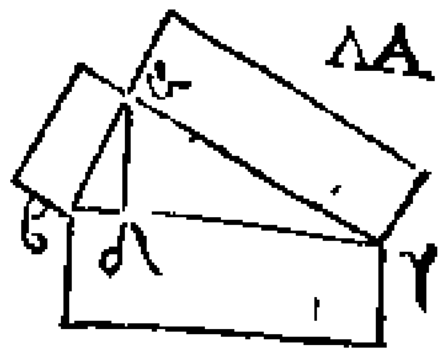
Data seu proposita linea recta, ratione extrema ac media secanda est.

THEOREMATA III.

ΛΑ

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς, τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος

εἶδος, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν, τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις, καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

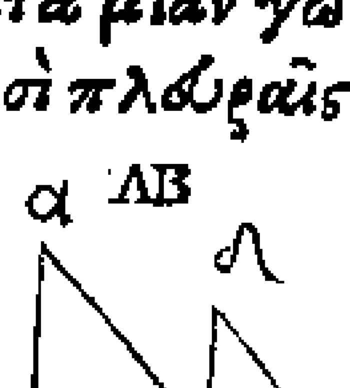


XXXI.

In triquetris angulorum rectorum, quodcunq; genus de latere subtendente angulum rectum fuerit descriptum, id æquale est, generibus ad latera rectum angulum includentia similibus & similiter descriptis.

ΛΒ

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε, τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς, καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ, ἐπ' εὐθείας ἔσονται.



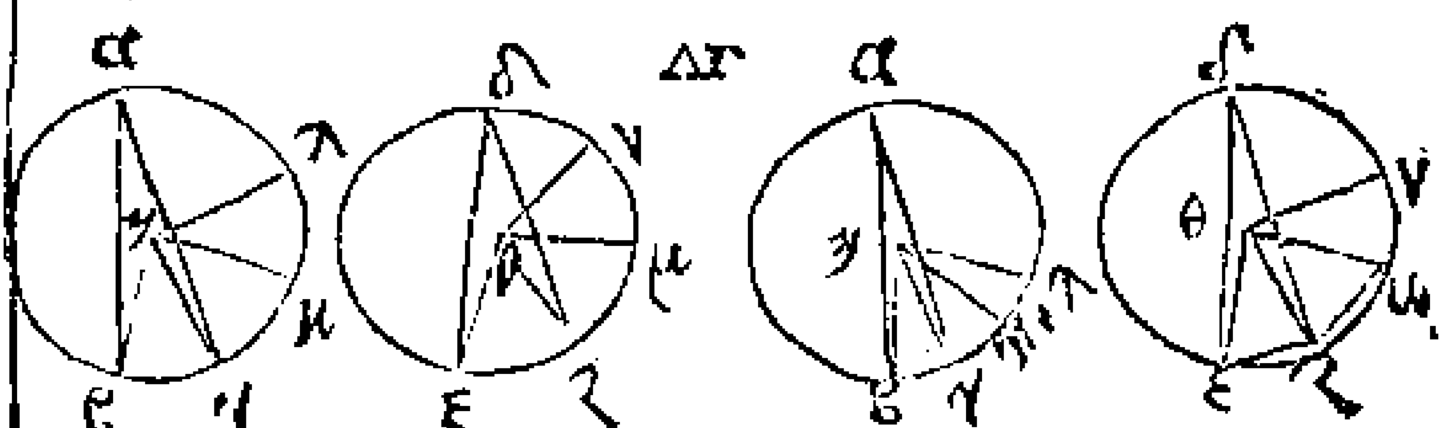
XXXII.

Cum triangula duo secundum angulum vnum composita fuerint, ita vt duo duobus laterib. proportione respondeant, vtq; congruentia ratione

tione latera æquabilitatem conſeruent, tum reliqua triangulorum latera ſuper linea recta reperientur.

ΛΓ

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις, ὦσι βεβηκυῖαι. Ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δῆλόν ἐστιν, ὅτι ὡς ὁ τομεὺς ἔχει πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

XXXIII.

In circulis æqualibus, eadem ratio angulorum eſt, quæ linearũ ambitus quas obeunt, ſiue centra forte, ſeu lineas ambientes obiecerint, Iti-

demq;

demq; ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

ACQVISITVM.

Ex his manifeſtum eſt, quod, ſicut ſe habet ſector ad ſectorem, ita ſe habeat angulus ad angulum.

FINIS SEXTI LIBRI ELEmentorum Geometricorum Euclidis.

LIPSIAE,

IMPRIMEBAT IOHANNES STEINMAN.

Anno

M. D. LXXVII.