

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com



Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque nationale de France

* = ων

π = ραμμων

ρπ = δηρείον

χ = κατὰ
ρπια ραμῖα

π = οὐ

χ = ων

π = ὦν

π = ον

π = οὐ

γ = ων

π = ὦ

π = ὦς

π = τω

π = ραμμ

π = τιν

π = ἦν

π = περιφέραι

χ = ον

κον = κούρον

κ = κένου

αλχ = ἀλήλων

π = ἐδῖν

σα = περιφέρειν

π = τω

π = ὁραμῖ

π = οὐς

δ = οὐς

π = οἶ

π = ὦ

π = τω

π = ως

π = σ

π = ὦς

π = κατὰ

π = μεν

παπ = πάλιν

γ = ων

ππ = ὦς

π = γίνεσθαι

Paris

me Provence, mardi 25,

Monsieur Legendre

Monsieur

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ { L'ASTEUR, rue de Provence, n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17 ;
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24 ;
RAY et GRAVIER, quai des Augustins.
Madame veuve COURCIER, rue du Jardinnet, n° 12.

LES OEUVRES
D'EUCLIDE,
EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

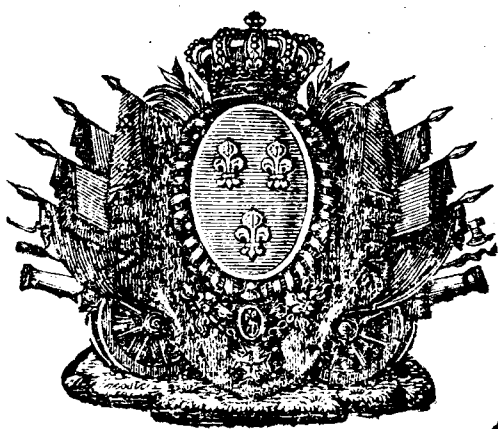
TRADUCTEUR DES OEUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME TROISIÈME.

V
706.
5.



A PARIS,

CHEZ C. F. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

~~~~~  
1818.



# PRÉFACE.

---

# P R Æ F A T I O.

---

Hoc tertium ultimumque volumen continet libros XI, XII, XIII Elementorum Dataque Euclidis, necnon duos libros de quinque Corporibus qui Hypsicli adscripti sunt.

Euclidis operibus duos Hypsiclis libros ideo adjeci, ut a veteri consuetudine non recederem. Neque tamen negaverim eo commendari priorem quod sit quoddam antiquæ geometriæ monumentum; quod ad alterum attinet, longe aliter sentire me fateor. Etenim demonstrationes hujus libri incompletæ sunt, et in illis severitas ac elegantia desiderantur; itaque censeo non solum hos libros eidem non esse adscribendos, verum etiam alterum altero esse multo antiquiorem.

Hoc volumen comprehendit permultas lectiones varias majoris minorisve pretii, quas cuique, attento animo, perpendere licebit.

Lectio varia propositionis I undecimi libri simpliciter eleganterque ostendit, si duæ rectæ partem communem habeant, illas inter se congruere. Hæc propositio quæ corollarium esse posset propositionis XIV primi libri, collocata est a Proclo in axiomatibus cum demonstratione consimili demonstrationi hujus lectionis variæ quam non admisi.

Propositio XVII duodecimi libri, una ex iis quæ sunt maximi momenti, incompleta huc usque habebatur ex alinea paginæ 196 usque ad corollarium paginæ 205. In notâ quæ est in infimâ paginâ 200 ostendi hanc demonstrationem esse completam in omnibus suis partibus, figuram autem omnino esse inconditam.

Si quis dicat Archimedes pervenisse directius ad scopum, qui erat inventio rationis duarum sphaerarum magnitudine inæqualium, fateor equidem. Etenim ex eo quod Archimedes demonstravit sphaeras æquales esse duabus tertiis partibus cylindrorum circumscriptorum, manifestum est sphaeras inter se esse ut cubi suarum diametrorum.



---

# P R É F A C E.

---

**C**E troisième et dernier volume renferme les livres XI, XII, XIII des Éléments, et les Données d'Euclide, ainsi que les deux livres des cinq Corps attribués à Hypsicle.

Si j'ai joint aux Oeuvres d'Euclide les deux livres attribués à Hypsicle, c'était pour me conformer à l'usage établi. Je ne veux pas dire pour cela que le premier livre ne soit un monument précieux de la géométrie ancienne. Quant au second, il en est tout autrement : les démonstrations de ce livre sont incomplètes, sans rigueur et sans élégance ; ce qui me porte à croire que non-seulement ces deux livres ne sont pas du même auteur, mais encore que l'un est beaucoup plus ancien que l'autre.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes plus ou moins précieuses. Je laisse au lecteur le soin de les apprécier à loisir.

La variante 4 de la proposition I du onzième livre, démontre d'une manière simple et élégante que deux droites ne peuvent pas avoir une partie commune sans se confondre. Cette proposition, qui pourrait être un corollaire de la proposition XIV du premier livre, est placée par Proclus au nombre des axiomes, avec une démonstration semblable à celle de cette variante que je n'ai pas adoptée.

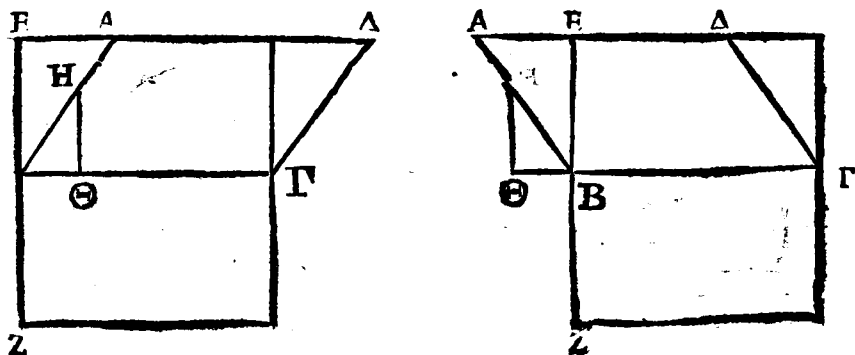
La proposition XVII du douzième livre, qui est une des plus importantes d'Euclide, avait été regardée comme incomplète jusqu'à présent, à partir de l'alinéa de la page 196, jusqu'au corollaire de la page 205. J'ai fait voir dans une note placée au bas de la page 200, que cette démonstration était complète dans toutes ses parties, et que tout l'embarras ne provenait que d'une figure mal construite.

On pourrait peut-être dire qu'Archimède est arrivé plus directement au but, qui est de démontrer le rapport de deux sphères d'inégale grandeur ; cela est très-vrai. En effet, Archimède ayant démontré que les sphères sont égales aux deux tiers des cylindres circonserits, il suit évidemment de là que les sphères sont entre elles comme les cubes de leurs diamètres.



Sed mihi liceat adnotare Euclidem non potuisse ad propositum suum pervenire eadem viâ quâ Archimedes, ni usus fuisset quatuor principiis vel postulatis quæ adsunt in principio libri primi de sphaerâ et cylindro; atqui Euclides non admiserat hæc quatuor postulata. Quapropter Euclides, qui demonstravit circulos inter se esse ut quadrata suarum diametrorum, non demonstravit circumferentias circulorum inter se esse ut suæ diametri, et circulum æqualem esse triangulo cujus basis æqualis est circumferentiæ, et altitudo æqualis radio; oportuisset enim ob eam rem ut Euclides admisisset, sicut et Archimedes, summam duarum tangentium ab eodem puncto ductarum majorem esse arcu ab iis comprehenso, etc.

Propositio LXXXVI datorum, quæ est LXXXVII editionis meæ, doctissimum virum Gregory non leviter intricaverat. Ille in suâ dicit præfatione hoc theorema esse pervalde vitiatum, et se non potuisse illud restituere ope manuscriptorum. Existimo ejus errorem ortum fuisse ex eo quod non noscebat lemma illud quod subsequitur propositionem LXXXVI meæ editionis, et quod hîc modo non planè simili exponam.



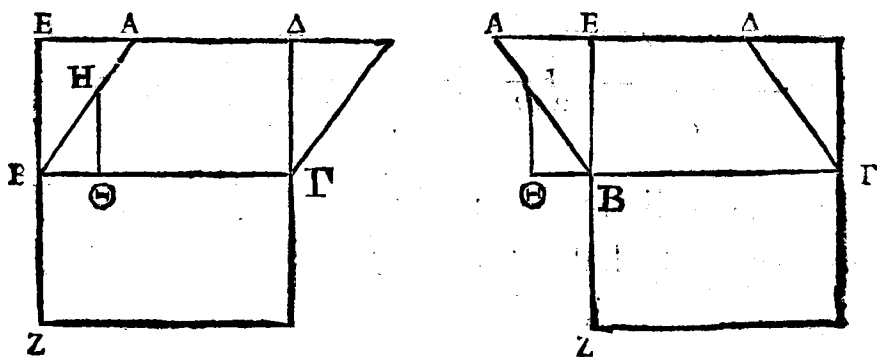
Sit parallelogrammum  $AF$ ; per punctum  $B$  ducatur recta  $EZ$  perpendicularis ad  $BF$ ; producat ipsa  $\Delta A$ ; ponatur  $BZ$  æqualis ipsi  $BA$ ; compleantur rectangula  $FE$ ,  $FZ$ , et a quovis puncto  $H$  ipsius  $AB$  ducatur  $H\Theta$  perpendicularis ad  $BF$ . Ergo ut parallelogrammum  $FA$ , hoc est rectangulum  $FE$  ad rectangulum  $FZ$  ita erit  $BE$  ad  $BZ$ . Ut autem  $BE$  ad  $EZ$ , hoc est  $BE$  est ad  $BA$ , ita sinus  $H\Theta$  anguli  $ABF$  ad radium  $BH$ ; ut igitur parallelogrammum  $FA$  ad rectangulum  $FZ$  ::  $\sin. ABF : R$ . Ex hoc manifestum est quæcumque sint longitudines laterum  $AB$ ,  $BF$  parallelogrammi  $AF$ , rectangulum  $ZF$  datum fore magnitudine, quamdiu angulus  $ABF$  idem manebit, et quamdiu parallelogrammum  $AF$  non desinet esse æquale superficiei datæ.

## PRÉFACE.

v

Mais qu'il me soit permis de faire observer qu'Euclide ne pouvait arriver à son but par la même voie qu'Archimède, sans faire usage des quatre principes ou demandes qui se trouvent à la tête du premier livre de la sphère et du cylindre ; or Euclide n'admettait pas ces quatre demandes. Voilà pourquoi Euclide, qui a démontré que les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres, n'a pas démontré que les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres, et que le cercle est égal à un triangle ayant pour base une droite égale à la circonférence, et pour hauteur une droite égale au rayon ; car il aurait fallu pour cela qu'Euclide eût admis, comme Archimède, que la somme de deux tangentes qui partent du même point, est plus grande que l'arc qu'elles embrassent, etc.

La proposition LXXXVI des données, qui est la LXXXVII de mon édition, avait singulièrement embarrassé Grégory. Il dit dans sa préface que ce théorème est grandement vicié, et qu'il n'a pu le rétablir à l'aide des manuscrits. Je pense que son erreur provenait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve après la proposition LXXXVI de mon édition, et que je vais exposer d'une manière un peu différente.



Soit le parallélogramme AR ; par le point B menons la droite EZ perpendiculaire à BR, prolongeons ΔA ; faisons BZ égal à BA ; achevons les rectangles TE, TZ, et d'un point H quelconque de AB menons HΘ perpendiculaire à BR. Le parallélogramme TA, c'est-à-dire le rectangle TE sera au rectangle TZ comme BE est à BZ. Mais BE est à BZ, c'est-à-dire BE est à BA comme le sinus HΘ de l'angle ABR est au rayon BH ; le parallélogramme TA est donc au rectangle TZ ::  $\sin. ABR : R$ . D'où il suit que, quelles que soient les longueurs des côtés AB, BR du parallélogramme AR, le rectangle TZ sera donné de grandeur, tant que l'angle ABR restera le même, et que le parallélogramme AR ne cessera pas d'être égal à une surface donnée.

III.

b

Hæc est solutio algebraica theorematis LXXXVII, quod quidem in nullâ suarum partium vitiatum erat.

Duæ rectæ  $x$ ,  $y$  contineant superficiem datam  $c^2$ , in angulo dato  $B$ , et sit ut quadratum  $x^2$  præter superficiem datam  $a^2$  ad  $y^2$  ita recta data  $m$  ad rectam datam  $n$ ; dico rectas  $x$ ,  $y$  datas fore.

Inveniemus superficiem æqualem rectangulo sub rectis  $x$ ,  $y$  contento, ope hujus proportionis,  $\sin. B : R :: c^2 : \frac{R \times c^2}{\sin. B}$ ;

Ponatur quadratum  $b^2$  æquale rectangulo  $\frac{R \times c^2}{\sin. B}$ ;

Fiet  $xy = b^2$ .

Sed  $x^2 - a^2 : y :: m : n$ ;

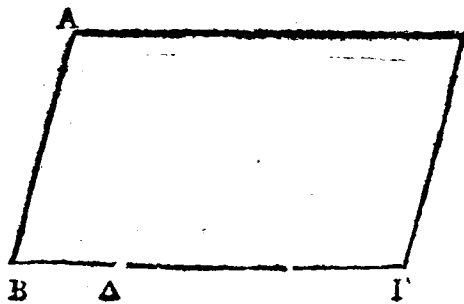
Ergo  $nx^2 - na^2 = my^2$ .

His duabus æquationibus resolutis, invenietur,

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} + \sqrt{\frac{4mb^4 + na^4}{4n}}$$

$$y = \sqrt{-\frac{na^2}{2m}} + \sqrt{\frac{4mn b^4 + n^2 a^4}{4m^2}}$$

Talis est algebrae agendi modus; hic autem Euclidis. Utar signis abbreviatoribus nostris, ut pro certo habeatur eorum utilitas in comprehendendis arduis quæstionibus antiquæ geometriæ.



Ponatur rectangulum  $B\Gamma \times B\Delta$  æquale superficiem datæ  $a^2$ . Quoniam  $B\Gamma^2 = B\Gamma \times B\Delta + B\Gamma \times \Delta\Gamma$ ; ergo  $B\Gamma^2 - a^2 = B\Gamma^2 - B\Gamma \times B\Delta = B\Gamma \times \Delta\Gamma$ .

Sed  $B\Gamma^2 - a^2 : AB^2 :: m : n$ ;

Ergo (A)  $B\Gamma \times \Delta\Gamma : AB^2 :: m : n$ .

# PRÉFACE.

vij

Voici à présent la solution algébrique du théorème LXXXVII, qui certes n'était vicié dans aucune de ses parties.

Que deux droites  $x, y$  comprennent une surface donnée  $c^2$ , dans un angle donné  $B$ , et que  $x^2$  moins une surface donnée  $a^2$  soit à  $y^2$  comme une droite donnée  $m$  est à une droite donnée  $n$ ; je dis que les droites  $x, y$  seront données.

Pour avoir la surface égale au rectangle sous les droites  $x, y$ , je fais cette proportion,  $\sin. B : R :: c^2 : \frac{R \times c^2}{\sin. B}$ .

$$\text{Que } b^2 = \frac{R \times c^2}{\sin. B};$$

$$\text{On aura } xy = b^2.$$

$$\text{Mais } x^2 - a^2 : y^2 :: m : n;$$

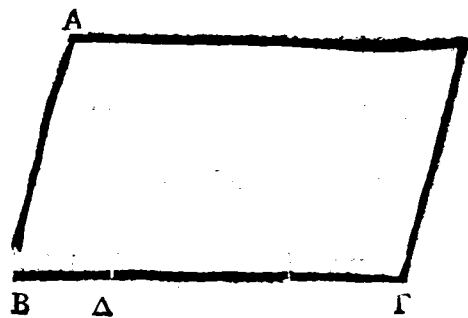
$$\text{Donc } nx^2 - na^2 = my^2.$$

Résolvant ces deux équations, on trouvera

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{4mb^4 + na^4}{4n}}}$$

$$y = \sqrt{-\frac{na^2}{2m} + \sqrt{\frac{4mn b^4 + n^2 a^4}{4m^2}}}$$

Tel est le procédé de l'algèbre; voici celui d'Euclide. J'emploierai nos signes abrégatifs, pour faire sentir combien ils sont propres à faciliter l'intelligence des questions difficiles de la géométrie ancienne.



Supposons que le rectangle  $B\Gamma \times B\Delta$  soit égal à la surface donnée  $a^2$ . Puisque  $B\Gamma^2 = B\Gamma \times B\Delta + B\Gamma \times \Delta\Gamma$ , on aura  $B\Gamma^2 - a^2 = B\Gamma^2 - B\Gamma \times B\Delta = B\Gamma \times \Delta\Gamma$ .

$$\text{Mais } B\Gamma^2 - a^2 : AB^2 :: m : n;$$

$$\text{Donc (A) } B\Gamma \times \Delta\Gamma : AB^2 :: m : n.$$

Sed rectangulum  $AB \times BF$  datum est (lemma), nec non rectangulum  $BF \times BA$ ; ratio igitur ipsius  $AB \times BF$  ad ipsum  $BF \times BA$  data est. Sit autem ratio ipsius  $AB \times BF$  ad  $BF \times BA$  eadem quæ ratio ipsius  $m$  ad  $o$ ;

$$\text{Ergo } AB \times BF : BF \times BA :: m : o.$$

$$\text{Sed } AB \times BF : BF \times BA :: AB : BA;$$

$$\text{Ergo } AB : BA :: m : o;$$

$$\text{Ergo } AB^2 : BA^2 :: m^2 : o^2 :: m : p.$$

$$\text{Sed } BF \times \Delta F : AB^2 :: m : n (A);$$

$$\text{Ergo } BF \times \Delta F : BA^2 :: m^2 : n \times p :: m : q;$$

$$\text{Ergo } 4 BF \times \Delta F : BA^2 :: 4 m : q;$$

$$\text{Ergo } 4 BF \times \Delta F + BA^2 : BA^2 :: 4 m + q : q :: m^2 : s^2.$$

$$\text{Sed } 4 BF \times \Delta F + BA^2 = (BF + \Delta F)^2 \text{ (lib. II, prop. VIII);}$$

$$\text{Ergo } (BF + \Delta F)^2 : BA^2 :: m^2 : s^2;$$

$$\text{Ergo } BF + \Delta F : BA :: m : s;$$

$$\text{Ergo } BF + \Delta F + BA, \text{ c'est-à-dire } 2 BF : BA :: m + s : s;$$

$$\text{Ergo (B) } BF : BA :: \frac{m + s}{2} : s :: m^2 : t^2.$$

$$\text{Sed } BF : BA :: BF \times BA : BA^2;$$

$$\text{Ergo (C) } BF \times BA : BA^2 :: m^2 : t^2.$$

Sed ipsum  $BF \times BA$  datum est; ipsum igitur  $BA^2$  datum est; recta igitur  $BA$  est data; quare et ipsa  $BF$  data est. Sed ipsum  $AB \times BF$  est datum, nec non angulus  $B$ ; quare et ipsa  $AB$  est data; rectæ igitur  $AB$ ,  $BF$  datæ sunt.

Ex hoc manifestum est nos habituros esse valores rectarum incognitarum  $AB$ ,  $BF$  ope duarum proportionum  $B$  et  $C$ . Etenim si, in proportionem  $C$ , substituamus superficiem datam  $a^2$  pro rectangulo  $BF \times BA$ , habebimus  $BA = \frac{at}{m}$ , et si substituamus hunc valorem ipsius  $BA$ , in proportionem  $B$ , habebimus  $BF = \frac{am}{t}$ .

Ex libris Hypsiclis, complures mendas crassissimas et solo ictu oculorum evidentissimas eieci, quæ tamen in tribus codicibus 190, 2542, 2545\*, et in editionibus Basilicæ Oxoniæque reperiuntur. (Vide Lectiones varias.)

\* Hi tres codices, codice 2542 excepto, defectuosi sunt et lacunis scatentes.

Mais le rectangle  $AB \times BF$  est donné (lemme), ainsi que le rectangle  $BF \times BA$ ; la raison de  $AB \times BF$  à  $BF \times BA$  est donc donnée. Que la raison de  $AB \times BF$  à  $BF \times BA$  soit la même que celle de  $m$  à  $o$ ,

On aura  $AB \times BF : BF \times BA :: m : o$ .

Mais  $AB \times BF : BF \times BA :: AB : BA$ ;

Donc  $AB : BA :: m : o$ ;

Donc  $AB^2 : BA^2 :: m^2 : o^2 :: m : p$ .

Mais  $BF \times \Delta F : AB^2 :: m : n$  (A);

Donc  $BF \times \Delta F : BA^2 :: m^2 : n \times p :: m : q$ ;

Donc  $4 BF \times \Delta F : BA^2 :: 4 m : q$ ;

Donc  $4 BF \times \Delta F + BA^2 : BA^2 :: 4 m + q : q :: m^2 : s^2$ .

Mais  $4 BF \times \Delta F + BA^2 = (BF + \Delta F)^2$  (liv. II, prop. VIII);

Donc  $(BF + \Delta F)^2 : BA^2 :: m^2 : s^2$ ;

Donc  $BF + \Delta F : BA :: m : s$ ;

Donc  $BF + \Delta F + BA$ , c'est-à-dire  $2 BF : BA :: m + s : s$ ;

Donc (B)  $BF : BA :: \frac{m + s}{2} : s :: m^2 : t^2$ .

Mais  $BF : BA :: BF \times BA : BA^2$ ;

Donc (C)  $BF \times BA : BA^2 :: m^2 : t^2$ .

Mais  $BF \times BA$  est donné;  $BA^2$  est donc donné aussi; la droite  $BA$  est donc donnée; la droite  $BF$  est donc donnée aussi. Mais  $AB \times BF$  est donné, ainsi que l'angle  $B$ ; la droite  $AB$  est donc donnée aussi; les droites  $AB$ ,  $BF$  sont donc données.

Il est évident, d'après cela, que l'on aura les valeurs des inconnues  $AB$ ,  $BF$  par le moyen des deux proportions  $B$  et  $C$ . En effet, substituant, dans la proportion  $C$ , la surface donnée  $a^2$  au rectangle  $BF \times BA$ , on aura  $BA = \frac{at}{m}$ , et substituant cette valeur de  $BA$  dans la proportion  $B$ , on aura  $BF = \frac{am}{t}$ .

Dans les livres d'Hypsicle, j'ai fait disparaître une foule de fautes grossières qui sautaient aux yeux, et qui cependant se trouvaient dans les trois manuscrits 190, 2542, 2343 \*, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. (Voyez les Variantes.)

\* Ces trois manuscrits, si l'on en excepte 2542, sont défectueux et remplis de lacunes.

Propositio II libri II corruptissima erat in tribus codicibus, in editionibus Basilicæ, Oxoniæque, necnon in versionibus Zamberti et Commandini. Ex integro hanc demonstrationem restitui.

Lectio paginæ 516 mea est. Codices et editio Basilicæ versionesque Zamberti et Commandini omnino erant inintelligibiles, et emendatio Gregory non fausta mihi videbatur.

Lectio variæ primæ lineæ paginæ 531 imprimis notanda est. Hæc erat τῆς AB pro τῆς; hæc mendâ manente, quod Hypsicles dicit illud est impossibile; et hæc menda adest tamen in tribus codicibus, in editionibus Basilicæ, Oxoniæque, necnon in versionibus Zamberti atque Commandini.

Cum Euclides meus terminatus sit, sine ullâ morâ prelo sum subjecturus Apollonii opera conjunctim cum Pappi Lemmatibus Eutochiique Commentariis, nec non cum Sereni duobus libris de Cylindro et Cono. (*Vide* præfationem secundi voluminis).

Hoc tertium ultimumque Euclidis volumen editum fuisset mense octobri novissime præterito, ni moram attulisset miserandum filiæ meæ primo genitæ fatum, quæ postquam fuerat per viginti et octo annos, dulce vitæ meæ solamen, in complexu meo immaturè vitâ decessit decimâ nonâ die septembris. Heu! non potuit, pene dixi, noluit superesse natæ suæ in ipso matris gremio præreptæ, duodecimâ ejusdem mensis die, exacto nondum tertio ætatis anno.

Omnibus ærumnis confectus, nec putans me posse tam diris repentinisque cladibus esse superstitem, obsecraveram clarissimum virum Delambre, perpetuum Academiæ scientiarum secretarium, ut si quis ingrueret casus, impressioni operis mei absolvendæ attendere vellet. Itaque D. Delambre adjuvante, ne mors quidem ipsa mea ullam integræ Euclidis operum promulgationi moram attulisset; et ea jam pridem fuissent edita, ni extitissent calumniæ, vexationes semper renascentes, quibus sexdecim ab hinc annis et amplius sum objectus.



La proposition II du livre II était entièrement altérée dans les trois manuscrits, dans les éditions de Bâle, d'Oxford et dans les traductions de Zamberti et de Commandin. J'ai rétabli cette démonstration dans tout son entier.

La leçon de la page 516 est de moi. Les manuscrits, l'édition de Bâle, et les traductions de Zamberti et de Commandin, ne présentaient aucun sens raisonnable, et la correction de Grégory ne me paraissait pas heureuse.

La variante de la première ligne de la page 531 est très-remarquable. Il y avait  $\tau\eta\varsigma$  AB pour  $\tau\eta\varsigma$ ; ce qui faisait dire à Hypsicle une chose impossible, et cette faute se trouve dans tous les trois manuscrits, dans les éditions de Bâle, d'Oxford, et dans les traductions de Zamberti et de Commandin.

Mon Euclide étant terminé, je vais faire mettre incessamment sous presse les OEuvres d'Apollonius, qui seront accompagnées des Lemmes de Pappus, des Commentaires d'Eutochius, et des deux livres du Cylindre et du Cône de Sérénus. (*Voyez la Préface du second volume.*)

Ce troisième et dernier volume des OEuvres d'Euclide aurait paru au mois d'octobre dernier, sans la fin déplorable de ma fille aînée, qui, après avoir fait le charme de ma vie pendant vingt-huit ans, expira dans mes bras le vendredi 19 septembre, n'ayant pu, ou plutôt n'ayant pas voulu survivre à sa fille unique, qui était morte presque subitement sur le sein de sa mère le vendredi de la semaine précédente, dans la troisième année de son âge.

L'âme brisée par la douleur, et ne comptant pas pouvoir survivre à des pertes aussi cruelles, arrivées coup sur coup, j'avais prié M. Delambre, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, de vouloir bien, en cas d'événement, surveiller l'impression de la fin de mon ouvrage. Ainsi, grâce à ce savant illustre, ma mort même n'aurait apporté aucun retard à l'entière publication des OEuvres d'Euclide, dont le public jouirait depuis long-temps, sans les calomnies, et sans les persécutions sans cesse renaissantes, auxquelles j'ai été en butte depuis seize années révolues.



---

IN præfatione voluminis primi dixeram Oxoniæ editionem nihil aliud esse quam meram fere transcriptionem editionis Basilæ. Hæc quidem addere potuissem, scilicet mendas crassissimas quibus scatet Basilæ editio adesse plerasque editione Oxoniæ, et in hac editione mendas hujusmodi permultas reperiri quibus caret in Basilæ editio. Quod omni procul dubio ostendetur ope tabulæ subsequentis.

Vocabulum *idem* quod videre est in columnâ editionis Basilæ, significat hanc editionem concordare cum Oxoniæ editione; ubi hoc vocabulum abest, ibi abest et menda.

Littera *b* indicat lineas ab infimâ paginâ esse computandas.

J'AVAIS dit, dans la préface du premier volume, que l'édition d'Oxford n'était guères que la copie de celle de Bâle. J'aurais pu ajouter que la plupart des fautes les plus grossières de l'édition de Bâle, se retrouvent dans celle d'Oxford, et que celle-ci en renferme un très-grand nombre dont l'autre est exempte. Le tableau suivant prouvera d'une manière incontestable, ce que je viens d'avancer.

Le mot *idem* de la colonne de l'édition de Bâle, veut dire que cette édition est conforme à celle d'Oxford; l'absence de ce mot veut dire que la faute n'existe pas dans l'édition de Bâle.

La lettre *b* indique qu'il faut compter les lignes à partir du bas de la page.

# TABULA MENDARUM CRASSISSIMARUM

QUIBUS PRÆCIPUE VITIANTUR

OXONIÆ BASILIÆQUE EDITIONES.

| MENDÆ EDIT. OXONIÆ. |      |                                         | MENDÆ EDIT. BASILIÆ. |           |                          | <i>Lege.</i>               |
|---------------------|------|-----------------------------------------|----------------------|-----------|--------------------------|----------------------------|
| Pag.                | lin. |                                         | Pag.                 | lin.      |                          |                            |
| 2,                  | 16,  | b. ἀίσας . . . . .                      | 2,                   | 11,       | <i>Idem</i> . . . . .    | ἀνίσους                    |
| 4,                  | 16,  | b. ΓΗΘ . . . . .                        | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | ὁ ΓΗΘ                      |
| 7,                  | 17,  | b. τῷ ἐλάσσονι τὸ μεί-<br>ζον . . . . . | 5,                   | 21,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τὸ ἐλάσσον τῷ μεί-<br>ζονι |
| 35,                 | 17,  | τῶν . . . . .                           | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τῆς                        |
| 40,                 | 21,  | b. τοῦ . . . . .                        | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τοῦ ἀπὸ τοῦ                |
| 46,                 | 8,   | τῆς . . . . .                           | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τοῦ                        |
| 58,                 | 13,  | b. ἡ . . . . .                          | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τοῦ                        |
| 66,                 | 28,  | τὸ . . . . .                            | 40,                  | 3,        | <i>Idem</i> . . . . .    | τῷ                         |
| 98,                 | 17,  | ὅτε τὸ . . . . .                        | 68,                  | 25,       | τὸ . . . . .             | εἰ                         |
| 99,                 | 13,  | b. ΖΗ . . . . .                         | 69,                  | 17,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τὸ ΖΗ                      |
| 103,                | 4,   | τὸ . . . . .                            | 61,                  | 9,        | <i>Idem</i> . . . . .    | τά                         |
| 114,                | 2,   | b. παράλληλος . . . . .                 | 69,                  | 26,       | <i>Idem</i> . . . . .    | deleatur.                  |
| 115,                | 3,   | παράλληλος . . . . .                    | —                    | 29,       | <i>Idem</i> . . . . .    | deleatur.                  |
| 123,                | 22,  | αὐτῷ . . . . .                          | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | αὐτῇ                       |
| 136,                | 23,  | b. αὐτῷ . . . . .                       | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | αὐτοῦ                      |
| 140,                | 6,   | τὴν . . . . .                           | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τῆς                        |
| 142,                | 21,  | τὸ . . . . .                            | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τῷ                         |
| 149,                | 9,   | b. μέτρη . . . . .                      | 88,                  | 1,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | μετρεῖ                     |
| 151,                | 21,  | μετρήσας . . . . .                      | 89,                  | 3,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | μετρήσει                   |
| 153,                | 5,   | τῷ . . . . .                            | 91,                  | 2,        | <i>Idem</i> . . . . .    | τοῦ                        |
| —                   | 10,  | μέρη . . . . .                          | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | μέρη ἢ                     |
| 154,                | 1,   | τοῦ . . . . .                           | —                    | 31,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τῷ                         |
| 155,                | 12,  | b. τῷ . . . . .                         | 92,                  | 8,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                        |
| —                   | 8,   | b. τῷ . . . . .                         | —                    | 5,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                        |
| 159,                | 13,  | δευτέρου . . . . .                      | 95,                  | 12,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τετάρτου                   |
| —                   | 13,  | b. τὸν . . . . .                        | —                    | 28,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τῶν                        |
| 160,                | 3,   | ἀπὸ . . . . .                           | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | ὑπὸ                        |
| —                   | 18,  | ἀπὸ . . . . .                           | —                    | 3,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | ὑπὸ                        |
| 164,                | 8,   | τινα . . . . .                          | 98,                  | 24,       | <i>Idem</i> . . . . .    | τίας                       |
| 171,                | 4,   | b. ἔσους . . . . .                      | 103,                 | 4,        | b. <i>Idem</i> . . . . . | ἔσους ἀν                   |
| 174,                | 15,  | τῶν . . . . .                           | 105,                 | 13,       | b. <i>Idem</i> . . . . . | ὁ                          |
| 178,                | 9,   | πρὸς . . . . .                          | 108,                 | 12,       | b. <i>Idem</i> . . . . . | deleatur.                  |
| 182,                | 5,   | b. οὐδὲ ὁ δὲ . . . . .                  | 113,                 | 9,        | ὁ δ' . . . . .           | οὐδὲ                       |
| 187,                | 4,   | αὐτῶν . . . . .                         | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | αὐτοῦ                      |
| 191,                | 14,  | τέταρτος . . . . .                      | 118,                 | 9,        | <i>Idem</i> . . . . .    | δεύτερος                   |
| 192,                | 17,  | τὸν . . . . .                           | . . . . .            | . . . . . | . . . . .                | τῶν                        |

III.

C

| EDITIO OXONIÆ. |        |                              | EDITIO BASILIÆ. |        |                       | Lege.                    |
|----------------|--------|------------------------------|-----------------|--------|-----------------------|--------------------------|
| Pag.           | lin.   |                              | Pag.            | lin.   |                       |                          |
| 192,           | 14, b. | ἐπεὶ . . . . .               | 118,            | 6, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | ἐπεὶ οἱ                  |
| 193,           | 17, b. | διαλείποντες . . . . .       | 119,            | 22, b. | <i>Idem</i> . . . . . | διαλείποντες πάν-<br>τες |
| 198,           | 18,    | ἄλλου . . . . .              | 122,            | 9, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | ἄλλου πρώτου             |
| —              | 13, b. | μετρούμενον . . . . .        | —               | —      | — . . . . .           | μετρούμενος              |
| 207,           | 25,    | τὸν . . . . .                | 128,            | 6, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τοὺς                     |
| 209,           | 1, b.  | τετράγωνος . . . . .         | 130,            | 16,    | <i>Idem</i> . . . . . | τετράγωνα                |
| 210,           | 1,     | ἴσαι . . . . .               | —               | 17,    | <i>Idem</i> . . . . . | ἴσα                      |
| 211,           | 15, b. | ὁ . . . . .                  | 131,            | 20,    | <i>Idem</i> . . . . . | τὸ                       |
| 215,           | 20, b. | τὸν . . . . .                | 133,            | 10, b. | <i>Idem</i> . . . . . | τὸ                       |
| 226,           | 16,    | μήκη . . . . .               | 139,            | 25,    | <i>Idem</i> . . . . . | μήκει                    |
| —              | 24,    | μήκη . . . . .               | —               | 17, b. | <i>Idem</i> . . . . . | μήκει                    |
| —              | 17, b. | τῷ . . . . .                 | 139,            | 11, b. | <i>Idem</i> . . . . . | τῇ                       |
| 237,           | 20,    | τῇν . . . . .                | 145,            | 2, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τὸν                      |
| 244,           | 17,    | τῇ . . . . .                 | —               | —      | — . . . . .           | τῆς                      |
| 245,           | 15,    | τῆς . . . . .                | 150,            | 26,    | <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                      |
| —              | 19,    | ἀπὸ . . . . .                | —               | 14, b. | <i>Idem</i> . . . . . | ὑπὸ                      |
| 245,           | 1, b.  | τῇ . . . . .                 | —               | —      | — . . . . .           | τῆς                      |
| 246,           | 7,     | ἐκ . . . . .                 | —               | —      | — . . . . .           | ἐκ τῶν ἀπὸ               |
| —              | 17,    | μέσον, μέσον . . . . .       | —               | —      | — . . . . .           | μέσον                    |
| —              | 26,    | ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, . . . . .    | —               | —      | — . . . . .           | ἀπὸ τῶν ΑΔ, τῇ           |
| —              | —      | τῷ ἀπὸ . . . . .             | —               | —      | — . . . . .           | ἀπὸ                      |
| 250            | 17,    | ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ . . . . . | 153,            | 19,    | <i>Idem</i> . . . . . | ἀσύμμετά ἐστι τὰ         |
| 251,           | 2, b.  | τῶν . . . . .                | 154,            | 2,     | <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                      |
| 262,           | 22,    | τῶν . . . . .                | 159,            | 1, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                      |
| —              | 23,    | τῶν . . . . .                | —               | 1, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τοῦ                      |
| 264,           | 3,     | τῷ . . . . .                 | 160,            | 6, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τῶν                      |
| —              | 25,    | ἀσύμμετρον . . . . .         | —               | —      | — . . . . .           | ἀσύμμετρα                |
| —              | —      | ὑπὸ τῶν . . . . .            | —               | —      | — . . . . .           | ἀπὸ τῶν                  |
| 269,           | 11, b. | τὰ μέσα . . . . .            | 164,            | 16,    | <i>Idem</i> . . . . . | τὰς μέσας                |
| 277,           | 13,    | τὸ . . . . .                 | 169,            | 3,     | <i>Idem</i> . . . . . | τῷ                       |
| —              | 20,    | τὸ . . . . .                 | —               | 5,     | <i>Idem</i> . . . . . | τῷ                       |
| 282,           | 12, b. | μέσης . . . . .              | 171,            | 14, b. | <i>Idem</i> . . . . . | μέσης                    |
| 284,           | 2, b.  | τὸ . . . . .                 | 172,            | 6, b.  | <i>Idem</i> . . . . . | τὰ                       |
| 289,           | 8,     | τὸ . . . . .                 | 175,            | 7,     | <i>Idem</i> . . . . . | τῷ                       |
| 297,           | 12, b. | τὸ . . . . .                 | —               | —      | — . . . . .           | τῷ                       |
| 300,           | 26,    | τῷ τῷ . . . . .              | —               | —      | — . . . . .           | τῷ                       |
| —              | 34,    | τῆς . . . . .                | —               | —      | — . . . . .           | τῶν                      |
| 303            | 6, b.  | ὁ . . . . .                  | —               | —      | — . . . . .           | ἡ                        |
| 305,           | 17, b. | τῷ . . . . .                 | —               | —      | — . . . . .           | τὸ                       |
| 309,           | 13, b. | ἡ . . . . .                  | —               | —      | — . . . . .           | τὸ                       |
| 310            | 1,     | ὑπὸ . . . . .                | —               | —      | — . . . . .           | ἀπὸ                      |

# TABULA.

xv

| EDITIO OXONIE. |        |                              | EDITIO BASILIE. |        |                             | Lege.               |
|----------------|--------|------------------------------|-----------------|--------|-----------------------------|---------------------|
| Pag.           | lin.   |                              | Pag.            | lin.   |                             |                     |
| 314,           | 15, b. | ἴστι . . . . .               | 188,            | 5, b.  | Idem. . . . .               | ἴστι τετάρτη        |
| 315,           | 18,    | ἡ . . . . .                  | 189,            | 9,     | Idem. . . . .               | αἱ                  |
| 319,           | 1,     | τῇ . . . . .                 |                 |        |                             | τῆς                 |
| —              | 8,     | τό τε . . . . .              |                 |        |                             | τοῦ τε              |
| 323,           | 18,    | ἀπὸ . . . . .                |                 |        |                             | deleatur.           |
| 326,           | 23,    | τούς . . . . .               |                 |        |                             | τῆς                 |
| 332,           | 27,    | ἐκατέρων . . . . .           |                 |        |                             | ἐκατ'ραν            |
| 336,           | 10,    | κάθητον . . . . .            |                 |        |                             | κάθιστον            |
| 338,           | 21, b. | παράλληλοι . . . . .         |                 |        |                             | deleatur.           |
| 343,           | 9, b.  | αὐτά . . . . .               |                 |        |                             | αὐτὰς               |
| 345,           | 2,     | οὐ δὲ οὐ . . . . .           |                 |        |                             | εἰ δὲ οὐ            |
| 350,           | 9,     | παράλληλοι . . . . .         |                 |        |                             | deleatur.           |
| 352,           | 14, b. | ἴσιν στερεὰν γωνία . . . . . | 210,            | 9, b.  | στερεᾷ γωνία ἴσιν . . . . . | ἴση στερεᾷ γωνία    |
| 353,           | 18, b. | διαγωνίας . . . . .          | 211,            | 16,    | Idem. . . . .               | διαγωνίους          |
| 358,           | 9,     | εὐθείαις . . . . .           |                 |        |                             | εὐθείας             |
| 360,           | 32,    | ἴσον . . . . .               | 215,            | 15, b. | Idem. . . . .               | ἴσων                |
| 361,           | 4,     | ἐπίπεδοι . . . . .           | —               | 3, b.  | ἐπίπεδος . . . . .          | ἐπίπεδα             |
| 367,           | 2,     | γωνίας . . . . .             |                 |        |                             | γωνίαις             |
| 369,           | 9, b.  | ὑπὸ . . . . .                |                 |        |                             | περὶ                |
| 370,           | 3,     | παρὰλληλων . . . . .         | 221             | 411,   | Idem. . . . .               | παρὰλληλόγραμμα     |
| 373,           | 27,    | βάσεις . . . . .             |                 |        |                             | βάσεις              |
| —              | 29,    | βάσεις . . . . .             |                 |        |                             | βάσεις              |
| 374,           | 28,    | τῇ ΓΞ, ἡ δὲ τῇ ΖΦ . . . . .  | 223,            | 3, b.  | Idem. . . . .               | τῆς ΓΞ, ἡ δὲ τῆς ΖΦ |
| 382,           | 8, b.  | κύκλου . . . . .             | 228,            | 2, b.  | Idem. . . . .               | τετραγώνου          |
| 383,           | 5, b.  | κύλινδρον . . . . .          | 229,            | 18, b. | Idem. . . . .               | κύκλον              |
| 385,           | 16, b. | μείζον . . . . .             | 220,            | 14, b. | Idem. . . . .               | μείζων              |
| —              | 15, b. | τέμνοντας . . . . .          | 230,            | 13, b. | Idem. . . . .               | τέμνοντες           |
| 400,           | 20, b. | τῇ . . . . .                 |                 |        |                             | τῆς                 |
| —              | 17, b. | τετραγώνων . . . . .         | 239,            | 14,    | τετραγώνου . . . . .        | τετραγώνω           |
| —              | 5, b.  | τῇ . . . . .                 | —               | 20,    | Idem. . . . .               | τῆς                 |
| 401,           | 30,    | τοῦ . . . . .                | 240,            | 2,     | Idem. . . . .               | τῆς                 |
| 403,           | 11,    | διπλασίον . . . . .          | —               | 2, b.  | Idem. . . . .               | διπλασίων           |
| 403,           | 27,    | τῷ . . . . .                 |                 |        |                             | τῷ δις              |
| 404,           | 1, b.  | τοῦ . . . . .                |                 |        |                             | τὸ                  |
| 408,           | 4,     | ῥητὸν . . . . .              | 243,            | 10, b. | Idem. . . . .               | ῥητὴ                |
| 411,           | 5, b.  | τῇ . . . . .                 | 246,            | 3,     | Idem. . . . .               | τῆς                 |
| 412,           | 6,     | τῆς BK περιφερείας . . . . . | 245,            | 3, b.  | Idem. . . . .               | τῇ BK περιφέρειᾳ    |
| —              | 6,     | τῇ . . . . .                 |                 |        |                             | τῆς                 |
| —              | 4, b.  | ἡ ABΓZE . . . . .            | 146,            | 21, b. | Idem. . . . .               | deleatur.           |
| —              | 1, b.  | τῇ . . . . .                 | —               | 18, b. | Idem. . . . .               | τῆς                 |
| 413,           | 7,     | τῇ . . . . .                 | —               | 13, b. | Idem. . . . .               | τῆς                 |
| —              | 20, b. | τῷ . . . . .                 | 247,            | 4,     | Idem. . . . .               | τῇ                  |

| EDITIO OXONIE. |        |                        | EDITIO BASILIE. |        |                        | Lege.                       |
|----------------|--------|------------------------|-----------------|--------|------------------------|-----------------------------|
| Pag. lin.      |        |                        | Pag. lin.       |        |                        |                             |
| 414,           | 3, b.  | BEG . . . . .          | 247,            | 10, b. | <i>Idem.</i> . . . . . | ἡ BEB                       |
| 415,           | 13, b. | τῷ . . . . .           |                 |        |                        | τοῦ                         |
| 419,           | 21,    | περιεχόμενον . . . . . | 250,            | 21,    | <i>Idem.</i> . . . . . | περιεχόμενος                |
| —              | 16, b. | ἥξει . . . . .         |                 |        |                        | ἥξει                        |
| 421,           | 14,    | πεντάγωνος . . . . .   |                 |        |                        | πενταγώνον                  |
| —              | 3, b.  | αὐτὸν . . . . .        | 152,            | 11,    | <i>Idem.</i> . . . . . | αὐτὸ                        |
| 424,           | 1, b.  | τῆς . . . . .          |                 |        |                        | τῶν                         |
| 425,           | 30,    | πλευρὰ . . . . .       | 254,            | 5,     | <i>Idem.</i> . . . . . | τῆς πλευρὰς                 |
| 426,           | 14, b. | αἱ . . . . .           |                 |        |                        | αἱ                          |
| 428,           | 9,     | τριπλασίον . . . . .   |                 |        |                        | διπλασίον                   |
| —              | 2, b.  | τῆς . . . . .          |                 |        |                        | τῇ                          |
| 429,           | 21,    | ἀπὸ . . . . .          |                 |        |                        | ὑπὸ                         |
| —              | 29,    | διπλασίον . . . . .    |                 |        |                        | διπλασίον                   |
| 435,           | 11,    | τὸ . . . . .           | 259,            | 23,    | <i>Idem.</i> . . . . . | τῷ                          |
| —              | 28,    | ἀπὸ . . . . .          | —               | 14, b. | <i>Idem.</i> . . . . . | ὑπὸ                         |
| 437,           | 25,    | τὰ . . . . .           | 260,            | 8, b.  | <i>Idem.</i> . . . . . | τὸ                          |
| —              | 20, b. | ἔσται . . . . .        | —               | 2, b.  | <i>Idem.</i> . . . . . | ἔστω                        |
| 438,           | 14,    | τῆς . . . . .          | 161,            | 18,    | <i>Idem.</i> . . . . . | τοῦ                         |
| —              | 17,    | ἰσοπλεύρου . . . . .   |                 |        |                        | ἰσοπλεύρου τριγώνου         |
| —              | 7, b.  | τὸ . . . . .           |                 |        |                        | τὰ                          |
| 439,           | 13, b. | πενταγώνων . . . . .   | 262,            | 14,    | <i>Idem.</i> . . . . . | πενταγώνους                 |
| 440,           | 15,    | τῆς . . . . .          | —               | 29,    | <i>Idem.</i> . . . . . | τὴν                         |
| —              | 16,    | τῆς . . . . .          | —               | 30,    | <i>Idem.</i> . . . . . | τὴν                         |
| —              | 18,    | δὲ . . . . .           | —               | 28,    | <i>Idem.</i> . . . . . | deleatur.                   |
| —              | 22,    | AB, BG . . . . .       | —               | 19,    | <i>Idem.</i> . . . . . | ὑπὸ AB, BG                  |
| —              | 27,    | ΔΖ . . . . .           | —               | 15,    | <i>Idem.</i> . . . . . | ἀπὸ ΔΖ                      |
| —              | 12, b. | λόγον . . . . .        |                 |        |                        | λόγον ἔχει                  |
| —              | 8, b.  | τοῦ . . . . .          |                 |        |                        | τὸ ἀπὸ                      |
| 443,           | 20,    | τῆς . . . . .          |                 |        |                        | τῶν                         |
| 445,           | 18,    | ἔχει . . . . .         |                 |        |                        | ἔχει                        |
| 448,           | 17,    | ἰσοπλεύρου . . . . .   | 266,            | 1,     | <i>Idem.</i> . . . . . | ἰσοπλευρὸν τε καὶ ἰσογώνιον |
| —              | 29,    | δύο . . . . .          | 267,            | 8,     | <i>Idem.</i> . . . . . | δύο ὀρθὰς                   |
| 449,           | 3, b.  | τῆς AB . . . . .       | 268,            | 2,     | <i>Idem.</i> . . . . . | τῆς                         |

EUCLIDIS DATA.

EX EDITIONE CLAUDII HARDY.

| EDITIO OXONIÆ. |        |                     | EDITIO CLAUDII HARDY. |      |                      | Lege.        |
|----------------|--------|---------------------|-----------------------|------|----------------------|--------------|
| Pag.           | lin.   |                     | Pag.                  | lin. |                      |              |
| 462,           | 6, b.  | Γ . . . . .         | 22,                   | 11,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὸ Γ         |
| 465,           | 2,     | αὐτὸ . . . . .      | 27,                   | 13,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὸ αὐτὸ      |
| 467,           | 2,     | γωνίας . . . . .    |                       |      |                      | γωνίας       |
| 472,           | 16, b. | τοῦ . . . . .       | 46,                   | 19,  | <i>Idem.</i> . . . . | τῷ           |
| 473,           | 26,    | αὐτὸ . . . . .      | 48,                   | 19,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὸ αὐτὸ      |
| 476,           | 5,     | αὐτοὺς . . . . .    | 59,                   | 15,  | <i>Idem.</i> . . . . | αὐτὰς        |
| 477,           | 11, b. | ἡ . . . . .         |                       |      |                      | ἡ ὑπὸ        |
| 479,           | 4,     | AB . . . . .        | 63,                   | 9,   | <i>Idem.</i> . . . . | ἡ AB         |
| —              | 21,    | ΓΔ . . . . .        | 64,                   | 11,  | <i>Idem.</i> . . . . | ἡ ΓΔ         |
| 482,           | 8,     | ἀπὸ . . . . .       |                       |      |                      | ἐπὶ          |
| —              | 21, b. | ἐν . . . . .        |                       |      |                      | deleatur.    |
| —              | 5, b.  | ἀπὸ τοῦ . . . . .   |                       |      |                      | ὑπὸ τῶν      |
| 483,           | 1,     | τὸ . . . . .        |                       |      |                      | τὴν          |
| —              | 2,     | τὸ . . . . .        |                       |      |                      | τὴν          |
| —              | 16,    | ABΓ . . . . .       | 78,                   | 15,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὸ ABΓ       |
| —              | 5, b.  | ἔχθησαν . . . . .   |                       |      |                      | ἔχουσι       |
| 487,           | 3,     | τῷ . . . . .        |                       |      |                      | τῇ           |
| 490,           | 12, b. | ἔχθη . . . . .      | 91,                   | 2,   | <i>Idem.</i> . . . . | ἔχθησαν      |
| 491,           | 19,    | τῆς . . . . .       | 92,                   | 11,  | <i>Idem.</i> . . . . | τοῦ          |
| 493,           | 9,     | ΑΓΔΕΒ, ΑΖ . . . . . | 96,                   | 11,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὰ ΑΓΔΕΒ, ΑΖ |
| —              | 19,    | δύο . . . . .       |                       |      |                      | δύο εἶδη τῷ  |
| 494,           | 22,    | τὰ . . . . .        | 97,                   | 21,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὰς          |
| 298,           | 21,    | τὸ . . . . .        |                       |      |                      | τὴν          |
| —              | 77, b. | AB . . . . .        | 108,                  | 21,  | <i>Idem.</i> . . . . | τὸ AB        |
| 499,           | 16,    | ἀρα . . . . .       | 111,                  | 12,  | <i>Idem.</i> . . . . | ἀρα ἡ ὑπὸ    |
| 501,           | 14,    | τοῦ . . . . .       | 115,                  | 5,   | <i>Idem.</i> . . . . | τῶν          |
| —              | 4, b.  | ΑΔ . . . . .        |                       |      |                      | ἡ ΑΔ         |
| 502,           | 5,     | παρὰ . . . . .      |                       |      |                      | ὑπὸ          |
| 503,           | 14,    | ὑπὸ . . . . .       | 120,                  | 1,   | <i>Idem.</i> . . . . | ἀπὸ          |
| —              | 19,    | τῆς . . . . .       |                       |      |                      | τῶν          |
| 505,           | 17,    | ἀπὸ . . . . .       |                       |      |                      | ὑπὸ          |
| —              | 14, b. | ἀρὰ . . . . .       |                       |      |                      | ἀρὰ ἀπὸ      |
| —              | 7, b.  | τὸ . . . . .        | 127,                  | 7,   | <i>Idem.</i> . . . . | τῷ           |
| —              | 1, b.  | ἀπὸ . . . . .       | —                     | 14,  | <i>Idem.</i> . . . . | ὑπὸ          |
| 506,           | 23,    | τοῦ . . . . .       |                       |      |                      | τῶν          |

| EDITIO OXONIAE. |      |                     | EDITIO CLAUDII HARDY. |      |                   | Lege.     |
|-----------------|------|---------------------|-----------------------|------|-------------------|-----------|
| Pag.            | lin. |                     | Pag.                  | lig. |                   |           |
| 510,            | 17,  | b. τὴν . . . . .    |                       |      |                   | τὸ        |
| 513,            | 20,  | ὁ . . . . .         |                       |      |                   | ἡ         |
| —               | 16,  | b. ὁ . . . . .      |                       |      |                   | ἡ         |
| 517,            | 2,   | ΛΘΗ . . . . .       | 152,                  | 8,   | Idem . . . . .    | ὑπὸ ΛΘΗ   |
| —               | 11,  | ὑπὸ . . . . .       | 152,                  | 6,   | b. Idem . . . . . | ὑπὸ τῶν   |
| 518,            | 23,  | τοῦ . . . . .       |                       |      |                   | τῆς       |
| —               | 24,  | τὸ . . . . .        | 155,                  | 17,  | Idem . . . . .    | τῷ        |
| 520,            | 10,  | ὡς ἔτυχεν . . . . . |                       |      |                   | ἀνάλογον  |
| —               | 19,  | ὡς ἔτυχε . . . . .  |                       |      |                   | deleatur. |
| 423,            | 2,   | τὸ . . . . .        |                       |      |                   | τῷ        |
| 522,            | 1,   | τῷ . . . . .        |                       |      |                   | τοῦ       |
| 525,            | 19,  | ὁ . . . . .         |                       |      |                   | τὸ        |

## ERRATUM.

Ante ultimum *alinea* paginae IX prae-fationis hæc adjiciantur :

Et si in proportionē  $AB : BA :: m : o$ , substituamus valorem ipsius  $BA$ , habebimus  $AB = \frac{at}{o}$

Et si dans la proportion  $AB : BA :: m : o$ , nous substituons la valeur de  $BA$ , nous aurons  $AB = \frac{at}{o}$



# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R U N D E C I M U S .

#### ΟΡΟΙ.

Α. ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστὶ, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

Β. Στερεοῦ δὲ πέρασ, ἐπιφάνεια.

Γ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ<sup>1</sup> ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Δ. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾤσιν.

#### DEFINITIONES.

1. SOLIDUM est, quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet.

2. Solidi autem terminus, superficies.

3. Recta ad planum perpendicularis est, quando ad omnes rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, rectos facit angulos.

4. Planum ad planum rectum est, quando rectæ, quæ communi sectioni planorum ad rectos et in uno planorum ducuntur, reliquo plano ad rectos sunt.

## LE ONZIÈME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

#### DÉFINITIONS.

1. Un solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur.

2. Un solide est terminé par une surface.

3. Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan.

4. Un plan est perpendiculaire à un plan, lorsque les perpendiculaires menées dans un des plans à leur commune section, sont perpendiculaires à l'autre plan.



## 2 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

έ. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας<sup>2</sup> τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ<sup>3</sup>, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα<sup>4</sup> γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ς'. Επιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ'. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ'. Ομοία στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ί. Ἰσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ<sup>5</sup> ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

5. Rectæ ad planum inclinatio est, quando a sublimi termino rectæ ad planum perpendicularis ducitur, et a facto puncto ad terminum rectæ in plano recta jungitur, contentus acutus angulus junctâ rectâ et insistente.

6. Plani ad planum inclinatio est contentus acutus angulus rectis, quæ ducuntur ad rectos communi sectioni ad idem punctum in utroque planorum.

7. Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli æquales inter se sunt.

8. Parallela plana sunt quæ inter se non conveniunt.

9. Similes solidæ figuræ sunt quæ continentur similibus planis, æqualibus multitudine.

10. Æquales vero et similes solidæ figuræ sunt quæ continentur similibus planis, æqualibus multitudine et magnitudine.

5. L'inclinaison d'une droite sur un plan est l'angle aigu compris par cette droite et par la droite qui joint le point du plan que la première droite rencontre, et le point de ce plan que rencontre la perpendiculaire menée à ce plan de l'extrémité supérieure de la première droite.

6. L'inclinaison d'un plan sur un autre plan est l'angle aigu compris par les perpendiculaires menées d'un même point de la commune section dans l'un et l'autre plan.

7. On dit que des plans sont semblablement inclinés sur d'autres plans quand les angles des inclinaisons dont nous venons de parler sont égaux.

8. Les plans parallèles sont ceux qui ne se rencontrent point.

9. Les figures solides semblables sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre.

10. Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre et en grandeur.

11. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν ἢ<sup>6</sup> πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων<sup>7</sup> περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.

12. Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνεστῶς.

13. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶ καὶ<sup>8</sup> παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

14. Σφαῖρά ἐστὶν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

15. Ἀξὼν δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

16. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

11. Solidus angulus est plurium quam duarum linearum, quæ sese contingant et non in eâdem superficie sint, ad omnes lineas inclinatio. ALITER. Solidus angulus est qui pluribus quam duobus angulis planis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, ad unum punctum constitutis.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, ab uno plano ad unum punctum constituta.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo adversa et æqualia et similia sunt et parallela, reliqua autem parallelogramma.

14. Sphæra est figura comprehensa, quando circuli manente diametro, conversum semicirculum, in eumdem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri.

15. Axis autem sphæræ est manens illa recta circa quam semicirculus convertitur.

16. Centrum vero sphæræ est idem quod et semicirculi.

11. Un angle solide est l'inclinaison mutuelle de plus de deux lignes qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans une même surface. AUTREMENT. Un angle solide est celui qui est compris par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans une même surface, et qui sont construits en un seul point.

12. Une pyramide est une figure solide comprise par des plans construits en un seul point au-dessus d'un plan.

13. Un prisme est une figure solide comprise par des plans dont deux de ces plans sont égaux, semblables et parallèles, et dont les autres plans sont des parallélogrammes.

14. Une sphère est la figure comprise sous la surface décrite par un demi-cercle, lorsque son diamètre restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir.

15. L'axe de la sphère est la droite immobile autour de laquelle tourne le demi-cercle.

16. Le centre de la sphère est le même que celui du demi-cercle.

#### 4 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογώνιου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Καὶ μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένη, ὀρθογώνιος ἐσται ὁ κῶνος· εἰ δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· εἰ δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιβ'. Αξὼν δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα<sup>10</sup> περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρός ἐστιν<sup>11</sup>, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν<sup>12</sup>, περιεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

17. Diameter autem sphaeræ est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a superficie sphaeræ.

18. Conus est comprehensa figura, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, conversum triangulum, in eundem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri. Et si quidem manens recta æqualis sit reliquæ rectæ quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus; si vero minor, amblygonius; si autem major, oxygonius.

19. Axis autem coni est manens recta circa quam triangulum convertitur.

20. Basis vero, circulus a conversâ rectâ descriptus.

21. Cylindrus est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, parallelogrammum conversum, in eundem locum rursus restituitur a quo cœperat moveri.

17. Le diamètre de la sphère est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la surface de la sphère.

18. Un cône est une figure comprise sous les surfaces décrites par deux côtés d'un triangle rectangle, lorsque l'un des côtés de l'angle droit restant immobile, le triangle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir. Si la droite qui reste immobile est égale à l'autre côté qui tourne autour de l'angle droit, le cône s'appelle rectangle; si elle est plus petite, le cône s'appelle obtusangle; et si elle est plus grande, le cône s'appelle acutangle.

19. L'axe du cône est la droite immobile autour de laquelle tourne le triangle.

20. La base du cône est le cercle décrit par la droite qui tourne.

21. Un cylindre est un solide compris sous les surfaces décrites par trois côtés d'un parallélogramme rectangle, lorsque le quatrième côté restant immobile, ce parallélogramme tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir.

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

κβ'. Αξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ομοιοὶ κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἱ τε ἄξονες καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι.

κέ'. Κῦβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον<sup>13</sup>.

κζ'. Οκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

κή'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον<sup>14</sup>.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

22. Axis autem cylindri est manens recta circa quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases vero, circuli a duobus ex adverso circumactis lateribus descripti.

24. Similes conii et cylindri sunt, quorum et axes et diametri basium proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida sex quadratis æqualibus comprehensa.

26. Tetraëdron est figura solida quatuor triangulis æqualibus et æquilateris comprehensa.

27. Octaëdron est figura solida octo triangulis æqualibus et æquilateris comprehensa.

28. Dodecaëdron est figura solida duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æqui-angulis comprehensa.

29. Icosaëdron est figura solida viginti triangulis æqualibus et æquilateris comprehensa.

22. L'axe du cylindre est la droite immobile autour de laquelle tourne le parallélogramme.

23. Les bases du cylindre sont les cercles décrits par les deux côtés opposés du parallélogramme qui se meuvent.

24. Les cônes et les cylindres semblables sont ceux dont les axes et dont les diamètres des bases sont proportionnels.

25. Un cube est un solide compris sous six quarrés égaux.

26. Un tétraèdre est une figure solide comprise sous quatre triangles égaux et équilatéraux.

27. Un octaèdre est une figure solide comprise sous huit triangles égaux et équilatéraux.

28. Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous douze pentagones égaux, équilatéraux et équiangles.

29. Un icosaèdre est une figure solide comprise sous vingt triangles égaux et équilatéraux.

## 6 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

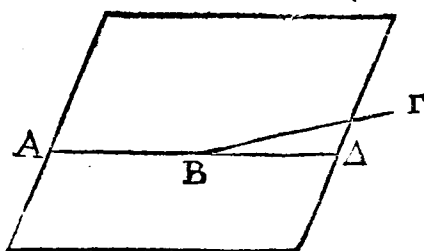
### PROPOSITIO I.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ<sup>1</sup>.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μὲν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ<sup>2</sup>.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, pars autem quædam in sublimiori.

Si enim possibile, rectæ lineæ ΑΒΓ pars quædam ΑΒ sit in subjecto plano, pars vero quædam ΒΓ in sublimiori.



Εσται δὴ τις τῇ ΑΒ συνεχῆς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Εστω ἡ ΒΔ· δύο δὲ δοθεισῶν<sup>3</sup> εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμήμα ἔστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθεῖα οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι<sup>4</sup>.

Εὐθείας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Erit igitur quædam ipsi ΑΒ continuata recta in directum in subjecto plano. Sit ipsa ΒΔ; duabus igitur datis rectis ΑΒΓ, ΑΒΔ commune segmentum est ipsa ΑΒ, quod impossibile; recta enim cum rectâ non convenit in pluribus punctis quam in uno; si autem non, congruent inter se rectæ.

Rectæ igitur, etc.

### PROPOSITION PREMIÈRE.

Une partie d'une ligne droite ne peut être dans un plan et une autre partie au-dessus de ce plan.

Car, si cela est possible, qu'une partie ΑΒ de la ligne droite ΑΒΓ soit dans un plan et l'autre partie ΒΓ au-dessus de ce plan.

Il y aura, dans le plan inférieur, un prolongement de ΑΒ; soit ΒΔ ce prolongement; les deux droites ΑΒΓ, ΑΒΔ auront une partie commune ΑΒ, ce qui est impossible, car deux droites ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point, sinon elles se confondraient. Donc, etc.

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 7

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

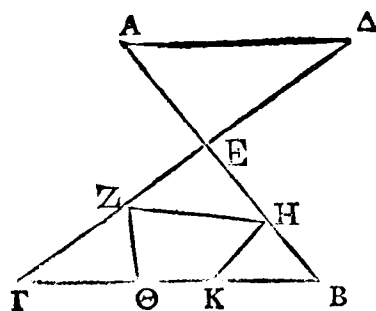
## PROPOSITIO II.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Si duæ rectæ se mutuo secant, in uno sunt plano, et omne triangulum in uno est plano.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  se mutuo secant in puncto  $E$ ; dico ipsas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  in uno esse plano, et omne triangulum in uno esse plano.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν  $EG$ ,  $EB$  τυχόντα σημεία, τὰ  $Z$ ,  $H$ , καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ  $GB$ ,  $ZH$ , καὶ διήχθωσαν αἱ  $Z\Theta$ ,  $HK$ . λέγω πρῶτον ὅτι τὸ  $EGB$  τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπίπεδῳ. Εἰ γὰρ ἐστὶ τοῦ  $EGB$  τριγώνου μέρος ἥτοι τὸ  $ZG\Theta$ , ἢ τὸ  $HBK$  ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν  $EG$ ,  $EB$  εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-

Sumantur enim in ipsis  $EG$ ,  $EB$  quælibet puncta  $Z$ ,  $H$ , et jungantur ipsæ  $GB$ ,  $ZH$ , et ducantur ipsæ  $Z\Theta$ ,  $HK$ ; dico primum  $EGB$  triangulum in uno esse plano. Si enim est  $EGB$  trianguli vel pars  $ZG\Theta$ , vel  $HBK$  in subjecto plano, reliqua autem in alio, erit et unius  $EG$ ,  $EB$  rectarum pars quædam in subjecto plano, altera

## PROPOSITION II.

Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.

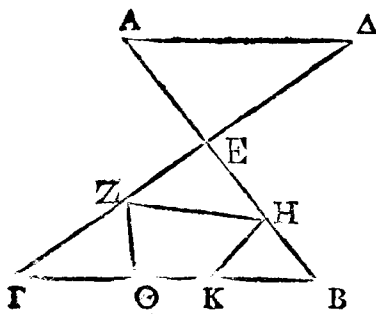
Que les deux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  se coupent mutuellement au point  $E$ ; je dis que les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sont dans un seul plan; et que tout triangle est aussi dans un seul plan.

Car prenons dans les droites  $EG$ ,  $EB$  deux points quelconques  $Z$ ,  $H$ ; joignons  $GB$ ,  $ZH$ , et menons les droites  $Z\Theta$ ,  $HK$ ; je dis d'abord que le triangle  $EGB$  est dans un seul plan; car si la partie  $ZG\Theta$  ou la partie  $HBK$  du triangle  $EGB$  est dans un plan, et l'autre partie dans un autre plan, une partie de l'une des droites  $EG$ ,  $EB$  sera dans un plan

## 8 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πέδω, τὸ δὲ ἐν ἄλλω. Εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ἢ<sup>2</sup> ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον

vero in alio. Si autem ΕΓΒ trianguli pars ΖΓΒΗ sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, erit et ambarum rectarum ΕΓ, ΕΒ pars quædam in subjecto plano, una vero in alio, quod absurdum demonstratum est; triangulum



ἐδείχθη· τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ ἐστὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ· ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ὅπερ εἰδει δεῖξαι.

igitur ΕΓΒ in uno est plano. In quo autem est triangulum ΕΓΒ, in hoc et utraque ipsarum ΕΓ, ΕΒ; in quo autem utraque ipsarum ΕΓ, ΕΒ, in hoc et ipsæ ΑΒ, ΓΔ; ipsæ igitur ΑΒ, ΓΔ rectæ in uno sunt plano, et omne triangulum in uno est plano. Quod oportebat ostendere.

et l'autre partie dans un autre plan. Mais si une partie ΖΓΒΗ du triangle ΕΓΒ est dans un plan et l'autre partie dans un autre plan, une certaine partie des deux droites ΕΓ, ΕΒ sera dans un plan et l'autre partie dans un autre plan; ce qui a été démontré absurde; le triangle ΕΓΒ est donc dans un seul plan. Mais l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ sont dans le même plan que le triangle ΕΓΒ, et les droites ΑΒ, ΓΔ sont dans le même plan que les droites ΕΓ, ΕΒ (prop. I. 11); les droites ΑΒ, ΓΔ sont donc dans un seul plan, et tout triangle est donc aussi placé dans un seul plan. Ce qu'il fallait démontrer.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

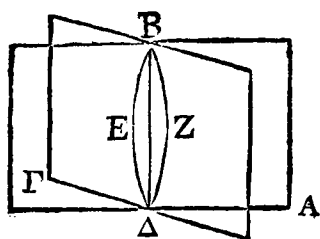
PROPOSITIO III.

Εάν δύο ἐπίπεδα τέμνη ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖα ἐστὶ.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ  $AB$ ,  $B\Gamma$  τεμνέτω<sup>1</sup> ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ  $\Delta B$  γραμμὴ· λέγω ὅτι ἡ  $\Delta B$  γραμμὴ εὐθεῖα ἐστίν.

Si duo plana se mutuo secant, communis ipsorum sectio recta est.

Duo enim plana  $AB$ ,  $B\Gamma$  se mutuo secant, communis autem ipsorum sectio sit  $\Delta B$  linea; dico  $\Delta B$  lineam rectam esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐπιζεύχθω ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  ἐπὶ τὸ  $B$ , ἐν μὲν τῷ  $AB$  ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ  $\Delta EB$ , ἐν δὲ τῷ  $B\Gamma$  ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ  $\Delta ZB$ . ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσιν δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  εὐθεῖαί εἰσιν. Ομοίως δὴ<sup>2</sup> δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  ἐπὶ τὸ  $B$  ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἐστὶ, πλὴν τῆς  $\Delta B$  κοινῆς τομῆς τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  ἐπιπέδων.

Εάν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si enim non, jungatur a puncto  $\Delta$  ad  $B$ , in plano quidem  $AB$  recta  $\Delta EB$ , in plano autem  $B\Gamma$  recta  $\Delta ZB$ ; erunt igitur duarum rectarum  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  iidem termini, proptereaue continebunt spatium, quod absurdum; non igitur  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  rectæ sunt. Similiter utique demonstrabimus, neque aliam quamdam, a puncto  $\Delta$  ad  $B$  ductam, rectam esse, præter ipsam  $\Delta B$  communem sectionem ipsorum  $AB$ ,  $B\Gamma$  planorum.

PROPOSITION III.

Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.

Que les deux plans  $AB$ ,  $B\Gamma$  se coupent mutuellement, et que leur commune section soit la ligne  $\Delta B$ ; je dis que la ligne  $\Delta B$  est une ligne droite.

Car si cela n'est point, dans le plan  $AB$  menons du point  $\Delta$  au point  $B$  la droite  $\Delta EB$ , et dans le plan  $B\Gamma$  menons la droite  $\Delta ZB$ ; les extrémités des deux droites  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  seront les mêmes, et ces droites renfermeront un espace, ce qui est absurde (dém. 6); les lignes  $\Delta EB$ ,  $\Delta ZB$  ne sont donc pas des lignes droites. Nous démontrerons semblablement que toute autre ligne menée du point  $\Delta$  au point  $B$  n'est point une ligne droite, excepté la commune section  $\Delta B$  des plans  $AB$ ,  $B\Gamma$ . Si donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

## PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἐφειστάτω· λέγω ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Απειλήφθωσαν γὰρ αἱ AE, EB, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ E, ὡς ἔτυχεν, ἡ HEΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Z ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AE, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν<sup>2</sup>. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὲ

Si recta duabus rectis se mutuo secantibus ad rectos in communi sectione insistat, et per ipsas plano ad rectos erit.

Recta enim quædam EZ duabus rectis AB, ΓΔ se mutuo secantibus in E puncto ab ipso E ad rectos insistat; dico EZ et per AB, ΓΔ plano ad rectos esse.

Sumantur enim ipsæ AE, EB, ΓΕ, ΕΔ æquales inter se, et ducatur per E utcunque recta HEΘ, et jungantur ipsæ ΑΔ, ΓΒ, et adhuc a quolibet puncto Z ducantur ipsæ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Et quoniam duæ AE, ΕΔ duabus ΓΕ, ΕΒ æquales sunt, et angulos æquales continent, basis igitur ΑΔ basi ΓΒ æqualis est, et triangulum ΑΕΔ triangulo ΓΕΒ æquale erit; quare et angulus ΔΑΕ angulo ΕΒΓ æqualis est. Est autem et ΑΕΗ angulus ipsi ΒΕΘ æqualis;

## PROPOSITION IV.

Si deux droites se coupent mutuellement, la droite perpendiculaire à ces deux droites, à leur section commune, sera aussi perpendiculaire au plan de ces deux droites.

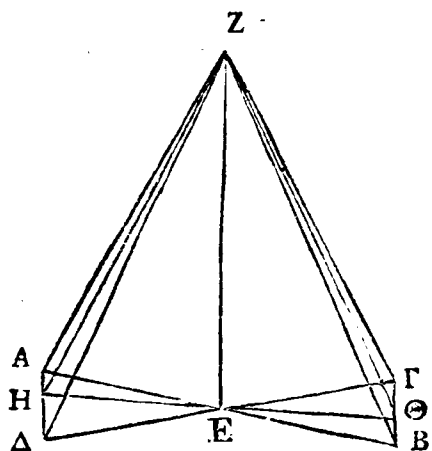
Que les deux droites AB, ΓΔ se coupent mutuellement au point E; du point E élevons une droite EZ perpendiculaire à ces deux droites; je dis que la droite EZ est aussi perpendiculaire au plan des droites AB, ΓΔ.

Faisons les droites AE, EB, ΓΕ, ΕΔ égales entr'elles; par le point E menons d'une manière quelconque une droite HEΘ; joignons ΑΔ, ΓΒ, et d'un point quelconque Z menons les droites ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Puisque les deux droites AE, ΕΔ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΒ, et que ces droites comprennent des angles égaux (prop. 15. 1), la base ΑΔ sera égale à la base ΓΒ (prop. 4. 1), le triangle ΑΕΔ égal au triangle ΓΕΒ, et l'angle ΔΑΕ égal à l'angle ΕΒΓ. Mais l'angle ΑΕΗ est égal à l'angle ΒΕΘ (prop. 15. 1); les deux triangles ΑΕΗ, ΒΕΘ ont donc

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 11

τρίγωνά ἐστι τὰ  $AHE$ ,  $BE\Theta$  τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>3</sup> δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν  $AE$  τῇ  $EB$ . καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν  $HE$  τῇ  $E\Theta$ , ἡ δὲ  $AH$  τῇ  $B\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AE$  τῇ  $EB$ , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ZE$ , βάσις ἄρα ἡ  $ZA$  βάσει τῇ  $ZB$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>. διὰ

duo igitur triangula sunt  $AHE$ ,  $BE\Theta$  duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus  $AE$  uni lateri  $EB$  æquale ad æquales angulos; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur quidem  $HE$  ipsi  $E\Theta$ , ipsa vero  $AH$  ipsi  $B\Theta$ . Et quoniam æqualis est  $AE$  ipsi  $EB$ , communis autem et ad rectos ipsa  $ZE$ , basis igitur  $ZA$  basi  $ZB$  est æqualis; propter



τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $Z\Gamma$  τῇ  $Z\Delta$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $A\Delta$  τῇ  $\Gamma B$ , ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $ZA$  τῇ  $ZB$  ἴση. δύο δὴ αἱ  $ZA$ ,  $A\Delta$  δυσὶ ταῖς  $ZB$ ,  $B\Gamma$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα. Καὶ βάσις ἡ  $Z\Delta$  βάσει τῇ  $Z\Gamma$  ἐδείχθη ἴση. καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $Z\Delta\Delta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZB\Gamma$  ἴση ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ<sup>5</sup> πάλιν ἐδείχθη ἡ  $AH$  τῇ  $B\Theta$  ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ  $ZA$  τῇ  $ZB$  ἴση. δύο δὴ αἱ  $ZA$ ,  $AH$  δυσὶ ταῖς  $ZB$ ,  $B\Theta$  ἴσαι εἰσὶ. Καὶ γωνία ἡ

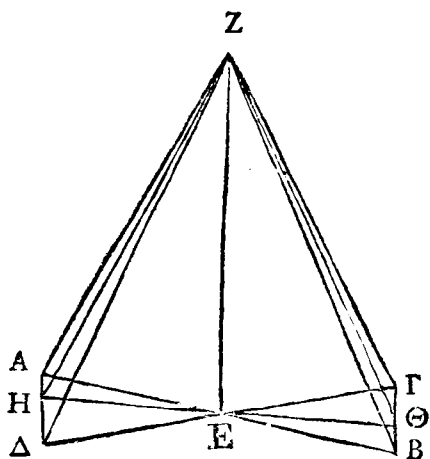
eadem utique et  $Z\Gamma$  ipsi  $Z\Delta$  est æqualis. Et quoniam æqualis est  $A\Delta$  ipsi  $\Gamma B$ , est autem et  $ZA$  ipsi  $ZB$  æqualis; duæ igitur  $ZA$ ,  $A\Delta$  duabus  $ZB$ ,  $B\Gamma$  æquales sunt, utraque utrique. Et basis  $Z\Delta$  basi  $Z\Gamma$  ostensa est æqualis; et angulus igitur  $Z\Delta\Delta$  angulo  $ZB\Gamma$  æqualis est. Et quoniam rursus ostensa est  $AH$  ipsi  $B\Theta$  æqualis, at vero et  $ZA$  ipsi  $ZB$  æqualis; duæ igitur  $ZA$ ,  $AH$  duabus  $ZB$ ,  $B\Theta$  æquales sunt. Et angulus

deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun; et les côtés  $AE$ ,  $EB$  adjacents à des angles égaux seront égaux entr'eux; les autres côtés de ces triangles seront donc aussi égaux entr'eux (prop. 26. 1);  $HE$  est donc égal à  $E\Theta$ , et  $AH$  égal à  $B\Theta$ . Et puisque  $AE$  est égal à  $EB$ , et que la perpendiculaire  $ZE$  est commune, la base  $ZA$  sera égale à la base  $ZB$  (prop. 4. 1); par la même raison,  $Z\Gamma$  sera égal à  $Z\Delta$ . Et puisque  $A\Delta$  est égal à  $\Gamma B$ , et  $ZA$  à  $ZB$ , les deux droites  $ZA$ ,  $A\Delta$  seront égales aux deux droites  $ZB$ ,  $B\Gamma$ , chacune à chacune. Mais on a démontré que la base  $Z\Delta$  est égale à la base  $Z\Gamma$ ; l'angle  $Z\Delta\Delta$  est donc égal à l'angle  $ZB\Gamma$  (prop. 8. 1). Et de plus, puisqu'on a démontré que  $AH$  est égal à  $B\Theta$ , et  $ZA$  égal à  $ZB$ ; les deux droites  $ZA$ ,  $AH$  seront égales aux deux droites  $ZB$ ,  $B\Theta$ . Mais on a démontré que l'angle

## 12 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὕπὸ ZAH εἰδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ZBΘ· βάσις ἄρα ἡ ZH βάσει τῇ ZΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση εἰδείχθη ἡ HE τῇ EΘ, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὲ αἱ HE, EZ δυσὶ ταῖς ΘΕ, EZ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ βάσις ἡ ZH βάσει τῇ ZΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθή ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ, ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ZE ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε

ZAH ostensus est æqualis ipsi ZBΘ; basis igitur ZH basi ZΘ est æqualis. Et quoniam rursus æqualis ostensa est HE ipsi EΘ, communis autem EZ, duæ igitur HE, EZ duabus ΘΕ, EZ æquales sunt. Et basis ZH basi ZΘ æqualis; angulus igitur HEZ angulo ΘΕΖ æqualis est; rectus igitur uterque angulorum HEZ, ΘΕΖ; ergo ZE ad ipsam ΗΘ utcunque per E ductam



ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· ἡ ZE ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. Τὸ δὲ ὑποκείμενον

recta est. Similiter utique demonstrabimus ZE etiam ad omnes rectas contingentes ipsam et existentes in subjecto plano rectos facere angulos. Recta autem ad planum perpendicularis est, quando ad omnes rectas contingentes ipsam et existentes in eodem plano rectos facit angulos; ipsa igitur ZE subjecto plano ad rectos est. Sed subjectum planum est quod per ipsas

ZAH est égal à l'angle ZBΘ; la base ZH est donc égale à la base ZΘ (4. 1). Mais on a démontré encore que HE est égal à EΘ, et la droite EZ est commune; les deux droites HE, EZ sont donc égales aux deux droites ΘΕ, EZ. Mais la base ZH est égale à la base ZΘ; l'angle HEZ est donc égal à l'angle ΘΕΖ (8. 1); les angles HEZ, ΘΕΖ sont donc droits l'un et l'autre; la droite ZE fait donc des angles droits avec la droite ΗΘ, de quelque manière que la droite ΗΘ soit menée par le point E. Nous démontrerons semblablement que la droite ZE fait aussi des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan inférieur. Mais une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle fait des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont placées dans ce plan (def. 3. 11); la droite EZ est donc perpendiculaire au plan inférieur. Mais le plan inférieur passe par

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 13

ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  εὐθειῶν· ἡ  $ZE$  ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ διὰ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ἐπιπέδῳ. rectas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; ipsa igitur  $EZ$  ad rectos est per plano ipsas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ .

Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur recta, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

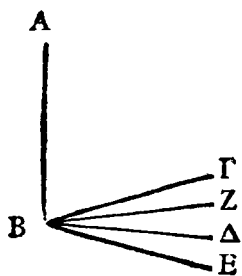
Εὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  τρισὶν εὐθείαις ταῖς  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ  $B$  ἀφ᾽ ἧς ἐφειστάτω· λέγω ὅτι αἱ  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

### PROPOSITIO V.

Si recta tribus rectis sese tangentibus ad rectos angulos in communi sectione insistat, tres illæ rectæ in uno sunt plano.

Recta enim quædam  $AB$  tribus rectis  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  ad rectos in contactu  $B$  insistat; dico ipsas  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  in uno esse plano.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν  $B\Delta$ ,  $BE$  ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ  $B\Gamma$  ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν

Non enim, sed si possibile, sint quidem ipsæ  $B\Delta$ ,  $BE$  in subjecto plano, ipsa vero  $B\Gamma$  in sublimiori, et producat per ipsas  $AB$ ,  $B\Gamma$  pla-

les droites  $AB$ ,  $B\Gamma$ ; la droite  $ZE$  est donc perpendiculaire au plan des droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Si donc, etc.

### PROPOSITION V.

Si trois droites se rencontrent, et si une droite leur est perpendiculaire à leur commune section, ces trois droites sont dans un seul plan.

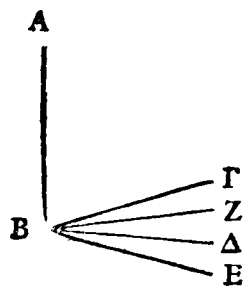
Qu'une droite  $AB$  soit perpendiculaire aux trois droites  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  au point de contact; je dis que les trois droites  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ ,  $BE$  sont dans un seul plan.

Car que cela ne soit pas; mais, si cela est possible, que les droites  $B\Delta$ ,  $BE$  soient dans un plan, et  $B\Gamma$  dans un autre plan élevé au-dessus du premier; faisons passer un

## 14 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB, BG ἐπίπεδον· κοινὴν δὲ τομὴν<sup>3</sup> ποιήσει  
ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐαν. Ποιείτω  
τὴν BZ. Ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ  
διὰ τῶν AB, BG αἱ τρεῖς εὐθεΐαι αἱ AB, BG,  
BZ. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς ἐκάτεραν<sup>3</sup>  
τῶν BΔ, BE· καὶ τῷ διὰ τῶν BΔ, BE ἄρα ἐπι-  
πέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ AB. Τὸ δὲ διὰ τῶν BΔ, BE  
ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ AB ἄρα ὀρθή

num ; communem igitur sectionem faciet in  
subjecto plano rectam. Faciat ipsam BZ. In uno  
igitur sunt plano ducto per ipsas AB, BG tres  
rectæ AB, BG, BZ. Et quoniam AB perpen-  
dicularis est ad utramque ipsarum BΔ, BE ;  
et per ipsas BΔ, BE igitur plano perpendi-  
cularis est AB. Planum autem per ipsas BΔ,  
BE subjectum est ; ergo AB perpendicularis



ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς  
πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας  
ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας  
ἡ AB. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἡ BZ<sup>4</sup> οὕσα ἐν τῷ  
ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία  
ὀρθή ἐστὶν. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABΓ ὀρθή·  
ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γωνία τῇ ὑπὸ ABΓ. Καί εἰσιν  
ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν<sup>5</sup> ἀδύνατον· οὐκ

est ad subjectum planum ; quare et ad omnes  
rectas contingentes ipsam et existentes in sub-  
jecto plano rectos faciet angulos ipsa AB. Tangit  
autem ipsam ipsa BZ existens in subjecto plano ;  
ergo angulus ABZ rectus est. Supponitur autem  
et angulus ABΓ rectus ; æqualis igitur angulus  
ABZ ipsi ABΓ. Et sunt in uno plano, quod  
est impossibile ; non igitur recta BG in subli-

plan par les droites AB, BG ; la commune section de ce plan avec le plan inférieur sera une ligne droite ( prop. 3. 11 ). Que cette droite soit BZ. Il est évident que les trois droites AB, BG, BZ sont dans le plan qui passe par les droites AB, BG. Puisque la droite AB est perpendiculaire à chacune des droites BΔ, BE, la droite AB sera perpendiculaire au plan qui passe par BΔ, BE ( prop. 4. 11 ). Mais le plan qui passe par BΔ, BE est le plan inférieur ; la droite AB est donc perpendiculaire au plan inférieur ; cette droite sera donc perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan ( déf. 3. 11 ). Mais la droite BZ est rencontrée dans le plan inférieur par la droite BZ ; l'angle ABZ est donc droit. Mais on a supposé que l'angle ABΓ est droit ; l'angle ABZ est donc égal à l'angle ABΓ. Mais ces angles sont dans un seul plan, ce qui est impossible ( ax. 9 ) ; la droite BG n'est

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 15

ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ<sup>δ</sup> ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εάν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

miori est plano; tres igitur rectæ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ in uno sunt plano.

Si igitur recta, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

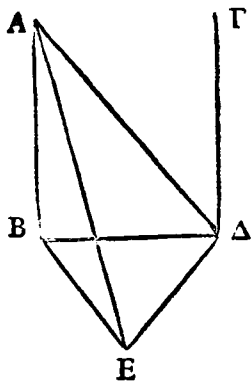
Εάν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

## PROPOSITIO VI.

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos sunt, parallelæ erunt rectæ.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ subjecto plano ad rectos sint; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.



Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Occurrant enim subjecto plano in Β, Δ punctis, et jungatur recta ΒΔ, et ducatur ipsi ΒΔ ad rectos in eodem subjecto plano ipsa ΔΕ, et ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΔΕ, et jungantur ipsæ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

donc pas dans un plan élevé au-dessus des droites ΒΔ, ΒΕ; les trois droites ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ sont donc dans un seul plan. Si donc, etc.

## PROPOSITION VI.

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, ces deux droites seront parallèles.

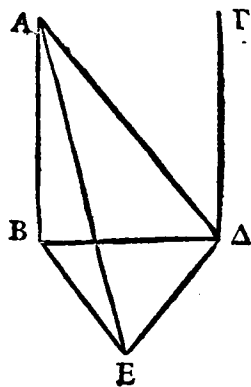
Que les deux droites ΑΒ, ΓΔ soient perpendiculaires à un même plan; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que ces perpendiculaires rencontrent un plan inférieur aux points Β, Δ; joignons la droite ΒΔ; menons dans le plan inférieur la droite ΔΕ perpendiculaire à ΒΔ; faisons ΔΕ égal à ΑΒ, et joignons ΒΕ; ΑΕ, ΑΔ.

## 16 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἡ  $AB$  ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα<sup>3</sup> τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ τῆς  $AB$  ἑκατέρα τῶν  $BD$ ,  $BE$ , οὗσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $ABD$ ,  $ABE$  γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $ΓΔΒ$ ,  $ΓΔΕ$  ὀρθὴ ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΒΔ$ , δύο δὲ αἱ

Et quoniam  $AB$  perpendicularis est ad subjectum planum; et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam  $AB$  utraque ipsarum  $BD$ ,  $EB$  existens in subjecto plano; rectus igitur est uterque angulorum  $ABD$ ,  $ABE$ . Propter eadem utique et uterque ipsorum  $ΓΔΒ$ ,  $ΓΔΕ$  rectus est. Et quoniam æqualis est  $AB$  ipsi  $ΔΕ$ , communis autem  $ΒΔ$ , duæ igitur  $AB$ ,



$AB$ ,  $BD$  δυσὶ ταῖς  $ΕΔ$ ,  $ΔΒ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ  $ΑΔ$  βάσει τῇ  $ΒΕ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΕ$ , ἀλλὰ καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΕ$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $BE$  δυσὶ ταῖς  $ΕΔ$ ,  $ΔΑ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ  $ΑΕ$ . γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΑ$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $ABE$ · ὀρθὴ ἄρα καὶ

$ΒΔ$  duabus  $ΕΔ$ ,  $ΔΒ$  æquales sunt, et angulos rectos continent; basis igitur  $ΑΔ$  basi  $ΒΕ$  est æqualis. Et quoniam æqualis est  $AB$  ipsi  $ΔΕ$ , sed et  $ΑΔ$  ipsi  $ΒΕ$ , duæ igitur  $AB$ ,  $BE$  duabus  $ΕΔ$ ,  $ΔΑ$  æquales sunt, et basis ipsarum communis  $ΑΕ$ ; angulus igitur  $ABE$  angulo  $ΕΔΑ$  est æqualis. Rectus autem  $ABE$ ; rectus igitur

Puisque la droite  $AB$  est perpendiculaire au plan inférieur, elle est perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11). Mais cette droite  $AB$  est rencontrée par chacune des droites  $BD$ ,  $BE$  qui sont dans le plan inférieur; les angles  $ABD$ ,  $ABE$  sont donc droits l'un et l'autre. Par la même raison, les angles  $ΓΔΒ$ ,  $ΓΔΕ$  sont aussi droits l'un et l'autre. Mais la droite  $AB$  est égale à la droite  $ΔΕ$  et la droite  $BD$  est commune; les deux droites  $AB$ ,  $BD$  sont donc égales aux deux droites  $ΕΔ$ ,  $ΔΒ$ ; mais ces droites comprennent des angles droits; la base  $ΑΔ$  est donc égale à la base  $ΒΕ$  (4. 1). Puisque  $AB$  est égal à  $ΔΕ$ , et  $ΑΔ$  égal à  $ΒΕ$ , les deux droites  $AB$ ,  $BE$  sont donc égales aux deux droites  $ΕΔ$ ,  $ΔΑ$ ; mais la base  $ΑΕ$  est commune; l'angle  $ABE$  est donc égal à l'angle  $ΕΔΑ$ .



## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 17

ἡ ὑπὸ<sup>5</sup> ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. Εστί δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἀφ᾽ ἑστένηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι<sup>6</sup> ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Εὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα

et ΕΔΑ; ergo ΕΔ ad ΔΑ perpendicularis est. Est autem et ad utramque ipsarum ΒΔ, ΔΓ perpendicularis; ergo ΕΔ tribus rectis ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ad rectos in contactu insistit; tres igitur rectæ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ in uno sunt plano. In quo autem ipsæ ΔΒ, ΔΑ, in hoc et ipsa ΑΒ, omne enim triangulum in uno est plano; ergo ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ rectæ in uno sunt plano. Atque est rectus uterque ΑΒΔ, ΓΔΒ angulorum; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Si igitur duo, etc.

### PROPOSITIO VII.

Si sint duæ rectæ parallelæ, sumantur autem in utrâque ipsarum quælibet puncta; puncta conjungens recta in eodem plano est cum parallelis.

Sint duæ rectæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et sumantur in utrâque ipsarum quælibet puncta

(8. 1). Mais l'angle ABE est droit; l'angle ΕΔΑ est donc droit aussi; la droite ΕΔ est donc perpendiculaire à la droite ΔΑ. Mais la droite ΕΔ est aussi perpendiculaire à chacune des droites ΒΔ, ΔΓ; la droite ΕΔ est donc perpendiculaire aux trois droites ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ à leur point de contact; les trois droites ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ sont donc dans un seul plan (5. 11). Mais la droite ΑΒ est dans le même plan que les droites ΔΒ, ΔΑ, car tout triangle est dans un seul plan (2. 11); les trois droites ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ sont donc dans un seul plan. Mais les angles ΑΒΔ, ΓΔΒ sont droits l'un et l'autre; la droite ΑΒ est donc parallèle à la droite ΓΔ (28. 1). Si donc, etc.

### PROPOSITION VII.

Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite qui joindra ces points sera dans le même plan que les parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites parallèles, et prenons dans ces droites des points



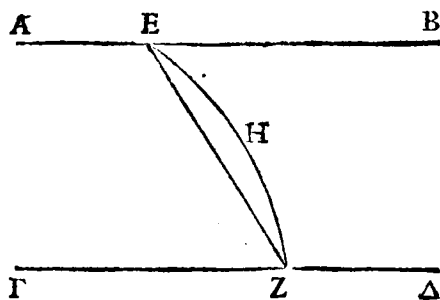
# 18 LE ONZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεία ἐπι-  
 ζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς  
 παραλλήλοις.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ<sup>1</sup>  
 ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· το-  
 μὴν δὲ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν.

E, Z; dico rectam puncta E, Z conjungentem  
 in eodem plano esse cum parallelis.

Non enim, sed si possibile, sit in sublimiori  
 ut ipsa EHZ, et ducatur per ipsam EHZ planum;  
 sectionem igitur faciet in subjecto plano rectam.



Ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ,  
 ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον·  
 οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη  
 εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ<sup>2</sup> ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ  
 διὰ τῶν ΔΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ  
 ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ<sup>3</sup> ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Faciat ut ipsam EZ; duæ igitur rectæ EHZ,  
 EZ spatium continebunt, quod est impossibile;  
 non igitur a puncto E ad Z juncta recta in subli-  
 miori est plano; ergo in plano per parallelas  
 ΔΒ, ΓΔ est a puncto E ad Z juncta recta.

Si igitur, etc.

quelconques E, Z; je dis que la droite qui joint les points E, Z est dans le même  
 plan que les parallèles.

Que cela ne soit point, et si cela est possible, que cette droite soit dans  
 un plan supérieur, et qu'elle ait la position EHZ; par la droite EHZ menons  
 un plan; ce plan fera avec le plan inférieur une section qui sera une ligne droite  
 (3. 11). Que cette section soit EZ; les deux droites EHZ, EZ renfermeront  
 un espace; ce qui est impossible (dém. 6); la droite menée du point E au point Z  
 n'est donc point dans un plan supérieur; la droite menée du point E au point Z  
 est donc dans le plan des parallèles ΔΒ, ΓΔ. Si donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

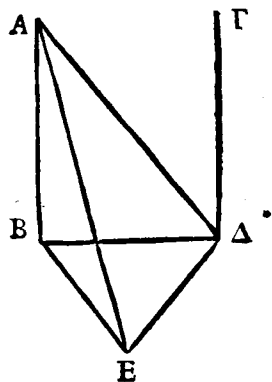
Εάν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ  $AB$  τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ  $\Gamma\Delta$  τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

PROPOSITIO VIII.

Si sint duæ rectæ parallelæ, altera autem ipsarum plano alicui ad rectos sit; et reliqua eidem plano ad rectos erit.

Sint duæ rectæ parallelæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , altera autem ipsarum  $AB$  subjecto plano ad rectos sit; dico et reliquam  $\Gamma\Delta$  eidem plano ad rectos fore.



Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ  $B$ ,  $\Delta$  σημεία, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $B\Delta$ . αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  ἄρα ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἡχθω τῇ  $B\Delta$  πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ  $\Delta E$ , καὶ κείσθω τῇ  $AB$  ἴση ἡ  $\Delta E$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $BE$ ,  $AE$ ,  $A\Delta$ .

Occurrant enim ipsæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  subjecto plano in  $B$ ,  $\Delta$  punctis, et jungatur ipsa  $B\Delta$ ; ipsæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  igitur in uno sunt plano. Ducatur ipsi  $B\Delta$  ad rectos in subjecto plano ipsa  $\Delta E$ , et ponatur ipsi  $AB$  æqualis  $\Delta E$ , et jungantur ipsæ  $BE$ ,  $AE$ ,  $A\Delta$ . Et quoniam  $AB$

PROPOSITION VIII.

Si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire à ce même plan.

Soient  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  deux droites parallèles, et que  $AB$  l'une de ces droites soit perpendiculaire à un plan inférieur; je dis que l'autre droite  $\Gamma\Delta$  sera aussi perpendiculaire à ce même plan.

Car, que les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  rencontrent le plan inférieur aux points  $B$ ,  $\Delta$ . Joignons  $B\Delta$ ; les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  seront dans un seul plan (7. 11). Menons dans le plan inférieur la droite  $\Delta E$  perpendiculaire à  $B\Delta$ ; faisons  $\Delta E$  égal à  $AB$ , et joignons  $BE$ ,  $AE$ ,  $A\Delta$ . Puisque  $AB$  est perpendiculaire au plan inférieur, elle

## 20 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἡ  $AB$  ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπίπεδῳ, πρὸς ἑκάστων<sup>2</sup> ἐστὶν ἡ  $AB$  ὀρθή ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $AB\Delta$ ,  $ABE$  γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα<sup>4</sup> ἐμπίπτωκεν ἡ  $B\Delta$ , αἱ ἄρα ὑπὸ  $AB\Delta$ ,  $\Gamma\Delta B$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $\Gamma\Delta B$  ἡ  $\Gamma\Delta$  ἄρα πρὸς τὴν  $B\Delta$  ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ , κοινὴ δὲ ἡ  $B\Delta$  δύο δὴ αἱ  $AB$ ,  $B\Delta$  δυσὶ ταῖς  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $E\Delta B$  ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσεις ἄρα ἡ  $A\Delta$  βάσει τῇ  $BE$  ἐστὶν<sup>5</sup> ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $\Delta E$ , ἡ δὲ  $BE$  τῇ  $A\Delta$  δύο δὴ αἱ  $AB$ ,  $BE$  δυσὶ ταῖς  $E\Delta$ ,  $\Delta A$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ  $AE$  γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $E\Delta A$  ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $ABE$  ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $E\Delta A$  ἡ  $E\Delta$  ἄρα πρὸς τὴν  $A\Delta$  ὀρθή ἐστὶν. Ἐστὶ δὲ καὶ πρὸς τὴν  $\Delta B$  ὀρθή· ἡ  $E\Delta$  ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν  $B\Delta$ ,  $\Delta A$  ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶ καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς

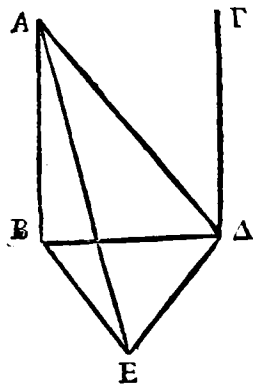
perpendicularis est ad subjectum planum, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et existentes in subjecto plano, ad rectos est ipsa  $AB$ ; rectus igitur est uterque angulorum  $AB\Delta$ ,  $ABE$ . Et quoniam in parallelas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  recta incidit  $B\Delta$ , ergo  $AB\Delta$ ,  $\Gamma\Delta B$  anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem  $AB\Delta$ ; rectus igitur et  $\Gamma\Delta B$ ; ergo  $\Gamma\Delta$  ad  $B\Delta$  perpendicularis est. Et quoniam æqualis est  $AB$  ipsi  $\Delta E$ , communis autem  $B\Delta$ ; duæ igitur  $AB$ ,  $B\Delta$  duabus  $E\Delta$ ,  $\Delta B$  æquales sunt, et angulus  $AB\Delta$  angulo  $E\Delta B$  æqualis, rectus enim uterque; basis igitur  $A\Delta$  basi  $BE$  est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem  $AB$  ipsi  $\Delta E$ , ipsa vero  $BE$  ipsi  $A\Delta$ ; duæ igitur  $AB$ ,  $BE$  duabus  $E\Delta$ ,  $\Delta A$  æquales sunt utraque utrique, et basis ipsorum communis  $AE$ ; angulus igitur  $ABE$  angulo  $E\Delta A$  est æqualis. Rectus autem  $ABE$ ; rectus igitur et  $E\Delta A$ ; ergo  $E\Delta$  ad  $A\Delta$  perpendicularis est. Est autem et ad  $\Delta B$  perpendicularis; ergo  $E\Delta$  et plano per ipsas  $B\Delta$ ,  $\Delta A$  perpendicularis est; et ad omnes igitur rectas contingentes ip-

sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11); les angles  $AB\Delta$ ,  $ABE$  sont donc droits l'un et l'autre. Et puisque la droite  $B\Delta$  tombe sur les parallèles  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , la somme des angles  $AB\Delta$ ,  $\Gamma\Delta B$  sera égale à deux angles droits (29. 1). Mais l'angle  $AB\Delta$  est droit; l'angle  $\Gamma\Delta B$  est donc droit aussi;  $\Gamma\Delta$  est donc perpendiculaire à  $B\Delta$ . Et puisque la droite  $AB$  est égale à la droite  $\Delta E$ , et que la droite  $B\Delta$  est commune, les deux droites  $AB$ ,  $B\Delta$  seront égales aux deux droites  $E\Delta$ ,  $\Delta B$ ; mais l'angle  $AB\Delta$  est égal à l'angle  $E\Delta B$ , car ils sont droits l'un et l'autre; la base  $A\Delta$  est donc égale à la base  $BE$  (4. 1). Mais  $AB$  est égal à  $\Delta E$ , et  $BE$  égal à  $A\Delta$ ; les deux droites  $AB$ ,  $BE$  sont donc égales aux deux droites  $E\Delta$ ,  $\Delta A$ , chacune à chacune; mais la base  $AE$  est commune; l'angle  $ABE$  est donc égal à l'angle  $E\Delta A$  (8. 1). Mais l'angle  $ABE$  est droit; l'angle  $E\Delta A$  est donc droit aussi;  $E\Delta$  est donc perpendiculaire à  $A\Delta$ . Mais  $E\Delta$  est aussi perpendiculaire à  $\Delta B$ ; la droite  $E\Delta$  est donc perpendiculaire au plan des droites  $B\Delta$ ,  $\Delta A$  (4. 11); la droite  $E\Delta$  est donc perpendiculaire à toutes les droites qui la

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 21

εὐθείας, καὶ οὐσας ἐν τῷ διὰ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  ἐπι-  
πέδῳ, ὁρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ  $ΕΔ$ . Ἐν δὲ τῷ διὰ  
τῶν  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$  ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ  $ΔΓ$ , ἐπειδήπερ ἐν  
τῷ διὰ τῶν  $ΒΔ$ ,  $ΔΑ$  ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$ .  
Ἐν ᾧ δὲ αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ  $ΔΓ$ .  
ἡ  $ΕΔ$  ἄρα τῇ  $ΔΓ$  πρὸς ὁρθὰς ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ

sam, et existentes in plano per  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ ;  
rectos faciet angulos ipsa  $ΕΔ$ . In plano autem  
per  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$  est ipsa  $ΔΓ$ , quoniam in plano  
per ipsas  $ΒΔ$ ,  $ΔΑ$  sunt ipsæ  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$ . In quo  
autem ipsæ  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  in hoc est et ipsa  $ΔΓ$ ;  
ergo  $ΕΔ$  ipsi  $ΔΓ$  ad rectos est; quare



$ΓΔ$  τῇ  $ΔΕ$  πρὸς ὁρθὰς ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  
 $ΓΔ$  τῇ  $ΒΔ$ . ἡ  $ΓΔ$  ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις  
ἀλλήλας ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $Δ$  το-  
μῆς πρὸς ὁρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε καὶ ἡ  $ΓΔ$  καὶ  
τῷ διὰ τῶν  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστὶ·  
τὸ δὲ διὰ τῶν  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  ἐπίπεδον τὸ ὑπο-  
κειμένον ἐστίν· ἡ  $ΓΔ$  ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέ-  
δῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et  $ΓΔ$  ipsi  $ΔΕ$  ad rectos est. Est autem et  
 $ΓΔ$  ipsi  $ΒΔ$ ; ergo  $ΓΔ$  duabus rectis  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  se  
mutuo secantibus in communi sectione  $Δ$  ad  
rectos insistit; quare et  $ΓΔ$  et plano per  $ΔΕ$ ,  
 $ΔΒ$  ad rectos est; sed per  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  planum  
subjectum est; ergo  $ΓΔ$  subjecto plano ad  
est. Quod oportebat ostendere.

rencontrent, et qui sont dans le plan des droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ . Mais  $ΔΓ$  est dans le plan des  
droites  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$ , parce que les droites  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  sont dans le plan des droites  $ΒΔ$ ,  $ΔΑ$   
(2. 11); et  $ΔΓ$  est dans le même plan que les droites  $ΑΒ$ ,  $ΒΔ$  (7. 11);  $ΕΔ$  est donc  
perpendiculaire à  $ΔΓ$ ; la droite  $ΓΔ$  est donc aussi perpendiculaire à  $ΔΕ$ . Mais  
 $ΓΔ$  est perpendiculaire à  $ΒΔ$ ; la droite  $ΓΔ$  est perpendiculaire aux deux droites  $ΔΕ$ ,  
 $ΔΒ$  au point  $Δ$  où elles se rencontrent; la droite  $ΓΔ$  est donc perpendiculaire au  
plan des droites  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  (4. 11); mais le plan des droites  $ΔΕ$ ,  $ΔΒ$  est le plan  
inférieur; la droite  $ΓΔ$  est donc perpendiculaire au plan inférieur. Ce qu'il fallait  
démontrer.

22 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

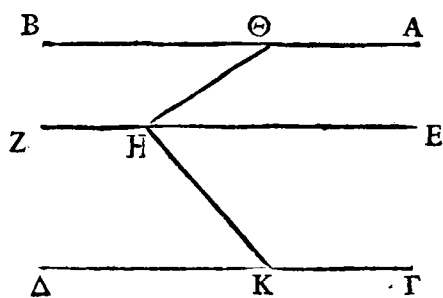
PROPOSITIO IX.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Εστω γὰρ ἑκατέρα τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τῇ  $EZ$  παράλληλος<sup>1</sup>, μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Rectæ eidem rectæ parallelæ, et non existentes cum illâ in eodem plano, et inter se sunt parallelæ.

Sit enim utraque ipsarum  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ipsi  $EZ$  parallelæ, non existentes cum illâ in eodem plano; dico parallelam esse  $AB$  ipsi  $\Gamma\Delta$ .



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $EZ$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $H$ , καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ  $EZ$  ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν  $EZ$ ,  $AB$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $H\Theta$ , ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν  $ZE$ ,  $\Gamma\Delta$  τῇ  $EZ$  πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $HK$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $EZ$  πρὸς ἑκατέραν τῶν  $H\Theta$ ,  $HK$  ὀρθή ἐστίν, ἡ  $EZ$  ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν  $H\Theta$ ,  $HK$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Καὶ ἐστὶν ἡ  $EZ$  τῇ  $AB$  παράλληλος· καὶ ἡ  $AB$  ἄρα<sup>2</sup>

Sumatur enim in  $EZ$  quodvis punctum  $H$ , et a quo ipsi  $EZ$  in plano quidem per  $EZ$ ,  $AB$  ad rectos ducatur  $H\Theta$ , in plano autem per ipsas  $ZE$ ,  $\Gamma\Delta$  ipsi  $EZ$  rursus ad rectos ducatur  $HK$ . Et quoniam  $EZ$  ad utramque ipsarum  $H\Theta$ ,  $HK$  perpendicularis est, ergo  $EZ$  et plano per  $H\Theta$ ,  $HK$  ad rectos est. Atque

PROPOSITION IX.

Les droites qui sont parallèles à une même droite, sans être dans le même plan que cette droite, sont aussi parallèles entr'elles.

Que les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  soient parallèles l'une et l'autre à  $EZ$ , sans être dans le même plan; je dis que  $AB$  est parallèle à  $\Gamma\Delta$ .

Car prenons dans  $EZ$  un point quelconque  $H$ , et de ce point menons dans le plan des droites  $EZ$ ,  $AB$  la droite  $H\Theta$  perpendiculaire à  $EZ$ , et dans le plan des droites  $ZE$ ,  $\Gamma\Delta$ , menons aussi  $HK$  perpendiculaire à  $ZE$ . Puisque la droite  $EZ$  est perpendiculaire à l'une et à l'autre des droites  $H\Theta$ ,  $HK$ , la droite  $EZ$  sera aussi perpendiculaire au plan des droites  $H\Theta$ ,  $HK$  (4. 11). Mais est  $EZ$  parallèle à  $AB$ ; la

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 23

τῷ διὰ τῶν  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.  
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$  τῷ διὰ τῶν  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$   
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν· ἑκατέρα ἄρα τῶν  
 $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τῷ διὰ τῶν  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$  ἐπιπέδῳ πρὸς  
ὀρθάς ἐστίν. Εἰ δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπι-  
πέδῳ πρὸς ὀρθάς ᾧσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ  
εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

est  $EZ$  ipsi  $AB$  parallela; et igitur  $AB$  plano  
per  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$  ad rectos est. Propter eadem  
utique et ipsa  $\Gamma\Delta$  plano per  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$  ad rectos  
est; utraque igitur ipsarum  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  plano per  
ipsas  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$  ad rectos est. Si autem  
duæ rectæ eidem plano ad rectos sint, pa-  
rallæ sunt rectæ; parallela igitur est  $AB$   
ipsi  $\Gamma\Delta$ . Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εἰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ  
δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ᾧσι, μὴ ἐν  
τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $BF$  ἀπτόμεναι ἀλλή-  
λων παρὰ δύο εὐθείας τὰς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἀπτομένας  
ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ·  
λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABF$  γωνία τῇ ὑπὸ  
 $\Delta EZ$ .

### PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ sese contingentes duabus rectis  
sese contingentibus sint parallæ, non in eo-  
dem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $BF$  sese contingentes  
duabus rectis  $\Delta E$ ,  $EZ$  sese contingentibus sint  
parallæ, non in eodem plano; dico æqualem  
esse angulum  $ABF$  ipsi  $\Delta EZ$ .

droite  $AB$  est donc perpendiculaire au plan qui passe par les points  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$   
(8. 11). Par la même raison, la droite  $\Gamma\Delta$  est perpendiculaire au plan qui passe  
par les points  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$ ; les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sont donc perpendiculaires l'une et l'autre  
au plan qui passe par les points  $\Theta$ ,  $H$ ,  $K$ . Mais si deux droites sont perpendicu-  
laires à un même plan, ces deux droites sont parallèles entr'elles (6. 11);  
la droite  $AB$  est donc parallèle à la droite  $\Gamma\Delta$ . Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION X.

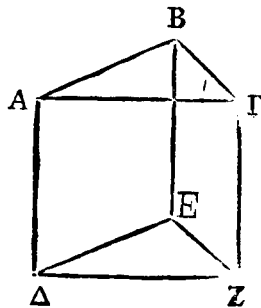
Si deux droites qui se touchent sont parallèles à deux droites qui se touchent,  
sans être dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux.

Que les deux droites  $AB$ ,  $BF$  qui se touchent soient parallèles aux deux droites  
 $\Delta E$ ,  $EZ$  qui se touchent, sans être dans le même plan; je dis que l'angle  $ABF$  est  
égal à l'angle  $\Delta EZ$ .

## 24 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Απειλήφθωσαν γὰρ αἱ  $BA, BG, EA, EZ$  ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $AD, FZ, BE, AG, \Delta Z$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $BA$  τῇ  $EA$  ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ  $AD$  ἄρα τῇ  $BE$  ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος<sup>2</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $FZ$  τῇ  $BE$  ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $AD, FZ$  τῇ  $BE$  ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος.

Assumantur enim ipsæ  $BA, BG, EA, EZ$  æquales inter se, et jungantur ipsæ  $AD, FZ, BE, AG, \Delta Z$ . Et quoniam  $BA$  ipsi  $EA$  æqualis est et parallela, et igitur  $AD$  ipsi  $BE$  æqualis est et parallela. Propter eadem utique et  $FZ$  ipsi  $BE$  æqualis est et parallela; utraque igitur ipsarum  $AD, FZ$  ipsi  $BE$  æqualis est et parallela. Sed rectæ



αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὐ-  
κὲν αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ<sup>3</sup> καὶ ἀλλήλαις  
εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AD$   
τῇ  $FZ$  καὶ ἴση. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ  
 $AG, \Delta Z$ · καὶ ἡ  $AG$  ἄρα τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἐστὶ καὶ  
παράλληλος. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $AB, BG$  δυσὶ ταῖς  
 $\Delta E, EZ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ  $AG$  βάσει τῇ  
 $\Delta Z$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABG$ <sup>4</sup> γωνία τῇ ὑπὸ  
 $\Delta EZ$  ἐστὶν ἴση.

eidem rectæ parallelæ, et non existentes eidem  
in eodem plano, et inter se sunt parallelæ; paral-  
lela igitur est  $AD$  ipsi  $FZ$  et æqualis. Et conjungunt  
ipsas ipsæ  $AG, \Delta Z$ ; et igitur  $AG$  ipsi  $\Delta Z$  æqualis  
est et parallela. Et quoniam duæ  $AB, BG$  duabus  
 $\Delta E, EZ$  æquales sunt, et basis  $AG$  basi  $\Delta Z$   
æqualis; angulus igitur  $ABG$  angulo  $\Delta EZ$  est  
æqualis.

Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Si igitur duæ, etc.

Car faisons les droites  $BA, BG, EA, EZ$  égales entr'elles; et joignons  $AD, FZ, BE, AG, \Delta Z$ . Puisque  $BA$  est égal et parallèle à  $EA$ ,  $AD$  sera égal et parallèle à  $BE$  (35. 1). Par la même raison, la droite  $FZ$  est égale et parallèle à  $BE$ ; donc les deux droites  $AD, FZ$  sont égales et parallèles chacune à la droite  $BE$ . Mais les parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles, sans être dans le même plan (9. 11); la droite  $AD$  est donc parallèle et égale à  $FZ$ . Mais ces parallèles sont jointes par les droites  $AG, \Delta Z$ ; la droite  $AG$  est donc parallèle et égale à  $\Delta Z$ . Mais les droites  $AB, BG$  sont égales aux deux droites  $\Delta E, EZ$ , et la base  $AG$  est égale à la base  $\Delta Z$ ; l'angle  $ABG$  est donc égal à l'angle  $\Delta EZ$  (8. 1). Si donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'

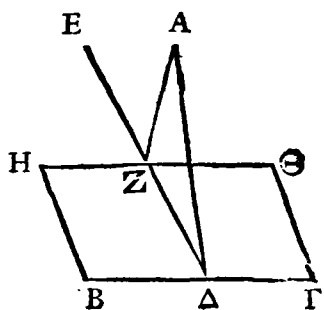
PROPOSITIO XI.

Απὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετέωρου ἐπὶ τὸ δοθὲν<sup>1</sup> ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον<sup>2</sup> εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον<sup>3</sup> ἐπίπεδον κάθετον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A dato puncto sublimi ad datum subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum sublime A, datum vero planum subjectum; oportet igitur a puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.



Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι, καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον<sup>4</sup> ἐπίπεδον, γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ

Ducatur enim quaedam in subjecto plano recta ut libet ΒΓ, et agatur a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ. Si quidem igitur ΑΔ perpendicularis est, et ad subjectum planum, factum erit quod proponebatur; si autem non, ducatur a puncto Δ ipsi ΒΓ in subjecto plano ad rectos ipsa ΔΕ, et ducatur a

PROPOSITION XI.

D'un point donné au-dessus d'un plan donné mener une ligne droite perpendiculaire à ce plan.

Soit donné un point A, soit donné aussi un plan inférieur; il faut du point A mener une ligne droite perpendiculaire au plan inférieur.

Car dans le plan inférieur, menons une droite ΒΓ d'une manière quelconque, et du point A menons ΑΔ perpendiculaire à ΒΓ (12. 1.) Si la droite ΑΔ est encore perpendiculaire au plan inférieur, on aura fait ce qui était proposé; si cela n'est pas, du point Δ et dans le plan inférieur menons la droite ΔΕ perpendiculaire à ΒΓ





τὴν  $H\Theta$ . Ἐστὶ δὲ ἡ  $AZ$  καὶ πρὸς τὴν  $\Delta E$  ὀρθή· ἡ  $AZ$  ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν  $H\Theta$ ,  $\Delta E$  ὀρθή ἐστίν. Ἐὰν δὲ εὐθεία δυὸν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς<sup>δ</sup> τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ  $ZA$  ἄρα τῷ διὰ τῶν  $E\Delta$ ,  $H\Theta$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Τὸ δὲ διὰ τῶν  $E\Delta$ ,  $H\Theta$  ἐπίπεδόν ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον· ἡ  $AZ$  ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος<sup>7</sup> σημείου μετεώρου τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ  $AZ$ . Ὅπῃ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ  $A$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

ad  $HQ$ . Est autem  $AZ$  et ad  $\Delta E$  perpendicularis; ergo  $AZ$  ad utramque ipsarum  $H\Theta$ ,  $\Delta E$  perpendicularis est. Si autem recta duabus rectis sese secantibus in sectione ad rectos insistat, et plano per ipsas ad rectos erit; ergo  $ZA$  plano per ipsas  $E\Delta$ ,  $H\Theta$  ad rectos est. Ipsum autem per ipsas  $E\Delta$ ,  $H\Theta$  est planum subjectum; ergo  $AZ$  subjecto plano ad rectos est.

A dato igitur puncto sublimi  $A$  ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est  $AZ$ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII.

Dato plano, a puncto in ipso dato, ad rectos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum vero  $A$  in ipso; oportet igitur a puncto  $A$  subjecto plano ad rectos rectam lineam constituere.

$ZA$  est donc perpendiculaire à  $H\Theta$ . Mais  $AZ$  est perpendiculaire à  $\Delta E$ ; la droite  $AZ$  est donc perpendiculaire à chacune des droites  $H\Theta$ ,  $\Delta E$ . Mais si une droite est perpendiculaire au point de section à deux droites qui se coupent, elle est aussi perpendiculaire au plan de ces deux droites (4. 11); la droite  $ZA$  est donc perpendiculaire au plan des droites  $E\Delta$ ,  $H\Theta$ . Mais le plan des droites  $E\Delta$ ,  $H\Theta$  est le plan inférieur; la droite  $AZ$  est donc perpendiculaire au plan inférieur.

On a donc mené du point donné  $A$ , pris au-dessus d'un plan, une ligne droite  $AZ$  perpendiculaire à ce plan. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

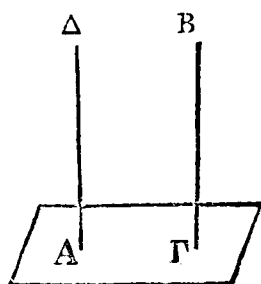
D'un point donné dans un plan donné, élever une ligne droite perpendiculaire à ce plan.

Soit donné un plan inférieur, et soit  $A$  le point donné dans ce plan; il faut du point  $A$  élever une ligne droite perpendiculaire au plan inférieur.

## 28 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Νενοήσθω μετέωρόν τι σημείον τὸ  $B^2$ , καὶ ἀπο τοῦ  $B$  ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ  $B\Gamma$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  σημείου τῇ  $B\Gamma$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $A\Delta$ .

Intelligatur sublime aliquod punctum  $B$ , et a puncto  $B$  ad subjectum planum perpendicularis ducatur  $B\Gamma$ , et per punctum  $A$  ipsi  $B\Gamma$  parallela ducatur  $A\Delta$ .



Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ  $A\Delta$ ,  $\Gamma B$ , ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ  $B\Gamma$  τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ  $A\Delta$  τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ  $A$  πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ  $A\Delta^3$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur duæ rectæ parallelæ sunt  $A\Delta$ ,  $\Gamma B$ , una autem ipsarum  $B\Gamma$  subjecto plano ad rectos est; et reliqua igitur  $A\Delta$  subjecto plano ad rectos est.

Dato igitur plano, a puncto  $A$  in ipso ad rectos constituta est ipsa  $A\Delta$ . Quod oportebat facere.

Imaginons un point quelconque  $B$ ; du point  $B$  menons  $B\Gamma$  perpendiculaire au plan inférieur (11. 11), et par le point  $A$  menons  $A\Delta$  parallèle à  $B\Gamma$  (31. 1).

Puisque les deux droites  $A\Delta$ ,  $\Gamma B$  sont parallèles, et que  $B\Gamma$ , l'une de ces droites, est perpendiculaire au plan inférieur, l'autre droite  $A\Delta$  est aussi perpendiculaire au plan inférieur (8. 11).

D'un point donné  $A$  dans le plan donné, on a donc élevé une perpendiculaire  $A\Delta$  à ce plan. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

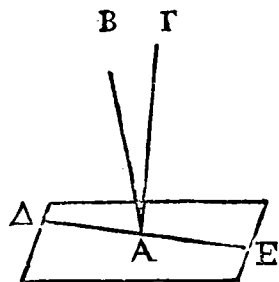
PROPOSITIO XIII.

Απὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ<sup>1</sup>,  
δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ  
τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου  
τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ  
ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν<sup>3</sup> ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπε-  
δον, τομὴν δὲ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑπο-

Ab eodem puncto eidem subjecto plano ; duæ  
rectæ ad rectos non constituentur ad easdem  
partes.

Si enim possibile, ab eodem puncto A subjecto  
plano duæ rectæ ΑΒ, ΑΓ ad rectos constituentur  
ad easdem partes, et ducatur planum per ΒΑ, ΑΓ,  
sectionem utique faciet per Α in subjecto plano



κειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ  
ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.  
Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς  
ὀρθὰς ἐστὶ, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομέ-  
νας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ  
ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ  
αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ.

rectam. Faciat ipsam ΔΑΕ ; ipsæ igitur ΑΒ, ΑΓ,  
ΔΑΕ rectæ in uno sunt plano. Et quoniam ΓΑ  
subjecto plano ad rectos est, et ad omnes igitur  
rectas contingentes ipsam, et existentes in sub-  
jecto plano rectos faciet angulos. Contingit au-  
tem ipsam ipsa ΔΑΕ existens in subjecto plano ;

PROPOSITION XIII.

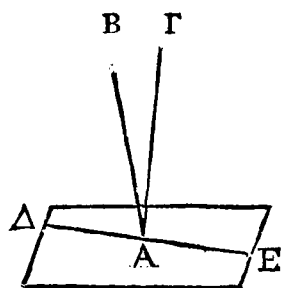
Du même point on ne peut élever du même côté deux perpendiculaires à  
un même plan inférieur.

Car si cela est possible ; du même point A soient élevées du même côté  
deux droites ΑΒ, ΑΓ perpendiculaires au plan inférieur ; conduisons un plan  
par les deux droites ΒΑ, ΑΓ ; ce plan, passant par le point Α, fera dans le plan  
inférieur une section qui sera une ligne droite (3. 11) ; que cette section soit ΔΑΕ ;  
les droites ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ seront dans un seul plan. Et puisque ΓΑ est perpendiculaire  
au plan inférieur, elle est perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent  
et qui sont dans le plan inférieur (déf. 3. 11). Mais la droite ΔΑΕ, qui est dans le

### 30 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ εἰσιν ἐν τῷ ἐνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ergo  $\Gamma A E$  angulus rectus est. Propter eadem utique et ipse  $B A E$  rectus est; æqualis igitur  $\Gamma A E$  ipsi  $B A E$ , et sunt in uno plano, quod est impossibile.



Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ<sup>5</sup> δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Non igitur ab eodem puncto eidem plano duæ rectæ ad rectos constituentur ad easdem partes. Quod oportebat ostendere.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

#### PROPOSITIO XIV.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Ad quæ plana eadem recta perpendicularis est, parallela erunt plana.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  πρὸς ἐκάτερον τῶν  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$  ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Recta enim quædam  $AB$  ad utrumque ipsorum  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$  planorum ad rectos sit; dico parallela esse plana.

plan inférieur, rencontre cette droite; l'angle  $\Gamma A E$  est donc droit. L'angle  $B A E$  est droit par la même raison; l'angle  $\Gamma A E$  est donc égal à l'angle  $B A E$ ; mais ces angles sont dans un seul plan, ce qui est impossible (ax. 9).

Du même point on ne peut donc pas élever du même côté deux perpendiculaires à un même plan. Ce qu'il fallait démontrer.

#### PROPOSITION XIV.

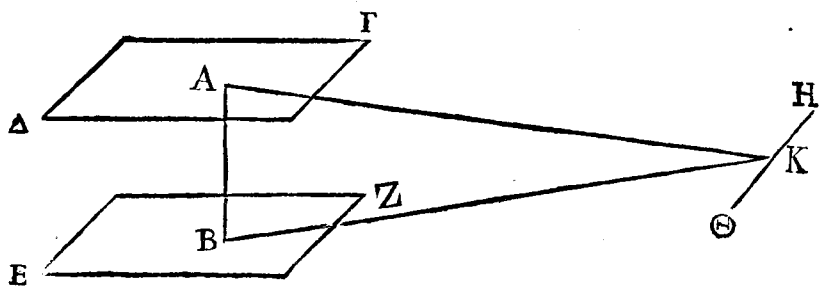
Les plans auxquels une même droite est perpendiculaire sont parallèles entr'eux.

Que la droite  $AB$  soit perpendiculaire à chacun des plans  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ; je dis que ces plans sont parallèles.

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Συμ-  
πιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεΐαν.

Si enim non, producta convenient inter se.  
Convenient; facient utique communem sectio-



Ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ  
τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  
ΑΚ, ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ  
ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεΐαν οὔσαν  
ἐν τῷ ΕΖ ἐκκλητέντι<sup>2</sup> ἐπίπεδῳ ὀρθή ἐστίν ἡ ΑΒ·  
ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ  
δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὴ<sup>3</sup> τοῦ  
ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν  
ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι<sup>4</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ  
ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπε-  
σοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ  
ἐπίπεδα.

nem rectam. Faciant ipsam ΗΘ, et sumatur in  
ipsâ ΗΘ quodlibet punctum Κ, et jungantur ipsæ  
ΑΚ, ΒΚ. Et quoniam ΑΒ perpendicularis est  
ad planum ΕΖ, et ad ΒΚ igitur rectam exis-  
tentem in ΕΖ producto plano perpendicularis  
est ΑΒ; ergo angulus ΑΒΚ rectus est. Propter  
eadem utique et angulus ΒΑΚ rectus est, trian-  
guli igitur ΑΒΚ duo anguli ΑΒΚ, ΒΑΚ duo-  
bus rectis sunt æquales, quod est impossibile;  
non igitur plana ΓΔ, ΕΖ producta convenient;  
parallela igitur sunt ΓΔ, ΕΖ plana.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Ad quæ igitur, etc.

Car si cela n'est point, ces plans étant prolongés se rencontreront. Qu'ils se  
rencontrent; leur section sera une ligne droite (3. 11). Que cette section  
soit ΗΘ; prenons dans ΗΘ un point quelconque Κ, et joignons ΑΚ, ΒΚ. Puisque la  
droite ΑΒ est perpendiculaire au plan ΕΖ, la droite ΑΒ est perpendiculaire à la  
droite ΒΚ qui est dans le prolongement du plan ΕΖ (déf. 3. 11); l'angle  
ΑΒΚ est donc droit. L'angle ΒΑΚ est droit par la même raison; les deux angles  
ΑΒΚ, ΒΑΚ du triangle ΑΒΚ sont donc égaux à deux angles droits, ce qui est impos-  
sible (17. 1); les plans ΓΔ, ΕΖ étant prolongés, ne se rencontreront donc point;  
les plans ΓΔ, ΕΖ sont donc parallèles. Donc, etc.

# 32 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

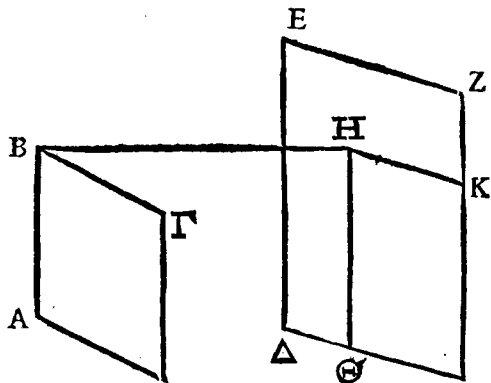
Εάν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὥσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· παραλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, BG παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB, BG, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

## PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese tangentes duabus rectis sese tangentibus parallelæ sint, non in eodem plano existentes; parallela sunt per ipsas plana.

Duæ enim rectæ sese tangentes AB, BG duabus rectis sese tangentibus ΔΕ, ΕΖ sint parallelæ, non in eodem plano existentes; dico producta plana per AB, BG, ΔΕ, ΕΖ non convenire inter se.



Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἡχθω ἡ ΗΘ,

Ducatur enim a puncto B ad planum per ΔΕ, ΕΖ perpendicularis BH, et occurrat plano in H puncto, et per H ipsi quidem ΕΔ parallela ducatur ΗΘ, ipsi vero ΕΖ ipsa HK.

## PROPOSITION XV.

Si deux droites qui se touchent sont parallèles à deux droites qui se touchent, et qui ne sont pas dans le même plan, les plans qui passent par ces droites sont parallèles.

Que les droites AB, BG qui se touchent soient parallèles aux deux droites ΔΕ, ΕΖ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan; je dis que les plans qui passent par les droites AB, BG, ΔΕ, ΕΖ ne se rencontreront point, s'ils sont prolongés.

Car du point B menons au plan qui passe par les droites ΔΕ, ΕΖ la perpendiculaire BH, et que cette droite rencontre ce plan au point H (31. 1); par le point H



τῇ δὲ EZ ἢ HK. Καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕτως ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὕτως ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδῳ ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BHΘ, BHK γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BA τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ HBA, BHΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BHΘ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HBA· ἡ HB ἄρα τῇ BA πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ BH καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ BH δυσὶν εὐθείαις ταῖς BA, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ἡ BH ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν BA, ΒΓ ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ BH καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ BH ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. Ἐδείχθη δὲ ἡ HB καὶ τῷ διὰ τῶν AB, ΒΓ ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς· ἐστὶ δὲ καὶ τῷ διὰ

Et quoniam BH perpendicularis est ad planum per ΔΕ, ΕΖ, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam et existentes in plano per ΔΕ, ΕΖ rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam utraque ipsarum ΗΘ, ΗΚ existens in plano per ΔΕ, ΕΖ; rectus igitur uterque angulorum BHΘ, BHK. Et quoniam parallela est BA ipsi ΗΘ; ipsi igitur HBA, BHΘ anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem BHΘ; rectus igitur et HBA; ipsa igitur HB ipsi BA ad rectos est. Propter eadem utique BH et ipsi ΒΓ est ad rectos. Quoniam igitur recta BH duabus rectis BA, ΒΓ se mutuo secantibus ad rectos insistit; ipsa igitur BH et plano per BA, ΒΓ ad rectos est. Propter eadem utique BH et plano per ΗΘ, ΗΚ ad rectos est. Sed planum per ΗΘ, ΗΚ est ipsum per ΔΕ, ΕΖ; ipsa igitur BH plano per ΔΕ, ΕΖ est ad rectos. Ostensa autem est HB et plano per AB, ΒΓ ad rectos; est

menons ΗΘ parallèle à ΕΔ et ΗΚ parallèle à ΕΖ ( 31. 1 ). Puisque la droite BH est perpendiculaire au plan des droites ΔΕ, ΕΖ, elle fera des angles droits avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan des droites ΔΕ, ΕΖ ( déf. 3. 11 ). Mais cette droite est rencontrée par chacune des droites ΗΘ, ΗΚ qui sont dans le plan des droites ΔΕ, ΕΖ; les angles BHΘ, BHK sont donc droits l'un et l'autre. Et puisque BA est parallèle à ΗΘ, les angles HBA, BHΘ seront égaux à deux angles droits ( 29. 1 ). Mais l'angle BHΘ est droit; l'angle HBA est donc droit; donc HB est perpendiculaire à BA. Par la même raison, BH est perpendiculaire à ΒΓ. Et puisque la droite BH est perpendiculaire aux deux droites BA, ΒΓ qui se coupent mutuellement, la droite HB sera perpendiculaire au plan des deux droites BA, ΒΓ ( 4. 11 ). Par la même raison, la droite BH est perpendiculaire au plan des droites ΗΘ, ΗΚ. Mais le plan des droites ΗΘ, ΗΚ est le même que celui des droites ΔΕ, ΕΖ; la droite BH est donc perpendiculaire au plan des droites ΔΕ, ΕΖ. Mais on a démontré que la droite HB est aussi perpendiculaire au plan des droites AB, ΒΓ; et cette droite est aussi perpendiculaire au plan des



### 34 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστὶ<sup>3</sup>. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστὶ, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

autem et plano per ΔΕ, ΕΖ perpendicularis; ipsa igitur ΒΗ ad utrumque planorum per ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ perpendicularis est. Ad quæ vero plana eadem recta perpendicularis est, parallela sunt ea plana; parallelum igitur est planum per ΑΒ, ΒΓ ipsi per ΔΕ, ΕΖ.

Si igitur duæ, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Εὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοινὰ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. Εκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπ-

#### PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela a plano aliquo secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt.

Duo enim plana parallela ΑΒ, ΓΔ a plano ΕΖΗΘ secantur, communes autem ipsorum sectiones sint ipsæ ΕΖ, ΗΘ; dico parallelam esse ΕΖ ipsi ΗΘ.

Si enim non, productæ ΕΖ, ΗΘ, vel ad partes Ζ, Θ, vel ad Ε, Η convenient. Producantur ut ad partes Ζ, Θ, et convenient primum in Κ.

droites ΔΕ, ΕΖ; la droite ΒΗ est donc perpendiculaire à chacun des plans des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ. Mais les plans auxquels une même droite est perpendiculaire sont parallèles entre eux (14. 11); le plan des droites ΑΒ, ΒΓ est donc parallèle à celui des droites ΔΕ, ΕΖ. Donc, etc.

#### PROPOSITION XVI.

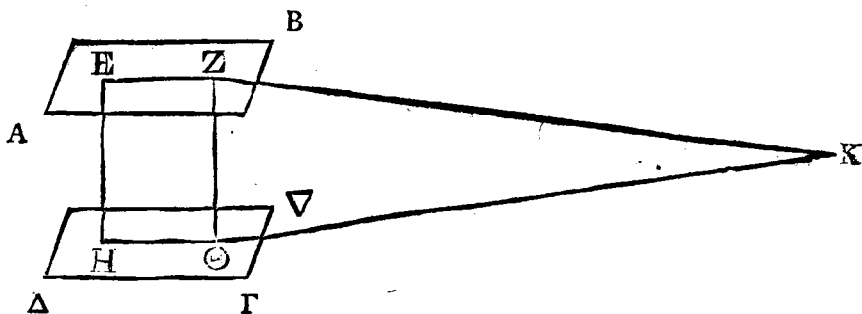
Si deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque, leurs communes sections sont parallèles.

Car que les plans parallèles ΑΒ, ΓΔ soient coupés par un plan ΕΖΗΘ, et que leurs communes sections soient ΕΖ, ΗΘ; je dis que ΕΖ est parallèle à ΗΘ.

Car que cela ne soit point; prolongeons les droites ΕΖ, ΗΘ; ces droites se rencontreront ou du côté des points Ζ, Θ, ou du côté des points Ε, Η. Prolongeons

τίτωσαν πρότερον<sup>2</sup> κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἵπεί ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεία ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ<sup>3</sup>. Ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημείον ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν

Et quoniam ipsa ΕΖΚ in ΑΒ est plano, et omnia igitur in ipsâ ΕΖΚ puncta in ΑΒ sunt plano. Unum autem ipsorum in rectâ ΕΖΚ punctum est Κ; ipsum igitur Κ in ΑΒ est plano. Propter eadem



τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Οὐ συμπέπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη σύμπεσοῦνται<sup>4</sup>. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ<sup>5</sup> μέρη συμπέπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

utique ipsum Κ et in ΓΔ est plano; ipsa igitur ΑΒ, ΓΔ plana producta convenient. Non conveniunt autem, cum parallela supponantur; non igitur ΕΖ, ΗΘ rectæ productæ ad partes Ζ, Θ convenient. Similiter utique demonstrabimus rectas ΕΖ, ΗΘ neque ad partes Ε, Η productas convenire. Ipsæ autem neutrà ex parte convenientes parallelæ sunt; parallela igitur est ΕΖ ipsi ΗΘ.

Si igitur duo, etc.

ces droites vers les points Ζ, Θ, et qu'elles se rencontrent d'abord au point Κ. Puisque la droite ΕΖΚ est dans le plan ΑΒ, tous les points pris dans ΕΖΚ seront dans le plan ΑΒ. Mais le point Κ est un point de la droite ΕΖΚ; le point Κ est donc dans le plan ΑΒ. Par la même raison, le point Κ est dans le plan ΓΔ; les plans ΑΒ, ΓΔ prolongés se rencontreront donc entr'eux. Mais ces plans ne se rencontrent point, puisqu'ils sont parallèles par supposition; les droites ΕΖ, ΗΘ prolongées ne se rencontreront donc pas du côté des points Ζ, Θ. Nous démontrerons semblablement que les droites ΕΖ, ΗΘ prolongées ne se rencontreront point du côté des points Ε, Η. Mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35. 1); la droite ΕΖ est donc parallèle à la droite ΗΘ. Donc si, etc,

# 36 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

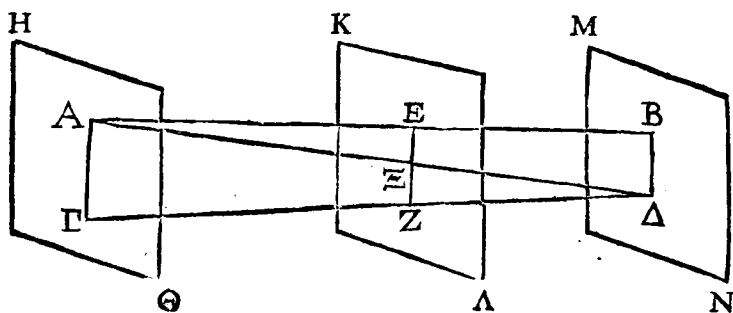
## PROPOSITIO XVII.

Εάν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν  $H\Theta$ ,  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $Z$ ,  $\Delta$  σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $AE$  εὐθεῖα πρὸς τὴν  $EB$  οὕτως ἡ  $\Gamma Z$  πρὸς τὴν  $Z\Delta$ .

Si duæ rectæ a parallelis planis secantur, in eâdem ratione secabuntur.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  a parallelis planis  $H\Theta$ ,  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  secantur in punctis  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $Z$ ,  $\Delta$ ; dico esse ut recta  $AE$  ad  $EB$  ita ipsam  $\Gamma Z$  ad  $Z\Delta$ .



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΑΓ$ ,  $B\Delta$ ,  $A\Delta$ , καὶ συναλλέτω ἡ  $A\Delta$  τῷ  $\text{ΚΛ}$  ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ  $\Xi$  σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $E\Xi$ ,  $\Xi Z$ . Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ  $EB\Delta\Xi$  τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ  $E\Xi$ ,  $B\Delta$  παράλληλοί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ

Jungantur enim ipsæ  $ΑΓ$ ,  $B\Delta$ ,  $A\Delta$ , et occurrat  $A\Delta$  plano  $\text{ΚΛ}$  in puncto  $\Xi$ , et jungantur ipsæ  $E\Xi$ ,  $\Xi Z$ . Et quoniam duo plana parallela  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  a plano  $EB\Delta\Xi$  secantur, communes ipsorum sectiones  $E\Xi$ ,  $B\Delta$  parallelæ sunt. Propter eadem

## PROPOSITION XVII.

Si deux droites sont coupées par des plans parallèles, elles seront coupées en même raison.

Que les deux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  soient coupées par les plans parallèles  $H\Theta$ ,  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  aux points  $A$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $Z$ ,  $\Delta$ ; je dis que  $AE$  est à  $EB$  comme  $\Gamma Z$  est à  $Z\Delta$ .

Car joignons  $ΑΓ$ ,  $B\Delta$ ,  $A\Delta$ , et que la droite  $A\Delta$  rencontre le plan  $\text{ΚΛ}$  au point  $\Xi$ , et joignons  $E\Xi$ ,  $\Xi Z$ . Puisque les deux plans parallèles  $\text{ΚΛ}$ ,  $MN$  sont coupés par le plan  $EB\Delta\Xi$ , leurs sections communes  $E\Xi$ ,  $B\Delta$  sont parallèles (16. 1). Par

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 37

δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ  $H\Theta$ ,  $K\Lambda$  ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ  $A\Xi Z\Gamma$  τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ  $A\Gamma$ ,  $\Xi Z$  παράλληλοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $AB\Delta$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $BA$  εὐθεῖα ἤκται ἡ  $E\Xi$ , ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν<sup>2</sup> ὡς  $AE$  πρὸς τὴν<sup>3</sup>  $EB$  οὕτως ἡ  $A\Xi$  πρὸς τὴν<sup>4</sup>  $\Xi\Delta$ . Πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $A\Delta\Gamma$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $A\Gamma$  εὐθεῖα ἤκται ἡ  $\Xi Z$ , ἀνάλογον ἐστὶν<sup>5</sup> ὡς ἡ  $A\Xi$  πρὸς τὴν<sup>6</sup>  $\Xi\Delta$  οὕτως ἡ  $\Gamma Z$  πρὸς τὴν<sup>7</sup>  $Z\Delta$ . Εἰδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ  $A\Xi$  πρὸς τὴν<sup>8</sup>  $\Xi\Delta$  οὕτως ἡ  $AE$  πρὸς τὴν<sup>9</sup>  $EB$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $AE$  πρὸς τὴν<sup>10</sup>  $EB$  οὕτως ἡ  $\Gamma Z$  πρὸς τὴν<sup>11</sup>  $Z\Delta$ .

Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Εὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἵσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς  $AB$  ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἵσται<sup>1</sup>.

utique, quoniam duo plana parallela  $H\Theta$ ,  $K\Lambda$  a plano  $A\Xi Z\Gamma$  secantur, communes ipsorum sectiones  $A\Gamma$ ,  $\Xi Z$  parallelæ sunt. Et quoniam trianguli  $AB\Delta$  ad unum laterum ipsum  $BA$  recta ducta est  $E\Xi$ , proportionaliter igitur est ut  $AE$  ad  $EB$  ita  $A\Xi$  ad  $\Xi\Delta$ . Rursus quoniam trianguli  $A\Delta\Gamma$  ad unum laterum ipsum  $A\Gamma$  recta ducta est  $\Xi Z$ , proportionaliter est ut  $A\Xi$  ad  $\Xi\Delta$  ita  $\Gamma Z$  ad  $Z\Delta$ . Ostensum est autem et ut  $A\Xi$  ad  $\Xi\Delta$  ita  $AE$  ad  $EB$ ; et ut igitur  $AE$  ad  $EB$  ita  $\Gamma Z$  ad  $Z\Delta$ .

Si igitur duæ, etc.

### PROPOSITIO XVIII.

Si recta plano alicui ad rectos sit, et omnia per ipsam plana eidem plano ad rectos erunt.

Recta enim quædam  $AB$  subjecto plano ad rectos sit; dico et omnia per ipsam  $AB$  plana eidem subjecto plano ad rectos esse.

la même raison, puisque les deux plans parallèles  $H\Theta$ ,  $K\Lambda$  sont coupés par le plan  $A\Xi Z\Gamma$ , leurs sections communes  $A\Gamma$ ,  $\Xi Z$  seront parallèles. Et puisque la droite  $E\Xi$  est menée parallèlement à un des côtés  $BA$  du triangle  $AB\Delta$ , la droite  $AE$  sera à la droite  $EB$  comme la droite  $A\Xi$  est à la droite  $\Xi\Delta$  (2. 6). De plus, puisque la droite  $\Xi Z$  est menée parallèlement à un des côtés  $A\Gamma$  du triangle  $A\Delta\Gamma$ , la droite  $A\Xi$  est à la droite  $\Xi\Delta$  comme la droite  $\Gamma Z$  est à la droite  $Z\Delta$ . Mais on a démontré que la droite  $A\Xi$  est à la droite  $\Xi\Delta$  comme la droite  $AE$  est à la droite  $EB$ ; la droite  $AE$  est donc à la droite  $EB$  comme la droite  $\Gamma Z$  est à la droite  $Z\Delta$  (11. 5). Donc si, etc.

### PROPOSITION XVIII.

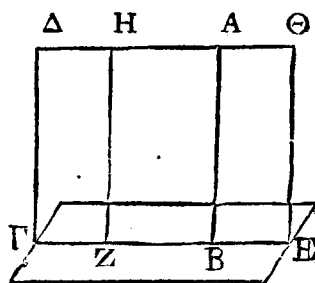
Si une droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans qui passeront par cette droite seront perpendiculaires à ce même plan.

Qu'une droite quelconque  $AB$  soit perpendiculaire à un plan inférieur; je dis que tous les plans qui passent par la droite  $AB$  sont perpendiculaires à ce même plan inférieur.

### 38 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς

Producatur enim per ipsam AB planum ΔΕ, et sit communis sectio plani ΔΕ et plani subjecti ipsa ΓΕ, et sumatur in ΓΕ quodlibet punctum Ζ, et ab ipso Ζ ipsi ΓΕ ad rectos ducatur in plano ΔΕ ipsa ΖΗ. Et quoniam AB ad subjectum planum perpendicularis est, et ad omnes igitur rectas contingentes ipsam, et exis-



εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστίν ἡ AB· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθή ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ HZB ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστίν<sup>2</sup> ἡ AB τῇ ΖΗ. Ἡ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ· καὶ ἡ HZ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ. Καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων

tentés in subjecto plano perpendicularis est AB; quare et ipsa ad ΓΕ perpendicularis est; angulus igitur ABZ rectus est. Est autem et ipse HZB rectus; parallela igitur est AB ipsi ΖΗ. Ipsa autem AB subjecto plano ad rectos est; et ipsa HZ igitur subjecto plano ad rectos est. Et planum ad planum rectum est, quando communi sectioni planorum ad rectos ductæ rectæ in uno planorum reliquo plano ad rectos sunt,

Car menons le plan ΔΕ par la droite AB, et que la droite ΓΕ soit la commune section du plan ΔΕ et du plan inférieur; dans la droite ΓΕ prenons un point quelconque Ζ; de ce point Ζ et dans le plan ΔΕ menons la droite ΖΗ perpendiculaire à la droite ΓΕ. Puisque la droite AB est perpendiculaire au plan inférieur, cette droite AB sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11); la droite AB est donc perpendiculaire à la droite ΓΕ; l'angle ABZ est donc droit. Mais l'angle HZB est droit aussi; AB est donc parallèle à ΖΗ (28. 1). Mais AB est perpendiculaire au plan inférieur; HZ est donc perpendiculaire au plan inférieur (8. 11). Mais un plan est perpendiculaire à un plan, lorsque les droites menées dans l'un de ces plans sont perpendicu-

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 39

τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὡσι, καὶ τῇ κοινῇ  
τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων  
τῷ ΔΕ<sup>3</sup> πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ εἰδείχθη τῷ ὑπο-  
κειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον  
ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον<sup>4</sup>. Ομοίως  
δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα  
ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.  
Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ  
τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ  
αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ  
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ  
ἐστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ  
πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

Μὴ γὰρ, καὶ ᾗχθωσαν ὑπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν  
μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς

et communi sectioni ΓΕ planorum in uno  
planorum plano ΔΕ ad rectos ducta ΖΗ ostensa  
est subjecto plano ad rectos; ergo ΔΕ planum  
rectum est ad subjectum planum. Similiter  
utque demonstrabuntur et omnia per ipsam ΑΒ  
plana recta quælibet ad subjectum planum.

Si igitur recta, etc.

### PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se mutuo secantia plano alicui ad  
rectos sint, et communis ipsorum sectio eidem  
plano ad rectos erit.

Duo enim plana ΑΒ, ΒΓ subjecto plano ad  
rectos sint, communis autem ipsorum sectio  
sit ΒΔ; dico ΒΔ subjecto plano ad rectos esse.

Non enim, et ducatur a puncto Δ in plano  
quidem ΑΒ rectæ ΑΔ ad rectos ipsa ΔΕ, in

laïres à leur commune section et à l'autre plan ( déf. 4. 11 ), et l'on a démontré  
que la droite ΖΗ menée dans le plan ΔΕ perpendiculairement à la droite ΓΕ, com-  
mune section des plans, est aussi perpendiculaire au plan inférieur; le plan ΔΕ  
est donc perpendiculaire au plan inférieur. Nous démontrerons semblablement  
que tous les autres plans qui passent par la droite ΑΒ sont aussi perpendiculaires  
au plan inférieur. Donc si, etc.

### PROPOSITION XIX.

Si deux plans qui se coupent mutuellement sont perpendiculaires à un plan,  
leur commune section sera aussi perpendiculaire à ce plan.

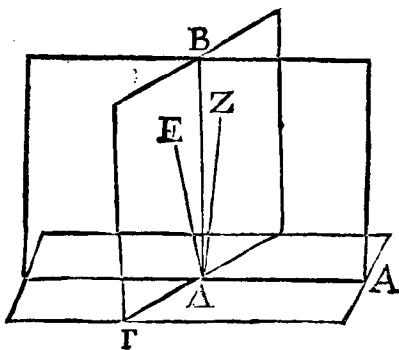
Que deux plans ΑΒ, ΒΓ soient perpendiculaires à un plan inférieur, et que  
leur commune section soit ΒΔ; je dis que la droite ΒΔ est perpendiculaire au plan  
inférieur.

Car que cela ne soit pas; du point Δ menons dans le plan ΑΒ la droite ΔΕ  
perpendiculaire à la droite ΑΔ ( 11.1 ), et du même point et dans le plan ΒΓ

40 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς  
ἡ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς  
τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ  
ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ  
ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.  
Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστὶ πρὸς  
τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα

plano autem ΒΓ ipsi ΓΔ ad rectos ipsa ΔΖ.  
Et quoniam planum ΑΒ rectum est ad sub-  
jectum, et communi ipsorum sectioni ΑΔ ad  
rectos in plano ΑΒ ducta est ΔΕ; ergo ΔΕ  
perpendicularis est ad subjectum planum. Simi-  
liter utique demonstrabimus et ΔΖ perpendi-  
cularem esse ad subjectum planum; ergo ab



σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐ-  
θεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα τῷ ὑποκει-  
μένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται  
πρὸς ὀρθὰς<sup>2</sup>, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν  
ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

eodem puncto Δ subjecto plano duæ rectæ ad  
rectos constitutæ sunt ex eâdem parte, quod  
est impossibile; non igitur subjecto plano a  
puncto Δ constituentur ad rectos, præter ipsam  
ΔΒ communem sectionem planorum ΑΒ, ΒΓ.

Si igitur duo, etc.

menons la droite ΔΖ perpendiculaire à la droite ΓΔ. Puisque le plan ΑΒ est perpen-  
diculaire au plan inférieur, et que la droite ΔΕ a été menée dans le plan ΑΒ per-  
pendiculairement à la commune section ΑΔ de ces plans, la droite ΔΕ sera perpen-  
diculaire au plan inférieur. Nous démontrerons semblablement que ΔΖ est per-  
pendiculaire au plan inférieur; du même point Δ on a donc mené du même côté  
deux perpendiculaires au plan inférieur, ce qui est impossible (13. 11); du  
point Δ on ne peut donc pas mener d'autres droites qui soient perpendiculaires  
au plan inférieur, si ce n'est la commune section ΔΒ des plans ΑΒ, ΒΓ. Donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

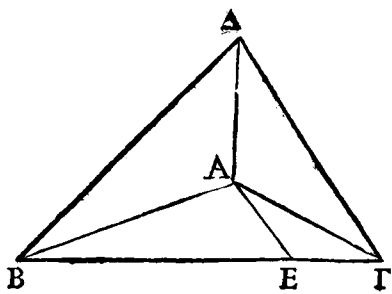
Εάν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιέχεται· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιοῦν τῶν λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνονται.

PROPOSITIO XX.

Si solidus angulus sub tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt quomodocunque sumpti.

Solidus enim angulus ad A sub tribus angulis planis ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ contineatur; dico angulorum ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ duos quoslibet reliquo majores esse quomodocunque sumptos,



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερόν ὅτι δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν<sup>1</sup>. Εἰ δὲ οὐ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ,

Si quidem igitur ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ anguli æquales inter se sint, evidens est duos quoslibet reliquo majores esse. Si autem non, sit major angulus ΒΑΓ, et constituatur ad rectam ΑΒ, et ad punctum in ipsâ Α angulo ΔΑΒ in plano per ΒΑΓ æqualis angulus ΒΑΕ, et ponatur ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et per punctum Ε

PROPOSITION XX.

Si un angle solide est compris sous trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant.

Que l'angle solide A soit compris sous les trois angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; je dis que deux quelconques des trois angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant.

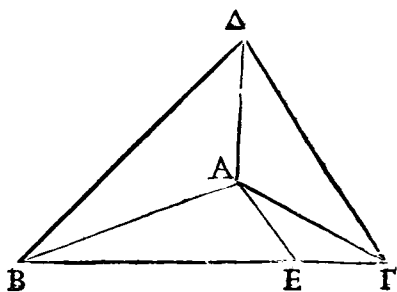
Car si les angles ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ sont égaux entr'eux, il est évident que deux quelconques de ces angles sont plus grands que l'angle restant. Si cela n'est point, que l'angle ΒΑΓ soit le plus grand. Sur la droite ΑΒ et au point Α de cette droite, construisons dans le plan ΒΑΓ l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΔΑΒ (23. 11); faisons ΑΕ égal à ΑΔ (3. 1); que la droite ΒΕΓ, menée par le point Ε, coupe



42 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω  
τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεία, καὶ  
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ  
τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δὲ ΔΑ, ΑΒ δυσὶν ΑΕ,  
ΑΒ ἴσαι<sup>3</sup>, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ  
ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ  
ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΔΓ τῇ ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ  
ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς  
τῆς ΕΓ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ  
ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς  
ΕΓ μείζων ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία

ducta BEΓ secet rectas AB, AG in B, Γ punctis,  
et jungantur ipsæ AB, AG. Et quoniam æqualis  
est ΔΑ ipsi ΑΕ, communis autem ΑΒ, duæ igitur  
ΔΑ, ΑΒ duabus ΑΕ, ΑΒ æquales, et an-  
gulus ΔΑΒ angulo ΒΑΕ æqualis; basis igitur  
ΔΒ basi ΒΕ est æqualis. Et quoniam duæ ΔΒ,  
ΔΓ ipsâ ΒΓ majores sunt, ex quibus ΔΒ ipsi  
ΒΕ ostensa est æqualis; reliqua igitur ΔΓ reli-  
quâ ΕΓ major est. Et quoniam æqualis est ΔΑ  
ipsi ΑΕ, communis autem ΑΓ, et basis ΔΓ  
basi ΕΓ major est; angulus igitur ΔΑΓ angulo



τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστὶν. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ  
ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ,  
ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. Ομοίως δὲ  
δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι  
τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Εὰν ἄρα στερεὰ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΕΑΓ major est. Ostensus est autem et angulus  
ΔΑΒ ipsi ΒΑΕ æqualis; anguli igitur ΔΑΒ, ΔΑΓ  
angulo ΒΑΓ majores sunt. Similiter utique de-  
monstrabimus et reliquos duos quoslibet sumptos  
reliquo majores esse.

Si igitur, etc.

les droites AB, AG aux points B, Γ, et joignons ΔΒ, ΔΓ. Puisque ΔΑ est égal à ΑΕ, et que la droite AB est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΑΕ, ΑΒ; mais l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΒΑΕ; la base ΔΒ est donc égale à la base ΒΕ (4. 1). Et puisque les deux droites ΔΒ, ΔΓ sont plus grandes que la droite ΒΓ, et qu'on a démontré que la droite ΔΒ est égale à la droite ΒΕ, la droite restante ΔΓ sera plus grande que la droite restante ΕΓ. Et puisque la droite ΔΑ est égale à la droite ΑΕ, que la droite ΑΓ est commune, et que la base ΔΓ est plus grande que la base ΕΓ, l'angle ΔΑΓ sera plus grand que l'angle ΕΑΓ (25. 1). Mais on a démontré que l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΒΑΕ; les angles ΔΑΒ, ΔΑΓ sont donc plus grands que l'angle ΒΑΓ. Si l'on prend deux autres angles quelconques, nous démontrerons semblablement qu'ils sont plus grands que l'angle restant. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

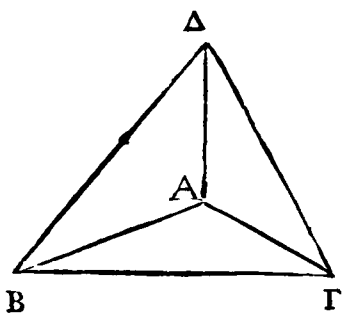
PROPOSITIO XXI.

Ἀπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Ἐστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Sit solidus angulus ad A contentus planis angulis ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; dico angulos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ quatuor rectis minores esse.



Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἐκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιασοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὴν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν. Αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές

Sumantur enim in unâquâque ipsarum ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ quælibet puncta Β, Γ, Δ, et jungantur ipsæ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Et quoniam solidus angulus ad Β sub tribus angulis planis continetur ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, duo quilibet reliquo majores sunt; anguli igitur ΓΒΑ, ΑΒΔ angulo ΓΒΔ majores sunt. Propter eadem utique et anguli quidem ΒΓΑ, ΑΓΔ angulo ΒΓΔ majores sunt. Anguli autem ΓΔΑ, ΑΔΒ angulo ΓΔΒ majores sunt;

PROPOSITION XXI.

Tout angle solide est compris sous des angles plans qui sont plus petits que quatre angles droits.

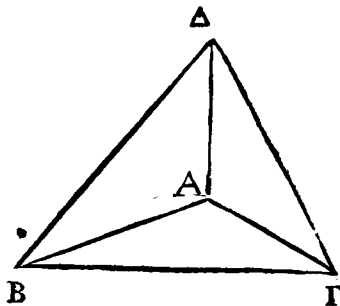
Soit l'angle solide A compris sous les angles plans ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ; je dis que les angles ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ sont plus petits que quatre angles droits.

Car dans chacune des droites ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, prenons des points quelconques Β, Γ, Δ, et joignons ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Puisque l'angle solide Β est compris sous les trois angles plans ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, deux quelconques de ces angles seront plus grands que l'angle restant (20. 11); les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ sont donc plus grands que l'angle ΓΒΔ. Par la même raison, les angles ΒΓΑ, ΑΓΔ sont plus grands que l'angle ΒΓΔ, et les angles ΓΔΑ, ΑΔΒ plus grands que l'angle ΓΔΒ; les six angles ΓΒΑ, ΑΒΔ,

#### 44 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν· αἱ ἐξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· αἱ ἄρα ἐξ<sup>3</sup>

sex igitur anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ tribus ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ majores sunt. Sed tres anguli ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ duobus rectis æquales sunt; sex igitur anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ,



αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονες εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἐκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἐξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἐξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσὶ μείζονες<sup>4</sup>. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι<sup>5</sup> περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν.

ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ duobus rectis majores sunt. Et quoniam uniuscujusque triangulorum ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo trium triangulorum novem anguli ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ sex rectis æquales sunt, ex quibus anguli ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ sex anguli duobus rectis sunt majores; reliqui igitur ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ tres anguli continentes solidum angulum quatuor rectis minores sunt.

Ἀπασα ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Omnis igitur, etc.

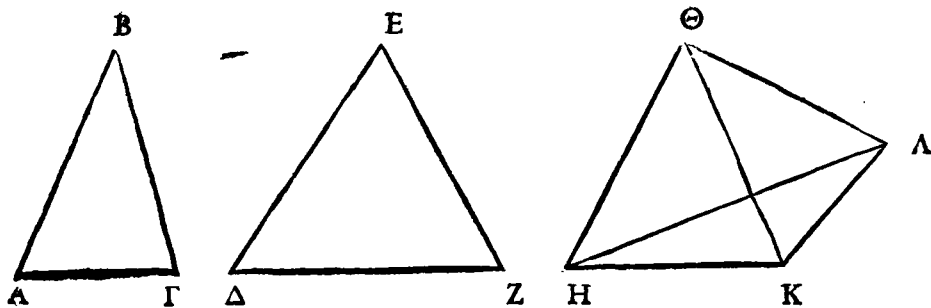
ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ sont donc plus grands que les trois angles ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ. Mais les trois angles ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ sont égaux à deux droits (32. 1); les six angles ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ sont donc plus grands que deux droits. Et puisque les trois angles de chacun des triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ sont égaux à deux droits, les neuf angles ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ de ces trois triangles sont égaux à six angles droits; mais les six angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ sont plus grands que deux droits; les angles restants ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ qui comprennent l'angle solide sont donc plus petits que quatre angles droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

PROPOSITIO XXII.

Εάν ὡς τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντα μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτάς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo majores sunt quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos æquales rectæ; possibile est ex iis conjungentibus æquales rectas triangulum constituere.



Εστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ἐπὶ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι<sup>2</sup> πάντα μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δ' ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ,

Sint tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo majores sint quomodocunque sumpti, anguli quidem ΑΒΓ, ΔΕΖ angulo ΗΘΚ, anguli vero ΔΕΖ, ΗΘΚ angulo ΑΒΓ, et adhuc anguli ΗΘΚ, ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, et sint æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ rectæ, et jungantur ipsæ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ; dico possibile esse ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ trian-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois angles plans, si deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grands que l'angle restant, et si ces angles sont compris par des droites égales, on pourra construire un triangle avec les droites qui joignent ces droites égales.

Soient les trois angles plans ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant, c'est-à-dire que les deux angles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient plus grands que l'angle ΗΘΚ, que les deux angles ΔΕΖ, ΗΘΚ soient plus grands que l'angle ΑΒΓ, et que les deux angles ΗΘΚ, ΑΒΓ soient plus grands que l'angle ΔΕΖ; que les droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ soient égales; joignons ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ; je dis qu'on peut construire un triangle

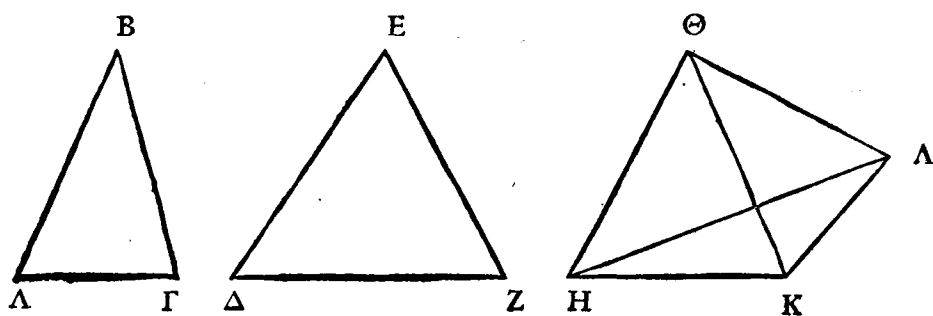
# 46 LE ONZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

$\Delta Z$ ,  $HK$  τρίγωνον συστήσασθαι, τούτέστιν ὅτι τῶν  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  δύο ὁποιασοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν<sup>3</sup>.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $\Delta EZ$ ,  $ΗΘΚ$  γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερόν ὅτι καὶ τῶν  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  ἴσων γενομένων δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς<sup>4</sup>  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  τρίγωνον συστήσασθαι. Εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $ΘΚ$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Θ$ , τῇ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ  $ΚΘΛ$  καὶ κείσθω μιᾷ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΘΚ$  ἴση ἢ  $ΘΛ$ , καὶ

gulum constituere, hoc est ipsarum  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  duas quaslibet reliquâ majores esse.

Si quidem igitur anguli  $ΑΒΓ$ ,  $\Delta EZ$ ,  $ΗΘΚ$  æquales inter se sunt, evidens est et ipsis  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  æqualibus factis possibile esse ex æqualibus ipsis  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  triangulum constitui. Si autem non, sint inæquales, et constituatur ad rectam  $ΘΚ$ , et ad punctum  $Θ$ , angulo  $ΑΒΓ$  æqualis  $ΚΘΛ$ ; et ponatur uni ipsarum  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΘΚ$  æqualis  $ΘΛ$ , et jungantur



ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΚΛ$ ,  $ΗΛ$ . Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  δυσὶ ταῖς  $ΚΘ$ ,  $ΘΛ$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ  $Β$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΚΘΛ$  ἴση· βάσεις ἄρα ἢ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΚΛ$  ἐστὶν<sup>5</sup> ἴση. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΗΘΚ$  τῆς ὑπὸ  $\Delta EZ$  μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἢ ὑπὸ

ipsæ  $ΚΛ$ ,  $ΗΛ$ . Et quoniam duæ  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  duabus  $ΚΘ$ ,  $ΘΛ$  æquales sunt, et angulus ad  $Β$  angulo  $ΚΘΛ$  æqualis; basis igitur  $ΑΓ$  basi  $ΚΛ$  est æqualis. Et quoniam anguli  $ΑΒΓ$ ,  $ΗΘΚ$  angulo  $\Delta EZ$  majores sunt, æqualis autem an-

avec des droites égales aux droites  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ ; c'est-à-dire que deux quelconques des droites  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ , sont plus grandes que la droite restante.

Si les angles  $ΑΒΓ$ ,  $\Delta EZ$ ,  $ΗΘΚ$  sont égaux entr'eux, il est évident que les droites  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  étant égales, on pourra construire un triangle avec des droites égales aux droites  $ΑΓ$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ . Si cela n'est point, que ces angles soient inégaux. Sur la droite  $ΘΚ$  et au point  $Θ$  de cette droite, construisons l'angle  $ΚΘΛ$  égal à l'angle  $ΑΒΓ$  (23. 1); faisons la droite  $ΘΛ$  égale à une des droites  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $ΗΘ$ ,  $ΘΚ$ , et joignons  $ΚΛ$ ,  $ΗΛ$ . Puisque les deux droites  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  sont égales aux deux droites  $ΚΘ$ ,  $ΘΛ$ , et que l'angle  $Β$  est égal à l'angle  $ΚΘΛ$ , la base  $ΑΓ$  est égale à la base  $ΚΛ$  (4. 1). Et puisque les angles  $ΑΒΓ$ ,  $ΗΘΚ$  sont plus grands que l'angle  $\Delta EZ$ , et que

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 47

ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δυσὶ<sup>6</sup> ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσει τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΚΛ μείζονες εἰσὶ· πολλῶν ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονες εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονες εἰσιν. Ὁμοίως δὲ<sup>8</sup> δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονες εἰσὶ, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονες εἰσὶ· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

gulus ΑΒΓ angulo ΚΘΛ; angulus igitur ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major est. Et quoniam duæ ΗΘ, ΘΛ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, et angulus ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major; basis igitur ΗΛ basi ΔΖ major est. Sed ipsæ ΗΚ, ΚΛ ipsâ ΚΛ majores sunt; multo igitur ipsæ ΗΚ, ΚΛ ipsâ ΔΖ majores sunt. Æqualis autem ΚΛ ipsi ΑΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΗΚ reliquâ ΔΖ majores sunt. Similiter utique demonstrabimus et quidem ΑΓ, ΔΖ ipsâ ΗΚ majores esse, et adhuc ipsas ΔΖ, ΗΚ ipsâ ΑΓ majores esse; possibile igitur est ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum constituere. Quod oportebat ostendere.

l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΚΘΛ, l'angle ΗΘΛ est plus grand que l'angle ΔΕΖ. Et puisque les deux droites ΗΘ, ΘΛ sont égales aux deux droites ΔΕ, ΕΖ, et que l'angle ΗΘΛ est plus grand que l'angle ΔΕΖ, la base ΗΛ est plus grande que la base ΔΖ (24. 1). Mais les droites ΗΚ, ΚΛ sont plus grandes que la droite ΚΛ (20. 1); donc, à plus forte raison, les droites ΗΚ, ΚΛ sont plus grandes que la droite ΔΖ. Mais ΚΛ est égal à ΑΓ; les droites ΑΓ, ΗΚ sont donc plus grandes que la droite restante ΔΖ. Nous démontrerons semblablement que les droites ΑΓ, ΔΖ sont plus grandes que la droite ΗΚ, et que les droites ΔΖ, ΗΚ sont aussi plus grandes que la droite ΑΓ; on peut donc construire un triangle avec des droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ (22. 1). Ce qu'il fallait démontrer.

Α Δ Λ Ω Σ.

ALITER.

Εἰπωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ,  $H\Theta K$ , ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ . λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς  $B$ ,  $E$ ,  $\Theta$  σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ <sup>1</sup>, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. Εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς  $B$ ,  $E$ ,  $\Theta$  σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἢ πρὸς τῷ  $B$  ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς τοῖς  $E$ ,  $\Theta$  μείζων ἄρα ἔσται<sup>2</sup> καὶ ἡ  $A\Gamma$  εὐθεῖα ἑκατέρᾳ τῶν  $\Delta Z$ ,  $HK$ . Καὶ φανερόν ὅτι ἡ  $A\Gamma$  μεθ' ἑκατέρας τῶν  $\Delta Z$ ,  $HK$  τῆς λοιπῆς μείζων ἐστὶ<sup>3</sup>. Λέγω ὅτι καὶ αἱ  $\Delta Z$ ,

Sint dati tres anguli plani  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ,  $H\Theta K$ , quorum duo reliquo majores sint quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos æquales rectæ  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ , et jungantur ipsæ  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ ; dico possibile esse ex æqualibus ipsis  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  triangulum constituere, hoc est rursus duas reliquâ majores esse quomodocunque sumptas. Si quidem igitur rursus anguli ad puncta  $B$ ,  $E$ ,  $\Theta$  æquales sint, æquales erunt et ipsæ  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ , et erunt duæ reliquâ majores. Si autem non, sint inæquales anguli ad puncta  $B$ ,  $E$ ,  $\Theta$ , et major ipse ad  $B$  utrolibet ipsorum ad  $E$ ,  $\Theta$ ; major igitur erit et recta  $A\Gamma$  utrâlibet ipsarum  $\Delta Z$ ,  $HK$ . Et manifestum est ipsam  $A\Gamma$  cum alterutrâ ipsarum  $\Delta Z$ ,  $HK$  reliquâ majorem esse. Dico et ipsas  $\Delta Z$ ,  $HK$  ipsâ  $A\Gamma$  majores

## AUTREMENT.

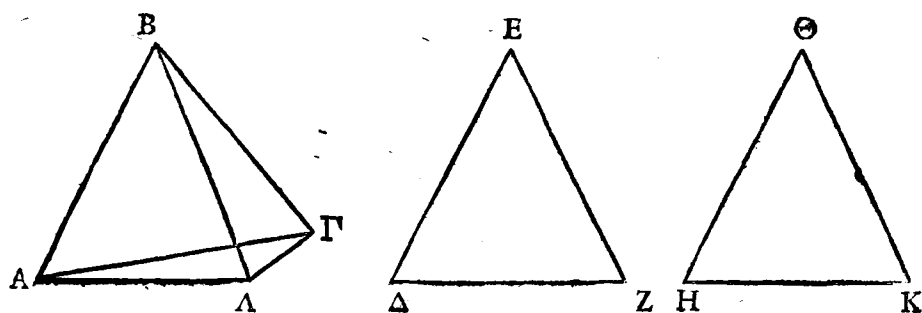
Soient donnés les trois angles plans  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ,  $H\Theta K$ ; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant; que ces angles soient compris par les droites égales  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Delta E$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ , et joignons  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ ; je dis qu'on peut construire un triangle avec des droites égales aux droites  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$ ; c'est-à-dire que deux de ces droites, de quelque manière qu'on les prène, sont plus grandes que la droite restante. Si les angles  $B$ ,  $E$ ,  $\Theta$  sont égaux, les droites  $A\Gamma$ ,  $\Delta Z$ ,  $HK$  seront égales (4. 1), et deux de ces droites seront plus grandes que la droite restante. Si cela n'est point, que ces angles soient inégaux, et que l'angle  $AB\Gamma$  soit plus grand que chacun des angles  $E$ ,  $\Theta$ , la droite  $A\Gamma$  sera plus grande que chacune des droites  $\Delta Z$ ,  $HK$  (24. 1); et il est évident que la droite  $A\Gamma$  avec l'une ou l'autre des droites  $\Delta Z$ ,  $HK$  sera plus grande que la droite restante. Je dis que les droites  $\Delta Z$ ,  $HK$  sont plus grandes que la droite  $A\Gamma$ .



# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 49

ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονες εἰσι. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἢ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ

esse. Constitutur ad rectam ΑΒ et ad punctum in eā Β angulo ΗΘΚ æqualis ΑΒΛ, et ponatur uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ æqualis ΒΛ, et jungantur ipsæ ΑΛ, ΑΓ. Et quoniam



ΑΒ, ΒΛ δυσὲ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἢ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστὶ<sup>4</sup>. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονες εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὲ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ<sup>5</sup>. βάσεις ἄρα ἢ ΔΖ βάσεως τῆς ΑΓ μείζων

duæ ΑΒ, ΒΛ duabus ΗΘ, ΘΚ æquales sunt utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur ΑΛ basi ΗΚ æqualis est. Et quoniam anguli ad puncta Ε, Θ angulo ΑΒΓ majores sunt, quorum angulus ΗΘΚ angulo ΑΒΛ est æqualis; reliquus igitur angulus ad Ε angulo ΑΒΓ major est. Et quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΔΕΖ angulo ΑΒΓ major est; basis igitur ΔΖ basi ΑΓ major est. Æqualis autem

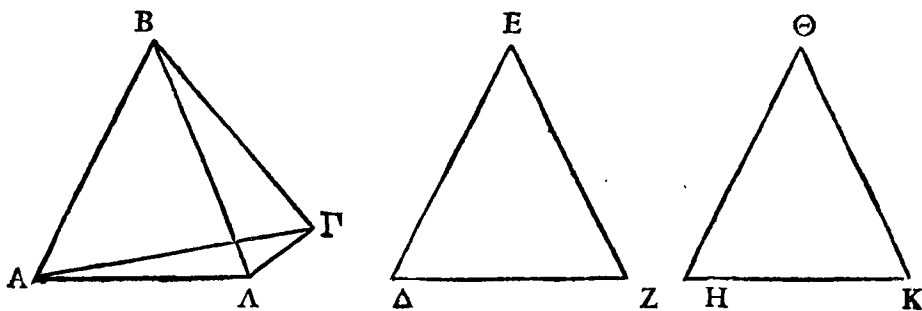
Sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite construisons l'angle ΑΒΛ égal à l'angle ΗΘΚ (23. 1); faisons la droite ΒΛ égale à une des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, et joignons les droites ΑΛ, ΑΓ. Puisque les deux droites ΑΒ, ΒΛ sont égales aux deux droites ΗΘ, ΘΚ, chacune à chacune, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΑΛ est égale à la base ΗΚ (4. 1). Et puisque les angles Ε, Θ sont plus grands que l'angle ΑΒΓ, et que l'angle ΗΘΚ est égal à l'angle ΑΒΛ, l'angle restant Ε sera plus grand que l'angle ΑΒΓ. Et puisque les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΔΕ, ΕΖ, chacune à chacune, et que l'angle ΔΕΖ est plus grand que l'angle ΑΒΓ, la base ΔΖ sera plus grande que la base ΑΓ



## 50 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐστίν<sup>6</sup>. Ἰση δὲ ἐδείχθη ἡ HK τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, HK τῶν ΑΛ, ΑΓ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΑΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῶ ἄρα αἱ ΔΖ, HK

ostensa est HK ipsi ΑΛ; ipsæ igitur ΔΖ, HK ipsis ΑΛ, ΑΓ majores sunt. Sed ipsæ ΑΛ, ΑΓ ipsâ ΑΓ majores sunt; multo igitur ipsæ ΔΖ, HK ipsâ ΑΓ



τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι<sup>7</sup>, τῶν ΑΓ, ΔΖ, HK ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατόν ἄρα ἐστίν<sup>8</sup> ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, HK τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

majores sunt; ipsarum ΑΓ, ΔΖ, HK igitur rectarum duæ reliquæ majores sunt quomocunque sumptæ; possibile igitur est ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, HK triangulum constitui. Quod oportebat ostendere.

( 24. 1 ). Mais on a démontré que la droite HK est égale à la droite ΑΛ; les droites ΔΖ, HK sont donc plus grandes que les droites ΑΛ, ΑΓ. Mais les droites ΑΛ, ΑΓ sont plus grandes que la droite ΑΓ ( 20. 1 ); donc à plus forte raison les droites ΔΖ, HK sont plus grandes que la droite ΑΓ; deux des droites ΑΓ, ΔΖ, HK, de quelque manière qu'on les prène, sont donc plus grandes que la droite restante. On peut donc construire un triangle avec trois droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, HK ( 22. 1 ). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

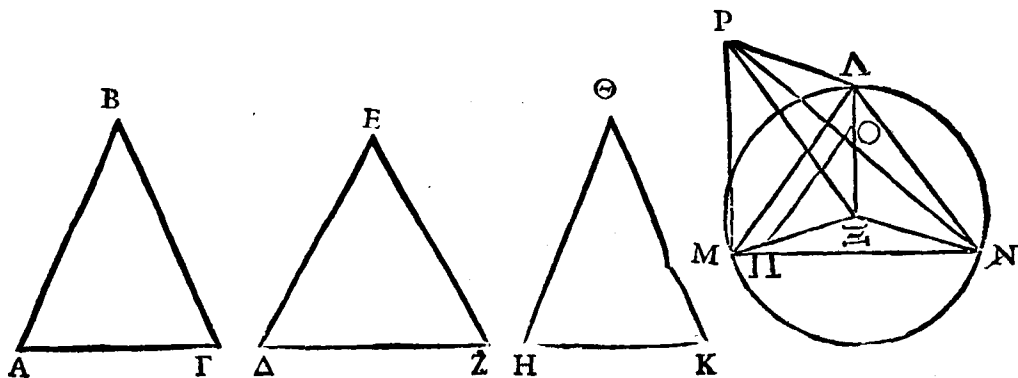
Εκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνονται, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβάνονται, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo reliquo majores sunt quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere; oportet utique tres angulos quatuor rectis minores esse.

Sint dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo majores sint quomodocunque sumpti, adhuc autem tres anguli quatuor rectis minores; oportet utique ex æqualibus ipsis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ solidum angulum constituere.



Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ

Abscendantur æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, et jungantur ipsæ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ; possibile igitur est ex iis æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ

PROPOSITION XXIII.

Construire un angle solide avec trois angles plans, deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, étant plus grands que l'angle restant; il faut que ces trois angles soient plus petits que quatre angles droits.

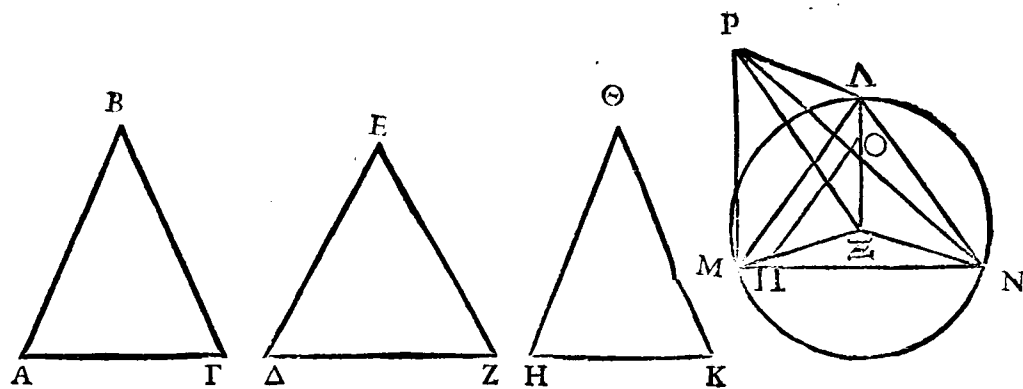
Soient donnés les trois angles plans ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ; que deux de ces angles, de quelque manière qu'on les prène, soient plus grands que l'angle restant, et que ces trois angles soient plus petits que quatre droits; il faut avec des angles égaux aux angles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ construire un angle solide.

Faisons les droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ égales entr'elles, et joignons ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. On pourra, avec des droites égales aux droites ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ construire un triangle (22. 1).

## 52 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρίγωνον συστήσασθαι. Συνεστάτω τὸ  $\Lambda MN$ , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν  $ΑΓ$  τῇ  $\Lambda M$ , τὴν δὲ  $\Delta Z$  τῇ  $MN$ , καὶ ἔτι τὴν  $HK$  τῇ  $\Lambda N$ , καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ  $\Lambda MN$  τρίγωνον κύκλος ὁ  $\Lambda MN$ , καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὴ ἥτοι ἐντὸς τοῦ  $\Lambda MN$  τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

triangulum constituere. Constituatur ipsum  $\Lambda MN$ , ita ut æqualis sit quidem  $ΑΓ$  ipsi  $\Lambda M$ , ipsa vero  $\Delta Z$  ipsi  $MN$ , et adhuc ipsa  $HK$  ipsi  $\Lambda N$ , et describatur circa  $\Lambda MN$  triangulum circulus  $\Lambda MN$ , et sumatur ipsius centrum; erit utique vel intra  $\Lambda MN$  triangulum, vel in uno laterum ipsius, vel extra.



Ἐστω πρότερον ἐντὸς<sup>1</sup>, καὶ ἔστω τὸ  $\Xi$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Lambda \Xi$ ,  $M \Xi$ ,  $N \Xi$ . λέγω ὅτι ἡ  $AB$  μείζων ἐστὶ τῆς  $\Lambda \Xi$ . Εἰ γὰρ μὴ, ἥτοι ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Lambda \Xi$ , ἢ ἐλάττων. Ἐστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Lambda \Xi$ , ἀλλ' ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $BΓ$  ἐστὶν ἴση· ἡ  $\Lambda \Xi$  ἄρα τῇ  $BΓ$  ἐστὶν ἴση<sup>2</sup>. Ἡ δὲ  $\Lambda \Xi$  τῇ  $\Xi M$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $BΓ$  δυσὶ<sup>3</sup>

Sit primum intra, et sit ipsum  $\Xi$ , et jungantur ipsæ  $\Lambda \Xi$ ,  $M \Xi$ ,  $N \Xi$ ; dico  $AB$  majorem esse ipsâ  $\Lambda \Xi$ . Si enim non, vel æqualis est  $AB$  ipsi  $\Lambda \Xi$ , vel minor. Sit primum æqualis. Et quoniam æqualis est  $AB$  ipsi  $\Lambda \Xi$ , sed quidem  $AB$  ipsi  $BΓ$  est æqualis; ergo  $\Lambda \Xi$  ipsi  $BΓ$  est æqualis. Ipsa autem  $\Lambda \Xi$  ipsi  $\Xi M$ , duæ igitur

Construisons le triangle  $\Lambda MN$ , de manière que  $ΑΓ$  soit égal à  $\Lambda M$ ,  $\Delta Z$  égal à  $MN$ , et  $HK$  égal à  $\Lambda N$  (22. 1). Décrivons ensuite une circonférence de cercle  $\Lambda MN$  autour du triangle  $\Lambda MN$  (5. 4); prenons le centre de ce cercle, le centre de ce cercle sera ou en dedans du triangle  $\Lambda MN$  ou sur un de ses côtés, ou hors de ce triangle.

Que le centre du cercle soit d'abord en dedans du triangle; et que son centre soit le point  $\Xi$ ; joignons  $\Lambda \Xi$ ,  $M \Xi$ ,  $N \Xi$ ; je dis que  $AB$  est plus grand que  $\Lambda \Xi$ . Car si cela n'est point, la droite  $AB$  sera égale à la droite  $\Lambda \Xi$  ou plus petite que cette droite. Que la droite  $AB$  soit d'abord égale à  $\Lambda \Xi$ . Puisque  $AB$  est égal à  $\Lambda \Xi$ , et que  $AB$  est égal à  $BΓ$ , la droite  $\Lambda \Xi$  est égale à  $BΓ$ . Mais  $\Lambda \Xi$  est égal à  $\Xi M$ ; les deux droites  $AB$ ,

ταῖς  $\Lambda\Xi$ ,  $\Xi\text{M}$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $\text{A}\Gamma$  βάσει τῇ  $\text{A}\text{M}$  ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$  τῇ ὑπὸ  $\Lambda\Xi\text{M}$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ  $\Delta\text{E}\text{Z}$  τῇ ὑπὸ  $\text{M}\Xi\text{N}$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ  $\text{H}\Theta\text{K}$  τῇ ὑπὸ  $\text{N}\Xi\Lambda$ . αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  εἰσὶν ἴσαι<sup>5</sup>. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  τέτρασιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι<sup>6</sup>· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ<sup>7</sup> ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὑπόκειται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα ἡ  $\text{A}\text{B}$  τῇ  $\Lambda\Xi$  ἴση ἐστὶ<sup>8</sup>. Λέγω δὴ<sup>9</sup> ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ  $\text{A}\text{B}$  τῇ  $\Lambda\Xi$ . Εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν  $\text{A}\text{B}$  ἴση ἡ  $\Xi\text{O}$ , τῇ δὲ  $\text{B}\Gamma$  ἴση ἡ  $\Xi\text{Π}$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\text{O}\Pi$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\text{A}\text{B}$  τῇ  $\text{B}\Gamma$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ  $\Xi\text{O}$  τῇ  $\Xi\text{Π}$ · ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ  $\Lambda\text{O}$  λοιπῇ<sup>10</sup> τῇ  $\Pi\text{M}$  ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ  $\Lambda\text{M}$  τῇ  $\text{O}\Pi$ , καὶ ἰσογώνιον τὸ  $\Lambda\text{M}\Xi$  τῷ  $\text{O}\Pi\Xi$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Xi\Lambda$  πρὸς τὴν  $\Lambda\text{M}$  οὕτως ἡ  $\Xi\text{O}$  πρὸς τὴν<sup>11</sup>  $\text{O}\Pi$ · ἐναλλάξ ἄρα<sup>12</sup> ὡς ἡ  $\Lambda\Xi$  πρὸς

$\text{A}\text{B}$ ,  $\text{B}\Gamma$  duabus  $\Lambda\Xi$ ,  $\Xi\text{M}$  æquales sunt utraque utrique, et basis  $\text{A}\Gamma$  basi  $\text{A}\text{M}$  supponitur æqualis; angulus igitur  $\text{A}\text{B}\Gamma$  angulo  $\Lambda\Xi\text{M}$  est æqualis. Propter eadem utique et quidem angulus  $\Delta\text{E}\text{Z}$  angulo  $\text{M}\Xi\text{N}$  est æqualis, et adhuc angulus  $\text{H}\Theta\text{K}$  angulo  $\text{N}\Xi\Lambda$ ; tres igitur anguli  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  tribus  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  sunt æquales. Sed tres anguli  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  quatuor rectis sunt æquales; et tres igitur anguli  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  quatuor rectis æquales sunt. Supponuntur autem et quatuor rectis minores, quod absurdum; non igitur  $\text{A}\text{B}$  ipsi  $\Lambda\Xi$  æqualis est. Dico igitur neque minorem esse  $\text{A}\text{B}$  ipsā  $\Lambda\Xi$ . Si enim possibile, sit; et ponatur ipsi quidem  $\text{A}\text{B}$  æqualis  $\Xi\text{O}$ , ipsi vero  $\text{B}\Gamma$  æqualis  $\Xi\text{Π}$ , et jungatur ipsa  $\text{O}\Pi$ . Et quoniam æqualis est  $\text{A}\text{B}$  ipsi  $\text{B}\Gamma$ , æqualis est et  $\Xi\text{O}$  ipsi  $\Xi\text{Π}$ ; quare et reliqua  $\Lambda\text{O}$  reliquæ  $\Pi\text{M}$  est æqualis; parallela igitur  $\Lambda\text{M}$  ipsi  $\text{O}\Pi$ , et æquiangulum  $\Lambda\text{M}\Xi$  ipsi  $\text{O}\Pi\Xi$ ; est igitur ut  $\Xi\Lambda$  ad  $\Lambda\text{M}$  ita  $\Xi\text{O}$  ad  $\text{O}\Pi$ ; permutando igitur ut  $\Lambda\Xi$  ad  $\Xi\text{O}$  ita  $\Lambda\text{M}$

$\text{B}\Gamma$  sont donc égales aux deux droites  $\Lambda\Xi$ ,  $\Xi\text{M}$ , chacune à chacune; mais la base  $\text{A}\Gamma$  est supposée égale à la base  $\Lambda\text{M}$ ; l'angle  $\text{A}\text{B}\Gamma$  est donc égal à l'angle  $\Lambda\Xi\text{M}$  (8. 1). Par la même raison, l'angle  $\Delta\text{E}\text{Z}$  est égal à l'angle  $\text{M}\Xi\text{N}$ , et l'angle  $\text{H}\Theta\text{K}$  égal à l'angle  $\text{N}\Xi\Lambda$ ; les trois angles  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  sont donc égaux aux trois angles  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$ . Mais les trois angles  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  sont égaux à quatre droits; les trois angles  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  sont donc égaux à quatre droits. Mais on les a supposés plus petits que quatre droits, ce qui est absurde; la droite  $\text{A}\text{B}$  n'est donc pas égale à la droite  $\Lambda\Xi$ . Je dis de plus que la droite  $\text{A}\text{B}$  n'est pas plus petite que  $\Lambda\Xi$ . Qu'elle le soit, si cela est possible; faisons la droite  $\Xi\text{O}$  égale à  $\text{A}\text{B}$ , la droite  $\Xi\text{Π}$  égale à  $\text{B}\Gamma$ , et joignons  $\text{O}\Pi$ . Puisque  $\text{A}\text{B}$  est égal à  $\text{B}\Gamma$ , et la droite  $\Xi\text{O}$  égale à la droite  $\Xi\text{Π}$ ; la droite restante  $\Lambda\text{O}$  est égale à la droite restante  $\Pi\text{M}$ ; la droite  $\Lambda\text{M}$  est donc parallèle à la droite  $\text{O}\Pi$  (2. 6); les triangles  $\Lambda\text{M}\Xi$ ,  $\text{O}\Pi\Xi$  sont donc équiangles; la droite  $\Xi\Lambda$  est donc à  $\Lambda\text{M}$  comme  $\Xi\text{O}$  est à  $\text{O}\Pi$  (4. 6); donc, par permutation, la droite  $\Lambda\Xi$  est

## 54 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

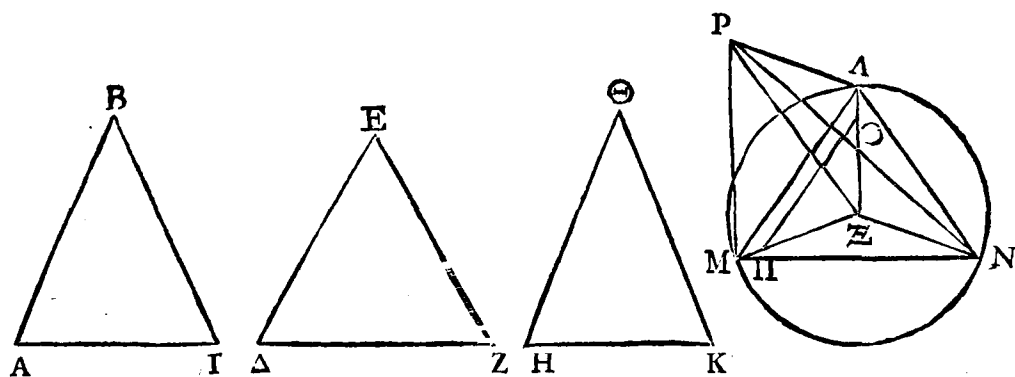
τὴν  $\Xi\text{O}$  οὕτως ἢ  $\Lambda\text{M}$  πρὸς τὴν<sup>14</sup>  $\text{O}\Pi$ . Μείζων δὲ ἢ  $\Lambda\Xi$  τῆς  $\Xi\text{O}$ · μείζων ἄρα καὶ ἢ  $\Lambda\text{M}$  τῆς  $\text{O}\Pi$ . Ἀλλ' ἢ  $\Lambda\text{M}$  κείται τῇ  $\text{A}\Gamma$  ἴση· καὶ ἢ  $\text{A}\Gamma$  ἄρα τῆς  $\text{O}\Pi$  μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι<sup>15</sup> αἱ  $\text{A}\text{B}$ ,  $\text{B}\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\text{O}\Xi$ ,  $\Xi\text{Π}$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἢ  $\text{A}\Gamma$  βάσεως τῆς  $\text{O}\Pi$  μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $\text{O}\Xi\text{Π}$  μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἢ μὲν ὑπὸ  $\Delta\text{E}\text{Z}$  τῆς ὑπὸ  $\text{M}\Xi\text{N}$  μείζων ἐστίν, ἢ δὲ ὑπὸ  $\text{H}\Theta\text{K}$  τῆς ὑπὸ  $\text{N}\Xi\Lambda$ · αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  τριῶν τῶν ὑπὸ  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  τεσσάρων ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες<sup>16</sup>. Ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἐστίν<sup>17</sup> ἀποπον· οὐκ ἄρα ἢ  $\text{A}\text{B}$  ἐλάσσων ἐστὶ τῆς  $\Lambda\Xi$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἢ  $\text{A}\text{B}$  τῆς  $\Lambda\Xi$ . Ἀνεστάτω δὲ ἀπὸ τοῦ  $\Xi$  σημείου τῷ τοῦ  $\Lambda\text{M}\text{N}$  κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἢ  $\Xi\text{P}$ · καὶ ὅ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{A}\text{B}$  τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\Xi$ , ἐκείνῳ ἴσον

ad  $\text{O}\Pi$ . Major autem  $\Lambda\Xi$  ipsâ  $\Xi\text{O}$ ; major igitur et  $\Lambda\text{M}$  ipsâ  $\text{O}\Pi$ . Sed  $\Lambda\text{M}$  posita est ipsi  $\text{A}\Gamma$  æqualis; et igitur  $\text{A}\Gamma$  ipsâ  $\text{O}\Pi$  major est. Quoniam igitur duæ rectæ  $\text{A}\text{B}$ ,  $\text{B}\Gamma$  duabus  $\text{O}\Xi$ ,  $\Xi\text{Π}$  æquales sunt, et basis  $\text{A}\Gamma$  basi  $\text{O}\Pi$  major est; angulus igitur  $\text{A}\text{B}\Gamma$  angulo  $\text{O}\Xi\text{Π}$  major est. Similiter utique demonstrabimus et quidem angulum  $\Delta\text{E}\text{Z}$  angulo  $\text{M}\Xi\text{N}$  majorem esse, angulum autem  $\text{H}\Theta\text{K}$  angulo  $\text{N}\Xi\Lambda$ ; ergo tres anguli  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  tribus  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  majores sunt. Sed anguli  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  quatuor rectis minores supponuntur; multo igitur anguli  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  quatuor rectis minores sunt. Sed et æquales, quod est absurdum; non igitur  $\text{A}\text{B}$  minor est ipsâ  $\Lambda\Xi$ . Ostensum est autem neque æqualem; major igitur  $\text{A}\text{B}$  ipsâ  $\Lambda\Xi$ . Constituatur utique a puncto  $\Xi$  circuli  $\Lambda\text{M}\text{N}$  plano ad rectos ipsa  $\Xi\text{P}$ ; et quo majus est quadratum ex  $\text{A}\text{B}$  quadrato ex  $\Lambda\Xi$ , huic æquale sit quadratum ex  $\Xi\text{P}$ , et jun-

à  $\Xi\text{O}$  comme  $\Lambda\text{M}$  est à  $\text{O}\Pi$  (16. 5). Mais  $\Lambda\Xi$  est plus grand que  $\Xi\text{O}$ ;  $\Lambda\text{M}$  est donc plus grand que  $\text{O}\Pi$ . Mais nous avons fait  $\Lambda\text{M}$  égal à  $\text{A}\Gamma$ ; la droite  $\text{A}\Gamma$  est donc plus grande que  $\text{O}\Pi$ . Et puisque les deux droites  $\text{A}\text{B}$ ,  $\text{B}\Gamma$  sont égales aux deux droites  $\text{O}\Xi$ ,  $\Xi\text{Π}$ , et que la base  $\text{A}\Gamma$  est plus grande que la base  $\text{O}\Pi$ , l'angle  $\text{A}\text{B}\Gamma$  est plus grand que l'angle  $\text{O}\Xi\text{Π}$  (24. 1). Nous démontrerons semblablement que l'angle  $\Delta\text{E}\text{Z}$  est plus grand que l'angle  $\text{M}\Xi\text{N}$ , et l'angle  $\text{H}\Theta\text{K}$  plus grand que l'angle  $\text{N}\Xi\Lambda$ ; les trois angles  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  sont donc plus grands que les trois angles  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$ . Mais les angles  $\text{A}\text{B}\Gamma$ ,  $\Delta\text{E}\text{Z}$ ,  $\text{H}\Theta\text{K}$  sont supposés plus petits que quatre droits; donc à plus forte raison les trois angles  $\Lambda\Xi\text{M}$ ,  $\text{M}\Xi\text{N}$ ,  $\text{N}\Xi\Lambda$  sont plus petits que quatre droits. Mais ils sont égaux à quatre droits, ce qui est absurde; la droite  $\text{A}\text{B}$  n'est donc pas plus petite que la droite  $\Lambda\Xi$ . Mais on a démontré qu'elle ne lui est point égale; la droite  $\text{A}\text{B}$  est donc plus grande que la droite  $\Lambda\Xi$ . Du point  $\Xi$  élevons la droite  $\Xi\text{P}$  perpendiculaire au plan du cercle  $\Lambda\text{M}\text{N}$  (12. 11); faisons en sorte que le quarré de  $\Xi\text{P}$  soit égal à l'excès du quarré de  $\text{A}\text{B}$  sur le quarré de  $\Lambda\Xi$  (lem. suiv.), et joignons  $\text{P}\Lambda$ ,  $\text{P}\text{M}$ ,  $\text{P}\text{N}$ .

ἔστω<sup>18</sup> τὸ ἀπὸ τῆς  $\Xi P$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $PA$ ,  $PM$ ,  $PN$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $\Xi P$  ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ  $\Lambda MN$  κύκλου ἐπιπέδον· καὶ πρὸς ἐκάστην ἄρα τῶν  $\Lambda E$ ,  $M E$ ,  $N E$  ὀρθή ἐστὶν ἡ  $P E$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Lambda E$  τῇ  $E M$ , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $\Xi P$ · βάσεις ἄρα ἡ  $PA$  βάσει τῇ  $PM$  ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $PN$  ἑκατέρα

gantur ipsæ  $PA$ ,  $PM$ ,  $PN$ . Et quoniam  $PE$  perpendicularis est ad planum  $\Lambda MN$  circuli; et ad unamquamque igitur ipsarum  $\Lambda E$ ,  $M E$ ,  $N E$  perpendicularis est  $PE$ . Et quoniam æqualis est  $\Lambda E$  ipsi  $EM$ , communis autem et ad rectos ipsa  $EP$ ; basis igitur  $PA$  basi  $PM$  æqualis est. Propter eadem utique  $PN$  utrique ipsarum  $PA$ ,



τῶν  $PA$ ,  $PM$  ἐστὶν ἴση<sup>19</sup>. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $PA$ ,  $PM$ ,  $PN$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Lambda E$ , ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς  $\Xi P$ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Lambda E$ ,  $\Xi P$ . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $\Lambda E$ ,  $\Xi P$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AP$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ  $\Lambda EP$ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $PA$ . ἴση ἄρα ἡ  $AB$  τῇ  $PA$ . Ἀλλὰ τῇ

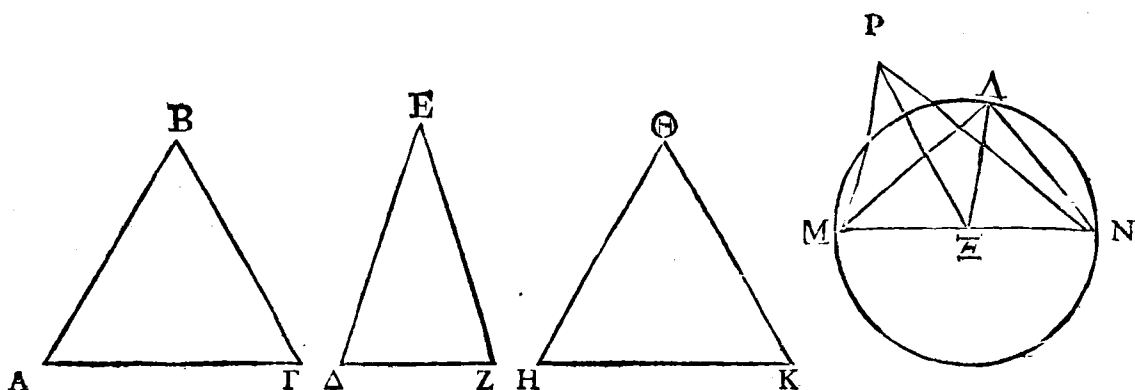
$PM$  est æqualis; tres igitur rectæ  $PA$ ,  $PM$ ,  $PN$  æquales inter se sunt. Et quoniam quomajus est quadratum ex  $AB$  quadrato ex  $\Lambda E$ , huic æquale supponitur quadratum ex  $EP$ ; quadratum igitur ex  $AB$  æquale est quadratis ex  $\Lambda E$ ,  $EP$ . Quadratis autem ex  $\Lambda E$ ,  $EP$  æquale est quadratum ex  $AP$ , rectus enim ipse  $\Lambda EP$ ; quadratum igitur ex  $AB$  æquale est quadrato ex  $PA$ ; æqualis

Puisque la droite  $PE$  est perpendiculaire au plan du cercle  $\Lambda MN$ , la droite  $PE$  sera perpendiculaire à chacune des droites  $\Lambda E$ ,  $M E$ ,  $N E$  (déf. 3. 11). Et puisque  $\Lambda E$  est égal à  $EM$ , que la droite  $EP$  est commune, et qu'elle est perpendiculaire à ces deux droites, la base  $PA$  est égale à la base  $PM$  (4. 1). Par la même raison, la droite  $PN$  est égale à chacune des droites  $PA$ ,  $PM$ ; les trois droites  $PA$ ,  $PM$ ,  $PN$  sont donc égales entr'elles. Et puisque le carré de  $EP$  est supposé égal à l'excès du carré de  $AB$  sur le carré de  $\Lambda E$ , le carré de  $AB$  est donc égal aux carrés des droites  $\Lambda E$ ,  $EP$ . Mais le carré de  $AP$  est égal aux carrés des droites  $\Lambda E$ ,  $EP$  (47. 1), car l'angle  $\Lambda EP$  est droit; le carré de  $AB$  est donc égal au carré de  $PA$ ; la droite  $AB$  est donc égale à la droite  $PA$ . Mais chacune des

# 56 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν AB ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΑ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκαστῇ τῶν ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση·

igitur AB ipsi PA. Sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, ipsi autem PA æqualis utraque ipsarum ΡΜ, ΡΝ; unaquæque igitur ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ unicuique ipsarum ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ æqualis est. Et quoniam duæ ΑΡ, ΡΜ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt, et basis ΑΜ basi ΑΓ



γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΡΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία<sup>20</sup> τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ γωνιῶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>21</sup>.

supponitur æqualis; angulus igitur ΑΡΜ angulo ΑΒΓ est æqualis. Propter eadem utique et quidem angulus ΜΡΝ angulo ΔΕΖ est æqualis, angulus autem ΑΡΝ angulo ΗΘΚ; ex tribus igitur angulis planis ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, qui sunt æquales tribus datis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, solidus angulus constitutus est ad Ρ contentus sub ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ angulis. Quod oportebat ostendere.

droites ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ est égale à la droite ΑΒ, et chacune des droites ΡΜ, ΡΝ est égale à la droite ΡΑ; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ est donc égale à chacune des droites ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. Et puisque les deux droites ΑΡ, ΡΜ sont égales aux deux droites ΑΒ, ΒΓ, et que la base ΑΜ est supposée égale à la base ΑΓ, l'angle ΑΡΜ est égal à l'angle ΑΒΓ (8. 1.). Par la même raison, l'angle ΜΡΝ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΡΝ égal à l'angle ΗΘΚ; avec les trois angles plans ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, qui sont égaux aux trois angles donnés ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, on a donc construit un angle solide Ρ qui est compris sous les angles ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ. C'est qu'il fallait démontrer.



## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 57

Αλλὰ δὴ ἔστω τὸ<sup>22</sup> κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς MN, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΑ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἐστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ AB, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΑ, τουτέστι τῇ MN, ἴσαι εἰσίν. Αλλὰ ἡ MN τῇ ΔΖ ἐστὶν<sup>23</sup> ἴση· καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἐστὶν<sup>24</sup> ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα ἡ AB ἴση ἐστὶ<sup>25</sup> τῇ ΛΞ. Ομοίως δὴ<sup>26</sup> οὐδὲ ἐλάττων, πολλῶ γὰρ τὸ ἀδυνάτον μείζον· ἡ ἄρα AB μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῃ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Αλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ AMN τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ<sup>27</sup>. λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. Ἐστω πρότερον

At vero sit centrum circuli in uno laterum MN trianguli, et sit ipsum Ξ, et jungatur ipsa ΞΑ; dico rursus majorem esse AB ipsā ΛΞ. Si enim non, vel æqualis est AB ipsi ΛΞ, vel minor. Sit primum æqualis; duæ igitur AB, ΒΓ, hoc est ipsæ ΔΕ, ΕΖ, duabus ΜΞ, ΞΑ, hoc est ipsi MN, æquales sunt. Sed MN ipsi ΔΖ est æqualis; et igitur ipsæ ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, quod est impossibile; non igitur AB æqualis est ipsi ΛΞ. Similiter utique neque minor, multo enim impossibile majus; ergo AB major ipsā ΛΞ. Et si similiter quo majus est quadratum ex AB quadrato ex ΛΞ, huic æquale ad rectos plano circuli constituamus, ut quadratum ex ΞΡ, constituetur problema.

At vero sit centrum circuli extra AMN triangulum, et sit ipsum Ξ, et jungantur ipsæ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ; dico utique et ita majorem esse AB ipsā ΛΞ. Si enim non, vel æqualis est, vel minor. Sit primum æqualis; duæ igitur AB,

Que le centre du cercle soit dans un des côtés MN du triangle; que ce soit le point Ξ, et joignons ΞΑ; je dis encore que AB est plus grand que ΛΞ. Car si cela n'est point, la droite AB sera égale à ΛΞ, ou elle sera plus petite. Qu'elle lui soit d'abord égale; les deux droites AB, ΒΓ, c'est-à-dire ΔΕ, ΕΖ, seront égales aux deux droites ΜΞ, ΞΑ, c'est-à-dire à la droite MN. Mais MN est égal à ΔΖ; les droites ΔΕ, ΕΖ sont donc égales à ΔΖ, ce qui ne peut être (20. 1); la droite AB n'est donc point égale à ΛΞ. On démontrerait semblablement qu'elle n'est pas plus petite, car il s'ensuivrait une plus grande absurdité; la droite AB est donc plus grande que ΛΞ. Si l'on mène la droite ΞΡ perpendiculaire au plan du cercle, et si l'on fait en sorte que le quarré de ΞΡ soit égal à l'excès du quarré de AB sur le quarré ΛΞ (lem. suiv.), le problème sera résolu.

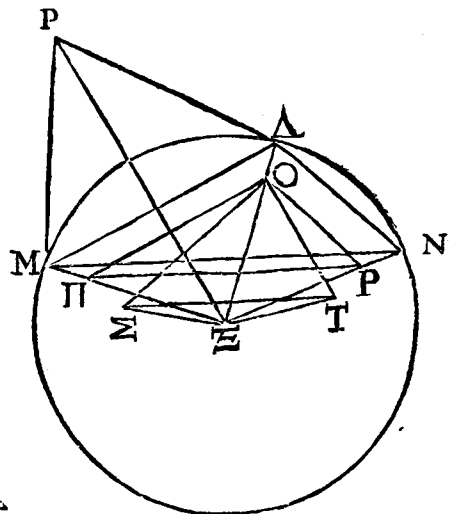
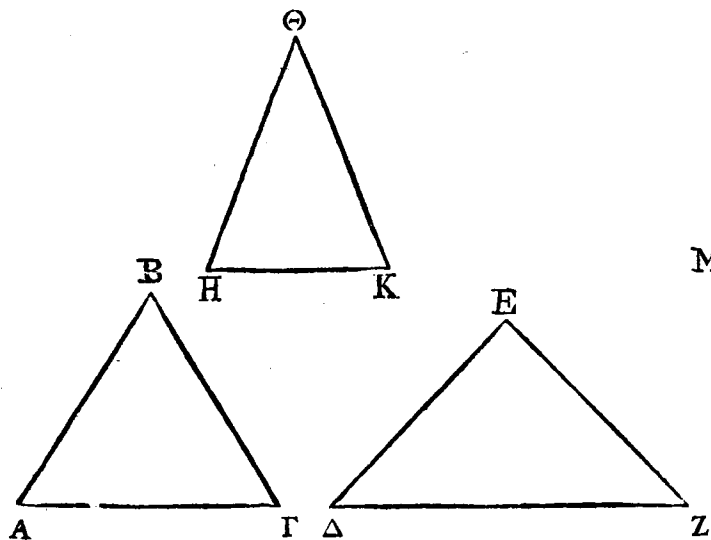
Que le centre du cercle soit enfin hors du triangle AMN, et que ce soit le point Ξ; joignons ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ; je dis que AB est plus grand que ΛΞ; car si cela n'est point, AB sera égal à ΛΞ, ou plus petit. Premièrement que ΔΒ soit



58 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση· δύο οὖν αἱ  $AB, BG$  δυσὶ<sup>28</sup> ταῖς  $ME, EA$  ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $AG$  βάσει τῇ  $MA$  ἐστὶν<sup>29</sup> ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $MEA$  ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $HOK$  τῇ ὑπὸ  $LEN$  ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $MEN$  δυσὶ ταῖς ὑπὸ<sup>30</sup>  $ABG, HOK$  ἐστὶν ἴση· ἀλλ' αἱ<sup>31</sup> ὑπὸ  $ABG, HOK$  τῆς ὑπὸ  $DEZ$  μείζο-

$BG$  duabus  $ME, EA$  æquales sunt utraque utrique, et basis  $AG$  basi  $MA$  est æqualis; angulus igitur  $ABG$  angulo  $MEA$  est æqualis. Propter eadem utique et angulus  $HOK$  angulo  $LEN$  est æqualis; totus igitur  $MEN$  duobus  $ABG, HOK$  est æqualis. Sed anguli  $ABG, HOK$  angulo  $DEZ$  majores sunt;



νές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ  $MEN$  ἄρα τῆς ὑπὸ  $DEZ$  μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $DE, EZ$  δυσὶ<sup>32</sup> ταῖς  $ME, EN$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ  $DZ$  βάσει τῇ  $MN$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $MEN$  γωνία τῇ ὑπὸ  $DEZ$  ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν<sup>33</sup> ἡ  $AB$  τῇ  $AE$ . Εξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. Καὶ ἐὰν πρὸς

et igitur angulus  $MEN$  angulo  $DEZ$  major est. Et quoniam duæ  $DE, EZ$  duabus  $ME, EN$  æquales sunt, et basis  $DZ$  basi  $MN$  æqualis; angulus igitur  $MEN$  angulo  $DEZ$  est æqualis. Ostensus est autem et major, quod absurdum; non igitur æqualis est  $AB$  ipsi  $AE$ . Deinceps vero ostendamus, neque minorem esse; major igitur. Et

égal à  $AE$ ; les deux droites  $AB, BG$  seront égales aux deux droites  $ME, EA$ , chacune à chacune; mais la base  $AG$  est égale à la base  $MA$ ; l'angle  $ABG$  est donc égal à l'angle  $MEA$  (8. 1). Par la même raison, l'angle  $HOK$  est égal à l'angle  $LEN$ ; l'angle entier  $MEN$  est donc égal aux deux angles  $ABG, HOK$ . Mais les angles  $ABG, HOK$  sont plus grands que l'angle  $DEZ$ ; l'angle  $MEN$  est donc plus grand que l'angle  $DEZ$ . Et puisque les deux droites  $DE, EZ$  sont égales aux deux droites  $ME, EN$ , et que la base  $DZ$  est égale à la base  $MN$ , l'angle  $MEN$  est égal à l'angle  $DEZ$  (8. 1). Mais on a démontré qu'il est plus grand, ce qui est absurde; la droite  $AB$  n'est donc pas égale à la droite  $AE$ . Nous démontrerons ensuite qu'elle n'est pas plus petite; elle est donc plus grande. Si nous menons encore la droite  $EP$  perpendi-

ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀνα-  
στήσωμεν τὴν<sup>34</sup>  $\Xi P$ , καὶ ἴσην αὐτὴν ὑπο-  
θώμεθα, ἥ μείζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$   
τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Lambda E$ , συσταθήσεται τὸ πρόσλη-  
μα<sup>35</sup>. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ  $AB$  τῆς  
 $\Lambda E$ . Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείθω τῇ μὲν  
 $AB$  ἴση ἡ  $\Xi O$ , τῇ δὲ  $B\Gamma$  ἴση ἡ  $\Xi\Pi$ , καὶ ἐπε-  
ξεύχθω ἡ  $O\Pi$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $B\Gamma$ ,  
ἴση ἐστὶ καὶ ἡ  $\Xi O$  τῇ  $\Xi\Pi$ . ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ  
 $O\Lambda$  λοιπῇ τῇ  $\Pi M$  ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα  
ἐστὶν ἡ  $\Lambda M$  τῇ  $\Pi O$ , καὶ ἰσογώνιον τὸ  $\Lambda M \Xi$  τρί-  
γωνον τῷ  $\Pi \Xi O$  τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Xi \Lambda$   
πρὸς τὴν  $\Lambda M$  οὕτως<sup>36</sup> ἡ  $\Xi O$  πρὸς τὴν  $O\Pi$ , καὶ  
ἐναλλάξ ὡς ἡ  $\Lambda \Xi$  πρὸς τὴν  $\Xi O$  οὕτως ἡ  $\Lambda M$  πρὸς  
τὴν  $O\Pi$ . Μείζων δὲ ἡ  $\Lambda \Xi$  τῆς  $\Xi O$ · μείζων ἄρα  
καὶ ἡ  $\Lambda M$  τῆς  $O\Pi$ . Ἀλλὰ ἡ  $\Lambda M$  τῇ  $A\Gamma$  ἐστὶν  
ἴση· καὶ ἡ  $\Gamma \Lambda$  ἄρα τῆς  $O\Pi$  ἐστὶ μείζων. Ἐπεὶ  
οὖν δύο αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ<sup>37</sup> ταῖς  $O\Xi$ ,  $\Xi\Pi$  ἴσαι  
εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ  $A\Gamma$  βάσις  
τῆς  $O\Pi$  μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$   
γωνίας τῆς ὑπὸ  $O\Xi\Pi$  μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὲ  
καὶ τὴν  $\Xi P$  ἴσην ἑκατέρα τῶν  $\Xi O$ ,  $\Xi\Pi$  ἀπολά-

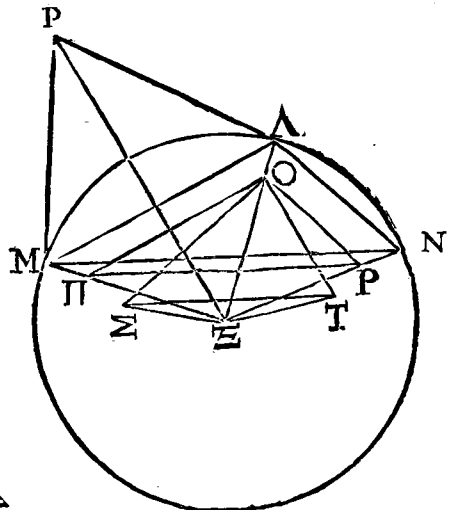
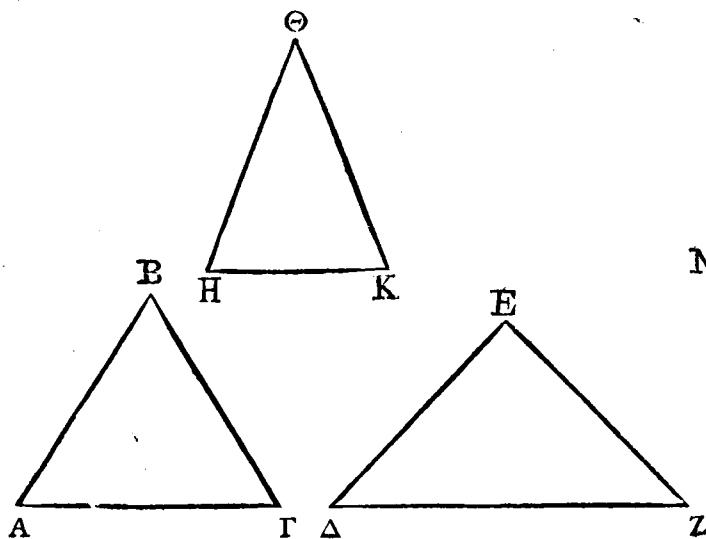
si ad rectos circuli plano constituamus rursus  
 $\Xi P$ , et æqualem ipsam ponamus lateri quadrati  
quo superat ipsum ex  $AB$  ipsum ex  $\Lambda E$ , consti-  
tuetur problema. Dico et neque minorem esse  $AB$   
ipsâ  $\Lambda E$ . Si enim possibile, sit; et ponatur ipsi  
quidem  $AB$  æqualis  $\Xi O$ , ipsi vero  $B\Gamma$  æqualis  
 $\Xi\Pi$ , et jungatur ipsa  $O\Pi$ . Et quoniam æqualis  
est  $AB$  ipsi  $B\Gamma$ , æqualis est et  $\Xi O$  ipsi  $\Xi\Pi$ ;  
quare et reliqua  $O\Lambda$  reliquæ  $\Pi M$  est æqualis;  
parallela igitur est  $\Lambda M$  ipsi  $\Pi O$ , et æquian-  
gulum  $\Lambda M \Xi$  triangulum ipsi  $\Pi \Xi O$  triangulo; est  
igitur ut  $\Xi \Lambda$  ad  $\Lambda M$  ita  $\Xi O$  ad  $O\Pi$ , et alterne ut  $\Lambda \Xi$   
ad  $\Xi O$  ita  $\Lambda M$  ad  $O\Pi$ . Major autem  $\Lambda \Xi$  ipsâ  $\Xi O$ ;  
major igitur et  $\Lambda M$  ipsâ  $O\Pi$ . Sed  $\Lambda M$  ipsi  $A\Gamma$   
est æqualis; et igitur  $A\Gamma$  ipsâ  $O\Pi$  est major.  
Quoniam igitur duæ  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $O\Xi$ ,  $\Xi\Pi$   
æquales sunt utraque utrique, et basis  $A\Gamma$  basi  
 $O\Pi$  major est; angulus igitur  $AB\Gamma$  angulo  $O\Xi\Pi$   
major est. Similiter utique et si  $\Xi P$  æqualem  
utrique ipsarum  $\Xi O$ ,  $\Xi\Pi$  sumamus, et jungamus

culaire au plan du cercle, et si nous faisons cette perpendiculaire égale à une droite dont le carré soit égal à l'excès du carré de  $AB$  sur le carré de  $\Lambda E$  (lem. suiv.), le problème sera résolu. Je dis que la droite  $AB$  n'est pas plus petite que  $\Lambda E$ . Qu'elle le soit, si cela est possible; faisons  $\Xi O$  égal à  $AB$ , et  $\Xi\Pi$  égal à  $B\Gamma$  et joignons  $O\Pi$ . Puisque  $AB$  est égal à  $B\Gamma$ , la droite  $\Xi O$  sera égale à la droite  $\Xi\Pi$ ; la droite restante  $O\Lambda$  sera donc égale à la droite restante  $\Pi M$ ; la droite  $\Lambda M$  est donc parallèle à la droite  $\Pi O$  (2. 6); les deux triangles  $\Lambda M \Xi$ ,  $\Pi \Xi O$  sont donc équiangles;  $\Xi \Lambda$  est donc à  $\Lambda M$  comme  $\Xi O$  est à  $O\Pi$  (4. 6); donc, par permutation,  $\Lambda \Xi$  est à  $\Xi O$  comme  $\Lambda M$  est à  $O\Pi$ . Mais  $\Lambda \Xi$  est plus grand que  $\Xi O$ ; donc  $\Lambda M$  est plus grand que  $O\Pi$ . Mais  $\Lambda M$  est égal à  $A\Gamma$ ; donc  $\Gamma \Lambda$  est plus grand que  $O\Pi$ . Et puisque les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égales aux deux droites  $O\Xi$ ,  $\Xi\Pi$ , chacune à chacune, et que la base  $A\Gamma$  est plus grande que la base  $O\Pi$ , l'angle  $AB\Gamma$  est plus grand que l'angle  $O\Xi\Pi$  (25. 1). Si l'on prend la droite  $\Xi P$  égale à chacune des droites  $\Xi O$ ,  $\Xi\Pi$ , et si l'on joint  $OP$ , nous démontrerons semblablement que l'angle

60 LE ONZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν  $OP$ , δείξομεν ὅτι καὶ<sup>38</sup> ἡ ὑπὸ  $HOK$  γωνία τῆς ὑπὸ  $OEP$  μείζων ἐστί. Συνεστάτω δὴ πρὸς τὴν  $AE$  εὐθείαν<sup>39</sup> καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $E$  τῇ μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $AEΣ$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $HOK$  ἴση ἡ ὑπὸ  $AET$ , καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν  $ES$ ,  $ET$  τῇ  $OE$  ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $OS$ ,  $OT$ ,

ipsam  $OP$ , demonstrabimus et angulum  $HOK$  gulo  $OEP$  majorem esse. Constituatur ad rectam  $AE$  et ad punctum in ipsâ  $E$  angulo quidem  $ABΓ$  æqualis  $AEΣ$ , angulo autem  $ΘHK$  æqualis  $AET$ , et ponatur utraque ipsarum  $ES$ ,  $ET$  ipsi  $OE$  æqualis, et jungantur ipsæ  $OS$ ,  $OT$ ,  $ST$ ,



$ST$ . Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $AB$ ,  $BΓ$  δυσὶ<sup>40</sup> ταῖς  $OE$ ,  $ES$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $OES$  ἴση· βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΓ$ , τουτέστιν ἡ  $AM$ , βάσει τῇ  $OS$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $AN$  τῇ  $OT$  ἴση ἐστίν<sup>41</sup>. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $MA$ ,  $AN$  δυσὶ<sup>42</sup> ταῖς  $SO$ ,  $OT$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $MAN$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $SOT$  μείζων ἐστί· βάσεις

$ST$ . Et quoniam duæ  $AB$ ,  $BΓ$  duabus  $OE$ ,  $ES$  æquales sunt, et angulus  $ABΓ$  angulo  $OES$  æqualis; basis igitur  $ΑΓ$ , hoc est  $AM$ , basi  $OS$  est æqualis. Propter eadem utique et  $AN$  ipsi  $OT$  æqualis est. Et quoniam duæ  $MA$ ,  $AN$  duabus  $SO$ ,  $OT$  æquales sunt, et angulus  $MAN$  angulo  $SOT$  major est; basis igitur  $MN$  basi  $ST$  major

$HOK$  est plus grand que l'angle  $OEP$ . Sur la droite  $AE$  et au point  $E$  de cette droite, construisons l'angle  $AEΣ$  égal à l'angle  $ABΓ$ , et l'angle  $AET$  égal à l'angle  $ΘHK$ ; faisons chacune des droites  $ES$ ,  $ET$  égale à la droite  $OE$ , et joignons  $OS$ ,  $OT$ ,  $ST$ . Puisque les deux droites  $AB$ ,  $BΓ$  sont égales aux deux droites  $OE$ ,  $ES$ , et que l'angle  $ABΓ$  est égal à l'angle  $OES$ , la base  $ΑΓ$ , c'est-à-dire la droite  $AM$ , est égale à la base  $OS$  (4. 1). Par la même raison, la droite  $AN$  sera égale à la droite  $OT$ . Et puisque les deux droites  $MA$ ,  $AN$  sont égales aux deux droites  $SO$ ,  $OT$  et que l'angle  $MAN$  est plus grand que l'angle  $SOT$ , la base  $MN$  est plus grande que la base  $ST$

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 61

ἄρα ἡ MN βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ MN τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ<sup>43</sup> ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ τοῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

### Λ Η Μ Μ Α.

Ὅν δὲ τρόπον ὃ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.

Εκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐννηρμόσθω τῇ ΑΞ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΑΓ', καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

est. Sed MN ipsi ΔΖ est æqualis; et ΔΖ igitur ipso ΣΤ major est. Quoniam igitur duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΣΞ, ΞΤ æquales sunt, et basis ΔΖ basi ΣΤ major; angulus igitur ΔΕΖ angulo ΣΞΤ major est. Æqualis autem angulus ΣΞΤ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ; angulus igitur ΔΕΖ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ major est. Sed et minor, quod impossibile.

### Λ Ε Μ Μ Α.

Quo autem modo quo majus est quadratum ex ΑΒ quam quadratum ex ΑΞ, huic æquale sumere sit quadratum ex ΞΡ, ita ostendemus.

Exponentur rectæ ΑΒ, ΑΞ, et sit major ΑΒ, et describatur ab ipsâ semicirculus ΑΒΓ, et in semicirculo ΑΒΓ aptetur ipsi ΑΞ non minori existenti diametri ΑΒ æqualis recta ΑΓ', et jungatur ipsa ΒΓ.

( 24. 1 ). Mais MN est égal à ΔΖ ; ΔΖ est donc plus grand que ΣΤ. Et puisque les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΣΞ, ΞΤ, et que la base ΔΖ est plus grande que la base ΣΤ, l'angle ΔΕΖ sera plus grand que l'angle ΣΞΤ (25. 1). Mais l'angle ΣΞΤ est égal aux angles ΑΒΓ, ΗΘΚ ; l'angle ΔΕΖ est donc plus grand que les angles ΑΒΓ, ΗΘΚ ; mais il est plus petit ; ce qui est impossible.

### Λ Ε Μ Μ Ε.

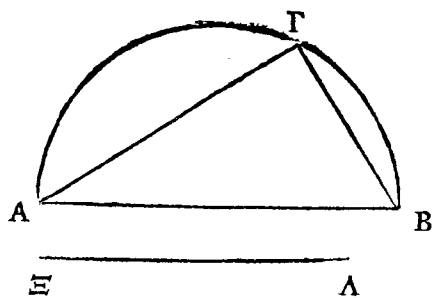
Nous démontrerons ainsi comment l'on trouve un quarré d'une droite ΞΡ égal à l'excès du quarré de ΑΒ sur le quarré de ΑΞ.

Soient les droites ΑΒ, ΑΞ ; que ΑΒ soit la plus grande, et sur cette droite décrivons le demi-cercle ΑΒΓ, et appliquons dans le demi-cercle ΑΒΓ une droite ΑΓ qui, n'étant pas plus grande que le diamètre ΑΒ, soit égale à la droite ΑΞ, et joignons ΒΓ.

## 62 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΒ<sup>2</sup>. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μείζον

Quoniam igitur in semicirculo ΑΒΓ angulus est ΑΓΒ, rectus igitur est ΑΓΒ; quadratum igitur ex ΑΒ æquale est quadratis ex ΑΓ, ΒΒ; quare quadratum ex ΑΒ quam ipsum ex ΑΓ majus



ἐστὶ<sup>3</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΒΒ. Ἰση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΞ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ μείζον ἐστὶ<sup>4</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΒΒ. Εὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσῃ τῇ ΞΠ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ μείζον<sup>5</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΞΠ. Ὅπερ προέκειτο<sup>6</sup> ποιῆσαι.

est ipso ex ΒΒ. Æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΞ quare quadratum ex ΑΒ quam ipsum ex ΑΞ majus est ipso ex ΒΒ. Si igitur ipsi ΒΓ æqualem sumamus ΞΠ, erit quadratum ex ΑΒ quam ipsum ex ΑΞ majus ipso ex ΞΠ. Quod susceptum erat facere.

Puisque l'angle ΑΓΒ est compris dans le demi-cercle ΑΓΒ, l'angle ΑΓΒ est droit (31. 3); le carré de la droite ΑΒ est donc égal aux carrés des droites ΑΓ, ΒΒ (47. 1); le carré de ΑΒ surpasse donc le carré de ΑΓ du carré de ΒΒ. Mais ΑΓ est égal à ΑΞ; le carré de ΑΒ surpasse donc le carré de ΑΞ du carré de ΒΒ; si donc nous faisons la droite ΞΠ égale à la droite ΒΒ, le carré de la droite ΑΒ surpassera le carré de la droite ΑΞ du carré de la droite ΞΠ; ce que nous voulions faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

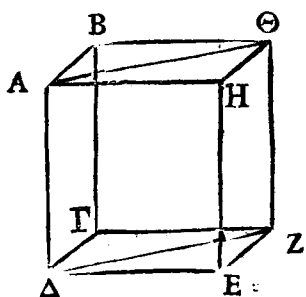
PROPOSITIO XXIV.

Εάν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστί.

Στερεὸν γάρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχισθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστίν.

Si solidum sub parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana et æqualia et parallelogramma sunt.

Solidum enim ΓΔΘΗ sub parallelis planis contineatur ipsis ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ; dico opposita ipsius plana et æqualia et parallelogramma esse.



Επεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ.

Quoniam enim duo plana parallela ΒΗ, ΓΕ a plano ΑΓ secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΔΓ. Rursus, quoniam duo plana parallela ΒΖ, ΑΕ a plano ΑΓ secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt; parallela igitur est ΒΓ ipsi ΑΔ. Ostensa est autem et ΑΒ ipsi ΔΓ pa.

PROPOSITION XXIV.

Si un solide est compris sous des plans parallèles, les plans opposés sont des parallélogrammes égaux.

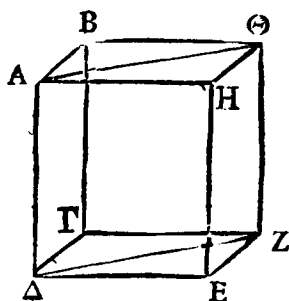
Que le solide ΓΔΘΗ soit compris sous les plans parallèles ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ; je dis que les plans opposés sont des parallélogrammes égaux.

Car puisque les deux plans parallèles ΒΗ, ΓΕ sont coupés par le plan ΑΓ, leurs communes sections sont parallèles (16. 11); la droite ΑΒ est donc parallèle à la droite ΔΓ. De plus, puisque les deux plans parallèles ΒΖ, ΑΕ sont coupés par le plan ΑΓ, leurs communes sections sont parallèles; la droite ΒΓ est donc parallèle

# 64 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εδείχθη δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta\Gamma$  παράλληλος· πα-  
ραλληλόγραμμον ἄρα τὸ  $ΑΓ$ . Ομοίως δὲ δείξο-  
μεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν  $\Delta Z$ ,  $ZH$ ,  $HB$ ,  $BZ$ ,  $AE$   
παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

parallelæ; parallelelogrammum igitur  $ΑΓ$ . Simi-  
liter utique demonstrabimus et unumquodque  
ipsorum  $\Delta Z$ ,  $ZH$ ,  $HB$ ,  $BZ$ ,  $AE$  parallelogram-  
mum esse.



Επεζεύχθωσαν αἱ  $ΑΘ$ ,  $\Delta Z$ . Καὶ ἐπεὶ παράλ-  
ληλός ἐστιν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $\Delta\Gamma$ , ἡ δὲ  $ΒΘ$  τῇ  $\Gamma Z$ ,  
δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $ΒΘ$  ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρά<sup>2</sup>  
δύο εὐθείας τὰς  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  ἀπτομένας ἀλλήλων  
εἴσιν<sup>3</sup>, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γω-  
νίας περιέξουσιν<sup>4</sup>. Ἰση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ABΘ$  γωνία τῇ  
ὑπὸ  $\Delta\Gamma Z$ . Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $AB$ ,  $ΒΘ$  δυοὶ ταῖς  
 $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABΘ$  γωνία  
τῇ ὑπὸ  $\Delta\Gamma Z$  ἐστίν<sup>5</sup> ἴση· βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΘ$  βάσει  
τῇ  $\Delta Z$  ἐστὶν ἴση<sup>6</sup>, καὶ τὸ  $ABΘ$  τρίγωνον τῷ  $\Delta\Gamma Z$   
τριγώνῳ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $ABΘ$  δι-  
πλάσιον τὸ  $BH$  παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ  
 $\Delta\Gamma Z$  διπλάσιον τὸ  $\Gamma E$  παραλληλόγραμμον· ἴσον

Jungantur ipsæ  $ΑΘ$ ,  $\Delta Z$ . Et quoniam paral-  
lela est  $AB$  quidem ipsi  $\Delta\Gamma$ , ipsa vero  $ΒΘ$  ipsi  
 $\Gamma Z$ ; duæ utique  $AB$ ,  $ΒΘ$  sese tangentes duabus  
rectis  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  sese tangentibus parallelæ sunt,  
non in eodem plano; æquales igitur angulos con-  
tinebunt; æqualis igitur angulus  $ABΘ$  ipsi  $\Delta\Gamma Z$ .  
Et quoniam duæ  $AB$ ,  $ΒΘ$  duabus  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  æquales  
sunt, et angulus  $ABΘ$  angulo  $\Delta\Gamma Z$  est æqualis;  
basis igitur  $ΑΘ$  basi  $\Delta Z$  est æqualis, et  $ABΘ$   
triangulum triangulo  $\Delta\Gamma Z$  æquale est. Atque est  
ipsius quidem  $ABΘ$  duplum  $BH$  parallelogram-  
mum, ipsius vero  $\Delta\Gamma Z$  duplum  $\Gamma E$  parallelo-  
grammum; æquale igitur  $BH$  paral'elogram-

à la droite  $AD$ . Mais l'on a démontré que la droite  $AB$  est parallèle à la droite  $\Delta\Gamma$ ; le plan  $ΑΓ$  est donc un parallélogramme. Nous démontrerons semblablement que chacun des plans  $\Delta Z$ ,  $ZH$ ,  $HB$ ,  $BZ$ ,  $AE$  est un parallélogramme.

Joignons  $ΑΘ$ ,  $\Delta Z$ . Puisque  $AB$  est parallèle à  $\Delta\Gamma$ , et  $ΒΘ$  parallèle à  $\Gamma Z$ , les deux droites  $AB$ ,  $ΒΘ$  qui se rencontrent seront parallèles aux deux droites  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  qui se rencontrent, et qui ne sont pas dans le même plan; ces droites comprendront donc des angles égaux (10. 11); l'angle  $ABΘ$  est donc égal à l'angle  $\Delta\Gamma Z$ . Et puisque les deux droites  $AB$ ,  $ΒΘ$  sont égales aux deux droites  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma Z$  (34. 1), et que l'angle  $ABΘ$  est égal à l'angle  $\Delta\Gamma Z$ , la base  $ΑΘ$  sera égale à la base  $\Delta Z$  (4. 1), et le triangle  $ABΘ$  égal au triangle  $\Delta\Gamma Z$ . Mais le parallélogramme  $BH$  est double du



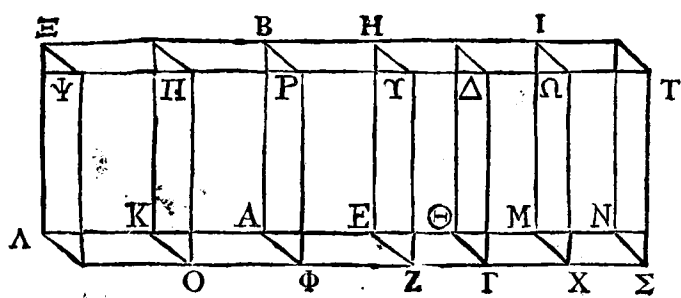
Ἄρα το ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Εὰν ἄρα στερεόν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Εὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάση πρὸς τὴν βάση οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάση πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάση οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.



Εκτελλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ

mum parallelogrammo ΓΕ. Similiter utique demonstrabimus et ipsum ΑΓ quidem ipsi ΗΖ esse æquale, ipsum vero ΑΕ ipsi ΒΖ.

Si igitur solidum, etc.

PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum a plano secetur parallelo existente oppositis planis, erit ut basis ad basim ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ΑΒΓΔ a plano ΖΗ secetur parallelo existente oppositis planis ΡΑ, ΔΘ; dico esse ut basis ΑΕΖΦ ad basim ΕΘΓΖ ita ΑΒΖΥ solidum ad ΕΗΓΔ solidum.

Producatur enim ΑΘ ex utrâque parte, et ponantur ipsi quidem ΑΕ æquales quot-

triangle ΑΒΘ, et le parallélogramme ΓΕ double aussi du triangle ΔΓΖ (34. 1); le parallélogramme ΒΗ est donc égal au parallélogramme ΓΕ. Nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΑΓ est égal au parallélogramme ΗΖ, et le parallélogramme ΑΕ égal au parallélogramme ΒΖ. Donc si, etc.

PROPOSITION XXV.

Si un parallélépipède est coupé par un plan parallèle à des plans opposés, la base sera à la base comme un solide est à un solide.

Que le parallélépipède ΑΒΓΔ soit coupé par un plan ΖΗ parallèle aux plans opposés ΡΑ, ΔΘ; je dis que la base ΑΕΖΦ est à la base ΕΘΓΖ comme le solide ΑΒΖΥ est au solide ΕΗΓΔ.

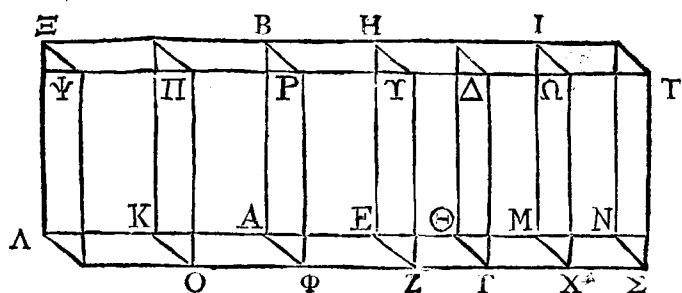
Car prolongeons de part et d'autre la droite ΑΘ, prenons autant de droites



# 66 LE ONZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ', καὶ συμπληρώσθω<sup>2</sup> τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΑΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν<sup>3</sup> ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν<sup>4</sup> ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς

cunque ΑΚ, ΚΛ, ipsi vero ΕΘ æquales quotcunque ΘΜ, ΜΝ, et compleantur ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ parallelogramma, et ΑΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ solida. Et quoniam æquales sunt ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ rectæ inter se, æqualia sunt et quidem ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ parallelogramma inter se, ipsa vero ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ inter se, et adhuc ipsa ΑΨ, ΚΠ, ΑΡ inter se; opposita enim. Propter eadem utique et ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ parallelogramma æqualia sunt quidem inter se, ipsa vero ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ æqualia sunt inter se, et adhuc ipsa ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ; tria igitur plana solidorum ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ tribus planis sunt æqualia. Sed tria tribus oppositis



ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν<sup>5</sup>. ὅσαπλασίον ἄρα ἐστὶν<sup>6</sup> ἡ ΑΖ

sunt æqualia; tria igitur solida ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ æqualia inter se sunt. Propter eadem utique et tria solida ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ æqualia inter se sunt; quotuplex igitur est basis ΑΖ ipsius ΑΖ basis

qu'on voudra ΑΚ, ΚΛ égales chacune à la droite ΑΕ; prenons aussi autant de droites qu'on voudra ΘΜ, ΜΝ égales chacune à la droite ΕΘ, et achevons les parallélogrammes ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ, et les parallélépipèdes ΑΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Puisque les droites ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ sont égales entr'elles, les parallélogrammes ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ seront égaux entr'eux ainsi que les parallélogrammes ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ (38. 1); les parallélogrammes ΑΨ, ΚΠ, ΑΡ seront aussi égaux entr'eux (24. 11), parce que ces parallélogrammes sont opposés. Les parallélogrammes ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ sont égaux entr'eux par la même raison, ainsi que les parallélogrammes ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ, et les parallélogrammes ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ; trois plans des solides ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ sont donc égaux à trois plans. Mais ces trois plans sont égaux aux trois plans opposés; les trois parallélépipèdes ΑΠ, ΚΡ, ΑΥ sont donc égaux entr'eux (déf. 10. 11). Les trois parallélépipèdes ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ sont égaux entr'eux, par la même raison; la base ΑΖ est

βάσις τῆς ΑΖ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίον ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. Καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ, ἥτε ΑΖ βάσις καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΕΥ στερεοῦ, ἥτε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ<sup>8</sup>· καὶ εἰ ἴση<sup>9</sup>, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν· οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

totuplex est et ΑΥ solidum solidi ΑΥ. Propter eadem utique quotuplex est basis ΝΖ ipsius ΖΘ basis totuplex est et solidum ΝΥ solidi ΘΥ. Et si æqualis est basis ΑΖ basi ΝΖ æquale est et solidum ΑΥ solidum ΝΥ, et si superat basis ΑΖ basim ΝΖ superat et solidum ΑΥ solidum ΝΥ; et si minor, minus; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem basibus ΑΖ, ΖΘ, duobus vero solidis ΑΥ, ΥΘ, sumpta sunt æqualiter multiplicia basis quidem ΑΖ et solidi ΑΥ, et basis ΑΖ et solidum ΑΥ, basis vero ΘΖ et solidi ΘΥ, et basis ΝΖ et solidum ΝΥ; et demonstratum est si superat basis ΑΖ basim ΝΖ, superare et solidum ΑΥ solidum ΝΥ; et si æqualis, æquale, et si deficit, deficere; est igitur ut ΑΖ basis ad basim ΖΘ ita ΑΥ solidum ad solidum ΥΘ. Quod oportebat ostendere.

donc le même multiple de la base ΑΖ, que le parallélépipède ΑΥ l'est du parallélépipède ΑΥ. Par la même raison la base ΝΖ est le même multiple de la base ΖΘ que le parallélépipède ΝΥ l'est du parallélépipède ΘΥ. Si donc la base ΑΖ est égale à la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ sera égal au parallélépipède ΝΥ; si la base ΑΖ surpasse la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ surpassera le parallélépipède ΝΥ, et si la base ΑΖ est plus petite que la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ sera plus petit que le parallélépipède ΝΥ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases ΑΖ, ΖΘ et les deux parallélépipèdes ΑΥ, ΥΘ, et l'on a pris des équimultiples de la base ΑΖ et du parallélépipède ΑΥ, savoir, la base ΑΖ et le parallélépipède ΑΥ; on a pris aussi des équimultiples de la base ΘΖ et du parallélépipède ΘΥ, savoir, la base ΝΖ et le parallélépipède ΝΥ; et l'on a démontré que si la base ΑΖ surpasse la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ surpasse le parallélépipède ΝΥ; que si la base ΑΖ est égale à la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ est égal au parallélépipède ΝΥ, et que si la base ΑΖ est plus petite que la base ΝΖ, le parallélépipède ΑΥ est plus petit que le parallélépipède ΝΥ; la base ΑΖ est donc à la base ΖΘ comme le parallélépipède ΑΥ est au parallélépipède ΥΘ ( déf. 6. 5 ). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα<sup>1</sup> ἡ  $AB$ , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ<sup>2</sup> σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ  $\Delta$  περιεχομένη ὑπὸ τῶν<sup>3</sup>  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$  γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  τῇ πρὸς τῷ  $\Delta$  στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $\Delta Z$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Z$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $Z$  ἐπὶ τὸ διὰ τῶν  $E\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  ἐπίπεδον κάθετος ἡ  $ZH$ , καὶ συμβαλλέτω τῷ<sup>5</sup> ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ  $H$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\Delta H$ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$  τῇ μὲν ὑπὸ  $E\Delta\Gamma$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Lambda$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $E\Delta H$  ἴση ἡ ὑπὸ  $BAK$ , καὶ κείσθω τῇ  $\Delta H$  ἴση ἡ  $AK$ , καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ  $K$  σημείου τῷ διὰ τῶν  $BA$ ,  $\Lambda\Lambda$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθᾶς ἡ  $K\Theta$ , καὶ κείσθω ἴση τῇ  $HZ$  ἡ  $K\Theta$ , καὶ

## PROPOSITIO XXVI.

Ad datam rectam lineam et ad datum in ipsâ punctum dato solido angulo æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem  $AB$ , datum vero in ipsâ punctum  $A$ , datus autem solidus angulus ad  $\Delta$  contentus sub  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$  angulis planis; oportet utique ad rectam  $AB$  et ad punctum in ipsâ  $A$  solido angulo ad  $\Delta$  æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur enim in ipsâ  $\Delta Z$  quodlibet punctum  $Z$ , et ducatur a puncto  $Z$  ad planum per  $E\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  perpendicularis  $ZH$ , et occurrat plano in  $H$  puncto, et jungatur ipsa  $\Delta H$ , et constituatur ad rectam  $AB$  et ad punctum  $A$  in ipsâ angulo quidem  $E\Delta\Gamma$  æqualis  $B\Delta\Lambda$ , angulo autem  $E\Delta H$  æqualis  $BAK$ , et ponatur ipsi  $\Delta H$  æqualis  $AK$ , et erigatur a puncto  $K$  plano per  $BA$ ,  $\Lambda\Lambda$  ad rectos ipsa  $K\Theta$ , et ponatur æqualis ipsi  $HZ$  ipsa

## PROPOSITION XXVI.

Sur une droite donnée et à un point donné de cette droite, construire un angle solide égal à un angle solide donné.

Soit  $AB$  la droite donnée,  $A$  le point donné de cette droite, et que l'angle solide  $\Delta$  compris sous les angles plans  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$  soit l'angle solide donné; il faut sur la droite donnée  $AB$ , et au point  $A$  donné dans cette droite construire un angle solide égal à l'angle solide donné  $\Delta$ .

Car prenons dans la droite  $\Delta Z$  un point quelconque  $Z$ ; du point  $Z$  menons une perpendiculaire  $ZH$  au plan des droites  $E\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  (11. 11); que cette perpendiculaire rencontre ce plan au point  $H$ ; joignons  $\Delta H$ . Sur la droite  $AB$  et au point  $A$  de cette droite construisons l'angle  $B\Delta\Lambda$  égal à l'angle  $E\Delta\Gamma$  (23. 1), et l'angle  $BAK$  égal à l'angle  $E\Delta H$ ; faisons  $AK$  égal à  $\Delta H$  (3. 1); du point  $K$  menons  $K\Theta$  perpendiculaire au plan des droites  $BA$ ,  $\Lambda\Lambda$  (12. 11); faisons  $K\Theta$  égal à  $HZ$ , et joignons  $\Theta A$ ; je dis que

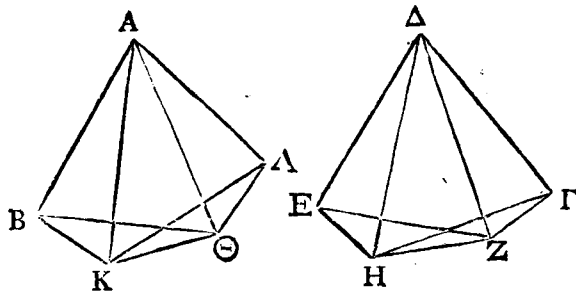
# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 69

ἐπιζεύχθω ἡ  $\Theta\Lambda$ . λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ  $A$  στερεὰ  
γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν  $B\Lambda\Lambda$ ,  $BA\Theta$ ,  $\Theta\Lambda\Lambda$   
γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ  $\Delta$  στερεᾷ γωνίᾳ  
τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$  γω-  
νιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ  $AB$ ,  $\Delta E$ , καὶ  
ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $\Theta B$ ,  $KB$ ,  $ZE$ ,  $HE$ . Καὶ ἐπεὶ  
ἡ  $ZH$  ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον,

$K\Theta$ , et jungatur ipsa  $\Theta A$ ; dico ad  $A$  angulum  
solidum comprehensum sub  $B\Lambda\Lambda$ ,  $BA\Theta$ ,  $\Theta\Lambda\Lambda$   
angulis æqualem esse ad  $\Delta$  solido angulo com-  
prehensum sub angulis  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$ .

Sumantur enim æquales  $AB$ ,  $\Delta E$ , et jun-  
gantur ipsæ  $\Theta B$ ,  $KB$ ,  $ZE$ ,  $HE$ . Et quoniam  $ZH$   
perpendicularis est ad subjectum planum, et



καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς  
εὐθείας καὶ οὖσας ἐν τῷ ὑποκείμενῳ ἐπίπεδῳ ὀρθὰς  
ποιήσει γωνίας ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν  
ὑπὸ  $ZH\Delta$ ,  $ZHE$  γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ  
ἑκατέρω τῶν ὑπὸ  $\Theta KA$ ,  $\Theta KB$  γωνιῶν ὀρθή ἐστι.  
Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ  $KA$ ,  $AB$  δυσὶ ταῖς  $H\Delta$ ,  $\Delta E$  ἴσαι  
εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνίας ἴσας περιέ-  
χουσι· βάσεις ἄρα ἡ  $KB$  βάσει τῇ  $EH$  ἴση ἐστίν.  
Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $K\Theta$  τῇ  $HZ$  ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς

ad omnes igitur contingentes ipsam et exis-  
tentes in subjecto plano rectos faciet angulos;  
rectus igitur uterque angulorum  $ZH\Delta$ ,  $ZHE$ .  
Propter eadem utique et uterque angulorum  
 $\Theta KA$ ,  $\Theta KB$  rectus est. Et quoniam duæ  $KA$ ,  
 $AB$  duabus  $H\Delta$ ,  $\Delta E$  æquales sunt utraque  
utrique, et angulos æquales continent; basis  
igitur  $BK$  basi  $EH$  æqualis est. Est autem et  
 $K\Theta$  ipsi  $HZ$  æqualis, et angulos rectos con-

l'angle solide  $A$ , compris sous les angles  $B\Lambda\Lambda$ ,  $BA\Theta$ ,  $\Theta\Lambda\Lambda$ , est égal à l'angle solide  
 $\Delta$ , compris sous les angles  $E\Delta\Gamma$ ,  $E\Delta Z$ ,  $Z\Delta\Gamma$ .

Car prenons les droites égales  $AB$ ,  $\Delta E$ , et joignons  $\Theta B$ ,  $KB$ ,  $ZE$ ,  $HE$ . Puisque la  
droite  $ZH$  est perpendiculaire au plan inférieur, cette droite fera des angles droits  
avec toutes les droites qui la rencontrent et qui sont dans le plan inférieur (déf. 3. 11);  
chacun des angles  $ZH\Delta$ ,  $ZHE$  est donc droit. Par la même raison, chacun des angles  
 $\Theta KA$ ,  $\Theta KB$  est droit. Et puisque les deux droites  $KA$ ,  $AB$  sont égales aux deux  
droites  $H\Delta$ ,  $\Delta E$ , chacune à chacune, et que ces droites comprennent des angles  
égaux, la base  $BK$  sera égale à la base  $EH$  (4. 1). Mais la droite  $K\Theta$  est égale à la

70 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσεις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὲ αἱ ΘΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΑ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση<sup>10</sup>. ἐπειδὴ περὶ ἂν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΑ, ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΑ, ΘΑ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὣν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΑ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσεις ἄρα ἡ ΚΑ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὲ αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσεις ἄρα ἡ ΘΑ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΑ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ, εἰσὶ ἴσαι<sup>12</sup>, καὶ βάσεις ἡ ΘΑ βάσει

tinent; æqualis igitur et ΘΒ ipsi ΖΕ. Rursus quoniam duæ ΑΚ, ΚΘ duabus ΔΗ, ΗΖ æquales sunt, et angulos rectos continent; basis igitur ΑΘ basi ΔΖ æqualis est. Est autem et ΑΒ ipsi ΔΕ æqualis; duæ igitur ΘΑ, ΑΒ duabus ΔΖ, ΔΕ æquales sunt, et basis ΘΒ basi ΖΕ æqualis; angulus igitur ΒΑΘ angulo ΕΔΖ est æqualis. Propter eadem utique et ΘΑΑ angulo ΖΔΓ est æqualis; quoniam si assumamus æquales ΑΑ, ΔΓ, et jungamus ipsas ΚΑ, ΘΑ, ΗΓ, ΖΓ, quoniam totus ΒΑΑ toti ΕΔΓ æqualis est, quorum angulus ΒΑΚ angulo ΕΔΗ supponitur æqualis; reliquus igitur ΚΑΑ reliquo ΗΔΓ est æqualis. Et quoniam duæ ΚΑ, ΑΑ duabus ΗΔ, ΔΓ æquales sunt, et angulos æquales continent; basis igitur ΚΑ basi ΗΓ est æqualis. Est autem et ΚΘ ipsi ΗΖ æqualis; duæ igitur ΑΚ, ΚΘ duabus ΓΗ, ΗΖ sunt æquales, et angulos rectos continent; basis igitur ΘΑ basi ΖΓ est æqualis. Et quoniam duæ ΘΑ, ΑΑ duabus ΖΔ, ΔΓ sunt æquales, et basis ΘΑ basi ΖΓ est

droite ΗΖ, et ces droites comprennent des angles droits; la droite ΘΒ est donc égale à la droite ΖΕ. De plus, puisque les deux droites ΑΚ, ΚΘ sont égales aux deux droites ΔΗ, ΗΖ, et que ces droites comprennent des angles droits, la base ΑΘ est égale à la base ΔΖ. Mais ΑΒ est égal à ΔΕ; les deux droites ΘΑ, ΑΒ sont donc égales aux deux droites ΔΖ, ΔΕ; mais la base ΘΒ est égale à la base ΖΕ; l'angle ΒΑΘ est donc égal à l'angle ΕΔΖ. Par la même raison, l'angle ΘΑΑ est égal à l'angle ΖΔΓ; car si nous prenons les droites égales ΑΑ, ΔΓ, et si nous joignons ΚΑ, ΘΑ, ΗΓ, ΖΓ, à cause que l'angle entier ΒΑΑ est égal à l'angle entier ΕΔΓ, et que l'angle ΒΑΚ est égal à l'angle ΕΔΗ, l'angle restant ΚΑΑ sera égal à l'angle restant ΗΔΓ. Et puisque les deux droites ΚΑ, ΑΑ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΓ, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΚΑ sera égale à la base ΗΓ (41. 1). Mais ΚΘ est égal à ΗΖ; les deux droites ΑΚ, ΚΘ sont donc égales aux deux droites ΓΗ, ΗΖ; mais ces deux droites renferment des angles droits; la base ΘΑ est donc égale à la base ΖΓ. Et puisque les deux droites ΘΑ, ΑΑ sont égales aux deux droites

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 71

τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνία  
τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ  
τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ<sup>13</sup> καὶ τῷ  
πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α<sup>14</sup> δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ  
τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση<sup>15</sup> συνέσταται. Οπερ εἶδει ποιῆσαι.

æqualis; angulus igitur ΘΑΛ angulo ΖΔΓ est  
æqualis. Est autem et angulus ΒΑΛ angulo ΕΔΓ  
æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ et ad datum  
punctum Α in ipsâ dato solido angulo ad Δ  
æqualis constitutus est. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

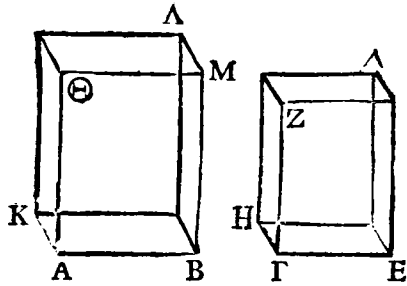
Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ  
παρὰλληλεπίπεδῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον  
στερεὸν παρὰλληλεπίπεδον ἀναγράφαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν

### PROPOSITIO XXVII.

A datâ rectâ dato solido parallelepipedo et  
simile et similiter positum solidum parallele-  
pipedum describere.

Sit data quidem recta ΑΒ, datum vero so-



στερεὸν παρὰλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὲ ἀπὸ  
τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ  
παρὰλληλεπίπεδῳ τῷ ΓΔ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως  
κείμενον στερεὸν παρὰλληλεπίπεδον ἀναγράφαι.

lidum parallelepipedum ΔΓ; oportet utique a  
datâ rectâ ΑΒ dato solido parallelepipedo ΓΔ  
et simile et similiter positum solidum parallele-  
pipedum describere.

ΖΔ, ΔΓ, et que la base ΘΑ est égale à la base ΖΓ, l'angle ΘΑΛ sera égal à l'angle  
ΖΔΓ (8. 1). Mais l'angle ΒΑΛ est égal à l'angle ΕΔΓ.

Sur une droite donnée et au point Α de cette droite, on a donc construit un angle  
solide égal à un angle solide donné. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XXVII.

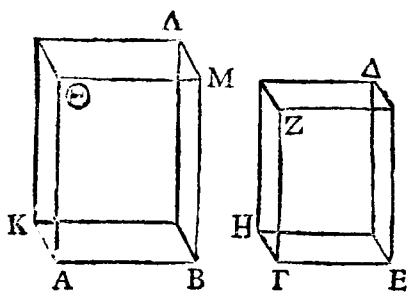
Sur une droite donnée décrire un parallélépipède semblable à un parallélé-  
pipède donné, et semblablement placé.

Soit ΑΒ la droite donnée, et ΔΓ le parallélépipède donné; il faut décrire sur  
la droite ΑΒ un parallélépipède semblable au parallélépipède donné ΔΓ, et sem-  
blablement placé.

72 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ  
πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ  
γωνία ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAΘ, ΘAK,  
KAB, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ BAΘ γωνίαν  
τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ ΕΓΗ,  
τὴν δὲ<sup>1</sup> ὑπὸ KAΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγρονέτω ὡς  
μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AK,  
ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν  
AΘ· καὶ<sup>2</sup> δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΖΓ  
οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AΘ. Καὶ συμπληρώσθω  
τὸ BΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ AA στερεόν.

Constituatur enim ad AB rectam et ad punc-  
tum A in ipsâ ad Γ angulo solido angulus æqualis,  
contentus sub BAΘ, ΘAK, KAB, ita ut æqualis  
sit quidem BAΘ angulus ipsi ΕΓΖ, angulus vero  
BAK angulo ΕΓΗ, angulus autem KAΘ ipsi  
ΗΓΖ, et fiat ut quidem ΕΓ ad ΓΗ ita BA ad  
AK, ut vero ΗΓ ad ΓΖ ita KA ad AΘ; et ex  
æquo igitur est ut ΓΕ ad ΓΖ ita BA ad AΘ.  
Et compleantur parallelogrammum BΘ et AA  
solidum.



Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως  
ἡ BA πρὸς τὴν AK, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς  
ὑπὸ ΕΓΗ, BAK αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν·  
ὁμοιον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ HE παραλληλόγραμμον  
τῷ KB παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ

Et quoniam est ut ΕΓ ad ΓΗ ita BA ad  
AK, et circa æquales angulos ΕΓΗ, BAK latera  
proportionalia sunt; simile igitur est paralle-  
logrammum HE parallelogrammo KB. Propter

Car sur la droite AB, et au point A de cette droite construisons un angle solide  
qui, étant compris sous les angles BAΘ, ΘAK, KAB, soit égal à l'angle solide Γ,  
de manière que l'angle BAΘ soit égal à l'angle ΕΓΖ, l'angle BAK égal à l'angle ΕΓΗ,  
et l'angle KAΘ égal à l'angle ΗΓΖ, et faisons en sorte que ΕΓ soit à ΓΗ comme BA  
est à AK, et que ΗΓ soit à ΓΖ comme KA est à AΘ ( 12. 6 ); par égalité ΓΕ sera à  
ΓΖ comme BA est à AΘ ( 25. 5 ); achevons le parallélogramme BΘ et le parallé-  
lépipède AA.

Puisque ΕΓ est à ΓΗ comme BA est à AK, les côtés qui sont autour des angles  
égaux ΕΓΗ, BAK seront proportionnels; le parallélogramme HE est donc semblable  
au parallélogramme KB ( 4. 6 ). Par la même raison, le parallélogramme KΘ est



τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὁμοιά ἐστίν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα<sup>4</sup> τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὁμοίον ἐστίν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα<sup>5</sup> εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

eadem utique et quidem parallelogrammum ΚΘ parallelogrammo ΗΖ simile est, et adhuc ipsum ΖΕ ipsi ΘΒ; tria igitur parallelogramma solidi ΓΔ tribus parallelogrammis solidi ΑΛ similia sunt. Sed tria quidem tribus oppositis æqualia et sunt et similia, tria vero tribus oppositis et æqualia sunt et similia; totum igitur ΓΔ solidum toti solido ΑΛ simile est.

A datâ igitur rectâ ΑΒ dato solido parallelepipedo ΓΔ et simile et similiter positum descriptum est ipsum ΑΛ. Quod oportebat facere.

semblable au parallélogramme ΗΖ, et le parallélogramme ΖΕ semblable au parallélogramme ΘΒ; trois parallélogrammes du parallélépipède ΓΔ sont donc semblables à trois parallélogrammes du parallélépipède ΑΛ. Mais les trois premiers parallélogrammes sont égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers parallélogrammes sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés (24. 1). Le parallélépipède entier ΓΔ est donc semblable au parallélépipède entier ΑΛ.

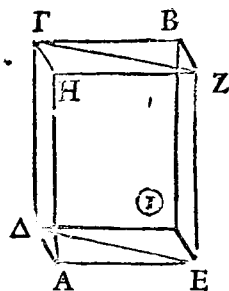
Sur la droite donnée ΑΒ, on a donc construit un parallélépipède ΑΛ semblable à un parallélépipède donné ΓΔ et semblablement placé. Ce qu'il fallait faire.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εάν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ AB ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους<sup>1</sup> τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ AB στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.



Επεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἴστι δὲ καὶ<sup>2</sup> τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον, ἀπεναντίον γὰρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλο-

Si solidum parallelepipedum a plano secetur per diagonales oppositorum planorum, bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

Solidum enim parallelepipedum AB a plano ΓΔΕΖ secetur per diagonales ΓΖ, ΔΕ oppositorum planorum; dico bifariam secari solidum AB a plano ΓΔΕΖ.

Quoniam enim æquale est quidem ΓΗΖ triangulum triangulo ΓΖΒ, ipsum vero ΑΔΕ ipsi ΔΕΘ, sed est et quidem ΓΑ parallelogrammum ipsi ΕΒ æquale, oppositum enim, ipsum vero ΗΕ ipsi ΓΘ; et prisma igitur contentum quidem sub duobus triangulis ΓΗΖ, ΑΔΕ,

## PROPOSITION XXVIII.

Si un parallélépipède est coupé par un plan selon les diagonales de deux plans opposés, le parallélépipède sera coupé en deux parties égales par ce plan.

Que le parallélépipède AB soit coupé par le plan ΓΔΕΖ selon les diagonales des deux plans opposés ΓΖ, ΔΕ; je dis que le parallélépipède AB sera coupé en deux parties égales par le plan ΓΔΕΖ.

Car puisque le triangle ΓΗΖ est égal au triangle ΓΖΒ (34. 1), et le triangle ΑΔΕ égal au triangle ΔΕΘ, et que de plus le parallélogramme ΓΑ est égal au parallélogramme ΕΒ (24. 11), car ces deux parallélogrammes sont opposés, et que le parallélogramme ΗΕ est aussi égal au parallélogramme ΓΘ, le prisme compris sous les deux triangles ΓΗΖ, ΑΔΕ, et sous les trois parallélogrammes ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ, sera

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 75

γραμμῶν τῶν HE, AF, FE ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσ-  
ματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων  
τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων  
τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέ-  
χονται τῷ τε<sup>3</sup> πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον  
τὸ AB στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ  
ἐπιπέδου. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

tribus vero parallelogrammis HE, AF, FE  
æquale est prismati contento sub duobus trian-  
gulis ΓΖΒ, ΔΕΘ, tribus vero parallelogrammis  
ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, namque sub æqualibus planis con-  
tinentur et multitudine et magnitudine; ergo to-  
tum AB solidum bifariam secatur a plano ΓΔΕΖ.  
Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλ-  
ληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφε-  
στῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις  
ἐστίν.

Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ  
παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ  
ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AH, AZ, AM,  
AN, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν  
ἕστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ  
στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

### PROPOSITIO XXIX.

In eâdem basi existentia solida parallelepi-  
peda et eâdem altitudine, quorum insistentes  
ipsæ in eisdem sunt rectis, æqualia inter se  
sunt.

Sint in eâdem basi AB solida parallelepipedâ  
ΓΜ, ΓΝ eâdem altitudine existentia, quorum  
insistentes ipsæ AH, AZ, AM, AN, ΓΔ, ΓΕ,  
ΒΘ, ΒΚ in eisdem sint rectis ΖΝ, ΔΚ; dico  
æquale esse ΓΜ solidum solido ΓΝ.

égal au prisme compris sous les deux triangles ΓΖΒ, ΔΕΘ, et sous les trois paral-  
lélogrammes ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, car ils sont compris sous des plans égaux en nombre  
et en grandeur (déf. 10. 11); le parallélépipède entier AB est donc coupé en deux  
parties égales par le plan ΓΔΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIX.

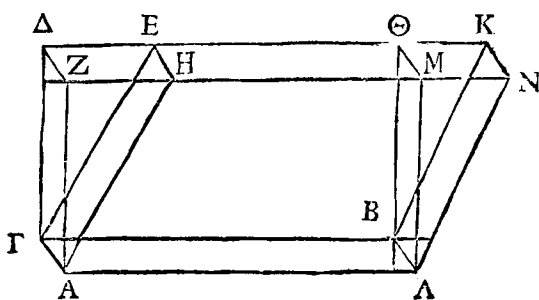
Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés  
sont placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

Que les parallélépipèdes ΓΜ, ΓΝ aient la même base AB et la même hauteur,  
et que les côtés AH, AZ, AM, AN, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ soient dans les mêmes droites  
ΖΝ, ΔΚ; je dis que le parallélépipède ΓΜ est égal au parallélépipède ΓΝ.

# 76. LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΖΑΗ τρίγωνον τῷ ΜΑΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλ-

Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum ΓΘ, ΓΚ, æqualis est ΓΒ utrique ipsarum ΔΘ, ΕΚ; quare et ΔΘ ipsi ΕΚ est æqualis. Communis auferatur ΕΘ; reliqua igitur ΔΕ reliquæ ΘΚ est æqualis; quare et quidem ΔΕΓ triangulum triangulo ΘΚΒ æquale est, sed parallelogrammum ΔΗ parallelogrammo ΘΝ. Propter eadem utique et ΖΑΗ triangulum triangulo ΜΑΝ æquale est. Sed est et quidem ΓΖ parallelogram-



λητογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΓΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΑΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΝΒ. Κοινὸν προσκείσθω

mum parallelogrammo ΒΜ æquale, ipsum vero ΓΗ ipsi ΒΝ, oppositum enim; et prisma igitur contentum quidem sub duobus triangulis ΑΖΗ, ΓΔΕ, tribus vero parallelogrammis ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ, æquale est prismati contento quidem sub duobus angulis ΜΑΝ, ΘΒΚ, tribus vero parallelogrammis ΒΜ, ΘΝ, ΝΒ. Commune apponatur solidum, cujus basis quidem ΑΒ paral-

Car puisque chacune des figures ΓΘ, ΓΚ est un parallélogramme, la droite ΓΒ est égale à chacune des droites ΔΘ, ΕΚ (34. 1); la droite ΔΘ est donc égale à la droite ΕΚ. Retranchons la partie commune ΕΘ, la droite restante ΔΕ sera égale à la droite restante ΘΚ; le triangle ΔΕΓ est donc égal au triangle ΘΚΒ (8. 1), et le parallélogramme ΔΗ égal au parallélogramme ΘΝ (36. 1). Par la même raison le triangle ΖΑΗ est égal au triangle ΜΑΝ. Mais le parallélogramme ΓΖ est égal au parallélogramme ΒΜ, et le parallélogramme ΓΗ égal au parallélogramme ΒΝ (24. 11), car ces parallélogrammes sont opposés; le prisme contenu sous les deux triangles ΑΖΗ, ΓΔΕ, et sous les trois parallélogrammes ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ est donc égal au prisme contenu sous les deux triangles ΑΜΝ, ΕΒΚ, et sous les trois parallélogrammes ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ (déf. 10. 11). Ajoutons le solide commun, dont une des bases est le parallé-

τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ AB παραλληλό-  
γραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ HEΘM. ὅλον  
ἄρα τὸ ΓM στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσῳ τῷ  
ΓN στερεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

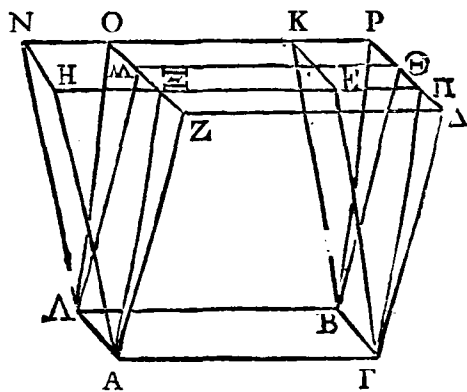
Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρα-  
λληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφε-  
στῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα  
ἀλλήλοις ἐστίν.

lelogrammum, oppositum vero HEΘM; totum  
igitur ΓM solidum parallelepipedum toti ΓN  
solido parallelepipedo æquale est.

In eadem igitur, etc.

PROPOSITIO XXX.

In eadem basi existentia solida parallepi-  
peda et eadem altitudine, quorum ipsæ insis-  
tentes non sunt in eisdem rectis, æqualia inte-  
se sunt.



Εστω γάρ<sup>1</sup> ἐπὶ αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ  
παραλληλεπίπεδα τὰ ΓM, ΓN, καὶ<sup>2</sup> ὑπὸ τὸ  
αὐτὸ ὕψος, ὧν ἐφεστῶσαι<sup>3</sup> αἱ AZ, AH, ΛM, ΛN,  
ΓΔ, ΓE, BΘ, BK μὴ ἕστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν  
εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN  
στερεῷ.

Sint enim in eadem basi AB solida paralle-  
lepipeda ΓM, ΓN, et eadem altitudine, quorum  
ipsæ insistentes AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE,  
BΘ, BK non sint in eisdem rectis; dico æquale  
esse ΓM solidum solido ΓN.

logramme AB, et dont la base opposée est le parallélogramme HEΘM, le parallélé-  
pipède entier ΓM sera égal au parallélépipède entier ΓN. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

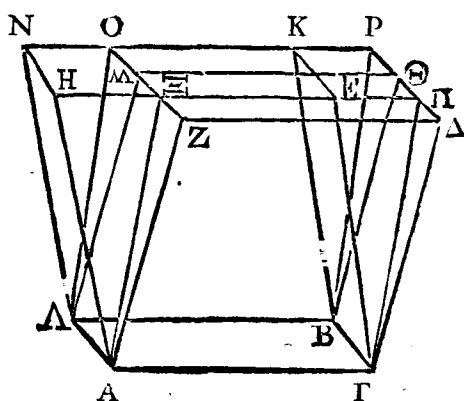
Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les  
côtés ne sont point placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

Soient ΓM, ΓN des parallélépipèdes qui ont la même base AB et la même hau-  
teur, et dont les côtés AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK ne sont point placés dans  
les mêmes droites; je dis que le parallélépipède ΓM est égal au parallélépi-  
pède ΓN.

78 LE ONZIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Εκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ  $NK$ ,  $\Delta\Theta$ , καὶ συμπιπ-  
τέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ  $P$ <sup>5</sup>, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσ-  
θωσαν αἱ  $ZM$ ,  $HE$  ἐπὶ τὰ  $O$ ,  $\Pi$ , καὶ<sup>6</sup> ἐπεζεύχθωσαν  
αἱ<sup>7</sup>  $AΞ$ ,  $\Lambda O$ ,  $\Gamma\Pi$ ,  $BP$ . Ἰσον δὴ ἐστὶ  $\Gamma M$  στερεὸν,  
οὗ βάσις μὲν τὸ  $A\Gamma B\Lambda$  παραλληλόγραμμον,  
ἀπεναντίον δὲ τὸ  $Z\Delta\Theta M$  τῷ  $\Gamma O$  στερεῷ, οὗ  
βάσις μὲν τὸ  $A\Gamma B\Lambda$  παραλληλόγραμμον, ἀπε-  
ναντίον δὲ τὸ  $\Xi\Pi P O$ , ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς  
βάσεως εἰσι τῆς  $A\Gamma B\Lambda$ , ὧν αἱ ἐφιστώσαι<sup>8</sup> αἱ  
 $AZ$ ,  $AΞ$ ,  $\Lambda M$ ,  $\Lambda O$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma E$ ,  $B\Theta$ ,  $BP$  ἐπὶ τῶν

Producantur enim ipsæ  $NK$ ,  $\Delta\Theta$ , et con-  
veniant inter se in puncto  $P$ , et adhuc  
producantur ipsæ  $ZM$ ,  $HE$  in ipsis  $O$ ,  $\Pi$ ,  
et jungantur  $AΞ$ ,  $\Lambda O$ ,  $\Gamma\Pi$ ,  $BP$ . Æquale utique  
est  $\Gamma M$  solidum, cujus basis quidem  $A\Gamma B\Lambda$  pa-  
rallelogrammum, oppositum vero  $Z\Delta\Theta M$  solido  
 $\Gamma O$ , cujus basis quidem  $A\Gamma B\Lambda$  parallelogram-  
mum, oppositum vero  $\Xi\Pi P O$ , etenim in eadem  
sunt basi  $A\Gamma B\Lambda$ , et quorum insistentes ipsæ  
 $AZ$ ,  $AΞ$ ,  $\Lambda M$ ,  $\Lambda O$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma E$ ,  $B\Theta$ ,  $BP$  in eisdem



αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν  $ZO$ ,  $\Delta P$ . Ἀλλὰ τὸ  $\Gamma O$   
στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ<sup>9</sup> τὸ  $A\Gamma B\Lambda$  παραλλη-  
λόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Xi\Pi P O$ , ἴσον ἐστὶ  
τῷ  $\Gamma N$  στερεῷ, οὗ βάσις μὲν<sup>10</sup> τὸ  $A\Gamma B\Lambda$  παρα-  
λληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $HEKN$ , ἐπὶ τε  
γὰρ πάλιν<sup>11</sup> τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς  $A\Gamma B\Lambda$ ,

sunt rectis  $ZO$ ,  $\Delta P$ . Sed solidum  $\Gamma O$ , cujus  
basis quidem est  $A\Gamma B\Lambda$  parallelogrammum, op-  
positum vero  $\Xi\Pi P O$ , æquale est solido  $\Gamma N$ ,  
cujus basis quidem  $A\Gamma B\Lambda$  parallelogrammum,  
oppositum vero  $HEKN$ , etenim in eadem sunt  
basi  $A\Gamma B\Lambda$ , quorum insistentes ipsæ  $AH$ ,  $AΞ$ ,

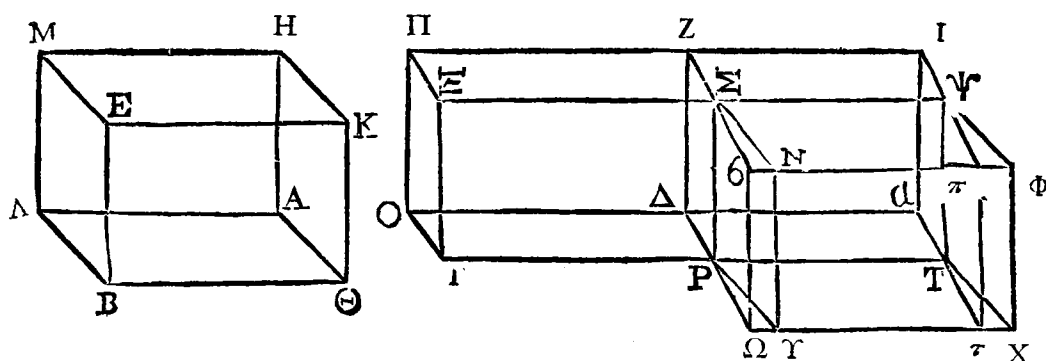
Car prolongeons  $NK$ ,  $\Delta\Theta$ , et que ces droites se rencontrent au point  $P$ ; pro-  
longeons aussi les droites  $ZM$ ,  $HE$  vers les points  $O$ ,  $\Pi$ , et joignons  $AΞ$ ,  $\Lambda O$ ,  $\Gamma\Pi$ ,  $BP$ .  
Le parallélépipède  $\Gamma M$ , dont la base est le parallélogramme  $A\Gamma B\Lambda$  opposé au pa-  
rallélogramme  $Z\Delta\Theta M$ , sera égal au parallélépipède  $\Gamma O$ , dont la base est le parallé-  
logramme  $A\Gamma B\Lambda$  opposé au parallélogramme  $\Xi\Pi P O$  (29. 11), car ces deux  
parallélogrammes ont la même base  $A\Gamma B\Lambda$ , et leurs côtés  $AZ$ ,  $AΞ$ ,  $\Lambda M$ ,  $\Lambda O$ ,  
 $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma\Pi$ ,  $B\Theta$ ,  $BP$  sont dans les mêmes droites  $ZO$ ,  $\Delta P$ . Mais le parallélépipède  
 $\Gamma O$  dont la base est le parallélogramme  $A\Gamma B\Lambda$  opposé au parallélogramme  $\Xi\Pi P O$   
est égal au parallélépipède  $\Gamma N$  dont la base est le parallélogramme  $A\Gamma B\Lambda$  opposé  
au parallélogramme  $HEKN$  (29. 11); car ces deux parallélépipèdes ont la même  
base  $A\Gamma B\Lambda$ , et leurs côtés  $AH$ ,  $AΞ$ ,  $\Gamma E$ ,  $\Gamma\Pi$ ,  $\Delta N$ ,  $\Lambda O$ ,  $BK$ ,  $BP$  sont dans les



# 80 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ταῖς AB, ΓΔ βάσεσιν<sup>2</sup>, καὶ ἐκβέλησθω ἐπ' εὐ-  
θείας τῇ ΓΡ εὐθεία ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς  
τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ  
τῇ ὑπὸ ΑΒ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω  
τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΑΒ ἴση ἡ ΡΥ<sup>3</sup>, καὶ  
συμπεπληρώσθω ἥτις ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στε-  
ρόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΑΒ  
ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· ἴσον ἄρα  
καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ  
παραλληλόγραμμῳ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν

ΓΔ, et producat in directum rectæ ΓΡ ipsa  
ΡΤ, et constituatur ad rectam ΡΤ et ad punc-  
tum in ipsâ Ρ angulo ΑΒ æqualis ipse ΤΡΥ,  
et ponatur ipsi quidem ΑΛ æqualis ΡΤ, ipsi  
vero ΑΒ æqualis ΡΥ, et compleantur basis ΡΧ  
et solidum ΨΥ. Et quoniam duæ ΤΡ, ΡΥ duabus  
ΑΛ, ΑΒ æquales sunt, et angulos æquales  
continent; æquale igitur et simile ΡΧ paral-  
logrammum parallelogrammo ΘΛ. Et quoniam



ἡ μὲν<sup>4</sup> ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας  
ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΡΨ  
παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ.  
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι  
καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ  
στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στε-  
ρεοῦ ἴσα τέ<sup>5</sup> ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία  
τρὶς τούτοις ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια,

rursus æqualis est quidem ΑΛ ipsi ΡΤ, ipsa vero  
ΑΜ ipsi ΡΣ, et angulos rectos continent;  
æquale igitur et simile est ΡΨ parallelogrammum  
parallelogrammo ΑΜ. Propter eadem utique  
et ΑΕ ipsi ΣΥ et æquale est et simile; tria igitur  
parallelogramma solidi ΑΕ tribus parallelo-  
grammis solidi ΨΥ et æqualia sunt et similia. Sed  
quidem tria tribus oppositis et æqualia sunt et

lares aux bases AB, ΓΔ; menons la droite ΡΤ dans la direction de la droite ΓΡ;  
sur la droite ΡΤ et au point Ρ de cette droite, construisons l'angle ΤΡΥ égal à  
l'angle ΑΒ ( 23. 1 ); faisons ΡΤ égal à ΑΛ, et ΡΥ égal à ΑΒ; et achevons la base ΡΧ  
et le parallélépipède ΨΥ. Puisque les deux droites ΤΡ, ΡΥ sont égales aux deux  
droites ΑΛ, ΑΒ, et qu'elles comprennent des angles égaux, le parallélogramme ΡΧ  
sera égal et semblable au parallélogramme ΘΛ. De plus, puisque ΑΛ est égal à  
ΡΤ et ΑΜ égal à ΡΣ, et que ces droites comprennent des angles droits, le paral-  
lélogramme ΡΨ sera égal et semblable au parallélogramme ΑΜ. Le parallélogramme  
ΑΕ est égal et semblable au parallélogramme ΣΥ, par la même raison; trois paral-  
lélogrammes du parallélépipède ΑΕ sont donc égaux et semblables à trois paral-  
lélogrammes du parallélépipède ΨΥ. Mais les trois premiers parallélogrammes sont



## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 81

τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον<sup>6</sup> ὅλον ἄρα τῷ  
 ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στε-  
 ρεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστὶ. Διήχθωσαν αἱ  
 ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπιπτεύωσαν ἀλλήλαις κατὰ  
 τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθῃ  
 ἡ Ττ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ  
 καὶ συνεζεύχθωσαν<sup>7</sup> κατὰ τὸ α, καὶ συμ-  
 πεπληρώσθωσαν τὰ ΩΨ, ΠΙ στερεά· ἴσον δὲ  
 ἐστὶ τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  
 ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΩΠ  
 τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν<sup>8</sup> ἐστὶ τὸ ΡΨ παραλ-  
 ληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ, ἐπὶ τε γὰρ  
 τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΨ, καὶ ὑπὸ τὸ  
 αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι<sup>9</sup>, αἱ ΡΩ, ΡΥ,  
 Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν  
 εὐθειῶν τῶν ΩΧ, σΦ. Ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ  
 ἐστὶν ἴσον<sup>10</sup>, καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ  
 ἐστὶν ἴσον<sup>11</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλ-  
 ληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ, ἐπὶ τε  
 γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΤ, καὶ ἐν ταῖς  
 αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ, ἀλλὰ τὸ

similia, tria vero tribus oppositis; totum igitur  
 ΑΕ solidum parallelepipedum toti ΨΥ solido pa-  
 rallelepipedo æquale est. Producantur ipsæ ΔΡ,  
 ΧΥ et convenient inter se in puncto Ω, et per  
 Τ ipsi ΔΩ parallela ducatur Ττ, et producantur  
 ipsa Ττ et ipsa ΟΔ et convenient in α, et com-  
 pleantur ΩΨ, ΠΙ solida; æquale igitur est ΨΩ  
 solidum, cujus basis quidem est ΡΨ paralle-  
 logrammum, oppositum vero ΩΠ, solido ΨΥ,  
 cujus basis quidem est ΡΨ parallelogrammum,  
 oppositum vero ΥΦ, et enim in eadem sunt  
 basi ΡΨ, et in eadem altitudine, quorum ipsæ  
 insistentes ΡΩ, ΡΥ, Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ  
 in eisdem sunt rectis ΩΧ, σΦ. Sed ΨΥ solidum  
 ipsi ΑΕ est æquale; et igitur ΨΩ solidum  
 solido ΑΕ est æquale. Et quoniam æquale est  
 ΡΥΧΤ parallelogrammum parallelogrammo ΩΤ,  
 et enim in eadem sunt basi ΡΤ, et in eisdem pa-  
 rallelis ΡΤ, ΩΧ, sed ΡΥΧΤ ipsi ΓΔ est æquale,

égaux et semblables à trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers pa-  
 rallélogrammes sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes op-  
 posés (24. 11); le parallélépipède entier ΑΕ est donc égal au parallélépipède  
 entier ΨΥ (déf. 10. 1). Prolongeons les droites ΔΡ, ΧΥ, et que ces droites se rencon-  
 trent au point Ω; par le point Τ menons la droite Ττ parallèle à la droite ΔΩ; pro-  
 longeons les droites Ττ, ΟΔ; que ces droites se rencontrent au point α, et ache-  
 vons les parallélépipèdes ΩΨ, ΠΙ. Le parallélépipède ΨΩ qui a pour base le pa-  
 rallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme ΩΠ sera égal au parallélépipède ΨΥ  
 qui a pour base le parallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme ΥΦ (29. 11), parce  
 que ces deux parallélépipèdes ont la même base ΡΨ et la même hauteur, et que  
 leurs côtés ΡΩ, ΡΥ, Ττ, ΤΧ, Σσ, ΣΝ, Ψπ, ΨΦ sont placés dans les mêmes droites  
 ΑΧ, σΦ. Mais le parallélépipède ΨΥ est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallé-  
 lépipède ΨΩ est donc égal au parallélépipède ΑΕ. Mais le parallélogramme ΡΥΧΤ  
 est égal au parallélogramme ΩΤ (35. 1), car ces deux parallélogrammes ont la  
 même base ΡΤ et sont compris entre les mêmes parallèles ΡΤ, ΩΧ, et le parallélo-  
 gramme ΡΥΧΤ est égal au parallélogramme ΓΔ, parce que le parallélogramme ΡΥΧΤ



## 82 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΥΧΤ τῷ ΓΔ ἔστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ· καὶ τὸ  
ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἔστιν ἴσον.  
Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν  
ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν  
παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτ-  
μηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπι-  
πέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν  
οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὲ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ  
ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι  
τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ  
βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν  
πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν<sup>12</sup>. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν  
ΔΤ οὕτως ἡ ΩΤ βάσις<sup>13</sup> πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα  
τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν οὕτως τὸ ΩΨ  
στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν<sup>14</sup>. ἐκότερον ἄρα τῶν ΓΖ,  
ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·  
ἴσον ἄρα ἔστι<sup>15</sup> τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ.  
Ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ  
ἄρα τῷ ΓΖ ἔστιν ἴσον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι<sup>16</sup>.

Μὴ ἴστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ,  
ΒΕ, ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς

quoniam et ipsi AB; et igitur ΩΤ parallelogram-  
mum ipsi ΓΔ est æquale. Aliud autem ΔΤ; est  
igitur ut basis ΓΔ ad ΔΤ ita ΩΤ ad ΔΤ. Et quo-  
niam solidum parallelepipedum ΓΙ plano ΡΖ se-  
catur, parallelo existente oppositis planis, est ut  
basis ΓΔ ad basim ΔΤ ita solidum ΓΖ ad ΡΙ  
solidum. Propter eadem utique, quoniam pa-  
rallelepipedum ΩΙ plano ΡΨ secatur, parallelo  
existente oppositis planis, est ut basis ΩΤ ad  
basim ΔΤ ita ΩΨ solidum ad ΡΙ solidum. Sed  
ut basis ΓΔ ad ΔΤ ita basis ΩΤ ad ΔΤ; et ut  
igitur ΓΖ solidum ad solidum ΡΙ ita ΩΨ so-  
lidum ad ΡΙ solidum; utrumque igitur soli-  
dorum ΓΖ, ΩΨ ad ΡΙ eandem habet ratio-  
nem; æquale igitur est ΓΖ solidum solido  
ΩΨ. Sed ipsum ΩΨ ipsi ΑΕ demonstratum est  
æquale; et igitur ΑΕ ipsi ΓΖ est æquale. Quod  
oportebat ostendere.

Non sint utique insistentes ipsæ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ,  
ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ ad rectos basibus ΑΒ, ΓΔ;

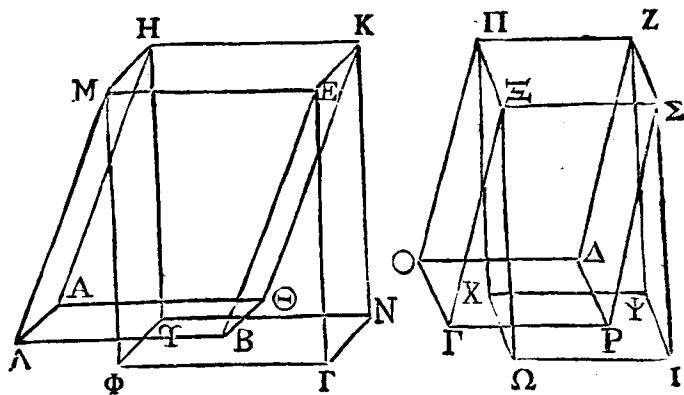
est égal au parallélogramme AB; le parallélogramme ΩΤ est donc égal au paral-  
lélogramme ΓΔ. Mais ΔΤ est un autre parallélogramme; la base ΓΔ est donc à la  
base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base ΔΤ (7. 5). Et puisque le parallélépipède  
ΓΙ est coupé par le plan ΡΖ parallèle aux plans opposés, la base ΓΔ sera à la base  
ΔΤ comme le parallélépipède ΓΖ est au parallélépipède ΡΙ (25. 11). Par la même  
raison, la base ΩΤ est à la base ΔΤ comme le parallélépipède ΩΨ est au parallé-  
lépipède ΡΙ, parce que le parallélépipède ΩΙ est coupé par le plan ΡΨ parallèle aux  
plans opposés. Mais la base ΓΔ est à la base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base  
ΔΤ; le parallélépipède ΓΖ est donc au parallélépipède ΡΙ comme le parallélépipède  
ΩΨ est au parallélépipède ΡΙ (11. 5); chacun des parallélépipèdes ΓΖ, ΩΨ a donc  
la même raison avec le parallélépipède ΡΙ; le parallélépipède ΓΖ est donc égal  
au parallélépipède ΩΨ (9. 5). Mais on a démontré que le parallélépipède ΩΨ  
est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélé-  
pipède ΓΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais que les côtés ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΑΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ ne soient point

# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 83

AB, ΓΔ βάσεις· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ<sup>17</sup>  
τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Ἠχθωσαν γὰρ<sup>18</sup> ἀπὸ  
τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ  
ὑποκείμενον ἐπιπέδον<sup>19</sup> κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ,

dico rursus æquale esse solidum ΑΕ solido ΓΖ.  
Ducantur enim a punctis Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ,  
Σ ad subjectum planum perpendiculares ΚΝ,  
ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, et occurrant



ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέ-  
τωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ,  
Ψ, Ω, Ι σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ,  
ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ· ἴσον δὲ ἐστὶ  
τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων  
βάσεων εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος,  
ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθὰς εἰσι ταῖς βάσεσιν.  
Ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστὶν  
ἴσον<sup>20</sup>, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς  
βάσεως εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεσ-  
τῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ  
ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

plano in punctis Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, et  
jungantur ipsæ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ,  
ΨΙ; æquale igitur est ΚΦ solidum solido ΠΙ;  
etenim in æqualibus sunt basibus ΚΜ, ΠΣ et  
in eâdem altitudine, quorum ipsæ insistentes  
ad rectos sunt basibus. Sed quidem ΚΦ solidum  
solido ΑΕ est æquale, ipsum vero ΠΙ ipsi ΓΖ,  
etenim in eâdem basi sunt et in eâdem altitu-  
tudine, quorum ipsæ insistentes non sunt in  
eisdem rectis; et igitur ΑΕ solidum solido ΓΖ  
est æquale.

Solida igitur, etc.

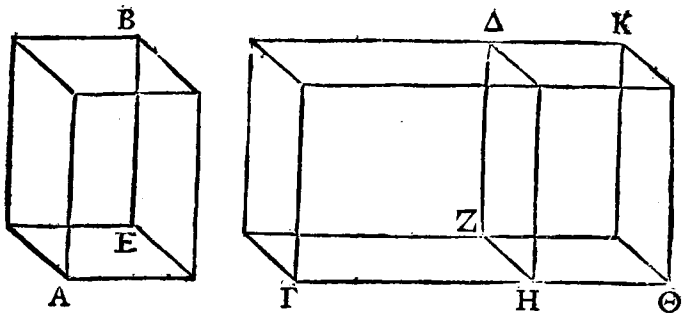
perpendiculaires aux bases AB, ΓΔ; je dis encore que le parallélépipède ΑΕ est  
égal au parallélépipède ΓΖ. Car des points Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ menons au  
plan inférieur les perpendiculaires ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ qui rencon-  
trent ces plans aux points Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι ( 11. 11 ), et joignons ΝΤ,  
ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ. Le parallélépipède ΚΦ sera égal au parallélépi-  
pède ΠΙ ( 31. 11 ), parce que ces parallélépipèdes ont des bases égales ΚΜ, ΠΣ,  
et la même hauteur, et que leurs côtés sont perpendiculaires aux bases. Mais  
le parallélépipède ΚΦ est égal au parallélépipède ΑΕ ( 30. 11 ), et le parallélépi-  
pède ΠΙ égal au parallélépipède ΓΖ; parce que ces parallélépipèdes ont la même  
base et la même hauteur, et que leurs côtés ne sont pas dans les mêmes droites;  
le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélépipède ΓΖ. Donc, etc.

# 84 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλλη-  
λεπίπεδα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Εστω<sup>1</sup> ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλλη-  
λεπίπεδα τὰ AB, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ AB, ΓΔ  
στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς  
αἱ βάσεις, τουτέστιν ἐστὶν ὅτι<sup>2</sup> ὡς ἡ AE βάσις  
πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς  
τὸ ΓΔ στερεόν.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ AE ἴσον  
τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ<sup>3</sup>  
τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμ-  
πεπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ AB στερεὸν  
τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  
AE, ΖΘ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καὶ ἐπεὶ  
στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπείδω τῷ

In eâdem altitudine existentia solida paralle-  
lepipedâ inter se sunt ut bases.

Sint in eâdem altitudine solida parallelepi-  
peda AB, ΓΔ; dico AB, ΓΔ solida parallele-  
pipedâ inter se esse ut bases, hoc est ut basis AE  
ad basim ΓΖ ita esse AB solidum ad ΓΔ solidum.

Applicetur enim ad ZH ipsi AE æquale ΖΘ,  
et a basi quidem ΖΘ, altitudine vero eâdem  
cum ipso ΓΔ solidum parallelepipedum com-  
pleatur ΗΚ; æquale igitur est AB solidum so-  
lido ΗΚ, etenim in eisdem sunt basibus AE,  
ΖΘ et in eâdem altitudine. Et quoniam solidum  
parallelepipedum ΓΚ plano ΔΗ secatur, paral-

## PROPOSITION XXXII.

Les parallélépipèdes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient AB, ΓΔ des parallélépipèdes qui aient la même hauteur; je dis que ces parallélépipèdes sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire que la base AE est à la base ΓΖ comme le parallélépipède AB est au parallélépipède ΓΔ.

Car appliquons à ZH un parallélogramme ΖΘ qui soit égal au parallélogramme AE (45. 1), et sur la base ΖΘ construisons le parallélépipède ΗΚ de même hauteur que le parallélépipède ΓΔ. Le parallélépipède AB sera égal au parallélépipède ΗΚ (31. 11), car ces parallélépipèdes ont des bases égales AE, ΖΘ et la même hauteur. Et puisque le parallélépipède ΓΚ est coupé par un plan ΔΗ parallèle aux

## LE ONZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

ΔΗ τέμνεται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπίδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Εἰσὶ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμολογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Εκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας<sup>1</sup> ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ,

lelo existente oppositis planis, est igitur ut basis ΘΖ ad basim ΓΖ ita ΘΔ solidum ad solidum ΔΓ. Sed æqualis quidem basis ΖΘ basi ΑΕ, solidum vero ΗΚ solido ΑΒ; est igitur et ut basis ΑΕ ad basim ΓΖ ita ΑΒ solidum ad ΓΔ solidum.

Solida igitur, etc.

### PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida parallelepipeda inter se in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ, homologum autem sit latus ΑΕ ipsi ΓΖ; dico ΑΒ solidum ad solidum ΓΔ triplicatam rationem habere ejus quam ΑΕ ad ΓΖ.

Producantur enim in directum ipsis ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ ipsæ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, et ponatur ipsi quidem ΓΖ æqualis ΕΚ, ipsi vero ΖΝ æqualis ΕΛ, et

plans opposés, la base ΘΖ est à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΘΔ est au parallélépipède ΔΓ (25. 11). Mais la base ΘΖ est égale à la base ΑΕ, et le parallélépipède ΗΚ égal au parallélépipède ΑΒ; la base ΑΕ est donc à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΓΔ. Donc, etc.

### PROPOSITION XXXIII.

Les parallélépipèdes semblables sont entr'eux en raison triplée de leurs côtés homologues.

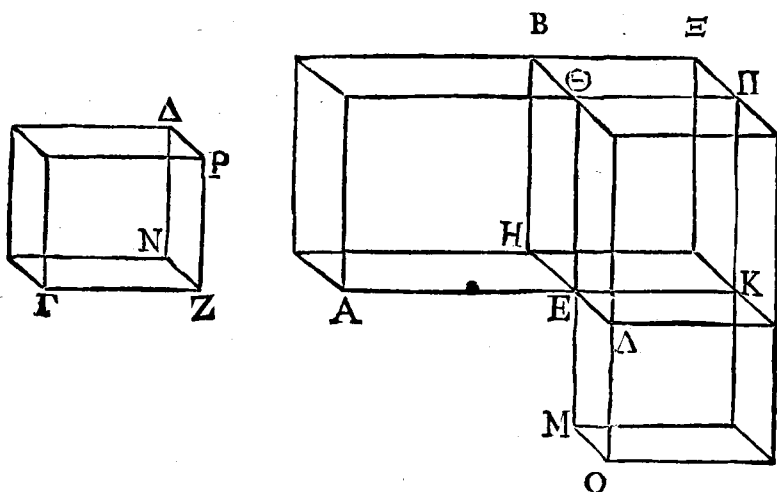
Soient ΑΒ, ΓΔ deux parallélépipèdes semblables, et que le côté ΑΕ soit l'homologue du côté ΓΖ; je dis que le parallélépipède ΑΒ a avec le parallélépipède ΓΔ une raison triplée de celle que ΑΕ a avec ΓΖ.

Car menons les droites ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ dans la direction des droites ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ; faisons ΕΚ égal à ΓΖ, ΕΛ égal à ΖΝ, et ΕΜ égal à ΖΡ; achevons le parallélogramme

# 86 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ ΚΟ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσα εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση, ἐπειδὴ περ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιό-

adhuc ipsi ZP æqualis EM, et compleatur ΚΛ parallelogrammum, et solidum ΚΟ. Et quoniam duæ ΚΕ, ΕΛ duabus ΓΖ, ΖΝ æquales sunt, sed et angulus ΚΕΛ angulo ΓΖΝ est æqualis, quoniam et angulus ΑΕΗ ipsi ΓΖΝ est æqualis



τητα τὴν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὁμοιον τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὁμοιον τῷ ΓΡ παραλληλογράμῳ<sup>2</sup>, καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ<sup>3</sup> καὶ ὁμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὁμοια<sup>4</sup>, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὁμοια<sup>5</sup>. ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὁμοιον. Συμπεπλη-

ob similitudinem solidorum ΑΒ, ΓΔ; æquale igitur est et simile ΚΛ parallelogrammum parallelogrammo ΓΝ. Propter eadem utique et quidem ΚΜ parallelogrammum æquale est simile parallelogrammo ΓΡ, et adhuc ipsum ΕΟ ipsi ΔΖ; tria igitur parallelogramma solidi ΚΟ tribus parallelogrammis solidi ΓΔ æqualia sunt et similia. Sed quidem tria tribus oppositis æqualia sunt, similia vero tria tribus oppositis æqualia sunt et similia; totum igitur ΚΟ solidum toti solido ΓΔ æquale est et simile. Com-

ΚΛ et le parallélepipède ΚΟ. Puisque les deux droites ΚΕ, ΕΛ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΝ, et que l'angle ΚΕΛ est égal à l'angle ΓΖΝ, l'angle ΑΕΗ étant égal à ΓΖΝ, à cause de la similitude des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ; le parallélogramme ΚΛ sera égal et semblable au parallélogramme ΓΝ. Par la même raison, le parallélogramme ΚΜ est égal et semblable au parallélogramme ΓΡ, et le parallélogramme ΟΕ égal et semblable au parallélogramme ΔΖ; trois parallélogrammes du parallélépipède ΚΟ sont donc égaux et semblables à trois parallélogrammes du parallélépipède ΓΔ. Mais les trois premiers parallélogrammes sont égaux et semblables à trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers parallélogrammes sont aussi égaux aux trois parallélogrammes opposés ( 24. 11 ), le parallélépipède entier ΚΟ est donc égal et semblable au parallélépipède entier ΓΔ ( déf. 10. 11 ). Achéons le

ρῶσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βά-  
σεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους  
δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ, στερεὰ συμπληρώσθω τὰ  
ΕΞ, ΑΠ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν  
ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως  
ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ,  
ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ  
τῇ ΕΜ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ  
πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  
ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον<sup>5</sup>  
πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς  
τὴν ΕΛ οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ  
πρὸς τὴν ΕΜ οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα  
τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΚΗ  
πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ  
πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στε-  
ρεὸν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν  
πρὸς τὸ ΠΛ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ οὕτως  
τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα  
τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ  
ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα με-

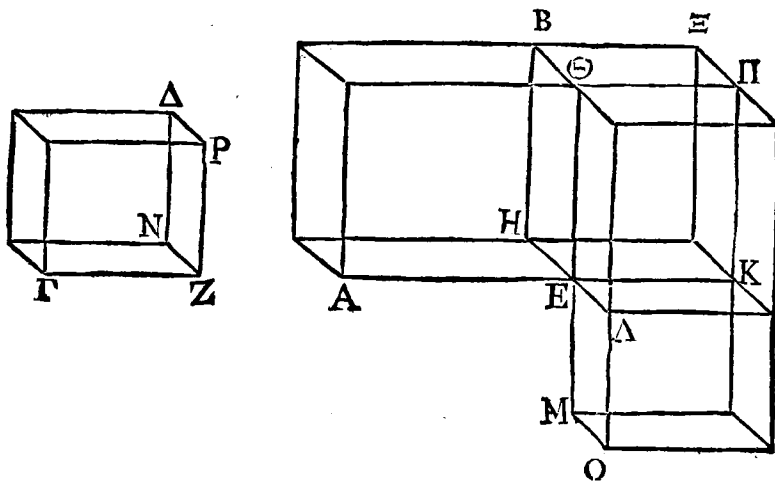
pleatur ΗΚ parallelogrammum, et a basibus qui-  
dem ΗΚ, ΚΛ parallelogrammorum, altitudine  
vero eadem cum ipso ΑΒ, solida compleantur ΕΞ,  
ΑΠ. Et quoniam ob similitudinem solidorum  
ΑΒ, ΓΔ est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΗ ad ΖΝ, et ΕΘ  
ad ΖΡ, sed æqualis quidem ΖΓ ipsi ΕΚ, ipsa vero  
ΖΝ ipsi ΕΛ, ipsa autem ΖΡ ipsi ΕΜ; est igitur  
ut ΑΕ ad ΕΚ ita ΗΕ ad ΕΛ, et ΘΕ ad ΕΜ.  
Sed ut quidem ΑΕ ad ΕΚ ita ΑΗ parallelo-  
grammum ad parallelogrammum ΗΚ, ut vero  
ΗΕ ad ΕΛ ita ΗΚ ad ΚΛ, ut autem ΘΕ ad ΕΜ  
ita ΠΕ ad ΚΜ; et ut igitur ΑΗ parallelogram-  
mum ad ipsum ΗΚ ita ΗΚ ad ΚΛ et ΠΕ ad  
ΚΜ. Sed ut quidem ΑΗ ad ΗΚ ita ΑΒ solidum  
ad solidum ΕΞ, ut vero ΗΚ ad ΚΛ ita ΞΕ so-  
lidum ad solidum ΠΛ, ut autem ΠΕ ad ΚΜ ita  
ΠΛ solidum ad solidum ΚΟ; et ut igitur ΑΒ so-  
lidum ad ΕΞ ita ΕΞ ad ΠΛ, et ΠΛ ad ΚΟ. Si

parallélogramme ΗΚ, et sur les bases ΗΚ, ΚΛ, construisons deux parallélépipèdes  
ΕΞ, ΑΠ de même hauteur que le parallélépipède ΑΒ. Puisqu'à cause de la simili-  
tude des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ, la droite ΑΕ est à ΓΖ comme ΕΗ est à ΖΝ, et  
comme ΕΘ est à ΖΡ; mais ΖΓ est égal à ΕΚ, ΖΝ égal à ΕΛ, et ΖΡ égal à ΕΜ, la  
droite ΑΕ sera à ΕΚ comme ΗΕ est à ΕΛ, et comme ΘΕ est à ΕΜ. Et puisque ΑΕ est  
à ΕΚ comme le parallélogramme ΑΗ est au parallélogramme ΗΚ ( 1. 6 ), que ΗΕ  
est à ΕΛ comme le parallélogramme ΗΚ est au parallélogramme ΚΛ, et que ΘΕ est  
à ΕΜ comme le parallélogramme ΠΕ est au parallélogramme ΚΜ; le parallélo-  
gramme ΑΗ sera au parallélogramme ΗΚ comme le parallélogramme ΗΚ est au pa-  
rallélogramme ΚΛ, et comme le parallélogramme ΠΕ est au parallélogramme ΚΜ.  
Mais ΑΗ est à ΗΚ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΕΞ ( 32. 11 ),  
et ΗΚ est à ΚΛ comme le parallélépipède ΞΕ est au parallélépipède ΠΛ, et de plus  
ΠΕ est à ΚΜ comme le parallélépipède ΠΛ est au parallélépipède ΚΟ; le parallélé-  
pipède ΑΒ est donc au parallélépipède ΕΞ comme le parallélépipède ΕΞ est au pa-  
rallélépipède ΠΛ, et comme le parallélépipède ΠΛ est au parallélépipède ΚΟ.

# 88 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ<sup>6</sup> πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ<sup>7</sup> τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ AB πρὸς τὸ EZ. Αλλ' ὥς μὲν<sup>8</sup> τὸ AB πρὸς τὸ EZ οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK,

autem quatuor magnitudines deinceps proportionales sint, prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam ad secundam; et igitur AB solidum ad ipsum KO triplicatam rationem habet ejus quam AB ad EZ. Sed ut quidem AB ad EZ ita AH parallelogrammum ad HK,



καὶ ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὸν EK· ὥστε καὶ τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AE πρὸς τὴν EK. Ἰσον δὲ τὸ μὲν<sup>9</sup> KO στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῶ, ἡ δὲ EK εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ AE πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς<sup>10</sup>.

et recta AE ad EK; quare et AB solidum ad KO triplicatam rationem habet ejus quam AE ad EK. Sed æquale quidem KO solidum solido ΓΔ, recta vero EK ipsi ΓΖ; et igitur AB solidum ad solidum ΓΔ triplicatam rationem habet ejus quam AE ipsius latus homologum ad homologum latus ΓΖ.

Similia igitur, etc.

Mais si quatre grandeurs sont successivement proportionnelles, la première a, avec la quatrième, une raison triplée de celle que la première a avec la seconde; le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède KO, une raison triplée de celle que AB a avec EZ. Mais AB est à EZ comme le parallélogramme AH est au parallélogramme HK, et comme la droite AE est à la droite EK (1. 6); le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède KO une raison triplée de celle que AE a avec EK. Mais le parallélépipède KO est égal au parallélépipède ΓΔ, et la droite EK égale à la droite ΓΖ; le parallélépipède AB a donc avec le parallélépipède ΓΔ une raison triplée de celle que son côté homologue AE a avec son côté homologue ΓΖ. Donc, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰν τέσσαρες  
εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς  
τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν  
παρλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ  
ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπειδὴ περὶ  
καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα  
λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ',

Τῶν ἴσων στερεῶν παρλληλεπιπέδων ἀντιπε-  
πόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὡν στερεῶν πα-  
ρλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς  
ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Εστω ἴσα στερεὰ παρλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ,  
ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παρλληλε-  
πιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι,

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si quatuor rectæ  
proportionales sint, fore ut prima ad quartam,  
ita a primâ solidum parallelepipedum ad so-  
lidum a secundâ simile et similiter descriptum;  
quoniam et prima ad quartam triplicatam ratio-  
nem habet ejus quam ad secundam,

PROPOSITIO XXXIV.

Æqualium solidorum parallelepipedorum re-  
ciprocæ sunt bases altitudinibus; et quorum  
solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt  
bases altitudinibus, æqualia sunt illa.

Sint æqualia solida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ;  
dico ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum re-  
ciprocas esse bases altitudinibus, et esse ut ΕΘ

COROLLAIRE.

D'après cela il est évident, que si quatre droites sont proportionnelles, la  
première sera à la quatrième comme le parallélépipède construit sur la première  
est au parallélépipède semblable; et semblablement construit sur la seconde;  
parce que la première droite a avec la quatrième une raison triplée de celle que la  
première a avec la seconde.

PROPOSITION XXXIV.

Les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux  
hauteurs; et les parallélépipèdes dont les bases sont réciproquement proportion-  
nelles aux hauteurs sont égaux entr'eux.

Soient les parallélépipèdes égaux ΑΒ, ΓΔ; je dis que leurs bases sont récipro-  
quement proportionnelles aux hauteurs; c'est-à-dire que la base ΕΘ est à la



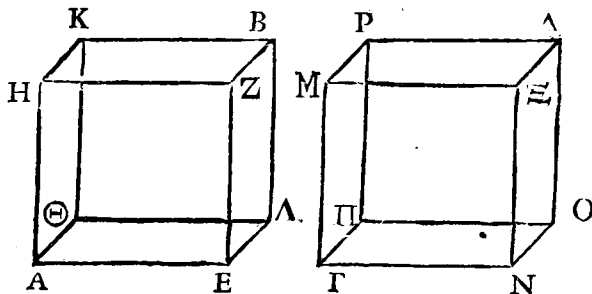
90 LE ONZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν  
οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ  
στερεοῦ ὕψος.

Εστώσαν γὰρ πρότερον αἱ ἰφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ,  
ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ῥθὰς  
ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ  
βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς  
τὴν ΑΗ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ  
βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ  
ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση· τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ  
αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλ-

basis ad ΝΠ basim ita ΓΔ solidi altitudinem  
ad ΑΒ solidi altitudinem.

Sint enim primum insistentes ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ,  
ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ ad rectos basibus ipsorum;  
dico esse ut ΕΘ basis ad ΝΠ basim ita ipsam ΓΜ ad  
ΑΗ. Si quidem igitur æqualis est basis ΕΘ basi  
ΝΠ, est autem et ΑΒ solidum solido ΓΔ æquale,  
erit et ΓΜ ipsi ΑΗ æqualis; sub eâdem enim  
altitudine solida parallelepipeda inter se sunt



ληλά ἔστιν ὡς αἱ βάσεις<sup>1</sup>. Εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ  
βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη  
ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ.  
Υπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἀνισόν ἐστι<sup>2</sup> τὸ ΓΜ ὕψος  
τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ  
βάσις πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ,

ut bases. Si enim, basibus ΕΘ, ΝΠ æqualibus  
existentibus, non sint altitudines ΑΗ, ΓΜ æqua-  
les; non igitur ΑΒ solidum æquale erit ipsi ΓΔ.  
Supponitur autem æquale; non igitur inæqualis  
est altitudo ΓΜ altitudini ΑΗ; æqualis igitur,  
et erit ut basis ΕΘ ad ipsam ΝΠ ita ΓΜ ad

base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélé-  
pipède ΑΒ.

Que les côtés ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ soient d'abord perpendiculaires  
aux bases; je dis que la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme ΓΜ est à ΑΗ. Si donc la base  
ΕΘ est égale à la base ΝΠ, et le parallélépipède ΑΒ égal au parallélépipède ΓΔ, la  
hauteur, ΓΜ sera égale à la hauteur ΑΗ; parce que les parallélépipèdes de même  
hauteur étant entr'eux comme leurs bases, si les bases ΕΘ, ΝΠ étant égales,  
les hauteurs ΑΗ, ΓΜ n'étaient pas égales, le parallélépipède ΑΒ ne serait  
point égal au parallélépipède ΓΔ (31. 11); mais ces parallélépipèdes sont sup-  
posés égaux; les hauteurs ΓΜ, ΑΗ ne sont donc pas inégales; elles sont donc  
égales; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme ΓΜ est à ΑΗ; il est donc évident

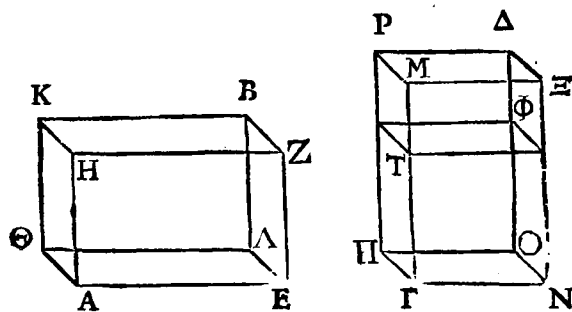
# LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 91

καὶ φανερόν ὅτι τῶν AB, ΓΔ στερεῶν παραλλη-  
λεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ ΕΘ βάση τῇ ΝΠ βάσει,  
ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν  
τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> καὶ ἡ ΓΜ  
τῆς ΑΗ. Εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ AB,  
ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται<sup>4</sup>· ὑπόκεινται δὲ ἴσα.  
Κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπλη-  
ρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ  
ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπεὶ

ΑΗ, et evidens est AB, ΓΔ solidorum parallele-  
pipedorum reciprocas esse bases altitudinibus.

Non sit autem æqualis ΕΘ basis basi ΝΠ,  
sed sit major ΕΘ. Est autem et AB solidum  
solido ΓΔ æquale; major igitur est ΓΜ ipsæ ΑΗ.  
Si enim non, neque igitur rursus solida AB, ΓΔ  
æqualia essent; supponuntur autem æqualia.  
Ponatur igitur ipsi ΑΗ æqualis ΓΤ, et com-  
pleatur a basi quidem ΝΠ, altitudine vero ΓΤ,  
solidum parallelepipedum ΦΓ. Et quoniam



ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ  
τι τὸ ΓΦ<sup>5</sup>, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν  
ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς<sup>6</sup> τὸ AB στερεὸν πρὸς  
τὸ ΓΦ στερεὸν οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ  
ΓΦ στερεόν. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ  
ΓΦ στερεόν οὕτως ἡ ΕΘ βάση πρὸς τὴν ΝΠ  
βάσιν, ἰσοῦψῃ γὰρ τὰ AB, ΓΦ στερεὰ· ὡς δὲ  
τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν οὕτως ἡ ΜΠ

æquale est AB solidum solidο ΓΔ, aliud autem  
quoddam ipsum ΓΦ, æqualia vero ad idem  
eamdem habent rationem; est igitur ut AB so-  
lidum ad solidum ΓΦ ita ΓΔ solidum ad ΓΦ  
solidum. Sed ut quidem AB solidum ad ΓΦ  
solidum ita ΕΘ basis ad ΝΠ basim, æque alta  
enim AB, ΓΦ solida; ut autem ΓΔ solidum ad

que les bases des parallélépipèdes AB, ΓΔ sont réciproquement proportionnelles  
aux hauteurs.

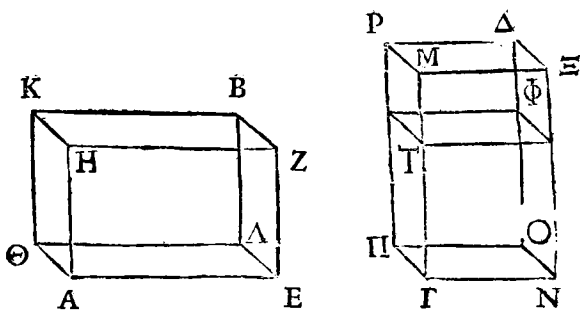
Que la base ΕΘ ne soit pas égale à la base ΝΠ, et que la base ΕΘ soit la plus  
grande. Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède ΓΔ, la hauteur  
ΓΜ sera plus grande que la hauteur ΑΗ; car si cela n'était point, les parallélépi-  
pèdes AB, ΓΔ ne seraient pas égaux (31. 11); mais ils sont supposés égaux.  
Faisons ΓΤ égal à ΑΗ, et sur la base ΝΠ construisons un parallélépipède ΦΓ dont  
la hauteur soit ΓΤ. Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède ΓΔ,  
que ΓΦ est un autre parallélépipède, et que des grandeurs égales ont la même  
raison avec la même grandeur (7. 5), le parallélépipède AB sera au parallélépipède  
ΓΦ comme le parallélépipède ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ. Mais le parallélépi-  
pède AB est au parallélépipède ΓΦ comme la base ΕΘ est à la base ΝΠ (32. 11),  
car les parallélépipèdes AB, ΓΦ sont égaux en hauteur, et le parallélépipède

βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν  
ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν  
οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἰση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ·  
καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν  
οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΑΗ, ΓΔ ἄρα  
στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ  
βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  στερεῶν παραλληλε-  
πιπέδων ἀντιπεπονητέωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι,  
καὶ ἔστω ὡς ἡ  $E\Theta$  βάσις πρὸς τὴν  $NP$  βάσιν  
οὕτως τὸ τοῦ  $\Gamma\Delta$  στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ  $AB$   
στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB$  στερεὸν  
τῷ  $\Gamma\Delta$  στερεῷ.

$\Gamma\Phi$  solidum ita  $M\Pi$  basis ad  $\Pi T$  basim, et  $M\Gamma$  ad  $\Gamma T$ ; et ut igitur  $E\Theta$  basis ad  $N\Pi$  basim ita  $M\Gamma$  ad  $\Gamma T$ .  $\text{\AA}$ qualis autem  $\Gamma T$  ipsi  $\Delta H$ ; et ut igitur  $E\Theta$  basis ad  $N\Pi$  basim ita  $M\Gamma$  ad  $\Delta H$ ; ipsorum igitur  $\Delta H$ ,  $\Gamma\Delta$  solidorum parallelepipedorum reciprocae sunt bases altitudinibus.

Rursus utique  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  solidorum parallelepipedorum reciprocae sint bases altitudinibus, et sit ut  $E\Theta$  basis ad basim  $N\Pi$  ita solidi  $\Gamma\Delta$  altitudo ad altitudinem solidi  $AB$ ; dico æquale esse  $AB$  solidum solido  $\Gamma\Delta$ .



Ἐστῶσαν γὰρ ἡ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς  
ταῖς βάσεσι. Καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις  
τῇ ΝΗ βάσει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν  
ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ

Sint enim rursus insistentes ad rectos basi-  
bus. Et si quidem æqualis est  $E\Theta$  basis basi  $N\Pi$ ,  
et est ut  $E\Theta$  basis ad basim  $N\Pi$  ita solidi  $\Gamma\Delta$   
altitudo ad  $AB$  solidi altitudinem; æquale igitur

$\Gamma\Delta$  est au parallélépipède  $\Gamma\Phi$  comme la base  $M\Pi$  est à la base  $\Pi T$  (25. 11), et comme  $M\Gamma$  est à  $\Gamma T$  (1. 6); la base  $E\Theta$  est donc à la base  $N\Pi$  comme  $M\Gamma$  est à  $\Gamma T$ . Mais  $\Gamma T$  est égal à  $AH$ ; la base  $E\Theta$  est donc à la base  $N\Pi$  comme  $M\Gamma$  est à  $AH$ ; les bases des parallélépipèdes  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Que les bases des parallélépipèdes  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  soient réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base  $E\Theta$  soit à la base  $\text{NH}$  comme la hauteur du parallélépipède  $\Gamma\Delta$  est à la hauteur du parallélépipède  $AB$ ; je dis que le parallélépipède  $AB$  est égal au parallélépipède  $\Gamma\Delta$ .

Car que les côtés soient encore perpendiculaires aux bases. Si la base  $E\Theta$  est égale à la base  $N\Pi$ , et si la base  $E\Theta$  est à la base  $N\Pi$  comme la hauteur du parallélépipède  $\Gamma\Delta$  est à la hauteur du parallélépipède  $AB$ , la hauteur du parallélépi-

τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ AB στερεοῦ ὕψει. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων<sup>8</sup> βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ<sup>9</sup>.

Μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ ἴση, ἀλλ'<sup>10</sup> ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μείζων ἄρα ἐστὶ<sup>11</sup> καὶ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ<sup>12</sup> AB στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. Ἐπεὶ οὖν<sup>13</sup> ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ βάσις<sup>14</sup> πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, ἰσοῦς ἢ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ<sup>1</sup>, ΓΦ στερεά, ὡς δὲ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ οὕτως ἢτε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ<sup>15</sup>. καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν<sup>16</sup> οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ<sup>17</sup> τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

est et solidi ΓΔ altitudo solidi ΑΒ altitudini. Sed in æqualibus basibus existentia solida parallelepipeda et in eâdem altitudine æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΒ solidum solido ΓΔ.

Non sit utique ΕΘ basis ipsi ΝΠ æqualis, sed sit major ΕΘ; major igitur est et solidi ΓΔ altitudo solidi ΑΒ altitudine, hoc est ΓΜ ipsâ ΑΗ. Ponatur ipsi ΑΗ æqualis rursus ΓΤ, et compleatur similiter ΓΦ solidum. Quoniam igitur est ut ΕΘ basis ad ΝΠ basim ita ΓΜ ad ΑΗ, æqualis autem ΑΗ ipsi ΓΤ; est igitur ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita ΜΓ ad ΓΤ. Sed ut quidem basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita ΑΒ solidum ad ΓΦ solidum, æque alta enim sunt ΑΒ, ΓΦ solida, ut vero ΜΓ ad ΓΤ ita et basis ΜΠ ad basim ΠΤ, et ΓΔ solidum ad ΓΦ solidum; et ut igitur ΑΒ solidum ad ΓΦ solidum ita ΓΔ solidum ad ΓΦ solidum; utrumque igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ ad ΓΦ eandem habet rationem; æquale igitur est ΑΕ solidum solido ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

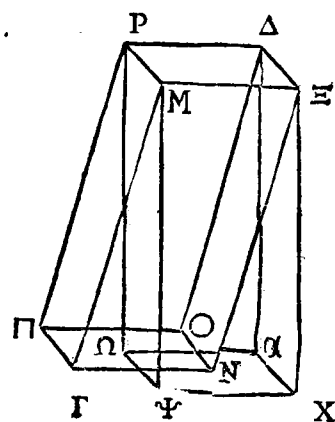
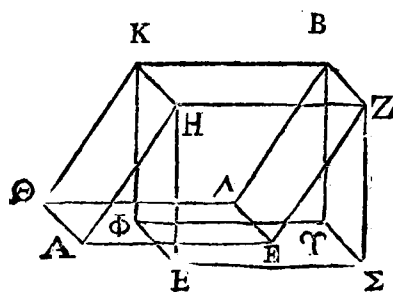
pède ΓΔ sera égale à la hauteur du parallélépipède ΑΒ. Mais les parallélépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entr'eux (31. 11); le parallélépipède ΑΒ est donc égal au parallélépipède ΓΔ.

Que la base ΕΘ ne soit point égale à la base ΝΠ, et que ΕΘ soit la plus grande base; la hauteur du parallélépipède ΓΔ sera plus grande que la hauteur du parallélépipède ΑΒ, c'est-à-dire que ΓΜ sera plus grand que ΑΗ. Faisons encore ΓΤ égal à ΑΗ, et achevons semblablement le parallélépipède ΓΦ. Puisque la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme ΜΓ est à ΑΗ, et que ΑΗ est égal à ΓΤ, la base ΕΘ sera à la base ΝΠ comme ΓΜ est à ΓΤ. Mais la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΓΦ (32. 11), car les parallélépipèdes ΑΒ, ΓΦ sont égaux en hauteur; et ΓΜ est à ΓΤ comme la base ΜΠ est à la base ΠΤ (1. 6), et comme le parallélépipède ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ (25. 11); le parallélépipède ΑΒ est donc au parallélépipède ΓΦ comme le parallélépipède ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ; chacun des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ a donc la même raison avec le parallélépipède ΓΦ; le parallélépipède ΑΒ est donc égal au parallélépipède ΓΔ (9. 5). Ce qu'il fallait démontrer.

94 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μὴ ἴστωσαν δὲ αἱ ἐφιστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΕΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ε, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα<sup>18</sup> κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεία<sup>19</sup>, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάση πρὸς τὴν ΝΠ βάση οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς

Non sint utique insistentes ZE, BA, HA, KO, EN, DO, MG, RP ad rectos basibus ipsorum, et ducantur a punctis Z, H, B, K, E, M, Δ, P ad plana basium EΘ, NΠ perpendiculares, et occurrant planis in punctis Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω, et compleantur solida ΖΦ, ΞΩ; dico et ita æqualibus existentibus ΑΒ, ΓΔ solidis, reciprocas esse bases altitudinibus, atque esse ut EΘ basis ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudinem ad solidi ΑΒ altitudinem.



τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Ἐπεὶ γὰρ<sup>20</sup> ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστὶν ἴσον, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῇ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφιστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ

Quoniam enim æquale est ΑΒ solidum solido ΓΔ, sed ipsi quidem ΑΒ ipsum ΒΤ est æquale, etenim in eadem sunt basi ΖΚ et in eadem altitudine, quorum insistentes non sunt in

Que les côtés ZE, BA, HA, KO, EN, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ ne soient pas perpendiculaires aux bases des parallélépipèdes. Des points Ζ, Η, Β, Κ, Ε, Μ, Δ, Ρ menons aux plans des bases ΕΘ, ΝΠ des perpendiculaires qui rencontrent ces plans aux points Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω, et achevons les parallélépipèdes ΖΦ, ΞΩ (11. 11); je dis que les bases des parallélépipèdes égaux ΑΒ, ΓΔ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ. Puisque le parallélépipède ΑΒ est égal au parallélépipède ΓΔ, et le parallélépipède ΒΤ égal au parallélépipède ΑΒ (30. 11), car ils ont la même base ΖΚ et la même hauteur, leurs côtés n'étant point placés dans les mêmes droites, et que le parallélépipède

ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἴσόν<sup>21</sup> ἴσον, ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῶ ἴσον ἐστί. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς ἐστί ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Ἰση δὲ ἡ μὲν ἡ ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ<sup>22</sup> ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν<sup>23</sup> παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὲ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονήτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν

eisdem rectis; sed solidum ΓΔ ipsi ΔΨ est æquale, et enim rursus in eadem sunt basi ΡΞ et in eadem altitudine, quorum insistentes non sunt in eisdem rectis; et igitur ΒΤ solidum solido ΔΨ æquale est. Sed æqualium solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines ad rectos sunt basibus ipsorum, reciprocæ sunt bases altitudinibus; est igitur ut basis ΖΚ ad basim ΞΡ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem. Sed æqualis quidem basis ΖΚ basi ΕΘ, ipsa vero ΞΡ basis basi ΝΠ; est igitur ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem. Eadem autem altitudines sunt solidorum ΔΨ, ΒΤ et ipsorum ΔΓ, ΒΑ; est igitur ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΔΓ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem; ergo ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus.

Rursus utique ipsorum ΑΒ, ΓΔ solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus, et sit ut basis ΕΘ ad ΝΠ basim ita solidi

ΔΓ est encore égal au parallélépipède ΔΨ, car ces deux parallélépipèdes ont la même base ΡΞ et la même hauteur, leurs côtés n'étant point dans les mêmes droites; le parallélépipède ΒΤ sera égal au parallélépipède ΔΨ. Mais les bases des parallélépipèdes égaux, dont les hauteurs sont perpendiculaires aux bases, sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; la base ΖΚ est donc à la base ΞΡ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ. Mais la base ΖΚ est égale à la base ΕΘ (24. 11), et la base ΞΡ égale à la base ΝΠ; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ. Mais les hauteurs des parallélépipèdes ΔΨ, ΒΤ sont les mêmes que celles des parallélépipèdes ΔΓ, ΒΑ; la base ΕΘ est donc à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΔΓ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ; les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Que les bases des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ soient enfin réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base ΕΘ soit à la base ΝΠ comme la

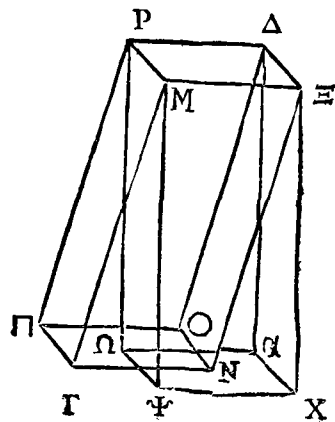
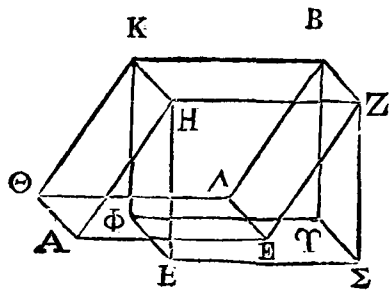
96 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ

ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem; dico æquale esse ΑΒ solidum solido ΓΔ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut basis ΕΘ ad basim ΝΠ ita solidi ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem, sed æqualis quidem basis ΕΘ basi ΖΚ, ipsa vero ΝΠ ipsi ΕΡ; est



δὲ ΝΠ τῇ ΕΡ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΕΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΕΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ὡν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων

igitur ut basis ΖΚ ad basim ΕΡ ita solidi ΓΔ altitudo ad solidi ΑΒ altitudinem. Eadem vero altitudines sunt solidorum ΑΒ, ΓΔ et ipsorum ΒΤ, ΔΨ; est igitur ut basis ΖΚ ad basim ΕΡ ita solidi ΔΨ altitudo ad solidi ΒΤ altitudinem; ipsorum igitur ΒΤ, ΔΨ solidorum parallelepipedorum reciprocae sunt bases altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum alti-

hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ; je dis que le parallélépipède ΑΒ est égal au parallélépipède ΓΔ.

Car faisons la même construction. Puisque la base ΕΘ est à la base ΝΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ, que la base ΕΘ est égale à la base ΖΚ, et la base ΝΠ égale à la base ΕΡ, la base ΖΚ sera à la base ΕΡ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède ΑΒ. Mais les hauteurs des parallélépipèdes ΑΒ, ΓΔ sont les mêmes que celles des parallélépipèdes ΒΤ, ΔΨ; la base ΖΚ est donc à la base ΕΡ comme la hauteur du parallélépipède ΔΨ est à la hauteur du parallélépipède ΒΤ; les bases des parallélépipèdes ΒΤ, ΔΨ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs. Mais les parallélépipèdes qui ont leurs hauteurs perpendiculaires sur les



τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐ-  
τῶν, ἀντιπεπόνθασιν δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψε-  
σιν, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BT  
στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ μὲν BT  
τῷ AB<sup>24</sup> ἴσον ἐστὶν, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς  
βάσεως εἰσι τῆς ZK καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν  
αἱ ἐφιστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,  
τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν,  
ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς  
EP καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς  
αὐταῖς εὐθείαις· καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν τῷ  
ΓΔ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tudines ad rectos sunt basibus ipsorum, reci-  
procæ vero bases altitudinibus, æqualia sunt  
ea; æquale igitur est BT solidum solido ΔΨ. Sed  
quidem BT ipsi AB æquale est, et enim in  
eâdem sunt basi ZK et in eâdem altitudine,  
quorum insistentes non sunt in eisdem rectis;  
solidum vero ΔΨ solido ΔΓ æquale est, et enim  
rursus in eâdem sunt basi EP et in eâdem alti-  
tudine et non in eisdem rectis; et igitur AB  
solidum solido ΓΔ est æquale. Quod oporteba  
ostendere.

bases et qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont  
égaux entr'eux; le parallélépipède BT est donc égal au parallélépipède ΔΨ. Mais  
le parallélépipède BT est égal au parallélépipède AB (30. 11), car ces deux  
parallélépipèdes ont la même base ZK et la même hauteur, et leurs côtés ne sont  
point dans les mêmes droites, et le parallélépipède ΔΨ est égal au parallélépi-  
pède ΔΓ, parce que ces deux parallélépipèdes ont la même base EP et la même  
hauteur, et que leurs côtés ne sont pas dans les mêmes droites; le parallélé-  
pipède AB est donc égal au parallélépipède ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.





## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

Εάν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἄχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων<sup>1</sup>, ἐν τοῖς ἐπίπεδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσας γωνίας περιέξωσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Εστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφιστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι<sup>2</sup> μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω<sup>3</sup> ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα, τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα

## PROPOSITIO XXXV.

Si sint duo anguli plani æquales, et in ipsorum verticibus sublimes rectæ constituentur æquales angulos continentes cum rectis a principio, utrumque utrique, in sublimibus autem sumantur quælibet puncta, et ab ipsis ad plana in quibus sunt a principio anguli, perpendiculares ducantur, a factis vero punctis in planis ad angulos a principio jungantur rectæ; æquales angulos continebunt cum sublimibus.

Sint duo anguli rectilinei æquales ΒΑΓ, ΕΔΖ, sed a punctis Α, Δ sublimes rectæ constituentur ΑΗ, ΔΜ æquales angulos continentes cum rectis a principio, utrumque utrique, angulum quidem ΜΔΕ ipsi ΗΑΒ, angulum vero ΜΔΖ ipsi ΗΑΓ, et sumantur in ipsis ΑΗ, ΔΜ quælibet puncta Η, Μ, et ducantur a punctis Η, Μ ad plana ΒΑΓ, ΕΔΖ perpendiculares ΗΛ, ΜΝ,

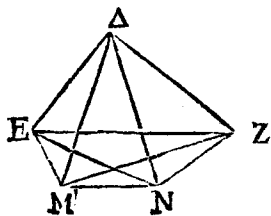
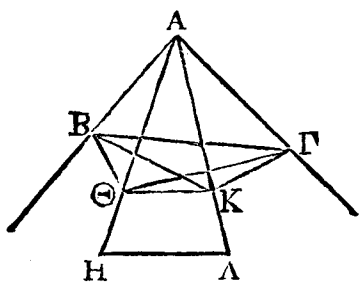
## PROPOSITION XXXV.

Si l'on a deux angles plans égaux; si de leurs sommets on mène, au-dessus de leurs plans, des droites qui fassent des angles égaux avec les côtés de ces angles plans; si dans ces droites on prend des points quelconques; si de ces points on mène des perpendiculaires aux plans des premiers angles, et si des points où ces perpendiculaires rencontrent ces plans, on mène des droites aux sommets de ces mêmes angles, ces droites feront des angles égaux avec les droites menées au-dessus des plans des premiers angles.

Soient les deux angles rectilignes égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ; des points Α, Δ menons au-dessus des plans de ces angles, les droites ΑΗ, ΔΜ qui fassent avec les côtés de ces mêmes angles des angles égaux chacun à chacun, savoir, l'angle ΜΔΕ égal à l'angle ΗΑΒ, et l'angle ΜΔΖ égal à l'angle ΗΑΓ; prenons dans les droites ΑΗ, ΔΜ des points quelconques Η, Μ; des points Η, Μ menons aux plans des angles ΒΑΓ,

κάθετοι αἱ  $HA$ ,  $MN$ , καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ  $\Lambda$ ,  $N$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $AA$ ,  $NA$ . λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $HAA$  γωνία τῇ ὑπὸ  $M\Delta N$  γωνίᾳ.

et occurrant planis in punctis  $A$ ,  $N$ , et jungantur ipsæ  $AA$ ,  $NA$ ; dico æqualem esse angulum  $HAA$  angulo  $M\Delta N$ .



Κείσθω τῇ  $\Delta M$  ἴση ἡ  $A\Theta$ , καὶ ἤχθω διὰ τοῦ  $\Theta$  σημείου τῇ  $HA$  παράλληλος ἡ  $\Theta K$ . Ἡ δὲ  $HA$  κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν  $BA$ ,  $AG$  ἐπίπεδον· καὶ ἡ  $\Theta K$  ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν  $BA$ ,  $AG$  ἐπίπεδον. Ἡχθωσαν ἀπὸ τῶν  $K$ ,  $N$  σημείων ἐπὶ τὰς  $AB$ ,  $AG$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta E$  εὐθείας κάθετοι αἱ  $KB$ ,  $KG$ ,  $NZ$ ,  $NE$  καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Theta G$ ,  $GB$ ,  $MZ$ ,  $ZE$ . Καὶ<sup>5</sup> ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Theta A$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Theta K$ ,  $KA$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $KA$  ἴσα ἐστὶ<sup>6</sup> τὰ ἀπὸ τῶν  $KG$ ,  $GA$ · καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Theta A$  ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Theta K$ ,  $KG$ ,  $GA$ . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $\Theta K$ ,  $KG$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Theta G$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Theta A$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Theta G$ ,  $GA$ · ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν<sup>7</sup> ἡ ὑπὸ  $\Theta GA$  γωνία. Διὰ τὰ

Ponatur ipsi  $\Delta M$  æqualis  $A\Theta$ , et ducatur per punctum  $\Theta$  ipsi  $HA$  parallela  $\Theta K$ . Sed  $HA$  perpendicularis est ad planum per  $BA$ ,  $AG$ ; et igitur  $\Theta K$  perpendicularis est ad planum per  $BA$ ,  $AG$ . Ducantur a punctis  $K$ ,  $N$  ad rectas  $AB$ ,  $AG$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta E$  perpendiculares  $KB$ ,  $KG$ ,  $NZ$ ,  $NE$ , et jungantur ipsæ  $\Theta G$ ,  $GB$ ,  $MZ$ ,  $ZE$ . Et quoniam quadratum ex  $\Theta A$  æquale est quadratis ex  $\Theta K$ ,  $KA$ , quadrato autem ex  $KA$  æqualia sunt quadrata ex  $KG$ ,  $GA$ ; et quadratum igitur ex  $\Theta A$  æquale est quadratis ex  $\Theta K$ ,  $KG$ ,  $GA$ . Quadratis autem ex  $\Theta K$ ,  $KG$  æquale est quadratum ex  $\Theta G$ ; quadratum igitur ex  $\Theta A$  æquale est quadratis ex  $\Theta G$ ,  $GA$ ; rectus igitur est  $\Theta GA$  angulus. Propter eadem utique et angulus

$\Delta Z$  les perpendiculaires  $HA$ ,  $MN$  qui rencontrent ces plans aux points  $A$ ,  $N$ , et joignons  $AA$ ,  $NA$ ; je dis que l'angle  $HAA$  est égal à l'angle  $M\Delta N$ .

Faisons  $A\Theta$  égal à  $\Delta M$ , et par le point  $\Theta$  menons  $\Theta K$  parallèle à  $HA$ . Puisque  $HA$  est perpendiculaire au plan des droites  $BA$ ,  $AG$ , la droite  $\Theta K$  sera perpendiculaire au plan des droites  $AB$ ,  $AG$  (8. 11); des points  $K$ ,  $N$  menons aux droites  $AB$ ,  $AG$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta E$  les perpendiculaires  $KB$ ,  $KG$ ,  $NZ$ ,  $NE$ , et joignons  $\Theta G$ ,  $GB$ ,  $MZ$ ,  $ZE$ . Puisque le carré de la droite  $\Theta A$  est égal aux carrés des droites  $\Theta K$ ,  $KA$ , et que les carrés des droites  $KG$ ,  $GA$  sont égaux au carré de la droite  $KA$  (47. 1), le carré de la droite  $\Theta A$  sera égal aux carrés des droites  $\Theta K$ ,  $KG$ ,  $GA$ . Mais le carré de la droite  $\Theta G$  est égal aux carrés des droites  $\Theta K$ ,  $KG$ ; le carré de la droite  $\Theta A$  est donc égal aux carrés des droites  $\Theta G$ ,  $GA$ ; l'angle  $\Theta GA$  est donc droit. L'angle  $\Delta ZM$  est

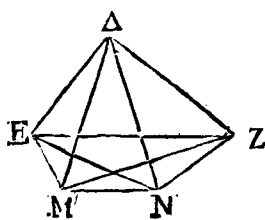
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\Delta Z M$  γωνία ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστίν<sup>8</sup> ἡ ὑπὸ  $A \Gamma \Theta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta Z M$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\Theta A \Gamma$  τῇ ὑπὸ  $M \Delta Z$  ἴση· δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ  $M \Delta Z$ ,  $\Theta A \Gamma$  τὰς<sup>9</sup> δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν  $A \Theta$  τῇ  $\Delta M$ · καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρα· ἴση ἄρα ἐστίν<sup>10</sup> ἡ  $A \Gamma$  τῇ  $\Delta Z$ . Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$  ἴση ἐστίν<sup>11</sup>. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Theta B$ ,  $ME$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A \Theta$  ἴσον ἐστὶ τοῖς<sup>12</sup> ἀπὸ τῆς  $AK$ ,  $K \Theta$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $AK$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BK$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BK$ ,  $K \Theta$  ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>13</sup>  $A \Theta$ . Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BK$ ,  $K \Theta$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $B \Theta$ , ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ  $\Theta K B$  γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν  $\Theta K$  κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $A \Theta$  ἴσον ἐστὶ<sup>14</sup> τοῖς ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B \Theta$ · ὀρθὴ ἄρα ἐστίν<sup>15</sup> ἡ ὑπὸ  $AB \Theta$  γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\Delta E M$  γωνία ὀρθή ἐστιν.

$\Delta Z M$  rectus est ; æqualis igitur est angulus  $A \Gamma \Theta$  ipsi  $\Delta Z M$ . Est autem et angulus  $\Theta A \Gamma$  ipsi  $M \Delta Z$  æqualis ; duo igitur triangula sunt  $M \Delta Z$ ,  $\Theta A \Gamma$  duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, subtendens unum æqualium angulorum, ipsum  $A \Theta$  ipsi  $\Delta M$  ; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique ; æqualis igitur est  $A \Gamma$  ipsi  $\Delta Z$ . Similiter utique demonstrabimus et  $AB$  ipsi  $\Delta E$  æqualem esse. Jungantur ipsæ  $\Theta B$ ,  $ME$ . Et quoniam quadratum ex  $A \Theta$  æquale est quadratis ex  $AK$ ,  $K \Theta$ , quadrato autem ex  $AK$  æqualia sunt quadrata ex  $AB$ ,  $BK$  ; quadrata igitur ex  $AB$ ,  $BK$ ,  $K \Theta$  æqualia sunt quadrato ex  $A \Theta$ . Sed quadratis ex  $BK$ ,  $K \Theta$  æquale est quadratum ex  $B \Theta$ , rectus enim angulus  $\Theta K B$ , propterea quod  $\Theta K$  perpendicularis est ad subjectum planum ; quadratum igitur ex  $A \Theta$  æquale est quadratis ex  $AB$ ,  $B \Theta$  ; rectus igitur  $AB \Theta$  angulus. Propter eadem utique et angulus  $\Delta E M$

droit, par la même raison ; l'angle  $A \Gamma \Theta$  est donc égal à l'angle  $\Delta Z M$ . Mais l'angle  $\Theta A \Gamma$  est égal à  $M \Delta Z$  ; les deux triangles  $M \Delta Z$ ,  $\Theta A \Gamma$  ont donc deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et deux côtés égaux, c'est-à-dire les côtés  $A \Theta$ ,  $\Delta M$  qui sont opposés à des angles égaux ; ces deux triangles ont donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun ( 26. 1 ) ;  $A \Gamma$  est donc égal à  $\Delta Z$ . Nous démontrerons semblablement que  $AB$  est égal à  $\Delta E$ . Joignons  $\Theta B$ ,  $ME$ . Puisque le carré de la droite  $A \Theta$  est égal aux carrés des droites  $AK$ ,  $K \Theta$ , et que les carrés des droites  $AB$ ,  $BK$  sont égaux au carré de la droite  $AK$ , les carrés des droites  $AB$ ,  $BK$ ,  $K \Theta$  seront égaux au carré de la droite  $A \Theta$ . Mais le carré de la droite  $B \Theta$  est égal aux carrés des droites  $BK$ ,  $K \Theta$ , car l'angle  $\Theta K B$  est droit, la droite  $\Theta K$  étant perpendiculaire au plan inférieur ; le carré de la droite  $A \Theta$  est donc égal aux carrés des droites  $AB$ ,  $B \Theta$  ; l'angle  $AB \Theta$  est donc droit. L'angle  $\Delta E M$  est droit, par la même raison. Mais l'angle  $BA \Theta$  est égal à l'angle

Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση<sup>16</sup>. ὑπόκειται<sup>17</sup> γάρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ<sup>18</sup> ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἔστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει

rectus est. Est autem et angulus  $BA\Theta$  ipsi  $EAM$  æqualis, supponuntur enim, et est  $A\Theta$  ipsi  $\Delta M$  æqualis; æqualis igitur et  $AB$  ipsi  $\Delta E$ . Quoniam igitur æqualis est quidem  $AF$  ipsi  $\Delta Z$ , ipsa vero  $AB$  ipsi  $\Delta E$ ; duæ igitur  $FA$ ,  $AB$  duabus  $Z\Delta$ ,  $\Delta E$  æquales sunt. Sed et angulus  $FAB$  angulo  $Z\Delta E$  est æqualis; basis igitur  $BF$  basi



τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ,  
καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις·  
ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἐστὶ  
δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση·  
καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ  
ἴση ἐστὶ<sup>19</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ  
τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστὶν ἴση<sup>20</sup>. Δύο δὴ τρίγωνα ἔστε  
τὰ ΓΒΚ, ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>21</sup> δυὸς  
γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ  
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς

EZ æqualis est; et triangulum triangulo, et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur  $\angle \Gamma B$  angulus ipsi  $\angle Z E$ . Est autem et rectus  $\angle \Gamma K$  recto  $\angle Z N$  æqualis; et reliquus igitur  $\angle B K$  reliquo  $\angle Z N$  æqualis est. Propter eadem utique et angulus  $\angle B K$  ipsi  $\angle Z E N$  est æqualis. Duo utique triangula sunt  $\angle B K$ ,  $\angle Z E N$  duos angulos duobus angulis æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus  $B \Gamma$  uni lateri  $E Z$  æquale ad æquales

ΕΑΜ, par supposition, et la droite ΑΘ est égale à la droite ΔΜ; la droite ΑΒ est donc égale à la droite ΔΕ. Et puisque ΑΓ est égal à ΔΖ et ΑΒ égal à ΔΕ, les deux droites ΓΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΖΔ, ΔΕ. Mais l'angle ΓΑΒ est égal à l'angle ΖΔΕ; la base ΒΓ est donc égale à la base ΕΖ ( 4. 1 ), le triangle égal au triangle, et les autres angles égaux aux autres angles; l'angle ΑΓΒ est donc égal à l'angle ΔΖΕ. Mais l'angle droit ΑΓΚ est égal à l'angle droit ΔΖΝ; l'angle restant ΒΓΚ est donc égal à l'angle restant ΕΖΝ. Par la même raison, l'angle ΓΒΚ est égal à l'angle ΖΕΝ; les deux triangles ΓΒΚ, ΖΕΝ ont donc deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et deux côtés égaux, c'est-à-dire les côtés ΒΓ, ΕΖ, qui sont adjacents aux angles égaux; ces deux triangles ont donc les autres

ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>22</sup> ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυοὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>23</sup> ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυοὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση<sup>24</sup>.

Εὰν ἄρα ᾧσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

angulos; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur est ΓΚ ipsi ΖΝ. Est autem et ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis, duæ igitur ΑΓ, ΓΚ duabus ΔΖ, ΖΝ æquales sunt et rectos angulos continent; basis igitur ΑΚ basi ΔΝ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΑΘ ipsi ΔΜ, æquale est et quadratum ex ΑΘ quadrato ex ΔΜ. Sed quadrato quidem ex ΑΘ æqualia sunt quadrata ex ΑΚ, ΚΘ, rectus enim ipse ΑΚΘ, quadrato autem ex ΔΜ æqualia quadrata ex ΔΝ, ΝΜ, rectus enim ipse ΔΝΜ; quadrata igitur ex ΑΚ, ΚΘ æqualia sunt quadratis ex ΔΝ, ΝΜ, quorum quadratum ex ΑΚ æquale est quadrato ex ΔΝ; reliquum igitur quadratum ex ΚΘ æquale est quadrato ex ΝΜ; æqualis igitur ΘΚ ipsi ΜΝ. Et quoniam duæ ΘΑ, ΑΚ duabus ΜΔ, ΔΝ æquales sunt utraque utrique, et basis ΘΚ basi ΝΜ ostensa est æqualis; angulus igitur ΘΑΚ angulo ΜΔΝ est æqualis.

Si sint igitur duo, etc.

côtés égaux aux autres côtés ( 26. 1 ); le côté ΓΚ est donc égal au côté ΖΝ. Mais ΑΓ est égal à ΔΖ; les deux droites ΑΓ, ΓΚ sont donc égales aux deux droites ΔΖ, ΖΝ, et ces droites comprennent des angles droits; la base ΑΚ est donc égale à la base ΔΝ ( 4. 1 ). Et puisque ΑΘ est égal à ΔΜ, le carré de ΑΘ est égal au carré de ΔΜ. Mais les carrés des droites ΑΚ, ΚΘ sont égaux au carré de la droite ΑΘ ( 47. 1 ), car l'angle ΑΚΘ est droit, et les carrés des droites ΔΝ, ΝΜ sont égaux au carré de la droite ΔΜ, parce que l'angle ΔΝΜ est droit; les carrés des droites ΑΚ, ΚΘ sont donc égaux aux carrés des droites ΔΝ, ΝΜ; mais le carré de ΑΚ est égal au carré de ΔΝ; le carré restant de ΚΘ est donc égal au carré de ΝΜ; la droite ΘΚ est donc égale à la droite ΜΝ. Et puisque les deux droites ΘΑ, ΑΚ sont égales aux deux droites ΜΔ, ΔΝ, chacune à chacune, et qu'on a démontré que la base ΘΚ est égale à la base ΝΜ, l'angle ΘΑΚ est égal à l'angle ΜΔΝ ( 8. 1 ). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰάν ᾧσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν<sup>2</sup> μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσai μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρα, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν<sup>3</sup>.

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo anguli plani æquales, constituentur ab ipsis sublimes rectæ æquales æquales angulos continentes cum ipsis a principio rectis, utrumque utrique, ab ipsis perpendiculares, ductæ ad plana in quibus sunt a principio anguli, æquales inter se sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

PROPOSITIO XXXVI.

Εάν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Si tres rectæ proportionales sint; a tribus solidum parallelepipedum æquale est solido a mediâ parallelepipedo, æquilatERO quidem, æqui- angulo autem antedicto.

Εστώσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ex ipsis Α, Β, Γ

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident que si deux angles plans sont égaux, et que si de leurs sommets on mène au-dessus des plans de ces angles des droites égales qui fassent avec les côtés de ces mêmes angles des angles égaux, chacun à chacun, les perpendiculaires menées de ces droites aux plans des premiers angles seront égales entr'elles.

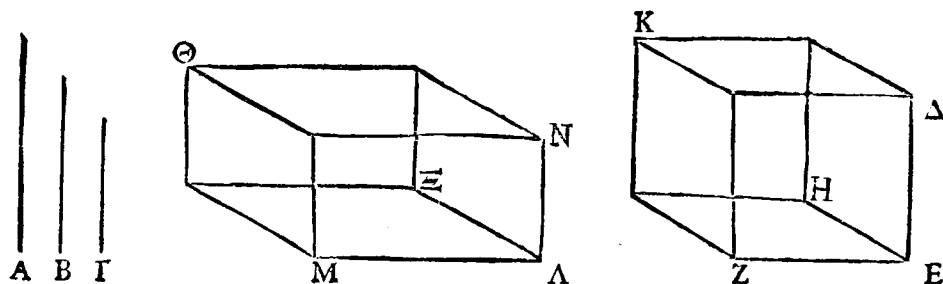
PROPOSITION XXXVI.

Si trois droites sont proportionnelles, le parallélépipède construit avec ces trois droites est égal au parallélépipède construit avec la droite moyenne, ce parallélépipède étant équilateral et équiangle avec le premier parallélépipède.

Soient trois droites proportionnelles Α, Β, Γ, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le parallélépipède construit avec les trois droites Α, Β, Γ

104 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ  
ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ  
δὲ τῷ προειρημένῳ. solidum æquale esse ex B solido, æquilatERO  
quidem, æquiangulo autem antedicto.



Εκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιε-  
χόμενη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ  
ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη  
τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΕΚ  
στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α κείσθω<sup>2</sup>  
ἴση ἡ ΑΜ, καὶ συνετάτω πρὸς τῇ ΑΜ εὐθεία  
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ  
Ε στερεῇ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ<sup>3</sup> περιεχομένη  
ὑπὸ τῶν ΝΑΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ, καὶ κείσθω τῇ  
μὲν Β ἴση ἡ ΑΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΑΝ. Καὶ ἐπεὶ  
ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν  
Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΑΜ, ἡ δὲ Β ἑκάτερα τῶν  
ΑΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΑΝ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΜ  
πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΝ. Καὶ  
περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΜΑΝ, ΔΕΖ αἱ

Exponentur solidus angulus ad E contentus  
sub tribus angulis planis ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, et  
ponatur ipsi quidem B æqualis unaquæque ipsa-  
rum ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, et compleatur ΕΚ solidum  
parallelepipedum, ipsi vero Α ponatur æqualis  
ΑΜ, et constituatur ad rectam ΑΜ et ad punc-  
tum Α in ipsâ ad Ε angulo solido æqualis solidus  
angulus contentus sub ipsis ΝΑΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ,  
et ponatur ipsi quidem B æqualis ΑΞ, ipsi  
vero Γ æqualis ΑΝ. Et quoniam est ut Α ad  
Β ita Β ad Γ, sed æqualis quidem Α ipsi ΑΜ,  
ipsa vero Β utrique ipsarum ΑΞ, ΕΔ, ipsa  
autem Γ ipsi ΑΝ; est igitur ut ΑΜ ad ΕΖ  
ita ΔΕ ad ΑΝ. Et circum æquales angulos  
ΜΑΝ, ΔΕΖ latera reciproce proportionalia;

est égal au parallélépipède construit avec la droite Β, ce parallélépipède étant équi-  
latéral et équiangle avec le premier parallélépipède.

Soit exposé l'angle solide Ε compris sous les trois angles plans ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ;  
faisons les droites ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ égales chacune à la droite Β; achevons le pa-  
rallélépipède ΕΚ; faisons ΑΜ égal à Α; sur la droite ΑΜ et au point Α de cette  
droite, construisons un angle solide qui étant compris sous les plans ΝΑΞ, ΞΑΜ,  
ΜΑΝ soit égal à l'angle solide Ε (26. 11); faisons ΑΞ égal à Β, et ΑΝ égal à Γ.  
Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, que Α est égal à ΑΜ, que Β est égal à chacune  
des droites ΑΞ, ΕΔ, et que Γ est égal à ΑΝ, la droite ΑΜ sera à la droite ΕΖ comme  
la droite ΔΕ est à la droite ΑΝ; les côtés placés autour des angles égaux ΜΑΝ, ΔΕΖ  
sont donc réciproquement proportionnels; le parallélogramme ΜΝ est donc



πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμῳ. Καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΑΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν<sup>6</sup> αἱ ΑΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρα· αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΑΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε τὰ ΑΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ ΑΘ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν<sup>8</sup> ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Εὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale igitur MN parallelogrammum parallelogrammo ΔΖ. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt ΔΕΖ, ΝΑΜ, et ab ipsis sublimes rectæ constituuntur ΑΞ, ΕΗ et æquales inter se et æquales angulos continentes cum ipsis a principio rectis utramque utrique; ipsæ igitur a punctis Η, Ξ perpendiculares, ductæ ad plana per ΝΑΜ, ΔΕΖ, æquales inter se sunt; quare solida ΑΘ, ΕΚ in eâdem altitudine sunt. Solida autem in æqualibus basibus parallelepipeda et in eâdem altitudine æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΘ solidum solido ΕΚ. Et est quidem ex ipsis Α, Β, Γ solidum ΑΘ; ipsum vero ΕΚ ex Β solidum; ergo ex ipsis Α, Β, Γ solidum æquale est ex Β solido, æquilatERO quidem, æquiangolo autem antedicto.

Si igitur tres, etc.

égal au parallélogramme ΔΖ (14. 6). Et puisque les deux angles plans rectilignes ΔΕΖ, ΝΑΜ sont égaux, que les droites ΑΞ, ΕΗ qui sont égales entr'elles, et qui sont menées au-dessus des plans des angles égaux ΔΕΖ, ΝΑΜ font avec leurs côtés des angles égaux, chacun à chacun, les perpendiculaires menées des points Ξ, Η aux plans ΝΑΜ, ΔΕΖ seront égales entr'elles (corol. 35. 11); les parallélépipèdes ΑΘ, ΕΚ ont donc la même hauteur. Mais les parallélépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entre eux (31. 11); le parallélépipède ΑΘ est donc égal au parallélépipède ΕΚ. Mais le parallélépipède ΑΘ a été construit avec les trois droites Α, Β, Γ, et le parallélépipède ΕΚ a été construit avec la droite Β; le parallélépipède construit avec les trois droites Α, Β, Γ est donc égal au parallélépipède construit avec la droite Β, ce parallélépipède étant équilatéral et équiangle avec le premier parallélépipède. Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ'.

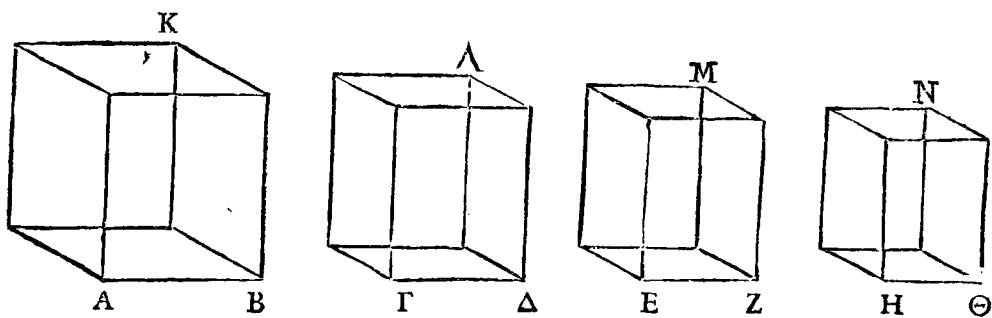
## PROPOSITIO XXXVII.

Εάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ<sup>1</sup> παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐάν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾧ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως

Si quatuor rectæ proportionales sint; et ab ipsis solida parallelepipeda et similia et similiter descripta proportionalia erunt; et si ab ipsis solida parallelepipeda et similia et similiter proportionalia sint; et ipsæ rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $EZ$  ad  $H\Theta$ , et describantur ab ipsis  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$  et similia et similiter posita solida parallelepipeda  $KA$ ,  $\Lambda\Gamma$ ,



κείμενα στερεὰ<sup>2</sup> παραλληλεπίπεδα τὰ  $KA$ ,  $\Lambda\Gamma$ ,  $ME$ ,  $NH$ ; dico esse ut  $KA$  ad  $\Lambda\Gamma$  ita  $ME$  ad  $NH$ . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ  $KA$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma$  οὕτως τὸ  $ME$  πρὸς τὸ  $NH$ .

## PROPOSITION XXXVII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les parallélépipèdes semblables et semblablement construits sur ces droites sont proportionnels; et si des parallélépipèdes semblables et semblablement construits sur quatre droites sont proportionnels, ces mêmes droites seront aussi proportionnelles entr'elles.

Soient quatre droites proportionnelles  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , de manière que  $AB$  soit à  $\Gamma\Delta$  comme  $EZ$  est à  $H\Theta$ ; construisons sur les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$  les parallélépipèdes semblables et semblablement placés  $KA$ ,  $\Lambda\Gamma$ ,  $ME$ ,  $NH$ ; je dis que  $KA$  est à  $\Lambda\Gamma$  comme  $ME$  est à  $NH$ .

Επεὶ γὰρ ὁμοίων<sup>3</sup> ἐστὶ τὸ ΚΑ στερεὸν πα-  
ραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ<sup>4</sup>, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ  
ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς  
τὴν ΓΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ  
ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς  
τὴν ΗΘ. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ  
οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· καὶ<sup>5</sup> ὡς ἄρα τὸ ΑΚ  
πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ  
ΛΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ  
ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς  
τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Επεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλα-  
σίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ,  
ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα  
λόγον ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς  
τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ·  
καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ  
πρὸς τὴν ΗΘ.

Εάν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim simile est KA solidum pa-  
rallelepipedum ipsi ΛΓ, ergo KA ad ΛΓ tripli-  
catam rationem habet ejus quam AB ad ΓΔ.  
Propter eadem utique et ME ad NH triplica-  
tam rationem habet ejus quam EZ ad ΗΘ.  
Atque est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ; et ut  
igitur AK ad ΛΓ ita ME ad NH.

At vero sit ut AK solidum ad ΛΓ solidum  
ita ME solidum ad NH; dico esse ut recta AB  
ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.

Quoniam enim rursus KA ad ΛΓ triplicatam  
rationem habet ejus quam AB ad ΓΔ; habet autem  
et ME ad NH triplicatam rationem ejus quam  
EZ ad ΗΘ, et est ut KA ad ΛΓ ita ME ad  
NH; et ut igitur AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.

Si igitur quatuor, etc.

Car puisque le parallélépipède KA est semblable au parallélépipède ΛΓ, le pa-  
rallélépipède KA aura avec le parallélépipède ΛΓ une raison triplée de celle que  
AB a avec ΓΔ (33. 11). Par la même raison, le parallélépipède ME aura avec le  
parallélépipède NH une raison triplée de celle que EZ a avec ΗΘ. Mais AB est à  
ΓΔ comme EZ est à ΗΘ; donc AK est à ΛΓ comme ME est à NH.

Mais que le parallélépipède AK soit au parallélépipède ΛΓ comme le parallé-  
lépipède ME est au parallélépipède NH; je dis que la droite AB est à ΓΔ comme  
EZ est à ΗΘ.

Car puisque le parallélépipède KA a avec le parallélépipède ΛΓ une raison tri-  
plée de celle que AB a avec ΓΔ, que ME a avec NH une raison triplée de celle  
que EZ a avec ΗΘ, et que KA est à ΛΓ comme ME est à NH, la droite AB sera à la  
droite ΓΔ comme la droite EZ est à la droite ΗΘ. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

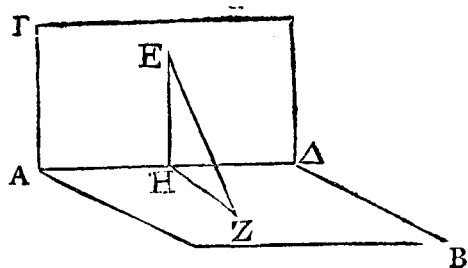
## PROPOSITIO XXXVIII.

Εὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Επίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχόν σημείον το Ε· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΑΔ πεσεῖται.

Si planum ad planum rectum sit, et ab aliquo puncto eorum in uno planorum ad alterum planum perpendicularis ducatur, in communem sectionem planorum cadet ducta perpendicularis.

Planum enim ΓΔ plano ΑΒ ad rectos sit, communis autem ipsorum sectio sit ΑΔ, et sumatur in plano ΓΔ quodlibet punctum Ε; dico a puncto Ε ad planum ΑΒ perpendicularem ductam in ipsam ΑΔ cadere.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημείον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ

Non enim, sed si possibile cadat extra ut ΕΖ, et occurrat plano ΑΒ in puncto Ζ, et a puncto Ζ ad ΑΔ in plano ΑΒ perpen-

## PROPOSITION XXXVIII.

Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, et si d'un point pris dans un de ces plans, on mène une perpendiculaire à l'autre plan, cette perpendiculaire tombera sur la section commune des plans.

Que le plan ΓΔ soit perpendiculaire au plan ΑΒ, que leur commune section soit ΑΔ, et prenons dans le plan ΓΔ un point quelconque Ε; je dis que la perpendiculaire menée du point Ε au plan ΑΒ tombera sur la droite ΑΔ.

Car que cela ne soit point, mais, si cela est possible, qu'elle tombe en dehors comme ΕΖ, et qu'elle rencontre le plan ΑΒ au point Ζ; du point Ζ

τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἦχθω<sup>1</sup>  
ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς  
ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ  
τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν, ἀπτεται  
δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὔσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ.  
ὀρθὴ ἄρα ἐστίν<sup>2</sup> ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. Ἀλλὰ δὴ<sup>3</sup>  
καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν.  
ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθὴ ἐστίν. Τριγώνου δὲ τοῦ  
ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν<sup>4</sup> ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν,  
ὑπερ ἀδύνατον<sup>4</sup>. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ  
ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται  
τῆς ΔΑ· ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

Εὰν ἄρα ἐπίπεδον, καὶ ταῖς ἑξῆς.

dicularis ducatur ZH, quæ quidem et plano ΓΔ  
ad rectos est, et jungatur ipsa ΕΗ. Quoniam  
igitur ZH plano ΓΔ ad rectos est, contingit  
autem ipsam ipsa ΕΗ, existens in plano ΓΔ;  
rectus igitur est angulus ZHE. At vero et ΕΖ  
plano ΑΒ ad rectos est; angulus igitur ΕΖΗ  
rectus est. Sed trianguli ΕΖΗ duo anguli duo-  
bus rectis æquales sunt, quod impossibile;  
non igitur a puncto Ε ad planum ΑΒ perpen-  
dicularis ducta cadet extra ipsam ΔΑ; ergo in  
ipsam ΔΑ cadet.

Si igitur planum, etc.

et dans le plan AB menons la droite ZH perpendiculaire à ΔΑ (10. 1), cette droite sera perpendiculaire au plan ΓΔ (déf. 4. 11); joignons ΕΗ. Puisque la droite ZH est perpendiculaire au plan ΓΔ, et qu'elle est rencontrée par la droite ΕΗ, qui est dans le plan ΓΔ; l'angle ZHE sera droit. Mais la droite ΕΖ est perpendiculaire au plan ΑΒ; l'angle ΕΖΗ est donc droit; deux angles du triangle ΕΖΗ sont égaux à deux droits, ce qui est impossible (17. 1); la perpendiculaire menée du point Ε au plan ΑΒ ne tombe donc pas hors de la droite ΔΑ; elle tombe donc sur la droite ΔΑ. Donc si, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

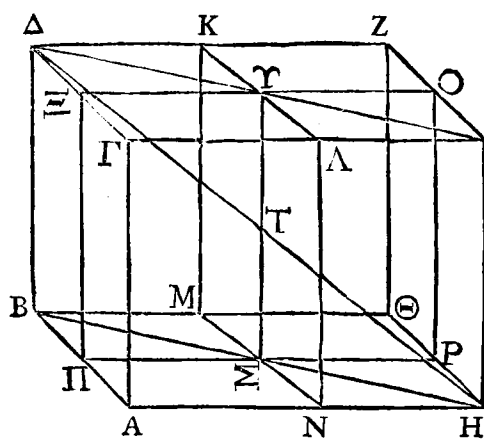
PROPOSITIO XXXIX.

Εάν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου<sup>1</sup> τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου<sup>2</sup> διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου<sup>3</sup> τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ

Si solidi parallelepipedi oppositorum planorum latera bifariam secantur, per sectiones vero plana producantur, communis sectio planorum et solidi parallelepipedi diameter bifariam se secabunt.

Solidi enim ΑΖ parallelepipedi oppositorum planorum ΓΖ, ΑΘ latera secantur in Κ, Λ,



δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω<sup>4</sup> τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου<sup>5</sup> διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ<sup>6</sup>, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ punctis; per sectiones autem plana producantur ipsa ΚΝ, ΞΡ, communis vero sectio planorum sit ΥΣ, solidi ΑΖ autem parallelepipedi diameter ΔΗ; dico æqualem esse ipsam quidem ΥΤ ipsi ΤΣ, ipsam vero ΔΤ ipsi ΤΗ.

PROPOSITION XXXIX.

Si l'on coupe en deux parties égales les côtés des plans opposés d'un parallélépipède, et si par leurs sections on mène des plans, la commune section de ces plans et le diamètre du parallélépipède se couperont mutuellement en deux parties égales.

Que les côtés des plans opposés ΓΖ, ΑΘ du parallélépipède ΑΖ soient coupés en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, et par ces points menons les plans ΚΝ, ΞΡ; que la commune section de ces plans soit ΥΣ, et que le diamètre du parallélépipède ΑΖ soit ΔΗ; je dis que ΥΤ est égal à ΤΣ et ΔΤ égal à ΤΗ.

## LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 111

Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλάξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον<sup>8</sup>, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι<sup>9</sup>. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνία· διὰ δὲ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση· τέ ἐστι καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι<sup>10</sup> καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν<sup>11</sup> ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. Καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ, Η, Σ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ· ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ μὲν<sup>12</sup> ὑπὸ ΕΔΥ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΥ, ἐναλλάξ γάρ. Η δὲ<sup>13</sup>

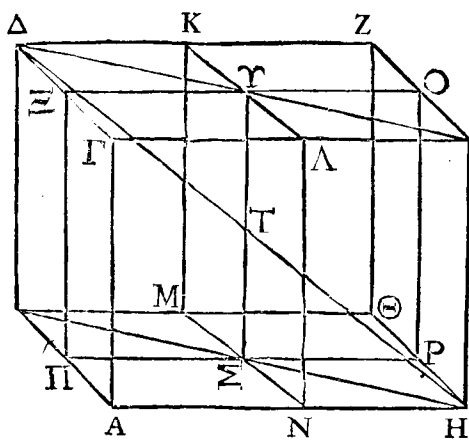
Jungantur enim ipsæ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Et quoniam parallela est ipsa ΔΞ ipsi ΟΕ; alterni igitur anguli ΔΞΥ, ΥΟΕ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ipsa quidem ΔΞ ipsi ΟΕ; ipsa vero ΞΥ ipsi ΥΟ, et angulos æquales continent; basis igitur ΔΥ ipsi ΥΕ est æqualis, et ΔΞΥ triangulum ipsi ΟΥΕ triangulo est æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales; æqualis igitur ΞΥΔ angulus ipsi ΟΥΕ angulo, æqualis igitur ΞΥΔ angulus ipsi ΟΥΕ angulo; ob id utique recta est ipsa ΔΥΕ; propter eadem utique ipsa ΒΣΗ recta est, et æqualis ΒΣ ipsi ΣΗ. Et quoniam ΓΑ ipsi ΔΒ æqualis est parallela; sed ΓΑ et ipsi ΕΗ æqualis est et parallela; et ΔΒ igitur ipsi ΕΗ æqualis est et parallela. Et conjungunt ipsas rectæ ΔΕ, ΗΒ; parallela igitur est ΔΕ ipsi ΒΗ. Et sumpta sunt in utrâque ipsarum quælibet puncta Δ, Υ, Η, Σ, et junctæ sunt ipsæ ΔΗ, ΥΣ; in uno igitur sunt plano ipsæ ΔΗ, ΥΣ. Et quoniam parallela est ΔΕ ipsi ΒΗ, æqualis igitur quidem ΕΔΥ angulus ipsi ΒΗΥ,

Car joignons ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Puisque ΔΞ est parallèle à ΟΕ, les angles alternes ΔΞΥ, ΥΟΕ sont égaux entr'eux (29. 1). Et puisque ΔΞ est égal à ΟΕ, et ΞΥ égal à ΥΟ, et que ces droites comprennent des angles égaux, la base ΔΥ sera égale à la base ΥΕ, le triangle ΔΞΥ égal au triangle ΟΥΕ, et les autres angles égaux aux autres angles (4. 1); l'angle ΞΥΔ est donc égal à l'angle ΟΥΕ, la ligne ΔΥΕ est donc une ligne droite (14. 1). Par la même raison, la ligne ΒΣΗ est aussi une ligne droite, et la droite ΒΣ égale à la droite ΣΗ. Et puisque la droite ΓΑ est égale et parallèle à ΔΒ, et que la droite ΓΑ est aussi égale et parallèle à la droite ΕΗ, la droite ΔΒ sera égale et parallèle à la droite ΕΗ (30. 1). Mais ces droites sont jointes par les droites ΔΕ, ΗΒ; la droite ΔΕ est donc parallèle à la droite ΒΗ (33. 1). Mais on a pris dans chacune de ces droites des points quelconques Δ, Υ, Η, Σ, et on a joint ΔΗ, ΥΣ; les droites ΔΗ, ΥΣ sont donc dans un seul plan (7. 11). Et puisque la droite ΔΕ est parallèle à la droite ΒΗ, les angles ΕΔΥ, ΒΗΥ sont égaux, car ils sont alternes (29. 1). Mais l'angle ΔΥΥ est égal à l'angle ΗΥΣ (15. 1); les deux

# 112 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση<sup>14</sup>. δύο δὲ τρίγωνά  
ἴσιν τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ  
γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ  
πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν

alterni enim. Ipse autem ΔΤΥ ipsi ΗΤΣ æqualis  
duo igitur triangula ΔΤΥ, ΗΤΣ sunt duos angu-  
los duabus angulis æquales habentia, et unum  
latus uni lateri æqualem subtendens unum



ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ, ὁμίσσειαι γάρ  
εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα<sup>15</sup> πλευρὰς  
ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς<sup>16</sup> ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα  
ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

æqualium angulorum, ipsum ΔΥ ipsi ΗΣ, di-  
midia enim sunt ipsorum ΔΕ, ΒΗ; reliqua igitur  
lata reliquis lateribus æqualia habebunt; æqua-  
lis igitur quidem ipsa ΔΤ ipsi ΤΗ, ipsa vero  
ΥΤ ipsi ΤΣ.

Εὰν ἄρα στερεοῦ, καὶ τὰ ἐξῆς<sup>17</sup>.

Si igitur solidi, etc.

triangles ΔΤΥ, ΗΤΣ ont deux angles égaux à deux angles, et deux côtés égaux,  
c'est-à-dire les côtés ΔΥ, ΗΣ qui sont opposés à des angles égaux, car ces  
côtés sont les moitiés des droites ΔΕ, ΒΗ; ces deux triangles auront donc les  
autres côtés égaux aux autres côtés ( 26. 1 ); la droite ΔΤ est donc égale à ΤΗ, et la  
droite ΥΤ égale à ΤΣ. Donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

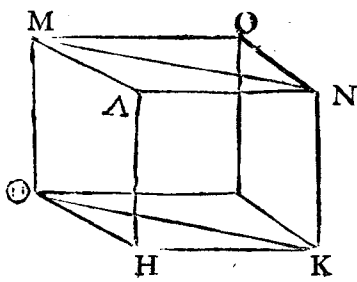
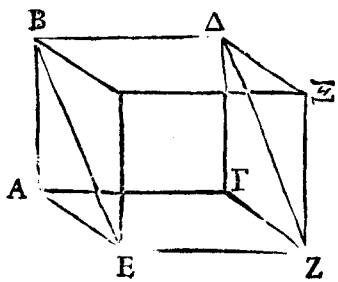
PROPOSITIO XL.

Εὰν ᾗ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾗ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἐστω πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἔχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΑΜΝ πρίσματι.

Si sint duo prismata æque alta, et unum quidem habeat basim parallelogrammum, alterum vero triangulum, duplum autem sit parallelogrammum trianguli, æqualia erunt prismata.

Sint prismata æque alta ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ, et unum quidem habeat basim ΑΖ parallelogrammum, alterum vero ΗΘΚ triangulum, duplum sit autem ΑΖ parallelogrammum ipsius ΗΘΚ trianguli; dico æquale esse ΑΒΓΔΕΖ prisma ipsi ΗΘΚΑΜΝ prismati.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ

Compleantur enim ΑΞ, ΗΟ solida. Et quoniam duplum est ΑΖ parallelogrammum trianguli ΗΘΚ, est autem et ΘΚ parallelogrammum

PROPOSITION XL.

Si deux prismes sont égaux en hauteur, si l'un d'eux a pour base un parallélogramme, et l'autre un triangle, et si le parallélogramme est double du triangle, ces prismes seront égaux.

Soient ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΑΜΝ des prismes égaux en hauteur, que l'un d'eux ait pour base le parallélogramme ΑΖ, et l'autre le triangle ΗΘΚ, et que le parallélogramme ΑΖ soit double du triangle ΗΘΚ; je dis que le prisme ΑΒΓΔΕΖ est égal au prisme ΗΘΚΑΜΝ.

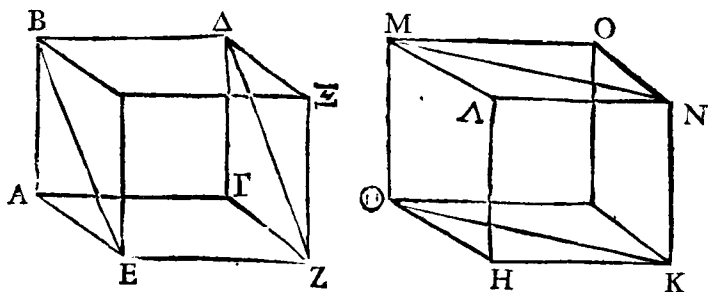
Car achevons les parallélépipèdes ΑΞ, ΗΟ. Puisque le parallélogramme ΑΖ est double du triangle ΗΘΚ, et le parallélogramme ΘΚ double aussi du triangle ΗΘΚ (34.1),



# 114 LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ  
 τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλό-  
 γραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. Τὰ δὲ  
 ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα

duplum ipsius ΗΘΚ trianguli; æquale igitur est  
 ΑΖ parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogram-  
 mo. In æqualibus autem basibus existentia so-  
 lida parallelepipeda et in eâdem altitudine æqua-



καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοισι εἰσὶν· ἴσον ἄρα  
 ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. Καὶ ἐστὶ τοῦ  
 μὲν ΑΞ στερεοῦ ἡμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ  
 ΗΟ στερεοῦ ἡμισυ τὸ ΗΘΚΑΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα  
 ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΑΜΝ πρίσματι.  
 Εὰν ἄρα ᾗ, καὶ τὰ ἐξ ᾗς.

lia inter se sunt; æquale igitur est ΑΞ solidum  
 ipsi ΗΟ solido. Et est ipsius quidem ΑΞ solidi  
 dimidium prisma ΑΒΓΔΕΖ, ipsius autem ΗΟ solidi  
 dimidium prisma ΗΘΚΑΜΝ; æquale igitur est  
 ΑΒΓΔΕΖ prisma ipsi ΗΘΚΑΜΝ prismati.  
 Si igitur sint, etc.

le parallélogramme ΑΖ sera égal au parallélogramme ΘΚ. Mais les parallélépipèdes  
 qui ont des bases égales et la même hauteur sont égaux entr'eux ( 31. 11 ); le  
 parallélépipède ΑΞ est donc égal au parallélépipède ΗΟ. Mais le prisme ΑΒΓΔΕΖ  
 est la moitié du parallélépipède ΑΞ, et le prisme ΗΘΚΑΜΝ la moitié du parallélé-  
 pipède ΗΟ; le prisme ΑΒΓΔΕΖ est donc égal au prisme ΗΘΚΑΜΝ. Donc, etc.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R D U O D E C I M U S.

---

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἴστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνων.

Ἐστώσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διαμέτροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω

#### PROPOSITIO I.

In circulis similia polygona inter se sunt ut ex diametris quadrata.

Sint circuli ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et in ipsis similia polygona sint ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, diametri autem circulorum sint ipsæ ΒΜ, ΗΝ; dico esse ut

## LE DOUZIÈME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

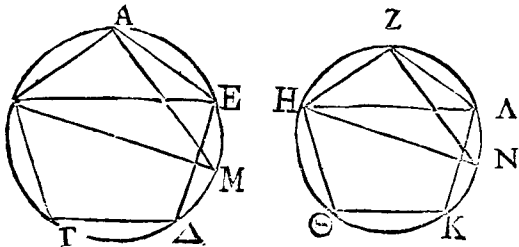
#### PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que les diamètres de ces cercles soient ΒΜ, ΗΝ; je dis que

# 116 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BM τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον οὕτως τὸ ABΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘΚΛ πολύγωνον. quadratum ex BM ad ipsum ex HN quadratum ita ABΓΔΕ polygonum ad ZHΘΚΛ polygonum.



Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE, AM, HA, ZN. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ABΓΔΕ πολύγωνον τῷ ZHΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAE γωνία τῇ ὑπὸ HZA, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ BAE, HZA μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ<sup>2</sup> ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ BAE τῇ ὑπὸ HZA, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ZHA τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB γωνία τῇ ὑπὸ ZAH. ΑΛΛ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ ὑπὸ AMB ἐστὶν ἴση<sup>3</sup>, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβῆκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ZAH τῇ ὑπὸ ZNH· καὶ ἡ

Jungantur enim ipsæ BE, AM, HA, ZN. Et quoniam simile est ABΓΔΕ polygonum ipsi ZHΘΚΛ polygono, æqualis est et BAE angulus ipsi HZA, et est ut BA ad AE ita HZ ad ZA; duo igitur triangula sunt BAE, HZA unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum BAE ipsi HZA, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangulum igitur est ABE triangulum ipsi ZHA triangulo, æqualis igitur est AEB angulus ipsi ZAH. Sed ipse quidem AEB ipsi AMB est æqualis; in eadem enim circumferentiâ consistunt; ipse autem ZAH ipsi ZNH; et

le quarré de BM est au quarré de HN comme le polygone ABΓΔΕ est au polygone ZHΘΚΛ.

Car joignons BE, AM, HA, ZN. Puisque le polygone ABΓΔΕ est semblable au polygone ZHΘΚΛ, que l'angle BAE est égal à l'angle HZA (déf. 1. 6), et que BA est à AE comme HZ est à ZA, les deux triangles BAE, HZA ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle BAE égal à l'angle HZA, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ABE, ZHA sont donc équiangles (6. 6); l'angle AEB est donc égal à l'angle ZAH. Mais l'angle AEB est égal à l'angle AMB (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ZAH est aussi égal à l'angle ZNH; l'angle AMB est donc égal à l'angle ZNH. Mais l'angle

ὡς ὑπὸ AMB ἄρα τῇ ὑπὸ ZNH ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BAM ὀρθὴ τῇ ὑπὸ HZN ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> τὸ ABM τρίγωνον τῷ ZHN τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BM πρὸς τὴν HN οὕτως ὁ BA πρὸς τὴν HZ. Ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς BM πρὸς τὴν HN λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup> HN τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς BA πρὸς τὴν HZ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ABΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ZHΘΚΑ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BM τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον<sup>7</sup> οὕτως τὸ ABΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘΚΑ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipse AMB igitur ipsi ZNH est æqualis. Est autem et rectus BAM recto HZN æqualis; et reliquus igitur reliquo est æqualis; æquiangulum igitur est ABM triangulum triangulo ZHN; proportiona- liter igitur est ut BM ad HN ita BA ad HZ. Sed ra- tionis quidem ipsius BM ad ipsam HN duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex HN, rationis vero ipsius BA ad HZ duplicata est ratio polygoni ABΓΔΕ ad polygonum ZHΘΚΑ; et ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex HN ita polygonum ABΓΔΕ ad polygonum ZHΘΚΑ.

In circulis igitur, etc.

droit BAM est égal à l'angle droit HZN (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ABM, ZHN sont donc équiangles; BM est donc à HN comme BA est à HZ (4. 6). Mais la raison du quarré de BM au quarré de HN est double de la raison BM à HN (20. 6), et la raison du polygone ABΓΔΕ au polygone ZHΘΚΑ est double de la raison de BA à HZ; le quarré de BM est donc au quarré de HN comme le polygone ABΓΔΕ est au polygone ZHΘΚΑ (11. 5). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Εστωσαν κύκλοι οἱ  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΖΗΘ$ , διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ  $ΒΔ$ ,  $ΖΘ$ . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΒΔ$  τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΖΘ$  οὕτως ὁ  $ΑΒΓΔ$  κύκλος πρὸς τὸν  $ΕΖΗΘ$  κύκλον<sup>1</sup>.

Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΒΔ$  τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΖΘ$  οὕτως ὁ  $ΑΒΓΔ$  κύκλος πρὸς τὸν  $ΕΖΗΘ$  κύκλον<sup>2</sup>, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΒΔ$  τετράγωνον<sup>3</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΖΘ$  οὕτως ὁ  $ΑΒΓΔ$  κύκλος ἢ τοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ  $ΕΖΗΘ$  κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μείζον. Εστω πρότερον πρὸς ἑλασσον τὸ  $Σ$ . Καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν  $ΕΖΗΘ$  κύκλον τετράγωνον τὸ  $ΕΖΗΘ$ . τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἔστιν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ  $ΕΖΗΘ$  κύκλου, ἐπειδὴ περ εἰς διὰ τῶν  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Θ$  σημείων ἐφαπτομένας εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ<sup>4</sup> τὸν κύκλον τετραγώνου ἡμισύ

## PROPOSITIO II.

Circuli inter se sunt ut ex diametris quadrata.

Sint circuli  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΖΗΘ$ , diametri autem ipsorum sint  $ΒΔ$ ,  $ΖΘ$ ; dico esse ut quadratum ex  $ΒΔ$  ad ipsum ex  $ΖΘ$  ita circulum  $ΑΒΓΔ$  ad circulum  $ΕΖΗΘ$ .

Si enim non est ut quadratum ex  $ΒΔ$  ad ipsum ex  $ΖΘ$  ita circulus  $ΑΒΓΔ$  ad circulum  $ΕΖΗΘ$ , erit ut quadratum ex  $ΒΔ$  ad quadratum ex  $ΖΘ$  ita circulus  $ΑΒΓΔ$  vel ad spatium aliquod minus circulo  $ΕΖΗΘ$  vel ad majus. Sit primum ad minus  $Σ$ . Et describatur in circulo  $ΕΖΗΘ$  quadratum  $ΕΖΗΘ$ ; descriptum utique quadratum majus est quam dimidium circuli  $ΕΖΗΘ$ , quoniam si per  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Θ$  puncta rectas contingentes circulum ducamus, descripti circa circulum quadrati dimidium est  $ΕΖΗΘ$  quadra-

## PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

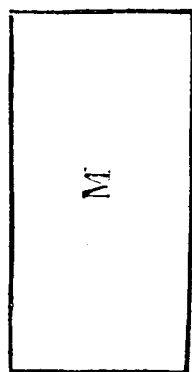
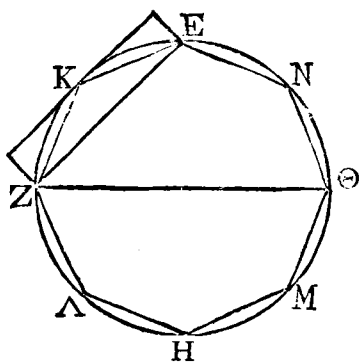
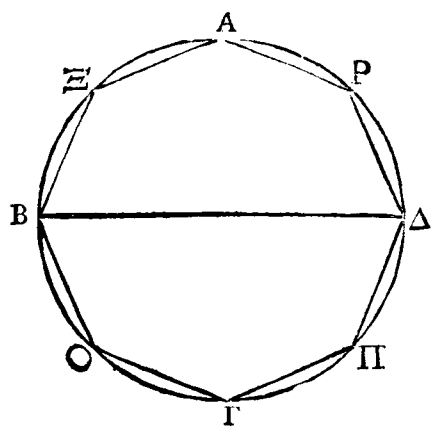
Soient les cercles  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΖΗΘ$ , et que leurs diamètres soient  $ΒΔ$ ,  $ΖΘ$ ; je dis que le quarré de  $ΒΔ$  est au quarré de  $ΖΘ$  comme le cercle  $ΑΒΓΔ$  est au cercle  $ΕΖΗΘ$ .

Car si le quarré de  $ΒΔ$  n'est pas au quarré de  $ΖΘ$  comme le cercle  $ΑΒΓΔ$  est au cercle  $ΕΖΗΘ$ , le quarré  $ΒΔ$  sera au quarré de  $ΖΘ$  comme le cercle  $ΑΒΓΔ$  est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle  $ΕΖΗΘ$ . Que ce soit d'abord à une surface  $Σ$  plus petite. Dans le cercle  $ΕΖΗΘ$  décrivons le quarré  $ΕΖΗΘ$ ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle  $ΕΖΗΘ$ , parce que, si par les points  $Ε$ ,  $Ζ$ ,  $Η$ ,  $Θ$  nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré  $ΕΖΗΘ$  sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3).

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 119

ἔστι τὸ EZHΘ τετράγωνον. Τοῦ δὲ περι-  
 γραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύ-  
 κλος· ὥστε τὸ EZHΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον  
 μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσειος τοῦ EZHΘ κύ-  
 κλου. Τετμήσθωσαν δὶχα αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘΕ  
 περιφέρειαι κατὰ τὰ K, Λ, Μ, Ν σημεῖα,  
 καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ EK, KZ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ,

tum. Circumscripto autem quadrato minor est  
 circulus; quare EZHΘ inscriptum quadratum  
 majus est dimidio circuli EZHΘ. Secentur bifa-  
 riam EZ, ZH, HΘ, ΘE circumferentiæ in K,  
 Λ, Μ, Ν punctis, et jungantur ipsæ EK, KZ,  
 ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ; et unumquod-



ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν EKZ,  
 ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνον μείζον ἐστὶν ἢ  
 τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύ-  
 κλου· ἐπειδὴ περὶ εἰς τὰς K, Λ, Μ, Ν ση-  
 μεῖων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ  
 ἐναπληρώσωμεν τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZH, HΘ,  
 ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα<sup>6</sup>, ἕκαστον τῶν  
 EKZ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται

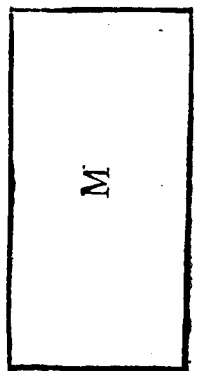
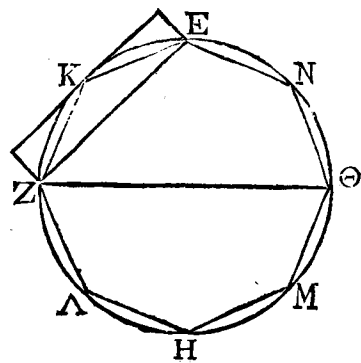
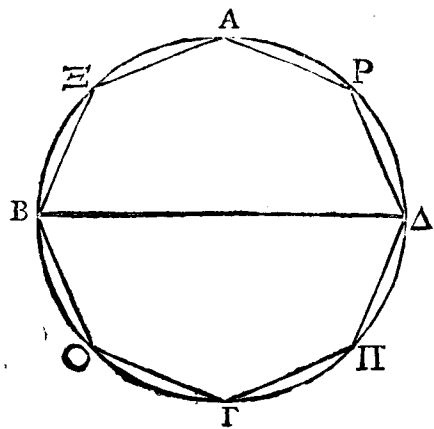
que igitur triangulorum EKZ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ  
 majus est dimidio segmenti circuli in quo est;  
 quoniam si per K, Λ, Μ, Ν puncta contin-  
 gentes circulum ducamus, si compleamus paral-  
 lelogramma super EZ, ZH, HΘ, ΘE rectas,  
 unumquodque EKZ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ trian-  
 gulorum dimidium erit parallelogrammi in quo

Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHΘ est donc  
 plus grand que la moitié du cercle EZHΘ. Partageons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘE en  
 deux parties égales aux points K, Λ, Μ, Ν, et joignons EK, KZ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ,  
 ΘΝ, ΝΕ. Chacun des triangles EKZ, ΖΛΗ, ΜΗΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié  
 du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Λ, Μ, Ν nous  
 menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HΘ, ΘE nous cons-  
 truisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ sera la  
 moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus

120 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμήμα ἑλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν  $EKZ$ ,  $Z\Lambda H$ ,  $H\Lambda\Theta$ ,  $\Theta NE$  τριγώνων μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὲ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ

est. Sed segmentum minus est parallelogrammo in quo est; quare unumquodque  $EKZ$ ,  $Z\Lambda H$ ,  $H\Lambda\Theta$ ,  $\Theta NE$  triangulorum majus est dimidio segmenti circuli in quo est; secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, et jungentes



ἐπιζευγνύοντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερχει ὁ  $EZH\Theta$  κύκλος τοῦ  $\Sigma$  χωρίου. Ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου<sup>8</sup>, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ<sup>9</sup>, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειψθήσεται τι

rectas, et hoc semper facientes, relinuemus quædam segmenta circuli quæ erunt minora excessu quo superat circulus  $EZH\Theta$  spatium  $\Sigma$ . Ostensum enim est ut in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et a relicto majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinquendam esse aliquam

petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles  $EKZ$ ,  $Z\Lambda H$ ,  $H\Lambda\Theta$ ,  $\Theta NE$  est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle  $EZH\Theta$  sur la surface  $\Sigma$ ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des gran-



μέγεθος ὃ ἐστὶ ἐλαστων τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος  
μεγέθους. Λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν  
ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήμα-  
τα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς  
ἣ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου.  
λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν  
ἐστὶ τοῦ Σ χωρίου. Εγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν  
ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον  
πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  
ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ  
τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΗΔΡ πολύγωνον  
πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Ἀλλὰ καὶ  
ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  
ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον·  
καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον  
οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ  
ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ  
ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον οὕτως  
τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον.  
Μεῖζον δὲ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυ-  
γώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ  
ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἐλαττον,  
ὅπερ ἐστὶν<sup>10</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν<sup>11</sup> ὡς τὸ

magnitudinem quæ minor erit expositâ minore  
magnitudine. Relicta sint igitur, et sint segmata  
super EK, KZ, ZΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ  
minora quam circulus ΕΖΗΘ excessu quo superat  
circulus ΕΖΗΘ spatium Σ; reliquum igitur poly-  
gonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ majus est spatio Σ. Descri-  
batur et in circulo ΑΒΓΔ polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ  
simile polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ; est igitur ut  
quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita poly-  
gonum ΑΞΒΟΓΗΔΡ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ.  
Sed et ut quadratum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita  
circulus ΑΒΓΔ ad spatium Σ; et ut igitur circulus  
ΑΒΓΔ ad spatium Σ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ  
ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ; permutando igitur  
ut circulus ΑΒΓΔ ad polygonum quod in ipso  
est ita spatium Σ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ.  
Major autem circulus ΑΒΓΔ polygono quod  
in ipso est; majus igitur et spatium Σ poly-  
gono ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Sed et minus, quod est  
impossibile; non igitur est ut quadratum ex

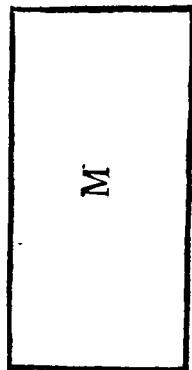
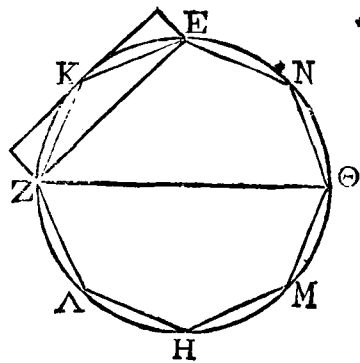
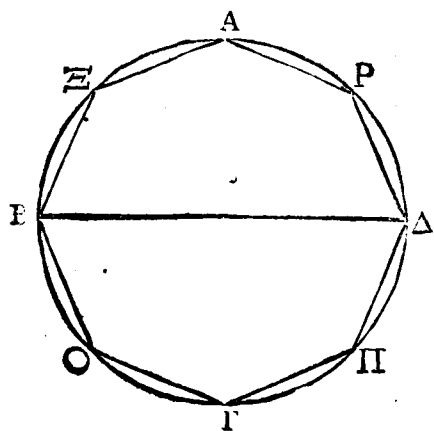
deurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle  
ΕΖΗΘ placés sur les droites EK, KZ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient  
plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone res-  
tant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ  
un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera  
au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12).  
Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface  
Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au  
polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui  
lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ  
est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande  
que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible;



122 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς<sup>12</sup> ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς<sup>13</sup> ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ

ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium aliquod minus circulo ΕΖΗΘ. Similiter utique ostendemus neque ut ipsum ex ΖΘ ad ipsum ex ΒΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ. Dico etiam neque



ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν<sup>14</sup> ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος<sup>15</sup> πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου

ut ipsum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulum ΑΒΓΔ ad aliquod spatium majus circulo ΕΖΗΘ. Si enim possibile, sit ad majus Σ. Invertendo igitur est ut quadratum ex ΖΘ ad ipsum ex ΒΔ ita spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ; sed ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad aliquod spatium minus circulo ΑΒΓΔ; et ut igitur ipsum

le quarré de ΒΔ n'est donc point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ΖΘ n'est point au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le quarré de ΒΔ soit au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ΖΘ sera au quarré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 123

χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ<sup>16</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη<sup>17</sup>. οὐκ ἄρα ἐστίν<sup>18</sup> ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλασσον· ἐστίν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον<sup>19</sup> οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

ex ZΘ ad ipsum ex ΒΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ, quod impossibile ostensum est. Non igitur est ut quadratum ex ΒΔ ad ipsum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium aliquod majus circulo ΕΖΗΘ. Ostensum est autem neque ad minus; est igitur ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad circulum ΕΖΗΘ.

Circuli igitur, etc.

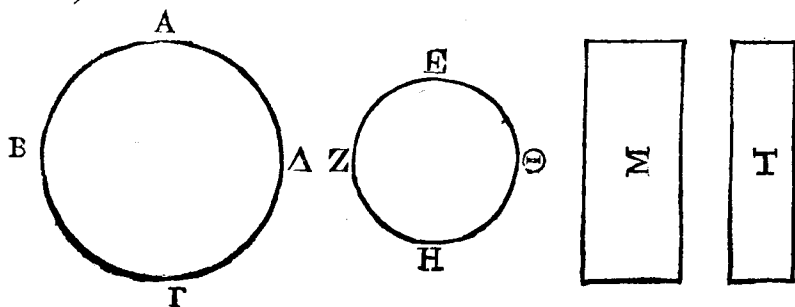
plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le quarré de ΖΘ est donc au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le quarré de ΒΔ est donc au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.

## Λ Η Μ Μ Α.

## LEMMA.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ  $\Sigma$  χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ  $EZH\Theta$  κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ  $\Sigma$  χωρίον πρὸς τὸ  $AB\Gamma\Delta$  κύκλον οὕτως ὁ  $EZH\Theta$  κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ  $AB\Gamma\Delta$  κύκλου χωρίον.

Dico utique, spatio  $\Sigma$  majore existente circulo  $EZH\Theta$ , esse ut spatium  $\Sigma$  ad circulum  $AB\Gamma\Delta$  ita circulum  $EZH\Theta$  ad spatium aliquod minus circulo  $AB\Gamma\Delta$ .



Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ  $\Sigma$  χωρίον πρὸς τὸν  $AB\Gamma\Delta$  κύκλον οὕτως ὁ  $EZH\Theta$  κύκλος πρὸς τὸ  $T$  χωρίον· λέγω ὅτι ἑλασσόν ἐστι τὸ  $T$  χωρίον τοῦ  $AB\Gamma\Delta$  κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ  $\Sigma$  χωρίον πρὸς τὸν  $AB\Gamma\Delta$  κύκλον οὕτως ὁ  $EZH\Theta$  κύκλος πρὸς τὸ  $T$  χωρίον· ἐναλλάξ ἄρα<sup>2</sup> ἐστὶν ὡς τὸ  $\Sigma$  χωρίον πρὸς τὸν  $EZH\Theta$  κύκλον οὕτως ὁ  $AB\Gamma\Delta$  κύκλος πρὸς τὸ  $T$  χωρίον. Μείζον δὲ τὸ

Fiat enim ut spatium  $\Sigma$  ad circulum  $AB\Gamma\Delta$  ita circulus  $EZH\Theta$  ad spatium  $T$ ; dico minus esse spatium  $T$  circulo  $AB\Gamma\Delta$ . Quoniam enim est ut spatium  $\Sigma$  ad circulum  $AB\Gamma\Delta$  ita circulus  $EZH\Theta$  ad spatium  $T$ ; permutando igitur est ut spatium  $\Sigma$  ad circulum  $EZH\Theta$  ita circulus  $AB\Gamma\Delta$  ad spatium  $T$ . Majus autem spatium

## L E M M E.

Je dis que si la surface  $\Sigma$  est plus grande que le cercle  $EZH\Theta$ , la surface  $\Sigma$  sera au cercle  $AB\Gamma\Delta$  comme le cercle  $EZH\Theta$  est à une surface plus petite que le cercle  $AB\Gamma\Delta$ .

Car que la surface  $\Sigma$  soit au cercle  $AB\Gamma\Delta$  comme le cercle  $EZH\Theta$  est à une surface  $T$ ; je dis que la surface  $T$  est plus petite que le cercle  $AB\Gamma\Delta$ . Car puisque la surface  $\Sigma$  est au cercle  $AB\Gamma\Delta$  comme le cercle  $EZH\Theta$  est à la surface  $T$ , par permutation, la surface  $\Sigma$  sera au cercle  $EZH\Theta$  comme le cercle  $AB\Gamma\Delta$  est à la surface  $T$  (16. 5). Mais la surface  $\Sigma$  est plus grande que le cercle  $EZH\Theta$ ; le cercle

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 125

Σ χωρίον<sup>3</sup> τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ἐστὶν<sup>4</sup> ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>5</sup>.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἔχουσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ<sup>1</sup>· καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἐστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας<sup>2</sup> ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις

Σ circulo ΕΖΗΘ. Major igitur et circulus ΑΒΓΔ spatio Τ; quare est ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad spatium aliquod minus circulo ΑΒΓΔ. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides et æquales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata æqualia; et duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

Sit pyramis, cujus basis quidem ΑΒΓ triangulum, vertex vero Δ punctum; dico ΑΒΓΔ pyramidem dividi in duas pyramides et æquales et similes inter se, triangulares bases haben-

ΑΒΓΔ est donc plus grand que la surface Τ; la surface Σ est donc au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION III.

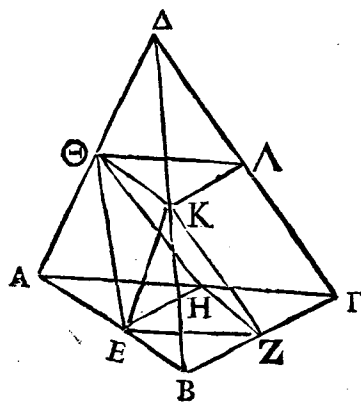
Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Soit la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ; je dis que la pyramide ΑΒΓΔ peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et

# 126 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔχουσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσ-  
ματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν  
ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

tes, et similes toti, et in duo prismata æqualia;  
et duo prismata majora esse dimidio totius  
pyramidis.



Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ AB, BΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ,  
ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ  
ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ,  
ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ  
ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  
ΕΘ τῇ ΔΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ  
ΑΒ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα  
ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ.  
Αλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ  
ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ<sup>5</sup> καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση·  
δύο δὲ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν

Secentur enim ipsæ AB, BΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ,  
ΔΓ bifariam in Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Δ punctis,  
et jungantur ipsæ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ,  
ΚΖ, ΖΗ. Et quoniam æqualis est quidem ipsa  
ΑΕ ipsi ΕΒ, ipsa vero ΑΘ ipsi ΘΔ, paral-  
lela igitur est ΕΘ ipsi ΔΒ. Propter eadem utique  
et ΘΚ ipsi ΑΒ parallela est; parallelogrammum  
igitur est ipsum ΘΕΒΚ; æqualis igitur est ΘΚ  
ipsi ΕΒ. Sed ΕΒ ipsi ΕΑ est æqualis; et ΕΑ  
igitur ipsi ΘΚ est æqualis. Est autem ΑΘ ipsi  
ΘΔ æqualis; duæ igitur ΕΑ, ΑΘ duabus ΚΘ,

en deux prismes égaux, et que ces deux prismes sont plus grands que la moitié  
de la pyramide entière.

Car coupons les droites AB, BΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ en deux parties égales aux points  
Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, et joignons ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Puisque ΑΕ est  
égal à ΕΒ, et ΑΘ égal à ΘΔ; la droite ΕΘ sera parallèle à la droite ΔΒ (2. 6). Par  
la même raison, la droite ΘΚ est parallèle à la droite ΑΒ; la figure ΘΕΒΚ est donc  
un parallélogramme; ΘΚ est donc égal à ΕΒ (34. 1). Mais ΕΒ est égal à ΕΑ; ΕΑ  
est donc égal à ΘΚ. Mais ΑΘ est égal à ΘΔ; les deux droites ΕΑ, ΑΘ sont donc

ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὲρ ΕΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὁμοίον. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν<sup>7</sup>. ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>8</sup> ἡ ὑπὸ ΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνία. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν<sup>9</sup> ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὁμοίον<sup>10</sup>. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ<sup>11</sup> τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ<sup>12</sup> τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν

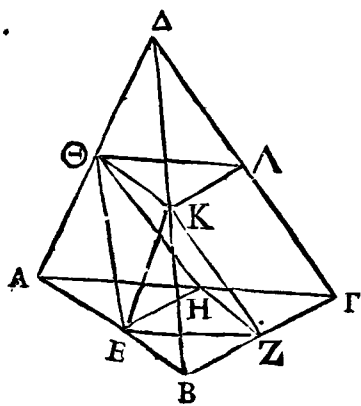
ΘΔ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΕΑΘ ipsi ΚΘΔ æqualis; basis igitur ΕΘ basi ΚΔ est æqualis; æquale igitur et simile est triangulum ΑΕΘ triangulo ΘΚΔ. Propter eadem utique et triangulum ΑΘΗ triangulo ΘΛΔ et æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ sese tangentes ΕΘ, ΘΗ parallelæ sunt duabus rectis sese tangentibus ΚΔ, ΔΛ, non in eodem plano existentes, æquales angulos continebunt; æqualis igitur est angulus ΕΘΗ angulo ΚΔΛ. Et quoniam duæ rectæ ΕΘ, ΘΗ duabus ΚΔ, ΔΛ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΕΘΗ angulo ΚΔΛ est æqualis; basis igitur ΕΗ basi ΚΛ est æqualis; æquale igitur et simile est triangulum ΕΘΗ triangulo ΚΔΛ. Propter eadem utique et triangulum ΑΕΗ triangulo ΘΚΛ et æquale est et simile; ergo pyramis cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem Θ punctum, æqualis et similis est pyramidi, cujus basis quidem est ΘΚΛ triangulum, vertex vero Δ punctum. Et quoniam uni laterum ΑΒ trianguli ΑΔΒ πα-

égales aux deux droites ΚΘ, ΘΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΕΑΘ est égal à l'angle ΚΘΔ; la base ΕΘ est donc égale à la base ΚΔ (29. 1); le triangle ΑΕΘ est donc égal et semblable au triangle ΘΚΔ. Par la même raison, le triangle ΑΘΗ est égal et semblable au triangle ΘΛΔ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ qui se touchent sont parallèles aux deux droites ΚΔ, ΔΛ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (10. 11); l'angle ΕΘΗ est donc égal à l'angle ΚΔΛ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ sont égales aux deux droites ΚΔ, ΔΛ, chacune à chacune, et que l'angle ΕΘΗ est égal à l'angle ΚΔΛ, la base ΕΗ sera égale à la base ΚΛ; le triangle ΕΘΗ est donc égal et semblable au triangle ΚΔΛ. Par la même raison, le triangle ΑΕΗ est égal et semblable au triangle ΘΚΛ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ est donc égale et semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ et dont le sommet est le point Δ. Et puisque la droite ΘΚ est menée

# 128 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν πλευρῶν τὴν AB ἥκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιον  
ἐστὶ τὸ AΔB τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ  
τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὁμοιον ἄρα  
ἐστὶ<sup>13</sup> τὸ AΔB τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. Διὰ  
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ

parallela ducta est ΘΚ, æquiangulum est trian-  
gulum AΔB triangulo ΔΘΚ, et latera propor-  
tionalia habent. Simile igitur est triangulum AΔB  
triangulo ΔΘΚ. Propter eadem utique et ΔΒΓ  
quidem triangulum triangulo ΔΚΛ simile est,



τριγώνῳ ὁμοιόν ἐστι, τὸ δὲ AΔΓ τῷ ΔΛΘ<sup>14</sup>. Καὶ  
ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ  
παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ,  
ΘΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι<sup>15</sup>,  
ἴσας γωνίας περιέξουσιν<sup>16</sup>. ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>17</sup> ἡ  
ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ  
ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΛΘ· ὁμοιον  
ἄρα ἐστὶ<sup>18</sup> τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ·  
καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ  
τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοιον ἐστὶ  
πυραμίδι, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον,

ipsum vero AΔΓ ipsi ΔΛΘ. Et quoniam duæ rectæ  
sese tangentes ΒΑ, ΑΓ parallelæ sunt duabus  
rectis sese tangentibus ΚΘ, ΘΛ, non in eodem  
plano existentes, æquales angulos continebunt;  
æqualis igitur est angulus ΒΑΓ ipsi ΚΘΛ. Et est  
ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΚΘ ad ΛΘ; simile igitur est  
triangulum ΑΒΓ triangulo ΘΚΛ; et pyramis  
igitur, cujus basis quidem est ΑΒΓ triangu-  
lum, vertex autem Δ punctum, similis est py-  
ramidi, cujus basis quidem est ΘΚΛ triangulum

parallèlement à un des côtés AB du triangle AΔB, le triangle AΔB sera équi-  
angle avec le triangle ΔΘΚ (29. 1); mais ces deux triangles ont leurs côtés propor-  
tionnels (4. 6), le triangle AΔB est donc semblable au triangle ΔΘΚ. Par la même  
raison, le triangle ΔΒΓ est semblable au triangle ΔΚΛ, et le triangle AΔΓ  
semblable au triangle ΔΛΘ. Et puisque les deux droites ΒΑ, ΑΓ qui se  
touchent sont parallèles aux deux droites ΚΘ, ΘΛ qui se touchent et qui ne  
sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux  
(10. 11); l'angle ΒΑΓ est donc égal à l'angle ΚΘΛ. Mais ΒΑ est à ΑΓ comme ΚΘ  
est à ΘΛ; le triangle ΑΒΓ est donc semblable au triangle ΘΚΛ (6. 6); la pyramide  
dont la base est le triangle ΑΒΓ et dont le sommet est le point Δ est donc sem-  
blable à la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ et dont le sommet est le



κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἀλλὰ πυραμὶς, ἥς  
βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφή δὲ  
τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη<sup>19</sup> πυραμίδι, ἥς  
βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφή δὲ  
τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἥς βάσις  
μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ  
σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν  
ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ ση-  
μεῖον<sup>20</sup>. ἑκάτερα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυ-  
ραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι.  
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι  
τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου.  
Καὶ ἐπεὶ εἰάν ἡ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ ὦσι<sup>21</sup>,  
καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ  
δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἡ τὸ παραλληλό-  
γραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ<sup>22</sup> τὰ πρίσ-  
ματα· ἴσον ἄρα ἐστὶ<sup>23</sup> τὸ πρίσμα τὸ περιε-  
χόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ,  
τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ,  
ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο  
μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλ-  
ληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Καὶ  
φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε

vertex autem Δ punctum. Sed pyramis, cujus  
basis quidem est ΘΚΛ triangulum, vertex au-  
tem Δ punctum, similis ostensa est pyramidi,  
cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex  
autem Θ punctum; quare et pyramis, cujus basis  
quidem est ΑΒΓ triangulum, vertex autem Δ  
punctum, similis est pyramidi, cujus basis qui-  
dem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem Θ  
punctum; utraque igitur ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ pyra-  
midum similis est toti ΑΒΓΔ pyramidi. Et  
quoniam æqualis est ΒΖ ipsi ΖΓ, duplum est  
parallelogrammum ΕΒΖΗ trianguli ΗΖΓ. Et  
quoniam si sint duo prismata æquealta, et  
habeat unum quidem basim parallelogrammum,  
alterum vero triangulum, duplum autem sit pa-  
rallelogrammum trianguli, æqualia sunt pris-  
mata; æquale igitur est prisma contentum sub  
duobus quidem triangulis ΒΚΖ, ΕΘΗ, tribus  
autem parallelogrammis ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ  
prismati contento sub duobus quidem triangulis  
ΗΖΓ, ΘΚΛ, tribus autem parallelogrammis ΚΖΓΛ,  
ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Et evidens utrumque prisma-  
tum et cujus basis ΕΒΖΗ parallelogrammum, oppo-

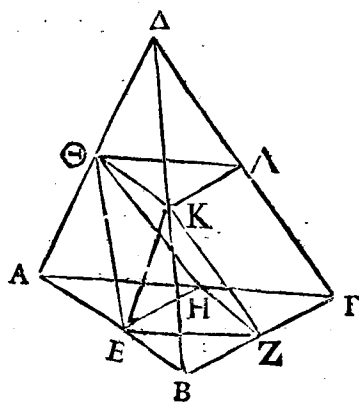
point Δ. Mais on a démontré que la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ, et le sommet le point Δ, est semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; chacune des pyramides ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ est donc semblable à la pyramide entière ΑΒΓΔ. Et puisque ΒΖ est égal à ΖΓ, le parallélogramme ΕΒΖΗ sera double du triangle ΗΖΓ (41. 1). Mais deux prismes de même hauteur, dont l'un a pour base un parallélogramme, et dont l'autre a pour base un triangle, sont égaux entre eux, lorsque le parallélogramme est double du triangle (40. 1); le prisme compris sous les deux triangles ΒΚΖ, ΕΘΗ et sous les trois parallélogrammes ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ est donc égal au prisme qui est compris sous les deux triangles ΗΖΓ, ΘΚΛ et sous les trois parallélogrammes ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Mais il est évident que chacun de ces prismes et celui dont la base est le paral-



130 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

βάσις τὸ EBZH παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις<sup>24</sup>, τὸ HZΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον μείζον ἐστὶ ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΔΕΗ, ΘΚΑ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεία· ἐπειδὴ περ καὶ<sup>25</sup> εἰς ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ EBZH παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μείζον ἐστὶ τῆς πυρα-

mita autem ΘΚ recta, et cujus basis HZΓ triangulum, oppositum autem ΚΛΘ triangulum, majus esse utrâque pyramidum, quarum bases quidem ΔΕΗ, ΘΚΑ triangula, vertex autem Θ, Δ puncta; quoniam et si jungamus ΕΖ, ΕΚ rectas, prisma quidem, cujus basis EBZH parallelogrammum, opposita autem ΘΚ recta, majus est pyramide, cujus basis quidem EBZ triangulum,



μίδος, ἥς βάσις μὲν τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. Αλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν<sup>26</sup> τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν<sup>27</sup> τὸ ΔΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ

vertex autem Κ punctum. Sed pyramis, cujus basis quidem EBZ triangulum, vertex autem Κ punctum, æqualis est pyramidi, cujus basis quidem ΔΕΗ, triangulum, vertex autem Θ punctum, sub æqualibus enim et similibus planis continentur; quare et prisma, cujus basis quidem

lélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, et celui dont la base est le triangle HZΓ opposé au triangle ΚΛΘ est plus grand que chacune des pyramides dont les bases sont ΔΕΗ, ΘΚΑ et les sommets les points Θ, Δ; parce que si nous joignons ΕΖ, ΕΚ; le prisme dont la base est le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle EBZ et pour sommet le point Κ. Mais la pyramide qui a pour base le triangle EBZ et pour sommet le point Κ, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΔΕΗ et pour sommet le point Θ (def. 10. 11), car elles sont comprises sous des plans égaux et semblables; le prisme qui a pour base le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est donc

πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ EBZH παραλληλό-  
 γραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μείζον  
 ἔστι πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν τὸ AEH τρί-  
 γωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον. Ἰσον δὲ τὸ μὲν  
 πρίσμα, οὗ βάσις μὲν<sup>28</sup> τὸ EBZH παραλ-  
 ληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ  
 πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ HZΓ τρίγωνον,  
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΑ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς,  
 ἥς βάσις μὲν<sup>29</sup> τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ  
 τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἔστι πυραμίδι, ἥς βάσις  
 μὲν<sup>30</sup> τὸ ΘΚΑ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ ση-  
 μεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά  
 ἔστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις  
 μὲν τὰ AEH, ΘΚΑ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ,  
 Ε σημεία· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ  
 ABΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται  
 εἰς τε δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλ-  
 λήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ<sup>31</sup>, καὶ εἰς δύο  
 πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά  
 ἔστιν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Ὅπερ  
 εἶδει δεῖξαι.

EBZH parallelogrammum, opposita autem ΘΚ  
 recta, majus est pyramide, cujus basis qui-  
 dem AEH triangulum, vertex autem Θ punc-  
 tum. Sed æquale prisma quidem, cujus basis  
 quidem EBZH parallelogrammum, opposita au-  
 tem ΘΚ recta, prismati, cujus basis quidem  
 HZΓ triangulum, oppositum autem ΘΚΑ trian-  
 gulum; pyramis vero, cujus basis quidem AEH  
 triangulum, vertex autem Θ punctum, æqualis  
 est pyramidi, cujus basis quidem ΘΕΑ trian-  
 gulum, vertex autem Δ punctum; ergo dicta  
 duo prismata majora sunt dictis duabus py-  
 ramidibus, quarum bases AEH, ΘΚΑ triangu-  
 la, vertex autem Θ, Δ puncta; tota igitur py-  
 ramis, cujus basis ABΓ triangulum, vertex  
 autem Δ punctum, divisa est et in duas py-  
 ramides æquales et similes inter se, et similes  
 toti, et in duo prismata æqualia; et duo pris-  
 mata majora sunt dimidio totius pyramidis.  
 Quod oportebat ostendere.

plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle AEH et pour sommet le point Θ. Mais le prisme qui a pour base le parallélogramme EBZH opposé à la droite ΘΚ, est égal au prisme qui a pour base le triangle HZΓ opposé au triangle ΘΚΑ; et la pyramide qui a pour base le triangle AEH et pour sommet le point Θ est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΘΚΑ et pour sommet le point Δ; les deux prismes dont nous venons de parler sont donc plus grands que les deux pyramides qui ont pour bases les triangles AEH, ΘΚΑ et pour sommets les points Θ, Δ; la pyramide entière qui a pour base le triangle ABΓ et pour sommet le point Δ, a donc été divisée en deux pyramides égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux qui sont plus grands que la moitié de la pyramide entière. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εάν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσιν βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο παραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίνηται<sup>1</sup>. ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάση πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ<sup>2</sup> τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Εστώσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσιν βάσεις τὰς  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , κορυφὰς δὲ τὰ  $H$ ,  $\Theta$  σημεία, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο παραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διηρημένη, καὶ τοῦτο αἰεὶ γιγνέσθω<sup>3</sup>. λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάση

## PROPOSITIO IV.

Si sint duæ pyramides sub eadem altitudine, triangulares habentes bases, dividatur autem utraque ipsarum et in duas pyramides æquales inter se et similes toti, et in duo prismata æqualia, et ortarum pyramidum utraque eodem modo, et hoc semper fiat, erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim ita et prismata omnia in unâ pyramide ad omnia prismata in alterâ pyramide numero æqualia.

Sint duæ pyramides sub eadem altitudine, triangulares habentes bases  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , vertices autem  $H$ ,  $\Theta$  puncta, et dividatur utraque ipsarum et in duas pyramides æquales inter se et similes toti, et in duo prismata æqualia, et ortarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur, et hoc semper fiat; dico esse ut

## PROPOSITION IV.

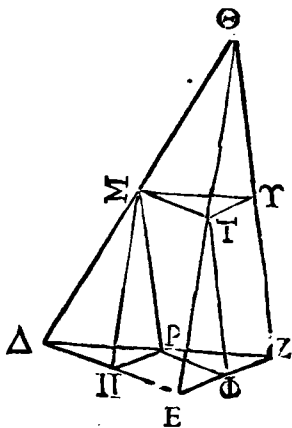
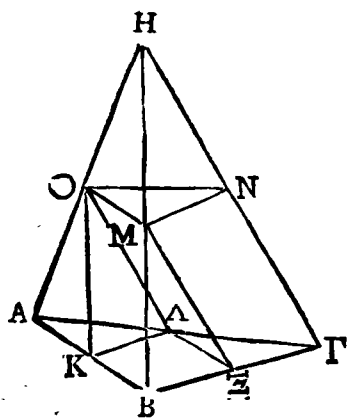
Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre pyramide, ces prismes étant égaux en nombre.

Soient deux pyramides triangulaires de même hauteur ayant pour bases les triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , et pour sommets les points  $H$ ,  $\Theta$ ; que chacune de ces pyramides soit divisée en deux pyramides égales entr'elles et semblables aux pyramides entières et en deux prismes égaux; concevons que chacune des pyramides engendrées soit divisée de la même manière, et faisons toujours la même chose; je dis que la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme tous les prismes contenus dans

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 133

πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ  
 πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ  
 ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα<sup>4</sup> ἰσοπληθῆ.

ABΓ basis ad ΔΕΖ basim ita prismata omnia in  
 ΑΒΓΗ pyramide ad prismata omnia in pyra-  
 mide ΔΕΖΘ numero æqualia.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ  
 ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἡ ΞΑ τῇ ΑΒ,  
 καὶ ὁμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ.  
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ  
 τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ<sup>5</sup>. Καὶ ἐπεὶ διπλασίον  
 ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἐστὶν  
 ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν  
 ΖΦ. Καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ  
 ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ,  
 ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὁμοιά τε<sup>6</sup> καὶ ὁμοίως  
 κείμενα εὐθύγραμμα<sup>7</sup> τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἐστὶν ἄρα  
 ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον  
 οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον·

Quoniam enim æqualis est quidem ipsa ΒΞ  
 ipsi ΞΓ, ipsa vero ΑΛ ipsi ΛΓ; parallela igitur  
 ΞΑ ipsi ΑΒ, et simile ΑΒΓ triangulum ipsi ΛΞΓ  
 triangulo. Propter eadem utique et ΔΕΖ trian-  
 gulum ipsi ΡΦΖ triangulo simile est. Et quo-  
 niam dupla est quidem ipsa ΒΓ ipsius ΓΞ, ipsa  
 autem ΕΖ ipsius ΖΦ; est igitur ut ΒΓ ad ΓΞ  
 ita ΕΖ ad ΖΦ. Et descripta sunt quidem ab  
 ipsis ΒΓ, ΓΞ et similia et similiter posita rec-  
 tilinea ΑΒΓ, ΛΞΓ, ab ipsis autem ΕΖ, ΖΦ et  
 similia et similiter posita rectilinea ΔΕΖ, ΡΦΖ;  
 est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΛΞΓ triangu-  
 lum ita ΔΕΖ triangulum ad ΡΦΖ triangulum;

la pyramide ΑΒΓΗ sont à tous les prismes contenus dans la pyramide ΔΕΖΘ, ces  
 prismes étant égaux en nombre.

Car puisque ΒΞ est égal à ΞΓ, et ΑΛ égal à ΛΓ, la droite ΞΑ sera parallèle à la  
 droite ΑΒ (2. 6), et le triangle ΑΒΓ sera semblable au triangle ΛΞΓ (4. 6).  
 Par la même raison, le triangle ΔΕΖ sera semblable au triangle ΡΦΖ. Et puisque la  
 droite ΒΓ est double de la droite ΓΞ, et la droite ΕΖ double de la droite ΖΦ, la  
 droite ΒΓ sera à la droite ΓΞ comme la droite ΕΖ est à la droite ΖΦ. Mais les figures  
 rectilignes semblables et semblablement placées ΑΒΓ, ΛΞΓ ont été décrites sur les  
 droites ΒΓ, ΓΞ, et les figures rectilignes semblables et semblablement placées ΔΕΖ,  
 ΡΦΖ ont été décrites sur les droites ΕΖ, ΖΦ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle  
 ΛΞΓ comme le triangle ΔΕΖ est au triangle ΡΦΖ (22. 6); donc, par permutation,

ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta EZ$  τρίγωνον οὕτως τὸ  $\Lambda EZ$  τρίγωνον<sup>8</sup> πρὸς τὸ  $P\Phi Z$  τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς τὸ  $\Lambda EZ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $P\Phi Z$  τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ<sup>9</sup> τὸ  $\Lambda EZ$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $OMN$  πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $P\Phi Z$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Sigma TY$ . καὶ ὡς ἄρα τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta EZ$  τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $\Lambda EZ$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $OMN$ , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $P\Phi Z$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Sigma TY$ . Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ  $AB\Gamma H$  πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $ΚΛΕΒ$  παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ  $MO$  εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $\Lambda EZ$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $OMN$ , οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν  $ΕΠΡΦ$ , ἀπεναντίον δὲ ἡ  $\Sigma T$  εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $P\Phi Z$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Sigma TY$ . συνθέντι ἄρα ὡς τὰ  $ΚΒΞΛΜΟ$ ,  $\Lambda EZMNO$  πρίσματα πρὸς τὸ

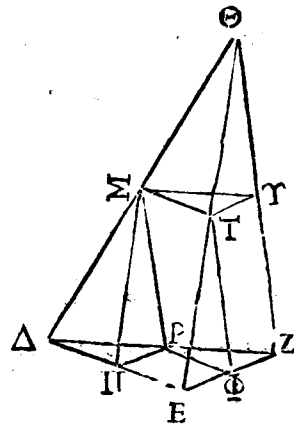
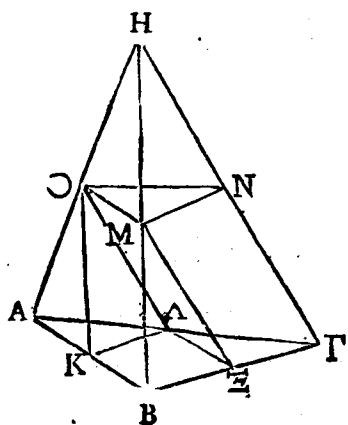
permutando igitur est ut  $AB\Gamma$  triangulum ad  $\Delta EZ$  triangulum ita  $\Lambda EZ$  triangulum ad  $P\Phi Z$  triangulum. Sed ut  $\Lambda EZ$  triangulum ad  $P\Phi Z$  triangulum ita prisma, cujus basis quidem est  $\Lambda EZ$  triangulum, oppositum autem  $OMN$ , ad prisma, cujus basis quidem  $P\Phi Z$  triangulum, oppositum autem  $\Sigma TY$ ; et ut igitur  $AB\Gamma$  triangulum ad  $\Delta EZ$  triangulum ita prisma, cujus basis quidem  $\Lambda EZ$  triangulum, oppositum autem  $OMN$ , ad prisma, cujus basis quidem  $P\Phi Z$  triangulum, oppositum autem  $\Sigma TY$ . Et quoniam in  $AB\Gamma H$  pyramide duo prismata æqualia sunt inter se; sed et in  $\Delta EZ\Theta$  pyramide prismata æqualia sunt inter se; est igitur ut prisma cujus basis quidem  $ΚΛΕΒ$  parallelogrammum, opposita autem  $MO$  recta, ad prisma, cujus basis quidem  $\Lambda EZ$  triangulum, oppositum autem  $OMN$  ita prisma, cujus basis quidem  $ΕΠΡΦ$ , opposita autem  $\Sigma T$  recta, ad prisma, cujus basis quidem  $P\Phi Z$  triangulum, oppositum autem  $\Sigma TY$ ; componendo igitur ut  $ΚΒΞΛΜΟ$ ,  $\Lambda EZMNO$  prismata ad

le triangle  $AB\Gamma$  est au triangle  $\Delta EZ$  comme le triangle  $\Lambda EZ$  est au triangle  $P\Phi Z$ . Mais le triangle  $\Lambda EZ$  est au triangle  $P\Phi Z$  comme le prisme qui a pour base le triangle  $\Lambda EZ$  opposé à  $OMN$  est au prisme qui a pour base le triangle  $P\Phi Z$  opposé à  $\Sigma TY$ ; le triangle  $AB\Gamma$  est donc au triangle  $\Delta EZ$  comme le prisme qui a pour base le triangle  $\Lambda EZ$  opposé à  $OMN$  est au prisme qui a pour base le triangle  $P\Phi Z$  opposé à  $\Sigma TY$ . Et puisque les deux prismes qui sont dans la pyramide  $AB\Gamma H$  sont égaux entr'eux, et que les prismes qui sont dans la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  sont aussi égaux entr'eux, le prisme qui a pour base le parallélogramme  $ΚΛΕΒ$  opposé à la droite  $MO$  sera au prisme qui a pour base le triangle  $\Lambda EZ$  opposé à  $OMN$  comme le prisme qui a pour base le parallélogramme  $ΕΠΡΦ$  opposé à la droite  $\Sigma T$  est au prisme qui a pour base le triangle  $P\Phi Z$  opposé à  $\Sigma TY$ ; donc par addition (18. 5), les prismes  $ΚΒΞΛΜΟ$ ,  $\Lambda EZMNO$  sont au prisme  $\Lambda EZMNO$  comme les prismes  $ΠΕΦΡΣΤ$ ,  $P\Phi Z\Sigma TY$  sont au prisme

# LE DOUZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 135

ΛΕΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΕΛΟΜ, ΛΕΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΕΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. Ὡς δὲ ΛΕΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΕΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ

ΛΕΓΜΝΟ prisma ita ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ prismata ad ΡΦΖΣΤΥ prisma ; permutando igitur ut ΚΒΕΛΟΜ, ΛΕΓΟΜΝ ad ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ prismata ita ΛΕΓΜΝΟ prisma ad ΡΦΖΣΤΥ prisma. Ut autem ΛΕΓΜΝΟ prisma ad ΡΦΖΣΤΥ prisma ita ostensa est ΑΕΓ basis ad ΡΦΖ basim, et ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim, et ut igitur ΑΒΓ



τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ομοίως δὲ καὶ τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται<sup>10</sup> ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ'

triangulum ad ΔΕΖ triangulum ita in ΑΒΓΗ pyramide duo prismata ad in ΔΕΖΘ pyramide duo prismata. Similiter autem et si factas pyramides dividamus eodem modo velut ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, erit ut ΟΜΝ basis ad ΣΤΥ basim ita in ΟΜΝΗ pyramide duo prismata ad duo prismata in ΣΤΥΘ pyramide. Sed ut ΟΜΝ basis

ΡΦΖΣΤΥ ; donc, par permutation, les prismes ΚΒΕΛΟΜ, ΛΕΓΟΜΝ sont aux prismes ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ comme le prisme ΛΕΓΜΝΟ est au prisme ΡΦΖΣΤΥ. Mais on a démontré que le prisme ΛΕΓΜΝΟ est au prisme ΡΦΖΣΤΥ comme la base ΑΕΓ est à la base ΡΦΖ, et la base ΑΕΓ est à la base ΡΦΖ comme la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle ΔΕΖ comme les deux prismes qui sont dans la pyramide ΑΒΓΗ sont aux deux prismes qui sont dans la pyramide ΔΕΖΘ. Si nous partageons de la même manière les nouvelles pyramides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, la base ΟΜΝ sera à la base ΣΤΥ comme les deux prismes de la pyramide ΟΜΝΗ sont aux deux prismes de la pyramide ΣΤΥΘ. Mais la base ΟΜΝ est à

ὡς ἡ  $OMN$  βάσις πρὸς τὴν  $ΣΤΥ$  βάσιν οὕτως ἡ  $ABΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΔΕΖ$  βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν  $OMN$ ,  $ΣΤΥ$  τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν  $ΛΞΓ$ ,  $ΡΦΖ$ <sup>11</sup>, καὶ ὡς ὅρα ἡ  $ABΓ$  βάσις πρὸς τὴν  $ΔΕΖ$  βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ  $ABΓH$  πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ  $ΔΕΖΘ$  πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ  $OMNH$  δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ  $ΣΤΥΘ$  πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμαμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν  $AKΛO$  καὶ  $ΔΠΡΣ$  πυραμίδων καὶ πάντων ἀπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν<sup>12</sup>. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad  $ΣΤΥ$  basim ita  $ABΓ$  basis ad  $ΔΕΖ$  basim, æquale enim utrumque triangulorum  $OMN$ ,  $ΣΤΥ$  utrique triangulorum  $ΛΞΓ$ ,  $ΡΦΖ$ ; et ut igitur basis  $ABΓ$  ad  $ΔΕΖ$  basim ita et in  $ABΓH$  pyramide duo prismata ad duo prismata in  $ΔΕΖΘ$  pyramide, et in  $OMNH$  duo prismata ad duo prismata in  $ΣΤΥΘ$  pyramide, et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in prismatibus factis divisione pyramidum  $AKΛO$  et  $ΔΠΡΣ$ , et omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod oportebat ostendere.

la base  $ΣΤΥ$  comme la base  $ABΓ$  est à la base  $ΔΕΖ$ ; car chacun des triangles  $OMN$ ,  $ΣΤΥ$  est égal à chacun des triangles  $ΛΞΓ$ ,  $ΡΦΖ$ ; la base  $ABΓ$  est donc à la base  $ΔΕΖ$  comme les deux prismes de la pyramide  $ABΓH$  sont aux deux prismes de la pyramide  $ΔΕΖΘ$ , comme les deux prismes de la pyramide  $OMNH$  sont aux deux prismes de la pyramide  $ΣΤΥΘ$ , et comme quatre prismes sont à quatre prismes. On démontrera la même chose pour tous les autres prismes qu'on obtiendra par la division des pyramides  $AKΛO$  et  $ΔΠΡΣ$ , et enfin de toutes les pyramides égales en nombre. Ce qu'il fallait démontrer.



ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ ἐστὶν ὡς τὸ  $\Lambda\Xi\Gamma$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Pi\Phi\text{Z}$ <sup>1</sup> τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ  $\Lambda\Xi\Gamma$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\text{OMN}$ , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  $\Pi\Phi\text{Z}$  τρίγωνον<sup>2</sup>, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Sigma\text{T}\Phi$ , οὕτως δεικτέον.

Επὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν  $\text{H}$ ,  $\Theta$  κάθετοι ἐπὶ τὰ  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\Delta\text{EZ}$  τρίγωνα<sup>3</sup> ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοῦν εἶναι ὑποκείσθαι τὰς πυραμίδας. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε  $\text{H}\Gamma$  καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ  $\text{H}$  κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\text{OMN}$  τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. Καὶ τέμνεται ἡ  $\text{H}\Gamma$  δίχα ὑπὸ τοῦ  $\text{OMN}$  ἐπιπέδου κατὰ τὸ  $\text{N}$ · καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ  $\text{H}$  ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ  $\text{AB}\Gamma$  ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ  $\text{OMN}$  ἐπιπέδου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  κάθετος ἐπὶ τὸ  $\Delta\text{EZ}$

COROLLARIUM.

Esse autem ut  $\Lambda\Xi\Gamma$  triangulum ad  $\Pi\Phi\text{Z}$  triangulum, ita prisma, cujus basis triangulum  $\Lambda\Xi\Gamma$ , oppositum autem ipsum  $\text{OMN}$ , ad prisma, cujus basis quidem triangulum  $\Pi\Phi\text{Z}$ , oppositum autem  $\Sigma\text{T}\Phi$ , ita ostendere est.

In eadem enim figurâ intelligatur a punctis  $\text{H}$ ,  $\Theta$  perpendiculares ad  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\Delta\text{EZ}$  triangula plana, quæ æquales erunt, propterea quod æquealtæ ponuntur pyramides. Et quoniam duæ rectæ, et  $\text{H}\Gamma$  et a puncto  $\text{H}$  perpendicularis a parallelis planis  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\text{OMN}$  secantur, in eadem ratione secabuntur. Et secatur  $\text{H}\Gamma$  bifariam a plano  $\text{OMN}$  in  $\text{N}$ ; et a puncto  $\text{H}$  igitur perpendicularis ad  $\text{AB}\Gamma$  planum bifariam secabitur a plano  $\text{OMN}$ . Propter eadem utique, et a puncto  $\Theta$  perpendicularis ad  $\Delta\text{EZ}$  planum bifariam secabitur a

LEMME.

Nous démontrerons de la manière suivante que le triangle  $\Lambda\Xi\Gamma$  est au triangle  $\Pi\Phi\text{Z}$  comme le prisme qui a pour base le triangle  $\Lambda\Xi\Gamma$  opposé à  $\text{OMN}$ , est au prisme qui a pour base le triangle  $\Pi\Phi\text{Z}$  opposé à  $\Sigma\text{T}\Phi$ .

Car dans la même figure imaginons des perpendiculaires menées des points  $\text{H}$ ,  $\Theta$  aux plans des triangles  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\Delta\text{EZ}$ ; ces perpendiculaires seront égales entr'elles, parce que ces pyramides sont supposées égales en hauteur. Et puisque la droite  $\text{H}\Gamma$  et la perpendiculaire menée du point  $\text{H}$  sont coupées par les plans parallèles  $\text{AB}\Gamma$ ,  $\text{OMN}$ , ces deux droites seront coupées proportionnellement (17. 11). Or la droite  $\text{H}\Gamma$  est coupée en deux parties égales au point  $\text{N}$  par le plan  $\text{OMN}$ ; la perpendiculaire menée du point  $\text{H}$  au plan  $\text{AB}\Gamma$  sera donc coupée en deux parties égales par le plan  $\text{OMN}$ . Par la même raison, la perpendiculaire menée du point  $\Theta$  au plan  $\Delta\text{EZ}$  sera coupée en deux parties égales par le plan  $\Sigma\text{T}\Gamma$ . Mais les



# 138 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. Καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ<sup>4</sup> ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοῦψῃ ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ ΛΕΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοῦψῃ τυγχάνον<sup>6</sup>, πρὸς ἀλλήλα ἐστίν<sup>7</sup> ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστίν<sup>8</sup>, ὡς ἡ ΛΕΓ βάση πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

plano ΣΤΥ. Et sunt æquales a punctis Η, Θ perpendiculares ad ΑΒΓ, ΔΕΖ plana; æquales igitur ipsæ a triangulis ΟΜΝ, ΣΤΥ ad ipsa ΑΒΓ, ΔΕΖ perpendiculares; æquealta igitur sunt prismata, quorum bases quidem sunt ΛΕΓ, ΡΦΖ triangula, opposita autem ipsa ΟΜΝ, ΣΤΥ; quare et solida parallelepipeda a dictis prismatibus descripta, et æquealta, inter se sunt ut bases; et dimidia igitur sunt ut ΛΕΓ basis ad ΡΦΖ basim ita dicta prismata inter se. Quod oportebat ostendere.

perpendiculaires menées des points Η, Θ aux plans ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égales entr'elles; les perpendiculaires menées des triangles ΟΜΝ, ΣΤΥ aux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont donc égales entr'elles; les prismes qui ont pour bases les triangles ΛΕΓ, ΡΦΖ opposés à ΟΜΝ, ΣΤΥ sont donc égaux en hauteur; les parallélépipèdes composés des prismes égaux en hauteur, dont nous venons de parler, sont donc entr'eux comme leurs bases (32. 11), et il en sera de même de leurs moitiés, c'est-à-dire que les bases ΛΕΓ, ΡΦΖ seront entr'elles comme les prismes dont nous avons parlé. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

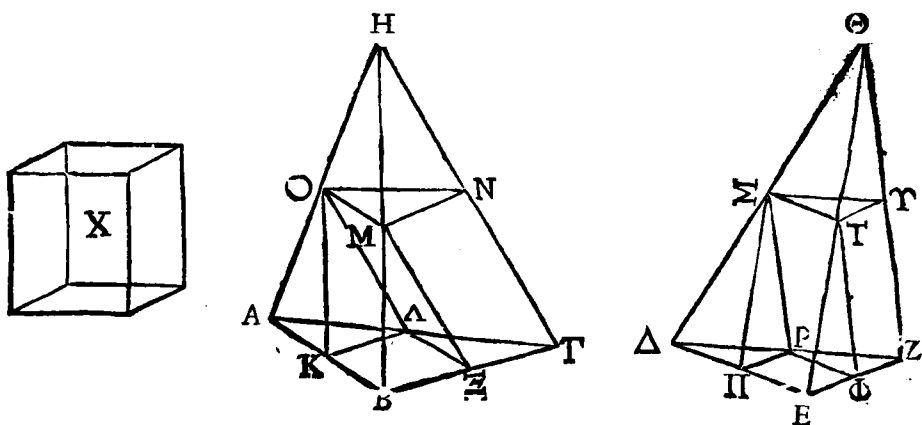
PROPOSITIO V.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ  
τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν  
ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστώσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν  
βάσεις μὲν τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  τρίγωνα, κορυφαὶ  
δὲ τὰ  $H$ ,  $\Theta$  σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $AB\Gamma$   
βάσις πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως ἡ  $AB\Gamma H$   
πυραμὶς πρὸς τὴν  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδα.

Pyramides in eâdem altitudine existentes et  
habentes triangulares bases inter se sunt ut  
bases.

Sint in eâdem altitudine pyramides, quarum  
bases quidem triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , vertices  
autem puncta  $H$ ,  $\Theta$ ; dico esse ut  $AB\Gamma$  basis ad  
basim  $\Delta EZ$  ita pyramidem  $AB\Gamma H$  ad  $\Delta EZ\Theta$   
pyramidem.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάσις πρὸς τὴν  
 $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς πρὸς τὴν  
 $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάσις πρὸς  
τὴν  $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς ἢ τοι  
πρὸς ἑλαττόν τι τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος στερεὸν ἢ

Si enim non est ut basis  $AB\Gamma$  ad basim  $\Delta EZ$   
ita pyramis  $AB\Gamma H$  ad pyramidem  $\Delta EZ\Theta$ , erit  
ut  $AB\Gamma$  basis ad basim  $\Delta EZ$  ita  $AB\Gamma H$  pyramis vel  
ad solidum aliquod minus pyramide  $\Delta EZ\Theta$  vel ad

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme  
leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , et dont les som-  
mets sont les points  $H$ ,  $\Theta$ , aient la même hauteur; je dis que la base  $AB\Gamma$  est à la  
base  $\Delta EZ$  comme la pyramide  $AB\Gamma H$  est à la pyramide  $\Delta EZ\Theta$ .

Car si la base  $AB\Gamma$  n'est pas à la base  $\Delta EZ$  comme la pyramide  $AB\Gamma H$  est à la  
pyramide  $\Delta EZ\Theta$ ; la base  $AB\Gamma$  sera à la base  $\Delta EZ$  comme la pyramide  $AB\Gamma H$  est à  
un solide plus petit que la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  ou à un solide plus grand. Que ce soit

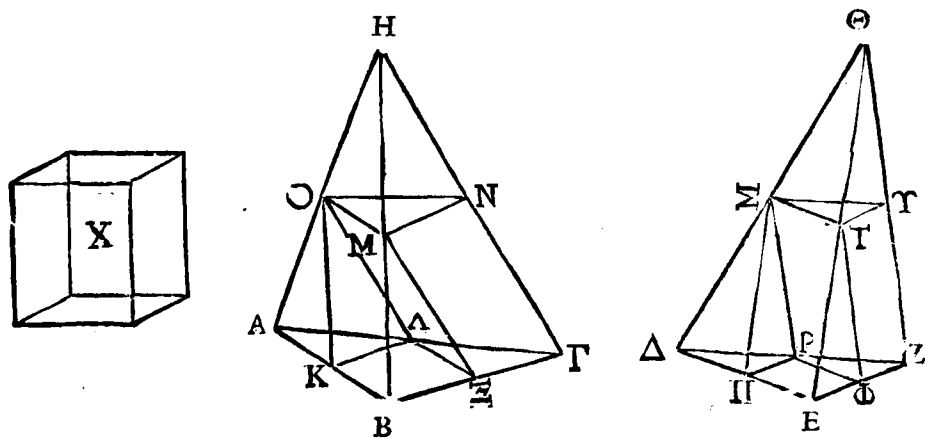
πρὸς μείζον. Εστω πρότερον πρὸς ἑλαττον τὸ  $X$  καὶ διηρήσθω ἡ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὲ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν<sup>2</sup>, καὶ τοῦτο αἰεὶ γιγνέσθω ἕως οὗ λεφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος, αἱ εἰσὶν ἐλάττωτες τῆς ὑπεροχῆς ἥς<sup>3</sup> ὑπερέχει ἡ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμὶς τοῦ  $X$  στερεοῦ. Λελήφθωσαν καὶ ἑστώσαν λόγου ἕνεκα<sup>4</sup> αἱ  $\Delta ΠΡΞ$ ,  $\Sigma ΓΥ\Theta$ . λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ  $X$  στερεοῦ. Διηρήσθω καὶ ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδι· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάση πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάση οὕτως τὰ ἐν τῇ  $AB\Gamma H$  πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδι πρίσματα. Ἀλλὰ καὶ<sup>5</sup> ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάση πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάση οὕτως ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς πρὸς τὸ  $X$  στερεὸν· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς πρὸς τὸ  $X$  στερεὸν οὕτως τὰ ἐν τῇ  $AB\Gamma H$  πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ

maius. Sit primum ad minus  $X$ ; et dividatur pyramis  $\Delta EZ\Theta$  in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia; ergo duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis. Et rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, et hoc semper fiat quoad sumantur quædam pyramides a pyramide  $\Delta EZ\Theta$ , quæ sint minores excessu, quo superat pyramis  $\Delta EZ\Theta$  solidum  $X$ . Sumantur, et sint verbi causa pyramides  $\Delta ΠΡΞ$ ,  $\Sigma ΓΥ\Theta$ ; reliqua igitur in pyramide  $\Delta EZ\Theta$  prismata majora sunt solido  $X$ . Dividatur et  $AB\Gamma H$  pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis  $\Delta EZ\Theta$ ; est igitur ut  $AB\Gamma$  basis ad basim  $\Delta EZ$  ita in pyramide  $AB\Gamma H$  prismata ad prismata in pyramide  $\Delta EZ\Theta$ . Sed et ut  $AB\Gamma$  basis ad basim  $\Delta EZ$  ita pyramis  $AB\Gamma H$  ad solidum  $X$ ; et ut igitur  $AB\Gamma H$  pyramis ad solidum  $X$  ita in  $AB\Gamma H$  pyramide prismata ad prismata in pyramide  $\Delta EZ\Theta$ ; per-

d'abord à un solide  $X$  plus grand; divisons la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (3. 12). Que les pyramides engendrées par cette division soient divisées de la même manière, et faisons toujours cela jusqu'à ce qu'il nous reste de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  certaines pyramides qui soient plus petites que l'excès de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  sur le solide  $X$ . Cherchons ces pyramides, et qu'elles soient par exemple  $\Delta ΠΡΞ$ ,  $\Sigma ΓΥ\Theta$ ; les prismes restants de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  seront plus grands que le solide  $X$ . Divisons semblablement la pyramide  $AB\Gamma H$  en autant de parties que la pyramide  $\Delta EZ\Theta$ ; la base  $AB\Gamma$  sera à la base  $\Delta EZ$  comme les prismes de la pyramide  $AB\Gamma H$  sont aux prismes de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  (4. 12). Mais la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme la pyramide  $AB\Gamma H$  est au solide  $X$ ; la pyramide  $AB\Gamma H$  est donc au solide  $X$  comme les prismes de la pyramide  $AB\Gamma H$  sont aux prismes de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$ ;

ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλάξ  
ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσ-  
ματα οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ  
πυραμίδι πρίσματα. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς  
τῶν ἐν αὐτῇ πρισμαμάτων· μείζον ἄρα καὶ τὸ Χ  
στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμαμάτων.  
Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ  
ἄρα ἐστὶν<sup>6</sup> ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ  
βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι

mutando igitur ut ΑΒΓΗ pyramis ad prismata quæ  
in ipsâ sunt, ita solidum Χ ad prismata in pyra-  
mide ΔΕΖΘ. Major autem pyramis ΑΒΓΗ pris-  
matibus quæ in ipsâ; majus igitur et solidum Χ  
prismatibus quæ in pyramide ΔΕΖΘ. Sed et  
minus, quod est impossibile; non igitur est  
ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ  
ad solidum aliquod minus pyramide ΔΕΖΘ.



τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ομοίως δὲ δει-  
χθήσεται ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν  
ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν  
τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. Λέγω δὲ ὅτι  
οὐκ ἐστὶν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ  
βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μείζον τι

Similiter utique ostendetur neque ut ΔΕΖ ba-  
sis ad basim ΑΒΓ ita pyramidem ΔΕΖΘ ad  
solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ. Dico  
etiam neque esse ut ΑΒΓ basis ad basim  
ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramidem ad solidum aliquod

donc, par permutation, la pyramide ΑΒΓΗ est aux prismes qu'elle renferme  
comme le solide Χ est aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ  
est plus grande que les prismes qu'elle renferme; le solide Χ est donc plus grand  
que les prismes que renferme la pyramide ΔΕΖΘ. Mais, au contraire, il est plus  
petit; ce qui est impossible; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme  
la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ.  
Nous démontrerons semblablement que la base ΔΕΖ n'est point à la base ΑΒΓ  
comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ. Je  
dis enfin que la base ΑΒΓ n'est point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est  
à un solide plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Car, si cela est possible, que ce

142 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστίν<sup>7</sup> ὥς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. Ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὥς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ἔπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστίν<sup>7</sup> ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλαττον· ἐστίν ἄρα ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

majus pyramide ΔΕΖΘ. Si enim possibile, sit ad majus X; invertendo igitur est ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita solidum X ad ΑΒΓΗ pyramidem. Ut autem solidum X ad ΑΒΓΗ pyramidem ita ΔΕΖΘ pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, ut proxime ostensum fuit; et ut igitur ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita pyramis ΔΕΖΘ ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, quod absurdum ostensum est; non igitur est ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide ΔΕΖΘ. Ostensum autem est neque ad minus; est igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Pyramides igitur, etc.

soit à un solide X plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par inversion, la base ΔΕΖ sera à la base ΑΒΓ comme le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ. Mais le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ainsi que cela est démontré; la base ΔΕΖ est donc à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ce qui a été démontré absurde; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Mais on a démontré que ce n'est point non plus à un solide X plus petit; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

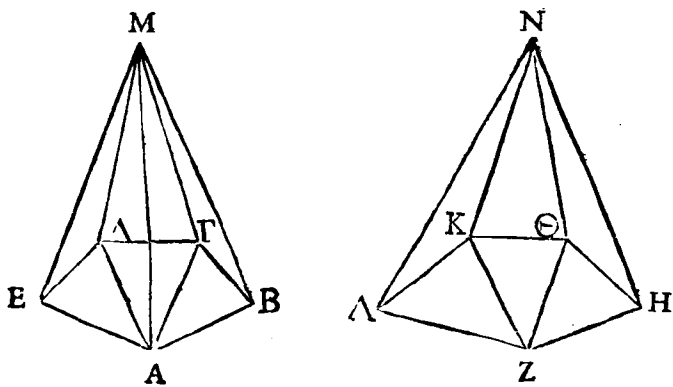
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστώσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεία· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάση πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

PROPOSITIO VI.

Pyramides in eadem altitudine existentes et polygona habentes bases inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ polygona, vertices autem Μ, Ν puncta; dico esse ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΖΗΘΚΛ ita ΑΒΓΔΕΜ pyramidem ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.



Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάση πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν οὕτως ἡ

Jungantur enim ipsæ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Quoniam igitur duæ pyramides sunt ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ, triangulares habentes bases, et altitudinem æqualem, inter se sunt ut bases; est igitur ut ΑΒΓ basis ad ΑΓΔ basim ita ΑΒΓΜ pyra-

PROPOSITION VI.

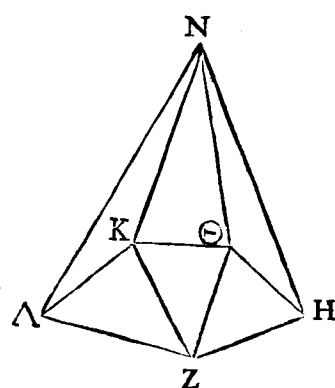
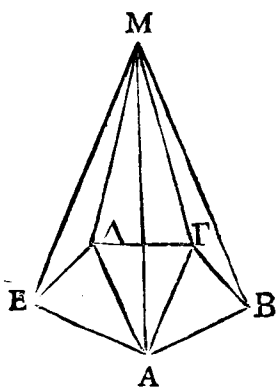
Les pyramides qui ont la même hauteur, et qui ont des polygones pour bases, sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et dont les sommets sont les points Μ, Ν aient la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΛ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΛΝ.

Car joignons ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Puisque l'on a deux pyramides ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ qui ont des bases triangulaires et la même hauteur, ces pyramides sont entr'elles comme leurs bases; la base ΑΒΓ est donc à la base ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΜ est à la

# 144 LE DOUZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· διῖσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.



Καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι<sup>4</sup> καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΑ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βάσιν οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΑΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα. Καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ τρίγωνά<sup>5</sup> ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον<sup>6</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν

mis ad ΑΓΔΜ pyramidem; et componendo ut ΑΒΓΔ basis ad ΑΓΔ basim ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem. Sed et ut ΑΓΔ basis ad ΑΔΕ basim ita pyramis ΑΓΔΜ ad ΑΔΕΜ pyramidem; ex æquo igitur ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. Et componendo rursus, ut ΑΒΓΔΕ

basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. Similiter utique ostendetur et ut ΖΗΘΚΑ basis ad basim ΖΚΑ ita et ΖΗΘΚΑΝ pyramidem ad ΖΚΑΝ pyramidem. Et quoniam duæ pyramides sunt ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ, triangulares habentes bases, et eandem altitudinem; est igitur ut basis ΑΔΕ ad ΖΚΑ basim ita ΑΔΕΜ pyramis ad ΖΚΑΝ pyramidem. Quoniam igitur

pyramide ΑΓΔΜ; donc, par addition, la base ΑΒΓΔ est à la base ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ. Mais la base ΑΓΔ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ; donc, par égalité, la base ΑΒΓΔ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ ( 22. 5 ). Donc, par addition, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ. Nous démontrerons semblablement que la base ΖΗΘΚΑ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΖΗΘΚΑΝ est à la pyramide ΖΚΑΝ. Et puisque l'on a deux pyramides ΑΔΕΜ, ΖΚΑΝ qui ont des bases triangulaires et une hauteur égale, la base ΑΔΕ sera à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΔΕΜ est à la pyramide



ΖΚΑΝ πυραμίδα. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ  
βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ  
πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· ὡς δὲ ἡ  
ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βάσιν οὕτως ἡ  
ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα·  
διῖσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ  
βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν  
ΖΚΑΝ πυραμίδα. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὡς ἡ ΖΚΑ  
βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑ βάσιν οὕτως ἦν καὶ  
ἡ ΖΚΑΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑΝ πυραμίδα·  
καὶ διῖσου πάλιν<sup>8</sup> ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς  
τὴν ΖΗΘΚΑ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς  
πρὸς τὴν ΖΗΘΚΑΝ πυραμίδα.

Πυραμίδες ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ut ΑΒΓΔΕ basis ad ΑΔΕ basim ita ΑΒΓΔΕΜ  
pyramis ad ΑΔΕΜ pyramidem; ut autem ΑΔΕ  
basis ad ΖΚΑ basim ita ΑΔΕΜ pyramis ad  
ΖΚΑΝ pyramidem; ex æquo igitur, ut basis  
ΑΒΓΔΕ ad ΖΚΑ basim ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis  
ad ΖΚΑΝ pyramidem. Sed quidem et ut ΖΚΑ  
basis ad ΖΗΘΚΑ basim ita erat et ΖΚΑΝ pyramis  
ad ΖΗΘΚΑΝ pyramidem; et ex æquo rursus  
igitur ut ΑΒΓΔΕ basis ad ΖΗΘΚΑ basim ita  
ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad ΖΗΘΚΑΝ pyramidem.

Pyramides igitur, etc.

ΖΚΑΝ. Et puisque la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΑΔΕ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ, et que la base ΑΔΕ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΔΕΜ est à la pyramide ΖΚΑΝ; donc, par égalité, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΚΑ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΚΑΝ ( 22. 5 ). Mais la base ΖΚΑ est à la base ΖΗΘΚΑ comme la pyramide ΖΚΑΝ est à la pyramide ΖΗΘΚΑΝ; donc; par égalité, la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΑ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΑΝ. Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἔχούσας.

Ἐστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ  $\Delta EZ$ . λέγω ὅτι τὸ  $AB\Gamma\Delta EZ$  πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἔχούσας βάσεις<sup>1</sup>.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $BA$ ,  $EG$ ,  $GA$ . Καὶ<sup>2</sup> ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $ABEA$ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ  $BA$ . ἴσον ἄρα ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ  $ABA$  τρίγωνον τῷ  $EAB$  τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν τὸ  $ABA$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $EAB$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ<sup>5</sup> τὸ  $EAB$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ  $EB\Gamma$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυ-

## PROPOSITIO VII.

Omne prisma triangularem habens basim dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum  $AB\Gamma$ , oppositum autem  $\Delta EZ$ ; dico  $AB\Gamma\Delta EZ$  prisma dividi in tres pyramides æquales inter se, triangulares habentes bases.

Jungantur enim ipsæ  $BA$ ,  $EG$ ,  $GA$ . Et quoniam parallelogrammum est  $ABEA$ , diameter autem ipsius est  $BA$ ; æquale igitur est  $ABA$  triangulum triangulo  $EAB$ ; et pyramis igitur, cujus basis quidem  $ABA$  triangulum, vertex autem punctum  $\Gamma$ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est  $EAB$  triangulum, vertex autem punctum  $\Gamma$ . Sed pyramis, cujus basis quidem est  $EAB$  triangulum, vertex autem punctum  $\Gamma$ , eadem est cum pyramide, cujus basis quidem est triangulum  $EB\Gamma$ , vertex autem punctum  $\Delta$ , iisdem enim planis continetur; et pyramis

## PROPOSITION VII.

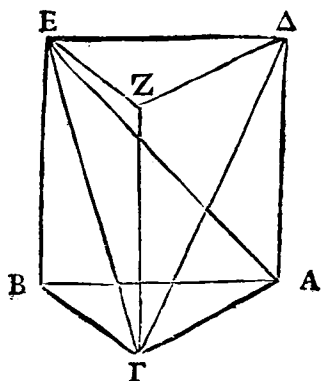
Tout prisme ayant une base triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Soit le prisme dont la base est le triangle  $AB\Gamma$  opposé au triangle  $\Delta EZ$ ; je dis que le prisme  $AB\Gamma\Delta EZ$  peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Car joignons  $BA$ ,  $EG$ ,  $GA$ . Puisque la figure  $ABEA$  est un parallélogramme, dont  $BA$  est la diagonale, le triangle  $ABA$  sera égal au triangle  $EAB$  (34. 1); la pyramide qui a pour base le triangle  $ABA$  et pour sommet le point  $\Gamma$  est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $EAB$  et pour sommet le point  $\Gamma$  (5. 12). Mais la pyramide qui a pour base le triangle  $EAB$ , et pour sommet le point  $\Gamma$ , est égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $EB\Gamma$ , et pour sommet le point  $\Delta$ , car elles sont comprises sous les mêmes plans; la pyramide qui a pour base le

ραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $EB\Gamma$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $Z\Gamma BE$ , διάμετρος δὲ ἐστὶν αὐτοῦ ἡ  $GE$ , ἴσον ἐστὶ τὸ  $EFZ$  τρίγωνον τῷ  $\Gamma BE$  τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $BEG$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $EFZ$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον. Ἡ δὲ

igitur, cujus basis quidem est triangulum  $AB\Delta$ , vertex autem punctum  $\Gamma$ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est  $EB\Gamma$  triangulum, vertex autem punctum  $\Delta$ . Rursus, quoniam parallelogrammum est  $Z\Gamma BE$ , diameter autem ipsius est ipsa  $GE$ , æquale est  $EFZ$  triangulum triangulo  $\Gamma BE$ ; et pyramis igitur, cujus basis quidem est  $BEG$  triangulum, vertex autem punctum  $\Delta$ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est  $EFZ$  triangulum, vertex autem punc-



πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $BEG$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $FEZ$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον· διήρηται ἄρα

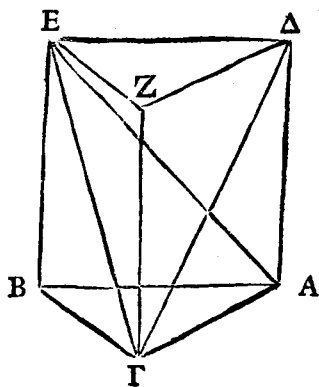
tum  $\Delta$ . Pyramis autem, cujus basis quidem est  $BEG$  triangulum, vertex autem punctum  $\Delta$ , æqualis ostensa est pyramidi, cujus basis quidem est  $AB\Delta$  triangulum, vertex autem punctum  $\Gamma$ ; et pyramis igitur, cujus basis quidem est  $FEZ$  triangulum, vertex autem punctum  $\Delta$ , æqualis est pyramidi, cujus basis quidem est  $AB\Delta$  triangulum, vertex autem punctum  $\Gamma$ ; dividitur igitur

triangle  $AB\Delta$ , et pour sommet le point  $\Gamma$ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $EB\Gamma$ , et pour sommet le point  $\Delta$ . De plus, puisque la figure  $Z\Gamma BE$  est un parallélogramme qui a pour diagonale la droite  $GE$ , le triangle  $EFZ$  est égal au triangle  $\Gamma BE$  (34. 1); la pyramide qui a pour base le triangle  $BEG$ , et pour sommet le point  $\Delta$ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $EFZ$ , et pour sommet le point  $\Delta$  (5. 11). Mais on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle  $BEG$ , et pour sommet le point  $\Delta$ , est égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $AB\Delta$ , et pour sommet le point  $\Gamma$ ; la pyramide qui a pour base le triangle  $FEZ$ , et pour sommet le point  $\Delta$ , est donc égale à la pyramide qui a pour base le triangle  $AB\Delta$ , et pour sommet le point  $\Gamma$ ; le prisme  $AB\Gamma\Delta EZ$  est donc

# 148 LE DOUZIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἔχούσας βάσεις<sup>9</sup>. Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν<sup>10</sup> τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν

ΑΒΓΔΕΖ prisma in tres pyramides æquales inter se, triangulares habentes bases. Et quoniam pyramis, cujus basis quidem est ΑΒΔ triangulum, vertex autem punctum Γ, eadem est cum pyramide, cujus basis quidem ΓΑΒ triangulum, vertex autem punctum Δ, iisdem namque planis



αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν<sup>11</sup> τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>12</sup>.

continentur; pyramis autem, cujus basis quidem triangulum ΑΒΔ, vertex autem punctum Γ, tertia pars ostensa prismatis, cujus basis ΑΒΓ triangulum, oppositum autem ΔΕΖ; et pyramis igitur, cujus basis triangulum ΑΒΓ, vertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis habentis basim eandem, triangulum ΑΒΓ, oppositum autem triangulum ΔΕΖ. Quod oportebat ostendere.

divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires. Mais la pyramide qui a pour base le triangle ΑΒΔ, et pour sommet le point Γ, est la même que la pyramide qui a pour base le triangle ΓΑΒ et pour sommet le point Δ, car ces pyramides sont comprises sous les mêmes plans, et l'on a démontré que la pyramide qui a pour base le triangle ΑΒΔ, et pour sommet le point Γ, est la troisième partie du prisme qui a pour base le triangle ΑΒΓ opposé au triangle ΔΕΖ; la pyramide qui a pour base le triangle ΑΒΓ, et pour sommet le point Δ, est donc la troisième partie d'un prisme qui a la même base, savoir, le triangle ΑΒΓ opposé au triangle ΔΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ<sup>2</sup> ὕψος ἴσον· ἐπειδὴ περ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχη ἢ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ<sup>3</sup> τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον<sup>4</sup>.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τρίγωνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Εστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ  $Η$ ,  $Θ$  σημεία· λέγω ὅτι ἡ  $ABΓΗ$  πυραμὶς πρὸς τὴν  $ΔΕΖΘ$  πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $EΖ$ .

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis eamdem basim habentis cum illâ et altitudinem æqualem; quoniam et si aliam quamdam figuram rectilineam obtineat basis prismatis, et opposita eamdem, dividitur in prismata triangulares habentia bases, et oppositas.

PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, et triangulares habentes bases, in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem sunt triangula  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , vertices autem  $Η$ ,  $Θ$  puncta; dico  $ABΓΗ$  pyramidem  $ΔΕΖΘ$  triplicatam rationem habere ejus quam  $BΓ$  ad  $EΖ$ .

COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle; car si l'une des bases du prisme est une autre figure rectiligne, la base opposée étant la même figure, ce prisme pourra être divisé en prismes qui auront des bases triangulaires, et dont les bases opposées seront des triangles.

PROPOSITION VIII.

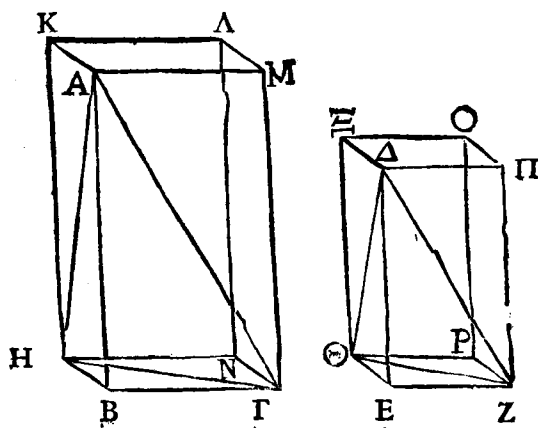
Les pyramides semblables, qui ont des bases triangulaires, sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues.

Que des pyramides semblables et semblablement placées ayent pour bases les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , et pour sommets les points  $Η$ ,  $Θ$ ; je dis que la pyramide  $ABΓΗ$  a avec la pyramide  $ΔΕΖΘ$  a une raison triplée de celle que  $BΓ$  a avec  $EΖ$ .

150 LE DOUZIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ  
στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιά  
ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι·  
ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>1</sup> ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ  
ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία<sup>2</sup> τῇ ὑπὸ  
ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἐστὶν  
ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν  
ΕΖ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν  
ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀναλογόν  
εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον  
τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ  
καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ ΒΚ  
τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα<sup>4</sup> τὰ

Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ solida pa-  
rallelepipedā. Et quoniam similis est ΑΒΓΗ  
pyramis pyramidi ΔΕΖΘ; æqualis igitur est  
quidem angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, angulus  
autem ΗΒΓ angulo ΘΕΖ, angulus vero ΑΒΗ  
angulo ΔΕΘ, et est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad  
ΕΖ, et ΒΗ ad ΕΘ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΔΕ ita  
ΒΓ ad ΕΖ, et circum æquales angulos latera  
proportionalia sunt; simile igitur est paral-  
lelogrammum ΒΜ parallelogrammo ΕΠ. Propter  
eadem utique et parallelogrammum quidem ΒΝ  
parallelogrammo ΕΡ simile est, parallelogram-  
mum autem ΒΚ ipsi ΕΞ parallelogrammo; tria



ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὁμοιά  
ἐστὶν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ  
τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶ<sup>4</sup>, τὰ

igitur parallelogramma ΜΒ, ΒΚ ΒΝ tribus ΕΠ,  
ΕΞ, ΕΡ similia sunt. Sed tria quidem ΜΒ, ΒΚ,  
ΒΝ tribus oppositis et æqualia et similia sunt,

Achevons les parallélépipèdes ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Puisque la pyramide ΑΒΓΗ est  
semblable à la pyramide ΔΕΖΘ, l'angle ΑΒΓ sera égal à l'angle ΔΕΖ (déf. 9. 11),  
l'angle ΗΒΓ égal à l'angle ΘΕΖ, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΘ, et ΑΒ sera à ΔΕ  
comme ΒΓ est à ΕΖ, et comme ΒΗ est à ΕΘ. Et puisque ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est  
à ΕΖ, et que les côtés placés autour d'angles égaux sont proportionnels, le pa-  
rallélogramme ΒΜ sera semblable au parallélogramme ΕΠ. Par la même raison,  
le parallélogramme ΒΝ sera semblable au parallélogramme ΕΡ, et le parallélo-  
gramme ΒΚ semblable au parallélogramme ΕΞ; les trois parallélogrammes ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ  
sont donc semblables aux trois parallélogrammes ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ. Mais les trois pa-  
rallélogrammes ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ sont égaux et semblables aux trois parallélogrammes

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 151

δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι<sup>5</sup>. τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται<sup>6</sup>. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ὁμολόγος πλευρὰ ὁ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμολόγον πλευρὰν τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδὴ περ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα<sup>8</sup> πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tria vero ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ tribus oppositis et æqualia et similia sunt; solida ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ igitur similibus planis numero æqualibus continentur; simile igitur est ΒΗΜΛ solidum solido ΕΘΠΟ. Similia autem solida parallelepipeda in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum; solidum igitur ΒΗΜΛ ad solidum ΕΘΠΟ triplicatam rationem habet ejus quam habet latus homologum ΒΓ ad homologum latus ΕΖ. Ut autem ΒΗΜΛ solidum ad solidum ΕΘΠΟ ita ΑΒΓΗ pyramis ad pyramidem ΔΕΖΘ, quia pyramis sexta pars est ipsius solidi; et prisma, dimidium existens solidi parallelepipedi, triplum est pyramidis; et pyramis igitur ΑΒΓΗ ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΓ habet ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

opposés, et les trois parallélogrammes ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés (24. 11); les parallélépipèdes ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ sont donc compris par des plans semblables et égaux en nombre; le parallélépipède ΒΗΜΛ est donc semblable au parallélépipède ΕΘΠΟ (déf. 9. 11). Mais les parallélépipèdes semblables sont entre eux en raison triplée de leurs côtés homologues (33. 11); le parallélépipède ΒΗΜΛ a donc, avec le parallélépipède ΕΘΠΟ, une raison triplée de celle que le côté homologue ΒΓ a avec le côté homologue ΕΖ. Mais le parallélépipède ΒΗΜΛ est au parallélépipède ΕΘΠΟ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ (15. 5), parce que la pyramide est la sixième partie du parallélépipède, et que le prisme triangulaire qui est la moitié du parallélépipède est le triple de la pyramide; la pyramide ΑΒΓΗ a donc avec la pyramide ΔΕΖΘ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΟΡΙΣΜΑ'.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διαιρεθεῖσων γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τρίγωνους βάσεις ἔχουσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθω, καὶ<sup>2</sup> ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἐτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἐτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν<sup>3</sup> οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἔχουσας· τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα<sup>4</sup>, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν<sup>5</sup>.

## COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est et similes pyramides, polygonas habentes bases, inter se esse in triplicatâ ratione homologorum laterum. Ipsis enim divisus in pyramides triangulares bases habentes, quia et similia polygonâ basium in similia triangula dividuntur, et æqualia numero et homologa totis; erit ut una pyramis in alterâ pyramides triangularum habens basim ad unam pyramidem in alterâ triangularem habentem basim ita et omnes pyramides in alterâ pyramide triangulares habentes bases ad pyramides in alterâ pyramidi triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis polygonam basim habens ad pyramidem quæ polygonam basim habet; sed habens basim triangularum pyramis ad pyramidem triangularem basim habentem in triplicatâ ratione est homologorum laterum; et igitur pyramis polygonam habens basim ad pyramidem similes bases habentem triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad homologum latus.

## COROLLAIRE.

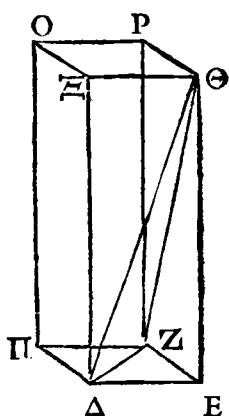
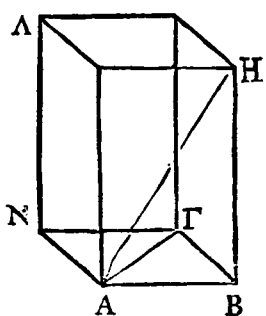
D'après cela, il est évident que les pyramides semblables qui ont des polygones pour bases sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues. Parce que ces pyramides peuvent être divisées en pyramides triangulaires, et que les polygones semblables qui sont les bases de ces pyramides peuvent être divisés en un même nombre de triangles semblables entr'eux et proportionnels à ces polygones (20.6); une des pyramides triangulaires contenue dans la première pyramide sera à une autre des pyramides triangulaires contenue dans la seconde pyramide comme la somme de toutes les pyramides triangulaires contenues dans la première pyramide est à la somme de toutes les pyramides triangulaires contenues dans l'autre pyramide, c'est-à-dire comme une des pyramides qui a pour base un polygone est à l'autre pyramide qui a aussi pour base un polygone. Mais les pyramides triangulaires semblables sont entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues; les pyramides semblables qui ont pour bases des polygones sont donc entr'elles en raison triplée de leurs côtés homologues.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκείναι.

Ἐστώσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , κορυφὰς δὲ τὰ  $H$ ,  $\Theta$  σημεία· λέγω ὅτι τῶν  $AB\Gamma H$ ,  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάση πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάση οὕτως τὸ τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς  $AB\Gamma H$  πυραμίδος ὕψος.



Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ  $BHMA$ ,  $E\Theta PO$  στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ

Compleantur enim  $BHMA$ ,  $E\Theta PO$  solida parallelepida. Et quoniam æqualis est  $AB\Gamma H$  pyramis

PROPOSITION IX.

Les bases des pyramides égales qui ont des bases triangulaires sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces pyramides; et les pyramides triangulaires qui ont des bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs, sont égales entr'elles.

Soient deux pyramides égales qui aient les bases triangulaires  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , et dont les sommets soient les points  $H$ ,  $\Theta$ ; je dis que les bases des pyramides  $AB\Gamma H$ ,  $\Delta EZ\Theta$  sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces pyramides, c'est-à-dire que la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme la hauteur de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  est à la hauteur de la pyramide  $AB\Gamma H$ .

Car achevons les parallélépipèdes  $BHMA$ ,  $E\Theta PO$ . Puisque la pyramide  $AB\Gamma H$  est



ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΑ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΑ στερεόν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν<sup>2</sup> οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ<sup>3</sup> πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεποιθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ

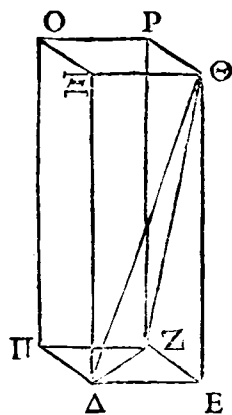
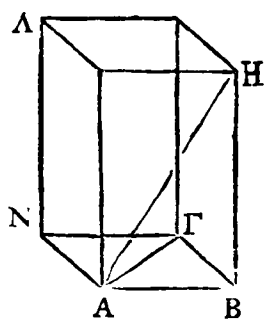
pyramidi ΔΕΖΘ, et est pyramidis quidem ΑΒΓΗ sextupulum ΒΗΜΑ solidum, pyramidis vero ΔΕΖΘ sextupulum solidum ΕΘΠΟ; æquale igitur ΒΗΜΑ solidum solido ΕΘΠΟ. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus; est igitur ut ΒΜ basis ad ΕΠ basim ita ΕΘΠΟ solidi altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. Sed ut ΒΜ basis ad ΕΠ basim ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita solidi ΕΘΠΟ altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. Sed solidi quidem ΕΘΠΟ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΔΕΖΘ; solidi vero ΒΗΜΑ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΑΒΓΗ; est igitur ut ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim ita ΔΕΖΘ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ; pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ igitur bases sunt reciprocæ altitudinibus.

At vero pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ reciprocæ sint bases altitudinibus, et sit ut ΑΒΓ basis ad

égale à la pyramide ΔΕΖΘ, que le parallélépipède ΒΗΜΑ est le sextuple de la pyramide ΑΒΓΗ, et que le parallélépipède ΕΘΠΟ est aussi le sextuple de la pyramide ΔΕΖΘ, le parallélépipède ΒΗΜΑ sera égal au parallélépipède ΕΘΠΟ (15. 5). Mais les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs (34. 11); la base ΒΜ est donc à la base ΕΠ comme la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est à la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ. Mais la base ΒΜ est à la base ΕΠ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΔΕΖ; le triangle ΑΒΓ est donc au triangle ΔΕΖ comme la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est à la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ. Mais la hauteur du parallélépipède ΕΘΠΟ est la même que la hauteur de la pyramide ΔΕΖΘ, et la hauteur du parallélépipède ΒΗΜΑ est la même que la hauteur de la pyramide ΑΒΓΗ; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la hauteur de la pyramide ΔΕΖΘ est à la hauteur de la pyramide ΑΒΓΗ; les bases des pyramides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Si les bases des pyramides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ sont réciproquement proportionnelles

ἔστω ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάσις πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως τὸ τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς  $AB\Gamma H$  πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ  $AB\Gamma H$  πυραμὶς τῇ  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδι.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάσις πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως τὸ τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς  $AB\Gamma H$  πυραμίδος ὕψος· ἀλλ' ὡς ἡ  $AB\Gamma$  βάσις πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  βάσιν οὕτως τὸ  $BM$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $EP$  παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ  $BM$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $EP$  παραλληλόγραμμον<sup>4</sup> οὕτως τὸ τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς  $AB\Gamma H$  πυραμίδος ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν<sup>5</sup> τῆς  $\Delta EZ\Theta$  πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ  $E\Theta\Pi O$  παραλληλεπίπედου ὕψει, τὸ δὲ τῆς  $AB\Gamma H$  πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ  $BHMA$  παραλληλεπίπედου ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $BM$  βάσις<sup>6</sup> πρὸς τὴν  $EP$  βάσιν οὕτως

Iisdem enim constructis, quoniam est ut  $AB\Gamma$  basis ad  $\Delta EZ$  basim ita  $\Delta EZ\Theta$  pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis  $AB\Gamma H$ ; sed ut  $AB\Gamma$  basis ad  $\Delta EZ$  basim ita  $BM$  parallelogrammum ad  $EP$  parallelogrammum; et ut igitur  $BM$  parallelogrammum ad  $EP$  parallelogrammum ita altitudo pyramidis  $\Delta EZ\Theta$  ad altitudinem pyramidis  $AB\Gamma H$ . Sed pyramidis quidem  $\Delta EZ\Theta$  altitudo eadem est cum altitudine parallelepipedi  $E\Theta\Pi O$ ; pyramidis vero  $AB\Gamma H$  altitudo eadem est cum altitudine parallelepipedi  $BHMA$ ; est igitur ut  $BM$  basis ad  $EP$  basim ita  $E\Theta\Pi O$  solidi parallelepipedi

aux hauteurs, c'est-à-dire, si la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme la hauteur de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  est à la hauteur de la pyramide  $AB\Gamma H$ ; je dis que la pyramide  $AB\Gamma H$  est égale à la pyramide  $\Delta EZ\Theta$ .

Faisons la même construction. Puisque la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme la hauteur de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  est à la hauteur de la pyramide  $AB\Gamma H$ , et que la base  $AB\Gamma$  est à la base  $\Delta EZ$  comme le parallélogramme  $BM$  est au parallélogramme  $EP$ , le parallélogramme  $BM$  sera au parallélogramme  $EP$  comme la hauteur de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  est à la hauteur de la pyramide  $AB\Gamma H$ . Mais la hauteur de la pyramide  $\Delta EZ\Theta$  est la même que la hauteur du parallélépipède  $E\Theta\Pi O$ , et la hauteur de la pyramide  $AB\Gamma H$  est la même que la hauteur du parallélépipède  $BHMA$ ; la base  $BM$  est donc à la base  $EP$  comme la hauteur du parallélépipède  $E\Theta\Pi O$  est à la hauteur du

156 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος 7. Ὡν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἔστιν ἐκεῖνα ἴσον ἄρα ἔστι<sup>8</sup> τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμῖς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ<sup>9</sup> παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμῖς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμῖς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἰζήσιν.

altitudo ad altitudinem parallelepipedum ΒΗΜΛ. Quorum autem solidorum parallelepipedorum reciprocae sunt bases altitudinibus, ea sunt æqualia; æquale igitur est solidum parallelepipedum ΒΗΜΛ solido parallelepipedo ΕΘΠΟ. Et est ipsius quidem ΒΗΜΛ sexta pars pyramidis ΑΒΓΗ, solidi vero parallelepipedum ΕΘΠΟ sexta pars pyramidis ΔΕΖΘ; æqualis igitur ΑΒΓΗ pyramidis pyramidi ΔΕΖΘ.

Ergo æqualium, etc.

parallélépipède ΒΗΜΛ. Mais les parallélépipèdes qui ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs sont égaux entr'eux ( 34. 11 ); le parallélépipède ΒΗΜΛ est donc égal au parallélépipède ΕΘΠΟ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ est la sixième partie du parallélépipède ΒΗΜΛ, et la pyramide ΔΕΖΘ est aussi la sixième partie du parallélépipède ΕΘΠΟ; la pyramide ΑΒΓΗ est donc égale à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

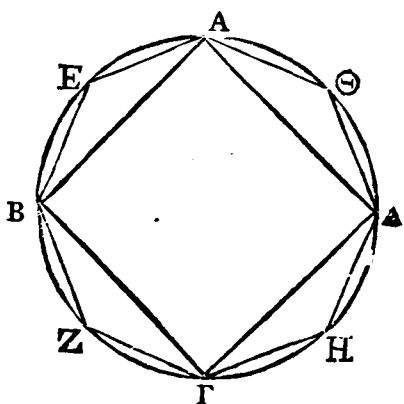
PROPOSITIO X.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρω βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίον ἐστίν.

Omnis conus cylindri tertia pars est eamdem basim habentis et altitudinem æqualem.

Habeat enim conus cum cylindro et basim eamdem circulum ΑΒΓΔ, et altitudinem æqualem; dico conum esse tertiam cylindri partem, hoc est cylindrum coni triplum esse.



Εἰ μὴ γάρ ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίον, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου ἢ τοι μείζων ἢ τριπλασίον, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίον. Ἐστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὲ ΑΒΓΔ τετράγωνον

Si enim non sit cylindrus coni triplus, erit cylindrus coni major vel minor quam triplus. Sit primum major quam triplus; et describatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; quadra-

PROPOSITION X.

Un cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base, et une hauteur égale.

Qu'un cône ait la même base qu'un cylindre, savoir, le cercle ΑΒΓΔ, et une hauteur égale; je dis que ce cône est la troisième partie de ce cylindre, c'est-à-dire qu'un cylindre est le triple d'un cône.

Car si le cylindre n'est pas le triple du cône, le cylindre sera plus grand que le triple ou plus petit; qu'il soit d'abord plus grand que le triple. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le carré ΑΒΓΔ; le carré ΑΒΓΔ sera plus grand que la moitié du cercle ΑΒΓΔ. Sur le carré ΑΒΓΔ élevons un prisme qui ait la même hauteur que

158 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

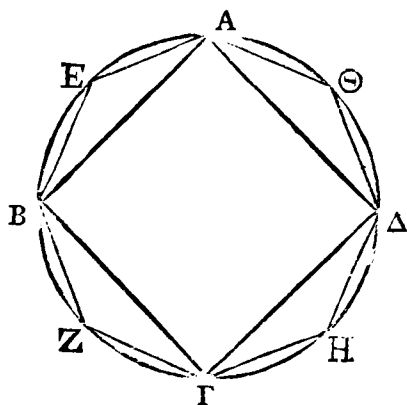
μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὲ ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδὴ περὶ καὶ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράφωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου, καὶ ἐστὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοῦψή· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλας<sup>3</sup> ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου<sup>4</sup> ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἐστὶν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ

tum ΑΒΓΔ utique majus est quam dimidium ΑΒΓΔ circuli. Et erigatur a quadrato ΑΒΓΔ prisma æquealtum atque cylindrus, erectum utique prisma majus est quam dimidium cylindri; quoniam si circa circulum ΑΒΓΔ quadratum describatur; inscriptum in circulo ΑΒΓΔ quadratum dimidium est circumscripti; et sunt ab iis erecta solida parallelepipeda prismata æquealta; sub eâdem autem altitudine existentia solida parallelepipeda inter se sunt ut bases; et sub ΑΒΓΔ igitur quadrato erectum prisma dimidium est erecti prismatis a quadrato descripto circa circulum ΑΒΓΔ, et est cylindrus minor prismatico erecto a descripto quadrato circa ΑΒΓΔ circulum; ergo prisma erectum a quadrato ΑΒΓΔ æquealtum atque cylindrus majus est dimidio cylindri. Secentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, et jungantur ipsæ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; et unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus est di-

le cylindre; ce prisme sera plus grand que la moitié du cylindre; parce que si l'on circonscrit un quarré au cercle ΑΒΓΔ, le quarré inscrit sera la moitié du quarré circonscrit; mais les parallélépipèdes, c'est-à-dire les prismes élevés sur ces bases ont la même hauteur; ces prismes sont donc entr'eux comme leurs bases; le prisme élevé sur le quarré ΑΒΓΔ est donc la moitié du prisme élevé sur le quarré circonscrit au cercle ΑΒΓΔ; mais le cylindre est plus petit que le prisme élevé sur le quarré circonscrit au cercle ΑΒΓΔ; le prisme élevé sur le quarré ΑΒΓΔ, qui a une hauteur égale à celle du cylindre, est donc plus grand que la moitié du cylindre. Divisons les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ en deux parties égales aux points Ε, Ζ, Η, Θ, et joignons ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ sera plus grand que le demi-segment du cercle ΑΒΓΔ

τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. Ἀνιστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρίσματος μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου ἐπειδὴ περ ἂν διὰ τῶν Ε, Ζ, Θ σημείων πα-

midio segmenti circuli ΑΒΓΔ, in quo est, ut superius ostendimus. Erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ prismata æquealta atque cylindrus; et unumquodque igitur erectorum prismaticum majus est quam dimidia pars segmenti cylindri in quo est, quoniam si per puncta Ε, Ζ, Η, Θ parallelas ipsis ΑΒ, ΒΓ,



ραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ<sup>5</sup> τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καὶ ἐστὶ τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ

ΓΔ, ΔΑ ducamus et compleamus ad ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ parallelogramma, et ab ipsis erigamus solida parallelepipeda æquealta atque cylindrus, uniuscujusque erectorum dimidia sunt prismata in ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ triangulis; et sunt cylindri segmenta minora erectis solidis parallelepipedis; quare et in triangulis ΑΕΒ,

où il est placé, comme nous l'avons démontré plus haut (2. 12). Sur chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ élevons des prismes qui ayent une hauteur égale à celle du cylindre; chacun de ces prismes sera plus grand que la moitié du segment du cylindre dans lequel il est placé, parce que si par les points Ε, Ζ, Η, Θ on mène des parallèles aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, et si sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ on achève les parallélogrammes, et sur ces parallélogrammes on élève des parallélépipèdes qui ayent la même hauteur que le cylindre, les prismes qui auront pour bases les triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ seront les moitiés de chacun de ces parallélépipèdes. Mais les segments du cylindre sont plus petits que ces

τὰ ἐπὶ τῶν  $AEB$ ,  $BZΓ$ ,  $ΓΗΔ$ ,  $ΔΘΑ$  τριγώνων  
 πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ'  
 ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες  
 δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφέρειας δίχα, καὶ  
 ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου  
 τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ,  
 καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες, καταλείβομεν τινα  
 ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάτ-  
 τονα τῆς ὑπεροχῆς, ἥ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος  
 τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Λελείφθω, καὶ ἔστω  
 τὰ  $AE$ ,  $EB$ ,  $BZ$ ,  $ZΓ$ ,  $ΓΗ$ ,  $ΗΔ$ ,  $ΔΘ$ ,  $ΘΑ$ .  
 λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ  
 $AEBZΓΗΔΘ$  πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ  
 κυλίνδρῳ, μείζον ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου.  
 Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  
 $AEBZΓΗΔΘ$  πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ  
 κυλίνδρῳ, τριπλάσιον ἐστὶ τῆς πυραμίδος,  
 ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $AEBZΓΗΔΘ$  πολύγωνον,  
 κερυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα,  
 ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $AEBZΓΗΔΘ$  πολύγωνον, κο-  
 ρυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου,  
 τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν  $ABΓΔ$  κύκλον. Ἀλλὰ

$BZΓ$ ,  $ΓΗΔ$ ,  $ΔΘΑ$  prismata majora sunt quam  
 dimidium segmentorum cylindri in quibus sunt;  
 secantes utique reliquas circumferentias bifariam,  
 et jungentes rectas, et erigentes ab unoquoque  
 triangulorum prismata æquealta atque cylindrus,  
 et hoc semper facientes, relinquemus quædam  
 segmenta cylindri quæ erunt minora excessu, quo  
 superat cylindrus triplum coni. Reliquantur, et  
 sint  $AB$ ,  $EB$ ,  $BZ$ ,  $ZΓ$ ,  $ΓΗ$ ,  $ΗΔ$ ,  $ΔΘ$ ,  $ΘΑ$ ;  
 reliquum igitur prisma, cujus basis quidem  
 polygonum  $AEBZΓΗΔΘ$ , altitudo autem eadem  
 quæ cylindri, majus est quam triplum coni.  
 Sed prisma, cujus basis quidem est  $AEBZΓΗΔΘ$   
 polygonum, altitudo autem eadem quæ cylindri,  
 triplum est pyramidis, cujus basis quidem poly-  
 gonum  $AEBZΓΗΔΘ$ , vertex autem idem qui coni;  
 et pyramis igitur, cujus basis quidem polygonum  
 $AEBZΓΗΔΘ$ , vertex autem idem coni, major  
 est cōno basim habente  $ABΓΔ$  circulum. Sed

parallélépipèdes; les prismes qui ont pour bases les triangles  $AEB$ ,  $BZΓ$ ,  $ΓΗΔ$ ,  $ΔΘΑ$  sont donc plus grands que les moitiés des segments du cylindre dans lequel ils sont placés. Partageons les arcs restants en deux parties égales, menons les cordes, sur chacun des triangles élevons des prismes qui ayent la même hauteur que le cylindre, et faisons toujours la même chose, il restera certains segments du cylindre qui seront plus petits que l'excès du cylindre sur le triple du cône (1. 10). Qu'on ait ces segments restants; que ce soient les segments  $AE$ ,  $EB$ ,  $BZ$ ,  $ZΓ$ ,  $ΓΗ$ ,  $ΗΔ$ ,  $ΔΘ$ ,  $ΘΑ$ ; le prisme restant, dont la base est le polygone  $AEBZΓΗΔΘ$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, sera plus grand que le triple du cône. Mais le prisme dont la base est le polygone  $AEBZΓΗΔΘ$ , et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est triple de la pyramide dont la base est le polygone  $AEBZΓΗΔΘ$ , et dont le sommet est le même que celui du cône (7. 12); la pyramide dont la base est le polygone  $AEBZΓΗΔΘ$ , et dont le sommet est le même que celui du cône est plus grande que le cône dont la base est le cercle



καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπὸ αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἄδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος<sup>9</sup>. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ ἐστὶν ἢ τριπλάσιος<sup>10</sup> ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Εγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνιστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ περὶ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετραγώνον<sup>11</sup> περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου τετραγώνου<sup>12</sup>· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦς τῷ κώνῳ, αὐτὰ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθέν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἀλλήλα

et minor, comprehenditur enim ab ipso; quod est impossibile; non igitur est cylindrus major quam triplus coni. Dico et neque minorem esse cylindrum quam triplum coni. Si enim possibile, sit minor cylindrus quam triplus coni; invertendo igitur conus major est quam tertia pars cylindri. Describatur igitur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; quadratum igitur ΑΒΓΔ majus est quam dimidium circuli ΑΒΓΔ. Et erigatur a quadrato ΑΒΓΔ pyramis, verticem eundem habens quem conus; erecta igitur pyramis major est quam dimidia pars coni; quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describamus, erit quadratum ΑΒΓΔ dimidium descripti quadrati circa circulum; et si a quadratis solida parallelepipeda erigamus æquealta atque conus, quæ et appellantur prismata; erit erectum a quadrato ΑΒΓΔ dimidium erecti a quadrato descripto circa circulum, inter se enim sunt ut bases; quare et tertiæ

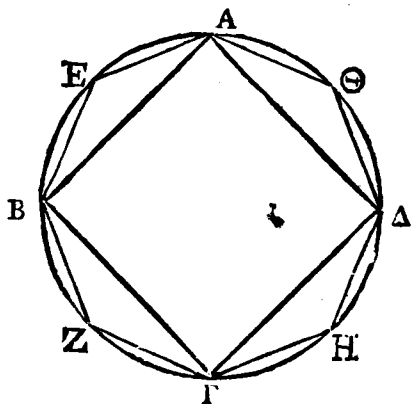
ΑΒΓΔ. Mais la pyramide est plus petite, car le cône la contient, ce qui est impossible; le cylindre n'est donc pas plus grand que le triple du cône. Je dis enfin que le cylindre n'est pas plus petit que le triple du cône. Car que le cylindre soit plus petit que le triple du cône, si cela est possible; par inversion, le cône sera plus grand que la troisième partie du cylindre. Dans le cercle ΑΒΓΔ décrivons le quarré ΑΒΓΔ; le quarré ΑΒΓΔ sera plus grand que la moitié du cercle ΑΒΓΔ. Sur le quarré ΑΒΓΔ élevons une pyramide qui ait le même sommet que le cône; cette pyramide sera plus grande que la moitié du cône; parce que si nous circonscrivons un quarré au cercle, le quarré ΑΒΓΔ sera la moitié du quarré circonscrit à ce cercle, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, et si sur ces quarrés nous élevons des parallélépipèdes de même hauteur que le cône, c'est-à-dire des prismes, celui qui sera élevé sur le quarré ΑΒΓΔ sera la moitié du prisme élevé sur le quarré circonscrit, car ces prismes sont entr'eux comme leurs bases ( 32. 11 );



162 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥστε καὶ τὰ τρίτα·  
καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον,  
ἡμισὺ ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης  
ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετρα-  
γώνου. Καὶ ἐστὶ μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀναστα-  
θείσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ  
κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς,  
ἥς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κρυφὴ δὲ ἡ  
αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ<sup>13</sup> ἡμισυ τοῦ

partes; et pyramis igitur cujus basis quadratum  
ΑΒΓΔ, dimidia est pyramidis erectæ a qua-  
drato circa circulum descripto. Et est py-  
ramis erecta a quadrato descripto circa circulum  
major cono; comprehendit enim ipsum; ergo  
pyramis, cujus basis ΑΒΓΔ quadratum, vertex  
autem idem qui conī, major est quam conī



κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περι-  
φέρειαι δίχῃ κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα,  
καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ,  
ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ,  
ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ  
μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ  
κύκλου. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἑκάστου τῶν  
ΑΗΔ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες,

dimidium. Secentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ,  
ΓΔ, ΔΑ, bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, et  
jungantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ,  
ΘΑ; et unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ,  
ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus est quam dimidia pars  
segmenti circuli ΑΒΓΔ in quo est. Et erigan-  
tur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ,  
ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides, verticem eundem ha-

il en sera de même pour leurs troisièmes parties; la pyramide qui a pour base le quarré ΑΒΓΔ est donc la moitié de la pyramide élevée sur le quarré circonscrit au cercle. Mais la pyramide élevée sur le quarré circonscrit au cercle est plus grande que le cône, car elle le contient; la pyramide dont la base est le quarré ΑΒΓΔ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est donc plus grande que la moitié du cône. Divisons les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ en deux parties égales aux points Ε, Ζ, Η, Θ, et joignons les droites ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ sera plus grand que la moitié du segment du cercle ΑΒΓΔ dans lequel il est placé. Sur chacun des triangles ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ élevons des pyramides qui ayent le même sommet que le cône; cha-

τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου<sup>14</sup>. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο αἰὲ ποιοῦντες καταλείβομεν τινὰ τμήματα<sup>15</sup> τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχής, ἣ ὑπερέχει ὁ κώνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Δελεῖθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος<sup>16</sup> τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. Ἀλλὰ

bentes quem conus; et unaquæque igitur pyramidum sic erectarum major est quam dimidium segmenti conici in quo est. Secantes itaque reliquas circumferentias bifariam, et jungentes rectas, et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramidem eundem verticem habentem quem conus, et hoc semper facientes, relinquemus quasdam portiones conici quæ minores erunt excessu, quo superat conus tertiam partem cylindri. Relinquantur, et sint quæ in ipsis ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, vertex autem idem qui conici, major est quam tertia pars cylindri. Sed pyramis, cujus basis quidem est polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ, altitudo autem eadem quæ conici; tertia pars est prismatis, cujus basis quidem est ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum, altitudo eadem quæ cylindri; prisma igitur, cujus basis quidem est ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est cylindro, cujus basis est circulus ΑΒΓΔ.

cune de ces pyramides sera plus grande que la moitié du segment du cône dans lequel elle est placée. Divisons les arcs restants en deux parties égales, et menons leurs cordes; sur chacun de ces triangles élevons une pyramide qui ait le même sommet que le cône, et faisons toujours la même chose, il restera enfin certains segments de cône qui seront plus petits que l'excès du cône sur la troisième partie du cylindre (1. 10). Qu'on ait ces segments restants du cône, et qu'ils soient ceux qui ont pour bases les segments ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; la pyramide restante qui a pour base le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et qui a le même sommet que le cône, sera plus grande que la troisième partie du cylindre. Mais la pyramide dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est la troisième partie du prisme dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre (7. 12); le prisme dont la base est le polygone ΑΕΒΖΓΗΔΘ, et dont la hauteur est la même que celle du cylindre, est donc plus grand que le cylindre dont la base est le cercle

# 164 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἑλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπὸ αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν<sup>17</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κώνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κώνος, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κώνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Εστώσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κώνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν<sup>1</sup> οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διαμέτροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς τὸν ΕΝ κώνον<sup>2</sup>.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται<sup>3</sup> ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος ἥτοι<sup>4</sup> πρὸς

Sed et minus; comprehenditur enim ab ipso, quod est impossibile; non igitur cylindrus quam coni triplus minor est. Ostensum autem est neque maiorem esse quam triplum; triplus est igitur cylindrus coni; quare conus tertia pars est cylindri.

Omnis igitur conns, etc.

## PROPOSITIO XI.

In eadem altitudine existentes coni et cylindri inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni et cylindri, quorum bases circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, axes autem ΚΛ, ΜΝ, diametri vero basium ΑΓ, ΕΗ; dico esse ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conum ΑΛ ad ΕΝ conum.

Si enim non, erit ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ vel ad solidum

ΔΒΓΔ. Mais le prisme est plus petit que le cylindre, car le cylindre contient ce prisme; ce qui est impossible; le cylindre n'est donc pas plus petit que le triple du cône. Mais on a démontré qu'il n'est pas plus grand que le triple; le cylindre est donc le triple du cône; le cône est donc la troisième partie du cylindre. Donc, etc.

## PROPOSITION XI.

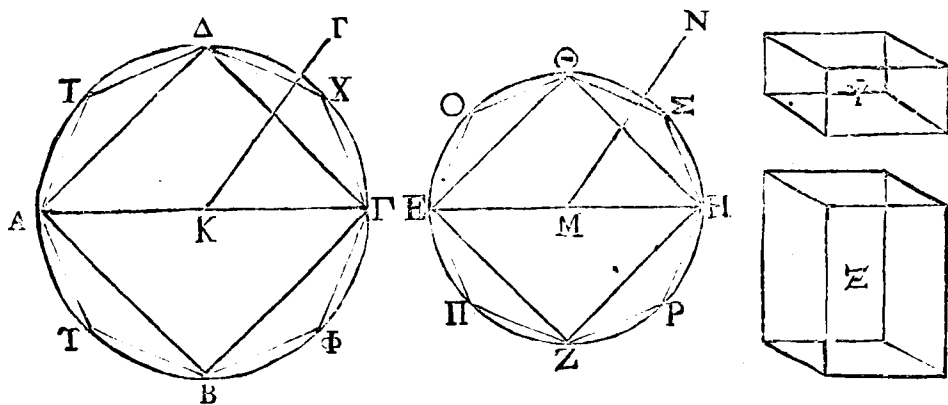
Les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les cônes et les cylindres de même hauteur, dont les bases sont les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, dont les axes sont les droites ΚΛ, ΜΝ, et qui ont pour diamètres de leurs bases les droites ΑΓ, ΕΗ; je dis que le cercle ΑΒΓΔ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est au cône ΕΝ.

Car si cela n'est point, le cercle ΑΒΓΔ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ

ἐλαττόν τι τοῦ EN κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον.  
Εστω πρότερον πρὸς ἐλαττον τὸ Ξ, καὶ ὅ ἐλατ-  
τόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ EN κώνου ἐκείνῳ ἴσον  
ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ EN κώνος ἄρα ἴσον ἐστὶ  
τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. Εγγεγράφθω εἰς τὸν EZHΘ  
κύκλον τετράγωνον τὸ EZHΘ· τὸ ἄρα τετραγ-  
ων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνασ-  
τάτω ἀπὸ τοῦ EZHΘ τετραγώνου πυραμὶς  
ἰσοῦψής τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθείσα πυραμὶς

aliquod minus cono EN vel ad majus. Sit primum  
ad minus Ξ, et quo minus est solidum Ξ cono  
EN huic æquale sit Ψ solidum; conus igitur EN  
est æqualis ipsis Ξ, Ψ solidis. Describatur in  
EZHΘ circulo quadratum EZHΘ; quadratum igi-  
tur majus est quam dimidium circuli. Erigatur  
a quadrato EZHΘ pyramis æquealta atque conus;  
erecta igitur pyramis major est quam dimidium



μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδὴ περ  
ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον,  
καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψή  
τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισυ ἐστὶ  
τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἑλλήλας γὰρ εἰσιν ὡς  
αἱ βάσεις. Ελάττων δὲ ὁ κώνος τῆς περιγρα-  
φείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βᾶσις  
τὸ EZHΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ

coni; nam describamus circa circulum quadra-  
tum, et ab ipso erigamus pyramidem æquealtam  
atque conus; inscripta pyramis dimidia est pyra-  
midis circumscriptæ, inter se enim sunt ut bases.  
Minor autem conus circumscriptâ pyramide;  
ergo pyramis, cujus basis quadratum EZHΘ,  
vertex autem idem qui coni, major est quam

sera à un solide plus petit ou plus grand que le cône EN. Que ce soit d'abord à  
un solide Ξ plus petit, et que l'excès du cône EN sur le solide Ξ soit égal au so-  
lide Ψ, le cône EN sera égal aux solides Ξ, Ψ. Dans le cercle EZHΘ décrivons le  
quarré EZHΘ; ce quarré sera plus grand que la moitié de ce cercle. Sur le quarré  
EZHΘ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône; cette pyra-  
mide sera plus grande que la moitié du cône; car si nous décrivons un quarré  
autour du cercle, et si sur ce quarré nous élevons une pyramide qui ait la  
même hauteur que le cône, la pyramide inscrite sera la moitié de la pyramide  
circonscrite, parce que ces pyramides sont entre elles comme leurs bases (6. 12).  
Mais le cône est plus petit que la pyramide circonscrite; la pyramide dont la base  
est le quarré EZHΘ, et dont le sommet est le même que celui du cône, est donc

166 LE DOUZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

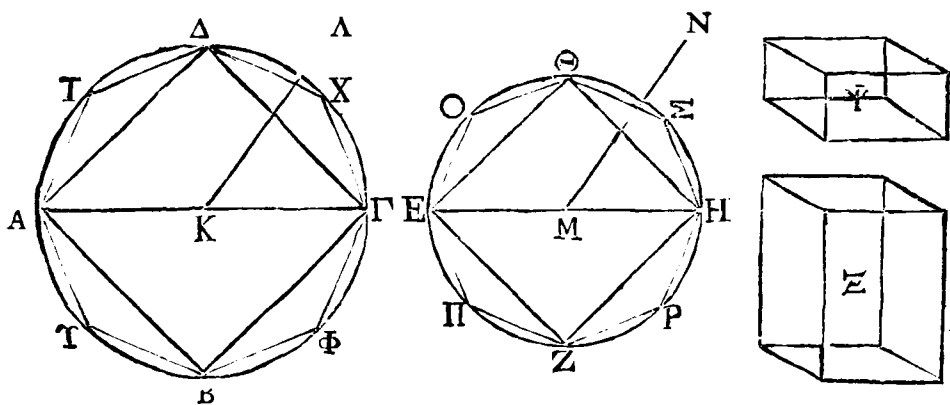
κόνω, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου<sup>5</sup>. Τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀναστὰς ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμῖς ἰσοῦψῆς τῷ κόνω· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθειῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ<sup>6</sup> τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες<sup>7</sup> δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφέρειας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ κόνω, καὶ ἀεὶ τοῦτο<sup>8</sup> ποιοῦντες, καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται<sup>9</sup> ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμῖς, ἥς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κόνω, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Εγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον

dimidium coni. Secentur circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘΕ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ; et jungantur ipsæ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; unumquodque igitur triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ majus est quam dimidium segmenti circuli in quo est. Er ga'ur ab unoquoque triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ pyramidis æquealta atque conus; et unaquæque igitur erectarum pyramidum major est quam dimidium segmenti coni in quo est. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam; jungentes rectas et erigentes ab unoquoque triangulorum pyramides æquealtas atque conus, et hoc semper facientes, relinquemus aliqua segmenta coni quæ erunt minora solido Ψ. Relinquantur, et sint quæ in ipsis ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido Ξ. Describatur in cir-

plus grande que la moitié du cône. Coupons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Ο, Π, Ρ, Σ, et joignons ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ; chacun des triangles ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ sera plus grand que la moitié du segment du cercle dans lequel il est placé. Sur chacun des triangles ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ élevons une pyramide qui ait la même hauteur que le cône; chacune de ces pyramides sera plus grande que la moitié du segment du cône dans lequel elle est placée. Divisons en deux parties égales les arcs restants, menons leurs cordes; sur chacun des triangles élevons des pyramides qui aient la même hauteur que le cône, et faisons toujours la même chose; il restera enfin certains segments du cône qui seront plus petits que le solide Ψ (1. 10). Que l'on ait ces segments restants et que ce soient ceux qui ont pour bases les segments circulaires ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. La pyramide restante dont la base est le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et dont la hauteur est la même que celle du cône, sera plus grande que le solide Ξ. Dans le cercle ΑΒΓΔ décrivons

τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως  
κειμένον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνε-  
στάτω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοῦψὺς τῷ ΑΛ κώνῳ.  
Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ  
τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς  
τὸν ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  
ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος  
πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ  
κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως τὸ

culo ΑΒΓΔ ipsi ΘΟΕΠΖΡΗΣ polygono et simile  
et similiter positum polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ,  
et erigatur ab ipso pyramis æquealta atque  
conus ΑΛ. Quoniam igitur est ut quadratum  
ex ΑΓ ad ipsum ex ΕΗ ita ΔΤΑΥΒΦΓΧ poly-  
gonum ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ut autem  
quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita  
ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ; et ut igitur  
ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita polygo-



ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ  
πολύγωνον. Ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν  
ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς τὸ Ξ  
στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς  
τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς  
βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ  
δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς  
βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ

num ΔΤΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ.  
Ut autem ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita  
conus ΑΛ ad Ξ solidum; et ut vero polygo-  
num ΔΤΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ ita  
pyramis, cujus basis quidem ΔΤΑΥΒΦΓΧ poly-  
gonum, vertex autem punctum Α, ad pyrami-  
dem, cujus basis quidem polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ,

un polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ qui soit semblable au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et semblable-  
ment placé, et sur le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ élevons une pyramide qui ait la même  
hauteur que le cône ΑΛ. Puisque le carré de ΑΓ est au carré de ΓΗ comme  
le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ (20. 6, et 1. 12), et que le  
carré de ΑΓ est au carré de ΕΗ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ  
(2. 12); le cercle ΑΒΓΔ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est  
au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ (11. 5). Mais le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ comme  
le cône ΑΛ est au solide Ξ, et le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ est au polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ  
comme la pyramide qui a pour base le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ, et pour sommet  
le point Α est à la pyramide qui a pour base le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ, et pour som-

δὲ τὸ Ν σημείον· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΛ κώνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημείον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν, τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημείον· ἐπαλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κώνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. Μείζων δὲ ὁ ΑΛ κώνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μείζων ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ ἑλάττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστὶν<sup>10</sup> ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κώνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν. Λέγω δὲ ὅτι οὐδέ ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Ξ· ἀι-  
παλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ

vertex autem punctum Ν; et ut igitur conus ΑΛ ad Ξ solidum ita pyramis, cujus basis quidem polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ, vertex autem Α punctum, ad pyramidem, cujus basis quidem polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ, vertex autem Ν punctum; permutando igitur est ut conus ΑΛ ad pyramidem quæ in ipso est ita solidum Ξ ad pyramidem quæ est in cono ΕΝ. Major autem conus ΑΛ pyramide quæ est in ipso; majus igitur et solidum Ξ pyramide quæ in cono ΕΝ. Sed et minus, quod absurdum; non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conus ad solidum aliquod minus cono ΕΝ. Similiter ostendemus, neque esse ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita conum ΕΝ ad solidum aliquod minus cono ΑΛ. Dico neque quidem esse ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conum ad solidum aliquod majus cono ΕΝ. Si enim possibile, sit ad majus Ξ, invertendo igitur est ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita solidum Ξ ad ΑΛ co-

met le point Ν (6. 12); le cône ΑΛ est donc au solide Ξ comme la pyramide dont la base est le polygone ΔΤΑΥΒΦΓΧ, et le sommet le point Α, est à la pyramide dont la base est le polygone ΘΟΕΠΖΡΗΣ et le sommet le point Ν; donc, par permutation, le cône ΑΛ est à la pyramide qui lui est inscrite comme le solide Ξ est à la pyramide inscrite dans le cône ΕΝ. Mais le cône ΑΛ est plus grand que la pyramide qui lui est inscrite; le solide Ξ est donc plus grand que la pyramide qui est inscrite dans le cône ΕΝ. Mais le solide Ξ est plus petit que cette pyramide, ce qui est absurde; le cercle ΑΒΓΔ n'est donc point au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est à un solide plus petit que le cône ΕΝ. Nous démontrerons semblablement que le cercle ΕΖΗΘ n'est point au cercle ΑΒΓΔ comme le cône ΕΝ est à un solide plus petit que le cône ΑΛ. Je dis enfin que le cercle ΑΒΓΔ n'est point au cercle ΕΖΗΘ comme le cône ΑΛ est à un solide plus grand que le cône ΕΝ. Car que ce soit à un solide Ξ plus grand, si cela est possible; par inversion, le cercle ΕΖΗΘ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le solide Ξ est au cône ΑΛ.

















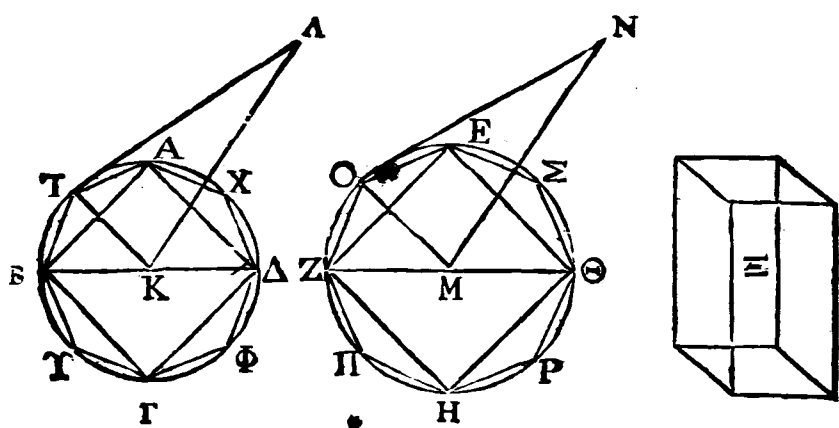






ὁ  $ΑΒΓΔ$  κύκλος, κορυφή δὲ τὸ  $Α$  σημείον<sup>28</sup>, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν τὸ  $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$  πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ  $Α$ , οὕτως τὸ  $Ξ$  στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$  πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ  $Ν$ . Μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μείζον ἄρα καὶ τὸ  $Ξ$  στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$  πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ  $Ν$ . Ἀλλὰ καὶ ἑλαττον, ὅπερ ἐστὶν<sup>29</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν<sup>30</sup> ὁ  $ΑΒΓΔ$  κύκλος,

circulus  $ΑΒΓΔ$ , vertex autem punctum  $Α$ , ad pyramidem quæ in ipso est, cujus basis quidem  $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$  polygonum, vertex autem  $Α$ , ita solidum  $Ξ$  ad pyramidem, cujus basis quidem polygonum  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$ , vertex autem punctum  $Ν$ . Major autem dictus conus est pyramide quæ in ipso est; ille eam enim comprehendit; majus igitur est solidum  $Ξ$  pyramide, cujus basis quidem est polygonum  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$ , vertex autem punctum  $Ν$ . Sed et minus, quod impossibile; non igitur conus, cujus quidem basis



κορυφή δὲ τὸ  $Α$  σημείον<sup>31</sup>, πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ κῶνου στερεὸν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν<sup>32</sup> ὁ  $ΕΖΗΘ$  κύκλος, κορυφή δὲ τὸ  $Ν$  σημείον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΖΘ$ . Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ  $ΕΖΗΘΝ$  κῶνος πρὸς ἑλατ-

est  $ΑΒΓΔ$  circulus, vertex autem punctum  $Α$ , ad aliquod solidum minus cono, cujus basis quidem est circulus  $ΕΖΗΘ$ , vertex autem punctum  $Ν$ , triplicatam rationem habet ejus quam  $ΒΔ$  ad  $ΖΘ$ . Similiter utique demonstrabimus neque conum  $ΕΖΗΘΝ$  ad solidum aliquod minus cono

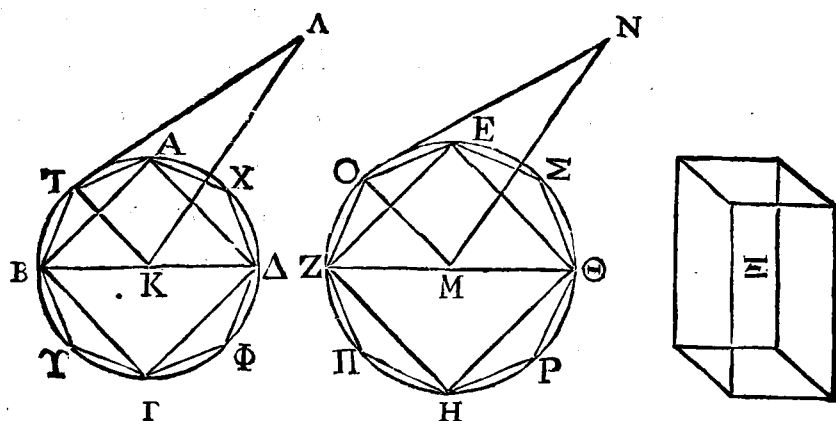
cercle  $ΑΒΓΔ$ , et le sommet le point  $Α$  est à la pyramide dont la base est le polygone  $ΑΤΒΥΓΦΔΧ$ , et le sommet le point  $Α$ , comme le solide  $Ξ$  est à la pyramide dont la base est le polygone  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$ , et le sommet le point  $Ν$ . Mais le cône dont nous venons de parler est plus grand que la pyramide, parce que le cône la contient; le solide  $Ξ$  est donc plus grand que la pyramide, dont la base est le polygone  $ΕΟΖΗΠΡΘΣ$ , et le sommet le point  $Ν$ . Mais il est plus petit, ce qui est impossible; le cône dont la base est le cercle  $ΑΒΓΔ$ , et le sommet le point  $Α$ , n'a donc pas avec un solide plus petit que le cône dont la base est le cercle  $ΕΖΗΘ$ , et le sommet le point  $Ν$ , une raison triplée de celle que  $ΒΔ$  a avec  $ΖΘ$ . Nous démontrerons semblablement que le cône  $ΕΖΗΘΝ$  n'a pas avec un solide plus



# 178 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς

ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habere ejus quam ΖΘ ad ΒΔ. Dico neque ΑΒΓΔΛ conum ad solidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam habere rationem ejus quam ΒΔ ad ΖΘ. Si enim possibile, habeat ad solidum aliquod majus, ip-



μείζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κώνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κώνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κώνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ΕΖΗΘΝ ἄρα κώνος<sup>33</sup> πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κώνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κώνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

um Ξ; invertendo igitur solidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habet ejus quam ΖΘ ad ΒΔ. Ut autem Ξ solidum ad ΑΒΓΔΛ conum ita ΕΖΗΘΝ conus ad solidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ; et ΕΖΗΘΝ igitur conus ad solidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habet ejus quam ΖΘ ad ΒΔ, quod impossibile demonstratum est; non igitur ΑΒΓΔΛ conus ad solidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ. Demonstratum est autem neque ad minus; conus igitur ΑΒΓΔΛ ad conum ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ.

petit que le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ. Je dis enfin que le cône ΑΒΓΔΛ n'a pas avec un solide plus grand que le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Car si cela est possible, que ce soit à un solide Ξ plus grand; par inversion, le solide Ξ aura avec le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ. Mais le solide Ξ est au cône ΑΒΓΔΛ comme le cône ΕΖΗΘΝ est à un solide plus petit que le cône ΑΒΓΔΛ; le cône ΕΖΗΘΝ a donc avec un solide plus petit que le cône ΑΒΓΔΛ une raison triplée de celle que ΖΘ a avec ΒΔ, ce qui est démontré impossible; le cône ΑΒΓΔΛ n'a donc pas avec un solide plus grand que le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Mais nous avons démontré que ce n'est point non plus avec un solide plus petit; le cône ΑΒΓΔΛ a donc avec le cône ΕΖΗΘΝ une raison triplée de celle que ΒΔ

## LE DOUZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 176

Ὡς δὲ ὁ κώνος πρὸς τὸν κώνον οὕτως<sup>34</sup> ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοῦψῆς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κώνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον<sup>35</sup>. καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Εὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἴσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον<sup>1</sup> κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ἔστιν<sup>2</sup> ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ut autem conus ad conum ita cylindrus ad cylindrum, triplus enim cylindrus coni qui est in eadem basi et altitudine in qua ipse; ostensus est enim omnis conus tertia pars cylindri habentis eandem basim quam conus et altitudinem æqualem; et cylindrus igitur ad cylindrum triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ ad ΖΘ.

Similes igitur, etc.

### PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano secetur parallelo existente oppositis planis, erit ut cylindrus ad cylindrum ita axis ad axem.

Cylindrus enim ΑΔ plano ΗΘ secetur parallelo existente oppositis planis ΑΒ, ΓΔ, et occurrat axi ΕΖ planum in Κ puncto; dico esse ut ΒΗ cylindrus ad cylindrum ΗΔ ita ΕΚ axem ad axem ΚΖ.

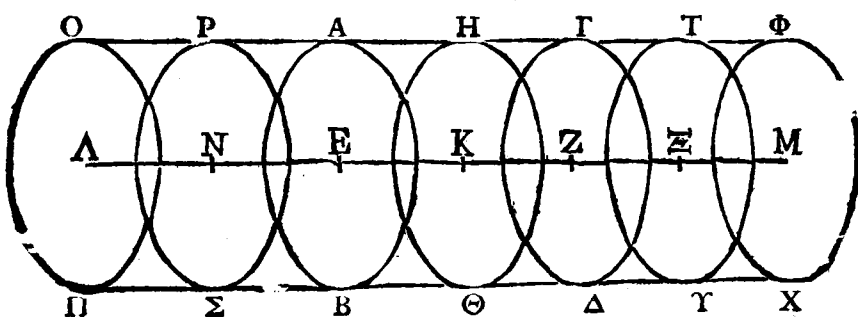
a avec ΖΘ. Mais un cône est à un cône comme un cylindre est à un cylindre, car un cylindre est le triple d'un cône qui a la même base et la même hauteur; car on a démontré que tout cône est la troisième partie d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône ( 10. 12 ); un cylindre a donc avec un cylindre une raison triplée de celle que ΒΔ a avec ΖΘ. Donc, etc.

### PROPOSITION XIII.

Si un cylindre est coupé par un plan parallèle aux plans opposés, l'un des cylindres sera à l'autre cylindre comme l'axe du premier est à l'axe du second.

Car que le cylindre ΑΔ soit coupé par un plan ΗΘ parallèle aux plans opposés ΑΒ, ΓΔ, et que le plan ΗΘ rencontre l'axe ΕΖ au point Κ; je dis que le cylindre ΒΗ est au cylindre ΗΔ comme l'axe ΕΚ est à l'axe ΚΖ.

Εκτελέσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α, Μ σημεία, καὶ ἐκτείνωσαν τῷ μὲν<sup>3</sup> ΕΚ ἄξωνι ἴσαι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΑ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσαι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοέσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΑΜ ἄξωνος κύλινδρος ὁ ΟΧ οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι· καὶ ἐκτελέσθω διὰ τῶν Ν, Ζ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου· καὶ ποιήσωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ



κέντρα. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξωνες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἰσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις<sup>5</sup>. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ<sup>6</sup> ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξωνες ἴσοι εἰσὶν<sup>7</sup> ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλῆθει τῶν ΠΡ, ΡΒ,

Producatur enim ΕΖ axis ex utraque parte ad puncta Α, Μ, et ponantur axi quidem ΕΚ æquales quotcunque rectæ ΕΝ, ΝΑ, ipsi vero ΖΚ æquales quotcunque ΖΞ, ΞΜ, et intelligatur circa ΑΜ axem cylindrus ΟΧ cujus bases circuli ΟΠ, ΦΧ; et ducantur per Ν, Ζ puncta plana parallela ipsis ΑΒ, ΓΔ, et basibus cylindri ΟΧ; et faciant ΡΣ, ΤΥ circulos circa Ν, Ξ

centra. Et quoniam axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ æquales inter se sunt; ergo cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter se sunt ut bases. Æquales autem sunt bases; æquales igitur et ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ cylindri inter se. Quoniam igitur et ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ axes æquales sunt inter se, sunt autem et cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ æquales inter se, et æqualis est multitudo ipsarum ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ multitudini ipsarum ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ; quotu-

Car prolongeons de part et d'autre l'axe ΕΖ vers les points Α, Μ; faisons tant de droites ΕΝ, ΝΑ qu'on voudra égales chacune à l'axe ΕΚ, et tant d'autres droites ΖΞ, ΞΜ qu'on voudra égales chacune à l'axe ΖΚ; autour de l'axe ΑΜ concevons le cylindre ΟΧ, ayant pour bases les cercles ΟΠ, ΦΧ; par les points Ν, Ζ, soient menés des plans parallèles aux plans ΑΒ, ΓΔ, et aux bases du cylindre ΟΧ, et que ces plans engendrent les cercles ΡΣ, ΤΥ, autour des centres Ν, Ξ. Puisque les axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ sont égaux entre eux, les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ seront entre eux comme leurs bases. Mais leurs bases sont égales; les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ sont donc égaux. Puisque les axes ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ sont égaux entre eux; que les cylindres ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ sont aussi égaux entre eux, et que le nombre des droites ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ est égal au nombre des droites ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ, l'axe ΑΚ sera le même multiple

BH<sup>8</sup>. ὅσαπλασίων ἄρα ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἔστιν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔστι καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. Καὶ εἰ μὲν ἴσος ἔστιν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται<sup>9</sup> καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου<sup>10</sup>, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· τεσσάρων δὲ μεγεθῶν ὄντων<sup>11</sup>, ἄξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ, τε ΑΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος<sup>12</sup>. Καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

plex igitur axis ΑΚ ipsius ΕΚ axis, totuplex erit et ΠΗ cylindrus cylindri ΗΒ. Propter eadem utique quotuplex est ΜΚ axis ipsius ΚΖ axis totuplex est et ΧΗ cylindrus cylindri ΗΔ. Et si quidem æqualis sit axis ΚΛ axi ΚΜ, æqualis erit et ΠΗ cylindrus cylindro ΗΧ; si autem major axis axe major et cylindrus cylindro, et si minor, minor; quatuor igitur magnitudinibus existentibus, axibus quidem ΕΚ, ΚΖ, cylindris vero ΒΗ, ΗΔ, sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem ΕΚ et cylindri ΒΗ, et axis ΑΚ et cylindri ΠΗ; axis vero ΚΖ et cylindri ΗΔ, axis ΚΜ et cylindrus ΗΧ. Et demonstratum est, si superat ΚΛ axis axem ΚΜ, superare et cylindrum ΠΗ cylindrum ΗΧ; et si æqualis æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut axis ΕΚ ad axem ΚΖ ita cylindrus ΒΗ ad cylindrum ΗΔ. Quod oportebat ostendere.

de l'axe ΕΚ que le cylindre ΠΗ l'est du cylindre ΗΒ. Par la même raison, l'axe ΜΚ est le même multiple de l'axe ΚΖ que le cylindre ΧΗ l'est du cylindre ΗΔ. Si donc l'axe ΚΛ est égal à l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera égal au cylindre ΗΧ; si l'axe ΚΛ est plus grand que l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera plus grand que le cylindre ΗΧ, et si l'axe ΚΛ est plus petit que l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera plus petit que le cylindre ΗΧ. On a donc quatre grandeurs, les axes ΕΚ, ΚΖ, et les cylindres ΒΗ, ΗΔ; l'on a pris des équimultiples de l'axe ΕΚ et du cylindre ΒΗ, savoir, l'axe ΑΚ et le cylindre ΠΗ; on a pris aussi des équimultiples de l'axe ΚΖ et du cylindre ΗΔ, savoir, l'axe ΚΜ et le cylindre ΗΧ; et l'on a démontré que si l'axe ΚΛ surpasse l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ surpassera le cylindre ΗΧ, que si l'axe ΚΛ est égal à l'axe ΚΜ, le cylindre ΠΗ sera égal au cylindre ΗΧ, et que si l'axe ΚΛ est plus petit que l'axe ΚΜ, le cylindre ΚΜ sera plus petit que le cylindre ΗΧ; l'axe ΕΚ est donc à l'axe ΚΖ comme le cylindre ΒΗ est au cylindre ΗΔ (déf. 4. 5). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

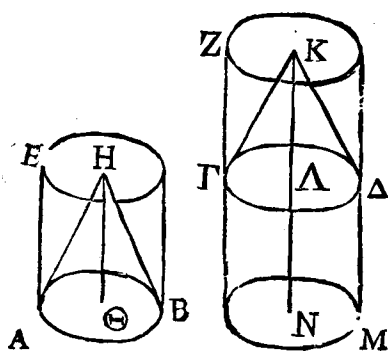
## PROPOSITIO XIV.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι  
πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$   
κύλινδροι οἱ  $EB$ ,  $Z\Delta$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ  
 $EB$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $Z\Delta$  κύλινδρον οὕτως ὁ  
 $H\Theta$  ἄξων πρὸς τὸν  $K\Lambda$  ἄξονα.

In æqualibus basibus existentes coni et cylindri  
inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  cy-  
lindri  $EB$   $Z\Delta$ ; dico esse ut  $EB$  cylindrus ad  
 $Z\Delta$  cylindrum ita  $H\Theta$  axem ad  $K\Lambda$  axem.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ  $K\Lambda$  ἄξων ἐπὶ τὸ  $N$  σημεῖον,  
καὶ κείσθω τῷ  $H\Theta$  ἄξονι ἴσος ὁ  $\Lambda N$ , καὶ περὶ  
ἄξονα τὸν  $\Lambda N$  κύλινδρος νενοήσθω<sup>2</sup> ὁ  $\Gamma M$ . Ἐπεὶ  
οὖν οἱ  $EB$ ,  $\Gamma M$  κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ,  
πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἰσαὶ δὲ εἰσὶν  
αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ  $EB$ ,

Producatur enim  $K\Lambda$  axis ad punctum  $N$ ,  
ponaturque ipsi  $H\Theta$  axi æqualis ipse  $\Lambda N$ , et circa  
axem  $\Lambda N$  intelligatur cylindrus  $\Gamma M$ . Quoniam  
igitur cylindri  $EB$ ,  $\Gamma M$  in eadem altitudine sunt,  
inter se sunt ut bases. Æquales autem sunt  
bases inter se; æquales igitur sunt et cylindri

## PROPOSITION XIV.

Les cônes et les cylindres qui ont des bases égales sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Que les cylindres  $EB$ ,  $Z\Delta$  aient des bases égales  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; je dis que le cylindre  $EB$  est au cylindre  $Z\Delta$  comme l'axe  $H\Theta$  est à l'axe  $K\Lambda$ .

Car prolongeons l'axe  $K\Lambda$  vers le point  $N$ , faisons  $\Lambda N$  égal à l'axe  $H\Theta$ , et autour de l'axe  $\Lambda N$  concevons le cylindre  $\Gamma M$ . Puisque les cylindres  $EB$ ,  $\Gamma M$  ont la même hauteur, ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases ( 11. 12 ). Mais leurs bases sont égales entr'elles; les cylindres  $EB$ ,  $\Gamma M$  sont donc égaux entr'eux.

ΓΜ κύλινδροι ἀλλήλοις<sup>3</sup>. Καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΖΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα. Ἴσος δὲ ἔστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κύλινδρῳ, ὁ δὲ ΑΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον<sup>4</sup>· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξωνα οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

EB, ΓΜ inter se. Et quoniam cylindrus ΖΜ secatur plano ΓΔ parallelo existente oppositis planis est igitur ut ΓΜ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΑΝ axis ad ΚΑ axem. Æqualis autem est quidem ΓΜ cylindrus cylindrō ΕΒ, axis vero ΑΝ axi ΗΘ; est igitur ut ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΗΘ axis ad ΚΑ axem. Ut autem ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum ita ΑΒΗ conus ad ΓΔΚ conum; et igitur ut ΗΘ axis ad ΚΑ axem ita est ΑΒΗ conus ad ΓΔΚ conum, et ΕΒ cylindrus ad ΖΔ cylindrum. Quod oportebat ostendere.

Et puisque le cylindre ΖΜ est coupé par le plan ΓΔ parallèle aux plans opposés, le cylindre ΓΜ sera au cylindre ΖΔ comme l'axe ΑΝ est à l'axe ΚΑ. Mais le cylindre ΓΜ est égal au cylindre ΕΒ, et l'axe ΑΝ égal à l'axe ΗΘ; le cylindre ΕΒ est donc au cylindre ΖΔ comme l'axe ΗΘ est à l'axe ΚΑ (13. 12). Mais le cylindre ΕΒ est au cylindre ΖΔ comme le cône ΑΒΗ est au cône ΓΔΚ (10. 12); l'axe ΗΘ est donc à l'axe ΚΑ comme le cône ΑΒΗ est au cône ΓΔΚ, et comme le cylindre ΕΒ est au cylindre ΖΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Εστώσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διαμέτροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΑ, ΜΝ, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἐστίν<sup>2</sup> ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΑ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΚΑ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἥτοι ἴσον ἐστίν, ἢ οὐ. Εστω πρότερον ἴσον. Ἐστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλή-

## PROPOSITIO XV.

Æqualium conorum et cylindrorum reciprocae sunt bases altitudinibus; et quorum conorum et cylindrorum reciprocae sunt bases altitudinibus, æquales sunt illi.

Sint æquales coni et cylindri, quorum bases quidem ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circuli, diametri autem ipsorum ipsæ ΑΓ, ΕΗ, axes vero ΚΑ, ΜΝ, quæ et altitudines sunt conorum vel cylindrorum; et compleantur cylindri ΑΞ, ΕΟ; dico ΑΞ, ΕΟ cylindrorum reciprocas bases esse altitudinibus, et esse ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudinem ad ΚΑ altitudinem.

Etenim ΚΑ altitudo altitudini ΜΝ vel æqualis est, vel non. Sit primum æqualis. Est autem ΑΞ cylindrus cylindro ΕΟ æqualis. In eadem autem altitudine existentes coni et cylindri

## PROPOSITION XV.

Les bases des cônes et des cylindres égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; et si les bases des cônes et des cylindres sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs, les cônes et les cylindres sont égaux entr'eux.

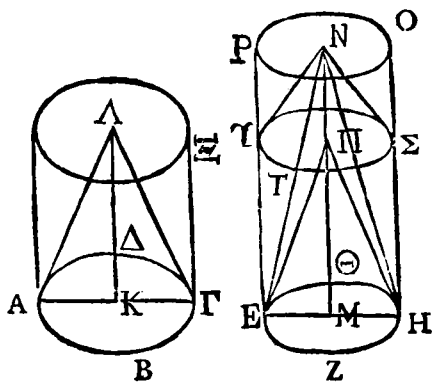
Soient les cônes et les cylindres égaux, dont les bases sont les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, qui ont pour diamètres de leurs bases les droites ΑΓ, ΕΗ, et dont les axes sont les droites ΚΑ, ΜΝ, qui sont aussi les hauteurs des cônes ou des cylindres; achevons les cylindres ΑΞ, ΕΟ; je dis que les bases des cylindres ΑΞ, ΕΟ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; c'est-à-dire que la base ΑΒΓΔ est à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΚΑ.

Car la hauteur ΚΑ est égale à la hauteur ΜΝ ou elle ne lui est pas égale. Qu'elle lui soit d'abord égale: puisque le cylindre ΑΞ est égal au cylindre ΕΟ, et que les cônes et les cylindres qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs



λους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ  $AB\Gamma\Delta$  βάσις τῇ  $EZH\Theta$  βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθεν<sup>3</sup>, ὡς ἡ  $AB\Gamma\Delta$  βάσις πρὸς τὴν  $EZH\Theta$  βάσιν οὕτως τὸ  $MN$  ὕψος πρὸς τὸ  $\kappa\Lambda$  ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ  $\kappa\Lambda$  ὕψος τῷ  $MN$  ἴσον, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ  $MN$ <sup>4</sup>, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ  $MN$  ὕψους τῷ  $\kappa\Lambda$  ἴσον τὸ  $\Pi M$ , καὶ διὰ τοῦ  $\Pi$  σημείου τεμνίσθω ὁ  $EO$  κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ  $\Upsilon\Gamma\kappa$  παραλλήλῳ τοῖς τῶν  $EZH\Theta$ ,  $PO$  κύκλων ἐπιπέδοις<sup>5</sup>, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ  $EZH\Theta$  κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ  $\Pi M$  κύλινδρος νε-

inter se sunt ut bases; æqualis igitur et  $AB\Gamma\Delta$  basis basi  $EZH\Theta$ ; quare et reciproce, ut  $AB\Gamma\Delta$  basis ad  $EZH\Theta$  basim ita  $MN$  altitudo ad  $\kappa\Lambda$  altitudinem. At vero non sit  $\kappa\Lambda$  altitudo altitudini  $MN$  æqualis, sed major, sit  $MN$ , et auferatur ab ipsâ  $MN$  altitudine ipsi  $\kappa\Lambda$  æqualis  $\Pi M$ , et per  $\Pi$  punctum secetur  $EO$  cylindrus plano  $\Upsilon\Gamma\kappa$  parallelo oppositis planis circulorum  $EZH\Theta$ ,  $PO$ , et in basi quidem  $EZH\Theta$ , altitudine vero  $\Pi M$  cylindrus intelligatur  $E\Xi$ . Et



κρήσθω ὁ  $E\Xi$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ  $A\Xi$  κύλινδρος τῷ  $EO$  κύλινδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ  $E\Xi$  κύλινδρος<sup>6</sup>. ἴστιν ἄρα ὡς ὁ  $A\Xi$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $E\Xi$  κύλινδρον οὕτως ὁ  $EO$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $E\Xi$  κύλινδρον. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ  $A\Xi$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $E\Xi$  κύλινδρον<sup>7</sup> οὕτως ἡ  $AB\Gamma\Delta$  βάσις πρὸς τὴν  $EZH\Theta$  βάσιν<sup>8</sup>, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ  $A\Xi$ ,  $E\Xi$  κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ  $EO$  κύλινδρος πρὸς τὸν  $E\Xi$  οὕτως τὸ  $MN$

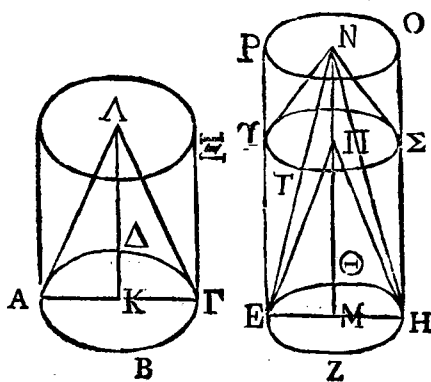
quoniam æqualis est  $A\Xi$  cylindrus cylindro  $EO$ , alius autem aliquis cylindrus  $E\Xi$ ; est igitur ut  $A\Xi$  cylindrus ad  $E\Xi$  cylindrum ita  $EO$  cylindrus ad  $E\Xi$  cylindrum. Sed ut quidem  $A\Xi$  cylindrus ad  $E\Xi$  cylindrum ita  $AB\Gamma\Delta$  basis ad  $EZH\Theta$  basim; sub enim altitudine eâdem sunt  $A\Xi$ ,  $E\Xi$  cylindri; ut autem  $EO$  cylindrus ad  $E\Xi$  ita  $MN$

bases (11. 12), la base  $AB\Gamma\Delta$  sera égale à la base  $EZH\Theta$ ; les bases sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base  $AB\Gamma\Delta$  est à la base  $EZH\Theta$  comme la hauteur  $MN$  est à la hauteur  $\kappa\Lambda$ . Mais que la hauteur  $\kappa\Lambda$  ne soit point égale à la hauteur  $MN$ , et que la hauteur  $MN$  soit la plus grande. De la hauteur  $MN$  retranchons la droite  $\Pi M$  égale à la droite  $\kappa\Lambda$ , et par le point  $\Pi$  coupons le cylindre  $EO$  par le plan  $\Upsilon\Gamma\kappa$  parallèle aux plans des cercles  $EZH\Theta$ ,  $PO$ , et concevons un cylindre  $E\Xi$  dont la base soit le cercle  $EZH\Theta$ , et dont la hauteur soit  $\Pi M$ . Et puisque le cylindre  $A\Xi$  est égal au cylindre  $EO$ , et que  $E\Xi$  est un autre cylindre, le cylindre  $A\Xi$  sera au cylindre  $E\Xi$  comme le cylindre  $EO$  est au cylindre  $E\Xi$  (7. 5). Mais le cylindre  $A\Xi$  est au cylindre  $E\Xi$  comme la base  $AB\Gamma\Delta$  est à la base  $EZH\Theta$  (11. 12), car les cylindres  $A\Xi$ ,  $E\Xi$  ont la même hauteur, et le cylindre  $EO$  est



ὑψος πρὸς τὸ ΜΠ ὑψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπι-  
πέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς  
ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ  
βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὑψος  
πρὸς τὸ ΜΠ ὑψος. Ἰσον δὲ τὸ ΜΠ ὑψος τῷ ΚΑ  
ὑψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν  
ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὑψος πρὸς τὸ ΚΑ  
ὑψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόν-  
θασιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν.

altitudo ad ΜΠ altitudinem; etenim cylindrus  
ΕΟ secatur plano ΤΥΣ parallelo existente oppo-  
sitis planis; est igitur et ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ  
basim ita ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem. Æqualis  
autem est ΜΠ altitudo altitudini ΚΑ; est igitur  
ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo  
ad ΚΑ altitudinem; cylindrorum igitur ΑΞ, ΕΟ  
reciprocae sunt bases altitudinibus.



Αλλὰ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόν-  
θηίωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ  
ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ  
ΜΝ ὑψος πρὸς τὸ ΚΑ ὑψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν  
ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων· ἐπεὶ ἔστιν  
ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ

At vero ΑΞ, ΕΟ cylindrorum reciprocae bases  
sint altitudinibus, et sit ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ  
basim ita ΜΝ altitudo ad ΚΑ altitudinem; dico  
æqualem esse ΑΞ cylindrum cylindro ΕΟ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut  
ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad

au cylindre ΕΣ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ (13. 12), car le cy-  
lindre ΕΟ est coupé par le plan ΤΥΣ parallèle aux plans opposés; la base ΑΒΓΔ  
est donc à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ. Mais la hau-  
teur ΜΠ est égale à la hauteur ΚΑ; la base ΑΒΓΔ est donc à la base ΕΖΗΘ comme  
la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΚΑ; les bases des cylindres ΑΞ, ΕΟ sont donc ré-  
ciproquement proportionnelles aux hauteurs de ces cylindres.

Mais que les bases des cylindres ΑΞ, ΕΟ soient réciproquement proportionnelles  
aux hauteurs, et que la base ΑΒΓΔ soit à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à  
la hauteur ΚΑ; je dis que le cylindre ΑΞ est égal au cylindre ΕΟ.

Car faisons la même construction. Puisque la base ΑΒΓΔ est à la base ΕΖΗΘ

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 187

ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΑ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΑ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος<sup>10</sup>. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος<sup>11</sup> οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον<sup>12</sup>. ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΚΑ altitudinem, æqualis autem ΚΑ altitudo altitudini ΜΠ; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem. Sed ut quidem ΑΒΓΔ basis ad ΕΖΗΘ basim ita ΑΞ cylindrus ad ΕΣ cylindrum, etenim sub eâdem altitudine sunt; ut autem ΜΝ altitudo ad ΜΠ altitudinem ita ΕΟ cylindrus ad ΕΣ cylindrum; est igitur ut ΑΞ cylindrus ad ΕΣ cylindrum ita ΕΟ cylindrus ad ΕΣ cylindrum; æqualis igitur ΑΞ cylindrus ΕΟ cylindro. Similiter autem et in conis. Quod oportebat ostendere.

comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΚΑ, que la hauteur ΚΑ est égale à la hauteur ΜΠ, la base ΑΒΓΔ sera à la base ΕΖΗΘ comme la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ. Mais la base ΑΒΓΔ est à la base ΕΖΗΘ comme le cylindre ΑΞ est au cylindre ΕΣ ( 11. 12 ), car ils ont la même hauteur, et la hauteur ΜΝ est à la hauteur ΜΠ comme le cylindre ΕΟ est au cylindre ΕΣ ( 13. 12 ); le cylindre ΑΞ est donc au cylindre ΕΣ comme le cylindre ΕΟ est au cylindre ΕΣ; le cylindre ΑΞ est donc égal au cylindre ΕΟ ( 9. 5 ). Il en serait de même pour les cônes. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράφαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Εστωσαν οἱ δεθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον<sup>1</sup> ἐγγράφαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθεῖα<sup>2</sup> πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. Λελείφθω, καὶ ἴστω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ καθέτος ἤχθω ἡ ΑΜ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπέξέχ-

## PROPOSITIO XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo polygonum et æquilaterum et parilaterum describere, non tangentem minorem circulum.

Sint dati duo circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circa idem centrum Κ; oportet igitur in majori circulo ΑΒΓΔ polygonum et æquilaterum et parilaterum describere, non tangentem ΕΖΗΘ circulum.

Ducatur enim per Κ centrum recta ΒΚΔ, et a puncto Η ipsi ΒΔ ad rectos angulos ducatur ΗΑ, et producaturs ad Γ; ergo ΑΓ tangit ΕΖΗΘ circulum; secantes utique ΒΑΔ circumferentiam bifariam, et dimidium ejus bifariam, et hoc semper facientes, relinquemus circumferentiam minorem ipsâ ΑΔ. Relinquatur, et sit ΑΔ, et a puncto Α ad ΒΔ perpendicularis ducatur ΑΜ, et producaturs ad Ν, et junganturs ΑΔ, ΑΝ,

## PROPOSITION XVI.

Deux cercles étant concentriques, décrire dans le plus grand un polygone dont les côtés égaux et pairs en nombre ne touchent pas le plus petit cercle.

Soient les deux cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ayant le même centre Κ; il faut dans le plus grand cercle ΑΒΓΔ, décrire un polygone dont les côtés, égaux et pairs en nombre, ne touchent point le plus petit cercle ΕΖΗΘ.

Car par le centre Κ menons la droite ΒΚΔ, du point Η menons la droite ΗΑ perpendiculaire à ΒΔ, et prolongeons cette droite vers le point Γ; la droite ΑΓ touchera le cercle ΕΖΗΘ ( 16. 3 ). Partageons l'arc ΒΑΔ en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et faisons toujours la même chose; il restera un arc plus petit que l'arc ΑΔ ( 1. 10 ). Qu'on ait cet arc, et que cet arc soit ΑΔ; du point Α menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΒΔ; prolongeons cette perpendiculaire vers le point Ν, et joignons ΑΔ, ΑΝ; la droite ΑΔ sera égale à la droite ΑΝ.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράφαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν<sup>1</sup>.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράφαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο<sup>2</sup> ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ<sup>3</sup> καθ' οἷας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δὲ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγο-

## PROPOSITIO XVII.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum describere, non tangens minorem sphæram secundum superficiem.

Intelligentur duæ sphæræ circa idem centrum Α; oportet igitur in majori sphæra solidum polyedrum describere, non tangens sphæram minorem secundum superficiem.

Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto; sectiones igitur erunt circuli, quoniam manente diametro et circumducto semicirculo facta est sphæra; quare et in quâcunque si intelligamus semicirculum, planum ejus productum planum efficiet in superficie sphæræ circulum. Et evidens est, et maximum, quia diameter sphæræ quæ est et semicirculi diameter scilicet et circuli, major est omnibus rectis in circulo vel sphæra ductis. Sit igitur

## PROPOSITION XVII.

Deux sphères étant concentriques, décrire dans la plus grande sphère un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère.

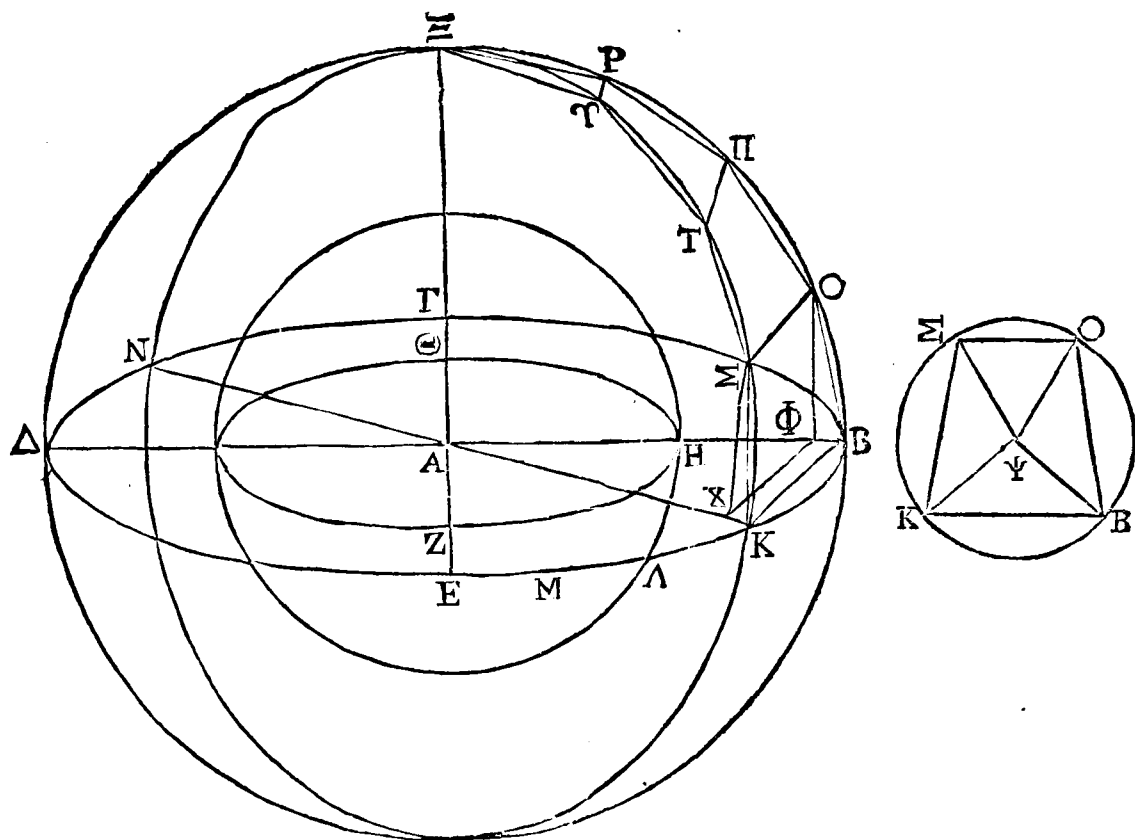
Concevons deux sphères autour du même centre Α; il faut dans la plus grande sphère décrire un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère.

Coupons ces sphères par un plan mené par le centre; les sections seront des cercles, car une sphère étant engendrée par un demi-cercle qui tourne autour de son diamètre immobile (déf. 14. 11), dans quelque position que nous concevions ce demi-cercle, le plan de ce demi-cercle étant prolongé produira un cercle dans la surface de la sphère. Et il est évident que ce sera un grand cercle, parce que le diamètre de la sphère, qui est aussi celui du demi-cercle, c'est-à-dire du cercle, est la plus grande de toutes les droites menées dans le cercle ou dans

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 191

μένων εὐθειῶν<sup>4</sup>. Εστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαί-  
ρα κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρα  
κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμε-  
τροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο  
κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ,

in majori quidem sphæra circulus ΒΓΔΕ; in  
minori autem sphæra circulus ΖΗΘ; et du-  
cantur ipsorum duæ diametri ΒΔ, ΓΕ ad rec-  
tos inter se, et duobus circulis ΒΓΔΕ, ΗΘΖ



ΖΗΘ, εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολὺ-  
γωνον ἰσόπλευρόν τε<sup>5</sup> καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφω,  
μὴ φαῦδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ  
πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ,  
ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα<sup>6</sup>, ἡ ΚΑ διήχθω  
ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ

circa idem centrum existentibus, in majori  
ΒΓΔΕ circulo polygonum et æquilaterum et pa-  
rilaterum describatur, non tangens minorem  
circulum ΖΗΘ, cujus latera sint in ΒΕ qua-  
drante ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, et juncta ΚΑ  
producatur ad Ν, et erigatur a puncto Α plano

la sphère ( 15. 3 ). Que ΒΓΔΕ soit un cercle de la plus grande sphère, et que ΖΗΘ  
soit un cercle de la plus petite sphère; menons leurs deux diamètres ΒΔ, ΓΕ  
perpendiculaires l'un à l'autre; les deux cercles ΒΓΔΕ, ΖΗΘ ayant le même  
centre, décrivons dans le plus grand cercle ΒΓΔΕ un polygone, dont les côtés  
égaux et pairs en nombre ne touchent pas le plus petit cercle ΖΗΘ ( 16. 12 ); que  
les côtés de ce polygone qui sont dans le quart de cercle ΒΕ soient ΒΚ, ΚΛ,  
ΛΜ, ΜΕ; joignons ΚΑ, et prolongeons cette droite vers le point Ν; du point Α

τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὲ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω<sup>7</sup> ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστὶν ὀρθά<sup>8</sup> πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΑΜ, ΜΕ εὐθείαις. Εγγεγράφωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦν-

circuli ΒΓΔΕ ad rectas ipsa ΑΞ, et occurrat superficie sphæræ in Ξ; et per ΑΞ et utramque ipsarum ΒΔ, ΚΝ plana ducantur, facient utique ex dictis in superficie sphæræ maximos circulos. Faciant, quorum semicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ sint ex diametris ΒΔ, ΚΝ. Et quoniam ΞΑ recta est ad ΒΓΔΕ circuli planum, et omnia igitur per ΞΑ plana sunt recta ad ΒΓΔΕ circuli planum; quare et ΒΞΔ, ΚΞΝ semicirculi recti sunt ad ΒΓΔΕ circuli planum. Et quoniam æquales sunt ΒΞΔ, ΚΞΝ semicirculi, etenim super æquales sunt diametros ΒΔ, ΚΝ, æquales sunt et ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ quadrantes inter se; quot igitur sunt in ΒΕ quadrante latera polygoni tot sunt et in ΒΞ, ΚΞ quadrantibus æqualia rectis ΒΚ, ΚΛ, ΑΜ, ΜΕ. Describantur, et sint ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, et jungantur ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, et ab ipsis Ο, Σ ad ΒΓΔΕ, circuli planum perpendiculares ducantur; cadent utique ipsæ in communes ΒΔ, ΚΝ

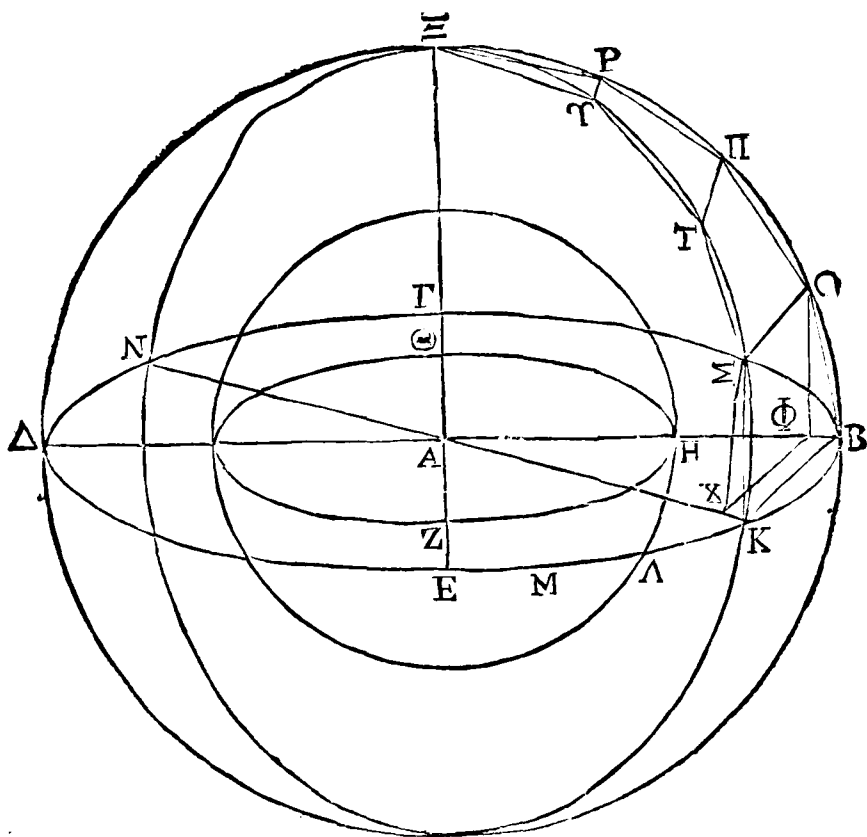
élevons la droite ΑΞ perpendiculaire au plan du cercle ΒΓΔΕ; que cette droite rencontre la surface de la sphère au point Ξ; menons des plans par la droite ΑΞ et par chacune des droites ΒΔ, ΚΝ; ces plans, d'après ce qui a été dit, produiront des grands cercles dans la surface de la sphère. Qu'ils soient produits, et que leurs moitiés ΒΞΔ, ΚΞΝ aient ΒΔ, ΚΝ pour diamètres. Puisque la droite ΞΑ est perpendiculaire au plan du cercle ΒΓΔΕ, tous les plans qui passeront par ΞΑ seront perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ (18. 11); les demi-cercles ΒΞΔ, ΚΞΝ sont donc perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ. Mais les demi-cercles ΒΞΔ, ΚΞΝ sont égaux, car ils sont sur les diamètres égaux ΒΔ, ΚΝ; les quarts de cercle ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ sont donc égaux entre eux; chacun des quarts de cercle ΒΞ, ΚΞ contient donc autant de droites égales à chacune des droites ΒΚ, ΚΛ, ΑΜ, ΜΕ que le quart de cercle ΒΕ. Inscrivons ces droites, et qu'elles soient ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ; et joignons ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, et des points Ο, Σ menons des perpendiculaires au plan du cercle ΒΓΔΕ; ces perpendiculaires tomberont



## LE DOUZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 193

ται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς  
 $ΒΔ$ ,  $ΚΝ$ , ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν  $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$  ἐπί-  
 πεδα ὀρθὰ ἴσιν πρὸς τὸ τοῦ  $ΒΓΔΕ$  κύκλου ἐπίπε-  
 δον. Πιπτέτωσαν, καὶ ἕστωσαν αἱ  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ , καὶ  
 ἐπεζεύχθω ἡ  $ΦΧ$ . Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις

sectiones planorum, quoniam et  $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$   
 plana recta sunt ad  $ΒΓΔΕ$  circuli planum.  
 Cadant, et sint  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ , et jungatur  $ΦΧ$ . Et  
 quoniam in æqualibus semicirculis  $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$



τοῖς  $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$  ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ  $ΒΟ$ ,  
 $ΚΣ$ , καὶ κάθετοι ἡγμέναι εἰσὶν αἱ  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ , ἴση  
 ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $ΟΦ$  τῇ  $ΣΧ$ , ἡ δὲ  $ΒΦ$  τῇ  $ΚΧ$ . Ἐστὶ  
 δὲ καὶ ὅλη ἡ  $ΒΑ$  ὅλη τῇ  $ΚΑ$  ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα  
 ἡ  $ΦΑ$  λοιπὴ τῇ  $ΧΑ$  ἐστὶν ἴση· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  
 $ΒΦ$  πρὸς τὴν  $ΦΑ$  οὕτως ἡ  $ΚΧ$  πρὸς τὴν  $ΧΑ$ · πα-

æquales sumptæ sunt  $ΒΟ$ ,  $ΚΣ$ , et perpendiculares  
 ductæ sunt  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ , æqualis igitur est quidem  
 $ΟΦ$  ipsi  $ΣΧ$ , ipsa vero  $ΒΦ$  ipsi  $ΚΧ$ . Est autem  
 et tota  $ΒΑ$  toti  $ΚΑ$  æqualis; et reliqua igitur  
 $ΦΑ$  reliquæ  $ΧΑ$  est æqualis; est igitur ut  $ΒΦ$   
 ad  $ΦΑ$  ita  $ΚΧ$  ad  $ΧΑ$ ; parallela igitur est  $ΧΦ$

dans les communes sections  $ΒΔ$ ,  $ΚΝ$  des plans ( 38. 11 ), parce que les plans  
 $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$  sont perpendiculaires au plan du cercle  $ΒΓΔΕ$ . Que ces perpendiculaires  
 tombent dans les communes sections, et qu'elles soient  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ ; joignons  $ΦΧ$ .  
 Puisqu'on a pris les arcs égaux  $ΒΟ$ ,  $ΚΣ$  dans les demi-cercles égaux  $ΒΞΔ$ ,  $ΚΞΝ$ ,  
 et qu'on a mené les perpendiculaires  $ΟΦ$ ,  $ΣΧ$ , la droite  $ΟΦ$  sera égale à  $ΣΧ$ , et la  
 droite  $ΒΦ$  égale à la droite  $ΚΧ$ . Mais la droite entière  $ΒΑ$  est égale à la droite entière  
 $ΚΑ$ ; la droite restante  $ΦΑ$  est donc égale à la droite restante  $ΧΑ$ ; la droite  $ΒΦ$  est  
 donc à  $ΦΑ$  comme  $ΚΧ$  est à  $ΧΑ$ ; la droite  $ΧΦ$  est donc parallèle à la droite  $ΚΒ$  (2. 6).



ράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. Καὶ ἐπεὶ ἑκα-  
τέρὰ τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ  
κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ  
τῇ ΣΧ. Εδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ,  
ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἐπεὶ πα-  
ράλληλός ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ  
ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶ πα-  
ράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνυῶσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ·  
τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ,  
ἐπειδὴ περὶ εἶν ὥσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ  
ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ  
ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ  
ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Διὰ τὰ αὐτὰ  
δὴ καὶ ἑκατέρον<sup>10</sup> τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετρα-  
πλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐστὶ δὲ καὶ<sup>11</sup> τὸ

ipsi ΚΒ. Et quoniam utraque ipsarum ΟΦ, ΣΧ  
recta est ad ΒΓΔΕ circuli planum; parallela igitur  
est ΟΦ ipsi ΣΧ. Ostensa autem est ipsi et æqualis;  
et ΚΦ, ΣΟ igitur æquales sunt et parallelæ. Et  
quoniam parallela est ΧΦ ipsi ΣΟ, sed ΚΦ ipsi ΚΒ  
est parallela; et igitur ΣΟ ipsi ΚΒ est parallela. Et  
conjungunt eas ipsæ ΒΟ, ΚΣ; et ΚΒΟΣ igitur  
quadrilaterum in uno est plano, quoniam si sint  
duæ rectæ parallelæ, et in utrâque ipsarum sumpta  
sint quævis puncta, puncta conjungens recta in  
eodem plano est in quo parallelæ (\*). Propter ea-  
dem utique et utrumque ipsorum ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ  
quadrilaterum in uno est plano. Est autem et ΥΡΖ

Mais chacune des droites ΟΦ, ΣΧ est perpendiculaire au plan du cercle ΒΓΔΕ; la droite ΟΦ est donc parallèle à la droite ΣΧ (6. 11). Mais on a démontré que ces droites sont égales; les droites ΧΦ, ΣΟ sont donc égales et parallèles (33. 11). Et puisque ΧΦ est parallèle à ΣΟ, et ΧΦ à ΚΒ, la droite ΣΟ est parallèle à ΚΒ (9. 11). Mais ces droites sont jointes par les droites ΒΟ, ΚΣ; le quadrilatère ΚΒΟΣ est donc dans un seul plan, car si deux droites sont parallèles, et si dans chacune de ces droites on prend des points quelconques, les droites qui joignent ces points sont dans le même plan que ces parallèles (7. 11) (\*). Par la même raison, chacun des quadrilatères ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ est dans un seul plan; et le triangle

(\*) Euclides hæc addere potuisset:

Rursus a punctis Π, Τ ad ΒΓΔΕ circuli pla-  
num perpendiculares ducantur; cadent utique in  
communes planorum sectiones ΒΔ, ΚΝ; conjun-  
gantur puncta in quibus perpendiculares occur-  
runt rectis ΒΔ, ΚΝ, et jungantur ipsæ ΠΒ, ΤΚ.  
Similiter utique ostendemus rectam ΚΒ paralle-  
lam esse ipsi ΤΠ. Ostensum est autem et rec-  
tam ΚΒ parallelam esse ipsi ΣΟ; recta igitur ΣΟ  
parallela est ipsi ΤΠ; quadrilaterum igitur ΣΟΠΤ  
in uno est plano. Propter eadem utique et qua-  
drilaterum ΤΠΡΥ est in uno plano.

(\*) Euclide aurait pu ajouter ce qui suit:

Des points Π, Τ menons des perpendiculaires  
au plan du cercle ΒΓΔΕ. Ces perpendiculaires  
tomberont dans les communes sections ΒΔ, ΚΝ  
des plans. Joignons les points où ces perpendi-  
culaires rencontrent les droites ΒΔ, ΚΝ, et joi-  
gnons aussi ΠΒ, ΤΚ. Nous démontrerons sembla-  
blement que la droite ΚΒ est parallèle à ΤΠ. Mais  
on a démontré que la droite ΚΒ est parallèle à ΣΟ;  
la droite ΣΟ est donc parallèle à ΤΠ; le quadrila-  
tère ΣΟΠΤ est donc dans un seul plan. Le qua-  
drilatère ΤΠΡΥ est dans un seul plan, par la  
même raison.



# 196. LE DOUZIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

συσταθήσεται τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον<sup>13</sup> εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκεείμενον ὧν βάσεις μὲν<sup>14</sup> τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ  $\Upsilon\text{Ρ}\Xi$  τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῇ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ  $\text{Α}$  σημείον.

Λέγω δὲ ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπτεται<sup>15</sup> τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφανείαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ  $\text{ΖΗ}\Theta$  κύκλος. Ἦχθω ἀπὸ τοῦ  $\text{Α}$  σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$  τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ  $\text{Α}\Psi$ , καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ  $\Psi$  σημείον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $\text{Α}\Psi$  ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$  τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ  $\text{Α}\Psi$ <sup>16</sup>, ἡ  $\text{Α}\Psi$  ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν<sup>17</sup> τῶν  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\text{ΑΒ}$  τῇ  $\text{ΑΟ}$ , ἴσον ἐστὶ<sup>18</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{ΑΒ}$  τῷ ἀπὸ τῆς<sup>19</sup>  $\text{ΑΟ}$ . Καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $\text{ΑΒ}$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ  $\Psi$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $\text{ΑΟ}$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$  ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $\text{Α}\Psi$ ,

dra descripta in sphaerâ ex pyramidibus compositâ, quarum bases quidem dicta quadrilatera et  $\Upsilon\text{Ρ}\Xi$  triangulum, et quæ sunt ejusdem ordinis cum ipsis, vertex autem punctum  $\text{Α}$ .

Dico etiam dictum polyedrum non tacturum esse minorem sphaeram, secundum superficiem in quâ est  $\text{ΖΗ}\Theta$  circulus. Ducatur a puncto  $\text{Α}$  ad  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$  quadrilateri planum perpendicularis  $\text{Α}\Psi$ , et ipsa occurrat plano in puncto  $\Psi$ , et jungantur ipsæ  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Et quoniam  $\text{Α}\Psi$  recta est ad  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$  quadrilateri planum, et ad omnes igitur rectas eam tangentes, et existentes in quadrilateri plano, perpendicularis est ipsa  $\text{Α}\Psi$ ; ergo  $\text{Α}\Psi$  perpendicularis est ad utramque ipsarum  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Et quoniam æqualis est  $\text{ΑΒ}$  ipsi  $\text{ΑΟ}$ , æquale est et quadratum ex  $\text{ΑΒ}$  quadrato ex  $\text{ΑΟ}$ . Et sunt quadrato quidem ex  $\text{ΑΒ}$  æqualia quadrata ex  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$ , rectus enim angulus ad  $\Psi$ , quadrato autem ex  $\text{ΑΟ}$  æqualia quadrata ex  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ ; quadrata igitur ex  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$  æqualia

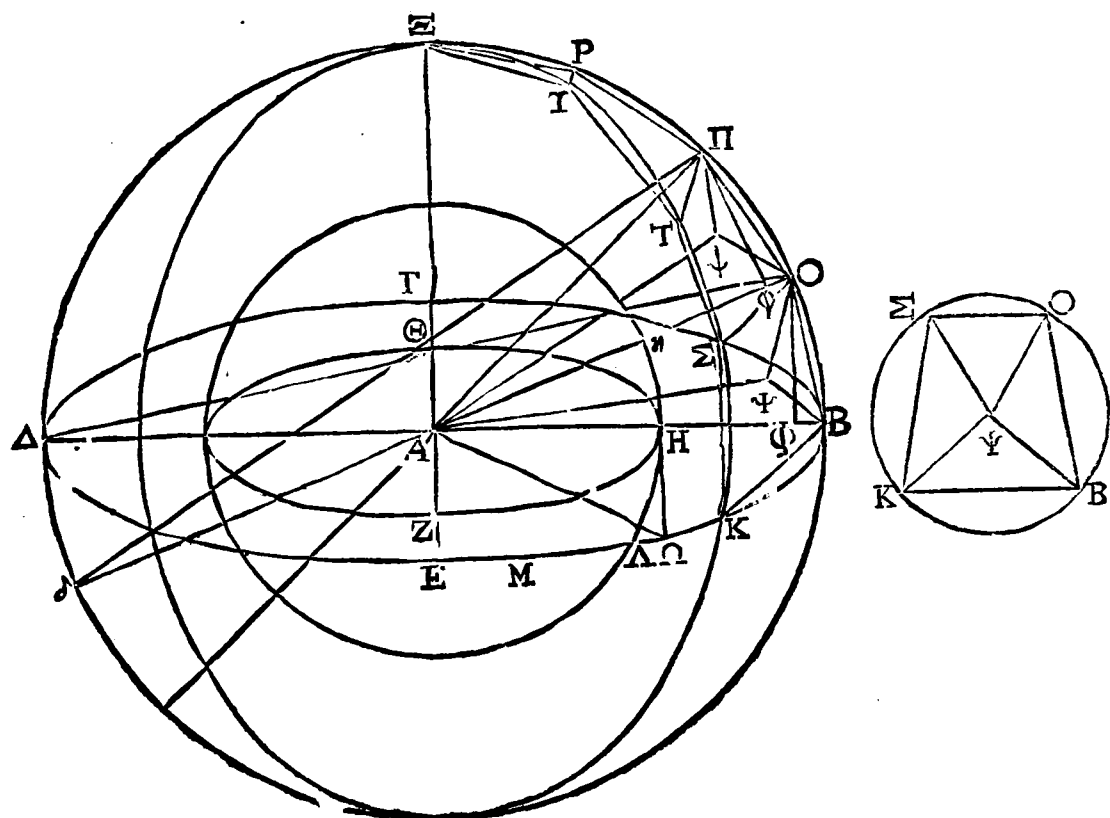
sphère un certain polyèdre composé des pyramides qui ont pour bases les quadrilatères  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$ ,  $\Sigma\text{ΟΠΤ}$ ,  $\text{ΤΠΡΥ}$  et le triangle  $\Upsilon\text{Ρ}\Xi$ , et les quadrilatères et les triangles du même ordre que ces quadrilatères et que ce triangle, le point  $\text{Α}$  étant le sommet commun de ces pyramides.

Je dis que les faces de ce polyèdre ne toucheront point la plus petite sphère dans laquelle est le cercle  $\text{ΖΗ}\Theta$ . Du point  $\text{Α}$  menons la droite  $\text{Α}\Psi$  perpendiculaire au plan du quadrilatère  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$  (11. 11), que cette perpendiculaire rencontre ce plan au point  $\Psi$ , et joignons  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Puisque  $\text{Α}\Psi$  est perpendiculaire au plan du quadrilatère  $\text{ΚΒΟ}\Sigma$ , la droite  $\text{Α}\Psi$  sera perpendiculaire à toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans ce plan (déf. 3. 11); la droite  $\text{Α}\Psi$  est donc perpendiculaire à chacune des droites  $\text{Β}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$ . Mais  $\text{ΑΒ}$  est égal à  $\text{ΑΟ}$ ; le carré de  $\text{ΑΒ}$  est donc égal au carré de  $\text{ΑΟ}$ . Mais les carrés des droites  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$  sont égaux au carré de  $\text{ΑΒ}$ , et les carrés de  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Ο}$  sont égaux au carré de  $\text{ΑΟ}$  (47. 1), car l'angle en  $\Psi$  est droit; les carrés des droites  $\text{Α}\Psi$ ,  $\Psi\text{Β}$  sont donc égaux aux carrés

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE. 197

ΨΟ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΨΟ ἴσον ἵστί· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΟ. Ομοίως δὲ δείξομεν

sunt quadratis ex ΑΨ, ΨΟ. Commune auferatur quadratum ex ΑΨ; reliquum igitur quadratum ex ΒΨ reliquo ex ΨΟ æquale est; æqualis igitur ΒΨ



ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Κ, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΟ· ὁ ἄρα κέντρω τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΨΒ, ΨΟ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Κ, Σ, καὶ ἴσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

ipsi ΨΟ. Similiter utique ostendemus et a puncto Ψ ad Κ, Σ ductas rectas æquales esse utrique ipsarum ΒΨ, ΨΟ; ergo centro Ψ et intervallo quod sit una ipsarum ΨΒ, ΨΟ descriptus circulus transibit et per puncta Κ, Σ, et erit in circulo quadrilaterum ΚΒΟΣ (\*).

des droites ΑΨ, ΨΟ. Retranchons le quarré commun de ΑΨ, le quarré restant de ΒΨ sera égal au quarré restant de ΨΟ; la droite ΒΨ est donc égale à la droite ΨΟ. Nous démontrerons semblablement que les droites menées du point Ψ aux points Κ, Σ sont égales aux droites ΒΨ, ΨΟ; le cercle décrit du centre Ψ, et d'un intervalle égal à une des droites ΨΒ, ΨΟ passera donc par les points Κ, Σ; le quadrilatère ΚΒΟΣ sera donc décrit dans un cercle (\*).

(\*) Si a puncto Α ad reliquorum quadrilaterorum plana perpendiculares ducantur, similiter utique ostendemus reliqua quadrilatera descripta fore in circulis.

(\*) Si du point Α nous menons des perpendiculaires aux plans des autres quadrilatères, nous démontrerons semblablement que les autres quadrilatères seront décrits dans des cercles.

198 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ KB τῆς XΦ, ἴση δὲ ἡ XΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ KB τῆς ΣΟ. Ἰση δὲ ἡ KB ἑκατέρα τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ KB, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Καὶ ἡχθῶ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου<sup>20</sup> ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΟΦ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΦ ἐλάττων ἐστὶν ἡ διπλῇ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΦ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ· ἀναγραφόμενου δὴ<sup>21</sup> ἀπὸ τῆς ΒΦ τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΦΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν<sup>22</sup> ΔΒ, ΒΦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἐλαττόν ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Καὶ ἔτι<sup>23</sup> τῆς ΑΟ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΟ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΦ, ΦΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΦ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΦ ἐλαττόν ἐστὶν ἡ διπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἡ διπλά-

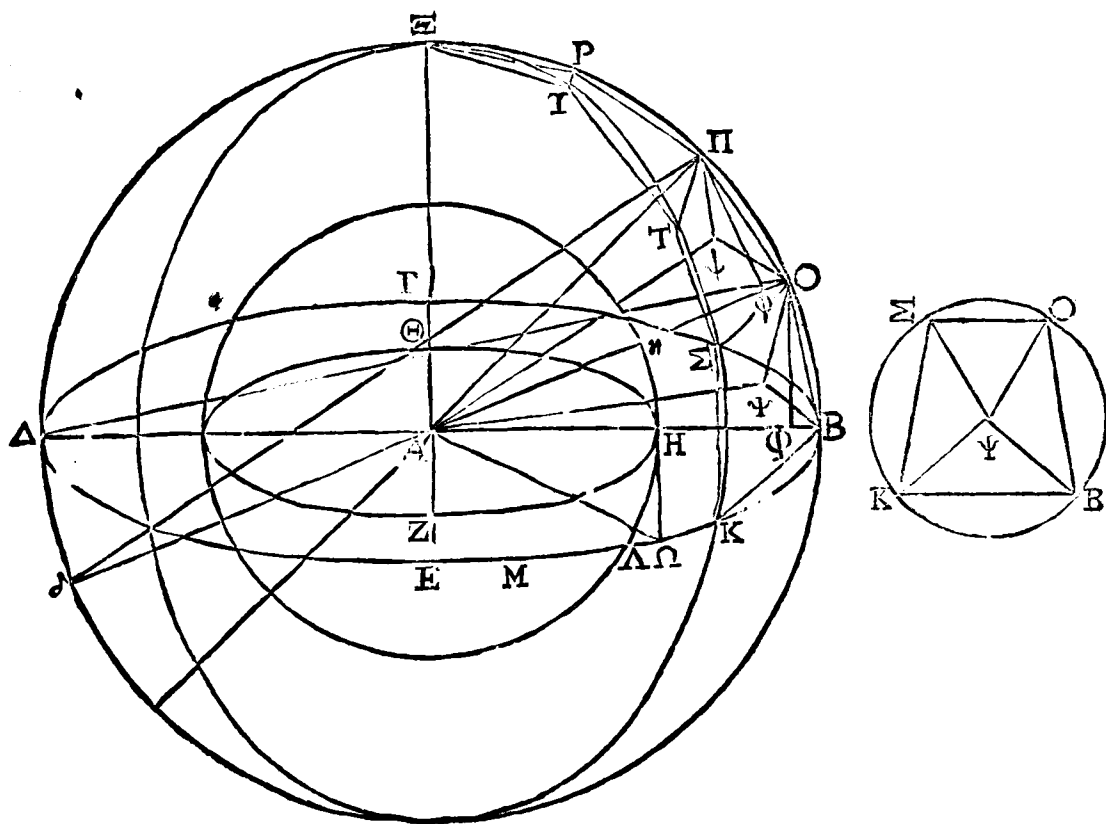
Et quoniam major est KB ipsâ XΦ, æqualis autem XΦ ipsi ΣΟ; major igitur KB ipsâ ΣΟ. Æqualis autem KB utrique ipsarum ΚΣ, ΒΟ; et utraque igitur ipsarum ΚΣ, ΒΟ ipsâ ΣΟ major est. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΚΒΟΣ, et æquales KB, ΒΟ, ΚΣ, et minor ΟΣ, et ex centro circuli est ipsa ΒΨ, ergo ipsum ex ΒΟ majus est quam duplum ipsius ex ΒΨ. Et ducatur a puncto Ο ad ΒΔ perpendicularis ΟΦ. Et quoniam ΒΔ minor est quam dupla ipsius ΔΦ, et est ut ΒΔ ad ΔΦ ita rectangulum sub ΔΒ, ΒΦ ad rectangulum sub ΔΦ, ΦΒ; descripto igitur ex ΒΦ quadrato, et completo super ipsam ΦΔ parallelogrammo, et rectangulum igitur sub ΔΒ, ΒΦ majus est quam duplum rectanguli sub ΔΦ, ΦΒ. Et adhuc ΑΟ juncta, rectangulum quidem sub ΔΒ, ΒΦ æquale est quadrato est ΒΟ, rectangulum autem sub ΔΦ, ΦΒ æquale est quadrato ex ΟΦ; quadratum igitur ex ΟΒ minus est quam duplum quadrati ex ΟΦ. Sed quadratum ex ΒΟ majus est quam duplum quadrati ex ΒΨ; ma-

Puisque la droite KB est plus grande que la droite XΦ, et que la droite XΦ est égale à la droite ΣΟ, la droite KB sera plus grande que la droite ΣΟ. Mais la droite KB est égale à chacune des droites ΚΣ, ΒΟ; chacune des droites ΚΣ, ΒΟ est donc plus grande que la droite ΣΟ. Et puisque le quadrilatère ΚΒΟΣ est décrit dans un cercle, que les droites KB, ΒΟ, ΚΣ sont égales, que la droite ΟΣ est la plus petite, et que la droite ΒΨ est un rayon du cercle, le quarré de ΒΟ sera plus grand que le double du quarré de ΒΨ (12. 2). Du point Ο menons la droite ΟΦ perpendiculaire à ΒΔ. Puisque ΒΔ est plus petit que le double de ΔΦ, et que ΒΔ est à ΔΦ comme le rectangle sous ΔΒ, ΒΦ est au rectangle sous ΔΦ, ΦΒ (1. 6), si l'on décrit un quarré sur ΒΦ, et si sur ΦΔ, on complète le parallélogramme, le rectangle compris sous ΔΒ, ΒΦ sera plus petit que le double du rectangle compris sous ΔΦ, ΦΒ. Joignons ΑΟ; le rectangle sous ΔΒ, ΒΦ sera égal au quarré de ΒΟ (8. 6), et le rectangle sous ΔΦ, ΦΒ égal au quarré de ΟΦ; le quarré de ΒΟ est donc plus petit que le double du quarré de ΟΦ. Mais le quarré de ΒΟ est plus grand que le double du quarré de ΒΨ; le quarré de ΟΦ est donc plus grand que

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 199

σιον· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΟΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ· τὰ ἄρα

jus igitur quadratum ex ΟΦ quadrato ex ΒΨ. Et quoniam æqualis est ΒΑ ipsi ΑΟ, æquale est quadratum ex ΒΑ quadrato ex ΑΟ. Et sunt quadrato quidem ex ΒΑ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ, quadrato autem ex ΟΑ æqualia quadrata ex ΟΦ, ΦΑ; quadrata igitur ex ΒΨ,



ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΦ, ΦΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΦ· πολλῶν ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πελυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ

ΨΑ æqualia sunt quadratis ex ΟΦ, ΦΑ, quorum quadratum ex ΟΦ majus est quadrato ex ΒΨ; reliquum igitur quadratum ex ΦΑ minus est quadrato ex ΨΑ; major igitur ΑΨ ipsâ ΑΦ; ergo multo major est ΑΨ ipsâ ΑΗ. Et est quidem ipsa ΑΨ ad unam polyedri basim,

le quarré de ΒΨ. Mais ΒΑ est égal à ΑΟ; le quarré de ΒΑ est donc égal au quarré de ΑΟ. Mais les quarrés des droites ΒΨ, ΨΑ sont égaux au quarré de la droite ΒΑ (47. 1), et les quarrés des droites ΟΦ, ΦΑ égaux au quarré de la droite ΟΑ; les quarrés des droites ΒΨ, ΨΑ sont donc égaux aux quarrés des droites ΟΦ, ΦΑ; mais le quarré de ΟΦ est plus grand que le quarré de ΒΨ; le quarré restant de ΦΑ est donc plus petit que le quarré de ΨΑ; la droite ΑΨ est donc plus grande que la droite ΑΦ; la droite ΑΨ est donc, à plus forte raison, plus grande que la droite ΑΗ. Mais la

ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν ὥστε  
τὸ πολύεδρον οὐ ψάυσει<sup>24</sup> τῆς ἐλάττονος σφαί-  
ρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

ipsa autem AH ad minoris sphæræ superfi-  
ciem; quare polyedrum non tanget minorem  
sphæram secundum superficiem (\*).

droite AΨ est perpendiculaire à une des bases du polyèdre, et la droite AH est un rayon de la plus petite sphère; les faces du polyèdre ne touchent donc pas la plus petite sphère (\*).

(\*) In omnibus manuscriptis, et in omnibus editionibus græcis & latinisque et aliis, figura ultimæ partis hujus propositionis, et ejus *aliter* a librariis ita vitiata erat ut ratiocinatio cujus ope Euclides ostendit quadrilaterum KBOΣ non tangere minorem sphæram, nequaquam conveniret reliquis quadrilateris, necnon ΥΡΖ triangulo. *Clavius* et postea *Robert Simson* hanc demonstrationem compleverunt; et egomet ipse illam eodem modo complevi in Euclide gallico quem edidi anno 1804. Postea autem cum in figurâ erroris alicujus suspicionem haberem, tentavi figuram quæ et reliquis quadrilateri trianguloque congruens esset non solum in ultimâ parte hujus propositionis, sed etiam et in *aliter*. Quam figuram tentaveram, illam denique reperi, ut in sequentibus unicuique videre licet.

Dico et ipsum ΣΟΠΤ neque tangere minorem sphæram. Ducatur enim a puncto A ad ΣΟΠΤ quadrilateri planum perpendicularis AΨ, et jungantur ΟΨ, ΨΠ. Et quoniam major est KB utraq̃ue ipsarum ΣΟ, ΤΠ; æqualis autem KB utrique ipsarum ΣΤ, ΟΠ; utraque igitur ipsarum ΣΤ, ΟΠ major

(\*) Dans tous les manuscrits, et dans toutes les éditions grecques, latines et autres, la figure de la dernière partie de cette proposition, et de son *aliter* était tellement viciée par les copistes que le raisonnement par lequel Euclide démontre que le quadrilatère KBOΣ ne touche pas la plus petite sphère ne saurait convenir, en aucune manière, aux autres quadrilatères, ni au triangle ΥΡΖ. *Clavius*, et ensuite *Robert Simson*, ont complété cette démonstration; et moi-même, dans mon Euclide français, que je publiai en 1804, je la complétais à la manière de ces deux célèbres géomètres. Mais, dans la suite, ayant soupçonné quelque erreur dans la figure, j'en cherchai une qui pût convenir aux autres quadrilatères et au triangle, non-seulement dans la dernière partie de cette proposition, mais encore dans l'*aliter*. Je trouvai enfin la figure que je cherchais, comme on pourra le voir dans ce qui suit:

Je dis aussi que le quadrilatère ΣΟΠΤ ne touchera pas la plus petite sphère. Car menons du point A au plan du quadrilatère ΣΟΠΤ la perpendiculaire AΨ, et joignons ΟΨ, ΨΠ. Puisque la droite KB est plus grande que chacune des droites ΣΟ, ΤΠ, et que la droite KB est égale à chacune des droites ΣΤ, ΟΠ, chacune des droites ΣΤ, ΟΠ sera plus grande

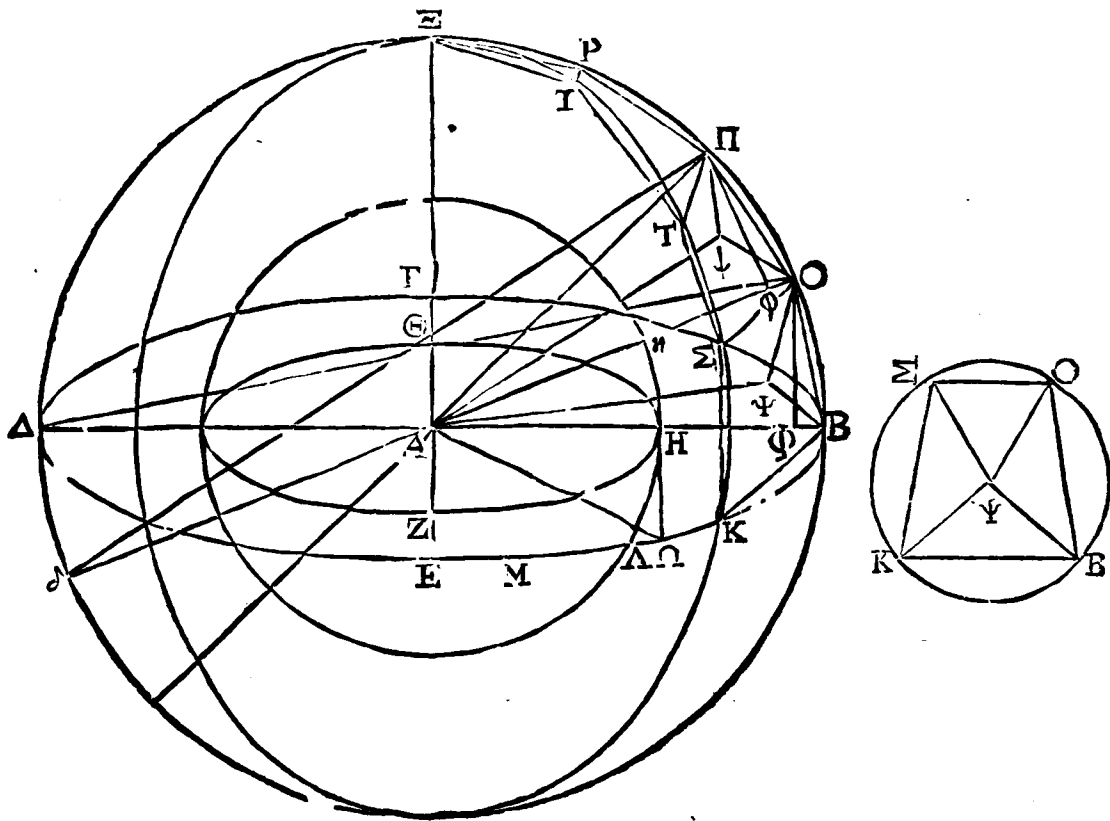


**A Λ Λ Ω Σ.**

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι  
μειζων ἐστὶν ἢ ΑΨ τῆς ΑΗ. Ηχθω ἀπὸ τοῦ Η

**ALITER.**

Ostendendum est autem aliter et expeditius  
majorem esse  $A\Gamma$  ipsā  $AH$ . Ducatur a puncto  $H$



τῇ ΑΗ πρὸς ἰσθμὸν ἢ ΗΩ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΩ.  
Τέμνοντες δὲ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν

ipsi  $AH$  ad rectos ipsa  $H\Omega$ , et jungatur  $A\Omega$ .  
Secantes igitur ipsam  $EB$  circumferentiam bifa-

## AUTREMENT.

Nous allons démontrer autrement et d'une manière plus prompte que la droite  $A\Phi$  est plus grande que la droite  $AH$ . Du point  $H$  menons  $H\Omega$  perpendiculaire à  $AH$ , et joignons  $A\Omega$ . Si nous coupons en deux parties égales l'arc  $EB$ , la moitié

erit utrâque ipsarum  $\Sigma O$ ,  $T\Pi$ . Et quoniam in circulo est quadrilaterum  $\Sigma O\Pi T$ , æquales autem sunt ipsæ  $\Sigma T$ ,  $O\Pi$ , utraque vero ipsarum  $\Sigma O$ ,  $T\Pi$  minor est utrâque ipsarum  $\Sigma T$ ,  $O\Pi$ , atque ex centro circuli est ipsa  $O\psi$ , erit angulus  $O\psi\Pi$  obtusus; quadratum igitur ex  $O\Pi$  majus est quam duplum quadrati ex  $O\psi$ . Ducatur autem a puncto  $\Pi$  ad  $O\delta$  perpendicularis  $\Pi\phi$ , et producat  $OA$  ad  $\delta$ . Et quoniam  $O\delta$  minor

que chacune des droites  $\Sigma O$ ,  $\Pi P$ . Et puisque le quadrilatère  $\Sigma O \Pi P$  est décrit dans un cercle, que les droites  $\Sigma T$ ,  $O \Pi$  sont égales, que chacune des droites  $\Sigma O$ ,  $\Pi P$  est plus petite que chacune des droites  $\Sigma T$ ,  $O \Pi$ , et que  $O \psi$  est un rayon; l'angle  $O \psi \Pi$  sera obtus; le carré de  $O \Pi$  est donc plus grand que le double du carré de  $O \psi$  (12. 2.) Du point  $\Pi$  menons  $\Pi \phi$  perpendiculaire à  $O \delta$ , et prolongeons  $O A$  vers  $\delta$ . Puisque



ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες, κατὰλείπομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτεταγμένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφέρειας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΩ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ

riam, et dimidiam ipsius bifariam, et hoc semper facientes, relinquemus quamdam circumferentiam, quæ est minor circumferentiâ circuli ΒΓΔΕ subtensâ a rectâ æquali ipsi ΗΩ. Relinquatur, et sit ΚΒ circumferentia; minor igitur et

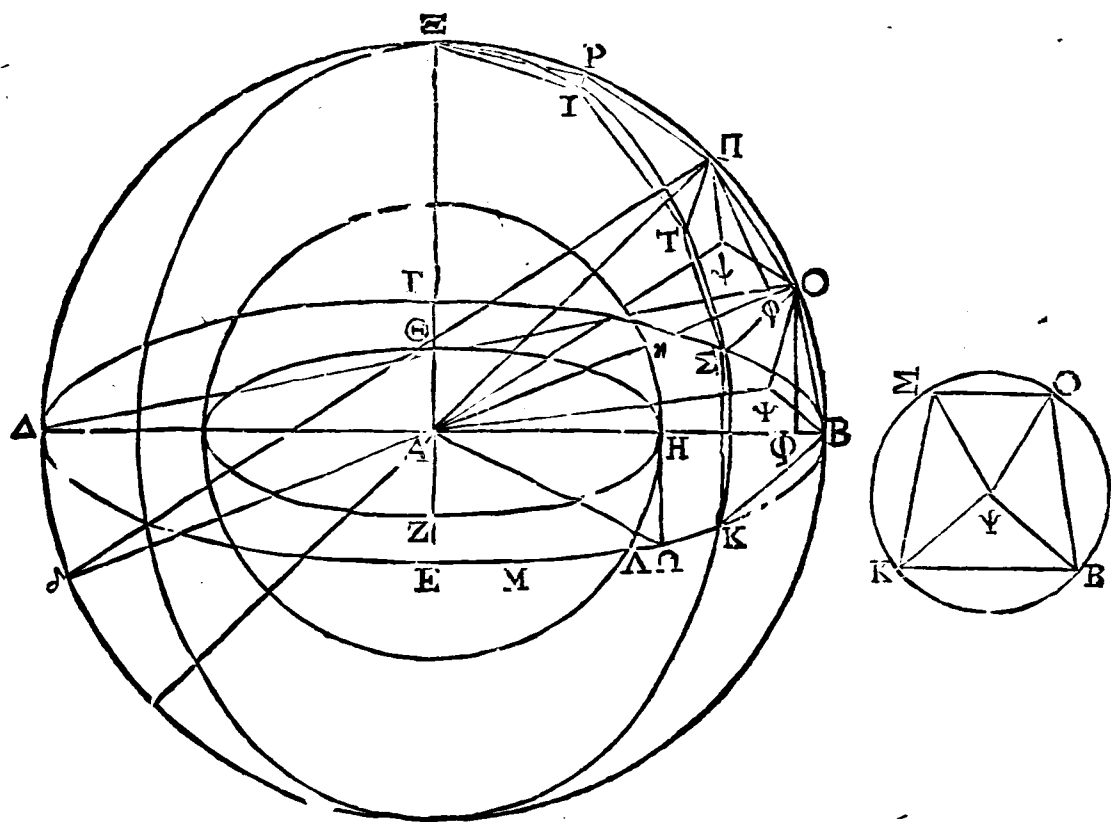
de cet arc en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, il restera enfin un certain arc plus petit que celui de la circonférence du cercle ΒΓΔΕ qui est soutendu par une droite égale à la droite ΗΩ (1. 10). Qu'on ait cet arc, et qu'il soit ΚΒ; la droite ΚΒ sera plus petite que la droite ΗΩ. Et

est duplâ ipsius  $\delta\phi$ , atque est ut  $\delta\delta$  ad  $\delta\phi$  ita rectangulum sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  ad rectangulum sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$ ; rectangulum igitur sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  minus est duplo rectanguli sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$ . Et jungatur ipsa  $\Pi\delta$ ; rectangulum quidem sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  æquale est quadrato ex  $\phi\phi$ , rectangulum vero sub  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  æquale quadrato ex  $\Pi\phi$ ; quadratum igitur ex  $\phi\phi$  minus est duplo quadrati ex  $\Pi\phi$ . Sed quadratum ex  $\phi\phi$  majus est duplo quadrati ex  $\phi\psi$ ; quadratum igitur ex  $\Pi\phi$  majus est quadrato ex  $\phi\psi$ . Et quoniam æqualis est  $OA$  ipsi  $AP$ , æquale erit quadratum ex  $OA$  quadrato ex  $AP$ . Et sunt quidem quadrato ex  $OA$  æqualia quadrata ex ipsis  $\phi\psi$ ,  $\psi A$ , quadrato autem ex  $AP$  æqualia quadrata ex ipsis  $\Pi\phi$ ,  $\phi A$ ; quadrata igitur ex ipsis  $\phi\psi$ ,  $\psi A$  æqualia sunt quadratis ex  $\Pi\phi$ ,  $\phi A$ , ex quibus quadratum ex  $\Pi\phi$  majus est quadrato ex  $\phi\psi$ ; reliquum igitur quadratum ex  $\psi A$  majus est reliquo quadrato ex  $\phi\phi$ ; major igitur recta  $\psi A$  ipsâ  $\phi\phi$ ; multo major igitur recta  $\psi A$  ipsâ  $A\eta$ . Et est quidem recta  $\psi A$  perpendicularis ad  $\Sigma\phi\pi\tau$  quadrilateri planum, recta vero  $A\eta$  est recta ex centro minoris sphæræ; quadrilaterum igitur  $\Sigma\phi\pi\tau$  non tangit minorem sphæram. Similiter utique ostendetur neque quadrilaterum  $\tau\pi\pi\gamma$ , neque triangulum  $\gamma\pi\epsilon$  tangere minorem sphæram.

$\delta\delta$  est plus petit que le double de  $\delta\phi$ , et que  $\delta\delta$  est à  $\delta\phi$  comme le rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  est au rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$ , le rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  sera plus petit que le double du rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$ . Joignons  $\Pi\delta$ ; le rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  sera égal au carré de  $\phi\phi$ , et le rectangle sous  $\delta\phi$ ,  $\phi\phi$  égal au carré de  $\Pi\phi$ ; le carré de  $\phi\phi$  est donc plus petit que le double du carré de  $\Pi\phi$ . Mais le carré de  $\phi\phi$  est plus grand que le double du carré de  $\phi\psi$ ; le carré de  $\Pi\phi$  est donc plus grand que le carré de  $\phi\psi$ . Et puisque  $AO$  est égal à  $AP$ , le carré de  $OA$  sera égal au carré de  $AP$ . Mais les carrés des droites  $\phi\psi$ ,  $\psi A$  sont égaux au carré de  $OA$ , et les carrés des droites  $\Pi\phi$ ,  $\phi A$  sont égaux au carré de  $AP$ ; les carrés des droites  $\phi\psi$ ,  $\psi A$  sont donc égaux aux carrés des droites  $\Pi\phi$ ,  $\phi A$ . Mais le carré de  $\Pi\phi$  est plus grand que le carré de  $\phi\psi$ ; le carré restant de  $\psi A$  est donc plus grand que le carré restant de  $\phi\phi$ ; la droite  $\psi A$  est donc plus grande que la droite  $\phi\phi$ ; donc, à plus forte raison, la droite de  $\psi A$  sera plus grande que la droite  $A\eta$ . Mais  $\psi A$  est perpendiculaire au plan du quadrilatère  $\Sigma\phi\pi\tau$ , et  $A\eta$  est un rayon de la plus petite sphère; le quadrilatère  $\Sigma\phi\pi\tau$  ne touche donc pas la plus petite sphère. On démontrera semblablement que le quadrilatère  $\tau\pi\pi\gamma$ , et le triangle  $\gamma\pi\epsilon$  ne touchent pas la plus petite sphère.

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 203

εὐθεῖα τῆς ΗΩ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ  $KB$  recta ipsâ  $H\Omega$ . Et quoniam in circulo est  
τετράπλευρον, καὶ ἴσιν ἴσαι αἱ  $OB$ ,  $BK$ ,  $ΚΣ$ ,  $BKΣO$  quadrilaterum, et sunt æquales  $OB$ ,



καὶ ἐλάσσων ἡ  $ΟΣ$ . ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BK$ ,  $ΚΣ$ , et minor  $ΟΣ$ ; obtusus igitur est  
 $ΒΨΟ$  γωνία· μείζων ἄρα ἢ  $ΒΟ$  τῆς  $ΒΨ$ . Ἀλλὰ  $ΒΨΟ$  angulus; major igitur  $ΒΟ$  ipsâ  $ΒΨ$ . Sed

puisque le quadrilatère  $BKΣO$  est inscrit dans un cercle, que les droites  $OB$ ,  $BK$ ,  $ΚΣ$  sont égales, et que la droite  $ΟΣ$  est plus petite que chacune de ces droites, l'angle  $ΒΨΟ$  sera obtus; la droite  $ΒΟ$  est donc plus grande que la droite  $ΒΨ$ . Mais

Perpendicularis a puncto  $A$  ad  $ΣΚΒΟ$  quadrilateri planum ducta intra hoc quadrilaterum cadit; Euclides hoc non demonstrat, quia hæc demonstratio illum de viâ suâ amovisset sine ullâ necessitate. Etenim ut ostendatur  $ΣΚΒΟ$  quadrilateri planum non tangere minorem sphaeram, tantummodo est ostendendum perpendicularem a puncto  $A$  ad  $ΣΚΒΟ$  quadrilateri planum ductam minorem esse rectâ  $AH$ .

La perpendiculaire menée du point  $A$  au plan du quadrilatère  $ΣΚΒΟ$  tombe en dedans de ce quadrilatère; Euclide n'en donne pas la démonstration, parce que cette démonstration aurait retardé sa marche sans nécessité. En effet, pour démontrer que le quadrilatère  $ΣΚΒΟ$  ne touche pas la plus petite sphère, il suffit de faire voir que la perpendiculaire menée du point  $A$  au plan du quadrilatère  $ΣΚΒΟ$  est plus petite que la droite  $AH$ .

204 LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς  $BO$  μείζων ἐστὶν<sup>2</sup> ἡ  $H\Omega$ . πολλῶν ἄρα ἡ  $H\Omega$  μείζων ἐστὶ<sup>3</sup> τῆς  $B\Psi$ . μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $H\Omega$  τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>4</sup>  $B\Psi$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $A\Omega$  τῇ  $AB$ , ἴσον ἄρα<sup>5</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A\Omega$  τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $A\Omega$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $H\Omega$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσα τὰ ἀπὸ

ipsâ  $BO$  major est ipsa  $H\Omega$ ; multo igitur major est  $H\Omega$  ipsâ  $B\Psi$ ; majus igitur et quadratum ex  $H\Omega$  quadrato ex  $B\Psi$ . Et quoniam æqualis est  $A\Omega$  ipsi  $AB$ , æquale igitur et quadratum ex  $A\Omega$  quadrato ex  $AB$ . Sed quadrato quidem ex  $A\Omega$  æqualia quadrata ex  $AH$ ,  $H\Omega$ , quadrato autem

$H\Omega$  est plus grand que  $BO$ ; la droite  $H\Omega$  est donc à plus forte raison plus grande que la droite  $B\Psi$ ; le carré de  $H\Omega$  est donc plus grand que le carré de  $B\Psi$ . Mais  $A\Omega$  est égal à  $AB$ ; le carré de  $A\Omega$  est donc égal au carré de  $AB$ . Mais les carrés des droites  $AH$ ,  $H\Omega$  sont égaux au carré de la droite  $A\Omega$ , et les carrés

Utcumque autem se res habeat, sic ostendere licet circuli centrum cadere intra  $\Sigma KBO$  quadrilaterum. Etenim si circuli centrum non caderet intra hoc quadrilaterum, caderet vel in unum laterum ipsius, vel intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt quadrilateri latera. Dico circuli centrum non cadere in unum laterum quadrilateri  $\Sigma KBO$ . Etenim si circuli centrum caderet in unum laterum hujus quadrilateri, hoc latus, existens circuli diameter, majus esset aliis quadrilateri lateribus, quod non ponitur; etenim  $\Sigma K$ ,  $KB$ ,  $BO$  latera inter se sunt æqualia, et latus  $\Sigma O$  minus est unoquoque ipsorum  $\Sigma K$ ,  $KB$ ,  $BO$  laterum. Dico rursus circuli centrum non cadere intra unum segmentorum circuli, quorum bases sunt  $\Sigma KBO$  quadrilateri latera. Etenim si circuli centrum intra unum horum segmentorum caderet, hoc segmentum semicirculo esset majus, et hujus segmenti basis major esset unoquoque reliquorum  $\Sigma KBO$  quadrilateri laterum; quod non ponitur. Similiter utique ostendetur circuli centrum cadere et intra reliqua quadrilatera et intra triangulum  $Y\Phi Z$ .

Quoi qu'il en soit, on peut démontrer ainsi que le centre du cercle tombe en dedans du quadrilatère  $\Sigma KBO$ . Car si le centre du cercle ne tombait pas en dedans de ce quadrilatère, il tomberait ou sur un de ses côtés, ou en dedans d'un des segments de cercle, qui ont pour bases les côtés de ce même quadrilatère. Je dis que le centre du cercle ne tombe pas sur un des côtés du quadrilatère  $\Sigma KBO$ ; car si le centre du cercle tombait sur un des côtés de ce quadrilatère, ce côté, qui serait alors un diamètre du cercle, serait plus grand que chacun des autres côtés de ce même quadrilatère, ce qui n'est point, puisque les côtés  $\Sigma K$ ,  $KB$ ,  $BO$  sont égaux entre eux, et que le côté  $\Sigma O$  est plus petit que chacun des côtés  $\Sigma K$ ,  $KB$ ,  $BO$ . Je dis de plus que le centre du cercle ne tombe pas en dedans d'un des segments de cercle, qui ont pour bases les côtés du quadrilatère  $\Sigma KBO$ . Car si le centre du cercle tombait en dedans d'un de ces segments, ce segment serait plus grand qu'un demi-cercle, et la base de ce même segment serait plus grande que chacun des autres côtés du quadrilatère  $\Sigma KBO$ , ce qui n'est point. On démontrera semblablement que le centre du cercle tombe en dedans des autres quadrilatères et en dedans du triangle  $Y\Phi Z$ .

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 205

τῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $H\Omega$  ἴσα  
ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , ὥν τὸ ἀπὸ τῆς  
 $B\Gamma$  ἑλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $H\Omega$ . λοιπὸν ἄρα  
τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma A$  μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AH$ <sup>6</sup>.  
μείζων ἄρα ἢ  $A\Gamma$  τῆς  $AH$ .

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον εὐσῶν  
εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγ-  
γραπται, μὴ ψαῦδον τῆς ἐλάττονος σφαίρας  
κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ex  $AB$  æqualia quadrata ex  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ ; quadrata  
igitur ex  $AH$ ,  $H\Omega$  æqualia sunt quadratis ex  
 $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , ex quibus quadratum ex  $B\Gamma$  minus  
est quadrato ex  $H\Omega$ ; reliquum igitur quadratum  
ex  $\Gamma A$  majus est quadrato ex  $AH$ ; major igitur  
 $A\Gamma$  ipsâ  $AH$ .

Duabus igitur sphaëris circa idem centrum  
existentibus, in majori sphaërâ solidum po-  
lyedrum descriptum est, non tangens minorem  
sphaëram secundum superficiem. Quod opor-  
tebat facere.

des droites  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  sont égaux au carré de la droite  $AB$ ; les carrés des droites  
 $AH$ ,  $H\Omega$  sont donc égaux aux carrés des droites  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ ; mais le carré de  $B\Gamma$   
est plus petit que le carré de  $H\Omega$ ; le carré restant de  $\Gamma A$  est donc plus grand  
que le carré de  $AH$ ; la droite  $A\Gamma$  est donc plus grande que la droite  $AH$ .

Deux sphères concentriques étant données, on a donc décrit dans la plus grande  
un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère. Ce qu'il  
fallait faire.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εάν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφεῖ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὁμοιαί. Αἱ δὲ ὁμοιαὶ πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ πυραμὶς ἄρα<sup>2</sup>, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγεῖ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ὁμολογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολογον πλευράν, τουτέστιν, ἢ περὶ ἢ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ<sup>3</sup> κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Ομοίως δὲ<sup>4</sup> καὶ ἐκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ<sup>5</sup> κέντρον τὸ Α σφαίρα

## COROLLARIUM.

Si autem et in aliâ sphærâ solido polyedro in ΒΓΔΕ sphærâ simile solidum polyedrum describatur, solidum polyedrum in ΒΓΔΕ sphærâ ad solidum polyedrum in alterâ sphærâ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓΔΕ sphæræ diameter ad alterius sphæræ diametrum. Divisis enim solidis in pyramides numero æquales et ejusdem ordinis, erunt pyramides similes. Similes autem pyramides inter se in triplicatâ ratione sunt homologorum laterum; pyramis igitur, cujus basis quidem est ΚΒΟΣ quadrilaterum, vertex autem Α punctum, ad pyramidem in alterâ sphærâ ejusdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est ejus quam recta ΑΒ ex centro sphæræ circa centrum Α ad rectam ex centro alterius sphæræ. Similiter autem et unaquæque pyramis earum quæ sunt in sphærâ circa centrum

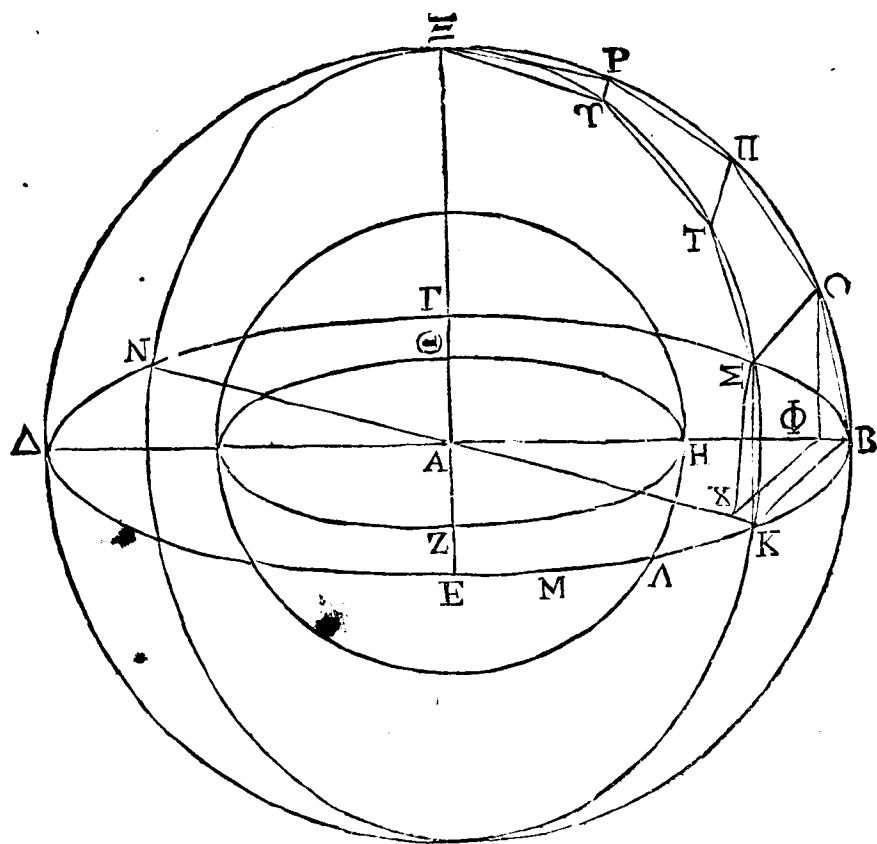
## COROLLAIRE.

Si l'on décrit dans une autre sphère un polyèdre semblable à celui qui est décrit dans la sphère ΒΓΔΕ, le polyèdre décrit dans la sphère ΒΓΔΕ aura avec le polyèdre décrit dans l'autre sphère une raison triplée de celle que le diamètre de la sphère ΒΓΔΕ a avec le diamètre de l'autre sphère. Car ayant divisé ces polyèdres en pyramides égales en nombre et du même ordre, on aura des pyramides semblables. Mais les pyramides semblables sont entre elles en raison triplée des côtés homologues (cor. 8. 12); la pyramide, qui a pour base le quadrilatère ΚΒΟΣ, et pour sommet le point Α, a donc avec la pyramide du même ordre de l'autre sphère une raison triplée de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue; c'est-à-dire, de celle que le rayon ΑΒ de la sphère qui a pour centre le point Α a avec le rayon de l'autre sphère. Semblablement chacune des pyramides de la sphère qui a pour centre le point Α aura avec chacune des pyramides du même

# LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 207

πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῇ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ  
ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἔξει ἢ περ ἡ AB  
πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας<sup>δ</sup> σφαίρας. Καὶ  
ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως  
ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

A ad unamquamque ejusdem ordinis pyrami-  
dem earum quæ sunt in alterâ spherâ, tripli-  
catam rationem habebit ejus quam AB ad rectam  
ex centro alterius spheræ. Et ut unum antece-  
dentium ad unum consequentium ita omnia



ὥστε καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ A  
σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ  
ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λό-  
γον ἔξει<sup>7</sup> ἢ περ ἡ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς  
ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἢ περ ἡ BΔ διάμετρος  
πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. Ὅπερ  
δεῖ δεῖξαι.

antecedentia ad omnia consequentia; quare et  
totum in spherâ circa centrum A solidum polye-  
dram ad totum in alterâ spherâ solidum polye-  
dram triplicatam rationem habebit ejus quam  
AB ad rectam ex centro alterius spheræ, hoc  
est ejus quam BΔ diameter ad alterius spheræ  
diametrum. Quod oportebat ostendere.

ordre comprise dans l'autre sphère une raison triplée de celle que le rayon AB a  
avec le rayon de l'autre sphère. Mais un des antécédents est à un des consé-  
quents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les con-  
séquents ( 12. 5 ); le polyèdre entier compris dans la sphère qui a pour centre  
le point A a donc avec le polyèdre entier compris dans l'autre sphère une raison  
triplée de celle que le rayon AB a avec le rayon de l'autre sphère, c'est-à-dire  
de celle que le diamètre BΔ a avec le diamètre de l'autre sphère. Ce qu'il fallait  
démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν<sup>1</sup> σφαῖραι αἱ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ  $B\Gamma$ ,  $EZ$ . λήγω ὅτι ἡ  $AB\Gamma$  σφαῖρα πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $EZ$ .

Εἰ γὰρ μὴ ἡ  $AB\Gamma$  σφαῖρα πρὸς τὴν  $\Delta EZ$  σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $EZ$ <sup>2</sup>, ἔξει ἄρα ἡ  $AB\Gamma$  σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς  $\Delta EZ$  σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον<sup>3</sup> ἢ περ ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $EZ$ . Εἰχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν  $H\Theta K$ , καὶ νενοήσθω ἡ  $\Delta EZ$  σφαῖρα<sup>4</sup> τῇ  $H\Theta K$  περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν  $\Delta EZ$  στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦδον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς  $H\Theta K$  κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν  $AB\Gamma$  σφαῖραν τῷ ἐν τῇ  $\Delta EZ$  σφαίρᾳ στερεῷ πολύεδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ  $AB\Gamma$  στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ  $\Delta EZ$  στερεὸν

## PROPOSITIO XVIII.

Sphaerae inter se in triplicatâ ratione sunt suarum diametrorum.

Intelligentur sphaerae  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , diametri autem earum ipsae  $B\Gamma$ ,  $EZ$ ; dico  $AB\Gamma$  sphaeram ad  $\Delta EZ$  sphaeram triplicatam rationem habere ejus quam  $B\Gamma$  ad  $EZ$ .

Si enim non  $AB\Gamma$  sphaera ad  $\Delta EZ$  sphaeram triplicatam rationem habet ejus quam  $B\Gamma$  ad  $EZ$ , habebit igitur  $AB\Gamma$  sphaera ad quamdam minorem sphaerâ  $\Delta EZ$  vel ad majorem triplicatam rationem ejus quam  $B\Gamma$  ad  $EZ$ . Habeat primum ad minorem  $H\Theta K$ , et intelligatur  $\Delta EZ$  sphaera circa idem centrum circa quod ipsa  $H\Theta K$ , et describatur in majori  $\Delta EZ$  sphaerâ solidum polyedrum non tangens minorem sphaeram  $H\Theta K$  secundum superficiem, describatur autem et in  $AB\Gamma$  sphaerâ solido polyedro quod est in  $\Delta EZ$  simile solidum polyedrum; solidum igitur polyedrum in  $AB\Gamma$  ad solidum polyedrum

## PROPOSITION XVIII.

Les sphères sont entr'elles en raison triplée de leurs diamètres.

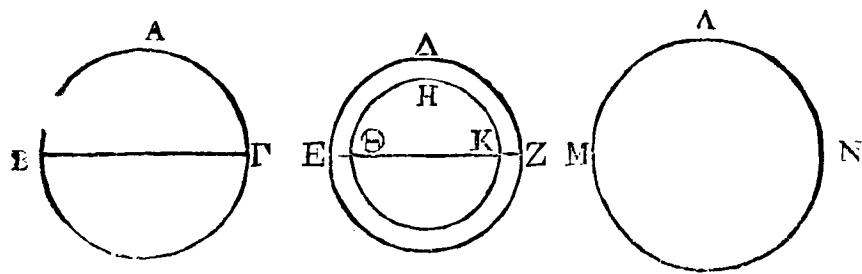
Concevons les sphères  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , dont les diamètres sont les droites  $B\Gamma$ ,  $EZ$ ; je dis que la sphère  $AB\Gamma$  a avec la sphère  $\Delta EZ$  une raison triplée de celle que  $B\Gamma$  a avec  $EZ$ .

Car si la sphère  $AB\Gamma$  n'a pas avec la sphère  $\Delta EZ$  une raison triplée de celle que  $B\Gamma$  a avec  $EZ$ ; la sphère  $AB\Gamma$  aura avec une sphère plus petite ou avec une sphère plus grande que la sphère  $\Delta EZ$  une raison triplée de celle que  $B\Gamma$  a avec  $EZ$ . Que ce soit d'abord avec une sphère  $H\Theta K$  plus petite; concevons la sphère  $\Delta EZ$  placée autour du même centre que la sphère  $H\Theta K$ ; décrivons dans la plus grande sphère  $\Delta EZ$  un polyèdre dont les faces ne touchent pas la plus petite sphère  $H\Theta K$  (17. 12), et dans la sphère  $AB\Gamma$  décrivons un polyèdre semblable à celui qui est décrit dans la sphère  $\Delta EZ$ ; le polyèdre décrit dans la sphère  $AB\Gamma$  aura avec le polyèdre dé-



πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐχει δὲ καὶ<sup>5</sup> ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον<sup>6</sup> ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐστίν, ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλάξ ἄρα<sup>7</sup> ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα στερεὸν πολύεδρον. Μείζων

in ΔΕΖ triplicatam habet rationem ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Habet autem et ΑΒΓ sphæra ad ΗΘΚ sphæram triplicatam rationem ejus quam ΒΓ ad ΕΖ; est igitur ut ΑΒΓ sphæra ad ΗΘΚ sphæram ita solidum polyedrum in ΑΒΓ sphærâ ad solidum polyedrum in ΔΕΖ sphærâ; permutando igitur ut ΑΒΓ sphæra ad polyedrum in ipsâ ita ΗΘΚ sphæra ad solidum polyedrum in ΔΕΖ sphærâ.



δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολύεδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαῖρα πολύεδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον<sup>8</sup>. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα

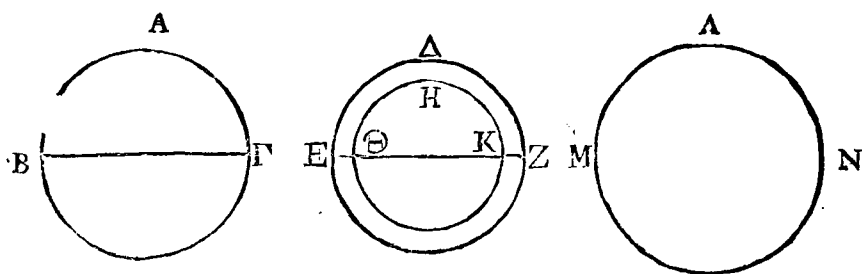
Major autem ΑΒΓ sphæra polyedro quod est in ipsâ; major igitur et ΗΘΚ sphæra polyedro in ΔΕΖ sphærâ. Sed et minor, comprehenditur enim ab ipso, quod impossibile; non igitur ΑΒΓ sphæra ad minorem sphærâ ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ diameter ad ΕΖ. Similiter utique ostendemus ne-

crit dans la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (cor. 17. 12). Mais la sphère ΑΒΓ a avec la sphère ΗΘΚ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ; la sphère ΑΒΓ est donc à la sphère ΗΘΚ comme le polyèdre décrit dans la sphère ΑΒΓ est au polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ (11. 5); donc, par permutation, la sphère ΑΒΓ est au polyèdre décrit dans cette sphère comme la sphère ΗΘΚ est au polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ. Mais la sphère ΑΒΓ est plus grande que le polyèdre qui lui est inscrit; la sphère ΗΘΚ est donc plus grande que le polyèdre décrit dans la sphère ΔΕΖ. Mais elle est plus petite, car elle y est comprise, ce qui est impossible; la sphère ΑΒΓ n'a donc pas avec une sphère plus petite que la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que le diamètre ΒΓ a avec ΕΖ. Nous démontrerons semblablement que la sphère ΔΕΖ n'a pas avec une sphère plus petite



πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινά τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς

que ΔΕΖ sphæram ad minorem sphærâ ΑΒΓ triplicatam habere rationem ejus quam ΕΖ ad ΒΓ. Dico etiam neque ΑΒΓ sphæram ad quamdam majorem sphærâ ΔΕΖ triplicatam rationem habere



τὴν ΕΖ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΑΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΑΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττωτά τινά τῆς ΑΒΓ σφαῖρας, ἐπειδὴ περ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὥς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινά<sup>10</sup> τῆς ΑΒΓ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινά<sup>11</sup> τῆς ΔΕΖ σφαῖρας τριπλασίονα λόγον ἔχει.

ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Si enim possibile, habeat ad majorem ΑΜΝ; invertendo igitur ΑΜΝ sphæra ad ΑΒΓ sphæram triplicatam rationem habet ejus quam diameter ΕΖ ad ΒΓ diametrum. Ut autem ΑΜΝ sphæra ad ΑΒΓ sphæram ita ΔΕΖ sphæra ad quamdam minorem sphærâ ΑΒΓ, quoniam major est sphæra ΑΜΝ ipsâ ΔΕΖ, ut antea demonstravimus; et ΔΕΖ igitur sphæra ad sphæram quamdam minorem sphærâ ΑΒΓ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ ad ΒΓ, quod impossibile ostensum est; non igitur ΑΒΓ sphæra ad quamdam majorem sphærâ ΔΕΖ tri-

que la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que ΕΖ a avec ΒΓ. Je dis de plus que la sphère ΑΒΓ n'a pas avec une sphère plus grande que la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Car si cela se peut, que ce soit avec une sphère ΑΜΝ plus grande. Par inversion, la sphère ΑΜΝ aura avec la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que le diamètre ΕΖ a avec le diamètre ΒΓ. Mais la sphère ΑΜΝ est à la sphère ΑΒΓ comme la sphère ΔΕΖ est à une sphère plus petite que la sphère ΑΒΓ, puisque la sphère ΑΜΝ est plus grande que la sphère ΔΕΖ, ainsi que cela a été démontré; la sphère ΔΕΖ a donc avec une sphère plus petite que la sphère ΑΒΓ une raison triplée de celle que ΕΖ a avec ΒΓ, ce qui a été démontré impossible; la sphère ΑΒΓ n'a donc pas avec une sphère plus grande que la sphère ΔΕΖ

## LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 211

ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

plicatam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ostensum autem est neque ad minorem ; ergo ΑΒΓ sphaera ad ΔΕΖ sphaeram triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais nous avons démontré que ce n'est pas non plus avec une sphère plus petite ; la sphère ΑΒΓ a donc avec la sphère ΔΕΖ une raison triplée de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU DOUZIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### LIBER DECIMUSTERTIUS.

---

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εάν εὐθεΐα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον  
τμηθῇ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν  
τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς  
ἡμισείας τῆς ὅλης<sup>1</sup>.

Εὐθεΐα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον  
λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω  
μείζον τμήμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας

#### PROPOSITIO I.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta  
fuerit, major portio assumens dimidiam totius  
quintuplum potest ipsius ex dimidiâ totius.

Recta enim linea AB extremâ et mediâ ra-  
tione secetur in Γ puncto, et sit ΑΓ major portio,  
et producat in directum ipsi ΑΓ recta ΑΔ,

## LE TREIZIEME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### PROPOSITION I.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré du  
plus grand segment augmenté de la moitié de la droite entière, est égal au quin-  
tuple du carré de la moitié de la droite entière.

Que la ligne droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ,  
et que ΑΓ soit le plus grand segment; menons la droite ΑΔ dans la direction de

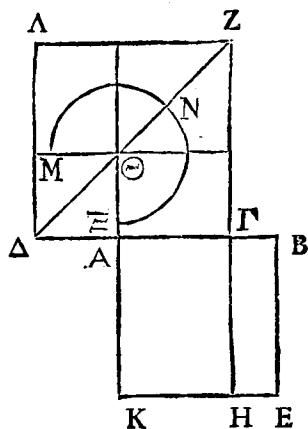
# LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 213

τῇ  $ΑΓ^2$  εὐθεῖα ἡ  $ΑΔ$ , καὶ κείσθω τῆς<sup>3</sup>  $ΑΒ$  ἡμίσεια ἡ  $ΑΔ$ . λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓΔ$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΔΑ$ .

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΔΓ$  τετράγωνά τὰ  $ΑΕ$ ,  $ΔΖ$ , καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ  $ΔΖ$  τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ  $ΖΓ$  ἐπὶ τὸ  $Η$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $ΑΒ$  ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται

et ponatur  $ΑΔ$  ipsius  $ΑΒ$  dimidia; dico quintuplum esse quadratum ex  $ΓΔ$  quadrati ex  $ΔΑ$ .

Describantur enim ex  $ΑΒ$ ,  $ΔΓ$  quadrata  $ΑΕ$ ,  $ΔΖ$ , et describatur figura in  $ΔΖ$ , et producaturs  $ΖΓ$  ad  $Η$ . Et quoniam  $ΑΒ$  extremâ et mediâ ratione secatur in  $Γ$ ; ipsum igitur sub  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$



κατὰ τὸ  $Γ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ . Καὶ ἴστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  τὸ  $ΓΕ$ , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τὸ  $ΖΘ$ . ἴσον ἄρα τὸ  $ΓΕ$  τῷ  $ΖΘ$ . Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ  $ΒΑ$  τῆς  $ΑΔ$ , ἴση δὲ ἡ μὲν  $ΒΑ$  τῇ  $ΚΑ$ , ἡ δὲ  $ΑΔ$  τῇ  $ΑΘ$ . διπλῇ ἄρα καὶ ἡ  $ΚΑ$  τῆς  $ΑΘ$ <sup>5</sup>. Ὡς δὲ ἡ  $ΚΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΘ$  οὕτως τὸ  $ΚΓ$  πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . διπλασίον ἄρα τὸ  $ΚΓ$  τοῦ  $ΓΘ$ <sup>6</sup>. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$  τοῦ  $ΓΘ$  διπλασία<sup>7</sup>. ἴσον ἄρα τὸ  $ΚΓ$  τοῖς  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$ . Εδείχθη δὲ καὶ τὸ  $ΓΕ$  τῷ  $ΖΘ$  ἴσον<sup>8</sup>. ὅλον ἄρα τὸ  $ΑΕ$  τετράγωνον

æquale est ipsi ex  $ΑΓ$ . Et est quidem ipsum sub  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  ipsum  $ΓΕ$ , ipsum autem ex  $ΑΓ$  ipsum  $ΖΘ$ ; æquale igitur  $ΓΕ$  ipsi  $ΖΘ$ . Et quoniam dupla est  $ΒΑ$  ipsius  $ΑΔ$ , sed æqualis quidem  $ΒΑ$  ipsi  $ΚΑ$ , ipsa vero  $ΑΔ$  ipsi  $ΑΘ$ ; dupla igitur et  $ΚΑ$  ipsius  $ΑΘ$ . Ut autem  $ΚΑ$  ad  $ΑΘ$  ita  $ΚΓ$  ad  $ΓΘ$ ; duplum igitur  $ΚΓ$  ipsius  $ΓΘ$ . Sunt autem et  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$  ipsius  $ΓΘ$  dupla; æquale igitur  $ΚΓ$  ipsis  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$ . Ostensum autem est et  $ΓΕ$  æquale ipsi  $ΖΘ$ ; to-

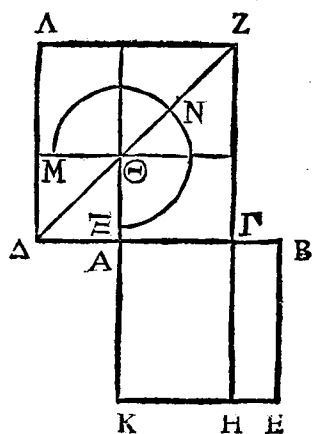
$ΑΓ$ , et faisons  $ΑΔ$  égal à la moitié de  $ΑΒ$ ; je dis que le quarré de  $ΓΔ$  est quintuple du quarré de  $ΔΑ$ .

Car décrivons avec les droites  $ΑΒ$ ,  $ΔΓ$  les quarrés  $ΑΕ$ ,  $ΔΖ$ ; achevons la figure dans  $ΔΖ$ , et prolongeons  $ΖΓ$  vers le point  $Η$ . Puisque la droite  $ΑΒ$  est coupé en extrême et moyenne raison au point  $Γ$ , le rectangle sous  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  est égal au quarré de  $ΑΓ$  ( déf. 3 et 17. 6 ). Mais le rectangle sous  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$  est égal à  $ΓΕ$ , et le quarré de  $ΑΓ$  est égal à  $ΖΘ$ ; le rectangle  $ΓΕ$  est donc égal à  $ΖΘ$ . Et puisque  $ΒΑ$  est double de  $ΑΔ$ ; que  $ΒΑ$  est égal à  $ΚΑ$ , et  $ΑΔ$  égal à  $ΑΘ$ , la droite  $ΚΑ$  sera double de  $ΑΘ$ . Mais  $ΚΑ$  est à  $ΑΘ$  comme  $ΚΓ$  est à  $ΓΘ$  ( 1. 6 ); le rectangle  $ΚΓ$  est donc double de  $ΓΘ$ . Mais les surfaces  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$  sont doubles de  $ΓΘ$  ( 43. 1 );  $ΚΓ$  est donc égal aux surfaces  $ΛΘ$ ,  $ΘΓ$  ( 43. 1 ). Mais on a démontré que  $ΓΕ$  est égal à  $ΖΘ$ ; le quarré entier

214 LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνόμονι. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. Ἰσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνόμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ

tum igitur AE quadratum æquale est gnomoni ΜΝΞ. Et quoniam dupla est BA ipsius ΑΔ, quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex ΑΔ, hoc est AE ipsius ΔΘ. Æquale autem AE gnomoni



ἄρα γνόμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΘΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΜΝΞ; et ΜΝΞ igitur gnomon quadruplus est ipsius ΔΘ; totum igitur ΔΖ quintuplum est ipsius ΔΘ. Et est ΔΖ quidem ipsum ex ΔΓ, ipsum vero ΘΔ ipsum ex ΔΑ; quadratum igitur ex ΓΔ quintuplum est quadrati ex ΔΑ.

Si igitur recta, etc.

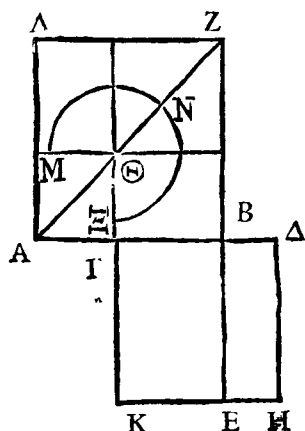
AE est donc égal au gnomon ΜΝΞ. Mais BA est double de ΑΔ; le carré de BA est donc quadruple du carré de ΑΔ (20. 6), c'est-à-dire que AE est quadruple de ΔΘ. Mais AE est égal au gnomon ΜΝΞ; le gnomon ΜΝΞ est donc quadruple de ΔΘ; le carré entier ΔΖ est donc quintuple de ΔΘ. Mais ΔΖ est le carré de ΔΓ, et ΘΔ le carré de ΔΑ; le carré de ΓΔ est donc quintuple du carré de ΔΑ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Si recta linea partis suæ quintuplum possit, duplum autem dictæ partis extremâ et mediâ ratione secetur; major portio reliqua pars est rectæ a principio.



Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τμήματος ἑαυτῆς τοῦ AG πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ AG διπλῆς ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓΒ.

Recta enim linea AB partis suæ AG quintuplum possit, et ipsius AG dupla sit ΓΔ; dico, ipsius ΓΔ extremâ et mediâ ratione sectæ, portionem majorem esse ΓΒ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν AB, ΓΔ τετράγωνα τὰ AZ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω<sup>2</sup> ἐν τῷ AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZB ἐπὶ τὸ E<sup>3</sup>. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AG πενταπλάσιόν ἐστι τὸ AZ τοῦ AΘ,

Describantur enim ex utrâque ipsarum AB, ΓΔ quadrata AZ, ΓΗ, et describatur figura in AZ, et producaturs ZB ad E. Et quoniam quintuplum est ipsum ex BA ipsius ex AG, quintuplum est AZ ipsius AΘ; quadruplus igitur

PROPOSITION II.

Si le carré d'une ligne droite est égal au quintuple du carré d'un de ses segments, et si le double de ce segment est coupé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est la partie restante de la droite premièrement exposée.

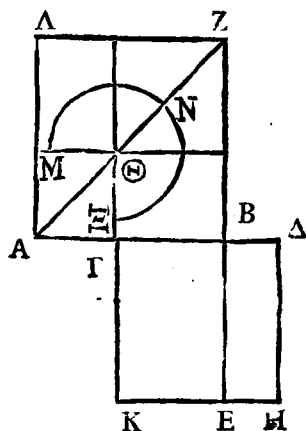
Que le carré de la droite AB soit égal au quintuple du carré de son segment AG, et que ΓΔ soit double de AG; je dis que si la droite ΓΔ est coupée en extrême et moyenne raison, la droite ΓΒ sera son plus grand segment.

Car décrivons avec les droites AB, ΓΔ, les carrés AZ, ΓΗ; achevons la figure dans AZ, et prolongeons ZB vers le point E. Puisque le carré de BA est quintuple du carré de AG, la surface AZ sera quintuple de AΘ; le gnomon MNE est donc

216 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετραπλάσιος<sup>5</sup> ἄρα ὁ ΜΝΞ γνῶμων τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ<sup>6</sup>, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνῶμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνῶμων τῷ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ· διπλῇ ἄρα

MNΞ gnomon ipsius ΑΘ. Et quoniam dupla est ΔΓ ipsius ΓΑ, quadruplum igitur est ipsum ex ΔΓ ipsius ex ΓΑ, hoc est ΓΗ ipsius ΑΘ. Ostensus est autem et MNΞ gnomon quadruplus ipsius ΑΘ; æqualis igitur MNΞ gnomon ipsi ΓΗ. Et quoniam dupla est ΔΓ ipsius ΓΑ, sed æqualis quidem ΔΓ ipsi ΓΚ, ipsa vero



καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια<sup>7</sup>. ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΑΘ, ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνῶμων ἴσος τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ, τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ

ΑΓ ipsi ΓΘ; dupla igitur et ΚΓ ipsius ΓΘ; duplum igitur et ΚΒ ipsius ΒΘ. Sunt autem et ipsa ΑΘ, ΘΒ ipsius ΘΒ dupla; æquale igitur ΚΒ ipsis ΑΘ, ΘΒ. Ostensus est autem et totus MNΞ gnomon toti ΓΗ æqualis; et reliquum igitur ΘΖ ipsi ΒΗ est æquale. Et est quidem ΒΗ ipsum sub ΓΔ, ΔΒ, æqualis enim ipsa ΓΔ ipsi ΔΗ, ipsum ΘΖ vero ipsum ex ΒΓ; ipsum igitur sub ΓΔ, ΔΒ æquale est ipsi ex ΓΒ; est igitur ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΓΒ ad ΒΔ. Major autem ΔΓ ipsâ ΓΒ;

quadruple de ΑΘ. Mais ΔΓ est double de ΓΑ, le quarré de ΔΓ est donc quadruple du quarré de ΓΑ (20. 6), c'est-à-dire que ΓΗ est quadruple de ΑΘ. Mais on a démontré que le gnomon ΜΝΞ est quadruple de ΑΘ; le gnomon ΜΝΞ est donc égal à ΓΗ. Et puisque ΔΓ est double de ΓΑ, que ΔΓ est égal à ΓΚ, et ΑΓ égal à ΓΘ; la droite ΚΓ sera double de ΓΘ; le rectangle ΚΒ est donc double de ΒΘ. Mais les rectangles ΑΘ, ΘΒ pris ensemble sont doubles de ΘΒ (43. 11); le rectangle ΚΒ est donc égal aux rectangles ΑΘ, ΘΒ. Mais on a démontré que le gnomon entier ΜΝΞ est égal au rectangle entier ΓΗ; le quarré restant ΘΖ est donc égal à ΒΗ. Mais ΒΗ est le rectangle sous ΓΔ, ΔΒ, car ΓΔ est égal à ΔΗ, et ΘΖ est le quarré de ΒΓ; le rectangle sous ΓΔ, ΔΒ est donc égal au quarré de ΓΒ; la droite ΔΓ est donc à ΓΒ comme ΓΒ est à ΒΔ (17. 6). Mais ΔΓ est plus grand que ΓΒ; la droite ΓΒ est



## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 217

ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. Τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓΒ.

Εάν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

Major igitur et ΓΒ ipsâ ΒΔ. Rectæ igitur ΓΔ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ipsa ΓΒ.

Si igitur recta, etc.

### ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ ἡ διπλῇ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῇ τῆς ΓΑ<sup>1</sup>. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ<sup>2</sup>. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ<sup>3</sup>. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ<sup>4</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασίων ἐστὶ<sup>5</sup> τῆς ΓΑ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλασίων<sup>6</sup> ἐστὶ τῆς ΓΑ, πολλῶ γὰρ μείζον<sup>7</sup> τὸ ἄτοπον· ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῇ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### LEMMA.

Duplam autem ipsius ΑΓ majorem esse quam ΓΒ, sic ostendendum est.

Si enim non, sit, si possibile, ipsa ΒΓ dupla ipsius ΓΑ; quadruplum igitur quadratum ex ΒΓ quadrati ex ΓΑ; quintupla igitur quadrata ex ipsis ΒΓ, ΓΑ quadrati ex ΓΑ. Ponitur autem et quadratum ex ΒΑ quintuplum quadrati ex ΓΑ; quadratum igitur ex ΒΑ æquale est quadratis ex ipsis ΒΓ, ΓΑ, quod impossibile; non igitur ΒΓ dupla est ipsius ΓΑ. Similiter utique demonstrabimus neque minorem quam ΒΓ duplam esse ipsius ΓΑ; multo enim majus absurdum; ergo ipsius ΑΓ dupla major est quam ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

donc plus grande que ΒΔ. Si donc la droite ΓΔ est coupée en extrême et moyenne raison, la droite ΓΒ sera le plus grand segment. Donc, etc.

### L E M M E.

On démontrera, de la manière suivante, que le double de ΑΓ est plus grand que ΓΒ.

Car que cela ne soit point, si cela est possible, et que ΒΓ soit double de ΓΑ; le carré de ΒΓ sera quadruple du carré de ΓΑ; les carrés des droites ΒΓ, ΓΑ pris ensemble seront donc quintuples du carré de ΓΑ. Mais on a supposé que le carré de ΒΑ est aussi quintuple du carré de ΓΑ; le carré de ΒΑ est donc égal aux carrés des droites ΒΓ, ΓΑ, ce qui est impossible (4. 2); la droite ΒΓ n'est pas double de ΓΑ. Nous démontrerons semblablement qu'une droite plus petite que ΒΓ n'est pas double de ΓΑ, car l'absurdité serait encore plus grande; le double de ΑΓ est donc plus grand que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

## PROPOSITIO III.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμήμα, προσλαβὼν τὴν ἡμισείαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ<sup>1</sup> ΑΓ, καὶ τετμήσθω ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν<sup>2</sup> τὸ σχῆμα. Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ· τετραπλάσιον ἄρα<sup>4</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν<sup>5</sup> ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ<sup>6</sup>· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit; minor portio, assumens dimidiam majoris portionis, quintuplum potest quadrati ex dimidiâ majoris portionis.

Recta enim quævis AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit major portio ΑΓ, et secetur ΑΓ bifariam in Δ; dico quintuplum esse quadratum ex ΒΔ quadrati ex ΔΓ.

Describatur enim ex AB quadratum ΑΕ, et compleatur dupla figura. Et quoniam dupla est ΑΓ ipsius ΓΔ; quadruplum igitur ipsum ex ΑΓ ipsius ex ΓΔ, hoc est ΡΣ ipsius ΖΗ. Et quoniam rectangulum sub AB, ΒΓ æquale est quadrato ex ΑΓ, et est rectangulum quidem sub AB, ΒΓ ipsum ΓΕ, quadratum vero ex ΑΓ ipsum ΡΣ; ergo ΓΕ æquale est ipsi ΡΣ. Quadruplum autem ΡΣ ipsius ΖΗ; quadruplum igitur et ΓΕ

## PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison; le quarré du plus petit segment, augmenté de la moitié du plus grand segment, est égal au quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.

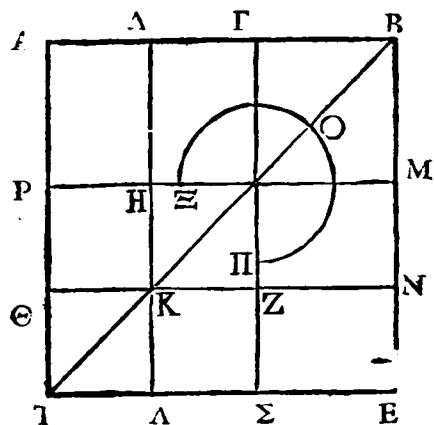
Qu'une droite quelconque AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que ΑΓ soit le plus grand segment, et coupons ΑΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le quarré de ΒΔ est quintuple du quarré de ΔΓ.

Car décrivons avec AB le quarré ΑΕ, et construisons une double figure. Puisque ΑΓ est double de ΓΔ, le quarré de ΑΓ est quadruple du quarré de ΓΔ, c'est-à-dire que ΡΣ est quadruple de ΖΗ. Et puisque le rectangle sous AB, ΒΓ est égal au quarré de ΑΓ (17. 6), que le rectangle sous AB, ΒΓ est ΓΕ, et que le quarré de ΑΓ est ΡΣ, le rectangle ΓΕ sera égal à ΡΣ. Mais ΡΣ est quadruple de ΖΗ; le rectangle ΓΕ est

# LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 219

τοῦ ΖΗ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΑ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ἄστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Αλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον<sup>7</sup>· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσ- κείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΗ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ

ipsius ΖΗ. Rursus quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΓ, æqualis est et ΘΚ ipsi ΚΖ; quare et ΗΖ quadratum æquale est quadrato ΘΑ; æqualis igitur ΗΚ ipsi ΚΛ, hoc est ΜΝ ipsi ΝΕ; quare et ΜΖ ipsi ΖΕ est æquale. Sed ΜΖ ipsi ΓΗ est æquale; et ΓΗ igitur ipsi ΖΕ est æquale. Commune apponatur ipsum ΓΝ; gnomon igitur ΞΟΗ æqualis est rectangulo



ΓΕ. Αλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΖΗ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα<sup>8</sup> γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου· ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. Αλλ' ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ<sup>9</sup>· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πεντα- πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΓΕ. Sed ΓΕ quadruplum ostensum est ipsius ΖΗ; et ΞΟΠ igitur gnomon quadruplus est ΖΗ quadrati; ergo ΞΟΠ gnomon et ΖΗ quadratum quintuplum est ipsius ΖΗ. Sed ΞΟΠ gnomon et ΖΗ quadratum sunt ipsum ΔΝ; et est quidem ΔΝ quadratum ex ΔΒ; ipsum vero ΗΖ quadratum ex ΔΓ; quadratum igitur ex ΔΒ quintuplum est quadrati ex ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

donc quadruple de ΖΗ. De plus, puisque ΑΔ est égal à ΔΓ, et ΘΚ égal à ΚΖ (4. 1), le carré ΗΖ sera égal au carré ΘΑ; la droite ΗΚ est donc égale à ΚΛ, c'est-à-dire ΜΝ égal à ΝΕ. Le rectangle ΜΖ est donc égal au rectangle ΖΕ (36. 1). Mais le rectangle ΜΖ est égal à ΓΗ (43. 1); le rectangle ΓΗ est donc égal à ΖΕ. Ajoutons le rectangle commun ΓΝ; le gnomon ΞΟΠ sera égal à ΓΕ. Mais on a démontré que ΓΕ est quadruple de ΖΗ; le gnomon ΞΟΠ est donc quadruple du carré de ΖΗ; le gnomon ΞΟΠ conjointement avec le carré ΖΗ est donc quintuple du carré de ΖΗ. Mais le gnomon ΞΟΠ avec le carré ΖΗ forment le carré ΔΝ, et ΔΝ est le carré de ΔΒ, et ΗΖ est le carré de ΔΓ; le carré de ΔΒ est donc quintuple du carré de ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφοτέρω τετράγωνα, τριπλάσια ἔστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εστω εὐθεῖα ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ  $ΑΓ$ . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  τριπλάσια ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΓΑ$ .

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $ΑΔΕΒ$ , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ  $AB$  ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ μείζον τμήμα ἔστιν ἡ  $ΑΓ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ . Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  τὸ  $AK$ , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τὸ  $\Theta H$ . ἴσον ἄρα ἔστι τὸ  $AK$  τῷ  $\Theta H$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἔστι τὸ  $AZ$  τῷ  $ZE$ , κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΓΚ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $AK$  ὅλῳ τῷ  $ΓΕ$  ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα  $AK$ ,  $ΓΕ$  τοῦ  $AK$  ἐστὶ διπλάσια. Ἀλλὰ τὰ  $AK$ ,  $ΓΕ$  ὁ  $\Lambda MN$  γνώμων ἔστι καὶ τὸ  $ΓΚ$  τετράγωνον.

## PROPOSITIO IV.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit; ipsa ex totâ et minore portione, utraque simul quadrata, tripla sunt quadrati ex majori portione.

Sit recta  $AB$ , et secetur extremâ et mediâ ratione in  $\Gamma$ , et sit major portio  $ΑΓ$ ; dico ipsa ex  $AB$ ,  $B\Gamma$  tripla esse ipsius ex  $ΑΓ$ .

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $ΑΔΕΒ$ , et compleatur figura. Quoniam igitur  $AB$  extremâ et mediâ ratione secta est in  $\Gamma$ , et major portio est  $ΑΓ$ ; rectangulum igitur sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  æquale est quadrato ex  $ΑΓ$ . Et est quidem rectangulum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  ipsum  $AK$ , quadratum autem ex  $ΑΓ$  ipsum  $\Theta H$ ; æquale igitur est  $AK$  ipsi  $\Theta H$ . Et quoniam æquale est ipsum  $AZ$  ipsi  $ZE$ , commune apponatur ipsum  $ΓΚ$ ; totum igitur  $AK$  toti  $ΓΕ$  est æquale; ipsa igitur  $AK$ ,  $ΓΕ$  ipsius  $AK$  sunt dupla. Sed ipsa  $AK$ ,  $ΓΕ$  ipse  $\Lambda MN$  gnomon

## PROPOSITION IV.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré de la droite entière, conjointement avec le carré du plus petit segment, est triple du carré du plus grand segment.

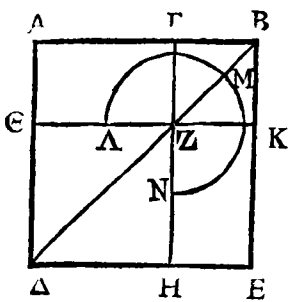
Soit la droite  $AB$ ; qu'elle soit coupée en extrême et moyenne raison au point  $\Gamma$ , et que  $ΑΓ$  soit le plus grand segment; je dis que le carré de la droite  $AB$ , conjointement avec le carré de  $B\Gamma$ , est triple du carré de  $ΓΑ$ .

Car décrivons avec  $AB$  le carré  $ΑΔΕΒ$ , et complétons la figure. Puisque  $AB$  est coupé en extrême et moyenne raison au point  $\Gamma$ , et que  $ΑΓ$  est le plus grand segment, le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  sera égal au carré de  $ΑΓ$  ( 17. 6 ). Mais le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  est  $AK$ , et le carré de  $ΑΓ$  est  $\Theta H$ ; le rectangle  $AK$  est donc égal à  $\Theta H$ . Et puisque  $AZ$  est égal à  $ZE$  ( 43. 1 ), ajoutons le carré commun  $ΓΚ$ ; le rectangle entier  $AK$  sera égal au rectangle entier  $ΓΕ$ ; le rectangle  $AK$ , conjointement avec  $ΓΕ$ , est donc double de  $AK$ . Mais les rectangles  $AK$ ,  $ΓΕ$  contiennent le gnomon

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 221

ὁ ἄρα  $\Delta MN$  γνῶμων καὶ τὸ  $\Gamma K$  τετράγωνον δι-  
πλάσιά ἐστι τοῦ  $\Delta K$ . Ἀλλὰ μὲν καὶ τὸ  $\Delta K$  τῷ  
 $\Theta H$  ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα  $\Delta MN$  γνῶμων, καὶ τὸ  
 $\Gamma K$  τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ  $\Theta H$ · ὥστε καὶ  
ὁ  $\Delta MN$  γνῶμων καὶ τὰ  $\Gamma K$ ,  $\Theta H$  τετράγωνα τρι-

sunt et  $\Gamma K$  quadratum; gnomon igitur  $\Lambda MN$  et quadratum  $\Gamma K$  dupla sunt ipsius  $AK$ . At vero et ipsum  $AK$  ipsi  $\Theta H$  ostensum est æquale; ergo  $\Lambda MN$  gnomon, et  $\Gamma K$  quadratum dupla sunt ipsius  $\Theta H$ ; quare et  $\Lambda MN$  gnomon et  $\Gamma K$ ,  $\Theta H$  qua-



πλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. Καὶ ἴστιν ὁ μὲν ΑΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνον, ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνον, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

drata tripla sunt quadrati  $\Theta H$ . Et sunt quidem  $\Delta M N$  gnomon et  $\Gamma K$ ,  $\Theta H$  quadrata, totum  $A E$  et  $\Gamma K$ , quæ sunt ex ipsis  $A B$ ,  $B \Gamma$  quadrata, ipsum autem  $H \Theta$  ipsum ex  $\Delta \Gamma$  quadratum; quadrata igitur ex  $A B$ ,  $B \Gamma$  tripla sunt quadrati ex  $\Delta \Gamma$ . Quod oportebat ostendere.

$\Delta MN$  et le carré  $\Gamma K$ ; le gnomon  $\Delta MN$ , conjointement avec le carré  $\Gamma K$ , est donc double du rectangle  $AK$ . Mais on a démontré que  $AK$  est égal à  $\Theta H$ ; le gnomon  $\Delta MN$ , conjointement avec le carré  $\Gamma K$ , est donc double de  $\Theta H$ ; le gnomon  $\Delta MN$ , conjointement avec les carrés  $\Gamma K$ ,  $\Theta H$ , est donc triple du carré  $\Theta H$ . Mais le gnomon  $\Delta MN$ , conjointement avec les carrés  $\Gamma K$ ,  $\Theta H$ , est le carré entier  $AE$  conjointement avec  $\Gamma K$ . Mais  $EA$ ,  $\Gamma K$  sont les carrés des droites  $AB$ ,  $BF$ , et  $H\Theta$  est le carré de  $AF$ ; le carré de  $AB$ , conjointement avec le carré de  $BF$ , est donc triple du carré de  $AF$ . Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ἢ ὅλη<sup>2</sup> εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμήμά ἐστιν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον<sup>3</sup>, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ὃ AG, καὶ τῇ AG ἴση κείσθω<sup>4</sup> ἢ AD· λέγω ὅτι ἢ ΔB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μείζον τμήμά ἐστιν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἢ AB.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν<sup>5</sup> ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup> AG. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν<sup>7</sup> AB, BG τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ ΓΘ, ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τὸ EΘ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ<sup>8</sup>. καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE. Κοινὸν

## PROPOSITIO V.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secta fuerit, et adjiciatur ipsi æqualis majori portioni; tota recta extremâ et mediâ ratione secta est, et major portio est ipsa a principio recta.

Recta enim linea AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit AG major portio, et ipsi AG æqualis ponatur AD; dico AB rectam extremâ et mediâ ratione secari in puncto A, et majorem portionem esse a principio rectam AB.

Describatur enim ex AB quadratum AE, et compleatur figura. Quoniam igitur AB extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, ipsum igitur sub AB, BG æquale est ipsi ex AG. Et est quidem ipsum sub AB, BG ipsum GE; ipsum vero ex AG ipsum ΓΘ; æquale igitur GE ipsi ΓΘ. Sed ipsi GE quidem æquale est EΘ, ipsi vero ΘΓ æquale ipsum ΔΘ; et

## PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, et si on lui ajoute une droite égale au plus grand segment, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et le plus grand segment sera la droite premièrement exposée.

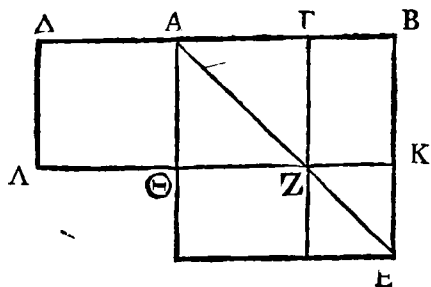
Que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que AG soit le plus grand segment, et faisons AD égal à AG; je dis que la droite ΔA est coupée en extrême et moyenne raison au point A, et que la droite AB premièrement exposée est le plus grand segment.

Car décrivons avec AB le quarré AE, et achevons la figure. Puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, le rectangle sous AB, BG sera égal au quarré de AG (17. 6). Mais le rectangle sous AB, BG est ΓE, et le quarré de AG est ΓΘ; le rectangle ΓE est donc égal à ΓΘ. Mais EΘ est égal à ΓE, et ΔΘ à

# LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 223

προσκέισθω τὸ ΘΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλον τῷ ΑΕ  
 ἔστιν ἴσον<sup>9</sup>. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ,  
 ΔΑ, ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ, τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς  
 ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ

ΔΘ ἰgitur æquale est ipsi ΘΕ. Commune apponatur  
 ΘΒ; totum igitur ΔΚ toti ΑΕ est æquale. Et est ΔΚ  
 quidem ipsum sub ΒΔ, ΔΑ, æqualis enim ΑΔ ipsi  
 ΔΑ, ipsum autem ΑΕ ipsum ex ΑΒ; ipsum igitur



τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ  
 ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μεί-  
 ζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ  
 μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεί-  
 ζον τμήμα ἔστιν ἡ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sub ΒΔ, ΔΑ æquale est ipsi ex ΑΒ; est igitur  
 ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Major autem ΔΒ  
 quam ΒΑ; major igitur et ΒΑ quam ΑΔ; ergo  
 ΔΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Α,  
 et major portio est ΑΒ. Quod oportebat os-  
 tendere.

ΘΓ ( 4. 1 ); le quarré ΔΘ est donc égal à ΘΕ. Ajoutons le rectangle commun ΘΒ;  
 le rectangle entier ΔΚ sera égal au quarré entier ΑΕ. Mais ΔΚ est le rectangle  
 sous ΒΔ, ΔΑ, car ΑΔ est égal à ΔΛ, et ΑΕ est le quarré de ΑΒ; le rectangle sous  
 ΒΔ, ΔΑ est donc égal au quarré de ΑΒ; la droite ΔΒ est donc à la droite ΒΑ comme  
 ΒΑ est à ΑΔ ( 17. 6. ) Mais ΔΒ est plus grand que ΒΑ; la droite ΒΑ est donc plus  
 grande que la droite ΑΔ; la droite ΔΒ est donc coupée en extrême et moyenne  
 raison au point Α, et ΑΒ est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΑΛΛΩΣ'.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφοτέρος ἢ ὅλη καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν ὅλην οὕτως ἢ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς συναμφοτέρος ἢ BAG πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG.

Κείσθω γὰρ τῇ AG ἴση ἢ AD· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἢ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG. Επεὶ γὰρ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μείζον τμήμά ἐστι τὸ AG· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἢ AG πρὸς τὴν GB. Ἰση δὲ ἢ AG τῇ AD· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ BA πρὸς τὴν AD οὕτως ἢ AG πρὸς τὴν GB· ἀνάπαλιν ἄρα ἔστιν ὡς ἢ ΔA πρὸς τὴν AB οὕτως ἢ BG πρὸς τὴν ΓA· συνθέντι ἄρα ἔστιν ὡς ἢ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG. Ἰση δὲ ἔστιν ἢ ΔA τῇ AG· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἢ BAG πρὸς τὴν BA οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς

## ALITER.

Si recta linea extremâ et mediâ ratione secuerit, erit ut utraque simul tota et major portio ad totam ita tota ad maiorem portionem.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ, et sit major portio AG· dico esse ut utraque simul BAG ad BA ita BA ad AG.

Ponatur enim ipsi AG æqualis AD; dico esse ut ΔB ad BA ita BA ad AG. Quoniam enim AB extremâ et mediâ ratione secatur in Γ, et major portio est AG; est igitur ut BA ad AG ita AG ad GB. Æqualis autem AG ipsi AD; est igitur ut BA ad AD ita AG ad GB; invertendo igitur est ut ΔA ad AB ita BG ad ΓA; componendo igitur est ut ΔB ad BA ita BA ad AG. Æqualis autem ΔA ipsi AG; est igitur ut utraque simul BAG ad BA ita BA ad AG. Et quoniam

## AUTREMENT.

Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, la droite entière, conjointement avec le plus grand segment, sera à la droite entière comme la droite entière est au plus grand segment.

Qu'une droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que AG en-soit le plus grand segment; je dis que les droites BA, AG, prises ensemble, sont à BA comme BA est à AG.

Car faisons AD égal à AG; je dis que ΔB est à BA comme BA est à AG; car puisque AB est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, et que AG est le plus grand segment, BA sera à AG comme AG est à GB (17.6). Mais AG est égal à AD; la droite BA est donc à AD comme AG est à GB; donc, par inversion, ΔA est à AB comme BG est à ΓA; donc, par addition, ΔB est à BA comme BA est à AG. Mais ΔA est égal à AG; les droites BA, AG, prises ensemble, sont donc à BA comme BA est à AG.



## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 225

ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως  
ostensum est ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ; æqualis  
autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΑ

Δ ————— Α ————— Γ ————— Β

ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ita ΒΑ ad ΑΔ. Ipsa igitur ΔΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Α, et major portio est ipsa a principio recta ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

### ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

### ANALYSIS ET SYNTHESIS.

Τί ἐστὶν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ σύνθεσις<sup>2</sup>;

Ανάλυσις μὲν οὖν<sup>3</sup> ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ<sup>4</sup> λήψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν<sup>5</sup>.

Quid est analysis et quid est synthesis?

Analysis quidem est sumptio quæsitæ tanquam concessi per consequentia in aliquod verum concessum.

Synthesis autem sumptio concessi per consequentia in quæsitæ conclusionem vel deprehensionem.

Mais on a démontré que ΔΒ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ, et ΑΓ est égal à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. La droite ΔΒ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Α, et la droite ΑΒ, premièrement exposée, est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

### ANALYSE ET SYNTHÈSE.

Ce que c'est que l'analyse, et ce que c'est que la synthèse.

Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé.



226 LE TREIZIEMÈ LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ΤΟΥ ΠΡΟΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ  
ΑΝΕΥ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ<sup>1</sup>.

PRIMI THEOREMATIS ANALYSIS SINE  
FIGURA.

Εὐθεΐα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον  
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ  
ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς AB ἴση κείσθω ἡ ΑΔ·  
λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ  
ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ  
ratione secetur in Γ, et sit major portio ΑΓ,  
et dimidiæ ipsius AB æqualis ponatur ΑΔ; dico  
quintuplum esse quadratum ex ΓΔ quadrati  
ex ΔΑ.

Δ      Α      Γ      Β

Επεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ  
τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ τὰ ἀπὸ  
τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· τὰ  
ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ,  
ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ<sup>2</sup>. διελόντι  
ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς<sup>3</sup> ΓΑ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ,  
ΑΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ<sup>4</sup>. ἀλλὰ  
τῷ μὲν δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  
ΒΑ, ΑΓ, διπλῇ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ  
τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ

Quoniam enim quintuplum est ipsum ex ΓΔ  
ipsius ex ΔΑ, ipsum autem ex ΓΔ æquale est  
ipsa ex ΓΑ, ΑΔ cum ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ;  
quadrata igitur ex ΓΑ, ΑΔ cum ipso bis sub  
ΓΑ, ΑΔ quintupla sunt ipsius ex ΑΔ; dividendo  
igitur ipsum ex ΓΑ cum ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ  
quintuplum est ipsius ex ΑΔ. Sed ipsi qui-  
dem bis sub ΓΑ, ΑΔ æquale est ipsum sub ΒΑ,  
ΑΓ, dupla enim ΒΑ ipsius ΑΔ, ipsi autem  
ex ΑΓ æquale est ipsum sub ΑΒ, ΒΓ, etenim

ANALYSE DU PREMIER THÉORÈME SANS FIGURE.

Que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que  
ΑΓ soit le plus grand segment, et faisons ΑΔ égal à la moitié de AB; je dis que  
le carré de ΓΔ est quintuple du carré de ΔΑ.

Car puisque le carré de ΓΔ est quintuple du carré de ΔΑ, et que le carré  
de ΓΔ est égal aux carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, conjointement avec le double rec-  
tangle sous ΓΑ, ΑΔ ( 4. 2 ), les carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, conjointement avec  
le double rectangle sous ΓΑ, ΑΔ, seront quintuples du carré de la droite ΑΔ;  
donc, par soustraction, le carré de ΓΑ, conjointement avec le double rectangle  
sous ΓΑ, ΑΔ, sera quadruple du carré de ΑΔ. Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ  
est égal au double rectangle sous ΓΑ, ΑΔ; car ΒΑ est double de ΑΔ, et le rec-  
tangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΑΓ ( 17. 6 ), car ΑΒ est coupé en extrême

## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 227

ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ<sup>5</sup>. Ἐστι δὲ, διπλὴ γάρ ἐστιν ἡ BA τῆς ΑΔ.

### ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA, τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς<sup>2</sup> AB τὸ ὑπὸ τῶν<sup>3</sup> BA, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὲ

ipsa AB extremâ et mediâ ratione secta est; ipsum igitur sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Sed ipsum sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΑΓ est ipsum ex AB; ipsum igitur ex AB quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Est autem, dupla enim est BA ipsius ΑΔ.

### SYNTHESIS.

Quoniam igitur quadruplum est ipsum ex BA ipsius ex ΑΔ, sed ipsum ex AB ipsum sub BA, ΑΓ est cum ipso sub AB, ΒΓ; ipsum igitur sub BA, ΑΓ cum ipso sub AB, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΑΔ. Sed ipsum quidem sub BA, ΑΓ æquale est ipsi bis sub ΔΑ, ΑΓ, ipsum autem sub AB, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; ipsum igitur ex ΑΓ cum ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ quadruplum est ipsius ex ΔΑ; quare ipsa ex ΔΑ, ΑΓ cum

et moyenne raison; le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, est quadruple du carré de ΑΔ. Mais le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, est le carré de AB (2. 2); le carré de AB est donc le quadruple du carré de ΑΔ. Mais cela est (cor. 20. 6), puisque BA est double de ΑΔ.

### SYNTHESE.

Puisque le carré de BA est quadruple du carré de ΑΔ, et que le carré de AB est égal au rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ (2. 2); le rectangle sous BA, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous AB, ΒΓ, sera quadruple du carré de ΑΔ. Mais le rectangle sous BA, ΑΓ est égal au double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, et le rectangle sous AB, ΒΓ est égal au carré de ΑΓ; le carré de ΑΓ, conjointement avec le double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, est donc quadruple du carré de ΔΑ; les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ, conjointement avec le

## 228 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ quintuplum est ipsius ex ΔΑ. Ipsa autem ex ΔΑ, ΑΓ cum ipso bis sub ΔΑ, ΑΓ ipsum ex ΓΔ est; ipsum igitur ex ΓΔ quintuplum est ipsius ex ΔΑ. Quod oportebat ostendere.

### ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΟΡΗΜΑΤΟΥ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ'.

### SECUNDI THEOREMATIS ANALYSIS SINE FIGURA.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆς κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Recta enim quædam ΓΔ partis ipsius ΔΑ quintuplum possit, ipsius autem ΔΑ dupla ponatur ΑΒ; dico ΑΒ extremâ et mediâ ratione sectam esse in Γ puncto, et maiorem portionem esse ΑΓ, quæ est reliqua pars ipsius a principio rectæ.

Δ                      Α                      Γ                      Β

Επεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Εστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς

Quoniam enim ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major portio est ΑΓ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ. Est autem et ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ipsi bis sub ΔΑ, ΑΓ æquale, dupla enim est ΒΑ ipsius ΔΑ; ipsum igitur

double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, est donc quintuple du carré de ΔΑ. Mais les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ, conjointement avec le double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, forment le carré de ΓΔ (4. 2); le carré de ΓΔ est donc quintuple du carré de ΔΑ. Ce qu'il fallait démontrer.

### ANALYSE DU SECOND THÉORÈME SANS FIGURE.

Que le carré d'une droite ΓΔ soit quintuple du carré de sa partie ΔΑ, et que ΑΒ soit double de ΔΑ; je dis que la droite ΑΒ sera coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ, qui est la partie restante de la droite exposée d'abord, sera son plus grand segment.

Car puisque ΑΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ est le plus grand segment, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ sera égal au carré de ΑΓ (17. 6). Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est égal au double rectangle sous ΔΑ,

## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 229

ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ δις<sup>3</sup> ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε καὶ<sup>4</sup> τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἐστὶ δὲ<sup>5</sup>.

### ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διελόντι ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν<sup>1</sup> ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>2</sup> ΑΔ· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ

sub AB, BG cum ipso sub BA, AG, quod est ipsum ex AB, æquale est ipsi bis sub DA, AG cum ipso ex AG. Quadruplum autem ipsum ex AB ipsius ex DA; quadruplum igitur et ipsum bis sub DA, AG cum ipso ex AG ipsius ex AD; quare et ipsa ex DA, AG cum ipso bis sub DA, AG, hoc est ipsum ex GD, quintupla sunt ipsius DA. Est autem.

### SYNTHESIS.

Quoniam igitur quintuplum est ipsum ex GD ipsius ex DA, ipsum autem ex GD ipsa ex DA, AG est cum ipso bis sub DA, AG; ipsa igitur ex DA, AG cum ipso bis sub DA, AG quintupla sunt ipsius ex DA; dividendo igitur ipsum bis sub DA, AG cum ipso ex AG quadruplum est ipsius ex AD. Est autem et ipsum ex AB quadruplum ipsius ex AD; ipsum igitur bis sub DA, AG, quod est ipsum semel sub BA, AG cum

AG, car BA est double de AD; le rectangle sous AB, BG, conjointement avec le rectangle sous BA, AG, ce qui est le carré de AB (2. 2), est donc égal au double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG. Mais le carré de AB est quadruple du carré de DA (20. 6); le double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG, est donc quadruple du carré de DA; les carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG, ce qui est le carré de GD (4. 2), sont donc quintuples du carré de DA. Mais cela est.

### SYNTHESE.

Puisque le carré de GD est quintuple du carré de DA, et que le carré de GD est égal aux carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG (4. 2); les carrés des droites DA, AG, conjointement avec le double rectangle sous DA, AG, seront quintuples du carré de DA; donc, par soustraction, le double rectangle sous DA, AG, conjointement avec le carré de AG, est quadruple du carré de DA. Mais le carré de AB est quadruple du carré de DA (20. 6); le

## 230 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ<sup>3</sup> μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ κοινοῦ ἀφαιρέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΒ. Sed ipsum ex ΑΒ ipsum sub ΑΒ, ΒΓ est cum ipso sub ΒΑ, ΑΓ; ipsum igitur sub ΒΑ, ΔΓ cum ipso sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi sub ΒΑ, ΑΓ cum ipso ex ΑΓ; et communi ablato sub ΒΑ, ΑΓ, reliquum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Major autem ΒΑ quam ΑΓ; major igitur et ΑΓ quam ΓΒ; ipsa igitur ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major portio est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

### ΤΡΙΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

### TERTII THEOREMATIS ANALYSIS.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Recta enim linea ΑΒ extremâ et mediâ ratione secetur in Γ puncto, et sit major portio ΑΓ, et ipsius ΑΓ dimidia ipsa ΓΔ; dico quintuplum esse ipsum ex ΒΔ ipsius ex ΓΔ.

double rectangle sous ΔΑ, ΑΓ, qui est le rectangle compris une seule fois sous ΒΑ, ΑΓ conjointement avec le carré de ΑΓ, est donc égal au carré de ΑΒ. Mais le carré de ΑΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ conjointement avec le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (2. 2); le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, est donc égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, conjointement avec le carré de ΑΓ; retranchons le rectangle commun sous ΒΑ, ΑΓ; le rectangle restant sous ΑΒ, ΒΓ sera égal au carré de ΑΓ; la droite ΒΑ est donc à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6). Mais ΒΑ est plus grand que ΑΓ; la droite ΑΓ est donc plus grande que ΓΒ; la droite ΑΒ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Γ (déf. 3. 6), et ΑΓ est le plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

### ANALYSE DU TROISIÈME THÉORÈME.

Que la droite ΑΒ soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que ΑΓ soit le plus grand segment, et que ΓΔ soit la moitié de ΑΓ; je dis que le carré de ΒΔ est quintuple du carré de ΓΔ.

## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 231

Επεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ<sup>2</sup> ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλά-

Quoniam enim quintuplum est ipsum ex ΒΔ ex ΓΔ; ipsum autem ex ΔΒ ipsum sub ΑΒ, ΒΓ est cum ipso ex ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΔΓ quintuplum est ipsius ex ΔΓ;

A      Δ      Γ      Β

σιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ<sup>3</sup> ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐστὶ δὲ διπλὴ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

dividendo igitur ipsum sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΔΓ. Ipsi autem sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsum ex ΑΓ, etenim ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ; ipsum igitur ex ΑΓ quadruplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem, dupla enim ΑΓ ipsius ΓΔ.

### ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Επεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ<sup>1</sup> ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>2</sup> ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

### SYNTHESIS.

Quoniam dupla ΑΓ est ipsius ΓΔ, quadruplum est ipsum ex ΑΓ ipsius ex ΔΓ. Sed ipsum ex ΑΓ æquale est ipsi sub ΑΒ, ΒΓ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est ipsius ex ΔΓ; componendo igitur ipsum sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΔΓ, quod est ipsum ex ΔΒ, quintuplum est ipsius ex ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le quarré de ΒΔ est quintuple du quarré de ΓΔ, que le quarré de ΔΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΓΔ (6. 2); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΔΓ, sera quintuple du quarré de ΔΓ; donc, par soustraction, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est quadruple du quarré de ΔΓ. Mais le quarré de ΑΓ est égal au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (17. 6), car la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ; le quarré de ΑΓ est donc quadruple du quarré de ΓΔ. Mais cela est, puisque ΑΓ est double de ΓΔ.

### S Y N T H È S E.

Puisque ΑΓ est double de ΓΔ, le quarré de ΑΓ est quadruple du quarré de ΔΓ. Mais le quarré de ΑΓ est égal au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (17. 6); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc quadruple du quarré de ΔΓ; donc, par addition, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΔΓ, ce qui est le quarré de ΔΒ (4. 2), est quintuple du quarré de ΔΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΘΗΟΡΗΜΑΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

## QUARTI THEOREMATIS ANALYSIS.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ  $AB$  ἄκρον καὶ μέσον λό-  
γον τετμήσθω κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἔστω μείζον τμή-  
μα τὸ  $AG$ . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB, BG$  τριπλά-  
σια ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ .

Recta enim linea  $AB$  extremâ et mediâ ratione  
secetur in  $\Gamma$ , et sit major portio  $AG$ ; dico  
quadrata ex  $AB, BG$  tripla esse quadrati ex  $AG$ .

$A \quad \Gamma \quad B$

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB, BG$  τριπλάσια ἔστι  
τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ , ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB, BG$  το-  
δὶς ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ .  
τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  
 $AG$  τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $AG$ . διελόντι  
ἄρα τὸ<sup>1</sup> δις ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  διπλάσιόν ἐστι τοῦ  
ἀπὸ τῆς  $AG$ . ὥστε τὸ ἄπαξ<sup>2</sup> ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  ἴσον  
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AG$ . Ἐστὶ δὲ, ἡ γὰρ  $AB$  ἄκρον  
καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  $\Gamma$ .

Quoniam enim ipsa ex  $AB, BG$  tripla sunt  
ipsius ex  $AG$ ; sed ipsa ex  $AB, BG$  ipsum  
bis sub sub  $AB, BG$  sunt cum ipso ex  $AG$ ; ipsum  
igitur bis sub  $AB, BG$  cum ipso ex  $AG$  tri-  
plum est ipsius ex  $AG$ ; dividendo igitur ipsum  
bis sub  $AB, BG$  duplum est ipsius ex  $AG$ ; quare  
ipsum semel sub  $AB, BG$  æquale est ipsi ex  
 $AG$ . Est autem, ipsa enim  $AB$  extremâ et mediâ  
ratione secta est in puncto  $\Gamma$ .

## ANALYSE DU QUATRIÈME THÉORÈME.

Que la ligne droite  $AB$  soit coupée en extrême et moyenne raison au point  $\Gamma$ , et que  $AG$  soit le plus grand segment; je dis que la somme des quarrés des droites  $AB, BG$  est triple du quarré de  $AG$ .

Car puisque la somme des quarrés des droites  $AB, BG$  est triple du quarré de  $AG$ , et que la somme des quarrés des droites  $AB, BG$  est égale au double rectangle sous  $AB, BG$ , conjointement avec le quarré de  $AG$ , le double rectangle sous  $AB, BG$ , avec le quarré de  $AG$ , sera triple du quarré de  $AG$  (7. 2); donc, par soustraction, le double rectangle sous  $AB, BG$  est double du quarré de  $AG$ ; le rectangle compris une seule fois sous  $AB, BG$  est donc égal au quarré de  $AG$ . Mais cela est, puisque la droite  $AB$  est coupée en extrême et moyenne raison au point  $\Gamma$ .



ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Επεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μείζον τμήμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν<sup>2</sup> ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετράγωνα<sup>3</sup> τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

ΤΟΥ ΠΕΜΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Ἡ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΒΑ.

SYNTHESIS.

Quoniam igitur AB extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et est major portio ipsa ΑΓ, et ipsum igitur sub AB, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ; ipsum igitur bis sub AB, ΒΓ duplum est ipsius ex ΑΓ; componendo igitur ipsum bis sub AB, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ triplum est ipsius ex ΑΓ; sed ipsum bis sub AB, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ ipsa ex AB, ΒΓ sunt quadrata; ipsa igitur ex AB, ΒΓ quadrata tripla sunt ipsius ex ΑΓ.

QUINTI THEOREMATIS ANALYSIS.

Recta enim quædam AB extremâ et mediâ ratione secetur in Γ, et sit major portio ΑΓ, et ipsi ΑΓ æqualis ponatur ΑΔ; dico ipsam ΔΒ extremâ et mediâ ratione secari in puncto Α, et maiorem portionem esse ΒΑ.

SYNTHÈSE.

Puisque la droite AB est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΓ est le plus grand segment; le rectangle sous AB, ΒΓ sera égal au carré de ΑΓ (17. 6); le double rectangle sous AB, ΒΓ est donc double du carré de ΑΓ; donc, par addition, le double rectangle sous AB, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΑΓ, est triple du carré de ΑΓ; mais le double rectangle sous AB, ΒΓ, conjointement avec le carré de ΑΓ, est égal aux carrés des droites AB, ΒΓ (7. 2); la somme des carrés des droites AB, ΒΓ est donc triple du carré de ΑΓ.

ANALYSE DU CINQUIÈME THÉORÈME.

Qu'une droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, que ΑΓ soit le plus grand segment, et faisons ΑΔ égal à ΑΓ; je dis que la droite ΔΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Α, et que ΒΑ est le plus grand segment.



## 234 LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστιν ἡ ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἰση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς

Quoniam enim ipsa ΔΒ extremâ et mediâ ratione secta est in Α, et major portio est ΑΒ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Sed æqualis ΑΔ ipsi ΑΓ; est igitur ΔΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ; conver-

Δ                      Α                      Γ                      Β

ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέφαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἰση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἐστι δὲ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

tendo igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΒ ad ΒΓ; dividendo igitur ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΓ ad ΓΒ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΑΓ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Est autem, etenim ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secatur in Γ.

### ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

### SYNTHESIS.

Επεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἰση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα<sup>2</sup> ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέφαντί τε<sup>3</sup> ὡς

Quoniam igitur ipsa ΑΒ extremâ et mediâ ratione secatur in Γ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. Æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΓ ad ΓΒ; componendo igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΒΑ ad ΒΓ; et convertendo ut ΒΔ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Car puisque ΔΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Α, et que ΑΒ est le plus grand segment, la droite ΔΒ sera à la droite ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ; donc, par conversion, ΒΔ est ΔΑ comme ΑΒ est à ΒΓ (19. 5); donc, par soustraction, ΒΑ est à ΑΔ comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 5). Mais ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΒΑ est donc à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ. Mais cela est, puisque la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ.

### ΣΥΝΘΕΣΙΣ.

Puisque ΑΒ est coupé en extrême et moyenne raison au point Γ, la droite ΒΑ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΒ. Mais ΑΓ est égal à ΑΔ; la droite ΒΑ est donc à ΑΔ comme ΑΓ est à ΓΒ; donc, par addition, ΒΔ est à ΔΑ comme ΒΑ est à ΒΓ (18. 5); donc, par conversion, ΒΔ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΓ (cor. 19. 5). Mais ΑΓ est

## LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 235

ὅτι ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ὡς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.  
 Ἰση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν  
 ΒΑ οὕτως ὡς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ  
 μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον  
 τμήμα ἔστιν ἡ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,  
 ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀλογός ἐστιν ἡ καλου-  
 μένη ἀποτομή.

Εστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον  
 καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον  
 τμήμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ  
 ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Δ      Α      Γ      Β

Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ', καὶ κείσθω  
 τῇ ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτ-  
 μηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ  
 μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ, ἡμί-

Æqualis autem ΑΓ ipsi ΑΔ; est igitur ut ΔΒ  
 ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΑΔ; ipsa ΔΒ igitur extre-  
 mâ et mediâ ratione secatur in Α; et major  
 portio est ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO VI.

Si recta rationalis extremâ et mediâ ratione  
 secta fuerit; utraque portionum irrationalis est  
 quæ appellatur apotome.

Sit recta rationalis ΑΒ, et secetur extremâ  
 et mediâ ratione in Γ, et sit major portio  
 ΑΓ; dico utramque ipsarum ΑΓ, ΓΒ irratio-  
 nalem esse quæ appellatur apotome.

Producatur enim ΒΑ in Δ, et ponatur ip-  
 sius ΒΑ dimidia ΑΔ. Quoniam igitur recta ΑΒ  
 secatur extremâ et mediâ ratione in Γ, et ma-  
 jori portioni ΑΓ adjicitur ΑΔ, quæ dimidia est

égal à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc à ΒΑ comme ΒΑ est à ΑΔ; la droite ΔΒ est donc coupée  
 en extrême et moyenne raison au point Α ( déf. 3. 6 ), et ΑΒ est le plus grand seg-  
 ment. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION VI.

Si une droite rationnelle est coupée en extrême et moyenne raison, chacun des  
 segments sera l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Soit la droite rationnelle ΑΒ, et qu'elle soit coupée en extrême et moyenne  
 raison au point Γ; je dis que chacune des droites ΑΓ, ΓΒ est l'irrationnelle qu'on  
 appelle apotome.

Car prolongeons ΒΑ vers le point Δ, et que ΑΔ soit la moitié de ΒΑ. Puisque  
 la droite ΑΒ est coupée en extrême et moyenne raison au point Γ, et que ΑΔ  
 moitié de ΑΒ est ajouté au plus grand segment ΑΓ; le carré de ΓΔ sera quintuple

σεια οὕσα τῆς  $AB$ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$  πενταπλάσιόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$  λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$ . Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$ , ῥητὴ<sup>2</sup> γάρ ἐστιν ἡ  $\Delta A$  ἡμισεία οὕσα τῆς  $AB$  ῥητῆς οὕσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$ <sup>3</sup>. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta A$  λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ  $\Gamma\Delta$  τῇ  $\Delta A$ . αἱ  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $AG$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἡ  $AB$  ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τριῆμά ἐστιν ἡ  $AG$ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BG$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AG$ <sup>4</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $AG$  ἀποτομῆς παρὰ τὴν  $AB$  ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν  $BG$ . Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ  $BG$ . Εδείχθη δὲ καὶ ἡ  $AG$  ἀποτομή.

Εάν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsius  $AB$ ; quadratum igitur ex  $\Gamma\Delta$  ipsius ex  $\Delta A$  quintuplum est; ipsum igitur ex  $\Gamma\Delta$  ad ipsum ex  $\Delta A$  rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabile igitur ipsum ex  $\Gamma\Delta$  ipsi ex  $\Delta A$ . Rationale autem ipsum ex  $\Delta A$ ; rationalis est enim  $\Delta A$  dimidia existens ipsius  $AB$  rationalis existentis; rationale igitur et ipsum ex  $\Gamma\Delta$ ; rationalis igitur est et  $\Gamma\Delta$ . Et quoniam ipsum ex  $\Gamma\Delta$  ad ipsum ex  $\Delta A$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis igitur longitudine ipsa  $\Gamma\Delta$  ipsi  $\Delta A$ ; ipsæ  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est  $AG$ . Rursus, quoniam  $AB$  extremâ et mediâ ratione secta est, et major portio est  $AG$ ; ipsum igitur sub  $AB$ ,  $BG$  æquale est ipsi ex  $AG$ ; ipsum igitur ex  $AG$  apotome ad  $AB$  rationalem applicatum latitudinem facit  $BG$ . Ipsum autem ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam; apotome igitur prima ipsa  $BG$ . Ostensa est autem et  $AG$  apotome.

Si igitur recta, etc.

du carré de  $\Delta A$  ( 1. 13 ); le carré de  $\Gamma\Delta$  a donc avec le carré de  $\Delta A$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de  $\Gamma\Delta$  est donc commensurable avec le carré de  $\Delta A$  ( 6. 10 ). Mais le carré de  $\Delta A$  est rationel, car la droite  $\Delta A$  est rationelle, puisqu'elle est la moitié de  $AB$  qui est rationelle. Le carré de  $\Gamma\Delta$  est donc aussi rationel ( déf. 6. 10 ); la droite  $\Gamma\Delta$  est donc rationelle ( déf. 8. 10 ). Et puisque le carré de  $\Gamma\Delta$  n'a pas avec le carré de  $\Delta A$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite  $\Gamma\Delta$  est incommensurable en longueur avec la droite  $\Delta A$  ( 9. 10 ); les droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta A$  sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite  $AG$  est donc un apotome ( 74. 10 ). De plus, puisque  $AB$  est coupé en extrême et moyenne raison, et que  $AG$  est le plus grand segment, le rectangle sous  $AB$ ,  $BG$  est donc égal au carré de  $AG$ ; le carré de l'apotome  $AG$  appliqué à la rationelle  $AB$  a donc pour largeur la droite  $BG$ . Mais le carré d'un apotome appliqué à une rationelle a pour largeur un apotome premier ( 98. 10 ); la droite  $BG$  est donc un apotome premier. Mais on a démontré que  $AG$  est un apotome. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

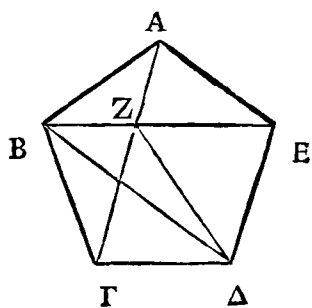
PROPOSITIO VII.

Εὰν πενταγώνου ἰσοπλευροῦ αἱ τρεῖς γωνίαι, ἢτοι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἐξῆς, ἴσαι ᾗσιν ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλευροῦ τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive deinceps sive non deinceps, æquales sint; æquiangulum erit pentagonum.

Pentagoni enim æquilateri ΑΒΓΔΕ tres anguli primum deinceps ad Α, Β, Γ æquales inter se sint; dico æquiangulum esse ΑΒΓΔΕ pentagonum.



Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο<sup>1</sup> αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἔστιν ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἔστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὅς αἱ ἴσαι πλευρὰ ὑποτείνουσιν,

Jungantur enim ipsæ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Et quoniam duæ ΓΒ, ΒΑ duabus ΒΑ, ΑΕ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΓΒΑ angulo ΒΑΕ est æqualis; basis igitur ΑΓ basi ΒΕ est æqualis, et ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΕ æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt, angu-

PROPOSITION VII.

Si trois angles du pentagone équilatéral, soit de suite ou non de suite, sont égaux, le pentagone sera équiangle.

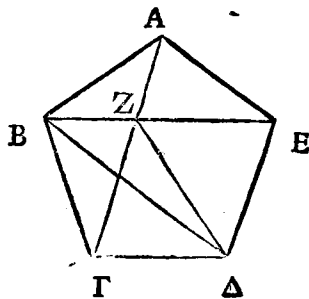
Que les trois angles de suite du pentagone équilatéral ΑΒΓΔΕ placés aux points Α, Β, Γ soient égaux entr'eux; je dis que le pentagone ΑΒΓΔΕ est équiangle.

Car joignons ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Puisque les deux droites ΓΒ, ΒΑ sont égales aux deux côtés ΒΑ, ΑΕ, chacune à chacune, et que l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΒΑΕ; la base ΑΓ sera égale à la base ΒΕ; le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΑΒΕ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, c'est-à-dire que l'angle ΒΓΑ

238 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλη τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Εἴτι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὲ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία<sup>2</sup> τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ<sup>3</sup> ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλη τῇ ΑΕΔ ἐστὶν<sup>4</sup> ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις<sup>5</sup>· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

lus quidem ΒΓΑ angulo ΒΕΑ, angulus vero ΑΒΕ angulo ΓΑΒ; quare et latus ΑΖ lateri ΒΖ est æqualis. Ostensa autem est et tota ΑΓ toti ΒΕ æqualis; et reliqua igitur ΖΓ reliquæ ΖΕ est æqualis. Est autem et ΓΔ ipsi ΔΕ æqualis; duæ igitur ΖΓ, ΓΔ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, et basis ipsorum ΖΔ communis; angulus igitur ΖΓΔ angulo ΖΕΔ est æqualis. Ostensus autem est et angulus ΒΓΑ angulo ΑΕΒ æqualis; totus igitur ΒΓΔ toti ΑΕΔ est æqualis. Sed angulus ΒΓΔ æqualis ponitur est angulis ad Α, Β; et ΑΕΔ igitur angulus angulis ad Α, Β æqualis est. Similiter utique demonstrabimus et ΓΔΕ angulum æqualem esse angulis ad Α, Β; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum.



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἴστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἴστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

At vero non sint æquales deinceps anguli, sed sint æquales ipsi ad Α, Γ, Δ punctis; dico et sic æquiangulum esse ΑΒΓΔΕ pentagonum.

sera égal à l'angle ΒΕΑ, et l'angle ΑΒΕ égal à l'angle ΓΑΒ (4. 1); le côté ΑΖ est donc égal au côté ΒΖ (6. 1). Mais on a démontré que la droite entière ΑΓ est égale à la droite entière ΒΕ; le reste ΖΓ est donc égal au reste ΖΕ. Mais ΓΔ est égal à ΔΕ; les deux droites ΖΓ, ΓΔ sont donc égales aux deux droites ΖΕ, ΕΔ; mais la base ΖΔ est commune; l'angle ΖΓΔ est donc égal à l'angle ΖΕΔ (8. 1). Mais on a démontré que l'angle ΒΓΑ est égal à l'angle ΑΕΒ; l'angle entier ΒΓΔ est donc égal à l'angle entier ΑΕΔ. Mais l'angle ΒΓΔ est supposé égal aux angles placés aux points Α, Β; l'angle ΑΕΔ est donc égal aux angles placés aux points Α, Β. Nous démontrerons semblablement que l'angle ΓΔΕ est égal aux angles placés aux points Α, Β; le pentagone ΑΒΓΔΕ est donc équiangle.

Mais que les angles égaux ne soient pas de suite, et que les angles égaux soient ceux qui sont placés aux points Α, Γ, Δ; je dis que le pentagone ΑΒΓΔΕ est encore équiangle de cette manière.

## LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE. 239

Επιζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ  
 δυοὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαις ἴσας  
 περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση  
 ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον  
 ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις  
 ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·  
 ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ<sup>8</sup>. Ἐστὶ δὲ  
 καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ  
 ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἔστιν ἴση<sup>9</sup>. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  
 ΑΕΔ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ  
 ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται  
 ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς  
 Α, Γ ἴση ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ  
 ἴση ἐστὶν ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις· ἴσο-  
 γώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>10</sup> τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ὅπερ  
 εἶδει δεῖξαι.

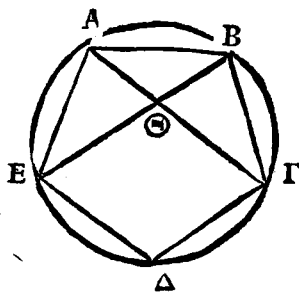
Jungatur enim ΒΔ. Et quoniam duæ ΒΑ ,  
 ΑΕ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt , et angulos  
 æquales continent; basis igitur ΒΕ basi ΒΔ æqua-  
 lis est , et ΑΒΕ triangulum triangulo ΒΓΔ æquale  
 est , et reliqui anguli reliquis angulis æquales  
 erunt , quos æqualia latera subtendunt ; æqualis  
 igitur ΑΕΒ angulus angulo ΓΔΒ. Est autem et  
 ΒΕΔ angulus ipsi ΒΔΕ æqualis , quoniam latus  
 ΒΕ lateri ΒΔ est æquale ; totus igitur ΑΕΔ an-  
 gulus toti ΓΔΕ est æqualis. Sed angulus ΓΔΕ  
 angulis ad Α, Γ ponitur æqualis ; et ΑΕΔ igi-  
 tur angulus angulis ad Α, Γ æqualis est. Propter  
 eadem utique et ΑΒΓ angulus æqualis est an-  
 gulis ad Α, Γ, Δ ; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ  
 pentagonum. Quod oportebat ostendere.

Car joignons ΒΔ. Puisque les deux droites ΒΑ, ΑΕ sont égales aux deux droites  
 ΒΓ, ΓΔ, et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΒΕ sera égale à la  
 base ΒΔ (4. 1) ; le triangle ΑΒΕ sera égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restants  
 soutendus par des côtés égaux, seront égaux entre eux ; l'angle ΑΕΒ est donc  
 égal à l'angle ΓΔΒ. Mais l'angle ΒΕΔ est égal à l'angle ΒΔΕ (6. 1), parce que le  
 côté ΒΕ est égal au côté ΒΔ ; l'angle entier ΑΕΔ est donc égal à l'angle entier ΓΔΕ.  
 Mais l'angle ΓΔΕ est supposé égal aux angles placés aux points Α, Γ ; l'angle ΑΕΔ  
 est donc égal aux angles placés aux points Α, Γ. Par la même raison, l'angle ΑΒΓ  
 est égal aux angles placés aux points Α, Γ, Δ ; le pentagone ΑΒΓΔΕ est donc  
 équiangle. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εάν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.



Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας

Si pentagoni æquilateri et æquianguli deinceps duos angulos subtendant rectæ, extremâ et mediâ ratione se mutuo secant, et majores ipsarum portiones æquales sunt pentagoni lateri.

Pentagoni enim æquilateri et æquianguli ΑΒΓΔΕ duos angulos deinceps ad Α, Β subtendant rectæ ΑΓ, ΒΕ, se mutuo secant in Θ puncto; dico utramque ipsarum extremâ et mediâ ratione secari in Θ puncto, et majores earum portiones æquales esse pentagoni lateri.

Describatur enim circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulus ΑΒΓΔΕ. Et quoniam duæ rectæ ΕΑ, ΑΒ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt et angulos

## PROPOSITION VIII.

Si des droites soutendent deux angles de suite d'un pentagone équilatéral et équiangle, ces droites se couperont en extrême et moyenne raison, et leurs plus grands segments seront égaux au côté du pentagone.

Que les droites ΑΓ, ΒΕ, qui se coupent au point Θ, soutendent deux angles de suite en Α et Β du pentagone équilatéral ΑΒΓΔΕ; je dis que chacune de ces droites est coupée en extrême et moyenne raison au point Θ, et que leurs plus grands segments sont égaux au côté du pentagone.

Car décrivons autour du pentagone ΑΒΓΔΕ le cercle ΑΒΓΔΕ. Puisque les deux droites ΕΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΑΒ, ΒΓ, et que ces droites comprè-



## LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 241

ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ BE βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ABΓ τρίγωνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>2</sup> ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῇ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου<sup>3</sup>. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῇ, ἐπειδὴ περὶ<sup>4</sup> καὶ περιφέρειᾳ ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστὶ διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα γωνία<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. Ἰση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς

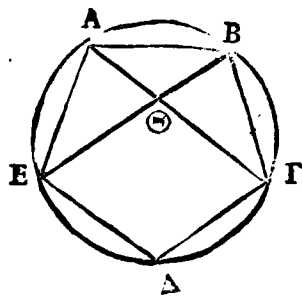
æquales continent; basis igitur BE basi ΑΓ æqualis est, et ABE triangulum triangulo ΑΒΓ æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΒΕ; duplus igitur ipse ΑΘΕ anguli ΒΑΘ, est enim extra ΑΒΘ triangulum. Est autem et ipse ΕΑΓ ipsius ΒΑΓ duplus, quoniam et circumferentia ΕΔΓ circumferentiæ ΓΒ est dupla; æqualis igitur ΘΑΕ angulus ipsi ΑΘΕ; quare et ΘΕ recta ipsi ΕΑ, hoc est ipsi ΑΒ, est æqualis. Et quoniam æqualis est ΒΑ recta ipsi ΑΕ, æqualis est et angulus ΑΒΕ ipsi ΑΕΒ. Sed angulus ΑΒΕ angulo ΒΑΘ ostensus est æqualis; et ΒΕΑ igitur angulus angulo ΒΑΘ est æqualis. Et communis duobus triangulis et ΑΒΕ et ΑΒΘ est ipse ΑΒΕ; reliquus igitur ΒΑΕ angulus reliquo ΑΘΒ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΕ triangulum triangulo ΑΒΘ; proportionaliter igitur est ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΘ. Æqualis autem ΒΑ ipsi ΕΘ; ergo ut ΒΕ ad ΕΘ ita ΕΘ ad ΘΒ. Major autem ΒΕ

nent des angles égaux, la base BE sera égale à la base ΑΓ, le triangle ABE sera égal au triangle ΑΒΓ, et les angles restants, soutendus par des côtés égaux, seront égaux (4. 1); l'angle ΒΑΓ est donc égal à l'angle ΑΒΕ; l'angle ΑΘΕ est donc double de l'angle ΒΑΘ (6 et 32. 1); car ΑΒΕ est un angle extérieur au triangle ΑΒΘ. Mais l'angle ΕΑΓ est double de l'angle ΒΑΓ (33. 6), parce que l'arc ΕΔΓ est double de l'arc ΓΒ; l'angle ΘΑΕ est donc égal à l'angle ΑΘΕ; la droite ΘΕ est donc égale à ΕΑ, c'est-à-dire à ΑΒ (6. 1). Et puisque la droite ΒΑ est égale à ΑΕ, l'angle ΑΒΕ sera égal à l'angle ΑΕΒ (5. 1). Mais on a démontré que l'angle ΑΒΕ est égal à ΒΑΘ; l'angle ΒΕΑ est donc égal à l'angle ΒΑΘ. Mais l'angle ΑΒΕ est commun aux deux triangles ΑΒΕ, ΑΒΘ, l'angle ΒΑΕ est donc égal à l'angle restant ΑΘΒ (32. 1); le triangle ΑΒΕ est donc équiangle avec le triangle ΑΒΘ; la droite ΕΒ est donc à ΒΑ comme ΑΒ est ΒΘ (4. 6). Mais ΒΑ est égal à ΕΘ; la droite ΒΕ est donc à ΕΘ comme ΕΘ est à ΘΒ. Mais ΒΕ est plus



242 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΕΘ·, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΒ· ἡ ΒΕ ἄρα ipsâ ΕΘ; major igitur et ΕΘ ipsâ ΘΒ; ipsa ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ igitur ΒΕ extremâ et mediâ ratione secta est in



τὸ μείζον τμήμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα τὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Θ, et major portio ΘΕ æqualis est pentagoni lateri. Similiter utique demonstrabimus et ΑΓ extremâ et mediâ ratione secari in Θ, et majorem ejus portionem ΓΘ æqualem esse pentagoni lateri. Quod oportebat ostendere.

grand que ΕΘ; la droite ΕΘ est donc plus grande que ΘΒ; la droite ΒΕ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Θ (30.6), et le plus grand segment ΘΕ est égal au côté du pentagone. Nous démontrerons semblablement que la droite ΑΓ est coupée en extrême et moyenne raison au point Θ, et que son plus grand segment ΓΘ est égal au côté du pentagone. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

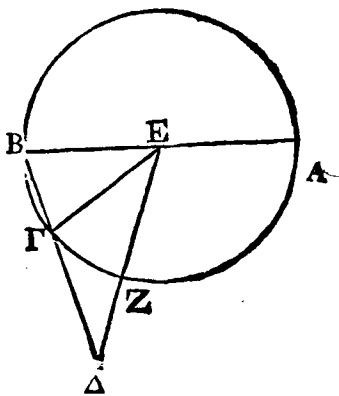
PROPOSITIO IX.

Εάν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον<sup>1</sup> ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ.

Εστω κύκλος ὁ  $ΑΒΓ$ , καὶ, τῶν εἰς τὸν  $ΑΒΓ$  κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ  $ΒΓ$ , ἑξαγώνου δὲ ἡ  $ΓΔ$ , καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ  $ΒΔ$  ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  $Γ$ <sup>2</sup>, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ  $ΓΔ$ .

Si hexagoni latus et latus decagoni in eodem circulo descriptorum componantur; tota recta extremâ et mediâ ratione secta est, et major ipsius portio est hexagoni latus.

Sit circulus  $ΑΒΓ$ , et in  $ΑΒΓ$  circulo descriptorum figurarum, decagoni quidem sit latus  $ΒΓ$ , hexagoni vero  $ΓΔ$ , et sint in directum; dico totam rectam  $ΒΔ$  extremâ et mediâ ratione secari in  $Γ$ , et majorem ejus portionem esse  $ΓΔ$ .



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω<sup>3</sup> τὸ  $Ε$  σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΕΔ$ , καὶ διήχθω ἡ  $ΒΕ$  ἐπὶ τὸ  $Α$ . Καὶ ἐπεὶ

Sumatur enim centrum circuli, et sit  $E$  punctum, et jungantur ipsæ  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΕΔ$ , et producatur  $ΒΕ$  ad  $Α$ . Et quoniam decagoni æqui-

PROPOSITION IX.

Si l'on ajoute ensemble le côté de l'hexagone et le côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle, la droite entière sera coupée en extrême et moyenne raison, et son plus grand segment sera le côté de l'hexagone.

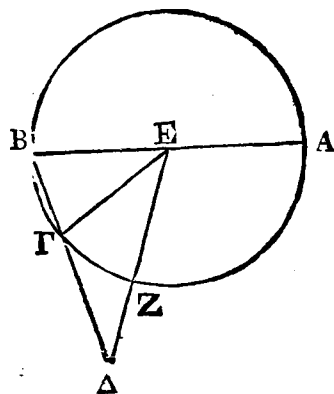
Soit le cercle  $ΑΒΓ$ ; décrivons ces polygones dans le cercle  $ΑΒΓ$ ; que  $ΒΓ$  soit le côté du décagone, et  $ΓΔ$  le côté de l'hexagone, et que ces côtés soient placés en ligne droite; je dis que la droite entière  $ΒΔ$  est coupée en extrême et moyenne raison au point  $Γ$ , et que  $ΓΔ$  est son plus grand segment.

Car prenons le centre du cercle, et que ce soit le point  $Ε$ ; joignons  $ΕΒ$ ,  $ΕΓ$ ,  $ΕΔ$ , et prolongeons  $ΒΕ$  vers le point  $Α$ . Puisque  $ΒΓ$  est le côté d'un décagone équi-

244 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστίν ἡ ΒΓ, πεν-  
ταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περι-  
φερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς  
ΓΒ. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως  
ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλα-  
σίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση  
ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ  
ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. Καὶ  
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ

lateri latus est ΒΓ, quintupla igitur ΑΓΒ cir-  
cumferentia circumferentiæ ΒΓ; quadrupla igitur  
ΑΓ circumferentia circumferentiæ ΓΒ. Ut  
autem ΑΓ circumferentia ad ipsam ΓΒ ita ΑΕΓ  
angulus ad ipsum ΓΕΒ; quadruplus igitur angu-  
lus ΑΕΓ anguli ΓΕΒ. Et quoniam æqualis est ΕΒΓ  
angulus ipsi ΕΓΒ, ergo ΑΕΓ angulus duplus est  
ipsius ΕΓΒ. Et quoniam æqualis est ΕΓ recta ipsi



αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ  
εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου<sup>4</sup>, ἴση ἐστὶ  
καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ<sup>5</sup>. δι-  
πλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία<sup>6</sup> τῆς ὑπὸ ΕΔΓ.  
Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ·  
τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ.  
Εδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ

ΓΔ, utraque enim ipsarum æqualis est hexagoni  
lateri in ΑΒΓ circulo descripti, æqualis est et ΓΕΔ  
angulus angulo ΓΔΕ; duplus igitur angulus ΕΓΒ  
ipsius ΕΔΓ. Sed ΕΓΒ anguli duplus ostensus est ipse  
ΑΕΓ; quadruplus igitur ΑΕΓ ipsius ΕΔΓ. Osten-  
sus autem est et anguli ΒΕΓ quadruplus ipse ΑΕΓ;

latéral, l'arc ΑΓΒ est quadruple de l'arc ΒΓ; l'axe ΑΓ est donc triple de l'arc ΓΒ.  
Mais l'arc ΑΓ est à l'arc ΓΒ comme l'angle ΑΕΓ est à l'angle ΓΕΒ (33. 6); l'angle  
ΑΕΓ est donc quadruple de l'angle ΓΕΒ. Et puisque l'angle ΕΒΓ est égal à l'angle  
ΕΓΒ (5. 1), l'angle ΑΕΓ sera double de l'angle ΕΓΒ (32. 1). Et puisque la droite ΕΓ est  
égale à ΓΔ, car chacune de ces droites est égale au côté de l'hexagone décrit dans  
le cercle ΑΒΓ (15. 4), l'angle ΓΕΔ sera égal à l'angle ΓΔΕ (5. 1); l'angle ΕΓΒ est  
donc double de l'angle ΕΔΓ (32. 1). Mais on a démontré que l'angle ΑΕΓ est  
double de l'angle ΕΓΒ; l'angle ΑΕΓ est donc quadruple de l'angle ΕΔΓ. Mais on a  
démontré que l'angle ΑΕΓ est quadruple de l'angle ΒΕΓ; l'angle ΕΔΓ est donc égal

ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΔ καὶ τοῦ ΒΕΓ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ<sup>7</sup> τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>8</sup> τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἰση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΔΓ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα<sup>9</sup> καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά<sup>10</sup> ἐστὶν ἡ ΔΓ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

æqualis igitur ipse ΕΔΓ ipsi ΒΕΓ. Communis autem duobus triangulis, et ΒΕΔ et ΒΕΓ, angulus ΕΒΔ; et reliquus igitur ΒΕΔ reliquo ΕΓΒ est æqualis; æquiangulum igitur est ΕΒΔ triangulum triangulo ΕΒΓ; proportionaliter igitur est ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΕΒ ad ΒΓ. Æqualis autem ΕΒ ipsi ΔΓ; est igitur ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΓΒ. Major autem ΒΔ ipsâ ΔΓ; major igitur et ΔΓ ipsâ ΓΒ; ergo recta ΒΔ extremâ et mediâ ratione secta est in Γ, et major ipsius portio est ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Εὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ· ἡ τοῦ πεντάγωνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον<sup>1</sup> πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφω<sup>2</sup> τὸ

PROPOSITIO X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus potest et latus hexagoni et latus decagoni in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus ΑΒΓΔΕ, et in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterum describatur ΑΒΓΔΕ;

à l'angle ΒΕΓ. Mais l'angle ΕΒΔ est commun aux deux triangles ΒΕΔ, ΒΕΓ; l'angle restant ΒΕΔ est donc égal à l'angle restant ΕΓΒ (32. 1); le triangle ΕΒΔ est donc équiangle avec le triangle ΕΒΓ; la droite ΔΒ est donc à ΒΕ comme ΕΒ est à ΒΓ (4. 6). Mais ΕΒ est égal à ΔΓ (15. 4); la droite ΒΔ est donc à ΔΓ comme ΔΓ est à ΓΒ. Mais la droite ΒΔ est plus grande que ΔΓ; la droite ΔΓ est donc plus grande que ΓΒ; la droite ΒΔ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Γ (déf. 3. 6), et ΔΓ est son plus grand segment. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION X.

Si l'on décrit dans un cercle un pentagone équilatéral, le quarré du côté du pentagone sera égal à la somme des quarrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.

Soit le cercle ΑΒΓΔΕ, et décrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le pentagone équila-

## 246 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρά δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευράν, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημείον<sup>2</sup>, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημείον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφέρειᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πενταγώνου δὲ<sup>4</sup> ἡ ΓΔ· δεκαγώνου<sup>5</sup> ἄρα ἡ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· διπλὴ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστὶν ἡ ΑΚ εὐθεΐα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῆς<sup>6</sup> ΚΜ ἐστὶ διπλῇ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας,

dico ΑΒΓΔΕ pentagoni latus posse et latus hexagoni et latus decagoni in eodem ΑΒΓΔΕ circulo descriptorum.

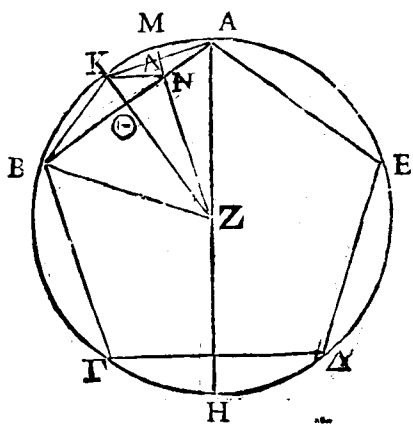
Sumatur enim centrum circuli punctum Ζ, et juncta ΑΖ producatuur ad Η punctum, et jungatur ΖΒ, et à puncto Ζ ad ΑΒ perpendicularis agatur ΖΘ, et producatuur ad Κ, et jungantur ipsæ ΑΚ, ΚΒ, et rursus a puncto Ζ ad ΑΚ perpendicularis agatur ΖΛ, et producatuur ad Μ, et jungatur ΚΝ. Et quoniam æqualis est ΑΒΓΗ circumferentia circumferentiæ ΑΕΔΗ, ex quibus ΑΒΓ ipsi ΑΕΔ est æqualis; reliqua igitur ΓΗ circumferentia reliquæ ΔΗ est æqualis. Pentagoni autem latus ipsa ΔΓ; decagoni igitur latus ipsa ΓΗ. Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, et perpendicularis ΖΘ; æqualis igitur et ΑΖΚ angulus ipsi ΚΖΒ; quare et circumferentia ΑΚ ipsi ΚΒ est æqualis; dupla igitur ΑΒ circumferentia circumferentiæ ΒΚ; decagoni igitur latus est recta ΑΚ. Propter eadem utique et ΑΓ ipsius ΚΜ est dupla. Et quoniam dupla est ΑΒ circumferentia cir-

téral ΑΒΓΔΕ; je dis que le carré du côté du pentagone ΑΒΓΔΕ est égal à la somme des carrés de l'hexagone et du décagone, ces polygones étant décrits dans le cercle ΑΒΓΔΕ.

Car prenons Ζ le centre du cercle; ayant joint ΑΖ, prolongeons cette droite vers le point Η; joignons ΖΒ, du point Ζ menons la droite ΖΘ perpendiculaire à ΑΒ; prolongeons cette droite vers Κ; joignons ΑΚ, ΚΒ; du point Ζ menons ΖΑ perpendiculaire à ΑΚ; prolongeons cette droite vers Μ, et joignons ΚΝ. Puisque l'arc ΑΒΓΗ est égal à l'arc ΑΕΔΗ, et que l'arc ΑΒΓ est égal à l'arc ΑΕΔ, l'arc restant ΓΗ sera égal à l'arc restant ΔΗ. Mais ΓΔ est le côté du pentagone; la droite ΓΗ est donc le côté du décagone. Et puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que ΖΘ est une perpendiculaire, l'angle ΑΖΚ sera égal à ΚΖΒ; l'arc ΑΚ est donc égal à l'arc ΚΒ; l'arc ΑΒ est donc double de l'arc ΒΚ; la droite ΑΚ est donc le côté du décagone. Par la même raison, l'arc ΑΚ est double de l'arc ΚΜ. Et puisque l'arc

ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· διπλὴ  
ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας.  
Ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλὴ· ἴση  
ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. Ἀλλὰ ἡ  
ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλὴ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ  
ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλὴ. Ἀλλὰ μὲν καὶ<sup>8</sup> ἡ  
ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλὴ,

circumferentiæ ΒΚ, æqualis autem ΓΔ circum-  
ferentia circumferentiæ ΑΒ; dupla igitur et ΓΔ  
circumferentia circumferentiæ ΒΚ. Est autem  
ΓΔ circumferentia et ipsius ΓΗ dupla; æqua-  
lis igitur ΓΗ circumferentia ipsi ΒΚ circumfe-  
rentiæ. Sed ΒΚ ipsius ΚΜ est dupla, quoniam et  
ΚΑ; et ΓΗ igitur ipsius ΚΜ est dupla. Sed quidem  
et ΓΒ circumferentia circumferentiæ ΒΚ est du-



ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ περιφερείᾳ<sup>9</sup>.  
καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς<sup>10</sup> ΒΜ ἐστὶ  
διπλὴ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς  
ὑπὸ ΒΖΜ ἐστὶ<sup>11</sup> διπλὴ. Ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ  
τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλὴ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ  
ΑΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστὶν ἴση.  
Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ  
ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ  
λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ  
καὶ<sup>12</sup> τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ· ἀνά-

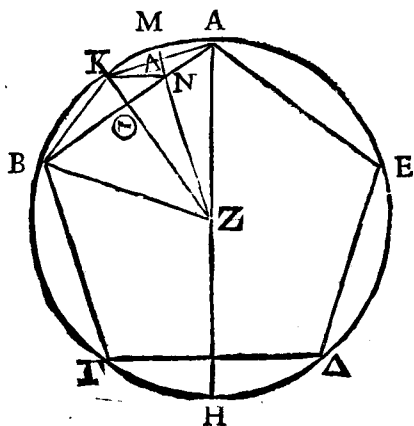
πλα; æqualis enim ΓΒ circumferentia circum-  
ferentiæ ΒΑ; et tota igitur ΗΒ circumferentia  
ipsius ΒΜ est dupla; quare et angulus ΗΖΒ anguli  
ΒΖΜ est duplus. Est autem ipse ΗΖΒ et ipsius  
ΖΑΒ duplus, æqualis enim ΖΑΒ ipsi ΑΒΓ;  
et ΒΖΝ igitur ipsi ΖΑΒ est æqualis. Commu-  
nis autem duobus triangulis, et ΑΒΖ et ΒΖΝ,  
angulus ΑΒΖ; reliquus igitur ΑΖΒ reliquo  
ΒΝΖ est æqualis; æquiangulum igitur est et  
ΑΒΖ triangulum triangulo ΒΖΝ; proportiona-

AB est double de l'arc BK, et que l'arc ΓΔ est égal à l'arc AB, l'arc ΓΔ sera double de l'arc BK. Mais l'arc ΓΔ est double de l'arc ΓΗ, l'arc ΓΗ est donc égal à l'arc BK. Mais l'arc BK est double de KM, parce que KA l'est de KM; l'arc ΓΗ est donc double de KM. Mais l'arc ΓΒ est double de l'arc BK, car l'arc ΓΒ est égal à l'arc ΒΑ; l'arc entier ΗΒ est donc double de l'arc ΒΜ; l'angle ΗΖΒ est donc double de l'angle ΒΖΜ (33. 6). Mais l'angle ΗΖΒ est double de l'angle ΖΑΒ (32. 1), car l'angle ΖΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ (5. 1); l'angle ΒΖΝ est donc égal à l'angle ΖΑΒ. Mais l'angle ΑΒΖ est commun aux deux triangles ΑΒΖ, ΒΖΝ; l'angle restant ΑΖΒ est donc égal à l'angle restant ΒΝΖ (32. 1); le triangle ΑΒΖ est donc équiangle avec le triangle

248 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

λογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ οὕτως  
ἡ ZB πρὸς τὴν BN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον  
ἵστί τῳ ἀπὸ τῆς<sup>13</sup> BZ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ  
τῇ ΑΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ· βάσεις ἄρα  
καὶ<sup>14</sup> ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΑΝ ἐστὶν ἴση· καὶ γωνία  
ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΑΝ ἐστὶν ἴση.  
Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  
ὑπὸ ΑΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν

liter igitur est ut recta  $AB$  ad  $BZ$  ita  $ZB$  ad  $BN$ ; rectangulum igitur sub  $AB$ ,  $BN$  æquale est quadrato ex  $BZ$ . Rursus quoniam æqualis est  $\angle A$  ipsi  $\angle K$ , communis autem et ad rectos ipsa  $AN$ ; basis igitur et  $KN$  basi  $AN$  est æqualis; et angulus igitur  $\angle K$  angulo  $\angle A$  est æqualis. Sed angulus  $\angle A$  angulo  $\angle KBN$  est æqualis; et  $\angle K$  igitur angulus angulo  $\angle KBN$  est æqualis. Et communis duobus triangulis, et  $\angle K$  et



δύο τριγώνων, τοῦ τε  $\triangle AKB$  καὶ τοῦ  $\triangle AKN$ , ἡ ὑπὸ  $\angle NAK$ <sup>15</sup>. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\angle AKB$  λοιπὴ τῇ ὑπὸ  $\angle KNA$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\triangle KBA$  τρίγωνον τῷ  $\triangle KNA$  τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $BA$  εὐθεῖα πρὸς τὴν  $AK$  οὕτως ἡ  $KA$ <sup>16</sup> πρὸς τὴν  $AN$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\angle BAK, \angle ANK$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AK$ . Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\angle ABK, \angle BKN$  ἴσον

AKN, angulus NAK; reliquus igitur AKB reliquo KNA est æqualis; æquiangulum igitur est KBA triangulum triangulo KNA. Proportionallyter igitur est ut BA recta ad AK ita KA ad AN; rectangulum igitur sub BA, AN est æquale quadrato ex AK. Ostensum est autem et rectangulum sub AB, BN æquale quadrato ex BZ;

BZN ; la droite AB est donc à BZ comme BZ est à BN ( 4. 6 ) ; le rectangle sous AB , BN est donc égal au carré de BZ ( 17. 6 ). De plus, puisque AA est égal à AK, et que la perpendiculaire AN est commune ; la base KN sera égale à la base AN ( 4. 1 ) ; l'angle AKN est donc égal à l'angle AAN. Mais l'angle AAN est égal à l'angle KBN ( 5. 1 ) ; l'angle AKN est donc égal à l'angle KBN. Mais l'angle NAK est commun aux deux triangles AKB, AKN ; l'angle restant AKB est donc égal à l'angle restant KNA ( 32. 1 ) ; le triangle KBA est donc équiangle avec le triangle KNA. La droite BA est donc à AK comme KA est à AN ; le rectangle sous BA, AN est donc égal au carré de AK ( 17. 6 ). Mais on a démontré que le rectangle sous AB, BN est égal



## LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 249

τῷ ἀπὸ τῆς BZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν AB πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τῶν πενταγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

rectangulum igitur sub AB, BN cum rectangulo sub BA, AN, quod est quadratum ex AB, æquale est quadrato ex BZ cum quadrato ex AK. Et est quidem AB pentagoni latus, ipsa BZ vero latus hexagoni, ipsa AK autem latus decagoni.

Ergo pentagoni, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Εὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἀναλογὸς ἐστὶν ἡ καλουμένη ἱλάσσω.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ABΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράφω τὸ ABΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἀλογὸς ἐστὶν ἡ καλουμένη ἱλάσσω.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H, Θ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθω

Si in circulo rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est irrationalis quæ appellatur minor.

In circulo enim ABΓΔΕ rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur ABΓΔΕ; dico pentagoni latus irrationalem esse quæ appellatur minor.

Sumatur enim centrum circuli punctum Z; et jungantur AZ, ZB; et producantur ad H, Θ puncta, et jungatur ΑΓ; et ponatur ipsius AZ quarta

au carré de BZ; le rectangle sous AB, BN, conjointement avec le rectangle sous BA, AN, ce qui est le carré de AB, est donc égal au carré de BZ, conjointement avec le carré de AK (2. 2). Mais la droite AB est le côté du pentagone, la droite BZ le côté de l'hexagone, et AK le côté du décagone. Donc si, etc.

### PROPOSITION XI.

Si l'on décrit un pentagone équilatéral dans un cercle ayant un diamètre rationel, le côté du pentagone sera l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

Décrivons un pentagone équilatéral ABΓΔΕ dans un cercle ABΓΔΕ qui ait son diamètre rationel; je dis que le côté du pentagone est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

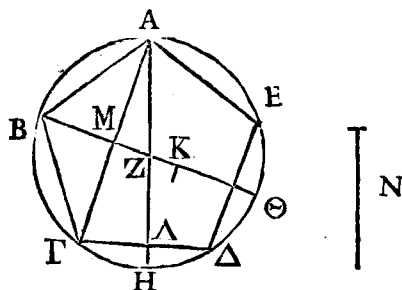
Car prenons le centre z du cercle; joignons AZ, ZB; prolongeons ces droites vers les points H, Θ; joignons ΑΓ, et faisons ZK égal à la quatrième partie de AZ.



250 LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς<sup>2</sup> ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. Ρητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΖ ρητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ρητή ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἴση ἐστὶ<sup>3</sup>. λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν<sup>4</sup> τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι, καὶ διπλῇ ἡ ΔΓ τῆς<sup>5</sup> ΓΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ<sup>6</sup> καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαὶ εἰσὶ, καὶ διπλῇ ἄρα<sup>7</sup> ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΑΓ

pars ipsa ΖΚ. Rationalis autem ΑΖ; rationalis igitur et ΖΚ. Est autem et ΒΖ rationalis; tota igitur ΒΚ rationalis est. Et quoniam æqualis est ΑΓΗ circumferentia circumferentiæ ΑΔΗ, ex quibus ΑΒΓ ipsi ΑΕΔ æqualis est; reliqua igitur ΓΗ reliquæ ΗΔ est æqualis. Et si jungamus ΑΔ, fient recti anguli ad Α, et ΔΓ dupla ipsius ΓΑ. Propter eadem utique et anguli ad Μ recti sunt, et dupla igitur ΑΓ ipsius ΓΜ. Quoniam igitur æqualis est angulus ΑΑΓ ipsi ΑΜΖ, communis autem duobus triangulis, et ΑΑΓ



καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΑΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>8</sup> τὸ ΑΓΑ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν<sup>9</sup> ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν<sup>10</sup> ΖΑ, καὶ τῶν ἐγρουμένων τὰ

et ΑΜΖ, angulus ΑΑΓ; reliquus igitur ΑΓΑ reliquo ΜΖΑ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΓΑ triangulum triangulo ΑΜΖ; proportionaliter igitur est ut ΑΓ ad ΓΑ ita ΜΖ ad ΖΑ, et antecedentium dupla; ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad

Puisque la droite ΑΖ est rationnelle, la droite ΖΚ sera rationnelle. Mais ΒΖ est rationnel; la droite entière ΒΚ est donc rationnelle. Et puisque l'arc ΑΓΗ est égal à l'arc ΑΔΗ, et que l'arc ΑΒΓ est égal à l'arc ΑΕΔ, l'arc restant ΓΗ sera égal à l'arc restant ΗΔ. Joignons ΑΔ; les angles seront droits en Α, et ΔΓ sera double de ΓΑ (33. 1). Par la même raison, les angles seront droits en Μ, et ΑΓ sera double de ΓΜ. Et puisque l'angle ΑΑΓ est égal à l'angle ΑΜΖ, et que l'angle ΑΑΓ est commun aux deux triangles ΑΑΓ, ΑΜΖ, l'angle restant ΑΓΑ sera égal à l'angle restant ΜΖΑ (32. 1); le triangle ΑΓΑ est donc semblable au triangle ΑΜΖ; la droite ΑΓ est donc à ΓΑ comme ΜΖ est à ΖΑ (4. 6); doublant les antécédents, le double

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 251

διπλάσια· ὥς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῇ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῇ πρὸς τὴν ΖΑ. Ὡς δὲ<sup>11</sup> ἡ τῆς ΜΖ διπλῇ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὥς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῇ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ, καὶ τῶν ἐπομένων τὰ ἡμίσεια· ὥς ἄρα ἡ τῆς ΑΓ διπλῇ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΓ διπλῇ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. Συνθέντι καὶ ὥς συναμφοτέρος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΖ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ<sup>12</sup>. Καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτείνουσας, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης<sup>13</sup>, τὸ μείζον τμήμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ<sup>14</sup> ΔΓ· τὸ δὲ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμείσεως τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια

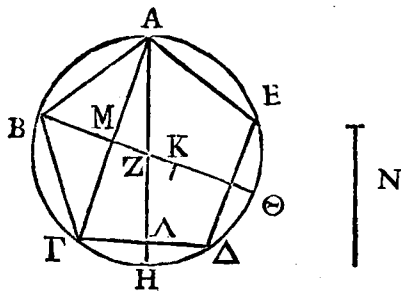
ΓΑ ita dupla ipsius ΜΖ ad ΖΑ. Ut autem ipsius ΜΖ dupla ad ΖΑ ita ΜΖ ad dimidiam ipsius ΖΑ ; et ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad ΓΑ ita ΜΖ ad dimidiam ipsius ΖΑ , et consequentium dimidia ; ut igitur dupla ipsius ΑΓ ad dimidiam ipsius ΓΑ ita ΜΖ ad quartam partem ipsius ΖΑ. Et est ipsius quidem ΑΓ dupla ΔΓ, ipsius vero ΑΓ dimidia ΓΜ, ipsius autem ΖΑ quarta pars ΖΚ; est igitur ut ΔΓ ad ΓΜ ita ΜΖ ad ΖΚ. Componendo et ut utraque ΔΓΜ ad ΓΜ ita ΜΚ ad ΚΖ ; et ut igitur ipsum ex utrâque ΔΓΜ ad ipsum ex ΓΜ ita ipsum ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ. Et quoniam duo latera pentagoni subtendentis, ut ΑΓ, extremâ et mediâ ratione sectæ, major portio æqualis est pentagoni lateri, hoc est ipsi ΔΓ; major autem portio assumens dimidium totius quintuplum potest dimidiæ totius, et est totius ΑΓ dimidia ΓΜ; ipsum igitur ex ipsâ ΔΓΜ

de ΑΓ sera à ΓΑ comme le double de ΜΖ est à ΖΑ. Mais le double de ΜΖ est à ΖΑ comme ΜΖ est à la moitié de ΖΑ ; le double de ΑΓ est donc à ΓΑ comme ΜΖ est à la moitié de ΖΑ ; prenant les moitiés des conséquents, le double de ΑΓ sera à la moitié de ΓΑ comme ΜΖ est au quart de ΖΑ. Mais la droite ΔΓ est double de ΑΓ, la droite ΓΜ est la moitié de ΑΓ, et ΖΚ est le quart de ΖΑ ; la droite ΔΓ est donc à ΓΜ comme ΜΖ est à ΖΚ ; donc, par addition, la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est à ΓΜ comme ΜΚ est à ΚΖ ( 18. 5 ) ; le quarré de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est donc au quarré de ΓΜ comme le quarré de ΜΚ est au quarré de ΚΖ ( 22. 6 ). Et puisqu'une droite telle que ΑΓ, qui soutend deux côtés du pentagone, est coupée en extrême et moyenne raison, que le plus grand segment est égal au côté du pentagone, c'est-à-dire à ΔΓ ( 8. 13 ) ; que le quarré de la somme du plus grand segment et de la moitié de la droite entière est égal au quintuple du quarré de la moitié de la droite entière ( 1. 13 ), et que ΓΜ est la moitié de la droite entière ΑΓ ; le quarré

252 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ<sup>16</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν

tanquam ex unâ quintuplum est ipsius ex ΓΜ. Ut autem ipsum ex ipsâ ΔΓΜ tanquam ex unâ ad ipsum ex ΓΜ ita ostensum est ipsum ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ; quintuplum igitur ipsum ex ΜΚ ipsius ex ΚΖ. Rationale autem ipsum ex ΚΖ, rationalis enim diameter; rationale igitur est et ipsum ex ΜΚ; rationalis igitur est ipsa ΜΚ, ratio-



ἡ ΜΚ, λόγον γὰρ ἔχει ἐν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ<sup>17</sup>. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ<sup>18</sup>. εἴκοσι πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ<sup>19</sup>. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ<sup>20</sup> λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

nem enim habet quam numerus ad numerum ipsum ex ΜΚ ad ipsum ex ΚΖ. Et quoniam quadrupla est ΒΖ ipsius ΖΚ, quintupla igitur est ΒΚ ipsius ΚΖ; viginti quintuplum igitur ipsum ex ΒΚ ipsius ex ΚΖ. Quintuplum autem ipsum ex ΜΚ ipsius ex ΚΖ; quintuplum igitur ipsum ex ΒΚ ipsius ex ΚΜ; ipsum igitur ex ΒΚ ad ipsum ex ΚΜ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-

de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ sera quintuple du carré de ΓΜ. Mais on a démontré que le carré de la somme des droites ΔΓ, ΓΜ est au carré de ΓΜ comme le carré de ΜΚ est au carré de ΚΖ; le carré de ΜΚ est donc quintuple du carré de ΚΖ. Mais le carré de ΚΖ est rationel (déf. 6. 10), car le diamètre est rationel; le carré de ΜΚ est donc aussi rationel (6. 10); la droite ΜΚ est donc rationelle; car le carré de ΜΚ a avec le carré de ΚΖ la raison qu'un nombre a avec un nombre. Et puisque la droite ΒΖ est quadruple de ΖΚ, la droite ΒΚ sera quintuple de ΚΖ; le carré de ΒΚ est donc égal à vingt-cinq fois le carré de ΚΖ (cor. 20. 6). Mais le carré de ΜΚ est quintuple du carré de ΚΖ; le carré de ΒΚ est donc quintuple du carré de ΚΜ; le carré de ΒΚ n'a donc pas avec le carré de ΚΜ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la

ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ BK<sup>21</sup> τῇ KM μήκει.  
Καὶ ἔστι ρητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ BK, KM ἄρα  
ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εὰν δὲ ἀπὸ  
ρητῆς ρητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος  
οὔσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἀλογός ἐστίν<sup>22</sup>. ἀποτομή  
ἄρα ἡ MB, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. Λέγω  
δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. Ω δὲ<sup>23</sup> μείζον ἐστὶν τὸ ἀπὸ  
τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ  
ἀπὸ τῆς N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μείζον δύναται  
τῇ N. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ KZ τῇ ZB,  
καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστὶν ἡ KB τῇ BZ. Ἀλλὰ  
ἡ BZ τῇ BΘ σύμμετρός ἐστὶ μήκει<sup>24</sup>. καὶ ἡ KB  
ἄρα τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πεντα-  
πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM,  
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον  
ἔχει ὃν E πρὸς A<sup>25</sup>. ἀναστρέφαντι ἄρα τὸ ἀπὸ  
τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει ὃν E πρὸς  
Δ, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμ-  
μετρος ἄρα μήκει<sup>26</sup> ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα  
τῆς KM μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου

surabilis igitur BK ipsi KM longitudine. Et est  
rationalis utraque ipsarum; ergo BK, KM ra-  
tionales sunt potentiâ solum commensurabiles.  
Si autem a rationali rationalis auferatur poten-  
tiâ solum commensurabilis existens toti, reliqua  
irrationalis est; apotome igitur MB, congruens  
autem ipsi ipsa MK. Dico igitur et quartam.  
Quo igitur majus est ipsum ex BK ipso ex KM,  
illi æquale sit ipsum ex N; ipsa igitur BK plus  
potest quam KM ipsa N. Et quoniam com-  
mensurabilis est KZ ipsi ZB, et componendo  
commensurabilis est KB ipsi BZ. Sed BZ ipsi BΘ  
commensurabilis est longitudine; et KB igitur  
ipsi BΘ commensurabilis est. Et quoniam quin-  
tuplum est ipsum ex BK ipsius ex KM; ipsum  
igitur ex BK ad ipsum ex KM rationem habet  
quam quinque ad unum; convertendo igi-  
tur ipsum ex BK ad ipsum ex N rationem habet  
quam quinque ad quatuor, et non eam quam  
quadratus numerus ad quadratum numerum;  
incommensurabilis igitur longitudine est BK ipsi  
N; ipsa BK igitur plus potest quam KM qua-

droite BK est donc incommensurable en longueur avec KM (9. 10). Mais chacune de ces droites est rationelle; les droites BK, KM ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si d'une droite rationelle on ôte une droite rationelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière, la droite restante est irrationnelle (74. 10); la droite MB est donc un apotome, et la droite MK sa congruente. Je dis que MB est un quatrième apotome. Que le carré de N soit égal à la surface dont le carré de BK surpasse le carré de KM; la puissance de BK sera plus grande que la puissance de KM de la puissance de N. Et puisque KZ est commensurable avec ZB; par addition, KB sera commensurable avec BZ. Mais BZ est commensurable en longueur avec BΘ; la droite KB est donc commensurable avec BΘ (12. 10). Mais le carré de BK est quintuple du carré de KM; le carré de BK a donc avec le carré de KM la raison que cinq a avec un; donc, par conversion, le carré de BK a avec le carré de N la raison que cinq a avec quatre (cor. 19. 5), et non pas celle qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite BK est donc incommensurable en longueur avec N (9. 10); la puissance de BK surpasse donc la puissance de KM du carré d'une droite incommensurable

ἐαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης  
τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου  
ἐαυτῇ μήκει<sup>27</sup>, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ  
ἐκκείμενῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ· ἀποτομή ἄρα τετάρτη  
ἐστὶν ἡ ΜΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τε-  
τάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ  
ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάτ-  
των. Δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒ, ΒΜ ἢ ΑΒ,  
διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσ-  
ται<sup>28</sup> τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ, καὶ  
εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως τὴν ΑΒ  
πρὸς τὴν ΒΜ· ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ  
ἄλογός ἐστιν<sup>30</sup> ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ὅπερ εἶδει  
δειξαι.

drato ex rectâ sibi incommensurabili. Quoniam  
igitur tota BK quam congruens KM plus potest  
quadrato ex rectâ sibi incommensurabili lon-  
gitudine, et tota BK commensurabilis est ex-  
positæ rationali BΘ; apotome igitur quarta est  
MB. Ipsum autem sub rationali et apotome  
quartâ contentum rectangulum irrationale est,  
et potens ipsum irrationalis est, quæ appellatur  
minor. Potest autem ipsum sub ΘΒ, ΒΜ ipsa  
ΑΒ, propterea quod junctâ ΑΘ æquiangulum  
fit ΑΒΘ triangulum triangulo ΑΒΜ, et est ut  
ΘΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΜ; ipsa ΑΒ igitur pen-  
tagoni latus est irrationalis quæ appellatur  
minor. Quod oportebat ostendere.

avec BK. Et puisque la puissance de la droite entière BK est plus grande que la puis-  
sance de la congruente KM du quarré d'une droite incommensurable en longueur  
avec BK, et que la droite entière BK est commensurable avec la rationelle exposée  
BΘ; la droite MB sera un quatrième apotome (déf. tr. 4. 10). Et puisque le rectangle  
compris sous une rationelle et sous un quatrième apotome est irrationnel (95. 10),  
que la droite qui peut cette surface est aussi irrationnelle, et s'appèle mineure, et  
que AB peut le rectangle sous ΘΒ, ΒΜ (17. 6), parce qu'ayant joint ΑΘ, le triangle  
ΑΒΘ est équiangle avec ΑΒΜ (8. 6), et que BΘ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΜ (4. 6);  
le côté AB du pentagone sera l'irrationnelle qu'on appèle mineure. Ce qu'il fallait  
démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

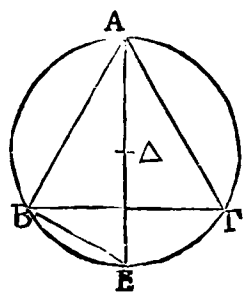
PROPOSITIO XII.

Εάν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφω τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentiâ triplum est ejus quæ ex centro circuli.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso triangulum æquilaterum describatur ΑΒΓ; dico trianguli ΑΒΓ unum latus potentiâ triplum esse ejus quæ est ex centro circuli ΑΒΓ.



Εἰλήθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ<sup>1</sup> ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφέρειας· ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος<sup>2</sup> τῆς τοῦ κύκλου

Sumatur enim circuli centrum Δ, et juncta ΑΔ producat ad Ε, et jungatur ΒΕ. Et quoniam æquilaterum est ΑΒΓ triangulum, ipsa ΒΕΓ igitur circumferentia tertia pars est circumferentiæ circuli ΑΒΓ; ergo ΒΕ circumferentia sexta est pars circumferentiæ circuli; hexagoni

PROPOSITION XII.

Si l'on décrit dans un cercle un triangle équilatéral, le carré du côté du triangle sera triple du carré du rayon.

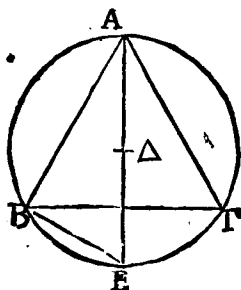
Soit le cercle ΑΒΓ, et dans ce cercle décrivons le triangle équilatéral ΑΒΓ; je dis que le carré du côté du triangle ΑΒΓ est triple du carré du rayon du cercle ΑΒΓ.

Car prenons le centre Δ du cercle; joignons ΑΔ; prolongeons cette droite vers Ε, et joignons ΒΕ. Puisque le triangle ΑΒΓ est équilatéral, l'arc ΒΕΓ est la troisième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓ; l'arc ΒΕ est donc la sixième partie de la circonférence du cercle; la droite ΒΕ est donc le côté de l'hexagone; cette

256 LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν<sup>3</sup> ἡ BE  
εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ ΔΕ.  
Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ AE τῆς ΕΔ, τετραπλά-  
σιόν ἄρα<sup>4</sup> τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, του-  
τίστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE. Ἰσὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE

igitur latus<sup>5</sup> est recta BE; æqualis igitur est ipsi  
ΔΕ quæ ex centro. Et quoniam dupla est AE ip-  
sius ΕΔ, quadruplum igitur ipsum ex AE ipsius ex  
ΔΕ, hoc est ipsius ex BE. Æquale autem ipsum



τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BE· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BE  
τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE· διελόντι ἄρα  
τὸ ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  
BE<sup>5</sup>. Ἰση δὲ ἡ BE τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τρι-  
πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ex AE ipsis ex AB, BE; ipsa igitur ex AB, BE  
quadrupla sunt ipsius ex BE; dividendo igitur  
ipsum ex AB triplum est ipsius ex BE. Æqualis  
autem BE ipsi ΔΕ; ipsum igitur ex AB tri-  
plum est ipsius ex ΔΕ.

Trianguli igitur latus, etc.

droite est donc égale au rayon ΔΕ du cercle (15. 4). Et puisque AE est double de  
ΕΔ, le quarré de AE sera quadruple du quarré de ΕΔ, c'est-à-dire du quarré de BE  
( cor. 20. 6 ). Mais le quarré de AE est égal aux quarrés des droites AB, BE ( 47.  
1, et 31. 3 ); la somme des quarrés des droites AB, BE est donc quadruple du  
quarré de BE; donc, par soustraction, le quarré de AB est triple du quarré de BE.  
Mais BE est égal à ΔΕ; le quarré de AB est donc triple du quarré de ΔΕ. Donc, etc,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Πυραμίδα συστήσασθαι ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλευρών<sup>1</sup>, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν AG τῆς GB· καὶ καταγεγράφθω<sup>2</sup> ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ ADB, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ῥθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ἡ EZH, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EHZ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ EZH· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΟΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ<sup>3</sup> EZH κύκλου ἐπιπέδῳ

Pyramidem constituere ex quatuor triangulis æquilateris, et sphærâ comprehendere datâ; et demonstrare sphæræ diametrum esse potentiâ sesquialteram lateris pyramidis.

Exponatur datæ sphæræ diameter AB, et secetur in Γ puncto, ita ut dupla sit AG ipsius GB; et describatur super AB semicirculus ADB, et ducatur a puncto Γ ipsi AB ad rectos ΓΔ, et jungatur ΔΑ; et exponatur circulus EZH æqualem habens eam quæ ex centro ipsi ΔΓ, et describatur in EHZ circulo triangulum æquilaterum EZH; et sumatur centrum circuli ipsum Θ punctum, et jungantur ipsæ ΕΘ, ΟΖ, ΘΗ; et erigatur a puncto Θ plano circuli EZH ad rectos ipsa

PROPOSITION XIII.

Construire une pyramide avec quatre triangles équilatéraux; la circonscrire par une sphère donnée, et démontrer que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé au point Γ, de manière que AG soit double de GB; sur AB, décrivons le demi-cercle ADB; du point Γ menons ΓΔ perpendiculaire à AB, et joignons ΔΑ; soit exposé le cercle EZH ayant pour rayon une droite égale à ΔΓ; décrivons dans le cercle EHZ le triangle équilatéral EZH (2. 4); prenons le centre Θ de ce cercle, et joignons ΕΘ, ΟΖ, ΘΗ; du point Θ menons la droite ΘΚ perpendiculaire au plan du cercle EZH; faisons



πρὸς ὀρθὰς ἡ  $\Theta\text{K}$ , καὶ ἀφηρήσθω<sup>4</sup> ἀπὸ τῆς  $\Theta\text{K}$  τῇ  $\text{A}\Gamma$  εὐθείᾳ ἴση ἡ  $\Theta\text{K}$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $\Theta\text{K}$  ὀρθή ἐστίν πρὸς τὸ τοῦ  $\text{EZH}$  κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ τοῦ  $\text{EZH}$  κύκλου ἐπίπεδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἀπτεται δὲ αὐτῆς ἐκάστη τῶν  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$ · ἡ  $\Theta\text{K}$  ἄρα πρὸς ἐκάστην τῶν  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$  ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $\text{A}\Gamma$  τῇ  $\Theta\text{K}$ , ἡ δὲ  $\Gamma\Delta$  τῇ  $\Theta\text{E}$ , καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ  $\Delta\text{A}$  βάσει τῇ  $\text{KE}$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερα τῶν  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  τῇ  $\Delta\text{A}$  ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ  $\text{A}\Gamma$  τῆς  $\Gamma\text{B}$ , τριπλὴ ἄρα ἡ  $\text{AB}$  τῆς  $\text{B}\Gamma$ . Ὡς δὲ ἡ  $\text{AB}$  πρὸς τὴν  $\text{B}\Gamma$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{A}\Delta$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta\Gamma$ <sup>5</sup>, ὥς ἐξῆς δειχθήσεται· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{A}\Delta$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Delta\Gamma$ . Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{ZE}$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\text{E}\Theta$  τριπλάσιον, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ  $\Delta\Gamma$  τῇ  $\text{E}\Theta$ · ἴση ἄρα καὶ ἡ  $\Delta\text{A}$  τῇ  $\text{EZ}$ . Ἀλλὰ ἡ  $\Delta\text{A}$  ἐκάστη τῶν  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  ἐδείχθη ἴση· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν  $\text{EZ}$ ,  $\text{ZH}$ ,  $\text{HE}$  ἐκάστη τῶν  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$

$\Theta\text{K}$ , et auferatur ab ipsâ  $\Theta\text{K}$  ipsi  $\text{A}\Gamma$  recta æqualis ipsa  $\Theta\text{K}$ , et jungantur ipsæ  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$ . Et quoniam  $\Theta\text{K}$  recta est ad planum circuli  $\text{EZH}$ ; et ad omnes igitur tangentes ipsam rectas, et existentes in  $\text{EZH}$  circuli plano, rectos faciet angulos. Contingit autem ipsam unaquæque ipsarum  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$ ; ipsa  $\Theta\text{K}$  igitur ad unamquamque ipsarum  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$  perpendicularis est. Et quoniam æqualis est quidem ipsa  $\text{A}\Gamma$  ipsi  $\Theta\text{K}$ , ipsa vero  $\Gamma\Delta$  ipsi  $\Theta\text{E}$ , et rectos angulos continent; basis igitur  $\Delta\text{A}$  basi  $\text{KE}$  est æqualis. Propter eadem utique et utraque ipsarum  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  ipsi  $\Delta\text{A}$  est æqualis; tres igitur  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  æquales inter se sunt. Et quoniam dupla est  $\text{A}\Gamma$  ipsius  $\Gamma\text{B}$ , tripla igitur  $\text{AB}$  ipsius  $\text{B}\Gamma$ . Ut autem  $\text{AB}$  ad  $\text{B}\Gamma$  ita ipsum ex  $\text{A}\Delta$  ad ipsum ex  $\Delta\Gamma$ , ut deinceps demonstrabitur; triplum igitur ipsum ex  $\text{A}\Delta$  ipsius ex  $\Delta\Gamma$ . Est autem et ipsum ex  $\text{ZE}$  ipsius ex  $\text{E}\Theta$  triplum, et est æqualis  $\Delta\Gamma$  ipsi  $\text{E}\Theta$ ; æqualis igitur et  $\Delta\text{A}$  ipsi  $\text{EZ}$ . Sed  $\Delta\text{A}$  unicuique ipsarum  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  ostensa est æqualis; et unaquæque igitur ipsarum  $\text{EZ}$ ,  $\text{ZH}$ ,

la droite  $\Theta\text{K}$  égale à la droite  $\text{A}\Gamma$ , et joignons  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$ . Puisque  $\Theta\text{K}$  est perpendiculaire au plan du cercle  $\text{EZH}$ , cette droite fera des angles égaux avec toutes les droites qui la rencontrent, et qui sont dans le plan du cercle  $\text{EZH}$  (déf. 3. 11). Mais chacune des droites  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$  rencontre la droite  $\Theta\text{K}$ ; la droite  $\Theta\text{K}$  est donc perpendiculaire à chacune des droites  $\Theta\text{E}$ ,  $\Theta\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}$ . Et puisque  $\text{A}\Gamma$  est égal à  $\Theta\text{K}$ , que  $\Gamma\Delta$  est égal à  $\Theta\text{E}$ , et que ces droites comprennent des angles droits, la base  $\Delta\text{A}$  sera égale à la base  $\text{KE}$  (4. 1). Par la même raison, chacune des droites  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  sera égale à  $\Delta\text{A}$ ; les trois droites  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$  sont donc égales entr'elles. Et puisque  $\text{A}\Gamma$  est double de  $\Gamma\text{B}$ , la droite  $\text{AB}$  sera triple de  $\text{B}\Gamma$ . Mais  $\text{AB}$  est à  $\text{B}\Gamma$  comme le carré de  $\text{A}\Delta$  est au carré de  $\Delta\Gamma$ , ainsi qu'on le démontrera plus bas; le carré de  $\text{A}\Delta$  est donc triple du carré de  $\Delta\Gamma$ . Mais le carré de  $\text{ZE}$  est triple du carré de  $\text{E}\Theta$  (12. 13), et  $\Delta\Gamma$  est égal à  $\text{E}\Theta$ ; la droite  $\Delta\text{A}$  est donc égale à  $\text{EZ}$ . Mais on a démontré que  $\Delta\text{A}$  est égal à chacune des droites  $\text{KE}$ ,  $\text{KZ}$ ,  $\text{KH}$ ; chacune des droites  $\text{EZ}$ ,  $\text{ZH}$ ,  $\text{HE}$  est donc égale à chacune des droites

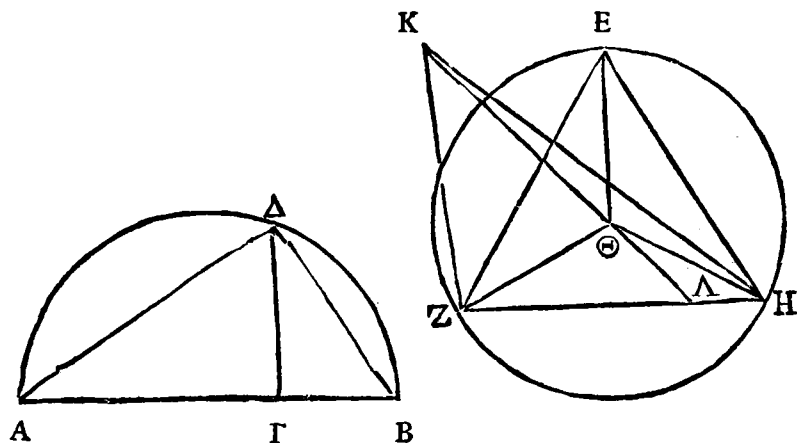
# LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 259

ἔστιν ἴση· ἰσόσλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρί-  
γωνα τὰ EZH, KEZ, KZH, KHE· πυραμὶς ἄρα  
συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων<sup>6</sup> ἰσοπλεύρων,  
ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ EZH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ  
τὸ K σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δο-  
θείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος  
δυνάμει<sup>7</sup> ἡμιολία ἐστὶ<sup>8</sup> τῆς πλευρᾶς τῆς πυρα-  
μίδος.

HE unicuique ipsarum KE, KZ, KH est æqua-  
lis ; æquilatera igitur sunt quatuor trian-  
gula EZH, KEZ, KZH, KHE ; pyramis igitur  
constituta est ex quatuor triangulis æquilateris,  
cujus basis quidem est EZH triangulum, vertex  
autem K punctum.

Oportet igitur ipsam et sphærâ comprehen-  
dere datâ, et ostendere sphæræ diametrum  
potentiâ sesquialteram esse lateris pyramidis.



Εκβεβλήσθω γὰρ ἐπὶ εὐθείας τῆς ΚΘ εὐθεῖα  
ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ<sup>9</sup>. Καὶ ἐπεὶ  
ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν  
ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ,  
ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ  
οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ,

Producantur enim in directum ipsi ΚΘ recta  
ΘΛ, et ponatur ipsi ΒΓ æqualis ipsa ΘΛ.  
Et quoniam est ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΓΔ ad ΓΒ ; sed  
æqualis ΑΓ quidem ipsi ΚΘ, ΓΔ vero ipsi ΘΕ,  
ΓΒ autem ipsi ΘΛ ; est igitur ut ΚΘ ad ΘΕ ita  
ΕΘ ad ΘΛ ; ipsum igitur sub ΚΘ, ΘΛ æquale est

KE, KZ, KH ; les quatre triangles EZH, KEZ, KZH, KHE sont donc équilatéraux ; on a  
donc construit une pyramide comprise par quatre triangles équilatéraux, cette  
pyramide ayant pour base le triangle EZH, et pour sommet le point K.

Il faut circonscrire cette pyramide par la sphère donnée, et démontrer que le  
quarré du diamètre de cette sphère est égal aux trois moitiés du quarré du côté de  
la pyramide.

Car menons ΘΛ dans la direction de ΚΘ, et faisons ΘΛ égal à ΒΓ. Puisque ΑΓ est  
à ΓΔ comme ΓΔ est à ΓΒ ( 8. 6 ), que ΑΓ est égal à ΚΘ, que ΓΔ est égal à ΘΕ, et que  
ΓΒ est égal à ΘΛ, la droite ΚΘ sera à ΘΕ comme ΕΘ est à ΘΛ ; le rectangle sous ΚΘ,

ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ<sup>10</sup> γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΑ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Επειδήπερ εἰὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΑΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσώγιον γίγνεται<sup>11</sup> τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων. Εἰ δὲ μενούσης τῆς ΚΑ περιεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεται, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίων γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται<sup>12</sup> ἡ πυραμὶς σφαῖρα περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΑ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δὲ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Επεὶ γὰρ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλὴ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἡμιολία<sup>13</sup> ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. Ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ,

ipsi ex ΕΘ. Et est rectus uterque angulorum ΚΘΕ, ΕΘΛ; ergo super ΚΑ descriptus semicirculus transibit et per punctum Ε. Etenim si jungamus ΕΛ, rectus fiet angulus ΑΕΚ, quia æquiangulum fiet triangulum ΕΛΚ unicuique triangulorum ΕΛΘ, ΕΘΚ. Si igitur manente ΚΑ conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur a quo cœpit moveri, transibit et per puncta Ζ, Η, junctis ΖΛ, ΛΗ, et rectis similiter factis ad puncta Ζ, Η angulis, et erit pyramis sphærâ comprehensa datâ, etenim sphæræ diameter ΚΑ æqualis est diametro datæ sphæræ ipsi ΑΒ, quoniam ipsi quidem ΑΓ æqualis ponitur ΚΘ, ipsi vero ΓΒ ipsa ΘΛ.

Dico denique sphæræ diametrum sesquialtera esse potentiâ lateris pyramidis.

Quoniam enim dupla est ΑΓ ipsius ΓΒ, tripla igitur ΑΒ ipsius ΒΓ; convertendo igitur sesquialtera est ΒΑ ipsius ΑΓ. Ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΒΑ ad ipsum ex ΑΔ,

ΘΛ est donc égal au carré de ΕΘ. Mais chacun des angles ΚΘΕ, ΕΘΛ est droit; le demi-cercle décrit sur ΚΑ passera donc par le point Ε. Or, si nous joignons ΕΛ, l'angle ΑΕΚ sera droit, parce que le triangle ΕΛΚ est équiangle avec chacun des triangles ΕΛΘ, ΕΘΚ. Si donc la droite ΚΑ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, il passera aussi par les points Ζ, Η; car si l'on joint ΖΛ, ΛΗ, les angles seront semblablement droits en Ζ, Η; et la pyramide sera circonscrite par la sphère donnée, car le diamètre ΚΑ de la sphère est égal au diamètre ΑΒ de la sphère donnée, parce que l'on a fait ΚΘ égal à ΑΓ, et ΘΛ à ΓΒ.

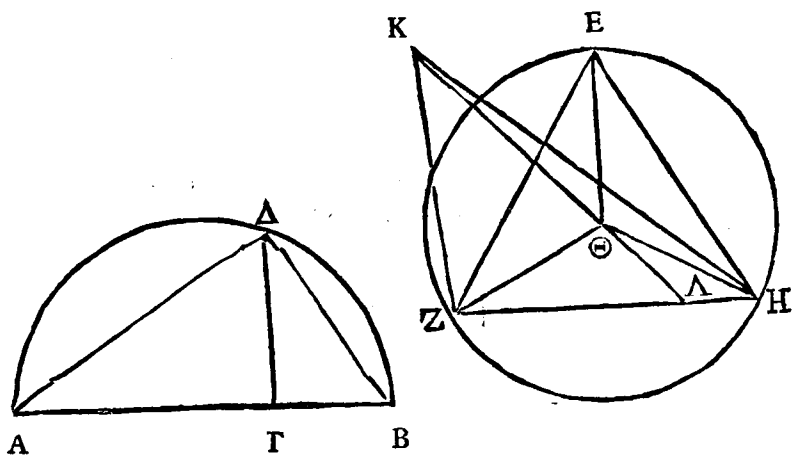
Je dis enfin que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté de la pyramide.

Car puisque la droite ΑΓ est double de ΓΒ, la droite ΑΒ sera triple de ΒΓ; donc, par conversion, la droite ΒΑ sera égale aux trois moitiés de ΑΓ. Mais ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΒΑ est au carré de ΑΔ, car ayant joint ΒΔ, la droite ΒΑ sera

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 261

ἐπειδὴ περ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ

quia, junctâ  $BA$ , est ut  $BA$  ad  $AA$  ita  $AA$  ad  $AG$ , ob similitudinem ipsorum  $\triangle AB$ ,  $\triangle AG$  triangulorum, et quod est ut prima ad tertiam ita



εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ  
ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιό-  
λιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.  
Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διά-  
μιτρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει<sup>14</sup> ἡμισ-  
λία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ὅπερ ἔδει  
δειξαι.

ipsum ex primâ ad ipsum ex secundâ; sesquialterum igitur et ipsum ex BA ipsius ex AA. Et est BA quidem datæ sphæræ diameter, AA vero æqualis lateri pyramidis.

Sphæræ igitur diameter potentiâ sesquialtera  
est lateris pyramidis. Quod oportebat ostendere.

à  $\Delta\Delta$  comme  $\Delta A$  est à  $Ar$  (8. 6), à cause de la similitude des triangles  $\Delta AB$ ,  $\Delta Ar$ , et à cause que la première droite est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (cor. 20. 6); le carré de  $BA$  est donc égal aux trois moitiés du carré de  $\Delta\Delta$ . Mais  $BA$  est le diamètre de la sphère donnée, et  $\Delta\Delta$  est égal au côté de la pyramide.

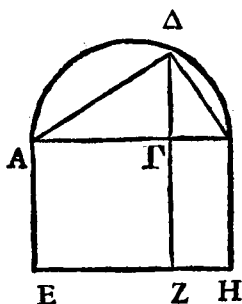
Le quarré du diamètre de la sphère est donc égal aux trois moitiés du quarré du côté de la pyramide. Ce qu'il fallait démontrer.

## Λ Η Μ Μ Α.

## LEMMA.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$  οὕτως  
τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΔ$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΔΓ$ .

Demonstrandum est, ut  $AB$  ad  $BΓ$  ita qua-  
dratum ex  $ΑΔ$  ad ipsum ex  $ΔΓ$ .



Εκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ,  
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔB$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  
 $ΑΓ$  τετράγωνον τὸ  $ΕΓ$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  
 $ZB$  παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώ-  
νιον εἶναι τὸ  $ΔAB$  τρίγωνον τῷ  $ΔΑΓ$  τριγώνῳ,  
ἐστὶν ὡς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΔA$  πρὸς τὴν  
 $ΑΓ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $ΑΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ  
τῆς  $ΑΔ$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$   
οὕτως τὸ  $EB$  πρὸς τὸ  $BZ$ , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $EB$  τὸ  
ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $ΑΓ$ , ἴση γάρ ἐστιν<sup>16</sup> ἡ  $EA$  τῇ  $ΑΓ$ ,  
τὸ δὲ  $BZ$  τῷ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓB$ . ὡς ἄρα ἡ  $AB$  πρὸς

Exponatur enim semicirculi figura, et jun-  
gatur  $ΔB$ , et describatur ex  $ΑΓ$  quadratum  $ΕΓ$ ,  
et compleatur  $ZB$  parallelogrammum. Quoniam  
igitur propterea quod æquiangulum est  $ΔAB$   
triangulum triangulo  $ΔΑΓ$ , est ut  $BA$  ad  $ΑΔ$  ita  
 $ΔA$  ad  $ΑΓ$ ; ipsum igitur sub  $BA$ ,  $ΑΓ$  æquale  
est ipsi ex  $ΑΔ$ . Et quoniam est ut  $AB$  ad  $BΓ$  ita  $EB$   
ad  $BZ$ , et est ipsum quidem  $EB$  ipsum sub  $BA$ ,  
 $ΑΓ$ , æqualis enim est  $EA$  ipsi  $ΑΓ$ ; ipsum autem  
 $BZ$  ipsi sub  $ΑΓ$ ,  $ΓB$ ; ut igitur  $AB$  ad  $BΓ$  ita

## L E M M E.

Il faut démontrer que  $AB$  est à  $BΓ$  comme le quarré de  $ΑΔ$  est au quarré de  $ΔΓ$ .  
Soit exposée la figure du demi-cercle; joignons  $ΔB$ ; décrivons avec  $ΑΓ$  le quarré  
 $ΕΓ$ , et achevons le parallélogramme  $ZB$ . Puisque le triangle  $ΔAB$  est équiangle avec le  
triangle  $ΔΑΓ$ ; la droite  $BA$  sera à  $ΑΔ$  comme  $ΔA$  est à  $ΑΓ$  ( 4. 6 ); le rectangle  
sous  $BA$ ,  $ΑΓ$  est donc égal au quarré de  $ΑΔ$  ( 17. 6 ). Et puisque  $AB$  est à  $BΓ$   
comme le rectangle  $EB$  est au rectangle  $BZ$  ( 1. 6 ); que le rectangle  $EB$  est sous  $BA$ ,  
 $ΑΓ$ , la droite  $AE$  étant égale à  $ΑΓ$ , et que le rectangle  $BZ$  est compris sous  $ΑΓ$ ,

τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὥς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ.  
Et est ipsum quidem sub ΒΑ, ΑΓ æquale ipsi ex ΑΔ, ipsum vero sub ΑΓ, ΓΒ æquale ipsi ex ΔΓ, etenim ΔΓ perpendicularis inter basis portiones ΑΓ, ΓΒ media proportionalis est, quia rectus est angulus ΑΔΒ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ipsum ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Οκταέδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἢ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἔχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ

PROPOSITIO XIV.

Octaedrum constituere, et sphærâ comprehendere quâ et pyramidem; et demonstrare sphæræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri.

Exponatur datæ sphæræ diameter ΑΒ, et secetur bifariam in Γ, et describatur super ΑΒ semicirculus ΑΔΒ, et ducatur a puncto Γ ipsi ΑΒ ad rectos ipsa ΓΔ, et jungatur ΔΒ, et exponatur

ΓΒ, la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est égal au quarré de ΑΔ, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égal au quarré de ΔΓ, car la perpendiculaire ΔΓ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΓ, ΓΒ de la base ( 1. 6 ), à cause que l'angle ΑΔΒ est droit; la droite ΑΒ est donc à ΒΓ comme le quarré de ΑΔ est au quarré de ΔΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIV.

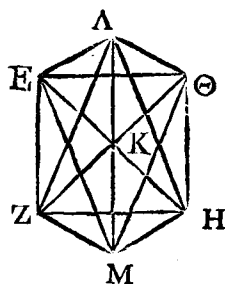
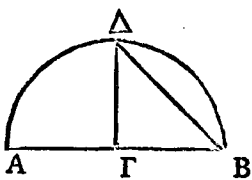
Construire un octaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit la pyramide; et démontrer que le quarré du diamètre de la sphère est double du quarré du côté de l'octaèdre.

Soit ΑΒ le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé en deux parties égales au point Γ; décrivons sur ΑΒ le demi - cercle ΑΔΒ; menons du point Γ la droite ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ; joignons ΔΒ; soit exposé le quarré ΕΖΗΘ ayant chacun

264 LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσων ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν

quadratum ΕΖΗΘ æquale habens unumquodque laterum ipsi ΒΔ, et jungantur ipsæ ΘΖ, ΕΗ, et erigatur a puncto Κ plano quadrati ΕΖΗΘ ad rectos recta ΚΛ, et producat ad alteras partes plani ut ΚΜ, et auferatur ab utràque ipsarum ΚΛ, ΚΜ uni ipsarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ æqualis



ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΚΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ

utraque ipsarum ΚΛ, ΚΜ, et jungantur ipsæ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Et quoniam æqualis est ΚΕ ipsi ΚΘ, et est rectus ΕΚΘ angulus; ipsum igitur ex ΘΕ duplum est ipsius ex ΕΚ. Rursus, quoniam æqualis est ΑΚ ipsi ΚΕ, et est rectus ΑΚΕ angulus; ipsum igitur ex ΕΛ duplum est ipsius ex ΕΚ. Ostensum est autem ipsum ex ΘΕ duplum ipsius ex ΕΚ; ipsum igitur ex ΛΕ æquale est ipsi ex ΕΘ; æqualis igitur est ΛΕ ipsi ΕΘ. Propter eadem utique et ΛΘ ipsi ΘΕ

de ses côtés égal à ΒΔ; joignons ΘΖ, ΕΗ; élevons du point Κ la droite ΚΛ perpendiculaire au plan du quarré ΕΖΗΘ; prolongeons cette droite de l'autre côté du plan et que son prolongement soit ΚΜ; faisons chacune des droites ΚΛ, ΚΜ égale à une des droites ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ, et joignons ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Puisque la droite ΚΕ est égale à ΚΘ, et que l'angle ΕΚΘ est droit; le quarré de ΘΕ sera double du quarré de ΕΚ (47. 1). De plus, puisque ΑΚ est égal à ΚΕ, et que l'angle ΑΚΕ est droit, le quarré de ΕΛ sera double du quarré de ΕΚ. Mais on a démontré que le quarré de ΘΕ est double du quarré de ΕΚ; le quarré de ΛΕ est donc égal au quarré de ΕΘ; la droite ΛΕ est donc égale à ΕΘ. Par la même raison, la droite ΛΘ est égale à ΘΕ, le triangle ΛΕΘ est donc



## LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 265

ΘΕ ἴσιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται<sup>5</sup> ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Επεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἰὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιεγεθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς<sup>6</sup> περιέχουσι, βάσεις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία, ἐν

est æqualis; æquilaterum igitur est ΛΕΘ triangulum. Similiter utique ostendemus et unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases quidem sunt ΕΖΗΘ quadrati latera, vertices autem Λ, Μ puncta, æquilaterum esse; octaedrum igitur constitutum est sub octo triangulis æquilateris contentum.

Oportet vero ipsum et sphærâ comprehendere datâ, et demonstrare sphæræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri.

Quoniam enim tres rectæ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ æquales inter se sunt, ergo super ΛΜ descriptus semicirculus transibit et per punctum Ε. Et propter eadem, si manente ΛΜ, conversus semicirculus in eundem locum restituatur a quo cœpit moveri, transibit et per puncta Ζ, Η, Θ, et erit sphærâ comprehensum octaedrum. Dico etiam et datâ. Quoniam enim æqualis est ΛΚ ipsi ΚΜ, communis autem ΚΕ, et angulos rectos continent, basis igitur ΛΕ basi ΕΜ est æqualis. Et quoniam rectus est ΛΕΜ angulus, etenim in se-

équilatéral. Nous démontrerons semblablement que chacun des triangles restants, dont les bases sont les côtés du quarré ΕΖΗΘ, et les sommets les points Λ, Μ, est aussi équilatéral; on a donc construit un octaèdre compris sous huit triangles équilatéraux.

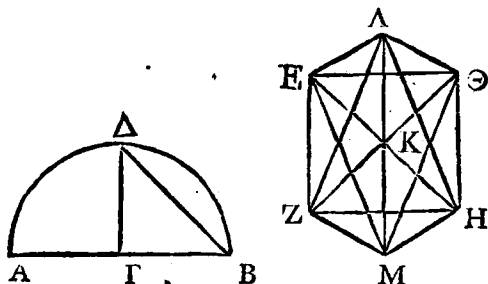
Il faut à présent circonscrire l'octaèdre par la sphère donnée, et démontrer que le quarré du diamètre de cette sphère est double du quarré du côté de l'octaèdre.

Car puisque les trois droites ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ sont égales entr'elles, le demi-cercle décrit sur ΛΜ passera par le point Ε. Par la même raison, si la droite ΛΜ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, ce demi-cercle passera aussi par les points Ζ, Η, Θ, et l'octaèdre sera circonscrit par une sphère. Je dis qu'il le sera par la sphère donnée. Car puisque la droite ΛΚ est égale à ΚΜ, que la droite ΚΕ est commune, et que ces droites comprennent des angles droits, la base ΛΕ sera égale à la base ΕΜ (4. 1). Et puisque l'angle ΛΕΜ est droit (31. 3), car il est dans un demi-cercle,



ἡμικυκλίῳ γὰρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{M}$  διπλάσιον ὅτι<sup>8</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{E}$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\Lambda\Gamma$  τῇ  $\Gamma\text{B}$ , διπλασία ἐστὶν ἡ  $\text{AB}$  τῆς  $\text{B}\Gamma$ . Ὡς δὲ ἡ  $\text{AB}$  πρὸς τὴν  $\text{B}\Gamma$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{AB}$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{B}\Delta$  διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς

micirculo, ipsum igitur ex  $\Lambda\text{M}$  duplum est ipsius ex  $\Lambda\text{E}$ . Rursus, quoniam æqualis est  $\Lambda\Gamma$  ipsi  $\Gamma\text{B}$ , dupla est  $\text{AB}$  ipsius  $\text{B}\Gamma$ . Ut autem  $\text{AB}$  ad  $\text{B}\Gamma$  ita ipsum ex  $\text{AB}$  ad ipsum ex  $\text{B}\Delta$ ; duplum igitur est ipsum ex  $\text{AB}$  ipsius ex  $\text{B}\Delta$ . Ostensum



$\text{AB}$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\text{B}\Delta$ . Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{M}$  διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{E}$ . Καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{B}\Delta$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{E}$ . Ἰση γὰρ κεῖται ἡ  $\text{E}\Theta$  τῇ  $\Delta\text{B}$ . Ἰσον ἐστὶν<sup>7</sup> ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{AB}$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{M}$ . Ἰση ἄρα ἡ  $\text{AB}$  τῇ  $\Lambda\text{M}$ . Καὶ ὅτιν ἡ  $\text{AB}$  ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ  $\Lambda\text{M}$  ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιέληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίῳ ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

autem est et ipsum ex  $\Lambda\text{M}$  duplum ipsius ex  $\Lambda\text{E}$ . Et est æquale ipsum ex  $\text{B}\Delta$  ipsi ex  $\Lambda\text{E}$ ; æqualis enim posita est ipsa  $\text{E}\Theta$  ipsi  $\Delta\text{B}$ . Æquale est igitur et ipsum ex  $\text{AB}$  ipsi ex  $\Lambda\text{M}$ ; æqualis igitur  $\text{AB}$  ipsi  $\Lambda\text{M}$ . Et est  $\text{AB}$  datæ sphaeræ diameter; ergo  $\Lambda\text{M}$  æqualis est datæ sphaeræ diametro.

Comprehensum est igitur octaedrum datâ sphaerâ; et simul demonstratum est sphaeræ diametrum potentiâ duplam esse lateris octaedri. Quod oportebat facere.

le carré de  $\Lambda\text{M}$  sera double du carré de  $\Lambda\text{E}$  (47. 1). De plus, puisque  $\text{AR}$  est égal à  $\Gamma\text{B}$ , la droite  $\text{AB}$  sera double de  $\text{B}\Gamma$ . Mais  $\text{AB}$  est à  $\text{B}\Gamma$  comme le carré de  $\text{AB}$  est au carré de  $\text{B}\Delta$  (8, et 20. 6); le carré de  $\text{AB}$  est donc double du carré de  $\text{B}\Delta$ . Mais on a démontré que le carré de  $\Lambda\text{M}$  est double du carré de  $\Lambda\text{E}$ , et le carré de  $\text{B}\Delta$  est égal au carré de  $\Lambda\text{E}$ , car la droite  $\text{E}\Theta$  est supposée égale à  $\Delta\text{B}$ ; le carré de  $\text{AB}$  est donc égal au carré de  $\Lambda\text{M}$ ; la droite  $\text{AB}$  est donc égale à  $\Lambda\text{M}$ . Mais  $\text{AB}$  est le diamètre de la sphère donnée; la droite  $\Lambda\text{M}$  est donc égale au diamètre de la sphère donnée.

L'octaèdre a donc été circonscrit par la sphère donnée, et l'on a démontré, en même temps, que le carré du diamètre est double du carré du côté de l'octaèdre. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

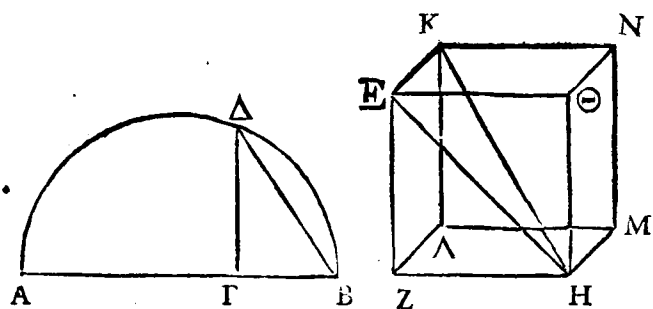
PROPOSITIO XV.

Κύβον συστήσασθαι<sup>1</sup>, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἥ καὶ τὰ πρότερα<sup>2</sup>, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων<sup>3</sup> ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε διπλὴν εἶναι τὴν AG τῆς GB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ ADB, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς

Cubum constituere, et sphaerâ comprehendere quâ et priores; et demonstrare sphaeræ diametrum potentiâ triplam esse lateris cubi.

Exponatur datæ sphaeræ diameter AB, et secetur in Γ, ita ut dupla sit AG ipsius GB, et describatur super AB semicirculus ADB, et a puncto Γ ipsi AB ad rectos ducatur ΓΔ, et



ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ὁ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ EZHΘ ἴσην ἔχον τὴν<sup>4</sup> πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ EZHΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν αἱ EK, ZΛ, HM, ΘΝ, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἑκάστης τῶν EK, ZΛ, HM, ΘΝ μιᾶ τῶν EZ, ZH, HΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν EK, ZΛ, HM, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ,

jungatur ΔΒ, et exponatur quadratum EZHΘ, æquale habens latus ipsi ΔΒ, et a punctis Ε, Ζ, Η, Θ quadrati EZHΘ plano ad rectos ducantur EK, ZΛ, HM, ΘΝ, et auferatur ab unâquâque ipsarum EK, ZΛ, HM, ΘΝ uni ipsarum EZ, ZH, HΘ, ΘΕ æqualis unaquæque ipsarum EK, ZΛ, HM, ΘΝ, et jungantur ipsæ ΚΛ, ΛΜ,

PROPOSITION XV.

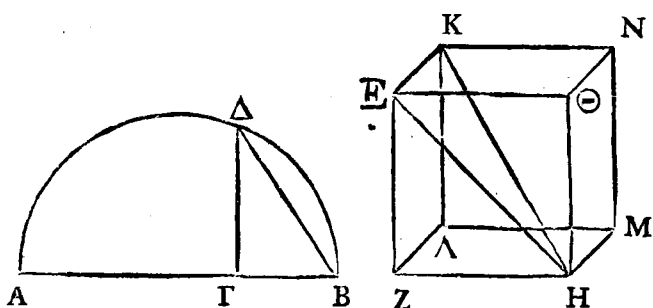
Construire un cube, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le quarré du diamètre de la sphère est triple du quarré du côté du cube.

Soit AB le diamètre de la sphère donnée; coupons AB au point Γ, de manière que AG soit double de GB; sur AB décrivons le demi-cercle ADB; du point Γ élevons ΓΔ perpendiculaire à AB; joignons ΔΒ; soit exposé un quarré EZHΘ ayant son côté égal à ΔΒ; des points Ε, Ζ, Η, Θ menons les droites EK, ZΛ, HM, ΘΝ perpendiculaires au plan du quarré EZHΘ; faisons chacune des droites EK, ZΛ, HM, ΘΝ, égales à une des droites EZ, ZH, HΘ, ΘΕ, et joignons ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ; on aura

268 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

NK· κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ZN ὑπὸ ἑξ τετρα-  
γώνων ἴσων περιεχόμενος<sup>5</sup>. Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ  
σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ  
τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων<sup>6</sup> ἐστὶ  
τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

MN, NK; cubus igitur constitutus est ZN sub  
sex quadratis æqualibus contentus. Oportet vero  
ipsum et sphærâ datâ comprehendere, et de-  
monstrare sphæræ diametrum potentiâ triplam  
esse lateris cubi.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ KH, EH. Καὶ ἐπεὶ  
ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ KEH γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν  
KE ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ EH ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ  
πρὸς τὴν EH εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KH γρα-  
φόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ E σημείου.  
Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθή ἐστὶν πρὸς ἑκατέραν τῶν  
ΛZ, ZE, καὶ πρὸς τὸ ZK ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστὶν  
ἡ ZH· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ZK, ἡ HZ  
ὀρθή ἐσται καὶ πρὸς τὴν ZK· καὶ διὰ τοῦτο  
πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς HK γραφόμενον ἡμικύκλιον  
ἥξει<sup>8</sup> καὶ διὰ τοῦ Z. Ομοίως<sup>9</sup> καὶ διὰ τῶν λοι-  
πῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. Εὰν δὴ, μενούσης

Jungantur enim ipsæ KH, EH. Et quoniam  
rectus est KEH angulus, propterea quod et KE  
perpendicularis sit ad EH planum, videlicet et ad  
EH rectam, ergo super KH descriptus semicircu-  
lus transibit et per punctum E. Rursus, quoniam  
ZH perpendicularis est ad utramque ipsarum  
ΛZ, ZE, et ad ZK igitur planum perpendicu-  
laris est ZH; quare et si jungamus ZK, ipsa HZ  
perpendicularis erit et ad ZK; et propter hoc  
rursus super HK descriptus semicirculus tran-  
sibit et per punctum Z. Similiter et per reli-  
qua cubi puncta transibit. Si igitur, manente

construit un cube ZN compris sous six quarrés égaux. Il faut circonscrire ce cube  
par la sphère donnée, et démontrer que le quarré du diamètre de la sphère est  
triple du quarré du côté du cube.

Joignons KH, EH. Puisque l'angle KEH est droit, parce que KE est perpendicu-  
laire au plan EH, c'est-à-dire à la droite EH (déf. 3. 11); le demi-cercle  
décrit sur KH passera donc par le point E (31. 3). De plus, puisque la droite  
ZH est perpendiculaire à chacune des droites ΛZ, ZE, la droite ZH sera perpen-  
diculaire au plan de ZK (4. 11); si donc nous joignons ZK, la droite HZ sera aussi  
perpendiculaire à ZK, et à cause de cela le demi-cercle décrit sur HK passera  
par le point z. Ce demi-cercle passera semblablement par les autres points du  
cube. Si donc la droite KH, restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 269

τῆς ΚΗ, περιεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ παλιν<sup>10</sup> ἀποκατασταθῇ ἕθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιελημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἐστὶν ἑρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ τριπλασίον ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὥς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. Καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΕΔ<sup>11</sup>· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ<sup>12</sup> ἄρα σφαῖρα περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΚΗ, conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur a quo cœpit moveri, erit sphaerâ comprehensus cubus. Dico etiam et datâ. Quoniam enim æqualis est ΗΖ ipsi ΖΕ, et est rectus ad Ζ angulus; ipsum igitur ex ΓΗ duplum est ipsius ex ΕΖ. Æqualis autem ΕΖ ipsi ΕΚ; ipsum igitur ex ΕΗ duplum est ipsius ex ΕΚ; quare ipsa ex ΗΕ, ΕΚ, hoc est ipsum ex ΗΚ, triplum est ipsius ex ΕΚ. Et quoniam tripla est ΑΒ ipsius ΒΓ, ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita ipsum ex ΑΒ ad ipsum ex ΒΔ; triplum igitur ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΒΔ. Ostensum est autem et ipsum ex ΗΚ ipsius ex ΚΕ triplum. Et posita est æqualis ΚΕ ipsi ΕΔ; æqualis igitur et ΚΗ ipsi ΑΒ. Et est ΑΒ datæ sphaeræ diameter; et ΚΗ igitur æqualis est datæ sphaeræ diametro.

Datâ igitur sphaerâ comprehensus est cubus; et simul demonstratum est sphaeræ diametrum potentiâ triplam esse lateris cubi. Quod oportebat facere.

qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, le cube sera circonscrit par une sphère. Je dis à présent que le cube sera circonscrit par la sphère donnée. Car puisque ΗΖ est égal à ΖΕ, et que l'angle est droit en Ζ; le quarré de ΓΗ sera double du quarré de ΕΖ (47. 1). Mais ΕΖ est égal à ΕΚ; le quarré de ΕΗ est donc double du quarré de ΕΚ; la somme des quarrés des droites ΗΕ, ΕΚ, c'est-à-dire le quarré de ΗΚ, est donc triple du quarré de ΕΚ. Et puisque ΑΒ est triple de ΒΓ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme le quarré de ΑΒ est au quarré de ΒΔ (8, et 26. 6); le quarré de ΑΒ sera triple du quarré de ΒΔ. Mais on a démontré que le quarré de ΗΚ est triple du quarré de ΚΕ, et l'on a fait ΚΕ égal à ΒΔ; la droite ΚΗ est donc égale à ΑΒ. Mais ΑΒ est le diamètre de la sphère donnée; la droite ΚΗ est donc égale au diamètre de la sphère donnée.

On a donc circonscrit le cube par la sphère donnée, et l'on a démontré, en même temps, que le quarré du diamètre de la sphère est triple du quarré du côté du cube. Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εἰκοσαῖδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἥ καὶ τὰ προαίρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαῖδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάττων.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαῖρας διάμετρος ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ὥστε τετραπλὴν εἶναι τὴν  $AG$  τῆς  $GB$ , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον τὸ  $A\Delta B$ , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\Delta B$ , καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ  $EZH\Theta K$ , οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ  $\Delta B$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν  $EZH\Theta K$  κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ  $EZH\Theta K$ , καὶ τετμήσθωσαν αἱ  $EZ$ ,  $ZH$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ ,  $KE$  περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$ ,  $O$  σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $E\Lambda$ ,  $\Lambda Z$ ,  $ZM$ ,  $MH$ ,  $HN$ ,  $N\Theta$ ,  $\Theta\Xi$ ,  $\Xi K$ ,  $KO$ ,  $OE$ , καὶ ὁμοίως  $\Lambda M$ ,  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $O\Lambda$ . ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $\Lambda M N \Xi O$  πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ  $EO$  εὐθεῖα. Καὶ ἀρεστάτωσαν ἀπὸ τῶν  $E$ ,  $Z$ ,  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$

## PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere et sphæra comprehendere quâ et prædictas figuras; et demonstrare icosædri latus irrationalem esse quæ appellatur minor.

Exponatur datæ sphærae diameter  $AB$ , et secetur in  $\Gamma$ , ita ut quadrupla sit  $AG$  ipsius  $GB$ , et describatur super  $AB$  semicirculus  $A\Delta B$ , et ducatur a puncto  $\Gamma$  ipsi  $AB$  ad rectos angulos recta linea  $\Gamma\Delta$ , et jungatur  $\Delta B$ , et exponatur circulus  $EZH\Theta K$ , cujus ea quæ ex centro æqualis sit ipsi  $\Delta B$ , et describatur in circulo  $EZH\Theta K$  pentagonum et æquilaterum et æquiangulum  $EZH\Theta K$ , et secentur  $EZ$ ,  $ZH$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ ,  $KE$  circumferentiæ bifariam in  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$ ,  $O$  punctis, et jungantur  $E\Lambda$ ,  $\Lambda Z$ ,  $ZM$ ,  $MH$ ,  $HN$ ,  $N\Theta$ ,  $\Theta\Xi$ ,  $\Xi K$ ,  $KO$ ,  $OE$ , et similiter  $\Lambda M$ ,  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $O\Lambda$ ; æquilaterum igitur est et  $\Lambda M N \Xi O$  pentagonum, et decagoni latus recta  $EO$ . Et erigantur a punctis  $E$ ,  $Z$ ,

## PROPOSITION XVI.

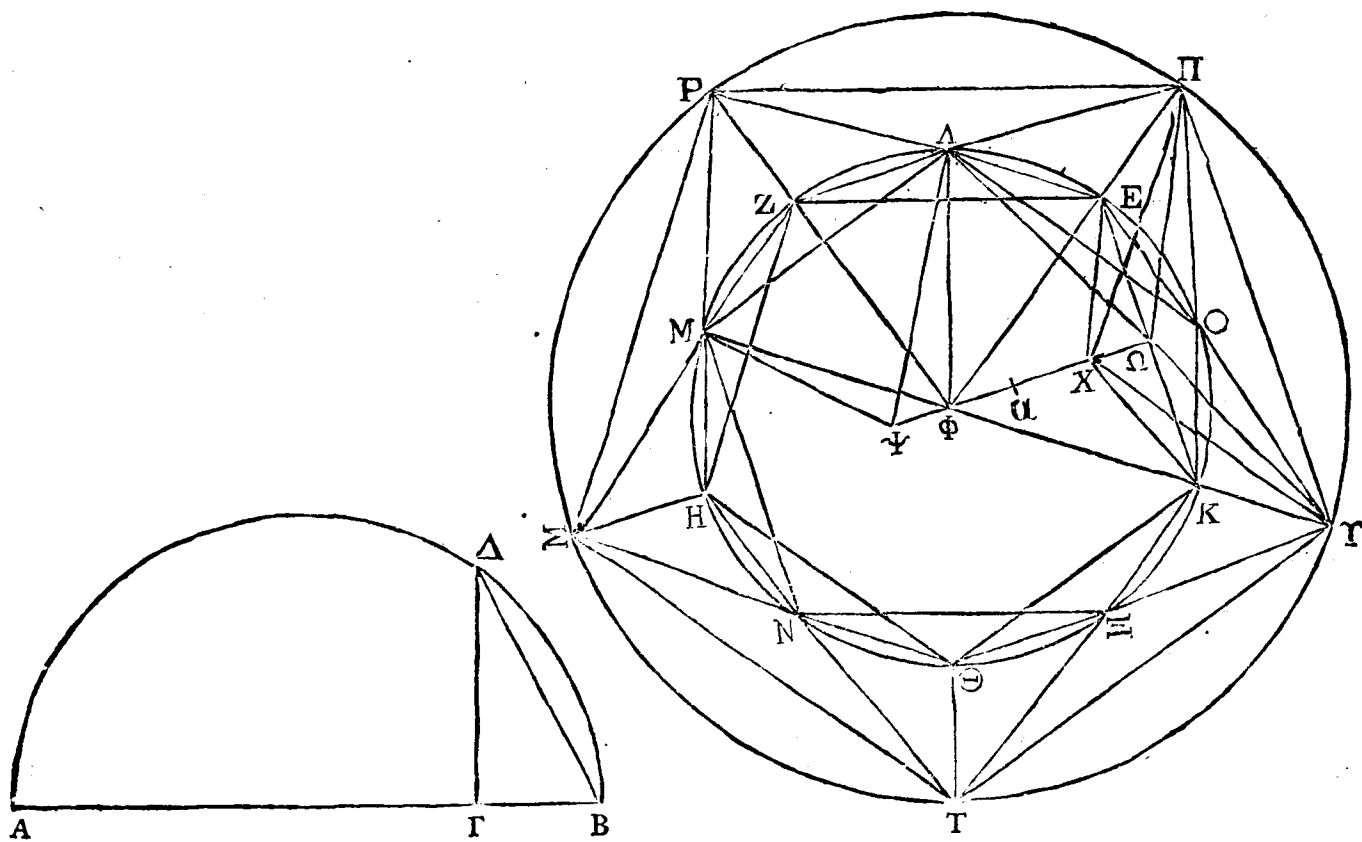
Construire un icosaèdre, et le circonscrire par la même sphère par laquelle on a circonscrit les figures précédentes, et démontrer que le côté de l'icosaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

Soit  $AB$  le diamètre de la sphère donnée; coupons  $AB$  au point  $\Gamma$ , de manière que  $AG$  soit quadruple de  $GB$ ; sur  $AB$  décrivons le demi-cercle  $A\Delta B$ ; du point  $\Gamma$  menons la ligne droite  $\Gamma\Delta$  perpendiculaire à  $AB$ ; joignons  $\Delta B$ ; soit  $\Gamma\Delta$  un cercle  $EZH\Theta K$  ayant pour rayon une droite égale à  $\Delta B$ ; décrivons dans le cercle  $EZH\Theta K$  un pentagone équilatéral et équiangle  $EZH\Theta K$  (11. 4); coupons les arcs  $EZ$ ,  $ZH$ ,  $H\Theta$ ,  $\Theta K$ ,  $KE$  en deux parties égales aux points  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$ ,  $O$  (30. 3), et joignons  $E\Lambda$ ,  $\Lambda Z$ ,  $ZM$ ,  $MH$ ,  $HN$ ,  $N\Theta$ ,  $\Theta\Xi$ ,  $\Xi K$ ,  $KO$ ,  $OE$ , ainsi que  $\Lambda M$ ,  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $O\Lambda$ ; le pentagone  $\Lambda M N \Xi O$  sera équilatéral, et la droite  $OE$  sera le côté du décagone. Des

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 271

σημείων τῶ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς  
γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι  
οὔσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου,  
καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ,  
ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ,  
ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῶ αὐτῶ  
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν

Η, Θ, Κ plano circuli ad rectos angulos  
rectæ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ æquales existentes  
ei quæ ex circuli ΕΖΗΘΚ centro, et jungan-  
tur ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ,  
ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Et quo-  
niam utraque ipsarum ΕΠ, ΚΥ eidem plano  
ad rectos est, parallela igitur est ΕΠ ipsi ΚΥ.



ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. Ἐστὶ δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς  
ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευχνύουσιν ἐπὶ τὰ  
αὐτὰ μέρη<sup>3</sup> εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.  
ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν<sup>4</sup>

Est autem ipsi et æqualis; ipsæ autem et  
æquales et parallelas conjungentes ad easdem  
partes rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt;  
ipsa ΠΥ igitur ipsi ΕΚ et æqualis et parallela est.

points E, Z, H, Θ, Κ menons les droites ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ perpendiculaires  
au plan du cercle (12. 11); faisons ces droites égales au rayon du cercle ΕΖΗΘΚ,  
et joignons ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΑ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ.  
Puisque chacune des droites ΕΠ, ΚΥ est perpendiculaire à un même plan, la droite  
ΕΠ sera parallèle à ΚΥ (6. 11). Mais elle lui est égale; et les droites qui joignent  
du même côté des droites égales et parallèles sont égales et parallèles (33. 1); la

Πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου, καὶ ἡ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον περιγραφομένου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραγομένων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρὰ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΠΥ πεντάγωνου<sup>7</sup>· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕναστον τῶν ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ τριγώνων<sup>8</sup> ἰσόπλευρόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕναστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου<sup>9</sup> τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῶν τε

Pentagoni autem æquilateri latus ipsa ΕΚ; pentagoni igitur æquilateri in ΕΖΗΘΚ circulo descripti latus ipsa ΠΥ. Propter eadem utique et unaquæque ipsarum ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ pentagoni est æquilateri in ΕΖΗΘΚ circulo descripti; æquilaterum igitur est ΠΡΣΤΥ pentagonum. Et quoniam hexagoni quidem est ipsa ΠΕ latus, decagoni vero ipsa ΕΟ, et est rectus ΠΕΟ angulus; pentagoni igitur est latus ipsa ΠΟ; latus enim pentagoni potest et hexagoni et decagoni latus in eodem circulo descriptorum. Propter eadem utique ipsa et ΟΥ pentagoni est latus, est autem et ipsa ΠΥ latus pentagoni; æquilaterum igitur est ΠΟΥ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque triangulorum ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ æquilaterum est. Et quoniam pentagoni latus ostensa est utraque ipsarum ΠΛ, ΠΟ, est autem et ipsa ΛΟ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΠΛΟ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque triangulorum ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ æquilaterum est. Sumatur centrum circuli ΕΖΗΘΚ, ipsum Φ punctum; et a puncto

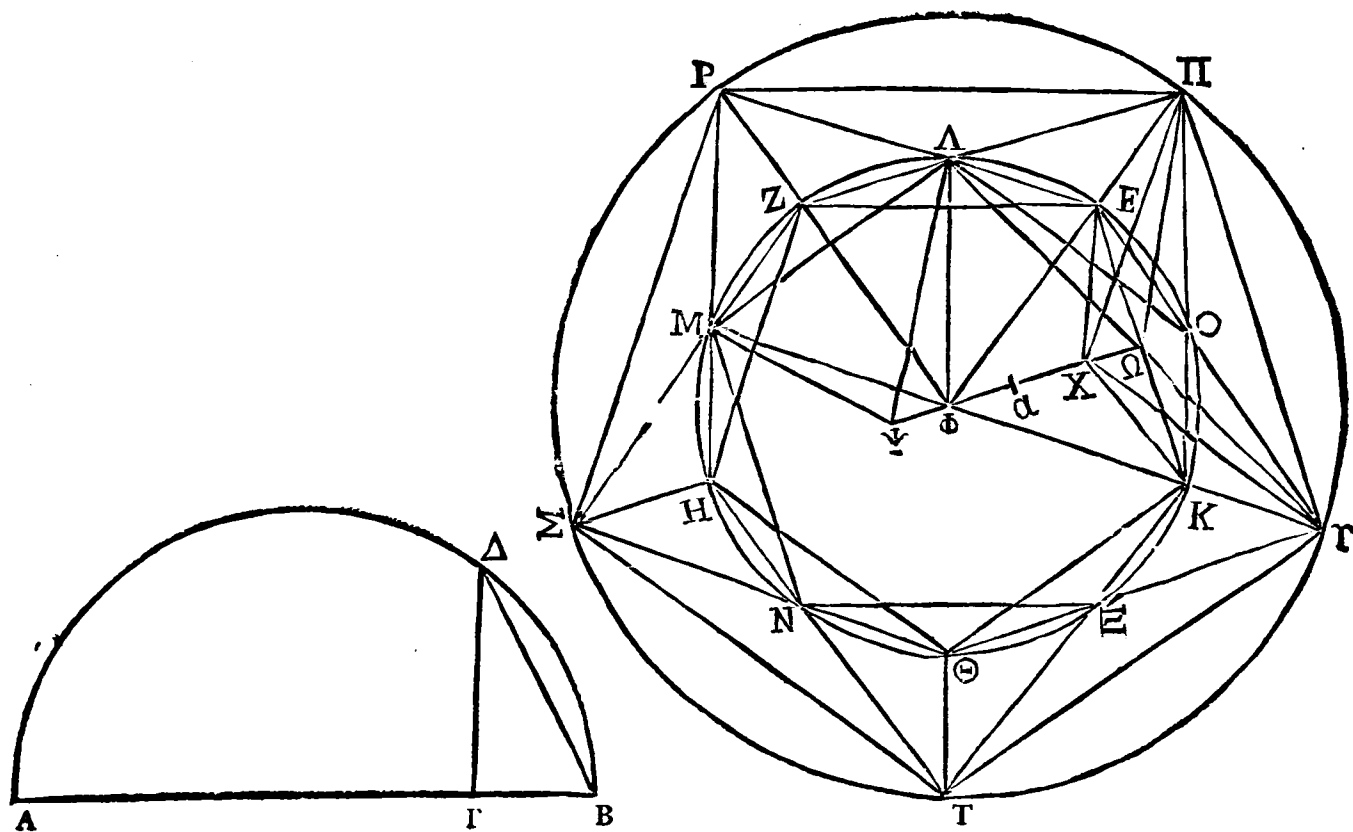
droite ΠΥ est donc égale et parallèle à ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est le côté d'un pentagone équilatéral; la droite ΠΥ est donc le côté du pentagone équilatéral décrit dans le cercle ΕΖΗΘΚ. Par la même raison, chacune des droites ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ est un côté du pentagone décrit dans le cercle ΕΖΗΘΚ; le pentagone ΠΡΣΤΥ est donc équilatéral. Mais la droite ΠΕ est le côté de l'hexagone; la droite ΕΟ est donc le côté du décagone, et l'angle ΠΕΟ est droit; la droite ΠΟ est donc le côté du pentagone; parce que le carré du côté du pentagone est égal au carré de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle ( 10. 13 ). Par la même raison, la droite ΟΥ est le côté du pentagone; mais la droite ΠΥ est le côté du pentagone; le triangle ΠΟΥ est donc équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ est aussi équilatéral. Et puisque l'on a démontré que chacune des droites ΠΛ, ΠΟ est le côté du pentagone, et à cause que ΛΟ est aussi le côté du pentagone, le triangle ΠΛΟ est équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ est équilatéral. Prenons le centre Φ du cercle ΕΖΗΘΚ ( 1. 3 ); du point Φ éle-



LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 273

κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάντῳ ἡ  $\Phi\Omega$ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη ὡς ἡ  $\Phi\Psi$ , καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ  $\Phi\chi$ , δεκαγώνου δὲ ἑκατέρω τῶν  $\Phi\Psi$ ,  $\chi\Omega$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Pi\Omega$ ,  $\Pi\chi$ ,  $\Upsilon\Omega$ ,  $\epsilon\Phi$ ,  $\Lambda\Phi$ ,  $\Lambda\Psi$ ,  $\Psi\mathcal{M}$ . Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν

$\Phi$  ipsi circuli plano ad rectos erigatur  $\Phi\Omega$ , et producat ad alteras partes, ut ipsa  $\Phi\Psi$ , et auferatur hexagoni quidem latus  $\Phi\chi$ , decagoni vero utraque ipsarum  $\Phi\Psi$ ,  $\chi\Omega$ , et jungantur  $\Pi\Omega$ ,  $\Pi\chi$ ,  $\Upsilon\Omega$ ,  $\epsilon\Phi$ ,  $\Lambda\Phi$ ,  $\Lambda\Psi$ ,  $\Psi\mathcal{M}$ . Et quo-



$\Phi\chi$ ,  $\Pi\epsilon$  τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Phi\chi$  τῇ  $\Pi\epsilon$ . Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ  $\epsilon\Phi$ ,  $\Pi\chi$  ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. Ἑξαγώνου δὲ ἡ  $\epsilon\Phi$  ἑξαγώνου

niam utraque ipsarum  $\Phi\chi$ ,  $\Pi\epsilon$  circuli plano ad rectos est, parallela igitur est  $\Phi\chi$  ipsi  $\Pi\epsilon$ . Sunt autem et æquales; et  $\epsilon\Phi$ ,  $\Pi\chi$  igitur et æquales et parallelæ sunt. Hexagoni autem  $\epsilon\Phi$

vons la droite  $\Phi\Omega$  perpendiculaire au plan du cercle; prolongeons cette droite de part et d'autre, comme  $\Phi\Psi$ ; faisons la droite  $\Phi\chi$  égale au côté de l'hexagone, faisons aussi les droites  $\Phi\Psi$ ,  $\chi\Omega$  égales chacune au côté du décagone, et joignons  $\Pi\Omega$ ,  $\Pi\chi$ ,  $\Upsilon\Omega$ ,  $\epsilon\Phi$ ,  $\Lambda\Phi$ ,  $\Lambda\Psi$ ,  $\Psi\mathcal{M}$ . Puisque chacune des droites  $\Phi\chi$ ,  $\Pi\epsilon$  est perpendiculaire au plan du cercle, la droite  $\Phi\chi$  sera parallèle à  $\Pi\epsilon$  (6. 11). Mais ces deux droites sont égales; les droites  $\epsilon\Phi$ ,  $\Pi\chi$  sont donc égales et parallèles (33. 1). Mais  $\epsilon\Phi$  est le



274 LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστι ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστὶν, ἐπεὶ δὴ περὶ εἰς ἐπιζεύζωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ ἴσαι, καὶ ἀπεναντίον ἴσονται, καὶ ἐστὶν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσα ἐξαγώνου· ἐξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. Δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ<sup>10</sup> τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ἂν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κρυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Πάλιν, ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ εἰς ἐπιζεύζωμεν τὴν ΦΜ οὔσαν ἐξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ<sup>11</sup> ΑΜΨ τρίγωνον. Ομοίως δὴ<sup>12</sup> δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν

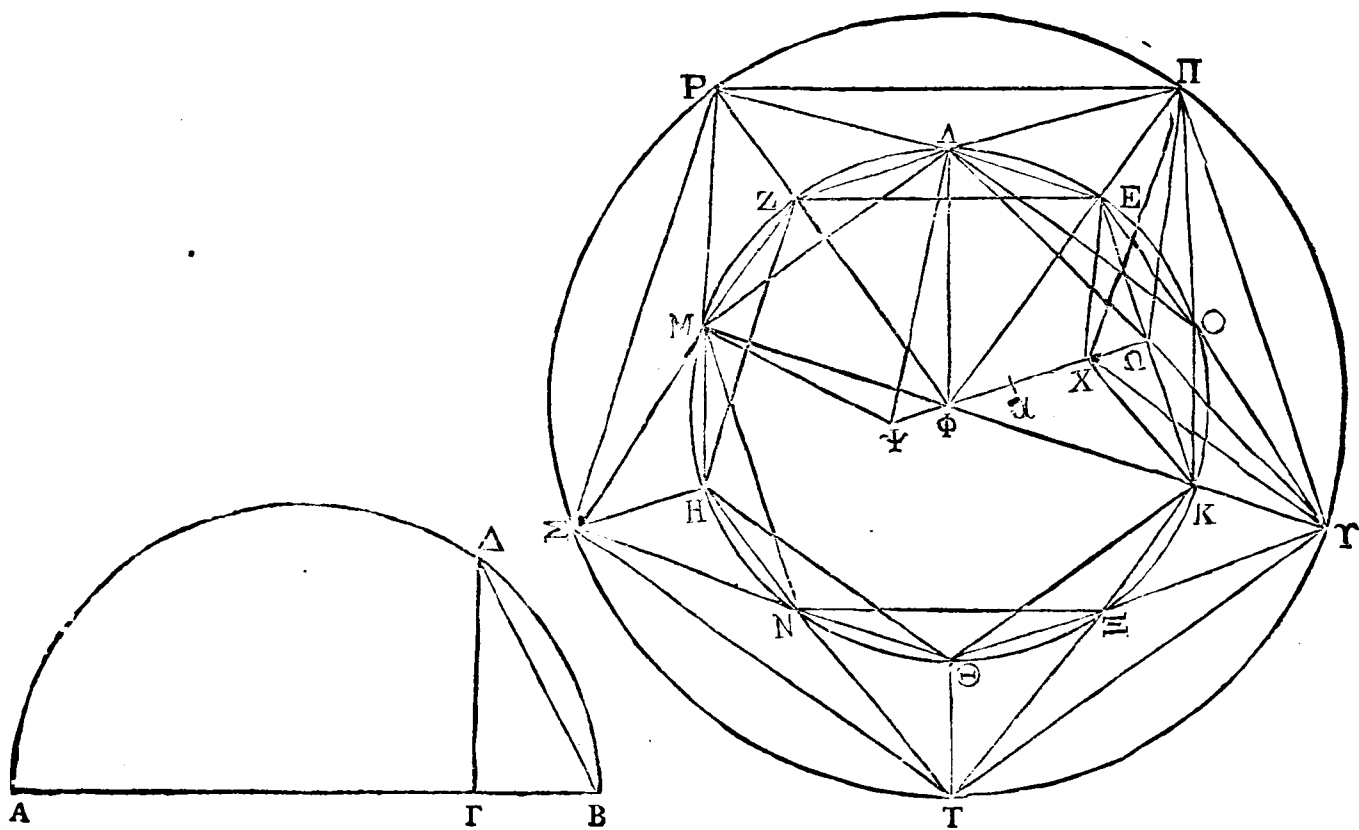
latus; hexagoni igitur et ΠΧ latus. Et quoniam hexagoni quidem est ΠΧ latus, decagoni vero ΧΩ, et rectus est ΠΧΩ angulus; pentagoni igitur est ΠΩ latus. Propter eadem utique et ΥΩ pentagoni est latus, quoniam si jungamus ΦΚ, ΧΥ, ipsæ æquales et oppositæ erunt, et est ipsa ΦΚ ex centro existens hexagoni latus; hexagoni igitur et ΧΥ latus. Decagoni autem ΧΩ, et rectus ΥΧΩ angulus; pentagoni igitur ΥΩ latus. Est autem et ΠΥ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΠΥΩ triangulum. Propter eadem utique et unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases quidem sunt ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ rectæ, vertex autem Ω punctum; æquilaterum est. Rursus, quoniam hexagoni quidem ipsa ΦΛ latus, decagoni vero ipsa ΦΨ latus, et rectus est ΛΦΨ angulus; pentagoni igitur est ipsa ΛΨ latus. Propter eadem utique si jungamus ipsam ΦΜ existentem hexagoni latus, concludetur et ΜΨ pentagoni latus esse. Est autem et ΑΜ pentagoni latus; æquilaterum igitur est ΑΜΨ triangulum. Similiter utique ostendetur et unumquodque reliquorum

côté de l'hexagone; la droite ΠΧ est donc aussi le côté de l'hexagone. Et puisque la droite ΠΧ est le côté de l'hexagone, que la droite ΧΩ est le côté du décagone, et que l'angle ΠΧΩ est droit; la droite ΠΩ sera le côté du pentagone (10. 13). Par la même raison, la droite ΥΩ est le côté du pentagone, puisque si nous joignons les droites ΦΚ, ΧΥ, ces droites seront égales et opposées; mais la droite ΦΚ qui est un rayon, est le côté de l'hexagone; la droite ΧΥ est donc le côté de l'hexagone. Mais ΧΩ est le côté du décagone, et l'angle ΥΧΩ est droit; la droite ΥΩ est donc le côté du pentagone. Mais ΠΥ est le côté du pentagone; le triangle ΠΥΩ est donc équilatéral. Par la même raison, chacun des triangles restants qui ont pour bases les droites ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, et pour sommet le point Ω, est équilatéral. De plus, puisque la droite ΦΛ est le côté de l'hexagone, que la droite ΦΨ est le côté du décagone, et que l'angle ΛΦΨ est droit; la droite ΛΨ sera le côté du pentagone (10. 13). Par la même raison, si nous joignons la droite ΦΜ, qui est le côté de l'hexagone, on conclura que ΜΨ est le côté du pentagone. Mais ΑΜ est aussi le côté du pentagone; le triangle ΑΜΨ est donc équilatéral. Nous démontrerons semblablement que chacun des triangles restants qui ont pour bases les

LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE. 275

λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ MN, NE, EO, OL, κερυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν· συνίσταται ἄρα εἰκοσαέδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

triangulorum, quorum bases quidem sunt MN, NE, EO, OL, vertex autem Ψ punctum, æquilaterum esse; constitutum igitur est icosædrum sub viginti triangulis æquilateris contentum.



Δεῖ δὴ αὐτὸ<sup>13</sup> καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ<sup>14</sup> γὰρ ἑξαγώνου μὲν<sup>15</sup> ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ· ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα

Oportet utique ipsum et sphæra comprehendere datâ, et demonstrare icosædri latus irrationalem esse quæ appellatur minor.

Quoniam enim hexagoni quidem ipsa ΦΧ latus, decagoni vero ipsa ΧΩ; ipsa ΦΩ igitur et extremâ et mediâ ratione secta est in Χ, et

droites MN, NE, EO, OL, et pour sommet le point Ψ, est équilatéral. On a donc construit un icosædre compris sous vingt triangles équilatéraux.

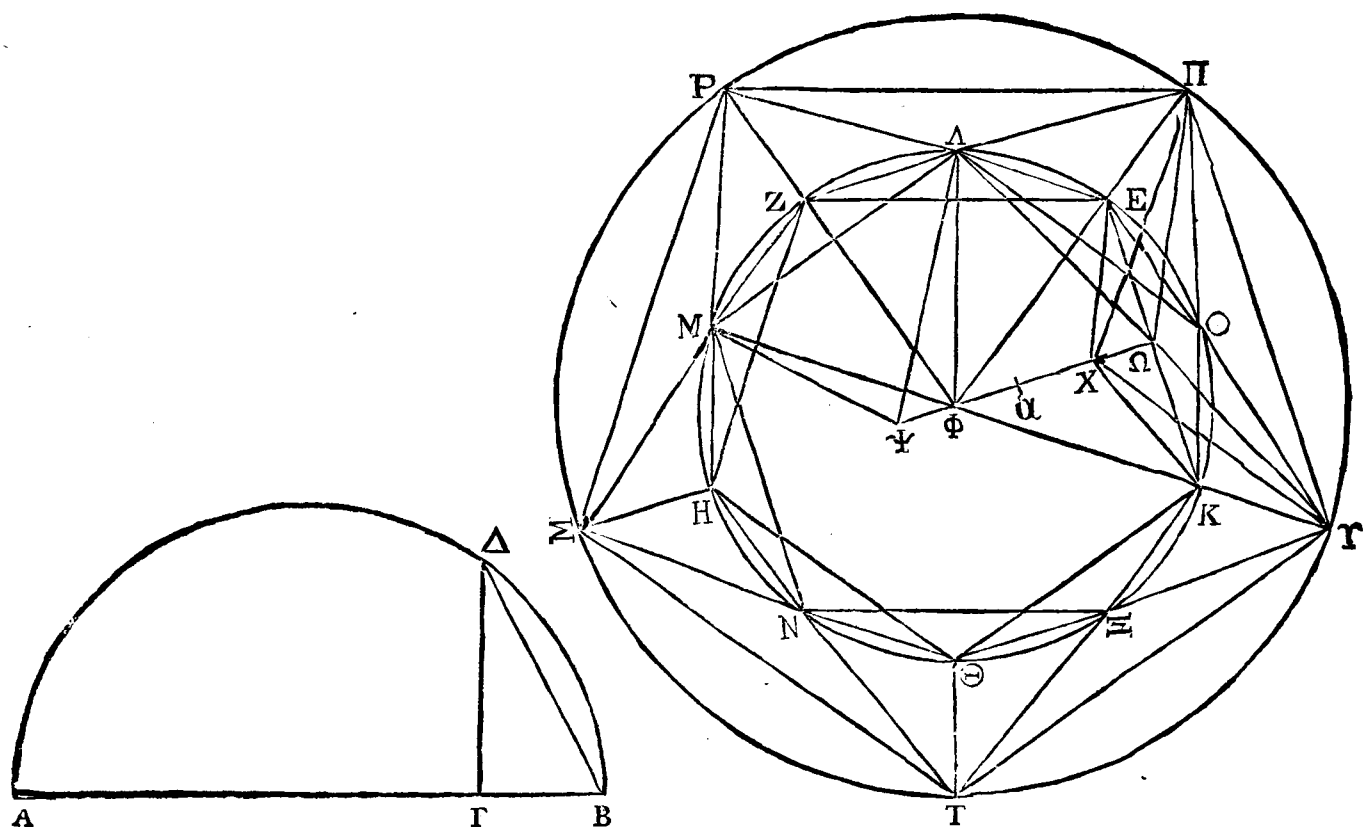
Il faut à présent circonscrire l'icosædre par la sphère donnée, et démontrer que le côté de l'icosædre est l'irrationnelle qu'on appelle mineure.

Car puisque ΦΧ est le côté de l'hexagone, et ΧΩ le côté du décagone; la droite ΦΩ sera coupée en extrême et moyenne raison au point Χ (9. 13), et ΦΧ

276 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐστὶν ἡ ΦΧ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ  
οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ  
ΦΛ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς  
τὴν ΦΛ οὕτως ἡ ΛΦ πρὸς τὴν ΦΨ. Καὶ εἰσὶν  
ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΛ, ΛΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπι-

major ipsius portio est ΦΧ; est igitur ut ΩΦ ad ΦΧ  
ita ΦΧ ad ΧΩ. Sed æqualis quidem ΦΧ ipsi  
ΦΛ, ipsa vero ΧΩ ipsi ΦΨ; est igitur ut ΩΦ  
ad ΦΛ ita ΛΦ ad ΦΨ. Et sunt recti ΩΦΛ,  
ΛΦΨ anguli. Si igitur jungamus ΛΩ rectam,



ζεύξωμεν τὴν ΛΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ  
ΨΛΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΛΦ, ΦΛΩ  
τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμι-  
κύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ<sup>16</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ  
ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ οὕτως ἡ ΦΧ  
πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ

rectus erit ΨΛΩ angulus ob similitudinem trian-  
gulorum ΨΛΦ, ΦΛΩ; ergo super ΨΩ descrip-  
tus semicirculus transibit et per Λ. Propter eadem  
utique quoniam est ut ΩΦ ad ΦΧ ita ΦΧ ad ΧΩ,  
sed æqualis quidem ipsa ΩΦ ipsi ΨΧ, ΦΧ vero

sera son plus grand segment ; la droite ΩΦ est donc à ΦΧ comme ΦΧ est à ΧΩ.  
Mais ΦΧ est égal à ΦΛ, et ΧΩ à ΦΨ; la droite ΩΦ est donc à ΦΛ comme ΛΦ est à  
ΦΨ. Mais les angles ΩΦΛ, ΛΦΨ sont droits ; si donc nous joignons la droite ΛΩ,  
l'angle ΨΛΩ sera droit, à cause de la similitude des triangles ΨΛΦ, ΦΛΩ ; le demi-  
cercle décrit sur ΨΩ passera donc par le point Λ. Par la même raison, puisque ΩΦ  
est à ΦΧ comme ΦΧ est à ΧΩ, que ΩΦ est égal à ΨΧ, et ΦΧ à ΧΠ, la droite ΨΧ sera

ΦΧ τῇ ΧΠ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν εἰάν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. Καὶ εἰάν μενούσης τῆς ΨΩ περινεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιελημμένον τὸ εἰκοσαέδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δεθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ α. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΩΦ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμήμα ἔστιν ἡ ΩΧ· ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν Χα πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμίσειας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Ωα τοῦ ἀπὸ τῆς αΧ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν αΩ διπλῇ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ αΧ διπλῇ ἡ ΧΦ· πενταπλάσιον ἄρα ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων<sup>17</sup> ἔστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλασίων ἄρα ἔστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ<sup>18</sup>. Ως δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ

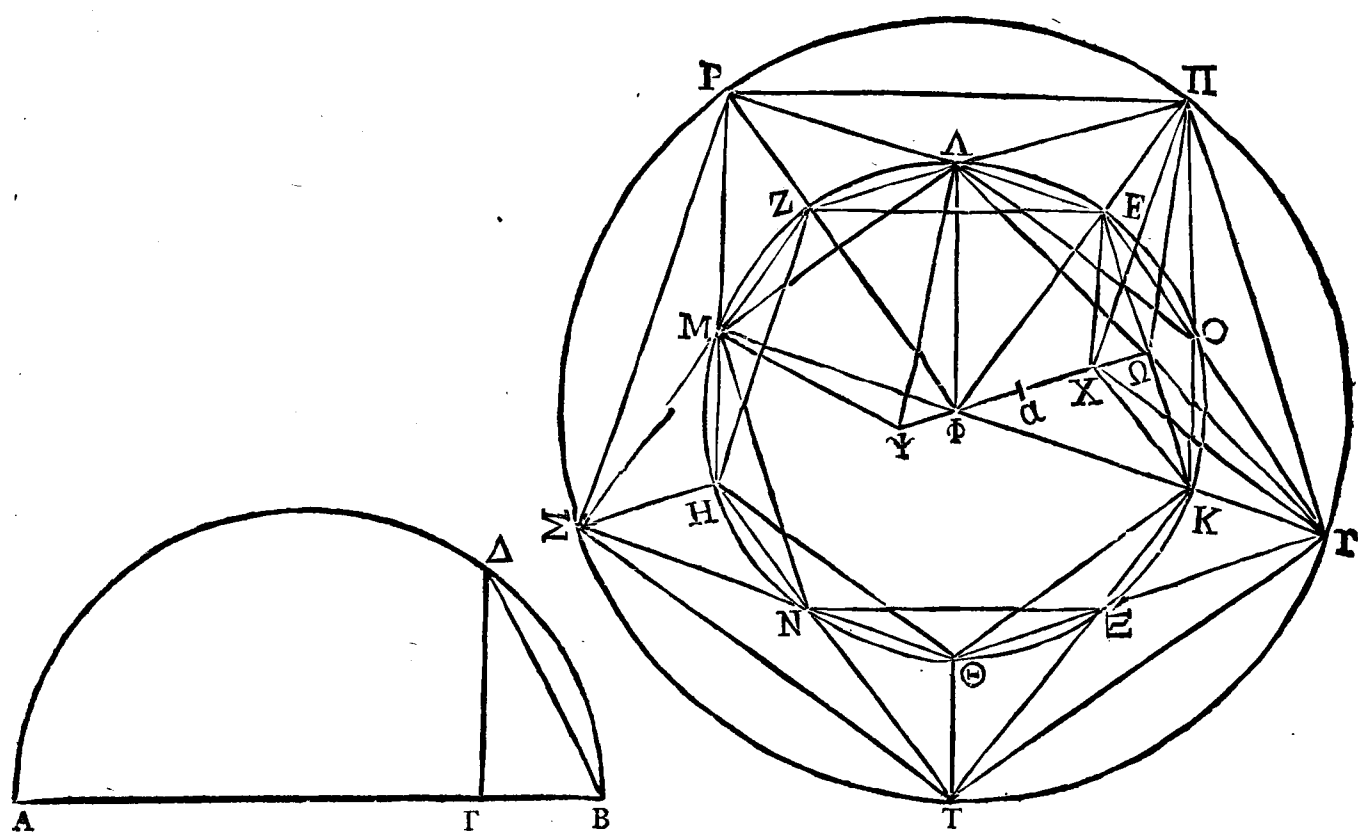
ipsi ΧΠ; est igitur ut ΨΧ ad ΧΠ ita ΠΧ ad ΧΩ. Et ob id rursus si jungamus ΠΨ, rectus erit ad Π angulus; semicirculus igitur super ΨΩ descriptus transibit et per Π. Et si manente ΨΩ conversus semicirculus in eundem rursus locum restituitur a quo cœpit moveri, transibit et per Π et per reliqua puncta icosaedri, et erit sphæra comprehensum icosaedrum. Dico etiam et datâ. Secetur enim ΦΧ bifariam in α. Et quoniam recta linea ΩΦ extremâ et mediâ ratione secta est in Χ, et minor ipsius portio est ΩΧ; ipsa igitur ΩΧ assumens dimidiam majoris portionis, ipsam Χα, quintuplum potest quadrati ex dimidiâ majoris portionis; quintuplum igitur est quadratum ex Ωα quadrati ex αΧ. Et est ipsius quidem αΩ dupla ΩΨ, ipsius vero αΧ dupla ipsa ΧΦ; quintuplum igitur est quadratum ex ΩΨ quadrati ex ΦΧ. Et quoniam quadrupla est ΑΓ ipsius ΓΒ, quintupla igitur est ΑΒ ipsius ΒΓ. Ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΒ

à ΧΠ comme ΠΧ est à ΧΩ. Et à cause de cela, si nous joignons encore ΠΨ, l'angle sera droit en Π; le demi-cercle décrit sur ΨΩ passera donc par le point Π. Si donc la droite ΨΩ restant immobile, le demi-cercle tourne jusqu'à ce qu'il soit revenu au même endroit d'où il avait commencé à se mouvoir, il passera par le point Π et par les autres points de l'icosaèdre, et l'icosaèdre sera circonscrit par une sphère. Je dis ensuite qu'il est circonscrit par la sphère donnée; car coupons ΦΧ en deux parties égales au point α. Puisque la ligne droite ΩΦ est coupée en extrême et moyenne raison au point Χ, et que ΩΧ est son plus petit segment; le carré de la somme de ΩΧ et de la moitié de Χα du plus grand segment, sera égal au quintuple du carré de la moitié du plus grand segment ( 3. 13 ); le carré de Ωα est donc quintuple du carré de αΧ. Mais ΩΨ est double de αΩ, et ΧΦ double de αΧ; le carré de ΩΨ est donc quintuple du carré de ΦΧ. Et puisque ΑΓ est quintuple de ΓΒ, la droite ΑΒ sera quintuple de ΒΓ. Mais ΑΒ est à ΒΓ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΔ ( 8, et 20. 6 ); le carré de ΑΒ est

278 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  
AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ  
τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ, καὶ  
ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ<sup>19</sup> τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν  
ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου<sup>20</sup>.  
ἴση ἄρα καὶ ἡ AB τῇ ΨΩ. Καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς  
δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση  
ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα  
δοθείσῃ σφαίρᾳ περιέληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

ad quadratum ex ΒΔ; quintuplum igitur est  
quadratum ex AB quadrati ex ΒΔ. Ostensum  
autem est et quadratum ex ΩΨ quintuplum qua-  
drati ex ΦΧ, et est æqualis ΔΒ ipsi ΦΧ, utraque  
enim ipsarum æqualis est ipsi quæ ex centro  
circuli ΕΖΗΘΚ; æqualis igitur et AB ipsi ΨΩ.  
Et est ipsa AB datæ sphæræ diameter; et ipsa  
ΨΩ igitur æqualis est diametro datæ sphæræ; ergo  
datâ sphærâ comprehensum est icosædron.



Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλο-  
γός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Επεὶ γὰρ ῥητή

Dico et icosædri latus irrationalem esse  
quæ appellatur minor. Quoniam enim ratio-

donc quintuple du carré de ΒΔ. Mais on a démontré que le carré de ΩΨ est  
quintuple du carré de ΦΧ, et ΔΒ est égal à ΦΧ, car chacune de ces droites est  
égale au rayon du cercle ΕΖΗΘΚ; la droite AB est donc égale à ΨΩ. Mais AB est  
le diamètre de la sphère donnée; la droite ΨΩ est donc égale au diamètre de  
la sphère donnée; l'icosædre est donc circonscrit par la sphère donnée.

Je dis aussi que le côté de l'icosædre est l'irrationnelle qu'on appelle mi-

ἴσθιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίῳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἴσθι καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητὴ ἴσθιν. Εὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἴσθιν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>21</sup>.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίῳ ἴσθι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τοῦ<sup>1</sup> ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν<sup>2</sup> τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων<sup>3</sup>.

nalis est sphæræ diameter, et est potentiâ quintupla ejus quæ ex centro ΕΖΗΘΚ circuli; rationalis igitur est et quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ; quare et diameter ipsius rationalis est. Si autem in circulo rationalem habente diametrum pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni irrationalis est quæ appellatur minor. Sed ΕΖΗΘΚ pentagoni latus est icosædri; ergo icosædri latus irrationalis est quæ appellatur minor. Quod oportebat ostendere.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc utique manifestum est sphæræ diametrum potentiâ quintuplam esse ejus quæ ex centro circuli, a quo icosædrum describitur, et sphæræ diametrum compositam esse ex latere hexagoni et duobus decagoni lateribus, in eodem circulo descriptorum.

neure. Car puisque le diamètre de la sphère est rationnel, et que son quarré est quintuple du quarré du rayon du cercle ΕΖΗΘΚ; le rayon du cercle ΕΖΗΘΚ sera rationnel; le diamètre de ce cercle est donc rationnel ( déf. 6. 10 ). Mais si l'on décrit un pentagone équilatéral dans un cercle dont le diamètre est rationnel, le côté du pentagone est l'irrationnelle qu'on appelle mineure ( 11. 13 ). Mais le côté du pentagone ΕΖΗΘΚ est le côté de l'icosædre; le côté de l'icosædre est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

C O R O L L A I R E.

D'après cela, il est évident que le quarré du diamètre de la sphère est quintuple du quarré du cercle d'après lequel l'icosædre a été construit, et que le diamètre de la sphère est composé du côté de l'hexagone et du double du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans le même cercle.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν ἢ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκάεδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ σημεία<sup>1</sup>· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ<sup>2</sup> ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεία, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ ἐκκείσθωσαν<sup>3</sup> ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιον ἐστίν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα

## PROPOSITIO XVII.

Dodecaedrum constituere, et sphaerâ comprehendere quâ et prædictas figuras; et demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem quæ appellatur apotome.

Exponentur prædicti cubi duo plana ad rectos inter sese ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, et secetur unumquodque laterum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ bifariam in Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ punctis; et jungantur ipsæ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, et secetur unaquæque ipsarum ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ extremâ et mediâ ratione in Ρ, Σ, Τ punctis, et sint ipsarum majores portiones ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et erigantur ab ipsis Ρ, Σ, Τ punctis planis cubi ad rectos ad exteriores partes cubi ipsæ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, et ponantur æquales ipsis ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et jungantur ipsæ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ; dico ΥΒΧΓΦ pentagonum et æquilaterum et in uno plano, et præterea æquiangulum esse. Jungantur enim ipsæ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Et quoniam

## PROPOSITION XVII.

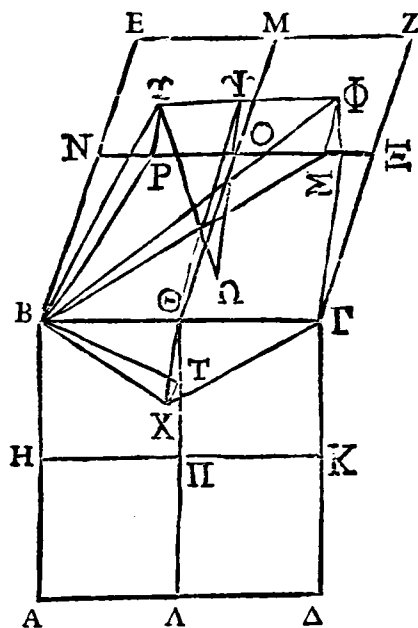
Construire un dodécaèdre, et le circonscrire par la même sphère que les figures précédentes, et démontrer aussi que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Que les deux plans ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ du cube dont nous avons parlé (15. 13), soient perpendiculaires l'un à l'autre; que chacun des côtés ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ soit coupé en deux parties égales aux points Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ; joignons les droites ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ; que chacune des droites ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ soit coupée en extrême et moyenne raison aux points Ρ, Σ, Τ, et que ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ soient leurs plus grands segments; des points Ρ, Σ, Τ élevons ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ perpendiculaires extérieurement aux plans du cube (12. 11), et faisons ces droites égales aux droites ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, et joignons ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ; je dis que le pentagone ΥΒΧΓΦ est équilatéral, qu'il est dans un seul plan, et de plus qu'il est équiangle. Car joignons ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Puisque



ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  
P, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς<sup>4</sup> τμήμα ἐστὶν ἡ OP.  
τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ON, NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ  
ἀπὸ τῆς PO. Ἰση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB, ἡ δὲ OP  
τῇ PY. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν BN, NP τριπλάσιά  
ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PY. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BN,  
NP τὸ ἀπὸ τῆς BP ἐστὶν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BP

recta NO extremâ et mediâ ratione secatur in  
P, et major ejus portio est OP ; ipsa igitur ex ON,  
NP tripla sunt ipsius ex PO. Æqualis autem  
ON quidem ipsi NB, ipsa vero OP ipsi PY ;  
ipsa igitur ex BN, NP tripla sunt ipsius ex PY.  
Ipsis autem ex BN, NP ipsum ex BP est æquale ;  
ipsum igitur ex BP triplum est ipsius ex PY ;



τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PY. ὥστε τὰ ἀπὸ  
τῶν BP, PY τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PY.  
Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BP, PY ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  
BY. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BY τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ  
ἀπὸ τῆς YP. διπλῇ ἄρα ἐστὶν<sup>5</sup> ἡ BY τῆς YP.  
Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς YP διπλῇ, ὡς ἔδειξεν  
καὶ ἡ ΡΣ τῆς ΡΟ, τουτέστι τῆς PY ἐστὶ διπλῇ.

quare ipsa ex BP, PY quadrupla sunt ipsius  
ex FY. Ipsis autem ex BP, PY æquale est ipsum  
ex BY ; ipsum igitur ex BY quadruplum est ipsius  
ex YP ; dupla igitur est BY ipsius YP. Est autem  
et FY ipsius YP dupla, quoniam et ΡΣ ipsius  
ΡΟ, hoc est ipsius PY est dupla ; æqualis igitur

la droite NO est coupée en extrême et moyenne raison au point P, et que son  
plus grand segment est OP, la somme des quarrés des droites ON, NP est triple du  
quarré de PO (4. 13). Mais ON est égal à NB, et OP à PY ; la somme des quarrés des  
droites BN, NP est donc triple du quarré de PY. Mais le quarré de BP est égal à  
la somme des quarrés des droites BN, NP (47. 1) ; le quarré de BP est donc  
triple du quarré de PY ; la somme des quarrés des droites BP, PY est donc triple  
du quarré de PY. Mais le quarré de BY est égal à la somme des quarrés des  
droites BP, PY ; le quarré de BY est donc quadruple du quarré de YP ; la droite BY  
est donc double de YP (20. 6). Mais ΦΥ est double de YP, parce que ΡΣ est



ἴση ἄρα ἡ  $BY$  τῇ  $Y\Phi$ . Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν  $BX$ ,  $X\Gamma$ ,  $\Gamma\Phi$  ἑκατέρα τῶν  $BY$ ,  $Y\Phi$  ἴση ἐστίν<sup>δ</sup>. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $BY\Phi\Gamma X$  πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $O$  ἑκατέρα τῶν  $PY$ ,  $\Sigma\Phi$  παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη<sup>7</sup> ἡ  $O\Psi$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Psi\Theta$ ,  $\Theta X$ . λέγω ὅτι ἡ  $\Psi\Theta X$  εὐθεῖα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ  $\Theta\Pi$  ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ  $T$ , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ  $\Pi T$ . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Theta\Pi$  πρὸς τὴν  $\Pi T$  οὕτως ἡ  $\Pi T$  πρὸς τὴν  $T\Theta$ . Ἰση δὲ ἡ μὲν  $\Pi\Theta$  τῇ  $\Theta O$ , ἡ δὲ  $\Pi T$  ἑκατέρα τῶν  $TX$ ,  $O\Psi$ . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Theta O$  πρὸς τὴν  $O\Psi$  οὕτως ἡ  $X T$  πρὸς τὴν  $T\Theta$ . Καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ μὲν  $\Theta O$  τῇ  $TX$ , ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ  $B\Delta$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, ἡ δὲ  $T\Theta$  τῇ  $O\Psi$ , ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ  $BZ$  ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ  $\Psi O\Theta$ ,  $\Theta T X$ , τὰς δύο πλευρὰς τοῖς δυὶ πλευραῖς<sup>δ</sup> ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ<sup>9</sup> παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται. ἐπ'

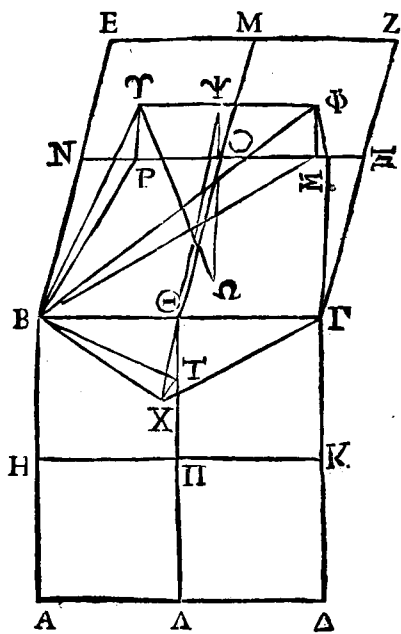
$BY$  ipsius  $Y\Phi$ . Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum  $BX$ ,  $X\Gamma$ ,  $\Gamma\Phi$  utrivis ipsarum  $BY$ ,  $Y\Phi$  æqualem esse; æquilaterum igitur est  $BY\Phi\Gamma X$  pentagonum. Dico etiam et in uno esse plano. Ducatur enim a puncto  $O$  utrivis ipsarum  $PY$ ,  $\Sigma\Phi$  parallela ad exteriores cubi partes ipsa  $O\Psi$ , et jungantur ipsæ  $\Psi\Theta$ ,  $\Theta X$ ; dico ipsam  $\Psi\Theta X$  rectam esse. Quoniam enim  $\Theta\Pi$  extremâ et mediâ ratione secatur in  $T$ , et major ejus portio est  $\Pi T$ ; est igitur ut  $\Theta\Pi$  ad  $\Pi T$  ita  $\Pi T$  ad  $T\Theta$ . Æqualis autem  $\Pi\Theta$  quidem ipsi  $\Theta O$ ,  $\Pi T$  vero utrique ipsarum  $TX$ ,  $O\Psi$ ; est igitur ut  $\Theta O$  ad  $O\Psi$  ita  $X T$  ad  $T\Theta$ . Et est parallela quidem  $\Theta O$  ipsi  $TX$ , utraque enim ipsarum ipsi  $B\Delta$  plano ad rectos est, ipsa vero  $T\Theta$  ipsi  $O\Psi$ , utraque enim ipsarum ipsi  $BZ$  plano ad rectos est. Si autem duo triângula componantur ad unum angulum, ut  $\Psi O\Theta$ ,  $\Theta T X$ , duo latera duobus lateribus proportionalia habentia ita ut homologa ipsorum latera et parallela sint, reliquæ rectæ in directum erunt; in directum igitur est

double de  $PO$ , c'est-à-dire de  $PY$ ; la droite  $BY$  est donc égale à  $Y\Phi$ . Nous démontrons semblablement que chacune des droites  $BX$ ,  $X\Gamma$ ,  $\Gamma\Phi$  est égale à chacune des droites  $BY$ ,  $Y\Phi$ ; le pentagone  $BY\Phi\Gamma X$  est donc équilatéral. Je dis qu'il est dans un même plan; car du point  $O$  menons extérieurement au cube la droite  $O\Psi$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $PY$ ,  $\Sigma\Phi$ , et joignons  $\Psi\Theta$ ,  $\Theta X$ ; je dis que  $\Psi\Theta X$  est une ligne droite. Car puisque la droite  $\Theta\Pi$  est coupée en extrême et moyenne raison au point  $T$ , et que  $\Pi T$  est son plus grand segment, la droite  $\Theta\Pi$  sera à  $\Pi T$  comme  $\Pi T$  est à  $T\Theta$  (déf. 3. 6). Mais  $\Pi\Theta$  est égal à  $\Theta O$ , et la droite  $\Pi T$  est égale à chacune des droites  $TX$ ,  $O\Psi$ ; la droite  $\Theta O$  est donc à  $O\Psi$  comme  $X T$  est à  $T\Theta$ . Mais la droite  $\Theta O$  est parallèle à la droite  $TX$ , car ces deux droites sont perpendiculaires au plan  $B\Delta$  (6. 11), et  $T\Theta$  est parallèle à  $O\Psi$ , car ces deux droites sont perpendiculaires au plan  $BZ$ ; or si deux triangles sont construits à un même point, comme les triangles  $\Psi O\Theta$ ,  $\Theta T X$ , ces triangles ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, et les côtés proportionnels étant parallèles, les droites restantes sont en lignes droites (32. 6); la droite  $\Psi\Theta$  est

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 283

εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν. Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΟΡ· ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἡ ΝΟ, ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ. Ἰση δὲ ἡ ΡΟ τῇ ΟΣ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ· ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ

ΨΘ ipsi ΘΧ. Omnis autem recta in uno est plano; in uno igitur plano est ΥΒΧΓΦ pentagonum. Dico etiam et æquilaterum esse. Quoniam enim recta linea ΝΟ extremâ et mediâ ratione secatur in Ρ, et major portio est ΟΡ; est igitur ut simul utraque ΝΟ, ΟΡ ad ΟΝ ita ΝΟ ad ΟΡ. Æqualis autem ΡΟ ipsi ΟΣ; est igitur ut ΣΝ ad ΝΟ ita ΝΟ ad ΟΣ; ipsa ΝΣ igitur extremâ et mediâ ratione secatur in Ο, et major portio est ΝΟ.



ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν<sup>10</sup> ΝΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε καὶ

Ipsa igitur ΝΣ, ΣΟ tripla sunt ipsius ex ΟΝ. Æqualis autem ΟΝ quidem ipsi ΝΒ, ipsa vero ΟΣ ipsi ΣΦ; ipsa igitur ex ΝΣ, ΣΦ quadrata tripla sunt ipsius ex ΝΒ; quare et ipsa ex ΦΣ,

donc dans la direction de ΘΧ. Mais toute droite est dans un seul plan; le pentagone ΥΒΧΓΦ est donc dans un seul plan. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque la ligne droite ΝΟ est coupée en extrême et moyenne raison au point Ρ, et que ΟΡ est le plus grand segment, la somme des droites ΝΟ, ΟΡ sera à ΟΝ comme ΝΟ est à ΟΡ (5. 13). Mais la droite ΡΟ est égale à ΟΣ; la droite ΣΝ est donc à ΝΟ comme ΝΟ est à ΟΣ; la droite ΝΣ est donc coupée en extrême et moyenne raison au point Ο, et ΝΟ est son plus grand segment (déf. 3. 6); la somme des quarrés des droites ΝΣ, ΣΟ est donc triple du quarré de ΟΝ (4. 13). Mais ΟΝ est égal à ΝΒ, et ΟΣ égal à ΣΦ; la somme des quarrés des droites ΝΣ, ΣΦ est donc triple

284 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλὴ ἄρα ἐστὶν<sup>11</sup> ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλὴ· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>12</sup> ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Εὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν ἰσογώνιον ἔσται<sup>13</sup> τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὰ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε<sup>14</sup> ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. Εὰν ἄρα ἐφ' ἐκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα<sup>14</sup> πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε<sup>15</sup> καὶ ἰσογώνιων περιεχόμενον ὃ καλεῖται δωδεκαέδρον<sup>16</sup>.

ΣΝ, ΝΒ quadrupla sunt ipsius ex ΝΒ. Ipsi autem ex ΣΝ, ΝΒ æquale est ipsum ex ΒΣ; ipsa igitur ex ΒΣ, ΣΦ, hoc est ipsum ex ΒΦ, rectus enim ΦΣΒ angulus, quadruplum est ipsius ex ΝΒ; dupla igitur est ΦΒ ipsius ΒΝ. Est autem et ΒΓ ipsius ΒΝ dupla; æqualis igitur est ΦΒ ipsi ΒΓ. Et quoniam duæ ΒΥ, ΥΦ duabus ΒΧ, ΧΓ æquales sunt, et basis ΦΒ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur ΒΥΦ angulo ΒΧΓ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΥΦΓ angulum æqualem esse ipsi ΒΧΓ. Ipsi igitur ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ tres anguli æquales inter se sunt. Si autem pentagoni æquilateri tres anguli æquales inter se sunt, æquiangulum est pentagonum; æquiangulum igitur est ΒΥΦΓΧ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum; ipsum igitur ΒΥΦΓΧ pentagonum et æquilaterum est et æquiangulum, et est super unum cubi latus ΒΓ. Si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, constituetur quædam figura solida duodecim pentagonis æquilateris et æquiangulis contenta quæ appellatur dodecaedrum.

du carré de ΝΒ; la somme des carrés des droites ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ est donc quadruple du carré de ΝΒ. Mais le carré de ΒΣ est égal à la somme des carrés des droites ΣΝ, ΝΒ (47.1); la somme des carrés des droites ΒΣ, ΣΦ, c'est-à-dire le carré de ΦΒ, est donc quadruple du carré de ΝΒ, à cause que l'angle droit ΦΣΒ; la droite ΦΒ est donc double de ΒΝ. Mais ΒΓ est double de ΒΝ; la droite ΦΒ est donc égale à ΒΓ. Et puisque les droites ΒΥ, ΥΦ sont égales aux droites ΒΧ, ΧΓ, et que la base ΦΒ est égale à la base ΒΓ, l'angle ΒΥΦ sera égal à l'angle ΒΧΓ (8. 1). Nous démontrerons semblablement que l'angle ΥΦΓ est égal à l'angle ΒΧΓ; les trois angles ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ sont donc égaux entr'eux. Mais si trois angles d'un pentagone équilatéral sont égaux entr'eux, le pentagone est équiangle (7. 13); le pentagone ΒΥΦΓΧ est donc équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; le pentagone ΒΥΦΓΧ est donc équilatéral et équiangle, et il est placé sur un côté ΒΓ du cube; si donc nous faisons la même construction sur chacun des douze côtés du cube, nous aurons construit une figure solide contenue sous douze pentagones équilatéraux et équiangles, que l'on nomme dodécaèdre.

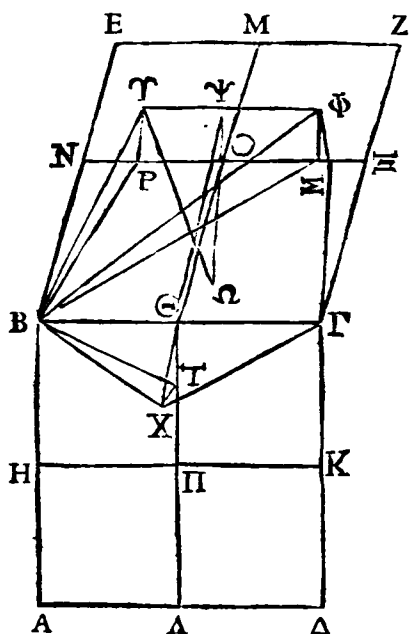
# LE TREIZIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 285

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Εκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΟΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελείῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς<sup>18</sup> τοῦ κύβου. Επεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ

Oportet autem ipsum et sphæra comprehendere datâ, et ostendere dodecaedri latus esse irrationalem quæ appellatur apotome.

Producatur enim ΨΟ, et sit ΟΩ; occurrit igitur ΟΩ diametro cubi, et bifariam se mutuo secant, hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. Secent in Ω; ergo Ω centrum est sphære comprehendentis cubum, et ΟΩ dimidia lateris cubi. Jungatur et ΥΩ. Et quoniam recta linea ΝΣ extremâ et mediâ ratione secatur in Ο, et major ipsius portio est ΝΟ; ipsa igitur ex ΝΣ, ΣΟ tripla sunt ipsius



Mais il faut circoncrire cette figure par la sphère donnée, et démontrer que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Car prolongeons ΨΟ, et que son prolongement soit ΟΩ; la droite ΟΩ rencontrera le diamètre du cube, et ces deux droites se couperont en deux parties égales, car cela est démontré dans l'avant dernier théorème du livre onze. Que ces droites se coupent au point Ω; le point Ω sera le centre de la sphère circonscrite au cube, et la droite ΟΩ la moitié du côté du cube. Joignons ΥΩ. Puisque la ligne droite ΝΣ est coupée en extrême et moyenne raison au point Ο, et que ΝΟ est son plus grand segment, la somme des quarrés des droites ΝΣ, ΣΟ sera

τῆς ΝΟ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ<sup>19</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἐστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδεδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει<sup>20</sup> τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου<sup>21</sup>. Εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἐστὶν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. Καὶ ἐστὶ τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιέληπται ἄρα τὸ δωδεκαέδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

triple du carré de NO (4. 13). Mais la droite ΝΣ est égale à ΨΩ, parce que ΝΟ est égal à ΟΩ, la droite ΨΟ est égale à ΟΣ, et la droite ΟΣ est égale à ΨΥ, parce qu'elle est égale à ΡΟ; la somme des carrés des droites ΩΨ, ΨΥ est donc triple du carré de ΝΟ. Mais le carré de ΥΩ est égal aux carrés des droites ΩΨ, ΨΥ (47. 1); le carré de ΥΩ est donc triple du carré de ΝΟ. Mais le rayon de la sphère circonscrite au cube est égal en puissance au triple de la moitié du côté du cube, car on a enseigné à construire un cube, et à le circonscire par une sphère, et l'on a démontré que le diamètre de la sphère est égal en puissance au triple du côté du cube (15. 3); or les tous sont entre eux comme les moitiés, et ΝΟ est la moitié du côté du cube; la droite ΥΩ est donc égale au rayon de la sphère circonscrite au cube. Mais le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au cube; le point Υ est donc à la surface de la sphère. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles restants du dodécaèdre est à la surface de la sphère; le dodécaèdre est donc circonscrit par la sphère donnée.

ΝΟ. Æqualis autem ΝΣ quidem ipsi ΨΩ, quoniam et ΝΟ quidem ipsi ΟΩ est æqualis, ipsa vero ΨΟ ipsi ΟΣ; at vero et ΟΣ ipsi ΨΥ, quoniam et ipsi ΡΟ; ipsa igitur ΩΨ, ΨΥ tripla sunt ipsius ex ΝΟ. Iphis autem ex ΩΨ, ΨΥ æquale est ipsum ex ΨΩ. Ipsum igitur ex ΥΩ triplum est ipsius ex ΝΟ. Est autem et ipsa ex centro sphæræ comprehendentis cubum potentiâ tripla dimidii lateris cubi, prius enim ostensum est cubum constituere, et sphærâ comprehendere, et ostendere sphæræ diametrum potentiâ triplam esse lateris cubi. Si autem tota totius, et dimidia dimidiæ; et est ΝΟ dimidia lateris cubi; ergo ΥΩ æqualis est ipsi ex centro sphæræ comprehendentis cubum. Et est Ω centrum sphæræ comprehendentis cubum; ergo Υ punctum est ad superficiem sphæræ. Similiter utique ostendemus et unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiem sphæræ; comprehensum igitur est dodecaedrum datâ sphærâ.

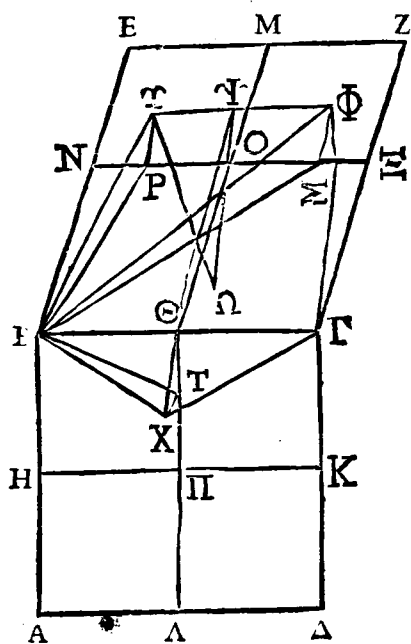
# LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 287

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΡΟ· τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΟΣ<sup>22</sup>, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΡΣ. Οἷον ἐπεὶ ἐστὶν<sup>23</sup> ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ οὕτως<sup>24</sup>

Dico autem dodecaedri latus irrationalem esse quæ appellatur apotome.

Quoniam enim rectæ ΝΟ extremâ et mediâ sectæ major portio est ΡΟ, ipsius autem ΟΞ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ΟΣ; totius igitur ΝΞ extremâ et mediâ ratione sectæ major portio est ΡΣ. Similiter quoniam est ut



ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκεις<sup>25</sup> πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφοτέρων τὴν<sup>26</sup> ΝΡ, ΣΞ. Μειζὼν δὲ

ΝΟ ad ΟΡ ita ΟΡ ad ΡΝ, et dupla, partes enim cum æque multiplicibus eamdem habent rationem; ut igitur ΝΞ ad ΡΣ ita ΡΣ ad utramque simul ΝΡ, ΣΞ. Major autem ΝΞ ipsâ

Je dis enfin que le côté du dodécaèdre est l'irrationnelle qu'on appelle apotome.

Car puisque ΡΟ est le plus grand segment de la droite ΝΟ coupée en extrême et moyenne raison, et que ΟΣ est le plus grand segment de la droite ΟΞ coupée en extrême et moyenne raison, la droite ΡΣ sera le plus grand segment de la droite entière ΝΞ coupée en extrême et moyenne raison. Car puisque ΝΟ est à ΟΡ comme ΟΡ est à ΡΝ, ainsi que les doubles de ces droites, parce que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); la droite ΝΞ sera à la droite ΡΣ comme la droite ΡΣ est à la somme des droites ΝΡ, ΣΞ. Mais la droite ΝΞ est plus grande que ΡΣ, la droite ΡΣ est donc plus grande que la

## 288 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφο-  
τέρου τῆς<sup>27</sup> ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ  
μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς  
τμήμα ἐστὶν ἡ ΡΣ. Ἰση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα  
ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον  
τμήμα ἐστὶν ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἡ τῆς  
σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστὶ δυνάμει τριπλασίον  
τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ  
πλευρὰ οὕσα τοῦ κύβου<sup>27</sup>. Εὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ  
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμη-  
μάτων ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη<sup>28</sup> ἀποτομή· ἡ  
ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὕσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός  
ἐστὶν ἡ καλουμένη<sup>29</sup> ἀποτομή. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι<sup>30</sup>.

ΡΣ ; major igitur et ΡΣ utraq̃ue simul ΝΡ,  
ΣΞ ; ipsa ΝΞ igitur extremâ et mediâ ratione  
secatur, et major ipsius portio est ΡΣ. Æqualis  
autem ΡΣ ipsi ΥΦ ; rectæ igitur ΝΞ extremâ et  
mediâ ratione sectæ major portio est ΥΦ. Et quo-  
niam rationalis est sphæræ diameter, et est po-  
tentiâ tripla lateris cubi ; rationalis igitur est  
ΝΞ latus existens cubi. Si autem rationalis  
linea extremâ et mediâ ratione secta sit, utraq̃ue  
portionum irrationalis est quæ appellatur apo-  
tome ; ipsa ΥΦ igitur latus existens dodecaedri  
irrationalis est quæ appellatur apotome. Quod  
oportebat ostendere.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου  
πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ  
μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ<sup>1</sup>.

### COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est lateris cubi extremâ  
et mediâ secti majorem portionem esse dode-  
caedri latus.

somme des droites ΝΡ, ΣΞ ; la droite ΝΞ est donc coupée en extrême et moyenne  
raison, et ΡΣ est son plus grand segment. Mais ΡΣ est égal à ΥΦ ; la droite ΥΦ est  
donc le plus grand segment de la droite ΝΞ coupée en extrême et moyenne  
raison. Et puisque le diamètre de la sphère est rationnel, et qu'il est égal en  
puissance au triple du côté du cube ( 15. 13 ), la droite ΝΞ qui est le côté du  
cube sera rationnelle ( déf. 6. 11 ). Mais si une ligne rationnelle est coupée en  
extrême et moyenne raison, chacun des segments est l'irrationnelle qu'on ap-  
pèle apotome ( 6. 13 ); le côté ΥΦ qui est le côté du dodécaèdre, est donc  
l'irrationnelle qu'on appelle apotome. Ce qu'il fallait démontrer.

### COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident que le côté du cube étant coupé en extrême et  
moyenne raison, le plus grand segment est le côté du dodécaèdre.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

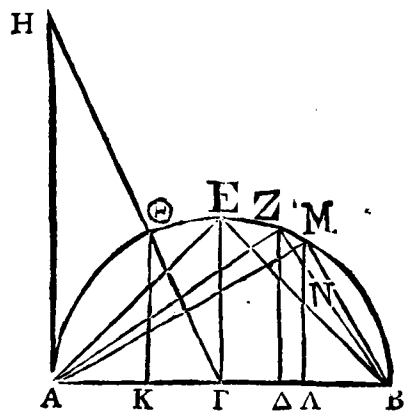
PROPOSITIO XVIII.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρίναι πρὸς ἀλλήλας.

Latera quinque figurarum exponere et comparare inter se.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν  $\Gamma$  ὥστε ἴσιν εἶναι τὴν  $AG$  τῇ  $GB$ , κατὰ δὲ τὸ  $\Delta$  ὥστε διπλασίοια εἶναι τὴν  $AD$  τῆς  $DB$ , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον τὸ  $AEB$ , καὶ ἀπὸ τῶν  $\Gamma$ ,  $\Delta$  τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ  $GE$ ,  $\Delta Z$ , καὶ

Exponatur datæ sphaeræ diameter  $AB$ , et secetur quidem in  $\Gamma$  ita ut æqualis sit  $AG$  ipsi  $GB$ , in  $\Delta$  vero ita ut dupla sit  $AD$  ipsius  $DB$ , et describatur super  $AB$  semicirculus  $AEB$ , et a punctis  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ipsi  $AB$  ad rectos ducantur ipsæ



ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $AZ$ ,  $ZB$ . Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ  $AD$  τῆς  $DB$ , τριπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῆς  $BD$ . ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ  $BA$  τῆς  $AD$ . Ὡς δὲ ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AD$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$  ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ  $AZB$  τρίγωνον τῷ  $AZ\Delta$  τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $AZ$ . Ἐστὶ δὲ

$GE$ ,  $\Delta Z$ , et jungantur  $AZ$ ,  $ZB$ . Et quoniam dupla est  $AD$  ipsius  $DB$ , tripla igitur est  $AB$  ipsius  $BD$ ; convertendo sesquialtera igitur est  $BA$  ipsius  $AD$ . Ut autem  $BA$  ad  $AD$  ita ipsum ex  $BA$  ad ipsum ex  $AZ$ ; æquiangulum enim est  $AZB$  triangulum triangulo  $AZ\Delta$ ; sesquialterum igitur est ipsum ex  $BA$  ipsius ex  $AZ$ . Est

PROPOSITION XVIII.

Exposer les côtés des cinq figures, et les comparer entre eux.

Soit  $AB$  le diamètre de la sphère donnée; qu'il soit coupé au point  $\Gamma$ , de manière que  $AG$  soit égal à  $GB$ ; et au point  $\Delta$ , de manière que  $AD$  soit double de  $DB$ ; sur  $AB$  décrivons le demi-cercle  $AEB$ ; des points  $\Gamma$ ,  $\Delta$  menons les droites  $GE$ ,  $\Delta Z$  perpendiculaires à  $AB$ , et joignons  $AZ$ ,  $ZB$ . Puisque la droite  $AD$  est double de  $DB$ , la droite  $AB$  sera triple de  $BD$ ; donc, par conversion, la droite  $BA$  sera égale aux trois moitiés de  $AD$ . Mais  $BA$  est à  $AD$  comme le quarré de  $BA$  est au quarré de  $AZ$  (20. 6), car le triangle  $AZB$  est équiangle avec le triangle  $AZ\Delta$  (8. 6); le quarré de  $BA$  est donc égal aux trois moitiés du quarré de  $AZ$ . Mais



290 LE TREIZIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμισιλία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς<sup>3</sup> πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ AD τῆς ΔB, τριπλασίων<sup>4</sup> ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΔ. Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ. Ἐστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου<sup>5</sup> πλευρᾶς. Καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ ΓB, διπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΓ. Ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE. Ἐστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἡχθω δὲ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH, καὶ κείσθω ἡ AH ἴση τῇ AB<sup>7</sup>, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HG, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν

autem et sphæræ diameter potentiâ sesquialtera lateris pyramidis, et est AB sphæræ diameter; ergo AZ æqualis est lateri pyramidis.

Rursus, quoniam dupla est AD ipsius ΔB, tripla igitur est AB ipsius BΔ. Ut autem AB ad BΔ ita ipsum ex AB ad ipsum ex BZ; triplum igitur est ipsum ex AB ipsius ex BZ. Est autem et sphæræ diameter potentiâ tripla lateris cubi, et est AB sphæræ diameter; ergo ipsa BZ cubi est latus.

Et quoniam æqualis est AG ipsi ΓB, dupla igitur est AB ipsius BΓ. Ut autem AB ad BΓ ita ipsum ex AB ad ipsum ex BE; duplum igitur est ipsum ex AB ipsius ex BE. Est autem et sphæræ diameter potentiâ dupla lateris octaedri, et est ipsa AB datæ sphæræ diameter; ipsum BE igitur octaedri est latus.

Ducatur autem a puncto A ipsi AB rectæ ad rectos ipsa AH, et ponatur AH æqualis ipsi AB, et jungatur HG, et a puncto Θ ad

le diamètre de la sphère est égal en puissance aux trois moitiés du côté de la pyramide ( 13. 13 ), et AB est le diamètre de la sphère; la droite AZ est donc égale au côté de la pyramide.

De plus, puisque AD est double de ΔB, la droite AB sera triple de BΔ. Mais AB est à BΔ comme le quarré de AB est au quarré de BZ ( 8, et 20. 6 ); le quarré de AB est donc triple du quarré de BZ. Mais le diamètre de la sphère est égal en puissance au triple du côté du cube ( 15. 13 ), et AB est le diamètre de la sphère; la droite BZ est donc le côté du cube.

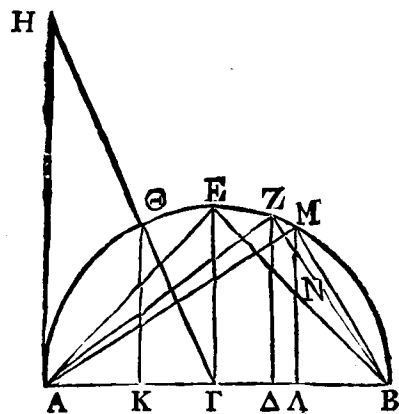
Et puisque la droite AG est égale à ΓB, la droite AB sera double de BΓ. Mais AB est à BΓ comme le quarré de AB est au quarré de BE; le quarré de AB est donc double du quarré de BE. Mais le diamètre de la sphère est égal en puissance au double du côté de l'octaèdre ( 14. 13 ), et AB est le diamètre de la sphère donnée; la droite BE est donc le côté de l'octaèdre.

Du point A menons la droite AH perpendiculaire à AB; faisons AH égal à AB; joignons HG, et du point Θ menons ΘK perpendiculaire à AB. Puisque HA est

LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 291

ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ  
 ΗΑ τῆς ΑΓ, ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ, ὥς δὲ ἡ ΗΑ  
 πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ· διπλὴ  
 ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ  
 τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ  
 τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πεντα-  
 πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. Ἰση δὲ ἡ ΘΓ τῇ  
 ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ

ΑΒ perpendicularis ducatur ΘΚ. Et quoniam  
 dupla est ΗΑ ipsius ΑΓ, æqualis enim ΗΑ ipsi  
 ΑΒ, ut autem ΗΑ ad ΑΓ ita ΘΚ ad ΚΓ; dupla  
 igitur et ΘΚ ipsius ΚΓ; quadruplum igitur est  
 ipsum ex ΘΚ ipsius ex ΚΓ; ipsa igitur ex ΘΚ,  
 ΚΓ, quod est ipsum ex ΘΓ, quintuplum est  
 ipsius ex ΚΓ. Æqualis autem ΘΓ ipsi ΓΒ;  
 quintuplum igitur est ipsum ex ΒΓ ipsius ex



τῆς ΓΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὥν  
 ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστὶ διπλὴ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοι-  
 πῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλὴ· τριπλὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς  
 ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ  
 τῆς ΓΔ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ  
 ἀπὸ τῆς ΓΚ· μείζον ἄρα ἐστὶ<sup>8</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ  
 ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν<sup>9</sup> ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ.  
 Κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ  
 πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ.

ΓΚ. Et quoniam dupla est ΑΒ ipsius ΒΓ, qua-  
 rum ipsa ΑΔ ipsius ΔΒ est dupla; reliqua igitur  
 ΒΔ reliquæ ΔΓ est dupla; tripla igitur ΒΓ ipsius  
 ΓΔ; nonuplum igitur ipsum ex ΒΓ ipsius ex ΓΔ.  
 Quintuplum autem ipsum ex ΒΓ ipsius ex ΓΚ;  
 majus igitur est ipsum ex ΓΚ ipso ex ΓΔ; major  
 igitur est ΓΚ ipsâ ΓΔ. Ponatur ipsi ΓΚ æqualis  
 ΓΛ, et a puncto Λ ipsi ΑΒ ad rectos agatur

double de ΑΓ, car ΗΑ est égal à ΑΒ, et que ΗΑ est à ΑΓ comme ΘΚ est à ΚΓ (4. 6),  
 la droite ΘΚ sera double de ΚΓ; le quarré de ΘΚ est donc quadruple du quarré  
 de ΚΓ (20. 6); la somme des quarrés des droites ΘΚ, ΚΓ, qui est égale au  
 quarré de ΘΓ (47. 1), est donc quintuple du quarré de ΚΓ. Mais ΘΓ est égal  
 à ΓΒ; le quarré de ΒΓ est donc quintuple du quarré de ΓΚ. Et puisque ΑΒ est  
 double de ΒΓ, et ΑΔ double de ΔΒ, le reste ΒΔ sera double du reste ΔΓ; la droite  
 ΒΓ est donc triple de ΓΔ; le quarré de ΒΓ est donc égal à neuf fois le quarré de  
 ΓΔ (20. 6). Mais le quarré de ΒΓ est quintuple du quarré de ΓΚ; le quarré de  
 ΓΚ est donc plus grand que le quarré de ΓΔ; la droite ΓΚ est donc plus grande  
 que ΓΔ. Faisons ΓΛ égal à ΓΚ; du point Λ menons ΑΜ perpendiculaire à ΑΒ, et

Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΒΓ διπλὴ ἢ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλὴ ἢ ΚΛ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίῳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται<sup>10</sup>. ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας<sup>11</sup> διάμετρος σύγκειται, ἐκ τε τῆς τοῦ<sup>12</sup> ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΑΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΑΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίῳ τῆς ΚΓ· πεντα-

ΛΜ, et jungatur ΜΒ. Et quoniam quintuplum est ipsum ex ΒΓ ipsius ΓΚ, et est ipsius quidem ΒΓ dupla ΑΒ, ipsius vero ΓΚ dupla ΚΛ; quintuplum igitur est ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΚΛ. Est autem et sphæræ diameter potentiâ quintupla ipsius ex centro circuli a quo icosaedrum describitur. Et est ΑΒ ipsa sphæræ diameter; ipsa ΚΛ igitur ex centro est circuli a quo icosaedrum describitur; ipsa ΚΛ igitur hexagoni est latus dicti circuli. Et quoniam sphæræ diameter componitur et ex latere hexagoni et duobus decagoni lateribus in dicto circulo descriptorum, et est quidem ΑΒ sphæræ diameter, ipsum vero ΚΛ hexagoni latus, et æqualis ΑΚ ipsi ΑΒ; utraque igitur ipsarum ΑΚ, ΑΒ decagoni est latus descripti in circulo, a quo icosaedrum describitur. Et quoniam decagoni quidem ΑΒ est latus, hexagoni vero ipsa ΜΛ, æqualis enim est ipsi ΚΛ, quoniam et ipsi ΘΚ, æqualiter enim distat a centro, et est utraque ipsarum ΘΚ, ΚΛ dupla ipsius ΚΓ; pentagoni igitur est ΜΒ latus. La-

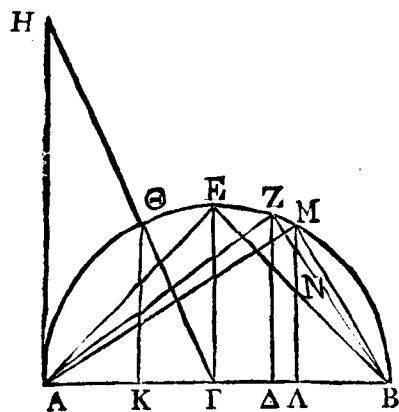
joignons MB. Puisque le quarré de ΒΓ est quintuple du quarré de ΓΚ, que ΑΒ est double de ΒΓ, et ΚΛ double de ΓΚ, le quarré de ΑΒ sera quintuple du quarré de ΚΛ. Mais le quarré du diamètre de la sphère est quintuple du quarré du rayon du cercle d'après lequel l'icosaèdre est décrit (cor. 16. 13), et ΑΒ est le diamètre de la sphère; la droite ΚΛ est donc le rayon du cercle d'après lequel l'icosaèdre est décrit; la droite ΚΛ est donc le côté de l'hexagone décrit dans le cercle dont nous venons de parler. Et puisque le diamètre de la sphère est composé du côté de l'hexagone et de deux côtés du décagone, ces polygones étant décrits dans le cercle dont nous venons de parler (16. 13), que ΑΒ est le diamètre de la sphère, que ΚΛ est le côté de l'hexagone, et que ΑΚ est égal à ΑΒ, chacune des droites ΑΚ, ΑΒ sera le côté du décagone décrit dans le cercle d'après lequel on a décrit l'icosaèdre. Et puisque ΑΒ est le côté du décagone, et ΜΛ le côté de l'hexagone, car la droite ΜΛ est égale à ΚΛ, parcequ'elle l'est à ΘΚ (14. 3), ces droites étant également éloignées du centre, et puisque chacune des droites ΘΚ, ΚΛ est double de ΚΓ,

γωνίου ἄρα ἐστὶν ἡ MB. Ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ MB.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ZB κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ N, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ NB· ἡ NB ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

tus autem pentagoni est latus icosaedri; icosaedri igitur est MB latus.

Et quoniam ZB cubi est latus, secetur extrema et media ratione in N, et sit major portio NB; ipsa NB igitur dodecaedri est latus.



Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν AZ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς<sup>13</sup> BE δυνάμει διπλασίων<sup>14</sup>, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ZB δυνάμει τριπλασίων· οἷον ἄρα ἡ<sup>15</sup> τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δ' τοῦ κύβου δύο· ἡ<sup>16</sup> ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρά τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπί-τριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῇ· ἡ δὲ

Et quoniam sphæræ diameter ostensa est ipsius quidem AZ lateris pyramidis potentiâ sesquialtera, lateris vero BE octaedri potentiâ dupla, lateris autem ZB cubi potentiâ triplâ, quarum igitur partium sphæræ diameter potentiâ est sex, earum pyramidis latus quatuor, octaedri trium, cubi autem duarum; ergo pyramidis latus quidem lateris octaedri potentiâ est sesquitertium, cubi vero potentiâ duplum; latus autem octae-

la droite MB sera le côté du pentagone (10. 13). Mais le côté du pentagone est le côté de l'icosaèdre (6. 13); la droite MB est donc le côté de l'icosaèdre.

Puisque la droite ZB est le côté du cube; que cette droite soit coupée en extrême et moyenne raison au point N, et que NB soit le plus grand segment; la droite NB sera le côté du dodécaèdre (17. 13).

Et puisque l'on a démontré que le carré du diamètre de la sphère est égal aux trois moitiés du carré du côté AZ de la pyramide, au double du carré du côté BE de l'octaèdre, et au triple du carré du côté ZB du cube, si le carré du diamètre de la sphère contient six parties, le carré du côté de la pyramide en contiendra quatre, le carré du côté de l'octaèdre trois, et le carré du côté du cube deux; le carré du côté de la pyramide est donc égal aux quatre tiers du carré du côté de l'octaèdre, et au double du carré du côté du cube; et le carré du côté de

294 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. Αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε<sup>17</sup> τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλλοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Οτι δὲ<sup>18</sup> μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἢ MB τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς NB δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ZAB τρίγωνον τῷ ZAB τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BZ οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BA. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA. Τριπλῇ δὲ ἡ AB τῆς BA· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB τοῦ

dri lateris cubi potentiâ sesquialterum. Lateralibus igitur dicta trium figurarum, dico et pyramididis et octaedri et cubi inter se esse rationibus rationalibus; reliqua vero duo, dodecaedri et icosaedri, neque inter se neque ad dicta sunt in rationibus rationalibus. Irrationales enim sunt, illa quidem minor, hæc vero apotome.

Majus vero esse icosaedri latus MB dodecaedri latere NB ita ostendemus.

Quoniam enim æquiangulum est ZAB triangulum triangulo ZAB, proportionaliter est ut ΔB ad BZ ita ZB ad BA. Et quoniam tres recte proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ ad ipsum ex secundâ; est igitur ut ΔB ad BA ita ipsum ex ΔB ad ipsum ex BZ; invertendo igitur ut AB ad BA ita ipsum ex AB ad ipsum ex BA. Tripla autem AB ipsius BA

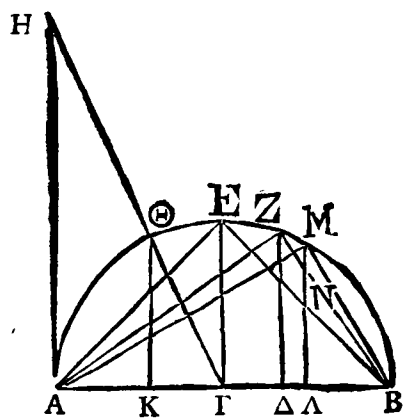
l'octoèdre sera égal aux trois moitiés du carré du côté du cube. Les côtés des trois figures dont nous avons parlé, je veux dire les côtés de la pyramide, de l'octaèdre, et du cube, sont donc entr'eux en raisons rationnelles; mais les deux côtés restants, je veux dire les côtés de l'icosaèdre et du dodécaèdre ne sont point entr'eux, ni avec les cotés dont nous avons parlé, en raisons rationnelles, parce qu'ils sont irrationnels, l'un étant une mineure (16. 13), et l'autre un apotome (17. 13).

Nous démontrerons de la manière suivante que le côté MB de l'icosaèdre est plus grand que le côté NB du dodécaèdre.

Puisque le triangle ZAB est équiangle avec le triangle ZAB, la droite ΔB sera à BZ comme ZB est à BA (4. 6). Et puisque ces trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (cor. 20. 6); la droite ΔB est donc à BA comme le carré de ΔB est au carré de BZ; donc, par inversion, AB est à BA comme le carré de ZB est au carré de BA (cor. 4. 5). Mais AB est triple de BA; le carré de ZB est donc

ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ  
ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῇ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς  
ΔΒ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς  
ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ<sup>19</sup>. πολλῶ ἄρα  
ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ μείζων ἐστὶ. Καὶ τῆς μὲν ΑΔ ἄκρον  
καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά  
ἐστὶν ἡ ΚΑ, ἐπειδὴ περ ἡ μὲν ΑΚ ἐξαγώνου ἐστίν,  
ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον

triplum igitur ipsum ex ΖΒ ipsius ex ΒΔ. Est autem  
et ipsum ex ΑΔ ipsius ex ΔΒ quadruplum; du-  
pla enim ΑΔ ipsius ΔΒ; majus igitur ipsum  
ex ΑΔ ipso ex ΖΒ; major igitur et ΑΔ ipsa  
ΖΒ; multo major igitur est ΑΔ ipsa ΖΒ. Et  
rectæ quidem ΑΔ extremâ et mediâ ratione  
sectæ major portio est ΚΑ, quoniam ΑΚ qui-  
dem hexagoni est latus, ipsa vero ΚΑ decagoni;



λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ ΝΒ·  
μείζων ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ. Ἰση δὲ ἡ ΚΑ τῇ<sup>20</sup> ΑΜ·  
μείζων ἄρα ἡ ΑΜ τῆς ΝΒ. Τῆς δὲ ΑΜ μείζων  
ἐστὶν<sup>21</sup> ἡ ΜΒ· πολλῶ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὔσα τοῦ  
εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης  
τοῦ δωδεκαέδρου. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rectæ autem ΖΒ extremâ et mediâ ratione sectæ  
major portio est ΝΒ; major igitur ΚΑ ipsa  
ΝΒ. Æqualis autem ΚΑ ipsi ΑΜ; major igitur  
ΑΜ ipsa ΝΒ. Ipsa autem ΑΜ major est ΜΒ;  
ergo ipsa ΜΒ, latus existens icosaedri, multo  
major est ipsa ΝΒ existente dodecaedri latere.  
Quod oportebat ostendere.

triple du quarré de ΒΔ. Mais le quarré de ΑΔ est quadruple du quarré de ΔΒ,  
car ΑΔ est double de ΔΒ; le quarré de ΑΔ est donc plus grand que le quarré de  
ΖΒ; la droite ΑΔ est donc plus grande que la droite ΖΒ; la droite ΑΔ est donc  
à plus forte raison plus grande que ΖΒ. Mais ΚΑ est le plus grand segment de  
la droite ΑΔ coupée en extrême et moyenne raison, à cause que ΑΚ est le côté  
de l'hexagone, et ΚΑ le côté du décagone (9. 13), et que ΝΒ est le plus grand  
segment de la droite ΖΒ coupée aussi en extrême et moyenne raison; la droite ΚΑ  
est donc plus grande que ΝΒ. Mais ΚΑ est égal à ΑΜ; la droite ΑΜ est donc plus  
grande que ΝΒ. Mais la droite ΜΒ est plus grande que ΑΜ (19. 1); la droite ΜΒ,  
qui est le côté de l'icosaèdre, est donc à plus forte raison plus grande que ΝΒ,  
qui est le côté du dodécaèdre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΑΔ ΔΩ Σ<sup>1</sup>.

ALITER.

Επεὶ γὰρ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλὴ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΒ τρίγωνῳ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Εδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΑ πενταπλάσιον· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΑ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν· καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζον ἐστίν<sup>2</sup>. ὥστε καὶ ἐν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἐνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζον ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ. Ἰση δὲ ἡ ΚΑ τῇ ΑΜ· μείζων ἄρα ἡ ΚΑ τῆς ΝΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΒΝ μείζων ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim dupla est ΑΔ ipsius ΔΒ, tripla igitur ΑΒ ipsius ΒΔ. Ut autem ΑΒ ad ΒΔ ita ipsum ex ΑΒ ad ipsum ex ΒΖ, propterea quod æquiangulum est ΖΑΒ triangulum triangulo ΖΔΒ; triplum igitur ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΒΖ. Ostensum est autem ipsum ex ΑΒ ipsius ex ΚΑ quintuplum; quinque igitur ipsa ex ΚΑ tribus ipsis ex ΖΒ æqualia sunt. Sed tria ipsa ex ΖΒ majora sunt sex ipsis ex ΝΒ; et quinque igitur ipsa ex ΚΑ sex ipsis ex ΝΒ majora sunt; quare et unum ex ΚΑ uno ex ΝΒ majus est; major igitur ΚΑ ipsâ ΝΒ. Æqualis autem ΚΑ ipsi ΑΜ; major igitur ΚΑ ipsâ ΝΒ; multo major igitur est ΜΒ ipsâ ΒΝ. Quod oportebat ostendere.

## AUTREMENT.

Car puisque ΑΔ est double de ΔΒ, la droite ΑΒ est triple de ΒΔ. Mais la droite ΑΒ est à ΒΔ comme le quarré de ΑΒ est au quarré de ΒΖ, parce que le triangle ΖΑΒ est équiangle avec le triangle ΖΔΒ (8.6); le quarré de ΑΒ est donc triple du quarré de ΒΖ. Mais on a démontré que le quarré de ΑΒ est quintuple du quarré de ΚΑ; cinq fois le quarré de ΚΑ est donc égal à trois fois le quarré de ΖΒ. Mais trois fois le quarré de ΖΒ est plus grand que six fois le quarré de ΝΒ; cinq fois le quarré de ΚΑ est donc plus grand que six fois le quarré de ΝΒ; une fois le quarré de ΚΑ est donc plus grand qu'une fois le quarré de ΝΒ; la droite ΚΑ est donc plus grande que ΝΒ. Mais ΚΑ est égal à ΑΜ; la droite ΚΑ est donc plus grande que ΝΒ; la droite ΜΒ est donc à plus forte raison plus grande que la droite ΒΝ. Ce qu'il fallait démontrer.



ΛΗΜΜΑ.

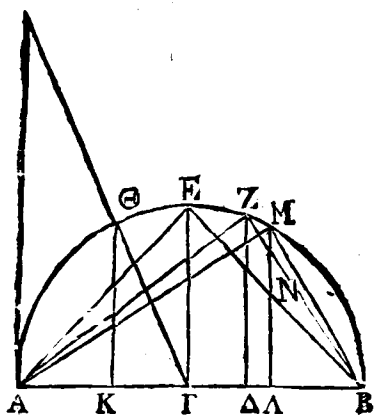
LEMMA.

Οτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΝ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖ,

Tria vero ipsa ex ΖΒ majora esse quam sex ipsa ex ΒΝ, ita ostendemus.

Quoniam enim major est ΒΝ ipsâ ΝΖ, ipsum igitur sub ΖΒ, ΒΝ majus est ipso sub ΒΖ, ΖΝ;



ΖΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶ· τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΝ· ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέ-

ipsum igitur sub ΒΖ, ΒΝ cum ipso sub ΒΖ, ΖΝ majus est quam duplum ipsius sub ΒΖ, ΖΝ. Sed ipsum quidem sub ΖΒ, ΒΝ cum ipso sub ΒΖ, ΖΝ ipsum ex ΖΒ est; ipsum autem sub ΒΖ, ΖΝ æquale ipsi ex ΒΝ; extremâ enim et mediâ ra-

ΛΗΜΜΕ.

Nous démontrerons de la manière suivante que trois fois le quarré de ΖΒ est plus grand que six fois le quarré de ΒΝ.

Car puisque ΒΝ est plus grand que ΝΖ, le rectangle sous ΖΒ, ΒΝ est plus grand que le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ; le rectangle sous ΒΖ, ΒΝ, conjointement avec le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ, est donc plus grand que le double rectangle sous ΒΖ, ΖΝ. Mais le rectangle sous ΖΒ, ΒΝ, conjointement avec le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ, est le quarré de ΖΒ (2. 2), et le rectangle sous ΒΖ, ΖΝ est égal au quarré de ΒΝ,



## 298 LE TREIZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τριηται ἡ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZB μείζον ἐστὶ διπλασίον τοῦ ἀπὸ τῆς BN<sup>2</sup>. ἐν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZB δύο τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζον ἐστίν· ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἐξ τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζονά ἐστιν. Ὅπως ἔδει δείξαι.

### ΣΧΟΛΙΟΝ.

Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Υπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων, στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται<sup>1</sup>. Υπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἢ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἐξ τριγώνων ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου γωνίας διμοίρου ἑρῆς, ἔσονται αἱ

tione secta est BZ in N, et ipsum sub extremis æquale est ipsi ex mediâ; ipsum igitur ex ZB majus est duplo ipsius ex BN; unum igitur ex ZB duobus ipsis ex BN majus est; quare et tria ipsa ex ZB quam sex ipsa ex BN majora sunt. Quod oportebat ostendere.

### SCHOLIUM.

Dico et præter dictas quinque figuras non constitui aliam figuram contentam sub et æquilateris et æquiangulis æqualibus inter se.

Etenim ex duobus quidem triangulis, et aliis duobus planis, solidus angulus non constituetur. Ex tribus vero triangulis angulus pyramidis, ex quatuor autem ipse octaedri, ex quinque autem ipse icosædri; ex sex vero triangulis et æquilateris et æquiangulis ad unum punctum constitutis non erit solidus angulus, existente enim angulo æquilateri trianguli duabus tertiis recti, erunt illi sex anguli quatuor

parce que la droite BZ est coupée en extrême et moyenne raison au point N, et que le rectangle sous les droites extrêmes est égal au carré de la droite moyenne (17. 6); le carré de ZB est donc plus grand que le double du carré de BN; une fois le carré de ZB est donc plus grand que deux fois le carré de BN; trois fois le carré de ZB est donc plus grand que six fois le carré de BN. Ce qu'il fallait démontrer.

### SCHOLIE.

Je dis aussi qu'excepté les cinq figures dont nous venons de parler, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.

Car on ne peut pas construire un angle solide avec deux triangles, ni avec deux autres plans (déf. 11. 11). Mais avec trois triangles, on construit l'angle de la pyramide; avec quatre, l'angle de l'octaèdre, et avec cinq, l'angle de l'icosaèdre. Avec six triangles équilatéraux et équiangles, on ne peut pas construire un angle solide en un même point; car un des angles d'un triangle équilatéral étant égal

ἑξ τεσσάρων<sup>2</sup> ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπαντα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλείονων ἢ<sup>3</sup> ἑξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. Ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἢ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἴσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἢ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὕσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου<sup>4</sup> γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἴσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐδὲ μὲν ὑπὸ πολυγώνων ἐτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ αὐτὸ<sup>5</sup> αἰτοπον· οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα<sup>6</sup> στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

rectis æquales, quod impossibile; omnis enim solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis continetur. Propter eadem utique neque ex pluribus quam sex angulis planis solidus angulus constituitur. Sub quadratis autem tribus cubi angulus continetur; sub quatuor vero impossibile; essent enim rursus quatuor recti. Sub autem pentagonis æquilateris et æquiangularis, sub tribus quidem angulus dodecaedri; sub quatuor vero impossibile, etenim cum sit angulus pentagoni æquilateri rectus et ejus quinta pars, erunt quatuor anguli quam quatuor recti majores, quod impossibile. Neque quidem sub polygonis aliis figuris constituetur solidus angulus, propter idem absurdum; non igitur præter dictas quinque figuras alia figura solida constituetur sub æquilateris et æquiangularis contenta. Quod oportebat ostendere.

aux deux tiers d'un angle droit, six de ces angles seront égaux à quatre droits, ce qui est impossible, à cause que tout angle solide est contenu sous des angles dont la somme est plus petite que quatre droits (21. 11). Par la même raison, un angle solide ne pourra être construit avec plus de six de ces angles plans. L'angle du cube est contenu sous trois quarrés; or un angle solide ne peut pas être contenu sous quatre quarrés, car il serait contenu sous quatre angles droits. Quant aux pentagones équilatéraux et équiangles, l'angle du dodécaèdre est compris par trois de ces pentagones, et un angle solide ne peut pas être compris par quatre; car un des angles d'un pentagone équilatéral étant égal aux six cinquièmes d'un angle droit, quatre de ces angles seraient plus grands que quatre droits, ce qui est impossible. On ne pourra donc construire un angle solide avec d'autres polygones, à cause de la même absurdité. On ne peut donc pas, outre les cinq figures dont nous venons de parler, construire une autre figure solide comprise par des figures équilatérales et équiangles. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΛΗΜΜΑ.

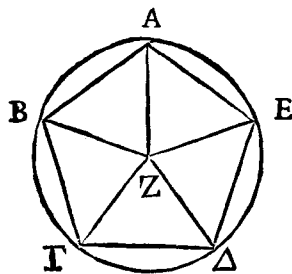
Οτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε<sup>1</sup> καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτων, οὕτως δεικτέον.

Εστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε<sup>2</sup> καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ<sup>3</sup>, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, τοῦ<sup>4</sup> πενταγώνου γωνίας. Καὶ ἐπεὶ αἱ

## LEMMA.

Et æquilateri autem et æquianguli pentagoni angulum rectum esse et quintum ita ostendendum est.

Sit enim pentagonum et æquilaterum et æquiangulum ΑΒΓΔΕ, et describatur circa ipsum circulus ΑΒΓΔΕ, et sumatur ipsius centrum Ζ, et jungantur ipsæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ; bifariam igitur secant ipsos ad puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε pentagoni angulos. Et quoniam ipsi ad Ζ quin-



πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν<sup>5</sup> ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὲρ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ πέμπτων· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου<sup>6</sup>. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστὶ ὀρθῆς καὶ πεμπτου<sup>7</sup>. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

que anguli quatuor rectis æquales sunt, et sunt æquales; unus igitur ipsorum, ut ipse ΑΖΒ, unus rectus est præter quintam partem; reliqui igitur ΖΑΒ, ΑΒΖ unus sunt rectus et quinta pars. Æqualis autem ΖΑΒ ipsi ΖΒΓ; et totus igitur ΑΒΓ pentagoni angulus unus est rectus et quinta pars. Quod oportebat ostendere.

## LEMME.

On peut démontrer de la manière suivante qu'un angle d'un pentagone équilatéral et équiangle est égal aux six cinquièmes d'un angle droit.

Soit ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle; circonscrivons à ce polygone le cercle ΑΒΓΔΕ; prenons le centre Ζ de ce cercle, et joignons ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ; ces droites couperont en deux parties égales les angles en Α, Β, Γ, Δ, Ε (14. 4). Puisque les cinq angles en Ζ sont égaux à quatre droits, et qu'ils sont égaux, chacun de ces angles, comme ΑΖΒ, sera égal à un droit moins un cinquième; la somme des angles restants ΖΑΒ, ΑΒΖ est donc égale à un droit plus un cinquième (32. 1). Mais l'angle ΖΑΒ est égal à l'angle ΖΒΓ; l'angle entier ΑΒΓ du pentagone est donc égal à un droit plus un cinquième. Ce qu'il fallait démontrer.

# E U C L I D I S

## D A T A.

### Ο Ρ Ο Ι.

α'. Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται, χωρία τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι.

β'. Λόγος δεδοῦναι λέγεται, ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.

γ'. Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἶδει δεδοῦναι λέγεται, ὥν αἱ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας<sup>1</sup> δεδομένοι.

δ'. Τῇ θέσει δεδοῦναι λέγονται<sup>2</sup>, σημειᾶ τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ γωνίαι, ᾧ τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἐπέχει<sup>3</sup>.

### DEFINITIONES.

1. Data magnitudine dicuntur, et spatia, et lineæ, et anguli, quibus possumus æqualia invenire.

2. Ratio dari dicitur, cui possumus eandem invenire.

3. Rectilineæ figuræ specie dari dicuntur, quarum et anguli dati sunt ad unum, et rationes laterum inter se datæ.

4. Positione dari dicuntur, et puncta, et lineæ, et anguli, quæ eundem semper situm obtinent.

## LES DONNÉES D'EUCLIDE.

1. Des espaces, des lignes, et des angles, auxquels nous pouvons trouver des grandeurs égales, sont dits donnés de grandeur.

2. Une raison est dite donnée, quand nous pouvons lui en trouver une qui soit la même.

3. Des figures rectilignes, dont chacun des angles est donné, et dont les raisons de leurs côtés entre eux sont données, sont dites données d'espèce.

4. Des points, des lignes, et des angles qui conservent toujours la même situation, sont dits donnés de position.

ε'. Κύκλος τῷ μεγέθει δεδοσθαι λέγεται, οὗ δέδοται ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ς'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδοσθαι λέγεται, οὗ δέδοται τὸ μὲν κέντρον τῇ θέσει, ἢ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ζ'. Τμήματα κύκλων<sup>5</sup> τῷ μεγέθει δεδοσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἱ τε<sup>6</sup> γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῷ μεγέθει.

η'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει τμήματα δεδοσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἱ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ τῷ<sup>7</sup> μεγέθει, καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

θ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἐστίν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ι'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἑλαττόν ἐστιν, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ια'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἐστίν

5. Circulus magnitudine dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudine.

6. Positione autem et magnitudine circulus dari dicitur, cujus datur centrum quidem positione, ea vero ex centro magnitudine.

7. Segmenta circulorum magnitudine dari dicuntur, in quibus et anguli dati sunt, et bases segmentorum magnitudine.

8. Positione autem et magnitudine segmenta dari dicuntur, in quibus et anguli dati sunt magnitudine, et bases segmentorum positione et magnitudine.

9. Magnitudo quam magnitudo, datâ, major est, quando, ablatâ datâ, reliqua eidemæ qualis est.

10. Magnitudo quam magnitudo, datâ, minor est, quando, adjunctâ datâ, tota eidem æqualis est.

11. Magnitudo magnitudine, datâ, major

5. Un cercle, dont le rayon est donné de grandeur, est dit donné de grandeur.

6. Un cercle, dont le centre est donné de position, et le rayon de grandeur, est dit donné de position, et de grandeur.

7. Des segments de cercles sont dits donnés de grandeur, quand les angles qu'ils comprennent, et les bases de ces segments sont donnés de grandeur.

8. Des segments sont dits donnés de position et de grandeur, quand les angles qu'ils comprennent sont donnés de grandeur, et que les bases des segments sont données de position, et de grandeur.

9. Une grandeur est plus grande qu'une autre grandeur, d'une grandeur donnée, quand la grandeur donnée étant retranchée de la plus grande, le reste est égal à la plus petite.

10. Une grandeur est plus petite qu'une autre grandeur d'une grandeur donnée, quand la grandeur donnée étant ajoutée à la plus petite, la somme est égale à la plus grande.

11. Une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en

ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, ἀφαιρέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

15. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἑλασσόν ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

16. Κατηγμένη ἐστὶν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει εὐθεΐαν ἀγομένη εὐθεΐα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

17. Ανηγμένη ἐστὶν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς θέσει εὐθεΐα<sup>8</sup> ἀγομένη εὐθεΐα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

18. Παρά θέσει ἐστὶν, ἡ διὰ δεδομένου σημείου δεδομένη<sup>9</sup> θέσει εὐθεΐα παράλληλος ἀγομένη.

est quam in ratione, quando, oblatâ datâ, reliqua ad eamdem rationem habet datam.

12. Magnitudo magnitudine, datâ, minor est quam in ratione, quando, adjunctâ datâ, tota ad eamdem rationem habet datam.

13. Deducta recta est, quæ a dato puncto ad rectam positione ducitur in dato angulo.

14. Educta recta est, quæ a dato puncto in rectam positione ducitur in dato angulo.

15. Contra positione recta est, quæ per datum punctum datæ positione rectæ parallela ducitur.

raison, quand la grandeur donnée étant retranchée, le reste a avec l'autre une raison donnée.

12. Une grandeur est plus petite à l'égard d'une autre, d'une donnée, qu'en raison, quand la grandeur donnée étant ajoutée, leur somme a avec l'autre une raison donnée.

13. Une droite est dite abaissée, lorsqu'elle est menée, dans un angle donné, d'un point donné à une droite donnée de position.

14. Une droite est dite élevée, lorsqu'elle est menée, dans un angle donné, d'un point donné dans une droite donnée de position.

15. Une droite est dite de juxta-position, lorsqu'elle est menée par un point donné parallèlement à une droite donnée de position.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

## PROPOSITIO I.

Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα  
δίδεται.

Ἐστω δεδομένα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι  
τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς.

Datarum magnitudinum ratio inter se datur.

Sint datæ magnitudines Α, Β; dico ipsius  
Α ad Β rationem esse datam.

A\_\_\_\_\_

B\_\_\_\_\_

Γ\_\_\_\_\_

Δ\_\_\_\_\_

Ἐπεὶ γὰρ δίδεται τὸ Α, δυνατόν ἐστίν αὐτῷ  
ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ Γ.  
Πάλιν ἐπεὶ δεδομένον ἐστὶ τὸ Β, δυνατόν ἐστίν  
αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ  
Δ. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ, τὸ δὲ Β  
τῷ Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως<sup>1</sup> τὸ Β  
πρὸς τὸ Δ· ἐναλλάξ ἄρα<sup>2</sup> ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως  
τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. Τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος  
ἐστὶ δοθείς· ὁ αὐτὸς γὰρ αὐτῷ πεπορίσθαι ὁ τοῦ  
Γ πρὸς τὸ Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>3</sup>.

Quoniam enim data est Α, possibile est illi  
æqualem invenire. Inveniatur, et sit Γ. Rur-  
sus, quoniam data est Β, possibile est ipsi  
æqualem invenire. Inveniatur, et sit Δ. Quo-  
niam igitur æqualis est quidem Α ipsi Γ, Β  
vero ipsi Δ; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ;  
permutando igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Ipsius  
igitur Α ad Β ratio est data; eadem enim  
eidem inventa est, ea ipsius Γ ad Δ. Quod  
oportebat ostendere.

## PROPOSITION I.

La raison qu'ont entre elles des grandeurs données, est donnée.

Que les grandeurs Α, Β soient données; je dis que la raison de Α à Β est donnée.

Car puisque Α est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit γ. De plus, puisque Β est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit Δ. Puisque Α est égal à γ, et que Β est égal à Δ, la grandeur Α sera à γ comme Β est à Δ; et, par permutation, Α sera à Β comme γ est à Δ (16. 5). La raison de Α à Β est donc donnée (déf. 2); car on lui en a trouvé une qui est la même, savoir, la raison de γ à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Εάν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλό τι μέγεθος λόγον ἔχη δεδομένον, δέδοται καὶ αὐτὸ τῷ μεγέθει.

Si data magnitudo ad aliam quamdam magnitudinem rationem habeat datam, datur et illa magnitudine.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ Α πρὸς ἄλλό τι μέγεθος τὸ Β λόγον ἔχεν· δέδοται δὲ λέγω ὅτι δέδοται τὸ Β τῷ μεγέθει.

Data enim magnitudo A ad aliam quamdam magnitudinem B rationem habeat datam; dico dari ipsam B magnitudine.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ Δ \_\_\_\_\_

Επεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ἐπεὶ δέδοται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ τὴν ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ λόγος. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Ἰσον δὲ τὸ Α τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Β τῷ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Β μέγεθος, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ Δ.

Quoniam enim data est A, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit Γ. Et quoniam data est ipsius A ad B ratio, ita enim supponitur, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ipsius Γ ad Δ ratio. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ; permutando igitur est ut A ad Γ ita B ad Δ. Æqualis autem A ipsi Γ; æqualis igitur et B ipsi Δ; data igitur est B magnitudo, æqualis enim ipsi inventa est ipsa Δ.

PROPOSITION II.

Si une grandeur donnée a une raison donnée avec une autre grandeur, celle-ci est donnée de grandeur.

Que la grandeur donnée A ait une raison donnée avec une autre grandeur B; je dis que B est donné de grandeur.

Car puisque A est donné, il est possible de lui trouver une grandeur égale (déf. I); qu'elle soit trouvée, et que ce soit Γ. Et puisque la raison de A à B est donnée, par supposition, il est possible de lui trouver une raison qui soit la même. Qu'elle soit trouvée, et que ce soit la raison de Γ à Δ. Puisque A est à B comme Γ est à Δ, par permutation, A sera à Γ comme B est à Δ. Mais A est égal à Γ; donc B est égal à Δ; la grandeur B est donc donnée, puisqu'on a trouvé son égale Δ (déf. I).



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

## PROPOSITIO III.

Εάν δεδομένα μεγέθη ὅποσαοῦν συντεθῇ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ ὅποσαοῦν δεδομένα μεγέθη, τὰ  $AB$ ,  $BΓ$ . λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐκ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  συγκείμενον τὸ  $ΑΓ$  δεδομένον ἔστί.

Si datae magnitudines quotlibet componantur, et ex ipsis composita magnitudo data erit.

Componantur enim quotlibet datae magnitudines  $AB$ ,  $BΓ$ ; dico et ipsam  $ΑΓ$  ex ipsis  $AB$ ,  $BΓ$  compositam datam esse.



Επεὶ γὰρ δέδοται τὸ  $AB$ , δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ  $ΔΕ$ . Πάλιν ἐπεὶ δέδοται τὸ  $BΓ$ , δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ  $EZ$ . Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $AB$  τῷ  $ΔΕ$ , τὸ δὲ  $BΓ$  τῷ  $EZ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $ΑΓ$  ὅλον τῷ  $ΔΖ$  ἐστὶν ἴσον. δέδοται ἄρα τὸ  $ΑΓ$ , ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ  $ΔΖ$ .

Quoniam enim data est  $AB$ , possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit  $ΔΕ$ . Rursus quoniam datur  $BΓ$ , possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit  $EZ$ . Quoniam igitur  $AB$  æqualis est ipsi  $ΔΕ$ ,  $BΓ$  vero ipsi  $EZ$ ; tota igitur  $ΑΓ$  toti  $ΔΖ$  est æqualis; datur igitur  $ΑΓ$ , æqualis enim ipsi inventa est  $ΔΖ$ .

## PROPOSITION III.

Si tant de grandeurs données qu'on voudra sont réunies, la grandeur composée de ces grandeurs sera donnée.

Que tant de grandeurs données qu'on voudra,  $AB$ ,  $BΓ$  soient réunies; je dis que la grandeur  $ΑΓ$ , composée des grandeurs  $AB$ ,  $BΓ$  est donnée.

Car puisque la grandeur  $AB$  est donnée, il est possible de trouver son égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit  $ΔΕ$ . De plus, puisque la grandeur  $BΓ$  est donnée, il est possible de trouver son égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit  $EZ$ . Puisque  $AB$  est égal à  $ΔΕ$ , et  $BΓ$  égal à  $EZ$ , la grandeur entière  $ΑΓ$  sera égale à la grandeur entière  $ΔΖ$ . Donc  $ΑΓ$  est donné, puisqu'on a trouvé son égale  $ΔΖ$  (déf. 1).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

## PROPOSITIO IV.

Εάν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.

Απὸ γὰρ δεδομένου μεγέθους τοῦ AB δεδομένον μέγεθος ἀφηρήσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΒ δεδομένον ἐστίν.

Si a datâ magitudine data magnitudo auferatur, reliqua data erit.

Etenim a datâ mugnitudine AB data magnitudo auferatur ΑΓ; dico et reliquam ΓΒ datam esse.



Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ AB, δυνατόν ἐστίν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πέποιρισθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΖ. Πάλιν, ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΓ, δυνατόν ἐστίν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. Πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AB τῷ ΔΖ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΒ λοιπῷ τῷ ΕΖ ἐστὶν ἴσον<sup>2</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΓΒ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ ΕΖ.

Quoniam enim data est AB, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ΔΖ. Rursus, quoniam data est ΑΓ, possibile est ipsi æqualem invenire. Inveniatur, et sit ΔΕ. Quoniam igitur æqualis est AB quidem ipsi ΔΖ, ΑΓ vero ipsi ΔΕ; reliqua igitur ΓΒ reliquæ ΕΖ est æqualis; data est igitur ΓΒ, æqualis enim ipsi inventa est ΕΖ.

## PROPOSITION IV.

Si d'une grandeur donnée, on retranche une grandeur donnée, la grandeur restante sera donnée.

De la grandeur donnée AB, soit retranchée la grandeur donnée ΑΓ; je dis que la grandeur restante ΓΒ est aussi donnée.

Car puisque la grandeur AB est donnée, il est possible de trouver son égale (déf. 1); qu'elle soit trouvée, et que ce soit ΔΖ. De plus, puisque la grandeur ΑΓ est donnée, il est possible de trouver son égale; qu'elle soit trouvée, et que ce soit ΔΕ. Puisque AB est égal à ΔΖ, et ΑΓ égal à ΔΕ, le reste ΓΒ sera égal au reste ΕΖ. Donc ΓΒ est donné (déf. 1), puisqu'on a trouvé son égal ΕΖ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

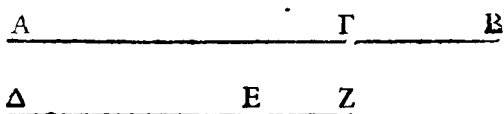
## PROPOSITIO V.

Εάν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον<sup>1</sup> ἔξει δεδομένον.

Μέγεθος γάρ τὸ AB πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ AG λόγον ἔχεται δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ BG λόγον ἔχει δεδομένοι.

Si magnitudo ad suū ipsius aliquam partem rationem habeat datam, et ad reliquam rationem habebit datam.

Magnitudo enim AB ad suū ipsius partem AG rationem habeat datam; dico et illam ad reliquam BG rationem habere datam.



Κείσθω γάρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔZ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθείς ὁ τοῦ BA πρὸς τὸ AG, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω<sup>2</sup> ὁ τοῦ ZΔ πρὸς ΔE· λόγος ἄρα ἔστιν ὁ τοῦ ZΔ πρὸς ΔE δοθείς. Δοθέν διὰ τὸ ZΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΔE· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EZ δοθέν ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔZ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔZ πρὸς τὸ ZE δοθείς ἐστὶ<sup>3</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΔZ πρὸς ΔE οὕτως καὶ τὸ BA πρὸς AG· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔZ πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ BG. Λόγος δὲ τοῦ ΔZ πρὸς ZE δοθείς ἐστίν<sup>4</sup>, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ BG δοθείς ἐστίν<sup>5</sup>.

Exponatur enim data magnitudo ΔZ. Et quoniam ratio est data ipsius BA ad AG, eadem huic inveniatur ratio ipsius ZΔ ad ΔE; ratio igitur est ipsius ZΔ ad ΔE data. Data autem ZΔ. Data igitur et ΔE; et reliqua igitur EZ data est. Est autem et ΔZ data; ratio igitur ipsius ΔZ ad ZE data est. Et quoniam est ut ΔZ ad ΔE ita et BA ad AG; convertendo igitur est ut ΔZ ad ZE ita AB ad BG. Ratio autem ipsius ΔZ ad ZE data est, ut ostensum est; ratio igitur et ipsius AB ad BG data est.

## PROPOSITION V.

Si une grandeur a une raison donnée avec une de ses parties, elle aura aussi une raison donnée avec l'autre partie.

Que la grandeur AB ait une raison donnée avec sa partie AG; je dis qu'elle a aussi une raison donnée avec l'autre partie BG.

Car soit ΔZ une grandeur donnée. Puisque la raison de BA à AG est donnée, faisons en sorte que la raison de ZΔ à ΔE soit la même que celle-ci; la raison de ZΔ à ΔE sera donnée (déf. 2). Mais ΔZ est donné; donc ΔE est aussi donné (2). Le reste EZ est donc donné (4). Mais ZΔ est donné; la raison de ΔZ à ZE est donc donnée (1). Mais ΔZ est à ΔE comme BA est à AG; donc, par conversion, ΔZ est à ZE comme AB est à BG (19. 5). Mais la raison de ΔZ à ZE est donnée, ainsi qu'on l'a démontré; la raison de AB à BG est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

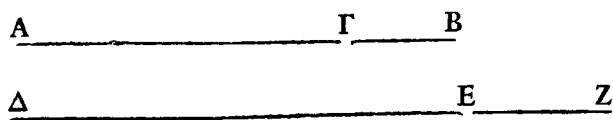
PROPOSITIO VI.

Εάν δύο μεγέθη συντεθῇ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν<sup>1</sup> λόγον ἔξει δεδομένον.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη τὰ<sup>2</sup> ΑΓ, ΓΒ, πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον. Λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ λόγον ἔχει δεδομένον.

Si duæ magnitudines componantur inter se rationem habentes datam, et tota ad utramque earum rationem habebit datam.

Componantur enim duæ magnitudines ΑΓ, ΓΒ, inter se rationem habentes datam; dico et totam ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ, ΓΒ rationem habere datam.



Εκκείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΕ. Καὶ ἐπειλόγος ἐστὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ<sup>3</sup> ΓΒ δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ. Ο ἄρα τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθεὶς. δοθέν δὲ τὸ ΔΕ. δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΕΖ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ δοθέν ἐστίν. ἔστιν οὖν ἑκατέρων τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθέν<sup>4</sup>. λόγος ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθεὶς. Καὶ ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ<sup>5</sup>. συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ<sup>6</sup>. καὶ ἀναστρέφαντι ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ<sup>7</sup>. Καὶ

Exponatur enim data magnitudo ΔΕ. Et quoniam ratio est ipsius ΑΓ ad ΓΒ data, eadem huic fiat ratio ipsius ΔΕ ad ΕΖ. Ergo ipsius ΔΕ ad ΕΖ ratio est data. Data autem ΔΕ; data igitur et ΕΖ; et tota igitur ΔΖ data est; est autem utraque ipsarum ΔΕ, ΕΖ data; ratio igitur ipsius ΔΖ ad utramque ipsarum ΔΕ, ΕΖ data. Et quoniam est ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΔΕ ad ΕΖ; componendo igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΖ ad ΖΕ; et convertendo ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΔΖ ad ΔΕ. Et

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs qui ont entre elles une raison donnée sont réunies, la grandeur entière aura une raison donnée avec chacune d'elles.

Ajoutons les deux grandeurs ΑΓ, ΓΒ qui ont entre elles une raison donnée; je dis que la grandeur entière ΑΒ a une raison donnée avec chacune des grandeurs ΑΓ, ΓΒ.

Car soit ΔΕ une grandeur donnée. Puisque la raison de ΑΓ à ΓΒ est donnée, faisons en sorte que la raison de ΔΕ à ΕΖ soit la même que celle-ci. La raison de ΔΕ à ΕΖ sera donnée (déf. 1). Mais ΔΕ est donné; donc ΕΖ est donné (2). La droite entière ΔΖ est donc donnée (1 et 3). Mais chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ est donnée; la raison de ΔΖ avec chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ est donc donnée (1 et 3). Mais ΑΓ est à ΓΒ comme ΔΕ est à ΕΖ; donc, par addition, ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΖ est à ΖΕ (18. 5) donc, par conversion, ΑΒ sera à ΑΓ comme ΔΖ est à ΔΕ (cor.

ἐπεὶ ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ οὕτως  
τὸ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ· λόγος ἄρα καὶ  
τοῦ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ δοθεὶς.

quoniam ut ΔΖ ad utramque ipsarum ΔΕ, ΕΖ  
ita ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ, ΓΒ; ratio  
igitur et ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum ΑΓ,  
ΓΒ data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

Εὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον  
διαιρεθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων δεδομένον  
ἐστίν.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ ΑΒ εἰς δεδομένον  
λόγον διηρήσθω τὴν τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΒ· λέγω ὅτι  
ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ δοθέν ἐστίν.

## PROPOSITIO VII.

Si data magnitudo in datâ ratione secetur,  
utrumque segmentorum datum est.

Data enim magnitudo ΑΒ in datâ ratione  
secetur, in ratione ipsius ΑΓ ad ΓΒ; dico utram-  
que ipsarum ΑΓ, ΓΒ datam esse.

A \_\_\_\_\_ Γ \_\_\_\_\_ B

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθεὶς·  
λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ  
δοθεὶς. Δοθέν δὲ τὸ ΑΒ· δοθέν ἄρα καὶ ἑκάτερον  
τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Quoniam enim ratio est ipsus ΑΓ ad ΓΒ data;  
ratio igitur et ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum  
ΑΓ, ΓΒ data. Data autem ΑΒ; data igitur  
et utraque ipsarum ΑΓ, ΓΒ.

19. 5 ); et puisque ΔΖ est à chacune des grandeurs ΔΕ, ΕΖ comme ΑΒ est à chacune  
des grandeurs ΑΓ, ΓΒ; la raison de ΑΒ à chacune des grandeurs ΑΓ, ΓΒ est donc  
donnée.

## PROPOSITION VII.

Si une grandeur donnée est partagée en une raison donnée, chacun des  
segments est donné.

Que la grandeur donnée ΑΒ soit partagée en une raison donnée qui soit celle  
de ΑΓ à ΓΒ; je dis que chacun des segments ΑΓ, ΓΒ est donné.

Car puisque la raison de ΑΓ à ΓΒ est donnée, la raison de ΑΒ à chacun des seg-  
ments ΑΓ, ΓΒ est donnée (6). Mais ΑΒ est donné; chacun des segments ΑΓ, ΓΒ est  
donc donné (2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Γ πρὸς τὸ Β λόγον δεδομένον. Λέγω ὅτι καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Γ λόγον ἔξει δεδομένον.

Quæ ad idem rationem habent datam, et inter se rationem habebunt datam.

Habeat enim utraque ipsarum Α, Γ ad Β rationem datam; dico et Α ad Γ rationem habituram esse datam.

|        |        |
|--------|--------|
| A_____ | Δ_____ |
| Β_____ | Ε_____ |
| Γ_____ | Ζ_____ |

Ἐστω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ Δ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ε. Δοθέν δὲ τὸ Δ δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. Πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ δοθείς<sup>3</sup>. Δοθέν δὲ τὸ Ε δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ζ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν λόγος ἄρα τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Sit enim data magnitudo Δ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β data, eadem huic fiat ratio ipsius Δ ad Ε. Data autem Δ; data igitur et Ε. Rursus, quoniam ratio est ipsius Β ad Γ data, eadem huic fiat ratio ipsius Ε ad Ζ data. Data autem Ε; data igitur et Ζ. Est autem et Δ data; ratio igitur ipsius Δ ad Ζ est data. Et quoniam est ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε; ut autem Β ad Γ ita Ε ad Ζ; ex æquo

PROPOSITION VIII.

Les grandeurs qui ont une raison donnée avec une même grandeur, auront entr'elles une raison donnée.

Que les grandeurs Α, Γ aient avec Β une raison donnée; je dis que Α aura avec Γ une raison donnée.

Car soit Δ une grandeur donnée. Puisque la raison de Α à Β est donnée, faisons en sorte que la raison de Δ à Ε soit la même que celle-ci. Mais Δ est donné; donc Ε est donné aussi (2). De plus, puisque la raison de Β à Γ est donnée, faisons en sorte que la raison de Ε à Ζ soit la même que celle-ci. Mais Ε est donné; donc Ζ l'est aussi. Mais Δ est donné; la raison de Δ à Ζ est donc donnée (1). Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et Β est à Γ comme Ε est à Ζ; donc, par éga-

διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Λόγος δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ δοθείς.

igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Ratio autem ipsius Δ ad Z data ; ratio igitur et ipsius A ad Γ data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εὰν δύο ἢ πλείονα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη πρὸς ἄλλὰ τινὰ μεγέθη λόγους δεδομένους, εἰ καὶ μὴ τοὺς αὐτοὺς· καὶ κεῖνα τὰ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγους ἔξει δεδομένους.

Δύο γὰρ ἢ πλείονα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, ἔχέτω δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλλὰ τινὰ μεγέθη τὰ Δ, Ε, Ζ λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Επεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, τοῦ δὲ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα<sup>1</sup> πρὸς

## PROPOSITIO IX.

Si duæ vel plures magnitudines inter se rationem habeant datam, habeant autem eadem magnitudines ad alias quasdam magnitudines rationes datas, et si non easdem, et illæ magnitudines inter se rationes habebunt datas.

Duæ enim vel plures magnitudines Α, Β, Γ inter se rationem habeant datam, habeant autem eadem magnitudines Α, Β, Γ ad alias quasdam magnitudines Δ, Ε, Ζ rationes datas, non autem easdem ; dico et Δ, Ε, Ζ magnitudines inter se rationem habituras esse datam.

Quoniam enim ratio est ipsius Α ad Β data, ipsius autem Α ad Δ ratio est data ; et ipsius Δ igitur ad Β ratio est data. Sed ipsius Β ad Ε ratio est data ; et ipsius Δ igitur ad Ε ratio est data.

lité, A est à Γ comme Δ est à Ζ (22. 5). Mais la raison de Δ à Ζ est donnée ; donc la raison de Α à Γ est donnée.

## PROPOSITION IX.

Si deux ou un plus grand nombre de grandeurs ont entr'elles une raison donnée, et si elles ont avec certaines autres grandeurs des raisons données, quoique non les mêmes, ces dernières grandeurs auront entre elles des raisons données.

Que deux ou un plus grand nombre de grandeurs Α, Β, Γ ayent entre elles une raison donnée, et que ces mêmes grandeurs Α, Β, Γ ayent avec certaines autres grandeurs Δ, Ε, Ζ des raisons données, mais non les mêmes ; je dis que les grandeurs Δ, Ε, Ζ auront entr'elles une raison donnée.

Car puisque la raison de Α à Β est donnée, et que la raison de Α à Δ est aussi donnée, la raison de Δ à Β sera donnée (8). Mais la raison de Β à Ε est donnée ; la raison



τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος

Rursus, quoniam ratio est ipsius Β ad Γ data, ipsius autem Β ad Ε ratio est data; et ipsius Ε igitur ad Γ ratio est data. Ipsius autem

|        |        |
|--------|--------|
| A_____ | Δ_____ |
| B_____ | Ε_____ |
| Γ_____ | Ζ_____ |

ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει δεδομένον.

Γ ad Ζ ratio est data; et ipsius Ε igitur ad Ζ ratio est data; ipsæ Δ, Ε, Ζ igitur inter se rationem habent datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ συναμφοτέρων τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ· καὶ εἰ τὸ συναμφοτέρων τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ λοιπὸν μετὰ τοῦ ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ἕτερον λόγον ἔχει δεδομένον, δοθέν ἐστὶ.

Si magnitudo magnitudine, datâ, major sit quam in ratione, et utraque simul eâdem, datâ, major erit quam in ratione; et si utraque simul eâdem, datâ, major sit quam in ratione, et reliqua eâdem, vel datâ, major est quam in ratione, vel reliqua cum consequente, ad quem altera rationem habet datam, data est.

raison de Δ à Ε est donc donnée (8). De plus, puisque la raison de Β à Γ est donnée, et que la raison de Β à Ε est aussi donnée, la raison de Ε à Γ sera donnée (8). Mais la raison de Γ à Ζ est donnée, la raison de Ε à Ζ est donc donnée. Les grandeurs Δ, Ε, Ζ ont donc entre elles une raison donnée.

PROPOSITION X.

Si une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre grandeur, d'une donnée, qu'en raison, leur somme sera plus grande à l'égard de la dernière, d'une donnée, qu'en raison; et si leur somme est plus grande à l'égard de la dernière, d'une donnée, qu'en raison, le reste sera plus grand à l'égard de la dernière d'une donnée qu'en raison, ou bien la somme du reste et de la grandeur suivante, avec laquelle la seconde grandeur a une raison donnée, est donnée.



Μεγέθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφοότερον τὸ AG τοῦ αὐτοῦ τοῦ GB, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Magnitudo enim AB magnitudine BG, datâ, major sit quam in ratione; dico et utramque simul AG eâdem GB, datâ, majorem esse quam in ratione.

A                      Δ                      B                      Γ

Επεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος τὸ AD· λοιποῦ ἄρα τοῦ DB πρὸς τὸ BG λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ GB λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ δοθέν τὸ AD· τὸ AG ἄρα τοῦ GB, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Quoniam enim AB ipsâ BG, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo AD; reliquæ igitur DB ad BG ratio est data; et componendo ipsius ΔΓ ad GB ratio est data. Et est data AD; ipsa AG igitur ipsâ GB, datâ, major est quam in ratione.

Πάλιν δὴ τὸ AG τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ λοιπὸν τὸ AB τοῦ αὐτοῦ τοῦ BG, ἥτοι δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ AB μετὰ τοῦ ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ BG λόγον ἔχει δοθέντα, δοθέν ἔστιν.

Rursus autem AG ipsâ BG, datâ, major sit quam in ratione; dico reliquam AB eâdem BG, vel datâ, majorem fore quam in ratione, vel ipsam AB cum consequente, ad quam ipsa BG rationem habet datam, datam esse.

Επεὶ γὰρ τὸ AG τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος. Τὸ δὴ

Quoniam enim AG ipsâ GB, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo.

A                      Δ                      B                      Γ

δοθὲν ἥτοι ἑλάσσον ἔστι τοῦ AB, ἢ μείζον. Εἴπω

Ipsa utique data vel minor est ipsâ AB, vel

Que la grandeur AB soit plus grande à l'égard de la grandeur BG, d'une donnée, qu'en raison; je dis que leur somme AG est plus grande à l'égard de GB d'une donnée qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de BG, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AD; la raison du reste DB à BG sera donnée (déf. 11); donc, par addition, la raison de ΔΓ à GB est donnée (6). Mais AD est donné; la grandeur AG est donc plus grande à l'égard de GB, d'une donnée, qu'en raison.

Mais de plus que AG soit plus grand à l'égard de BG, d'une donnée, qu'en raison; je dis que le reste AB sera plus grand à l'égard de BG, d'une donnée, qu'en raison, ou bien que la somme de AB et du conséquent, avec lequel BG a une raison donnée, est donnée.

Car puisque AG est plus grand à l'égard de GB, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée. La grandeur donnée sera ou plus petite ou plus

πρότερον ἑλάσσον, καὶ ἔστω τὸ  $\Lambda\Delta$  λοιποῦ ἄρα τοῦ  $\Delta\Gamma$  πρὸς  $\Gamma B$  λόγος ἐστὶ δοθείς· διελόντι ἄρα τοῦ  $\Delta B$  πρὸς  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθὲν τὸ  $\Lambda\Delta$ · τὸ  $AB$  ἄρα τοῦ  $B\Gamma$ , δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ. Ἀλλὰ δὴ τὸ δοθὲν μείζον

major. Sit primum minor, et sit  $\Lambda\Delta$ ; reliquæ igitur  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma B$  ratio est data; dividendo igitur ipsius  $\Delta B$  ad  $B\Gamma$  ratio est data. Et est data  $\Lambda\Delta$ ; ipsa  $AB$  igitur ipsâ  $B\Gamma$ , datâ, major est quam in ratione. At vero

$\underline{A \quad B \quad E \quad \Gamma}$

ἔστω τοῦ  $AB$ , καὶ κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ  $AE$ · λόγος ἄρα τοῦ<sup>3</sup> λοιποῦ τοῦ  $E\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Gamma B$  ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ ἀνάπαλιν τοῦ  $B\Gamma$  πρὸς τὸ  $E\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέφαντι ὁ τοῦ  $\Gamma B$  πρὸς  $BE$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ  $EB$  μετὰ τοῦ  $BA$  δοθὲν, ὅλον γὰρ<sup>4</sup> τὸ  $AE$  δοθὲν ἐστὶ· τὸ  $AB$  ἄρα μετὰ τοῦ ἑξῆς, πρὸς ὃ τὸ  $B\Gamma$  λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστὶ·

data major sit ipsâ  $AB$ , et ponatur ipsi æqualis ipsa  $AE$ ; ratio igitur reliquæ  $E\Gamma$  ad  $\Gamma B$  est data; quare et permutando ipsius  $B\Gamma$  ad  $E\Gamma$  ratio est data; et convertendo ipsius  $\Gamma B$  ad  $BE$  ratio est data. Et est  $EB$  cum  $BA$  data, tota enim  $AE$  data est; ipsa  $AB$  igitur cum consequente, ad quam ipsa  $B\Gamma$  rationem habet datam, data est.

grande que  $AB$ . Qu'elle soit d'abord plus petite, et que ce soit  $\Lambda\Delta$ ; la raison du reste  $\Delta\Gamma$  à  $\Gamma B$  sera donnée; donc, par soustraction, la raison de  $\Delta B$  à  $B\Gamma$  est donnée. Mais  $\Lambda\Delta$  est donné; donc  $AB$  est plus grand à l'égard de  $B\Gamma$ , d'une donnée, qu'en raison. Enfin que la grandeur donnée soit plus grande que  $AB$ , et supposons que  $AE$  lui est égal; la raison du reste  $E\Gamma$  à  $\Gamma B$  sera donnée; donc, par permutation, la raison de  $B\Gamma$  à  $E\Gamma$  est donnée; donc, par conversion, la raison de  $\Gamma B$  à  $BE$  est donnée (5). Mais la somme de  $EB$  et de  $BA$  est donnée, puisque la grandeur entière  $AE$  est donnée; la somme de  $AB$  et du conséquent, avec lequel  $B\Gamma$  a une raison donnée, est donc donnée.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Εάν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ συναμφοτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ. Καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συναμφοτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Μέγεθος γὰρ τὸ AB τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Επεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος τὸ AD<sup>1</sup>. λοιποῦ ἄρα τοῦ DB πρὸς τὸ BG λόγος ἐστὶ δοθείς. Ανάπαλιν<sup>2</sup> καὶ συνθέντι λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔB δοθείς. Ο αὐτός αὐτῷ γερονέτω ὁ τοῦ AD πρὸς τὸ ΔE· λόγος ἄρα καὶ<sup>3</sup> τοῦ AD πρὸς τὸ ΔE δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ AD· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΔE· ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ AE δοθέν ἔστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὅλου τοῦ AG πρὸς ὅλον τὸ EB

## PROPOSITIO XI.

Si magnitudo magnitudine, datâ, major sit quam in ratione, eadem et utrâque simul, datâ, major erit quam in ratione. Et si eadem utrâque simul, datâ, major sit quam in ratione, eadem et reliquâ, datâ, major erit quam in ratione.

Magnitudo enim AB ipsâ BG, datâ, major sit quam in ratione; dico et eam ipsâ AG, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsâ BG, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo AD; reliquæ igitur DB ad BG ratio est data. Invertendo igitur et componendo ratio est ipsius ΓΔ ad ΔB data. Eadem huic fiat ipsius AD ad ΔE; ratio igitur et ipsius AD ad ΔE data. Data autem AD; data igitur et ΔE; quare et reliqua AE data est. Est autem et totius AG ad totam EB ratio data; quare et ipsius EB ad AG

## PROPOSITION XI.

Si une grandeur est plus grande à l'égard d'une autre grandeur, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de leur somme, d'une donnée, qu'en raison; et si la première est plus grande à l'égard de leur somme, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Que la grandeur AB soit plus grande à l'égard de la grandeur BG, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de AG d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de BG, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AD; la raison du reste ΔB à BG sera donnée (déf. 11). Donc, par inversion et par addition, la raison de ΓΔ à ΔB est donnée (6). Faisons en sorte que la raison de AD à ΔE soit la même que celle-ci; la raison de AD à ΔE sera donnée. Mais AD est donné; donc ΔE est donné (2); le reste AE est donc donné (4). Mais la raison de la grandeur entière

λόγος δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ EB πρὸς τὸ<sup>4</sup> AG λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ AE· τὸ BA ἄρα τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ratio est data. Et est data AE; ipsa BA igitur ipsâ AG, datâ, major est quam in ratione.

A E Δ B Γ

Ἀλλὰ δὴ τὸ BA συναμφοτέρου τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ αὐτὸ τὸ AB καὶ τοῦ<sup>5</sup> λοιποῦ τοῦ BG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν<sup>6</sup> ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ AG, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ<sup>7</sup>, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ AE· λοιποῦ ἄρα τοῦ EB πρὸς τὸ AG λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ AG πρὸς τὸ EB λόγος ἐστὶ δοθείς. Ο αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντω ὁ τοῦ AΔ

At vero BA utrâque simul ipsâ AG, datâ, major sit quam in ratione; dico eandem AB et reliquâ BG, datâ, majorem futuram esse quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsâ AG, datâ, major est quam in ratione; auferatur data magnitudo AE; reliquæ igitur EB ad AG ratio est data; quare et ipsius AG ad EB ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius AΔ ad ΔE; et ipsius AΔ igitur ad

A E Δ B Γ

πρὸς τὸ ΔE<sup>8</sup>· καὶ τοῦ AΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔE<sup>9</sup> λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι τοῦ ΔA πρὸς τὸ AE λόγος ἐστὶ<sup>10</sup> δοθείς· καὶ ἀνάπαλιν τοῦ EA πρὸς τὸ AΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ δοθὲν τὸ EA· δοθὲν ἄρα καὶ ὅλον τὸ AΔ. Καὶ ἐπεὶ ὅλου τοῦ AG πρὸς

ΔE ratio est data; et convertendo ipsius ΔA igitur ad AE ratio est data; et invertendo ipsius EA ad AΔ ratio est data. Et data EA; data igitur et tota AΔ. Et quoniam totius AG

AG à la grandeur entière EB est donnée ( 12. 5 ); la raison de EB à AG est donc donnée. Mais AE est donné. Donc BA est plus grand à l'égard de AG, d'une donnée, qu'en raison ( déf. 11 ).

Mais que AB soit plus grand à l'égard de la somme AG, d'une donnée, qu'en raison; je dis que la grandeur AB sera plus grande à l'égard de l'autre grandeur BG d'une donnée qu'en raison.

Car puisque AB est plus grand à l'égard de AG, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AE, la raison du reste EB à AG sera donnée; la raison de AG à EB est donc donnée. Faisons en sorte que la raison de AΔ à ΔE soit la même que celle-ci; la raison de AΔ à ΔE sera donnée; donc, par conversion, la raison de ΔA à AE est donnée (5); donc, par inversion, la raison de EA à AΔ est donnée. Mais AE est donné; la grandeur entière AΔ est donc aussi donnée (2). Mais la raison de la grandeur entière AG à la grandeur entière EB est donnée;

ὅλον τὸ EB λόγος ἐστὶ δοθείς ὥν τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ<sup>11</sup> λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔσται δὴ<sup>12</sup> καὶ λοιποῦ τοῦ ΓΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΔ λόγος δοθείς· καὶ διελόντι τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ ΔΑ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ad totam EB ratio est data, quarum ipsius ΑΔ ad ΔΕ ratio est data; erit igitur et reliquæ ΓΔ ad reliquam ΒΔ ratio data; et dividendo ipsius ΓΒ ad ΒΔ ratio est data; quare et ΔΒ ad ΒΓ ratio est data. Et est data ΔΑ; ipsa ΑΒ igitur ipsâ ΒΓ, datâ, major est quam in ratione.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

## PROPOSITIO XII.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου ᾖ δοθέν, ᾖ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου δοθέν· τὸ πρῶτον τῷ τρίτῳ ἢτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ.

Si sint tres magnitudines, et prima quidem cum secundâ sit data, sit vero et secunda cum tertiâ data; prima tertiæ vel æqualis est, vel altera alterâ, datâ, major est.

Εστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ μετὰ τοῦ ΒΓ δοθέν ἔστω τὸ ΑΓ, τὸ δὲ

Sint tres magnitudines ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, et ipsa ΑΒ quidem cum ΒΓ data sit ΑΓ, ipsa vero

A ————— B ————— Γ ————— Δ

ΒΓ μετὰ τοῦ ΓΔ δοθέν ἔστω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἢτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν.

ΒΓ cum ΓΔ data sit ΒΔ; dico ipsam ΑΒ ipsi ΓΔ vel æqualem esse, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse.

et la raison de ΑΔ à ΕΔ est donnée; la raison du reste ΓΔ au reste ΒΔ est donc donnée; donc, par soustraction, la raison de ΓΒ à ΒΔ est donnée (6). La raison de ΔΒ à ΒΓ est donc donnée. Mais ΔΑ est donné; donc ΑΒ est plus grand à l'égard de ΒΓ, d'une donnée, qu'en raison.

## PROPOSITION XII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première avec la seconde est donnée, et si la seconde avec la troisième est aussi donnée, la première est ou égale à la troisième, ou l'une est plus grande que l'autre, d'une donnée.

Soient les trois grandeurs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ; que ΑΒ avec ΒΓ, c'est-à-dire ΒΔ soit aussi donné; je dis que ΑΒ est ou égal à ΓΔ ou que l'une est plus grande que l'autre, d'une donnée.

Επεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΔ·  
τὰ δὲ δοθέντα ἢτοι ἴσα ἐστίν, ἢ ἀνίστα. Εἴτω

Quoniam enim data est utraque ipsarum ΑΓ,  
ΒΔ; datæ igitur vel sunt æquales, vel inæqua-

A E B Γ Δ

πρότερον ἴσα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ τῷ ΒΔ. Κοινὸν  
ἀφηρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ  
ΓΔ ἴσον ἐστί. Μὴ ἔστω δὲ ἴσα, ἀλλ' ἔστω μείζον  
τὸ ΑΓ τοῦ ΒΔ, καὶ κείσθω τῷ ΒΔ ἴσον τὸ ΓΕ.  
δοθέν δὲ τὸ ΒΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΓΕ. Εἴστι δὲ  
καὶ ὅλον τὸ ΑΓ δοθέν, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕ  
δοθέν ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΒΔ,  
κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΕ λοι-  
πῷ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ ΑΕ· τὸ  
ΑΒ ἄρα τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἐστίν.

les. Sint primum æquales; æqualis igitur ΑΓ ipsi  
ΒΔ. Communis auferatur ΒΓ; reliqua igitur ΑΒ,  
reliquæ ΓΔ æqualis est. Non sint autem æqua-  
les, sed sit major ΑΓ ipsâ ΒΔ, et ponatur ipsi  
ΒΔ æqualis ΓΕ. Data autem ΒΔ; data igitur  
et ΓΕ. Est autem et tota ΑΓ data; et reliqua  
igitur ΑΕ data est. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi  
ΒΔ, communis auferatur ΒΓ; reliqua igitur ΒΕ  
reliquæ ΓΔ æqualis est. Et est data ΑΕ; ipsa  
igitur ΑΒ ipsâ ΓΔ, datâ, major est.

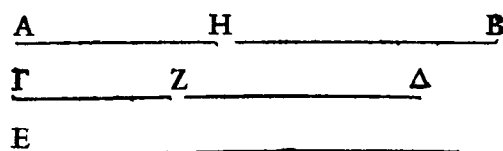
Car puisque chacune des grandeurs ΑΓ, ΒΔ est donnée, ces grandeurs données  
seront ou égales ou inégales. Qu'elles soient premièrement égales. Puisque ΑΓ  
est égal à ΒΔ, si l'on retranche la partie commune ΒΓ, le reste ΑΒ sera égal au  
reste ΓΔ. Mais qu'elles ne soient pas égales, et que la droite ΑΓ soit plus  
grande que ΒΔ, et faisons ΓΕ égal à ΒΔ. Puisque ΒΔ est donné, la grandeur ΓΕ sera  
donnée. Mais la grandeur entière ΑΓ est donnée; le reste ΑΕ est donc donné (4).  
Mais ΕΓ est égal à ΒΔ; donc, si nous retranchons la partie commune ΒΓ, le reste  
ΒΕ sera égal au reste ΓΔ. Mais ΑΕ est donné; donc ΑΒ est plus grand que ΓΔ,  
d'une donnée (déf. 9).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

## PROPOSITIO XIII.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Εστω τρία μεγέθη τὰ AB, ΓΔ, E, καὶ τὸ μὲν AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ E, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ AB τοῦ E, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Επεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ E, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθείς τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ<sup>1</sup>, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γηγονέτω ὁ τοῦ AH πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ<sup>2</sup> τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ AH δοθείς. Δοθέν

Si sint tres magnitudines, et prima quidem ad secundam rationem habeat datam, secunda autem tertiâ, datâ, major sit quam in ratione; et prima secundâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint tres magnitudines AB, ΓΔ, E, et AB quidem ad ΓΔ rationem habeat datam, ipsa vero ΓΔ ipsâ E, datâ, major sit quam in ratione; dico et ipsam AB ipsâ E, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim ΓΔ ipsâ E, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΖ; reliquæ igitur ΔΖ ad E ratio est data. Et quoniam ratio est data ipsius AB ad ΓΔ, eadem huic fiat ratio ipsius AH ad ΓΖ; ratio igitur et ipsius ΓΖ ad AH data. Data autem ΓΖ; data

## PROPOSITION XIII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première a une raison donnée avec la seconde, et si la seconde est plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison.

Soient les trois grandeurs AB, ΓΔ, E; que AB ait avec ΓΔ une raison donnée, et que ΓΔ soit plus grand à l'égard de E, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de E, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque ΓΔ est plus grand à l'égard de E, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΓΖ; la raison du reste ΔΖ à E sera donnée (déf. 11). Et puisque la raison de AB à ΓΔ est donnée, faisons en sorte que la raison de AH à ΓΖ soit la même que celle-ci; la raison de ΓΖ à AH sera donnée. Mais ΓΖ



δὲ τὸ ΓΖ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα<sup>3</sup>  
τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.  
Τοῦ δὲ ΔΖ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ  
ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ  
δοθέν τὸ ΑΗ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον  
ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ δεδο-  
μένον, καὶ προστεθῇ ἐκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον  
μέγεθος· τὰ ὅλα πρὸς ἀλλήλα ἥτοι λόγον ἔξει  
δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι,  
μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

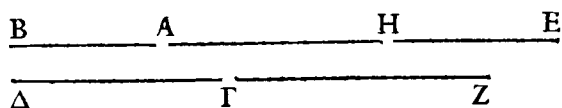
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλα λόγον  
ἔχῃτω δεδομένον, καὶ προσκείσθω ἐκατέρῳ αὐτῶν

igitur et ΑΗ; et reliquæ igitur ipsius ΗΒ ad  
reliquam ΔΖ ratio est data. Ipsius autem ΔΖ ad  
Ε ratio est data; et ipsius ΗΒ igitur ad Ε ratio  
est data. Et est data ΑΗ; ipsa ΑΒ igitur ipsâ  
Ε, datâ, major est quam in ratione.

PROPOSITIO XIV.

Si duæ magnitudines inter se rationem ha-  
beant datam, et adjiciatur utrique ipsarum data  
magnitudo; totæ inter se vel rationem habe-  
bunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit  
quam in ratione.

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ inter se  
rationem habeant datam, et adjiciatur utrique



δεδομένον μέγεθος, τό τε ΑΕ καὶ τὸ ΓΖ· λέγω  
ὅτι τὰ<sup>2</sup> ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἀλλήλα ἥτοι λόγον  
ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι,  
μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ipsarum data magnitudo, et ΑΕ et ΓΖ; dico totas  
ΕΒ, ΖΔ ad inter se vel rationem habere da-  
tam; vel alteram alterâ, datâ, majorem esse  
quam in ratione.

est donné; donc ΑΗ est donné (2); la raison du reste ΗΒ au reste ΔΖ est donc  
donnée (19. 5). Mais la raison de ΔΖ à Ε est donnée; la raison de ΗΒ à Ε est  
donc donnée (8). Mais ΑΗ est donné; donc ΑΒ est plus grand à l'égard de Ε, d'une  
donnée, qu'en raison.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs ont entre elles une raison donnée, et si à chacune d'elles  
on ajoute une grandeur donnée, les grandeurs entières auront entr'elles une  
raison donnée, ou bien l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée,  
qu'en raison.

Que les deux grandeurs ΑΒ, ΓΔ aient entre elles une raison donnée; ajoutons  
à chacune d'elles une grandeur donnée, savoir, ΑΕ et ΓΖ; je dis que les gran-  
deurs entières ΕΒ, ΖΔ, auront entre elles une raison donnée, ou bien que l'une  
sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.



Επεὶ γὰρ δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΑ, ΖΓ, λόγος ἄρα τοῦ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ<sup>3</sup>. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΑ πρὸς τὸ ΖΓ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΖ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΗΑ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΕΑ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΖΓ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΖΔ δοθείς. Καὶ ἔστι τὸ<sup>4</sup>, δοθέν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

Εάν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ λοιπὰ πρὸς ἀλλήλα ἢ τοὶ λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

Car puisque chacune des grandeurs ΕΑ, ΖΓ est donnée, la raison de ΕΑ à ΖΓ sera donnée (1); donc si cette raison est la même que celle de ΑΒ à ΓΔ, la raison de la grandeur entière ΕΒ à la grandeur entière ΖΔ sera donnée (12. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΗΑ est à ΓΖ; la raison de ΗΑ à ΓΖ sera donnée. Mais ΓΖ est donné; donc ΗΑ est donné (2). Mais ΕΑ est donné; le reste ΕΗ est donc donné (4). Mais ΑΒ est à ΓΔ comme ΗΑ est à ΖΓ; la raison de ΗΒ à ΖΔ est donc donnée (12. 5). Mais ΕΗ est donné; donc ΕΒ est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

## PROPOSITION XV.

Si deux grandeurs ont entre elles une raison donnée, et si l'on retranche de chacune une grandeur donnée, les restes, ou auront entre eux une raison donnée, ou bien l'un sera plus grand à l'égard de l'autre d'une donnée qu'en raison.

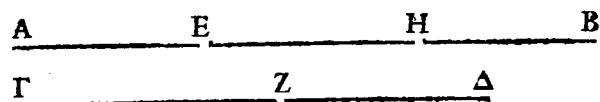
Quoniam enim data est utraque ipsarum ΕΑ, ΖΓ, ratio igitur ipsius ΕΑ ad ΖΓ data. Et si quidem eadem quæ ipsius ΑΒ ad ΓΔ, erit et totius ΕΒ ad totam ΖΔ ratio data. Non sit autem eadem, et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΗΑ ad ΓΖ; ratio igitur et ipsius ΗΑ ad ΖΓ data. Data autem ΓΖ; data igitur et ΗΑ. Est autem et ΕΑ data; et reliqua igitur ΕΗ data est. Et quoniam ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΗΑ ad ΖΓ; ratio igitur et ipsius ΗΒ ad ΖΔ data. Et est data ΕΗ; ipsa ΕΒ igitur ipsâ ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

## PROPOSITIO XV.

Si duæ magnitudines inter se rationem habeant datam, et auferatur ab utrâque ipsarum data magnitudo; reliquæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεται δεδομένον, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' <sup>2</sup> ἐκαστέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, ἀπὸ μὲν τοῦ  $AB$  τὸ  $AE$ , ἀπὸ δὲ τοῦ  $\Gamma\Delta$  τὸ  $\Gamma Z$ . λέγω ὅτι τὰ λοιπὰ τὰ  $EB$ ,  $Z\Delta$  πρὸς ἄλληλα ἢτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται <sup>3</sup> ἢ ἐν λόγῳ.

Duæ enim magnitudines  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  inter se rationem habeant datam, et auferatur ab utraque ipsarum data magnitudo, ab ipsâ quidem  $AB$  ipsa  $AE$ , ab ipsâ vero  $\Gamma\Delta$  ipsa  $\Gamma Z$ ; dico reliquas  $EB$ ,  $Z\Delta$  inter se vel rationem habituras esse datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem fore quam in ratione.



Ἐπεὶ γὰρ ἐκάτερον τῶν  $AE$ ,  $\Gamma Z$  δοθέν ἐστι, λόγος ἄρα τοῦ  $AE$  πρὸς τὸ <sup>3</sup>  $\Gamma Z$  ἐστὶ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ  $AB$  πρὸς τὸ <sup>4</sup>  $\Gamma\Delta$ , ἔσται καὶ λοιποῦ τοῦ  $EB$  πρὸς λοιπὸν τὸ  $Z\Delta$  λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτός, καὶ ποιήσθω ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ <sup>5</sup>  $\Gamma\Delta$  οὕτως τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Gamma Z$ . Λόγος δὲ τοῦ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$  δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Gamma Z$  δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ  $\Gamma Z$ · δοθέν ἄρα καὶ τὸ  $AH$ . Ἔστι δὲ καὶ τὸ  $AE$  δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ  $EH$  δοθέν ἐστὶ <sup>6</sup>. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$  οὕτως τὸ  $AH$  πρὸς τὸ  $\Gamma Z$ · λοιποῦ ἄρα τοῦ  $HB$  πρὸς λοιπὸν τὸ  $Z\Delta$

Quoniam enim utraque ipsarum  $AE$ ,  $\Gamma Z$  data est, ratio igitur ipsius  $AE$  ad  $\Gamma Z$  est data. At vero si eadem est quæ ipsius  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$ , erit et reliquæ  $EB$  ad reliquam  $Z\Delta$  ratio data. Non sit autem eadem, et fiat ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $AH$  ad  $\Gamma Z$ . Ratio autem ipsius  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  data; ratio igitur et ipsius  $AH$  ad ipsam  $\Gamma Z$  data. Data autem  $\Gamma Z$ ; data igitur et  $AH$ . Est autem et  $AE$  data; et reliqua igitur  $EH$  data est. Et quoniam ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $AH$  ad  $\Gamma Z$ ; reliquæ igitur  $HB$  ad reliquam  $Z\Delta$  ratio est data. Et est data  $EH$ ;

Que les deux grandeurs  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  aient entre elles une raison donnée; retranchons de chacune d'elles une grandeur donnée, c'est-à-dire de  $AB$  retranchons  $AE$ , et de  $\Gamma\Delta$  retranchons  $\Gamma Z$ ; je dis que les restes  $EB$ ,  $Z\Delta$  auront entre eux une raison donnée, ou bien que l'un sera plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque chacune des grandeurs  $AE$ ,  $\Gamma Z$  est donnée, la raison de  $AE$  à  $\Gamma Z$  sera donnée. Donc si cette raison est la même que celle de  $AB$  à  $\Gamma\Delta$ , la raison du reste  $EB$  au reste  $Z\Delta$  sera donnée (19. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que  $AB$  soit à  $\Gamma\Delta$  comme  $AH$  est à  $\Gamma Z$ . Puisque la raison de  $AB$  à  $\Gamma\Delta$  est donnée, la raison de  $AH$  à  $\Gamma Z$  est aussi donnée. Mais  $\Gamma Z$  est donné; donc  $AH$  est donné (2). Mais  $AE$  est donné; le reste  $EH$  est donc donné (4). Mais  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $AH$  est à  $\Gamma Z$ ; la raison du reste  $HB$  au reste  $Z\Delta$  est donc

λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθέν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ  
ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

ipsa EB igitur ipsâ ZΔ, datâ, major est quam in  
ratione.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

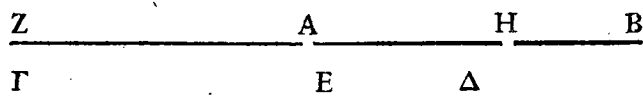
Εάν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ δεδο-  
μένον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐνὸς αὐτῶν δεδομένον  
μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τῷ δὲ ἑτέρῳ αὐτῶν δεδομένον  
μέγεθος προστεθῇ· τὸ ὅλον τοῦ λοιποῦ, δοθέν-  
τι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἔχέτω δε-  
δομένον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ<sup>1</sup> ΓΔ δεδομένον μέγεθος  
ἀφηρήσθω τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ΑΒ δεδομένον μέγεθος  
προσκέισθω τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ τοῦ<sup>2</sup>  
λοιποῦ τοῦ ΕΔ δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

## PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines inter se rationem ha-  
beant datam, et ab unâ quidem ipsarum data  
magnitudo auferatur, alteri autem ipsarum data  
magnitudo adjiciatur; tota reliquâ, datâ, major  
erit quam in ratione.

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ rationem  
habeant datam, et a ΓΔ quidem data magni-  
tudo auferatur ΓΕ, ipsi vero ΑΒ data magni-  
tudo adjiciatur ΖΑ; dico totam ΖΒ reliquâ  
ΕΔ, datâ, majorem esse quam in ratione.



Επεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ<sup>3</sup> ΓΔ  
δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ<sup>4</sup>

Quoniam enim ratio est ipsius ΑΒ ad ΓΔ data,  
eadem huic fiat ratio ipsius ΑΗ ad ΓΕ; ratio

donnée (19. 5). Mais ΕΗ est donné; donc ΕΒ est plus grand à l'égard de ΖΔ,  
d'une donnée, qu'en raison.

## PROPOSITION XVI.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée; si de l'une d'elles on  
retranche une grandeur donnée, et si l'on ajoute à l'autre une grandeur donnée,  
la grandeur entière sera plus grande à l'égard de la grandeur restante, d'une  
donnée, qu'en raison.

Que les deux grandeurs ΑΒ, ΓΔ ayent une raison donnée; soit retranché de  
ΓΔ une grandeur donnée ΓΕ, et soit ajouté à ΑΒ une grandeur donnée ΖΑ; je  
dis que la grandeur entière ΖΒ est plus grande à l'égard de la grandeur restante  
ΕΔ, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque la raison de ΑΒ à ΓΔ est donnée, faisons en sorte que la raison de  
ΑΗ à ΓΕ soit la même que celle-ci; la raison de ΑΗ à ΓΕ sera donnée (déf. 2). Mais

ΓΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΕ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΖ δοθέν· ὅλον ἄρα τὸ ΖΗ δοθέν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· καὶ λοιποῦ ἄρα<sup>6</sup> τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ ΗΖ· τὸ ΖΒ ἄρα τοῦ ΕΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur est ipsius ΑΗ ad ΓΕ data. Data autem ΓΕ; data igitur et ΑΗ. Est autem et ΑΖ data; tota igitur ΖΗ data est. Et quoniam ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΗ ad ΓΕ; et reliquæ igitur ΗΒ ad reliquam ΕΔ ratio est data. Et est data ΗΖ; ipsa ΖΒ igitur ipsâ ΕΔ, datâ, major est quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

PROPOSITION XVII.

Εὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ, ἡ δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Si sint tres magnitudines, et prima secundâ, datâ, major sit quam in ratione, sit autem et tertia eâdem, datâ, major quam in ratione; prima ad tertiam vel rationem habebit datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, ΔΕ, καὶ ἐκάτερον τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἐστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΔΕ ἦτοι πρὸς ἄλ-

Sint tres magnitudines ΑΒ, Γ, ΔΕ, et utraque ipsarum ΑΒ, ΔΕ ipsâ Γ, datâ, major sit quam in ratione; dico ipsas ΑΒ, ΔΕ vel inter

ΓΕ est donné; donc ΑΗ est donné (2). Mais ΑΖ est donné; la grandeur entière ΖΗ est donc donnée (3). Mais ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΗ est à ΓΕ; la raison du reste ΗΒ au reste ΕΔ est donc donnée (19. 5). Mais ΗΖ est donné; donc ΖΒ est plus grand à l'égard de ΕΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

PROPOSITION XVII.

Si l'on a trois grandeurs, si la première est plus grande à l'égard de la seconde, d'une donnée, qu'en raison, et si la troisième est aussi plus grande à l'égard de la seconde d'une donnée qu'en raison, la première aura avec la troisième une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

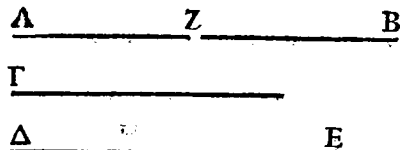
Soient les trois grandeurs ΑΒ, Γ, ΔΕ, et que chacune des grandeurs ΑΒ, ΔΕ soit plus grande à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que les gran-

ληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΔΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΕ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς·

se rationem habere datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim ΔΕ ipsâ Γ, datâ, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΔΗ; reliquæ igitur ΗΕ ad Γ ratio est data.



Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΒ ἄρα πρὸς τὸ ΗΕ λόγος ἐστὶ δοθείς<sup>1</sup>. Καὶ πρόσκειται αὐτοῖς δεδομένα μέγεθ' τὰ ΑΖ, ΔΗ· τὰ ὅλα ἄρα τὰ ΑΒ, ΔΕ ἥτοι πρὸς ἀλληλα<sup>2</sup> λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

Propter eadem utique et ipsius ΖΒ ad Γ ratio est data; et ipsius ΖΒ ad ΗΕ ratio est data. Et adjiciuntur ipsis datæ magnitudines ΑΖ, ΔΗ; totæ igitur ΑΒ, ΔΕ inter se vel rationem habent datam, vel altera alterâ, datâ, major est quam in ratione.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ιη'.

## PROPOSITIO XVIII.

Ἐὰν ᾖ τρία μέγεθ', ἐν δὲ αὐτῶν ἑκατέρου τῶν λοιπῶν, δοθέντι, μείζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· τὰ λοιπὰ δύο πρὸς ἀλληλα ἥτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Si sint tres magnitudines, una autem earum utraq̃ue reliquarum, datâ, major sit quam in ratione, reliquæ duæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

deurs ΑΒ, ΔΕ ont entr'elles une raison donnée, ou que l'une est plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

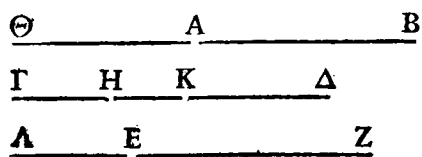
Car puisque ΔΕ est plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΔΗ; la raison du reste ΗΕ à Γ sera donnée (déf. 11). Semblablement la raison de ΖΒ à Γ est donnée; la raison de ΖΒ à ΗΕ est donc donnée (8). Mais les grandeurs données ΑΖ, ΔΗ sont ajoutées à celles-ci; les grandeurs entières ΑΒ, ΔΕ auront donc entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison (14).

## PROPOSITION XVIII.

Si l'on a trois grandeurs, et si l'une d'elles est plus grande à l'égard de chacune des deux autres, d'une donnée, qu'en raison, les deux autres auront entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ , ἐν δ' αὐ-  
τῶν τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ<sup>2</sup> ἑκατέρου τῶν λοιπῶν τῶν  $AB$ ,  
 $EZ$ , δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λίγω ὅτι  
τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $EZ$  ἥτοι λόγον ἔχει δεδομένον,  
ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ  
ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  $AB$ , δοθέντι, μείζον ἐστὶν  
ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ  $\Gamma\Theta$ .  
λοιποῦ ἄρα τοῦ  $H\Delta$  πρὸς τὸ  $AB$  λόγος ἐστὶ  
δοθείς. Ὁ αὐτὸς αὐτῷ γερονέτω ὁ τοῦ  $\Gamma\Theta$  πρὸς  
τὸ  $A\Theta$ · λόγος ἄρα καὶ τοῦ  $\Gamma\Theta$  πρὸς τὸ  $A\Theta$  δοθείς.



Δοθὲν δὲ τὸ  $\Gamma\Theta$ · δοθὲν ἄρα καὶ τὸ  $A\Theta$ · καὶ ὅλου  
τοῦ  $\Gamma\Delta$  πρὸς ὅλον τὸ  $\Theta B$  λόγος ἐστὶ δοθείς.  
Πάλιν ἐπεὶ τὸ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  $EZ$ , δοθέντι, μείζον ἐστὶν  
ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ  $\Gamma\Theta$ .  
λοιποῦ ἄρα<sup>3</sup> τοῦ  $K\Delta$  πρὸς τὸ<sup>4</sup>  $EZ$  λόγος ἐστὶ  
δοθείς. Ὁ αὐτὸς αὐτῷ γερονέτω, ὁ τοῦ  $\Gamma\Theta$  πρὸς  
τὸ<sup>5</sup>  $\Lambda E$ · λόγος ἄρα καὶ τοῦ  $\Gamma\Theta$  πρὸς τὸ  $\Lambda E$  δο-  
θείς. Δοθὲν δὲ τὸ  $\Gamma\Theta$ · δοθὲν ἄρα καὶ τὸ  $\Lambda E$ · καὶ  
ὅλου τοῦ  $\Gamma\Delta$  πρὸς ὅλον τὸ  $\Lambda Z$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

Sint tres magnitudines  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ , una  
autem earum  $\Gamma\Delta$  utrâque ipsarum  $AB$ ,  $EZ$ ,  
datâ, major sit quam in ratione; dico ipsam  
 $AB$  ad  $EZ$  vel rationem habere datam, vel al-  
teram alterâ, datâ, maiorem esse quam in  
ratione.

Quoniam enim  $\Gamma\Delta$  ipsâ  $AB$ , datâ, major  
est quam in ratione, auferatur data magni-  
tudo  $\Gamma\Theta$ ; reliquæ igitur  $H\Delta$  ad  $AB$  ratio est  
data. Eadem huic fiat ratio ipsius  $\Gamma\Theta$  ad  $A\Theta$ ;  
ratio igitur et ipsius  $\Gamma\Theta$  ad  $A\Theta$  data. Data

autem  $\Gamma\Theta$ ; data igitur et  $A\Theta$ ; et totius  $\Gamma\Delta$  ad  
totam  $\Theta B$  ratio est data. Rursus, quoniam  $\Gamma\Delta$   
ipsâ  $EZ$ , datâ, major est quam in ratione,  
auferatur data magnitudo  $\Gamma\Theta$ ; reliquæ igitur  
 $K\Delta$  ad  $EZ$  ratio est data. Eadem huic fiat ra-  
tio ipsius  $\Gamma\Theta$  ad  $\Lambda E$ ; ratio igitur et ipsius  $\Gamma\Theta$   
ad  $\Lambda E$  data. Data autem  $\Gamma\Theta$ ; data igitur et  
 $\Lambda E$ ; et totius  $\Gamma\Delta$  ad totam  $\Lambda Z$  ratio est data.

Soient les trois grandeurs  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ , et que l'une d'elles  $\Gamma\Delta$  soit plus grande  
à l'égard de chacune des deux autres  $AB$ ,  $EZ$ , d'une donnée, qu'en raison; je  
dis que  $AB$  aura avec  $EZ$  une raison donnée, ou que l'une sera plus grande à  
l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque  $\Gamma\Delta$  est plus grand à l'égard de  $AB$ , d'une donnée, qu'en raison, re-  
tranchons la donnée  $\Gamma\Theta$ ; la raison du reste  $H\Delta$  à  $AB$  sera donnée. Faisons en sorte  
que la raison de  $\Gamma\Theta$  à  $A\Theta$  soit la même que celle-ci; la raison de  $\Gamma\Theta$  à  $A\Theta$  sera  
donnée. Mais  $\Gamma\Theta$  est donné; donc  $A\Theta$  est donné; la raison de la grandeur en-  
tière  $\Gamma\Delta$  à la grandeur entière  $\Theta B$  est donc donnée (12. 5). De plus, puisque  $\Gamma\Delta$  est  
plus grand à l'égard de  $EZ$ , d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur  
donnée  $\Gamma\Theta$ ; la raison du reste  $K\Delta$  à  $EZ$  sera donnée (déf. 11). Faisons en sorte que  
la raison de  $\Gamma\Theta$  à  $\Lambda E$  soit la même que celle-ci; la raison de  $\Gamma\Theta$  à  $\Lambda E$  sera donnée.  
Mais  $\Gamma\Theta$  est donné; donc  $\Lambda E$  est donné; la raison de la grandeur entière  $\Gamma\Delta$  à

Τοῦ δὲ ΓΔ πρὸς τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ Ζ ΛΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἀφίρηται ἀπ' αὐτῶν δεδομένα μεγέθη τὰ ΘΑ, ΑΕ· τὰ ΑΒ, ΕΖ ἄρα ἦτοι πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ,

Ipsius autem ΓΔ ad ΘΒ ratio est data ; et ipsius ΘΒ igitur ad ΛΖ ratio est data. Et auferuntur ab ipsis datæ magnitudines ΘΑ, ΑΕ ; ipsæ ΑΒ, ΕΖ igitur vel inter se rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major est quam in ratione.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Εὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ, ἢ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Εστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

## PROPOSITIO XIX.

Si sint tres magnitudines, et prima quidem secundâ, datâ, major sit quam in ratione, sit autem et secunda tertiâ, datâ, major quam in ratione ; et prima tertiâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint tres magnitudines ΑΒ, ΓΔ, Ε, et ipsa quidem ΑΒ ipsâ ΓΔ, datâ, major sit quam in ratione, ipsa vero ΓΔ ipsâ Ε, datâ, major sit quam in ratione ; dico et ipsam ΑΒ ipsâ Ε, datâ, majorem esse quam in ratione.

la grandeur entière ΛΖ est donc donnée (12. 5). Mais la raison de ΓΔ à ΘΒ est donnée ; la raison de ΘΒ à ΛΖ est donc donnée (8). Mais on a retranché de ces grandeurs, les grandeurs données ΘΑ, ΑΕ ; les grandeurs ΑΒ, ΕΖ auront donc entre elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande à l'égard de l'autre d'une donnée, qu'en raison (15).

## PROPOSITION XIX.

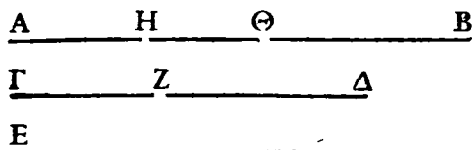
Si l'on a trois grandeurs, si la première est plus grande à l'égard de la seconde, d'une donnée, qu'en raison, et si la seconde est plus grande à l'égard de la troisième, d'une donnée, qu'en raison, la première sera plus grande à l'égard de la troisième d'une donnée qu'en raison..

Soient les trois grandeurs ΑΒ, ΓΔ, Ε ; que ΑΒ soit plus grand à l'égard de ΓΔ d'une donnée qu'en raison, et que ΓΔ soit plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison ; je dis que ΑΒ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison.



Επει γάρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ· ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ο αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντω τοῦ ΗΘ πρὸς

Quoniam enim ΓΔ ipsā Ε, datā, major est quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΖ; reliquæ igitur ΖΔ ad Ε ratio est data. Rursus, quoniam ΑΒ ipsā ΓΔ, datā, major est quam in ratione; auferatur data magnitudo ΑΗ; reliquæ igitur ΗΒ ad ΓΔ ratio est data. Eadem huic fiat ratio ipsius ΗΘ ad ΓΖ; ratio igitur



τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς· Δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΗΑ δοθὲν· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΘΑ δοθὲν ἔστι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως καὶ τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ λοιποῦ τοῦ ΘΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ δοθὲν τὸ ΘΑ· τὸ ΒΑ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

et ipsius ΗΘ ad ΓΖ data; data autem ΓΖ; data igitur et ΗΘ. Est autem et ΗΑ data; et tota igitur ΘΑ data est. Et quoniam est ut ΗΒ ad ΓΔ ita et ΗΘ ad ΓΖ, et reliquæ ΘΒ ad reliquam ΖΔ ratio est data. Ipsius autem ΖΔ ad Ε ratio est data; et ipsius ΘΒ igitur ad Ε ratio est data. Et data ΘΑ; ipsa ΒΑ igitur ipsā Ε, datā, major est quam in ratione.

Car puisque ΓΔ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΓΖ; la raison du reste ΖΔ à Ε sera donnée (déf. 11). De plus, puisque ΑΒ est plus grand à l'égard de ΓΔ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée ΑΗ; la raison du reste ΗΒ à ΓΔ sera donnée. Faisons en sorte que la raison de ΗΘ à ΓΖ soit la même que celle-ci. La raison de ΗΘ à ΓΖ sera donnée; mais ΓΖ est donné; donc ΗΘ est aussi donné. Mais ΗΑ est donné; la grandeur entière ΘΑ est donc donnée (3). Mais ΗΒ est à ΓΔ comme ΗΘ est à ΓΖ; la raison du reste ΘΒ au reste ΖΔ est donc donnée. Mais la raison de ΖΔ à Ε est donnée; la raison de ΘΒ à Ε est donc donnée (8). Mais ΘΑ est donné; donc ΒΑ est plus grand à l'égard de Ε, d'une donnée, qu'en raison. (déf. 11).

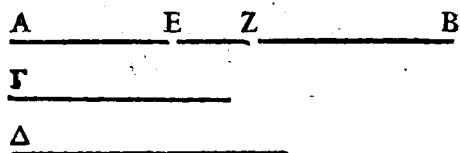


## ΑΛΛΩΣ.

## ALITER.

Εστω<sup>1</sup> τρία μεγέθη τὰ AB, Γ, Δ, καὶ τὸ μὲν AB τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστω<sup>2</sup> ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ<sup>3</sup> τὸ AB τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Sint tres magnitudine AB, Γ, Δ, et ipsa quidem AB ipsa Γ, datā, major sit quam in ratione, ipsa vero Γ ipsa Δ, datā, major sit quam in ratione; dico et AB ipsa Δ, datā, majorem esse quam in ratione.



Επεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ Γ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ<sup>4</sup> δοθὲν μέγεθος τὸ AE· λοιποῦ ἄρα τοῦ EB πρὸς τὸ Γ λόγος ἔστι δοθείς. τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ EB ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ. Αφηρήσθω οὖν τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ EZ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ZB πρὸς τὸ Δ λόγος ἔστι δοθείς. Καὶ ἔστι δοθὲν τὸ AZ· τὸ AB ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Quoniam enim AB ipsa Γ, datā, major est quam in ratione, auferatur datā magnitudo AE, reliquæ igitur EB ad Γ ratio est data. Ipsa Γ autem ipsa Δ, datā, major est quam in ratione; et EB igitur ipsa Δ, datā, major est quam in ratione. Auferatur itaque datā magnitudo EZ; reliquæ igitur ZB ad Δ ratio est data. Et est data AZ; ipsa AB igitur ipsa Δ, datā, major est quam in ratione.

## AUTREMENT.

Soient les trois grandeurs AB, Γ, Δ; que AB soit plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, et que Γ soit plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison; je dis que AB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison.

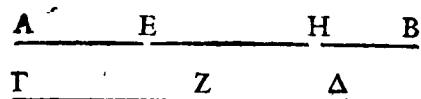
Car puisque AB est plus grand à l'égard de Γ, d'une donnée, qu'en raison, retranchons la grandeur donnée AE; la raison du reste EB à Γ sera donnée (déf. 11). Mais Γ est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison; donc EB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison (13). Retranchons la grandeur donnée EZ; la raison du reste ZB à Δ sera donnée. Mais AZ est donnée (3); donc AB est plus grand à l'égard de Δ, d'une donnée, qu'en raison.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Εάν ἡ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ λοιπὰ πρὸς ἀλλήλα ἢτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Εστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ AB, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ἀφηρήσθω μεγέθη τὰ AE, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ EB, ΖΔ πρὸς ἀλλήλα ἢτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἔστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Επεὶ γὰρ δοθέν ἔστιν ἑκάτερον τῶν AB, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ<sup>2</sup> ΓΔ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ AE πρὸς τὸ<sup>3</sup> ΓΖ· ἔσται καὶ λοιποῦ τοῦ EB πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ. Λόγος δὲ

Si sint duæ magnitudines datæ, et auferantur ab ipsis magnitudines inter se rationem habentes datam; reliquæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint duæ magnitudines datæ AB, ΓΔ, et ab ipsis AB, ΓΔ auferantur magnitudines AE, ΓΖ rationem habentes inter se datam; dico ipsas EB, ΖΔ inter se vel rationem habere datam, vel alteram alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque ipsarum AB, ΓΔ; ratio igitur ipsius AB ad ΓΔ data. At verò si eadem est quæ ipsius AE ad ΓΖ; erit et reliquæ EB ad reliquam ΖΔ ratio data. Non sit vero eadem, et fiat ut AE ad ΓΖ ita AH ad ΓΔ. Ratio autem ipsius AE ad ΓΖ data; ratio

PROPOSITION XX.

Si deux grandeurs sont données, et si l'on en retranche des grandeurs qui aient entr'elles une raison donnée, les restes auront entre eux une raison donnée, ou bien l'un sera plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, ΓΔ, et que des grandeurs AB, ΓΔ, soient retranchées les grandeurs AE, ΓΖ qui aient entre elles une raison donnée; je dis que les restes EB, ΖΔ ont entre eux une raison donnée; ou bien que l'un est plus grand à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Car puisque chacune des grandeurs AB, ΓΔ est donnée, la raison de AB à ΓΔ sera donnée (1); donc, si cette raison est la même que celle de AE à ΓΖ, la raison du reste EB au reste ΖΔ sera donnée (19. 5). Mais qu'elle ne soit pas la même, et faisons en sorte que AE soit à ΓΖ comme AH est à ΓΔ. Puisque la raison de AE

τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΔ. δοθέν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ λοιποῦ τοῦ ΕΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Εὰν ᾖ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ ὅλα πρὸς ἀλλήλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶ ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προκεισθῶ αὐτοῖς μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἀλλήλα ἦτοι λόγον ἔξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur et ipsius ΑΗ ad ΓΔ data. Data autem ΓΔ; data igitur et ΑΗ. Est autem et ΑΒ data; et reliqua igitur ΗΒ data est. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΑΗ ad ΓΔ, et reliquæ ΕΗ ad reliquam ΖΔ ratio est data. Data autem ΗΒ; ipsa ΕΒ igitur, ipsâ ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

## PROPOSITIO XXI.

Si sint duæ magnitudines datæ, et adjiciantur ipsis magnitudines inter se rationem habentes datam; totæ inter se vel rationem habebunt datam, vel altera alterâ, datâ, major erit quam in ratione.

Sint duæ magnitudines datæ ΑΒ, ΓΔ, et adjiciantur ipsis magnitudines ΑΕ, ΓΖ rationem habentes inter se datam; dico totas ΕΒ, ΖΔ inter se vel rationem habituras esse datam, vel alteram, alterâ, datâ, majorem esse quam in ratione.

à ΓΖ est donnée, la raison de ΑΗ à ΓΔ sera donnée. Mais ΓΔ est donné; donc ΑΗ est donné (2). Mais ΑΒ est donné; le reste ΗΒ est donc aussi donné (4). Et puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΑΗ est à ΓΔ, la raison du reste ΕΗ au reste ΖΔ est donnée (19. 5). Mais ΗΒ est donné; donc ΕΒ est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

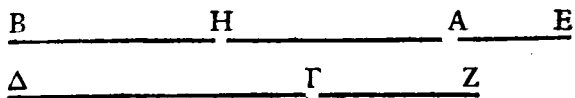
## PROPOSITION XXI.

Si l'on a deux grandeurs données, et si on leur ajoute des grandeurs qui aient entre elles une raison donnée, les grandeurs entières auront entre elles une raison donnée, ou bien l'une sera plus grande à l'égard de l'autre, d'une donnée, qu'en raison.

Soient les deux grandeurs données ΑΒ, ΓΔ; ajoutons-leur des grandeurs ΑΕ, ΓΖ qui aient entre elles une raison donnée; je dis que les grandeurs entières ΕΒ, ΖΔ auront entre elles une raison donnée, ou bien que l'une sera plus grande à l'égard de l'autre d'une donnée qu'en raison.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν AB, ΓΔ·  
λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν  
ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ AE πρὸς τὸ ΓΖ, ἔσται καὶ  
ὅλου τοῦ EB πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Εἰ  
δὲ οὐ· πεποιήσθω ὡς τὸ AE πρὸς τὸ<sup>2</sup> ΓΖ οὕτως  
τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ AH πρὸς τὸ

Quoniam enim data est utraque ipsarum AB,  
ΓΔ; ratio igitur ipsius AB ad ΓΔ data. At vero  
si eadem sit quæ ipsius AE ad ΓΖ, erit et totius  
EB ad totam ΖΔ ratio data. Si autem non; fiat  
ut AE ad ΓΖ ita AH ad ΓΔ; ratio igitur ipsius



ΓΔ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ΓΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ AH.  
Ἔστι δὲ καὶ τὸ AB δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ  
HB δοθέν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ EA πρὸς τὸ  
ΓΖ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ· καὶ ὅλου τοῦ EH  
πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ δοθέν τὸ  
HB· τὸ EB ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μείζον ἐστιν  
ἢ ἐν λόγῳ.

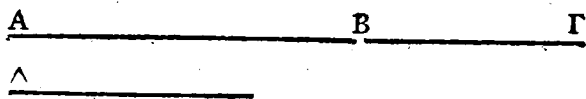
AH ad ΓΔ data. Data autem ΓΔ; data igitur  
et AH. Est autem et AB data; et reliqua igitur  
HB data est. Et quoniam est ut EA ad ΓΖ  
ita AH ad ΓΔ; et totius EH ad totam ΖΔ ra-  
tio est data. Et data HB; ipsa EB igitur ipsâ  
ΖΔ, datâ, major est quam in ratione.

Car puisque chacune des grandeurs AB, ΓΔ est donnée, la raison de AB à ΓΔ est donnée. Donc, si cette raison est la même que celle de AE à ΓΖ, la raison de la grandeur entière EB à la grandeur entière ΖΔ sera donnée (12. 5). Mais si cela n'est point, faisons en sorte que AE soit à ΓΖ comme AH est à ΓΔ; la raison de AH à ΓΔ sera donnée. Mais ΓΔ est donné; donc AH est donné (2). Mais AB est donné; le reste HB est donc donné (4). Et puisque EA est à ΓΖ comme AH est à ΓΔ; la raison de la grandeur entière EH à la grandeur entière ΖΔ est donnée (12. 5). Mais HB est donné; donc EB est plus grand à l'égard de ΖΔ, d'une donnée, qu'en raison (déf. 11).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Εάν δύο μεγέθη πρὸς τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ τὸ συναμφοτέρων πρὸς τὸ<sup>1</sup> αὐτὸ λόγον ἔξῃ δεδομένον·

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, BG πρὸς τι μέγεθος τὸ Δ λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφοτέρων<sup>2</sup> τὸ AG πρὸς τὸ αὐτὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.



Επεὶ γὰρ ἐκάτερον τῶν AB, BG πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ BG δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ AG πρὸς τὸ GB λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ BG πρὸς τὸ<sup>3</sup> Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AG ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Si duæ magnitudines ad aliquam magnitudinem rationem habeant datam, et simul utraque ad eandem rationem habebit datam.

Duæ enim magnitudines AB, BG ad aliquam magnitudinem Δ rationem habeant datam; dico et simul utramque AG ad eandem Δ rationem habere datam.

Quoniam enim utraque ipsarum AB, BG ad Δ rationem habet datam; ratio igitur et ipsius AB ad BG data; et componendo ipsius AG ad GB ratio est data. Ipsius autem BG ad Δ ratio est data; et ipsius AG igitur ad Δ ratio est data.

## PROPOSITION XXII.

Si deux grandeurs ont avec une autre grandeur une raison donnée, leur somme aura une raison donnée avec cette autre.

Que les deux grandeurs AB, BG aient avec une grandeur Δ une raison donnée; je dis que leur somme AG aura avec Δ une raison donnée.

Car puisque chacune des grandeurs AB, BG a avec Δ une raison donnée, la raison de AB à BG est donnée (8); donc, par addition, la raison de AG à GB est donnée (6). Mais la raison de BG à Δ est donnée; la raison de AG à Δ est donc donnée (8).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

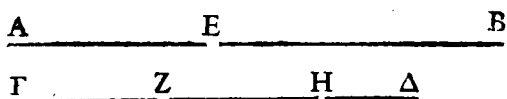
PROPOSITIO XXIII.

Εάν ὅλον πρὸς ὅλον λόγον ἔχη δεδομένον, ἔχη δὲ καὶ τὰ μέρη πρὸς τὰ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ. καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἔξει δεδομένους.

Ἐχέτω γὰρ ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, ἔχέτω δὲ καὶ τὰ AE, EB μέρη πρὸς τὰ ΓΖ, ΖΔ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ. λέγω ὅτι καὶ τὰ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἔξει δεδομένους.

Si totum ad totum rationem habeat datam, habeant autem et partes ad partes rationes datas, non autem easdem; et omnia ad omnia rationes habebunt datas.

Habeat enim totum AB ad totum ΓΔ rationem datam, habeant autem et AE, EB partes ad ΓΖ, ΖΔ partes rationes datas, non autem easdem; dico et omnia ad omnia rationes habitura esse datas.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ AE πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντω ὁ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΗ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ<sup>2</sup> δοθείς. Ἔσται δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ τοῦ<sup>3</sup> EB πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΗ λόγος δοθείς. Τοῦ δὲ EB πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα πρὸς τὸ ΖΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέφαντι<sup>4</sup>

Quoniam enim ratio est ipsius AE ad ΓΖ data, eadem huic fiat ratio ipsius AB ad ΓΗ; ratio igitur et ipsius AB ad ΓΗ est data; erit autem et reliquæ EB ad reliquam ΖΗ ratio data. Ipsius autem EB ad ΖΔ ratio est data; et ipsius ΖΔ igitur ad ΖΗ ratio est data; et convertendo

PROPOSITION XXIII.

Si un tout a avec un tout une raison donnée, et si les parties ont avec les parties des raisons données, mais non les mêmes, toutes ces grandeurs auront des raisons données avec toutes ces grandeurs.

Que le tout AB ait avec le tout ΓΔ une raison donnée, et que les parties AE, EB aient avec les parties ΓΖ, ΖΔ des raisons données, mais non les mêmes; je dis que toutes ces grandeurs auront des raisons données avec toutes ces grandeurs.

Car puisque la raison de AE à ΓΖ est donnée, faisons en sorte que la raison de AB à ΓΗ soit la même que celle-ci; la raison de AB à ΓΗ sera donnée; la raison du reste EB au reste ΖΗ est donc donnée (19, 5, et déf. 2). Mais la raison de EB à ΖΔ est donnée; la raison de ΖΔ à ΖΗ est donc donnée (8); donc, par conversion,

τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΓ, ΓΗ δοθείς<sup>5</sup>. καὶ τοῦ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι καὶ<sup>6</sup> τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΓΖ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε πάντων πρὸς πάντα λόγος ἐστὶ δοθείς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾤσιν, ἡ δὲ πρώτη πρὸς τὴν<sup>1</sup> τρίτην λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἐστω<sup>2</sup> ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ δὲ Α πρὸς τὴν Γ λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὴν<sup>3</sup> Β λόγον ἔξει δεδομένον.

Εκκείσθω γὰρ δοθεῖσα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ

ipsius ΖΔ ad ΔΗ ratio est data. Et quoniam ratio est ipsius ΑΒ ad utramque ipsarum ΔΓ, ΓΗ data; et ipsius ΔΓ igitur ad ΓΗ ratio est data; convertendo et ipsius ΓΔ ad ΔΗ ratio est data. Sed ipsius ΗΔ ad ΔΖ ratio est data; et ipsius ΓΔ igitur ad ΔΖ ratio est data; quare et ipsius ΓΖ ad ΖΔ ratio est data. Sed ipsius quidem ΓΖ ad ΑΕ ratio est data; ipsius verò ΖΔ ad ΒΕ ratio est data; quare omnium ad omnia ratio est data.

## PROPOSITIO XXIV.

Si tres rectæ porportionales sint, prima autem ad tertiam rationem habeat datam; et ad secundam rationem habebit datam.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, et sit ut Α ad Β ita Β ad Γ, ipsa autem Α ad Γ rationem habeat datam; dico et ad ipsam Β rationem habituram esse datam.

Exponatur enim data Δ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Γ data, eadem huic fiat ratio

la raison de ΖΔ à ΔΗ est donnée (5). Mais la raison de ΑΒ avec chacune des grandeurs ΔΓ, ΓΗ est donnée; la raison de ΔΓ à ΓΗ est donc donnée; donc, par conversion, la raison de ΓΔ à ΔΗ est donnée. Mais la raison de ΗΔ à ΔΖ est donnée; la raison de ΓΔ à ΔΖ est donc donnée (8), et par conséquent la raison de ΓΖ à ΖΔ (5). Mais la raison de ΓΖ à ΑΕ est donnée, et la raison de ΖΔ à ΒΕ est aussi donnée; la raison de toutes ces grandeurs à toutes ces grandeurs est donc donnée,

## PROPOSITION XXIV.

Si trois droites sont proportionnelles, et si la première a une raison donnée avec la troisième, elle aura aussi une raison donnée avec la seconde.

Que les trois droites Α, Β, Γ soient proportionnelles, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Β est à Γ, et que Α ait avec Γ une raison donnée; je dis que Α aura avec Β une raison donnée.

Car soit Δ une droite donnée. Puisque la raison de Α à Γ est donnée, faisons en



γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἄρα ἐστὶ<sup>4</sup>  
καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ Δ  
δοθεῖσα ἄρα καὶ<sup>5</sup> ἡ Ζ. Εἰλήφθω τῶν Δ, Ζ μέση  
ἀνάλογον ἡ Ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ  
τῷ ἀπὸ τῆς Ε. Δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ,  
δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. δοθέν ἄρα καὶ τὸ  
ἀπὸ τῆς Ε<sup>6</sup>. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε. Ἐστὶ δὲ καὶ

ipsius Δ ad Z; ratio igitur est et ipsius Δ ad  
Z data. Data autem Δ; data igitur et Z. Su-  
matur ipsarum Δ, Ζ media proportionalis Ε;  
ipsum igitur sub Δ, Ζ æquale est ipsi ex Ε.  
Datum autem ipsum sub Δ, Ζ, data enim utraque  
earum; datum igitur et ipsum ex Ε; data igitur est  
Ε. Est autem et Δ data; ratio igitur est ipsius

|        |        |
|--------|--------|
| A_____ | Δ_____ |
| B_____ | Ε_____ |
| Γ_____ | Ζ_____ |

ἡ Δ δοθεῖσα. λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε  
δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως  
ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Αλλ' ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν Γ  
οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ,  
ὡς δὲ ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς  
τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ  
ὑπὸ τῶν Α, Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ  
ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. Αλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον  
ἐστὶ τὸ<sup>7</sup> ἀπὸ τῆς Β, αἱ γὰρ Α, Β, Γ ἀνάλογόν  
εἰσι. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε.  
ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως  
τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. καὶ ὡς ἄρα ἡ

Δ ad Ε data. Et quoniam est ut Α ad Γ ita  
Δ ad Ζ; sed ut quidem Α ad Γ ita ipsum ex  
Α ad ipsum sub Α, Γ, ut autem Δ ad  
Ζ ita ipsum ex Δ ad ipsum sub Δ, Ζ; ut igitur  
ipsum ex Α ad ipsum sub Α, Γ ita ipsum ex  
Δ ad ipsum sub Δ, Ζ. Sed ipsum quidem  
sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, ipsæ enim  
Α, Β, Γ proportionales sunt. Ipsi autem sub  
Δ, Ζ æquale est ipsum ex Ε; ut igitur ipsum  
ex Α ad ipsum ex Β ita ipsum ex Δ ad ipsum  
ex Ε; et ut igitur Α ad Β ita Δ ad Ε. Ratio

sorte que la raison de Δ à Ζ soit la même que celle-ci; la raison de Δ à Ζ sera donnée. Mais Δ est donné; donc Ζ est donné (2). Prenons une moyenne proportionnelle Ε entre Δ et Ζ (13. 6). Le rectangle sous Δ, Ζ sera égal au carré de Ε (17. 6). Mais le rectangle sous les droites Δ, Ζ est donné, car chacune d'elles est donnée; le carré de Ε est donc donné (déf. 1). Donc Ε est donné. Mais Δ est donné; la raison de Δ à Ε est donc donnée (1). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ζ, que Α est à Γ comme le carré de Α est au rectangle sous Α, Γ (1. 6), et que Δ est à Ζ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ζ; le carré de Α sera au rectangle sous Α, Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ζ. Mais le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β; car les droites Α, Β, Γ sont proportionnelles (17. 6), et le carré de Ε est égal au rectangle sous Δ, Ζ; le carré de Α est donc au carré de Β comme le carré de Δ est au carré de Ε; donc Α est à Β



$\Delta$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἢ  $\Delta$  πρὸς τὴν  $E$ . λόγος δὲ  
 τῆς  $\Delta$  πρὸς τὴν  $E$  δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς  $A$   
 πρὸς τὴν  $B$  δοθείς.

**ΑΔΔΩΣ.**

**ALITER.**

Επεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὥς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ δοθείς. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α,

Quoniam ratio est ipsius  $\Lambda$  ad  $\Gamma$  data, ut autem  $\Lambda$  ad  $\Gamma$  ita ipsum ex  $\Lambda$  ad ipsum sub  $\Lambda, \Gamma$ ; ratio igitur et ipsius ex  $\Lambda$  ad ipsum sub  $\Lambda,$

A \_\_\_\_\_

B \_\_\_\_\_

C \_\_\_\_\_

Τῖσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ  
τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β δοθείς· ὥστε καὶ τῆς  
Α πρὸς τὴν Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐκατέρα γὰρ  
τῶν Α, Β ἴσας ἐπορισάμεθα ἐν τῷ οἰκείῳ ἐκάστω  
τετραγώνῳ<sup>2</sup>.

$\Gamma$  data. Ipsi autem sub  $A$ ,  $\Gamma$  æquale est ipsum ex  $B$ ; ratio igitur ipsius ex  $A$  ad ipsum ex  $B$  data. Quare et ipsius  $A$  ad  $B$  ratio est data; utrique enim ipsarum  $A$ ,  $B$  æquales invenimus in proprio unicuique quadrato.

comme  $\Delta$  est à E ( 22. 6 ). Mais la raison de  $\Delta$  à E est donnée ; la raison de A à B est donc donnée.

## AUTREMENT.

Puisque la raison de  $A$  à  $\Gamma$  est donnée, et que  $A$  est à  $\Gamma$  comme le carré de  $A$  est au rectangle sous  $A$ ,  $\Gamma$  (1. 6), la raison du carré de  $A$  au rectangle sous  $A$ ,  $\Gamma$  sera donnée. Mais le carré de  $B$  est égal au rectangle compris sous  $A$ ,  $\Gamma$  (17. 6). La raison du carré de  $A$  au carré de  $B$  est donc donnée; la raison de  $A$  à  $B$  est donc donnée (déf. 2); car nous avons trouvé dans les carrés des droites  $A$ ,  $B$ , des droites qui sont égales à ces droites.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

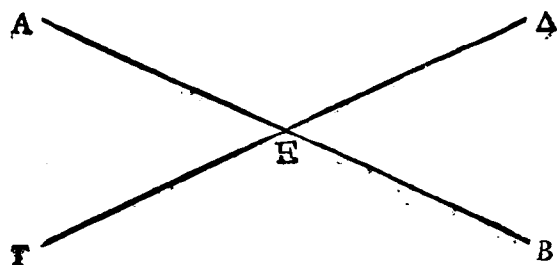
PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας· δίδεται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας τῇ θέσει.

Si duæ lineæ positione datæ sese secant, datum est positione punctum in quo sese secant.

Δύο γὰρ γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστὶ τὸ E σημεῖον.

Duæ enim lineæ positione datæ AB, ΓΔ sese secant in E puncto; dico datum esse punctum E.



Εἰ γὰρ μὴ, μεταπεσεῖται τὸ E σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ μιᾶς τῶν AB, ΓΔ ἡ θέσις. Οὐ μεταπίπτει δὲ· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ E σημεῖον.

Si enim non, excidet E punctum; excidet igitur et unius rectarum AB, ΓΔ positio. Non excidit autem; datum igitur est punctum E.

PROPOSITION XXV.

Si deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné de position.

Que les lignes AB, ΓΔ, données de position, se coupent au point E; je dis que le point E est donné.

Car si cela n'est pas, le point E se déplacera, et alors l'une des lignes AB, ΓΔ changera de position. Mais aucune de ces lignes ne change de position; le point E est donc donné.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ἢ δεδομένα τῇ θέσει· δέδοται ἢ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς τῆς AB<sup>1</sup> τὰ πέρατα τὰ A, B δεδομένα ἔστω τῇ θέσει· λέγω ὅτι δέδοται ἢ AB τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

A—————B

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ A σημείου<sup>2</sup>, μεταπεσεῖται τῆς AB εὐθείας ἥτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· μεταπεσεῖται ἄρα<sup>3</sup> καὶ τὸ B σημεῖον. Οὐ μεταπίπτει δέ· δέδοται ἄρα ἢ AB εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

## . ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Εὰν εὐθείας γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τὸ ἐν πέρασ δοθὲν ἢ· καὶ τὸ ἕτερον δοθήσεται.

## . PROPOSITIO XXVI.

Si rectæ lineæ extrema sint data positione, data est recta positione et magnitudine.

Rectæ enim lineæ AB extrema A, B data sint positione; dico datam esse ipsam AB positione et magnitudine.

Si enim, manente A puncto, excidat ipsius AB rectæ vel positio vel magnitudo; excidet et punctum B. Non excidit autem. Data igitur est AB recta positione et magnitudine.

## PROPOSITIO XXVII.

Si rectæ lineæ, positione et magnitudine datæ, unum extremum datum sit; et alterum datum erit.

## PROPOSITION XXVI.

Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, cette droite est donnée de position et de grandeur.

Que les extrémités A, B d'une droite AB soient données de position; je dis que la droite AB est donnée de position et de grandeur.

Car si le point A restant immobile, la droite AB change de position ou de grandeur, le point B se déplacera. Mais il ne se déplace pas; la droite AB est donc donnée de position et de grandeur.

## PROPOSITION XXVII.

Si l'une des extrémités d'une ligne droite, donnée de position et de grandeur, est donnée; l'autre extrémité sera donnée.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει  
 δεδομένης, τῆς AB, τὸ ἐν πέρας τὸ A δοθέν  
 ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ B δοθέν ἐστίν.

Rectæ enim lineæ AB, positione et magni-  
 tudine datæ, unum extremum A datum sit; dico  
 et ipsum B datum esse.



Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ A σημείου, μεταπεσεῖ-  
 ται τὸ B σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ τῆς AB  
 εὐθείας ἢ τοῖ ἢ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· οὐ μεταπίπ-  
 τει δέ· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ B σημεῖον.

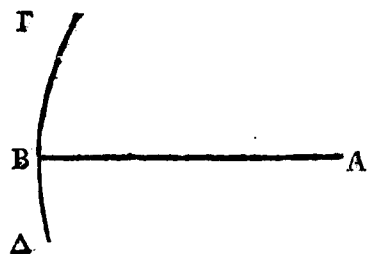
Si enim, manente A puncto, excidat B  
 punctum; excidet igitur et ipsius AB rectæ  
 vel positio vel magnitudo. Non excidit autem;  
 datum igitur est B punctum.

ΑΛΛΩΣ'.

ALITER.

Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB,  
 περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΓΒΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ

Centro enim A, intervallo autem AB, cir-  
 cumferentia describatur ΓΒΔ; positione igitur



περιφέρεια' ΓΒΔ. Θέσει δὲ καὶ ἡ AB εὐθεῖα· δοθέν  
 ἄρα ἐστὶ τὸ B σημεῖον.

est circumferentia ΓΒΔ. Positione autem et  
 AB recta; datum igitur est B punctum.

Que l'extrémité A de la ligne droite AB, donnée de position et de grandeur,  
 soit donnée; je dis que l'autre extrémité B est donnée.

Car si le point A restant immobile, le point B se déplace, la droite AB chan-  
 gera de position ou de grandeur; mais elle ne change ni de position, ni de gran-  
 deur; donc le point B est donné.

AUTREMENT.

Du centre A et de l'intervalle AB décrivons la circonférence ΓΒΔ; la circon-  
 férence ΓΒΔ sera donnée de position ( déf. 6 ). Mais AB est donné de position;  
 le point B est donc donné ( 25 ).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

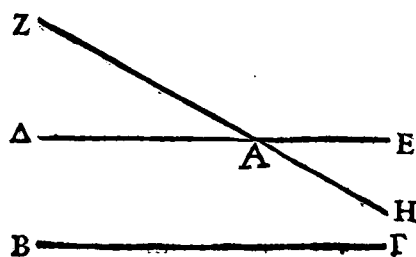
## PROPOSITIO XXVIII.

Εάν διὰ δεδομένου σημείου παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Διὰ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ, εὐθεΐα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΔΑΕ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ ΔΑΕ τῇ θέσει.

Si per datum punctum contra datam positione rectam recta linea ducatur, data est acta positione.

Etenim per datum punctum Α, contra datam positione rectam ΒΓ, recta linea ducatur ΔΑΕ, dico datam esse ipsam ΔΑΕ positione.



Εἰ γὰρ μή· μένοντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται τῆς ΔΑΕ ἡ θέσις. Διαμενούσης τῆς ΒΓ παραλλήλου μεταπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΗ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΖΑΗ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῇ ΔΑΕ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΑΕ ἄρα τῇ ΖΑΗ παράλληλος ἐστίν. ἀλλὰ καὶ συμπίπτει, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπον· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς ΔΑΕ ἡ θέσις· θέσις ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑΕ.

Si enim non; manente Α puncto excidet ipsius ΔΑΕ positio. Manente ΒΓ parallelâ excidat, et sit ΖΑΗ; parallela igitur est ΓΒ ipsi ΖΑΗ. Sed ΒΓ ipsi ΔΑΕ est parallela; et ΔΑΕ igitur ipsi ΖΑΗ parallela est. Sed et concurrat, quod est absurdum; non igitur excidet ipsius ΔΑΕ positio; positione igitur est ΔΑΕ.

## PROPOSITION XXVIII.

Si, par un point donné, une ligne droite est menée parallèlement à une droite donnée de position, la droite menée est donnée de position.

Par le point donné Α, menons la ligne droite ΔΑΕ parallèlement à la droite ΒΓ donnée de position; je dis que la droite ΔΑΕ est donnée de position.

Car si cela n'est pas, le point Α restant immobile, la position de la droite ΔΑΕ changera. Que sa position change, la droite ΒΓ lui restant parallèle, et que sa position soit ΖΑΗ; la droite ΓΒ sera parallèle à ΖΑΗ. Mais ΒΓ est parallèle à ΔΑΕ; donc ΔΑΕ est parallèle à ΖΑΗ (30. 1); ce qui est absurde, puisque ces droites se rencontrent; la position de ΔΑΕ ne change donc point; la droite ΔΑΕ est donc donnée de position.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

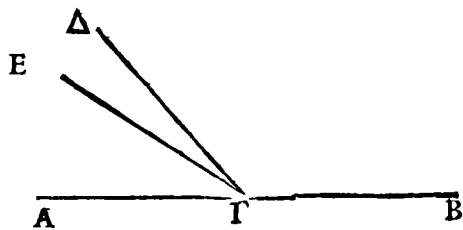
Εάν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Πρὸς θέσει γὰρ δεδομένη εὐθεία τῇ  $AB$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ  $\Gamma$ , εὐθεῖα ἄχθω ἡ  $\Gamma\Delta$ , δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$ · λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ  $\Gamma\Delta$ .

## PROPOSITIO XXIX.

Si ad datam positione rectam et punctum in eâ datum, recta linea ducatur datum faciens angulum, data est ducta positione.

Etenim ad datam positione rectam  $AB$ , et punctum  $\Gamma$  in eâ datum, recta ductatur  $\Gamma\Delta$ , datum faciens angulum  $\Lambda\Gamma\Delta$ ; dico positione esse ipsam  $\Gamma\Delta$ .



Εἰ γὰρ μὴ, μένοντος τοῦ  $\Gamma$  σημείου, μεταπεσεῖται τῆς  $\Gamma\Delta$  ἡ θέσις, διατηροῦσα τῆς ὑπὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$  γωνίας τὸ μέγεθος· μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ  $\Gamma\epsilon$ . Ἰση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\Delta\Gamma\Lambda$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta\Gamma\Lambda^3$ , ἡ μείζων τῇ ἰλάσσονι, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς  $\Delta\Gamma$  ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Gamma\Delta$ .

Si enim non, manente  $\Gamma$  puncto, excidet ipsius  $\Gamma\Delta$  positio, servans ipsius  $\Lambda\Gamma\Delta$  anguli magnitudinem; excidat et sit  $\Gamma\epsilon$ . Æqualis igitur est  $\Delta\Gamma\Lambda$  angulus ipsi sub  $\Delta\Gamma\Lambda$ , major minori, quod absurdum; non igitur excidet ipsius  $\Delta\Gamma$  positio; positione igitur est  $\Gamma\Delta$ .

## PROPOSITION XXIX.

Si d'un point donné dans une droite donnée, on mène à cette droite une ligne droite faisant un angle donné; la droite menée est donnée de position.

Du point donné  $\Gamma$ , dans la droite  $AB$  donnée de position, menons à cette droite la droite  $\Gamma\Delta$ , faisant un angle donné  $\Lambda\Gamma\Delta$ ; je dis que  $\Gamma\Delta$  est donné de position.

Car si cela n'est pas, le point  $\Gamma$  restant immobile, la position de  $\Gamma\Delta$  changera, en conservant la grandeur de l'angle  $\Lambda\Gamma\Delta$ ; que sa position change, et qu'elle soit  $\Gamma\epsilon$ ; l'angle  $\Delta\Gamma\Lambda$  sera égal à l'angle  $\Delta\Gamma\Lambda$ , le plus grand au plus petit; ce qui est absurde. Donc  $\Delta\Gamma$  ne changera point de position; donc  $\Gamma\Delta$  est donné de position.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

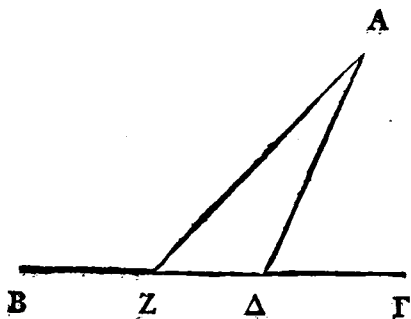
Εάν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεΐσα τῇ θέσει.

Απὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ εὐθεΐα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ<sup>1</sup>. λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΑΔ.

## PROPOSITIO XXX.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea ducatur, datum faciens angulum, data est ducta positione.

Etenim a dato puncto A ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducatur ΑΔ, datum faciens angulum ΑΔΓ; dico positione esse ipsam ΑΔ.



Εἰ γὰρ μὴ, μένοντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις, διατηροῦσα τῆς ὑπὸ ΑΔΓ γωνίας τὸ μέγεθος. Μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΑΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΖΓ γωνίᾳ<sup>2</sup>, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον<sup>3</sup>. οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Si enim non, manente A puncto excidet ipsius ΑΔ positio, servans ΑΔΓ anguli magnitudinem. Excidat et sit ΑΖ. Æqualis igitur est ΑΔΓ angulus ipsi ΑΖΓ angulo, major minori, quod est impossibile; non igitur excidet ipsius ΑΔ positio; positione igitur est ipsa ΑΔ.

## PROPOSITION XXX.

Si d'un point donné, on mène à une droite donnée une ligne droite, faisant un angle donné, la droite menée est donnée de position.

Du point donné A, conduisons à la droite ΒΓ, donnée de position, la ligne droite ΑΔ faisant un angle donné ΑΔΓ; je dis que ΑΔ est donné de position.

Car si cela n'est pas, le point A restant immobile, la position de ΑΔ changera, en conservant la grandeur de l'angle ΑΔΓ. Que sa position change, et qu'elle soit ΑΖ; l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΖΓ, le plus grand au plus petit (16. 1); ce qui est impossible; la position de ΑΔ ne changera donc point; donc ΑΔ est donné de position.

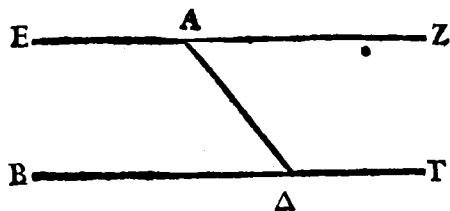


ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Ἐχθω, διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΔΓ εὐθείᾳ πα-  
ράλληλος ἡ ΕΑΖ<sup>1</sup>. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου  
τοῦ Α παρὰ θέσει δεδομένην εὐθείαν τὴν ΒΔΓ  
εὐθεῖα γραμμὴ ἔκται ἡ ΕΑΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ

Ducatur per punctum A ipsi ΒΔΓ rectæ pa-  
rallela ΕΑΖ. Quoniam igitur per datum punctum  
A contra datam positione rectam ΒΔΓ recta  
linea ΕΑΖ ducta est; positione igitur est ipsa



ΕΑΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΑΖ τῇ  
ΒΔΓ<sup>2</sup>, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΔΑ· ἴση ἄρα  
ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ<sup>3</sup>.  
Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  
ΕΑΔ. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν τῇ  
ΕΑΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Α,  
εὐθεῖα γραμμὴ ἔκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα  
γωνίαν τὴν ὑπὸ<sup>4</sup> ΕΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

ΕΑΖ. Et quoniam parallela est ipsa ΕΑΖ ipsi  
ΒΔΓ, et in illas incidit ipsa ΔΑ; æqualis igitur  
est ΕΑΔ angulus angulo ΑΔΓ. Datus autem  
ipse ΑΔΓ; datus igitur et ipse ΕΑΔ. Quoniam  
igitur ad datam positione rectam ΕΑΖ, et punc-  
tum Α in eâ datum, recta linea ΑΔ ducta  
est, datum faciens angulum ΕΑΔ; positione  
igitur est ipsa ΑΔ.

AUTREMENT.

Par le point A, menons la droite ΕΑΖ parallèle à ΒΔΓ (31. 1). Puisque par  
le point A l'on a mené la ligne droite ΕΑΖ parallèlement à la droite ΒΔΓ donnée  
de position, la droite ΕΑΖ sera donnée de position (28). Et puisque ΕΑΖ est  
parallèle à ΒΔΓ, et que ΔΑ tombe sur ces droites, l'angle ΕΑΔ sera égal à l'angle  
ΑΔΓ (29.) Mais l'angle ΑΔΓ est donné; l'angle ΕΑΔ est donc donné. Mais à la  
droite ΕΑΖ, donnée de position, on a mené, par le point donné Α, la ligne droite  
ΑΔ faisant l'angle donné ΕΑΔ; la droite ΑΔ est donc donnée de position (29).

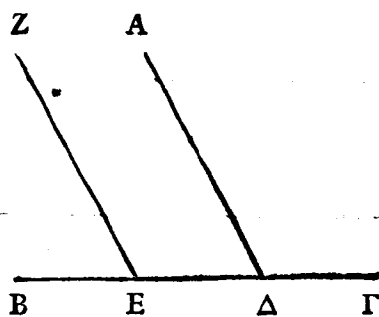


## ΑΛΛΩΣ.

## ALITER.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ δοθέν σημείον τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. Καὶ ἔπειτα παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΕ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτάς<sup>2</sup> ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΕΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν

Sumatur in ΒΓ datum punctum Ε, et per Ε punctum ipsi ΑΔ parallela ducatur ΕΖ. Et quoniam parallela est ΖΕ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ipsa ΒΕΔ; æqualis igitur est ΖΕΔ an-



ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ<sup>3</sup> γωνία. Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ<sup>4</sup>· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ<sup>5</sup>. Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν τῇ ΒΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Ε, εὐθεῖαν γραμμὴν ἤκται ἡ ΕΖ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΖΕΓ<sup>6</sup>. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΖΕ, εὐθεῖαν γραμμὴν ἤκται ἡ ΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

gulus angulo ΑΔΓ. Datus autem ipse ΑΔΓ; datus igitur et ipse ΖΕΓ. Quoniam igitur ad datam positione rectam ΒΓ, et per punctum in eā datum Ε recta linea ducta est ΕΖ, datum faciens angulum ΖΕΓ; positione igitur est ΕΖ. Quoniam igitur per datum punctum Α contra datam positione rectam ΖΕ, recta linea ducta est ΑΔ; positione igitur est ΑΔ.

## AUTREMENT.

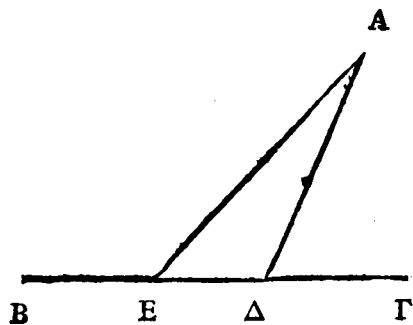
Prenons dans la droite ΒΓ le point Ε, et par le point Ε menons la droite ΕΖ parallèle à ΑΔ (31. 1). Puisque ΖΕ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΕΔ tombe sur ces parallèles, l'angle ΖΕΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ. Mais l'angle ΑΔΓ est donné; l'angle ΖΕΓ est donc donné. Et puisqu'à la droite ΒΓ, donnée de position, on a mené par le point donné Ε, la ligne droite ΕΖ faisant l'angle donné ΖΕΓ, la droite ΕΖ sera donnée de position (29). Mais par le point donné Α, l'on a mené la droite ΑΔ parallèlement à la ligne droite ΖΕ donnée de position; donc ΑΔ est donné de position (28).

ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστίν ἐκάτερον τῶν Α, Ε σημείων<sup>1</sup>. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ. Θέσει

ALITER.

Sumatur in ΒΓ quodlibet punctum Ε, et jungatur ΑΕ. Et quoniam datum est utrumque punctorum Α, Ε; positione igitur est ΑΕ. Posi-



δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία δοθεῖσα<sup>2</sup>. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΑΔ<sup>3</sup> δοθεῖσα ἐστίν· Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν τῇ ΕΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δεδομένῳ<sup>4</sup> σημείῳ τῷ Α, εὐθεῖαν γραμμὴν ἤκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ<sup>5</sup>. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

tione autem et ΒΓ; datus igitur est ΑΕΔ angulus. Est autem et ΑΔΕ angulus datus; reliquus igitur ΕΑΔ datus est. Quoniam igitur ad datam positione rectam ΕΑ, et per punctum in ipsâ datum Α, recta linea ΑΔ ducta est, datum faciens angulum ΕΑΔ; positione igitur est ΑΔ.

AUTREMENT.

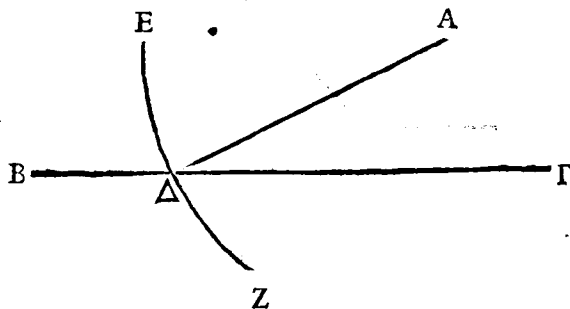
Prenons dans ΒΓ un point quelconque Ε, et joignons ΑΕ. Puisque chacun des points Α, Ε est donné, la droite ΑΕ est donnée de position. Mais ΒΓ est donné de position; l'angle ΑΕΔ est donc donné. Mais l'angle ΑΔΕ est donné; l'angle restant ΕΑΔ est donc donné (32. 1) (4). Mais à la droite ΕΑ, donnée de position, et par un point Α donné dans cette droite, on a mené une ligne droite ΑΔ, faisant un angle donné ΕΑΔ; la droite ΑΔ est donc donnée de position (29).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

## PROPOSITIO XXXI.

Εάν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ προσβληθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ τῇ θέσει.

Απὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ  $A$  ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν  $BΓ$  εὐθεΐα γραμμὴ ἤχθω ἡ  $ΑΔ$ , δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ τῇ θέσει δέδοται.



Κέντρῳ γὰρ τῷ  $A$ , διαστήματι δὲ τῷ  $ΑΔ$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $ΕΔΖ$ . Θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ  $ΕΔΖ$  κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ  $A$  κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ  $ΑΔ$  τῷ μεγέθει. Θέσει δὲ καὶ ἡ  $BΓ$  εὐθεΐα. Εάν δὲ δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνουσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνωσιν ἀλλήλας· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ  $Δ$ . Εἰσι δὲ καὶ τὸ  $A$  δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$ .

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea data magnitudine, producat, ea data est et positione.

Etenim a dato puncto  $A$  ad datam positione rectam  $BΓ$  recta linea ducatur  $ΑΔ$  data magnitudine; dico eam et positione datam esse.

Centro enim  $A$ , intervallo autem  $ΑΔ$ , circulus describatur  $ΕΔΖ$ . Positione igitur est  $ΕΔΖ$  circulus, datum enim est ejus centrum  $A$  positione, et ipsa  $ΑΔ$  ex centro magnitudine. Positione autem et  $BΓ$  recta. Si autem duæ lineæ positione datæ sese secant, datum est punctum in quo sese secant; datum igitur est ipsum  $Δ$ . Est autem et ipsum  $A$  datum; positione igitur est ipsa  $ΑΔ$ .

## PROPOSITION XXXI.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite donnée de grandeur à une droite donnée de position, cette droite sera donnée de position.

Du point donné  $A$ , menons la ligne droite  $ΑΔ$  donnée de grandeur à la droite  $BΓ$  donnée de position; je dis que cette droite est donnée de position.

Car du centre  $A$ , et de la distance  $ΑΔ$ , décrivons le cercle  $ΕΔΖ$ ; le cercle  $ΕΔΖ$  sera donné de position (déf. 6); car son centre  $A$  est donné de position, et son rayon  $ΑΔ$  est donné de grandeur. Et puisque la droite  $BΓ$  est donnée de position, et que, lorsque deux lignes données de position se coupent, le point où elles se coupent est donné (25), le point  $Δ$  sera donné; donc  $ΑΔ$  est donné de position (26).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ'.

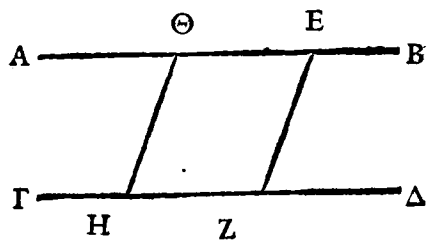
PROPOSITIO XXXII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένας ποιοῦσα γωνίας, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ  $EZ$ , δεδομένας ποιοῦσα γωνίας τὰς ὑπὸ  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ . λέγω ὅτι δέδοται ἡ  $EZ$  τῷ μεγέθει.

Si in parallelas positione datas rectas, recta linea ducatur, datos faciens angulos, data est ducta magnitudine.

Etenim in parallelas positione datas rectas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , recta linea ducatur  $EZ$ , datos faciens angulos  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ ; dico datam esse ipsam  $EZ$  magnitudine.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  δοθὲν σημεῖον τὸ  $H$ , καὶ διὰ τοῦ  $H$  τῇ  $EZ$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $H\Theta$ . Καὶ ἔπειτα παράλληλός ἐστιν ἡ  $H\Theta$  τῇ  $EZ$ , καὶ εἰς αὐτάς εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ  $\Gamma\Delta$ . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $EZ\Delta$  τῇ ὑπὸ  $\Theta H\Delta$ . Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ  $EZ\Delta$ <sup>2</sup> δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $\Theta H\Delta$ . Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν τῇ  $\Gamma\Delta$ , καὶ τῷ πρὸς

Sumatur enim in  $\Gamma\Delta$  datum punctum  $H$ , et per punctum ipsi  $EZ$  parallela ducatur  $H\Theta$ . Et quoniam parallela est  $H\Theta$  ipsi  $EZ$ , et in illas recta incidit  $\Gamma\Delta$ ; æqualis igitur est  $EZ\Delta$  ipsi  $\Theta H\Delta$ . Datus autem ipse  $EZ\Delta$ ; datus igitur et ipse  $\Theta H\Delta$ . Quoniam igitur ad datam positione rectam  $\Gamma\Delta$ , et per punctum in eâ datum  $H$ , recta

PROPOSITION XXXII.

Si, des droites parallèles données de position, on mène une ligne droite faisant des angles donnés, la droite menée est donnée de grandeur.

Entre les droites parallèles  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , données de position, menons la ligne droite  $EZ$ , faisant les angles donnés  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ ; je dis que la droite  $EZ$  est donnée de grandeur.

Car dans la droite  $\Gamma\Delta$ , prenons un point donné  $H$ , et par le point  $H$  menons la droite  $H\Theta$  parallèle à  $EZ$  (31. 1). Puisque  $H\Theta$  est parallèle à  $EZ$ , et que la droite  $\Gamma\Delta$  tombe sur ces parallèles, l'angle  $EZ\Delta$  sera égal à l'angle  $\Theta H\Delta$  (29. 1). Mais l'angle  $EZ\Delta$  est donné; l'angle  $\Theta H\Delta$  est donc donné. Et puisque l'on a mené à la droite  $\Gamma\Delta$  donnée de position, par le point  $H$  donné dans cette droite, la ligne

αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ  $H$ , εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $H\Theta$ , δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $\Theta HZ$ . θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ  $H\Theta$ . θέσει δὲ καὶ ἡ<sup>3</sup>  $AB$  δοθὲν ἄρα ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ  $\Theta$  σημεῖον. Ἐστι δὲ καὶ τὸ  $H$  δοθὲν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ  $H\Theta$  τῷ μεγέθει. Καὶ ἐστὶν ἴση τῇ  $EZ$ . δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $EZ$  τῷ μεγέθει.

linea  $H\Theta$  ducta est, datum faciens angulum  $\Theta HZ$ ; positione igitur est  $H\Theta$ . Positione autem et  $AB$ ; datum igitur est  $\Theta$  punctum. Est autem et ipsum  $H$  datum; data igitur est  $H\Theta$  magnitudine. Et est ipsa æqualis ipsi  $EZ$ ; data igitur est et  $EZ$  magnitudine.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

## PROPOSITIO XXXIII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένη τῷ μεγέθει· δεδομένας ποιήσει γωνίας.

Si in parallelas positione datas rectas recta linea ducatur, data magnitudine, ea datos faciet angulos.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθῃ ἡ  $EZ$ , δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δεδομένας ποιήσει γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ .

Etenim in parallelas positione datas rectas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  recta linea ducatur  $EZ$ , data magnitudine; dico datos ipsam facere angulos  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ .

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $AB$  δοθὲν σημεῖον τὸ  $H$ , καὶ διὰ τοῦ  $H$  τῇ  $EZ$  παράλληλος ἤχθῃ ἡ  $H\Theta$ . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $ZE$  τῇ  $H\Theta$ . Δοθεῖσα δὲ  $EZ$  τῷ μεγέθει.

Sumatur enim in  $AB$  datum punctum  $H$ , et per punctum  $H$  ipsi  $EZ$  parallela ducatur  $H\Theta$ ; æqualis igitur est  $ZE$  ipsi  $H\Theta$ . Data autem  $EZ$

droite  $H\Theta$ , faisant l'angle donné  $\Theta HZ$ , la droite  $H\Theta$  sera donnée de position (29). Mais  $AB$  est donné de position; le point  $\Theta$  est donc donné (25). Mais le point  $H$  est donné; la droite  $H\Theta$  est donc donnée de grandeur (26). Mais cette droite est égale à  $EZ$  (34. 1); la droite  $EZ$  est donc donnée de grandeur (déf. 1).

## PROPOSITION XXXIII.

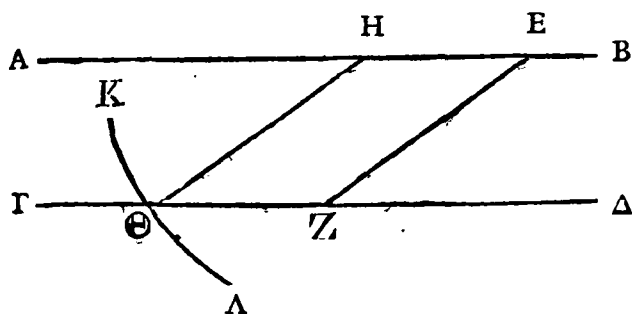
Si, entre deux droites parallèles, données de position, on mène une droite donnée de grandeur, cette droite fera les angles donnés.

Entre les droites parallèles  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , données de position, menons la droite  $EZ$  donnée de grandeur; je dis que cette droite fait des angles donnés  $BEZ$ ,  $EZ\Delta$ .

Car dans la droite donnée  $AB$  prenons un point donné  $H$ , et par le point  $H$  menons  $H\Theta$  parallèle à  $EZ$  (31. 1); la droite  $ZE$  sera égale à  $H\Theta$  (34. 1). Mais

γίθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $H\Theta$  τῷ μεγέθει<sup>2</sup>. Καὶ ἔστι  
τὸ  $H$  δόν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι  
δὲ τῷ  $H\Theta$ , κύκλος γραφόμενος ἔστι τῇ θέσει.

magnitudine; data igitur et  $H\Theta$  magnitudine.  
Et est ipsum  $H$  datum; ergo centro quidem  
 $H$ , intervallo autem  $H\Theta$ , circulus descriptus



Γεγράφω, καὶ ἔστω ὁ  $K\Theta\Lambda$ . θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ  
 $K\Theta\Lambda$ . θέσει δὲ καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$ . δόν· ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Theta$   
σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ  $H$  δόν· θέσει ἄρα ἐστὶν  
ἡ  $H\Theta$ . θέσει δὲ καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$ . δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ  
ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  γωνία. Καὶ ἴσται τῇ ὑπὸ  $EZ\Delta$  ἴση·  
δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $EZ\Delta$ · καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ  
ὑπὸ  $ZEB$  δοθεῖσα ἐστὶ<sup>4</sup>.

erit positione. Describatur, et sit  $K\Theta\Lambda$ ; posi-  
tione igitur est circulus  $K\Theta\Lambda$ . positione autem  
et ipsa  $\Gamma\Delta$ ; datum igitur est  $\Theta$  punctum. Est au-  
tem et ipsum  $H$  datum; positione igitur est  
ipsa  $H\Theta$ . Positione autem et ipsa  $\Gamma\Delta$ ; datus igitur  
est  $H\Theta\Delta$  angulus. Et est ipsi  $EZ\Delta$  æqualis;  
datus igitur et ipse  $EZ\Delta$ ; et reliquus igitur ipse  
 $ZEB$  datus est.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  δόν· σημεῖον τὸ  $H$ , καὶ  
κείσθω τῇ  $EZ$  ἴση ἡ  $H\Delta$ , καὶ κέντρῳ<sup>1</sup> μὲν τῷ  $H$ ,

Sumatur in ipsâ  $\Gamma\Delta$  datum punctum  $H$ , et po-  
natur ipsi  $EZ$  æqualis  $H\Delta$ , et centro quidem  $H$ ,

la droite  $EZ$  est donnée de grandeur; la droite  $H\Theta$  est donc donnée de grandeur.  
Mais le point  $H$  est donné; le cercle décrit du point  $H$ , et de la distance  $H\Theta$  est  
donc donné de position ( déf. 6 ). Decrivons ce cercle, et que ce cercle soit  
 $K\Theta\Lambda$ ; le cercle  $K\Theta\Lambda$  sera donné de position. Mais  $\Gamma\Delta$  est donné de position;  
le point  $\Theta$  est donc donné (25). Mais le point  $H$  est donné; donc  $H\Theta$  est donné  
de position.(26). Mais  $\Gamma\Delta$  est donné de position; l'angle  $H\Theta\Delta$  est donc donné.  
Mais cet angle est égal à l'angle  $EZ\Delta$  (29. 1); l'angle  $EZ\Delta$  est donc donné  
(32. 1) (4); l'angle restant  $ZEB$  est donc donné.

AUTREMENT.

Dans  $\Gamma\Delta$  prenons un point donné  $H$ ; faisons  $H\Delta$  égal à  $EZ$ , et du centre  $H$ , et





ὕπὸ ΘΗΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ· ὥστε καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΗΖΕ δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ δοθεῖσά ἐστι.

æqualis. Datus autem ipse ΘΗΖ; datus igitur et ipse ΗΖΘ; quare et ipse deinceps ΗΖΕ datus est; et reliquus ΖΕΒ datus est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

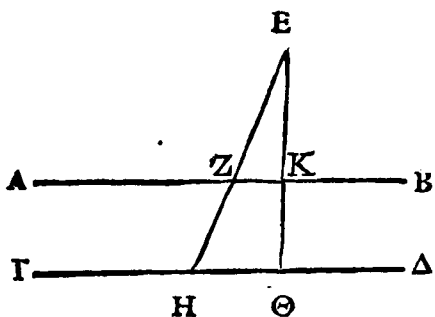
PROPOSITIO XXXIV.

Εάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας ἀπὸ δεδομένου σημείου εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, εἰς δεδομένον λόγον τμηθήσεται.

Si in parallelas positione datas rectas a dato puncto recta linea ducatur, illa in datam rationem secabitur.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Ε, εὐθεῖα γραμμὴ ἥχθω ἡ ΕΖΗ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς.

Etenim in parallelas positione datas rectas ΑΒ, ΓΔ, a dato puncto Ε, recta linea ducatur ΕΖΗ; dico rationem esse ipsius ΕΖ ad ΖΗ datam.



Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΕΚΘ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου

Ducatur enim a puncto Ε ad ΓΔ perpendicularis ΕΚΘ. Et quoniam a dato puncto Ε

ΘΗΖ est donné (15. 1); l'angle ΗΖΘ est donc donné; l'angle de suite ΗΖΕ est donc donné (32. 1) (4); l'angle restant ΖΕΒ est donc donné.

PROPOSITION XXXIV.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite à des droites parallèles données de position, cette droite sera coupée en raison donnée.

Par le point donné Ε, menons la ligne droite ΕΖΗ aux droites ΑΒ, ΓΔ parallèles et données de position; je dis que la raison de ΕΖ à ΖΗ est donnée.

Car du point Ε, menons à ΓΔ la perpendiculaire ΕΚΘ (12. 1). Puisque du



τοῦ Ε ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΓΔ εὐθεΐα γραμμὴ ἥκται ἡ ΕΘ, δεδομένην ποιούσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. Θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Κ, Θ σημείων. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ε δοθὲν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΚ, ΚΘ· λόγος ἄρα τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς.

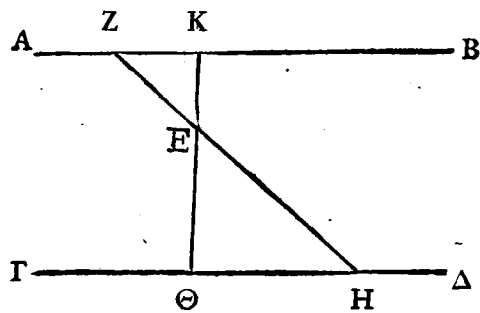
ad datam positione rectam ΓΔ, recta linea ducta est ΕΘ, datum faciens angulum ΕΘΗ; positione igitur est ΕΘ. Positione autem et utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ; datum igitur est utrumque punctorum Κ, Θ. Est autem et Ε datum; data igitur est utraque ipsarum ΕΚ, ΚΘ; ratio igitur ipsius ΕΚ ad ΚΘ data. Et est ut ΕΚ ad ΚΘ ita ΕΖ ad ΖΗ; ratio igitur et ipsius ΕΖ ad ΖΗ data.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Ε, εὐθεΐα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΖΕΗ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς.

Etenim in parallelas positione datas ΑΒ, ΓΔ, a dato puncto Ε, recta linea ducatur ΖΕΗ; dico rationem esse ipsius ΗΕ ad ΕΖ datam.



Ἠχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΕΘ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Κ. Καὶ

Ducatur enim a puncto Ε ad ipsam ΓΔ perpendicularis ΕΘ, et producatur ad Κ. Et quo-

point donné Ε, on a mené à la droite ΓΔ, donnée de position, la ligne droite ΕΘ faisant un angle donné ΕΘΗ, la droite ΕΘ sera donnée de position (30). Mais chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donnée de position; chacun des points Κ, Θ est donc donné (25). Mais le point Ε est donné; chacune des droites ΕΚ, ΚΘ est donc donnée (26); la raison de ΕΚ à ΚΘ est donc donnée. Mais ΕΚ est à ΚΘ comme ΕΖ est à ΖΗ (2. 6); la raison de ΕΖ à ΖΗ est donc donnée (déf. 2).

ΑΥΤΡΕΜΕΝΤ.

Par le point Ε, menons la ligne droite ΖΕΗ entre les parallèles ΑΒ, ΓΔ données de position; je dis que la raison de ΗΕ à ΕΖ est donnée..

Car du point Ε, menons la droite ΕΘ perpendiculaire à ΓΔ (12. 1), et prolon-

ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Ε ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΓΔ εὐθεΐα γραμμὴ<sup>2</sup> ἥκται ἡ ΕΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕΚ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ· δοθέν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Κ, Θ σημείων. Ἐστὶ δὲ<sup>3</sup> καὶ τὸ Ε δοθέν<sup>4</sup> δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν<sup>4</sup> ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΚ· λόγος ἄρα τῆς ΘΕ πρὸς τὴν<sup>5</sup> ΕΚ δοθείς. Ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΗΕ πρὸς τὴν<sup>7</sup> ΕΖ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. λέ.

Εὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τῆς<sup>1</sup> τομῆς παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Απὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ εὐθεΐα γραμμὴ ἥχθω ἡ

niam a dato puncto E ad datam positione rectam ΓΔ recta linea ΕΘ ducta est; datum faciens angulum ΕΘΗ; positione igitur est ipsa ΘΕΚ. Positione autem et utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ; datum igitur est utrumque punctorum Κ, Θ. Est autem et punctum Ε datum; data igitur est utraque ipsarum ΘΕ, ΕΚ; ratio igitur ipsius ΘΕ ad ΕΚ data. Ut autem ΘΕ ad ΕΚ ita ΗΕ ad ΕΖ; ratio igitur et ipsius ΗΕ ad ΕΖ data.

PROPOSITIO XXXV.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea ducatur, et secetur in data ratione, per sectionem autem contra datam positione rectam recta linea ducatur; data est ducta positione.

A dato enim puncto Α ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducatur ΑΔ, et sece-

geons la vers Κ. Puisque du point Ε, on a mené à la droite ΓΔ, donnée de position, la ligne droite ΕΘ, faisant un angle donné ΕΘΗ, la droite ΘΕΚ sera donnée de position (30). Mais chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donnée de position; chacun des points Κ, Θ est donc donné (25). Mais le point Ε est donné; chacune des droites ΘΕ, ΕΚ est donc donnée (26); la raison de ΘΕ à ΕΚ est donc donnée (1). Mais ΘΕ est à ΕΚ comme ΗΕ est à ΕΖ (4. 6); la raison de ΗΕ à ΕΖ est donc donnée (déf. 2).

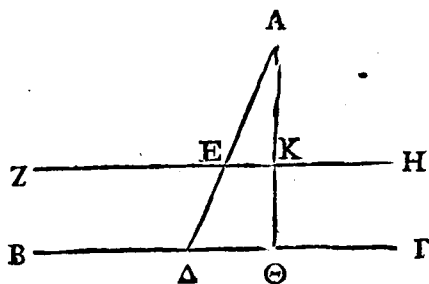
PROPOSITION XXXV.

Si d'un point donné, on mène une ligne droite à une droite donnée de position, si cette droite est coupée en raison donnée, et si, par la section, on mène une ligne droite parallèle à la droite donnée de position, la droite menée sera donnée de position.

Du point donné Α, menons une ligne droite ΑΔ à la droite ΒΓ donnée de

ΑΔ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον, τὸν τῆς ΔΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΗ.

tur in datâ ratione ipsius ΔΕ ad ΕΑ, et ducatur per punctum Ε ipsi ΒΓ parallela ΖΗ; dico positione esse ipsam ΖΗ.



Ἠχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ. Καὶ<sup>2</sup> ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὴν<sup>3</sup> θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ εὐθεΐα γραμμὴ ἤκται ἡ ΑΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. Θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. Εστὶ δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς<sup>5</sup>. συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθείς<sup>6</sup>. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΘ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῷ μεγέθει<sup>7</sup>. Ἀλλὰ καὶ τῇ

Ducatur enim a puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΘ. Et quoniam a dato puncto Α ad datam positione rectam ΒΓ recta linea ducta est ΑΘ, datum faciens angulum ΑΘΔ; positione igitur est ipsa ΑΘ. Positione autem et ipsa ΒΓ; datum igitur est Θ punctum. Est autem et punctum Α datum; data igitur est ΑΘ positione et magnitudine. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΕΔ ita ΑΚ ad ΚΘ, et est ratio ipsius ΑΕ ad ΕΔ data; ratio igitur ipsius ΑΚ ad ΚΘ data; componendo igitur ratio est ipsius ΑΘ ad ΑΚ data. Data autem ΑΘ magnitudine; data igitur et ΑΚ magnitudine. Sed et positione,

position; coupons cette droite dans la raison donnée de ΔΕ à ΕΑ, et par le point Ε, menons ΖΗ parallèle à ΒΓ; je dis que la droite ΖΗ est donnée de position.

Car du point Α, menons ΑΘ perpendiculaire à ΒΓ. Puisque du point Α, on a mené à la droite ΒΓ donnée de position, la ligne droite ΑΘ, faisant un angle donné ΑΘΔ; la droite ΑΘ sera donnée de position (30). Mais ΒΓ est donné de position; le point Θ est donc donné (25). Mais le point Α est donné; la droite ΑΘ est donc donnée de position et de grandeur (26). Mais ΑΕ est à ΕΔ comme ΑΚ est à ΚΘ, et la raison de ΑΕ à ΕΔ est donnée (2. 6); la raison de ΑΚ à ΚΘ est donc donnée (déf. 2); donc, par addition, la raison de ΑΘ à ΑΚ est donnée (6). Mais ΑΘ est donné de grandeur; la droite ΑΚ est donc donnée

Θέσει, καὶ ἐστὶν τὸ Α δοθέν<sup>8</sup>. δοθέν ἄρα καὶ τὸ Κ. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Κ, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ εὐθεΐα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ.

et est punctum A datum; datum igitur et K punctum. Quoniam igitur per datum punctum K, contra datam positione rectam BG recta linea ducta est ZH; positione igitur est ipsa ZH.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ'.

## PROPOSITIO XXXVI.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προστεθῇ τις αὐτῇ εὐθεΐα, λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης παρὰ τῇ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν<sup>1</sup> εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεΐσα τῇ θέσει.

Si a dato puncto ad datam positione rectam recta linea ducatur, et adjiciatur aliqua ipsi recta, rationem habens datam ad ipsam; per extremum autem adjunctæ contra datam positione rectam recta linea ducatur, data est ducta positione.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΒΓ εὐθεΐα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ προσκείσθω τῇ ΑΔ ἡ ΑΕ λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν ΑΔ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΚ.

A dato enim puncto A ad datam positione rectam BG recta linea ducatur AD, et adjiciatur ipsi AD ipsa AE rationem habens ad AD datam, per punctum autem E ipsi BG parallela ducatur ZK; dico positione esse ipsam ZK.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ<sup>2</sup> τὴν ΒΓ κάθετος

Ducatur enim a puncto A ad BG perpendi-

de grandeur (2). Mais elle est donnée de position, et le point A est aussi donné; le point K est donc donné (27). Mais par le point donné K, on a mené la ligne droite ZH parallèle à la droite BG donnée de position; ZH est donc donné de position (28).

## PROPOSITION XXXVI.

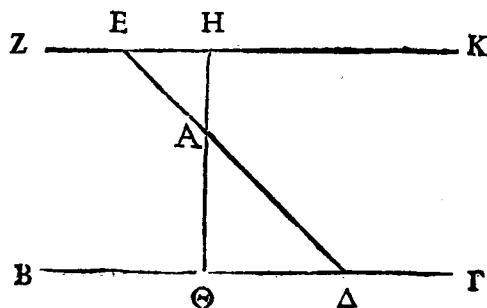
Si d'un point donné, on mène une ligne droite à une droite donnée de position, si on lui ajoute une droite qui ait une raison donnée avec elle, et si, par l'extrémité de la droite ajoutée, on mène une ligne droite parallèle à la droite donnée de position, la droite menée sera donnée de position.

Car du point donné A, menons la ligne droite AD à la droite BG donnée de position; ajoutons à AD une droite AE, qui ait avec AD une raison donnée, et, par le point E, menons la droite ZK parallèle à BG; je dis que ZK est donné de position.

Car du point A, menons la droite AO perpendiculaire à BG, et prolongeons cette

ἡ  $ΑΘ$ , καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ  $Η$ . Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ  
 δεδομένου σημείου τοῦ  $Α$  ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐ-  
 θεϊαν τὴν  $ΒΓ$  εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $ΑΘ$ , δεδο-

cularis  $ΑΘ$ , et producat<sup>r</sup> ad punctum  $Η$ . Et  
 quoniam a dato puncto  $A$  ad datam positione  
 rectam  $ΒΓ$  recta linea ducta est  $ΑΘ$ , datum



μένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΑΘΓ$ . Θέσει ἄρα  
 ἐστὶν ἡ  $ΘΑΗ$ . Θέσει δὲ καὶ ἡ  $ΒΓ$ . δοθέν ἄρα ἐστὶ  
 τὸ  $Θ$  σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ  $Α$  δοθέν. δοθεῖσα  
 ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΑΘ$ . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς  $ΔΑ$  πρὸς  
 τὴν  $ΑΕ$  δοθείς, ὡς δὲ ἡ  $ΔΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΕ$  οὕτως  
 ἡ  $ΘΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΗ$ . λόγος ἄρα καὶ τῆς  $ΘΑ$ , πρὸς  
 τὴν  $ΑΗ$  δοθείς<sup>4</sup>. Δοθεῖσαι δὲ ἡ  $ΘΑ$ . δοθεῖσα ἄρα καὶ  
 ἡ  $ΑΗ$ . Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ  $Α$ .  
 δοθέν ἄρα καὶ τὸ  $Η$ . Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου ση-  
 μεῖου τοῦ  $Η$  παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν  
 $ΒΓ$  εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ  $ΖΗΚ$ . Θέσει ἄρα ἐστὶν  
 ἡ  $ΖΗΚ$ .

faciens angulum  $ΑΘΓ$ ; positione igitur est ipsa  
 $ΘΑΗ$ . Positione autem et ipsa  $ΒΓ$ ; datum  
 igitur est  $Θ$  punctum. Est autem et punctum  
 $A$  datum; data igitur est ipsa  $ΑΘ$ . Et quo-  
 niam ratio est ipsius  $ΔΑ$  ad  $ΑΕ$  data, ut au-  
 tem  $ΔΑ$  ad  $ΑΕ$  ita  $ΘΑ$  ad  $ΑΗ$ ; ratio igitur et  
 ipsius  $ΘΑ$  ad  $ΑΗ$  data. Data autem  $ΘΑ$ ; data  
 igitur et ipsa  $ΑΗ$ . Sed et positione, et est da-  
 tum punctum  $A$ ; datum igitur et punctum  $H$ .  
 Quoniam igitur per datum punctum  $H$  contra  
 datam positione rectam  $ΒΓ$  recta linea ducta  
 est  $ΖΗΚ$ ; positione igitur est ipsa  $ΖΗΚ$ .

droite vers le point  $H$ . Puisque du point donné  $A$ , on a mené à la droite  $ΒΓ$  donnée de position, la ligne droite  $ΑΘ$ , faisant l'angle donné  $ΑΘΓ$ ; la droite  $ΘΑΗ$  sera donnée de position (30). Mais  $ΒΓ$  est donné de position; le point  $Θ$  est donc donné (25). Mais le point  $A$  est donné; la droite  $ΑΘ$  est donc donnée (26). Mais la raison de  $ΔΑ$  à  $ΑΕ$  est donnée, et  $ΔΑ$  est à  $ΑΕ$  comme  $ΘΑ$  est à  $ΑΗ$  (4. 6); la raison de  $ΘΑ$  à  $ΑΗ$  est donc donnée (déf. 2). Mais  $ΘΑ$  est donné; la droite  $ΑΗ$  est donc donnée (déf. 2). Mais elle est donnée de position, et le point  $A$  est aussi donné; le point  $H$  est donc donné (27). Mais par le point donné  $H$ , on a mené la ligne droite  $ΖΗΚ$  parallèle à la droite  $ΒΓ$  donnée de position; la droite  $ΖΗΚ$  est donc donnée de position (28).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ'.

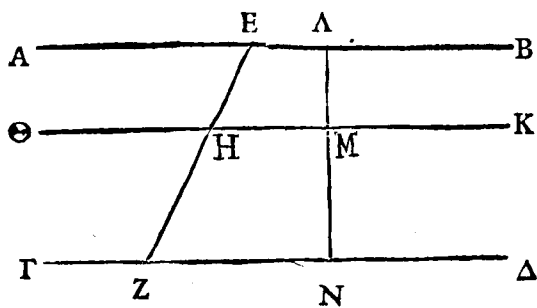
PROPOSITIO XXXVII.

Εάν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τῆς τομῆς παρὰ τὰς<sup>1</sup> τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ<sup>2</sup> ἀχθῇ, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον τὴν τῆς ZH πρὸς τὴν HE, καὶ διήχθω διὰ τοῦ H ὅποτέρᾳ τῶν AB, ΓΔ παράλληλος ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Si in parallelas positione datas rectas recta linea ducatur, et ipsa secetur in datâ ratione, per sectionem vero contra datas positione rectas recta linea ducatur; data est ducta positione.

In parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ recta linea ducatur EZ, et ipsa secetur in datâ ratione ipsius ZH ad HE, et ducatur per punctum H utrilibet ipsarum AB, ΓΔ parallela ΘΚ; dico positione esse ipsam ΘΚ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AB δοθέν σημεῖον τὸ Λ, καὶ κατήχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ

Sumatur enim in AB datum punctum Λ, et ducatur a puncto Λ ad ΓΔ perpendicularis AN.

PROPOSITION XXXVII.

Si, entre des droites parallèles données de position, on mène une ligne droite; si l'on coupe cette droite en raison donnée, et si, par la section, on mène une ligne droite parallèle aux droites données de position, la droite menée est donnée de position.

Entre les parallèles AB, ΓΔ données de position, menons la ligne droite EZ, que cette droite soit coupée dans la raison donnée de ZH à HE, et par le point H menons ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ; je dis que ΘΚ est donné de position.

Car dans la droite AB, prenons un point donné Λ, et du point Λ, menons AN

ΑΝ. Ἐπεὶ οὖν<sup>3</sup> ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΓΔ, εὐθεΐα γραμμὴ ἥκται ἡ ΑΝ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ<sup>4</sup> ΑΝΔ. Θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. Θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα τὸ Ν σημεῖον. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ δοθείς, ὥς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΑ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὴν<sup>5</sup> ΜΑ δοθείς. Ὡστε καὶ τῆς ΝΑ πρὸς τὴν ΑΜ ἐστὶ δοθείς λόγος<sup>6</sup>. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΝΑ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΜ. Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Μ παρά θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΓΔ εὐθεΐα γραμμὴ ἥκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Quoniam igitur a dato puncto Α ad datam positione rectam ΓΔ recta linea ducta est ΑΝ, datum faciens angulum ΑΝΔ; positione igitur est ΑΝ. Positione autem et ΓΔ; datum igitur Ν punctum. Est autem et punctum Α datum; data igitur est ΑΝ. Et quoniam ratio est ipsius ΖΗ ad ΗΕ data, ut autem ΖΗ ad ΗΕ ita ΝΜ ad ΜΑ; ratio igitur et ipsius ΝΜ ad ΜΑ data. Quare et ipsius ΝΑ ad ΑΜ est data ratio. Data autem ipsa ΝΑ; data igitur et ΑΜ. Sed et positione, et est datum Α punctum; datum igitur et Μ punctum. Quoniam igitur per datum punctum Μ contra datam positione rectam ΓΔ recta linea ducta est ΘΚ; positione igitur est ipsa ΘΚ.

perpendiculaire à ΓΔ. Puisque du point donné Α, on a mené à la droite ΓΔ donnée de position, la droite ΑΝ faisant un angle donné ΑΝΔ, la droite ΑΝ sera donnée de position (30). Mais ΓΔ est donné de position, le point Ν est donc donné (25). Mais le point Α est donné; donc ΑΝ est donné (26). Mais la raison de ΖΗ à ΗΕ est donnée, et ΖΗ est à ΗΕ comme ΝΜ est à ΜΑ (2. 6); la raison de ΝΜ à ΜΑ est donc donnée (2); la raison de ΝΑ à ΑΜ est donc donnée (6). Mais ΝΑ est donné; la droite ΑΜ est donc donnée (2). Mais elle est donnée de position, et le point Α est donné; le point Μ est donc donné (26). Mais, par le point donné Μ, on a mené la ligne droite ΘΚ parallèle à la droite ΓΔ donnée de position; ΘΚ est donc donné de position (28).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

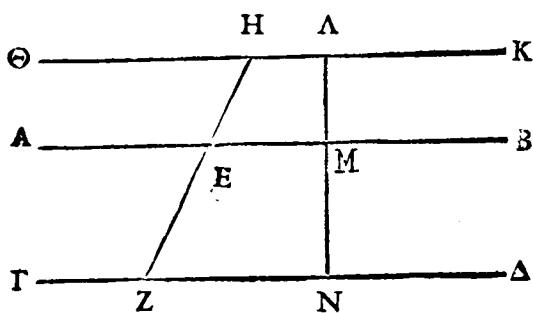
PROPOSITIO XXXVIII.

Εὰν εἰς παραλλήλους τῇ θείσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἄχθῃ, καὶ προστεθῇ τις αὐτῇ εὐθεῖα λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένην, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς τῇ θείσει δεδομένας παραλλήλους<sup>1</sup> εὐθεῖα γραμμὴ ἄχθῃ· δέδοται ἡ ἄχθεισα τῇ θείσει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θείσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZ, καὶ προσκείσθω τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ EH λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν EZ δεδομένην, διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρᾳ τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος<sup>2</sup> ἤχθω ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θείσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Si in parallelas positione datas rectas recta linea ducatur, et adjiciatur aliqua ipsi recta rationem habens datam ad ipsam, per extremum vero adjunctæ contra datas positione parallelas recta linea ducatur, data est ducta positione.

In parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ recta linea ducatur EZ, et adjiciatur aliqua ipsi recta EH rationem habens datam ad EZ datam, per H autem punctum utrilibet rectarum AB, ΓΔ recta linea parallela ducatur ΘΚ; dico positione esse ipsam ΘΚ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AB δοθὲν σημεῖον τὸ M, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ M ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος εὐθεῖα

Sumatur enim in ipsâ AB datum punctum M, et a puncto M ad ΓΔ perpendicularis recta

PROPOSITION XXXVIII.

Si, entre des droites parallèles et données de position, on mène une ligne droite, si l'on ajoute à cette droite une droite qui ait avec elle une raison donnée, et si, par l'extrémité de l'ajoutée, on mène une droite parallèle aux parallèles données de position, la droite menée sera donnée de position.

Entre les droites AB, ΓΔ, parallèles et données de position, menons la ligne droite EZ, ajoutons-lui une droite EH qui ait avec EZ une raison donnée, et par le point H, menons la ligne droite ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ; je dis que la droite ΘΚ est donnée de position.

Car dans la droite AB, prenons un point donné M, et du point M, menons la ligne



γραμμὴ ἡ MN, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Λ. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου<sup>3</sup> τοῦ M, ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν ΓΔ, εὐθεΐα γραμμὴ ἤκται ἡ MN, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ MNΔ. Θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ MN. Θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ. δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ N σημεῖον. Ἐστι δὲ καὶ τὸ M δοθέν. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ MN. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ZE πρὸς τὴν EH δοθείς, ὥς δὲ ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως ἡ NM πρὸς τὴν ΜΛ. λόγος ἄρα καὶ τῆς NM πρὸς τὴν ΜΛ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ MN. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΜΛ. Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ τὸ N δοθέν. δοθέν ἄρα καὶ τὸ Λ. Ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Λ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεΐαν τὴν AB εὐθεΐα γραμμὴ ἤκται ἡ ΘΚ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

linea ducatur MN, et producatum ad Λ punctum. Quoniam igitur a dato puncto M ad datam positione rectam ΓΔ, recta linea ducta est MN, datum faciens angulum MNΔ; positione igitur est MN. Positione autem et ΓΔ; datum igitur est N punctum. Est autem et punctum M datum; data igitur est MN. Et quoniam ratio est ipsius ZE ad EH data, ut autem ZE ad EH ita NM ad ΜΛ; ratio igitur et ipsius NM ad ΜΛ data. Data autem MN; data igitur et ΜΛ. Sed et positione, et est punctum N datum; datum igitur et Λ punctum. Quoniam igitur per datum punctum Λ contra datam positione rectam AB recta linea ducta est ΘΚ; positione igitur est ΘΚ.

droite MN perpendiculaire à ΓΔ (12.1), et prolongeons-la vers Λ. Puisque du point donné M on a mené la ligne droite MN perpendiculaire à la droite ΓΔ donnée de position, et faisant un angle donné MNΔ, la droite MN sera donnée de position (28). Mais ΓΔ est donné de position; le point N est donc donné (25). Mais le point M est donné; donc MN est donné (26). Mais la raison de ZE à EH est donnée, et ZE est à EH comme NM est à ΜΛ (2.6); donc la raison de NM à ΜΛ est donnée. Mais MN est donné; la droite ΜΛ est donc donnée (2). Mais cette droite est donnée de position, et le point N est donné; le point Λ est donc donné (26). Mais la ligne droite ΘΚ a été menée par le point donné Λ parallèlement à la droite AB donnée de position; ΘΚ est donc donné de position (28).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

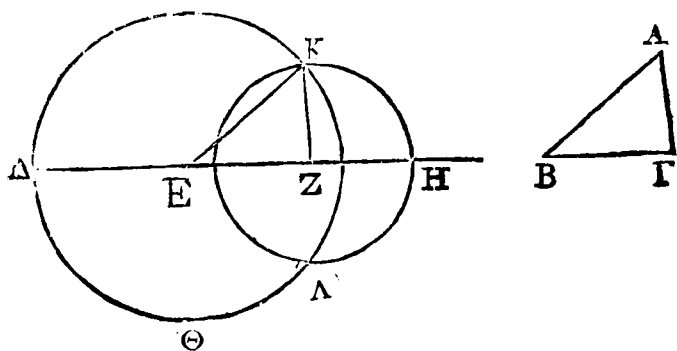
PROPOSITIO XXXIX.

Εάν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἢ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Si trianguli unumquodque laterum datum sit magnitudine, datum est triangulum specie.

Trianguli enim ΑΒΓ unumquodque laterum datum sit magnitudine; dico ΑΒΓ triangulum datum esse specie.



Εκκείσθω γὰρ ἡ εὐθεῖα τῇ θήσει δεδομένη ἡ ΔΗ', πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ λοιπόν· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ<sup>2</sup> ἡ ΔΕ. Αλλὰ καὶ τῇ θήσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. Τῇ δὲ ΒΓ κείσθω<sup>3</sup> ἴση ἡ ΕΖ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. Αλλὰ καὶ τῇ θήσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. Πάλιν,

Exponatur enim recta ΔΗ positione data, finita quidem ad punctum Δ, infinita vero ad reliquum; et ponatur ipsi quidem ΑΒ æqualis ΔΕ. Data autem ΑΒ; data igitur et ΔΕ. Sed et positione, et est datum punctum Δ; datum igitur et punctum Ε. Ipsi autem ΒΓ ponatur æqualis ΕΖ. Data autem ΒΓ; data igitur et ΕΖ. Sed et positione, et est datum punctum Ε; datum

PROPOSITION XXXIX.

Si chacun des côtés d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce.

Que chacun des côtés du triangle ΑΒΓ soit donné de grandeur; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car que la droite ΔΗ soit donnée de position; qu'elle soit finie en Δ, et infinie de l'autre côté; faisons ΔΕ égal à ΑΒ (5. 1). Puisque ΑΒ est donné, la droite ΔΕ est donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point Δ est donné; donc le point Ε est donné (27). Faisons ΕΖ égal à ΒΓ. Puisque ΒΓ est donné, ΕΖ est aussi donné. Mais cette droite est donnée de position, et le point Ε est

κείσθω τῇ<sup>4</sup> ΑΓ ἴση ἡ ΖΗ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Ἀλλὰ καὶ τῇ Θέσει, καὶ ἔστι δοθέν<sup>5</sup> τὸ Ζ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Η. Καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ, κύκλος γεγράφθω<sup>6</sup> ὁ ΔΚΘ· Θέσει ἄρα ἔστιν ὁ ΔΚΘ. Πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ· Θέσει ἄρα ἔστιν ὁ ΗΚΛ. Θέσει δὲ καὶ ὁ ΔΚΘ κύκλος· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ<sup>7</sup> τὸ Κ σημείον. Ἔστι δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Ε, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἐκάστη τῶν ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ τῇ Θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δίδοται ἄρα τὸ ΚΕΖ τρίγωνον τῷ εἶδει. Καὶ ἔστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ· δίδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

igitur et Z punctum. Rursus, ponatur ipsi ΑΓ æqualis ΖΗ. Data autem ΑΓ; data igitur et ΖΗ. Sed et positione, et est datum punctum Ζ; datum igitur et punctum Η. Et centro quidem Ε, intervallo autem ΕΔ, circulus describatur ΔΚΘ; positione igitur est ΔΚΘ circulus. Rursus, centro quidem Ζ, intervallo autem ΖΗ circulus describatur ΗΚΛ; positione igitur est ΗΚΛ circulus. Positione autem et ΔΚΘ circulus; datum igitur et Κ punctum. Est autem et utrumque punctorum Ε, Ζ datum; data igitur est unaquæque ipsarum ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ positione et magnitudine; datum igitur ΚΕΖ triangulum specie. Et est et æquale et simile ipsi ΑΒΓ; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.

aussi donné; le point z est donc donné. De plus faisons ΖΗ égal à ΑΓ. Puisque ΑΓ est donné, la droite ΖΗ est donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point z est donné; le point Η est donc donné. Du centre Ε et de la distance ΕΔ, décrivons le cercle ΔΘΚ, le cercle ΔΚΘ sera donné de position (déf. 6). De plus, du centre Ζ et de la distance ΖΗ, décrivons le cercle ΗΚΛ; le cercle ΗΚΛ sera donné de position. Mais le cercle ΔΚΘ est donné de position; donc le point Κ est donné (25). Mais chacun des points Ε, Ζ est donné; donc chacune des droites ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ est donnée de position et de grandeur (26); donc le triangle ΚΕΖ est donné d'espèce (déf. 3). Mais il est égal et semblable au triangle ΑΒΓ (8. 1); le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

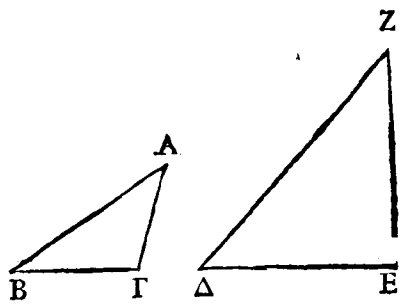
PROPOSITIO XL.

Εάν τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ᾗ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γὰρ τοῦ<sup>1</sup>  $AB\Gamma$  ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δέδοται τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον<sup>2</sup> τῷ εἶδει.

Si trianguli unusquisque angulorum datus sit magnitudine, datum est triangulum specie.

Trianguli enim  $AB\Gamma$  unusquisque angulorum datus sit magnitudine; dico datum esse  $AB\Gamma$  triangulum specie.



Εκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ  $\Delta E$ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ  $\Delta E$ , καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $\Delta$ ,  $E$ , τῇ μὲν ὑπὸ  $AB\Gamma$ <sup>3</sup> γωνία ἴση γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ  $Z\Delta E$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $A\Gamma B$  ἴση ἡ ὑπὸ  $Z\Delta E$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $\Delta Z E$  ἴση ἐστὶ<sup>3</sup>. δοθεῖσα δὲ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  σημείοις γωνιῶν<sup>4</sup>. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $E$ . Ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθεῖα τῇ

Exponatur enim positione et magnitudine data recta  $\Delta E$ , et constituatur ad  $\Delta E$ , et ad puncta in ipsâ  $\Delta$ ,  $E$ , angulo quidem  $AB\Gamma$  æqualis angulus rectilineus  $Z\Delta E$ , ipsi vero  $A\Gamma B$  æqualis ipse  $Z\Delta E$ ; reliquus igitur  $B\Delta\Gamma$  reliquo  $\Delta Z E$  æqualis est. Datus autem unusquisque angulorum ad puncta  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ; datus igitur et unusquisque angulorum ad  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $E$  puncta. Quoniam igitur ad datam positione rectam  $\Delta E$ , et

PROPOSITION XL.

Si chacun des angles d'un triangle est donné de grandeur, le triangle est donné d'espèce.

Que chacun des angles du triangle  $AB\Gamma$  soit donné de grandeur; je dis que le triangle est donné d'espèce.

Car que  $\Delta E$  soit une droite donnée de position et de grandeur. Sur  $\Delta E$ , et aux points  $\Delta$ ,  $E$  de cette droite, faisons l'angle rectiligne  $Z\Delta E$  égal à l'angle  $AB\Gamma$ , et l'angle  $Z\Delta E$  égal à l'angle  $A\Gamma B$  (23. 1); l'angle restant  $B\Delta\Gamma$  sera égal à l'angle restant  $\Delta Z E$  (32. 1). Mais chacun des angles aux points  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  est donné; chacun des angles aux points  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $E$  est donc donné. Mais on a mené à la droite

$\Delta E$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ  $\Delta$ , εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ  $\Delta Z$ , δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν πρὸς τῷ  $\Delta$ . Θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Delta Z$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  $EZ$  θέσει ἐστίν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ  $Z$  σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ<sup>5</sup> ἐκάτερον τῶν  $\Delta$ ,  $E$  δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκάστη τῶν  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$ ,  $EZ$  τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ  $\Delta ZE$  τρίγωνον τῷ εἶδει, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ  $AB\Gamma$  τριγώνῳ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Εὰν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνιῶν δεδομένην, περὶ δὲ τὴν δεδομένην γωνίαν αἱ<sup>1</sup> πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐχέτω γάρ τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$  μίαν γωνίαν<sup>2</sup> δεδομένην τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$ , περὶ δὲ τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  αἱ πλευραὶ αἱ  $BA$ ,  $A\Gamma$  πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ<sup>3</sup>  $AB\Gamma$  τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

ad punctum in eâ datum  $\Delta$ , recta linea ducta est  $\Delta Z$ , datum faciens angulum ad  $\Delta$  punctum; positione igitur est  $\Delta Z$ . Propter eadem utique et ipsa  $EZ$  positione est; datum igitur est  $Z$  punctum. Est autem unumquodque punctorum  $\Delta$ ,  $E$  datum; data igitur est unaquæque ipsarum  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$ ,  $EZ$  positione et magnitudine; datum est igitur  $\Delta ZE$  triangulum specie, et est simile triangulo  $AB\Gamma$ ; datum est igitur et  $AB\Gamma$  triangulum specie.

## PROPOSITIO XLI.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa datum autem angulum latera inter se rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Habeat enim triangulum  $AB\Gamma$  unum angulum datum  $BA\Gamma$ , circa angulum autem  $BA\Gamma$  latera  $BA$ ,  $A\Gamma$  inter se rationem habeant datam; dico  $AB\Gamma$  triangulum datum esse specie,

$\Delta E$  donnée de position, et au point donné  $\Delta$  une ligne droite  $\Delta Z$ , faisant un angle donné au point  $\Delta$ ;  $\Delta Z$  est donc donné de position (29); mais  $EZ$  est donnée de position, par la même raison; donc le point  $Z$  est donné (25). Mais chacun des points  $\Delta$ ,  $E$  est donné; chacune des droites  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$ ,  $EZ$  est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle  $\Delta ZE$  est donc donné d'espèce (39); mais il est semblable au triangle  $AB\Gamma$  (4. 6); le triangle  $AB\Gamma$  est donc donné d'espèce.

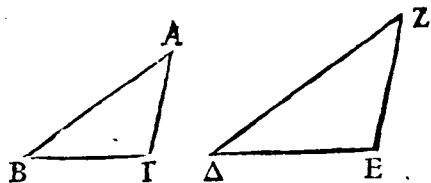
## PROPOSITION XLI.

Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour de l'angle donné ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce.

Que le triangle  $AB\Gamma$  ait un angle  $BA\Gamma$  donné, et que les côtés  $BA$ ,  $A\Gamma$  autour de l'angle  $BA\Gamma$  aient entre eux une raison donnée; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce.

Εκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΖ, καὶ συνεστώτω πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ζ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. Δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. Επεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένη εὐθείᾳ τῇ ΔΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ

Exponatur enim positione et magnitudine data recta ΔΖ, et constituatur ad ΔΖ rectam, et ad punctum Ζ in eâ, angulo ΒΑΓ æqualis angulus ΔΖΕ. Datus autem ΒΑΓ angulus; datus igitur et ΔΖΕ angulus. Quoniam igitur ad datam positione rectam ΔΖ, et ad datum in eâ punctum



δεδομένῳ σημείῳ τῷ Ζ, εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ ΖΕ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντω ὁ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΕ. Αλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ τὸ Ζ δοθέν· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ε. Ἔστι δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Δ, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκάστη τῶν ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ζ, recta linea ducta est ΖΕ, datum faciens angulum ΔΖΕ; positione igitur est ΖΕ. Et quoniam ratio est ipsius ΒΑ ad ΑΓ data, eadem huic fiat ratio ipsius ΔΖ ad ΖΕ; et jungatur ΔΕ; ratio igitur et ipsius ΔΖ ad ΖΕ data. Data autem ΔΖ; data igitur et ΖΕ. Sed et positione, et est punctum Ζ datum; datum igitur et punctum Ε. Est autem et utrumque punctorum Δ, Ζ datum; data igitur est unaquæque ipsarum ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ positione et magnitudine; datum est igitur ΔΕΖ triangulum specie. Et quoniam

Car soit ΔΖ une droite donnée de position et de grandeur; sur la droite ΔΖ et au point Ζ de ceste droite, construisons l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΑΓ (25. 1). Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle ΔΖΕ est donné; et puisque sur la droite ΔΖ, donnée de position, et au point Ζ de cette droite, on a mené la ligne droite ΖΕ, faisant un angle donné ΔΖΕ, la droite ΖΕ est donnée de position (29). Et puisque la raison de ΒΑ à ΑΓ est donnée, faisons en sorte que la raison de ΔΖ à ΖΕ soit la même que celle-ci, et joignons ΔΕ, la raison de ΔΖ à ΖΕ sera donnée (déf. 2). Mais ΔΖ est donné; la droite ΖΕ est donc donnée. Mais cette droite est donnée de position, et le point Ζ est donné; le point Ε est donc donné (27). Mais chacun des points Δ, Ζ est donné; chacune des droites ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle ΔΕΖ est donc donné

Καὶ ἔπει δὺο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  μίαν γωνίαν  
μὴ γωνία ἴσην ἔχει, τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  τῇ ὑπὸ  $\Delta ZE$ ,  
περὶ δὲ τὰς ὑπὸ τῶν  $BA\Gamma$ ,  $\Delta ZE$  γωνίας τὰς πλευ-  
ρὰς ἀνάλογον· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον  
τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ. Δέδοται δὲ τὸ  $\Delta EZ$  τρίγωνον<sup>5</sup>  
τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον  
τῷ εἶδει.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Εὰν τριγώνου αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον  
ἔχωσι<sup>1</sup> δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $AB\Gamma$  αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλή-  
λας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ  $AB\Gamma$   
τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Εκκείσθω γὰρ δεδομένη τῷ μεγέθει εὐθεῖα ἡ  
 $\Delta$ . Καὶ ἔπει λόγος ἐστὶ τῆς  $AB$  πρὸς τὴν<sup>2</sup>  $B\Gamma$  δο-  
θεῖς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντω ὁ τῆς  $\Delta$  πρὸς τὴν  $E$ .  
 $\Delta$ οθεῖται δὲ ἡ  $\Delta$ · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $E$ . Πάλιν ἔπει  
λόγος ἐστὶ τῆς  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $A\Gamma$  δοθεῖς, αὐτὸς  
αὐτῷ γεγονέντω ὁ τῆς  $E$  πρὸς τὴν  $Z$ . Δοθεῖσα δὲ ἡ  $E$ .

duo triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  unum angulum uni  
angulo æqualem habent, angulum  $BA\Gamma$  angulo  
 $\Delta ZE$ , circa angulos autem  $BA\Gamma$ ,  $\Delta ZE$  angulos  
latera proportionalia; simile igitur est  $AB\Gamma$   
triangulum triangulo  $\Delta EZ$ . Datum est autem  $\Delta EZ$   
triangulum specie; datum est igitur et  $AB\Gamma$   
triangulum specie.

## PROPOSITIO XLII.

Si trianguli latera inter se rationem habeant  
datam; datum est triangulum specie.

Trianguli enim  $AB\Gamma$  latera inter se rationem  
habeant datam; dico triangulum  $AB\Gamma$  datum  
esse specie.

Exponatur enim data magnitudine recta  $\Delta$ .  
Quoniam ratio est ipsius  $AB$  ad  $B\Gamma$  data, eadem  
huic fiat ratio ipsius  $\Delta$  ad  $E$ . Data autem  $\Delta$ ;  
data igitur et  $E$ . Rursus quoniam ratio ipsius  
 $B\Gamma$  ad  $A\Gamma$  est data, eadem huic fiat ratio ipsius  
 $E$  ad  $Z$ . Data autem  $E$ ; data igitur et  $Z$ . Et

d'espèce (39). Mais les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  ont un angle donné à un angle, l'angle  $BA\Gamma$  égal à l'angle  $\Delta ZE$ , et les côtés autour des angles  $BA\Gamma$ ,  $\Delta ZE$  sont proportionnels; le triangle  $AB\Gamma$  est donc semblable au triangle  $\Delta EZ$  (6.6). Mais le triangle  $\Delta ZE$  est donné d'espèce; le triangle  $AB\Gamma$  est donc aussi donné d'espèce.

## PROPOSITION XLII.

Si les côtés d'un triangle ont entre eux une raison donnée, ce triangle sera donné d'espèce.

Que les côtés du triangle  $AB\Gamma$  aient entre eux une raison donnée; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce.

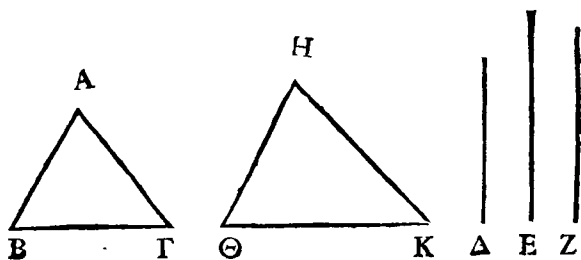
Car soit  $\Delta$  une droite donnée de grandeur. Puisque la raison de  $AB$  à  $B\Gamma$  est donnée, faisons en sorte que la raison de  $\Delta$  à  $E$  soit la même que celle-ci.

Puisque  $\Delta$  est donné, la droite  $E$  est donnée (2). De plus, puisque la raison de  $B\Gamma$  à  $A\Gamma$  est donnée, faisons en sorte que la raison de  $E$  à  $Z$  soit la même



δοθείσα ἄρα καὶ ἡ Ζ. Καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, ἂν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνονται, τρίγωνον συνεστιάτω τὸ ΗΘΚ ὥστε

ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis Δ, Ε, Ζ, quarum duæ reliquæ majores sunt utcumque sumptæ, triangulum constituatur ΗΘΚ; ita ut æqualis sit Δ quidem ipsi ΗΘ,



ἴσην εἶναι τὴν μὲν Δ τῇ ΗΘ, τὴν δὲ Ε τῇ ΘΚ, τὴν δὲ Ζ τῇ ΗΚ. Δοθείσα δὲ ἐκάστη τῶν Δ, Ε, Ζ· δοθείσα ἄρα καὶ ἐκάστη τῶν ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ τῶν μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ Ε τῇ ΘΚ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν<sup>3</sup> ΘΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν<sup>4</sup> Ε τῇ ΘΚ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΗΚ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΗ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΚ· δίσσου ἄρα ἐστὶν<sup>5</sup> ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΗΚ<sup>6</sup>. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρί-

ipsa vero Ε ipsi ΘΚ, ipsa autem Ζ ipsi ΗΚ. Data autem unaquæque ipsarum Δ, Ε, Ζ; data igitur et unaquæque ipsarum ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ magnitudine; datum est igitur ΗΘΚ triangulum specie. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita Δ ad Ε, æqualis autem ipsa Δ quidem ipsi ΗΘ, ipsa Ε vero ipsi ΘΚ; est igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΘ ad ΘΚ. Rursus quoniam est ut ΒΓ ad ΓΑ ita Ε ad Ζ; æqualis autem ipsa Ε quidem ipsi ΘΚ, ipsa vero Ζ ipsi ΗΚ; est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΘΚ ad ΚΗ. Ostensum autem et ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΘ ad ΘΚ; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΗΘ ad ΗΚ, simile igitur est ΑΒΓ

que celle-ci. Puisque Ε est donné, la droite Ζ est donnée. Avec trois droites égales aux trois droites données Δ, Ε, Ζ, dont deux prises ensemble sont plus grandes que la droite restante, construisons le triangle ΗΘΚ, de manière que Δ soit égal à ΗΘ, la droite Ε égale à ΘΚ, et la droite Ζ égale à ΗΚ. Or, chacune des droites Δ, Ε, Ζ est donnée; chacune des droites ΗΘ, ΘΗ, ΚΗ est donc donnée de grandeur; le triangle ΗΘΚ est donc donné d'espèce (39). Et puisque ΑΒ est à ΒΓ comme Δ est à Ε, que Δ est égal à ΗΘ, et Ε égal à ΘΚ, la droite ΑΒ sera à la droite ΒΓ comme ΗΘ est à ΘΚ (11. 5). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΑ comme Ε est à Ζ, que Ε est égal à ΘΚ, et Ζ égal à ΗΚ, la droite ΒΓ sera à la droite ΓΑ comme ΘΚ est à ΚΗ. Mais on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΗΘ est à ΘΚ; donc, par égalité, ΑΒ est à ΑΓ comme ΗΘ est à ΗΚ (22. 5); le triangle ΑΒΓ est



γωνον τῷ  $H\Theta K$  τριγώνῳ. Δέδοται δὲ τὸ  $H\Theta K$  τρίγωνον τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

triangulum triangulo  $H\Theta K$ . Datum est autem  $H\Theta K$  triangulum specie; datum est igitur et  $AB\Gamma$  triangulum specie.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

## PROPOSITIO XLIII.

Εὰν τριγώνου ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ  $AB\Gamma$  ὀρθὴν ἔχοντος τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνίαν, περὶ μίαν τῶν ὀξείων αὐτοῦ γωνιῶν τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$ , αἱ πλευραὶ αἱ  $\Gamma B$ ,  $BA$  πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

Εκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ  $\Delta E$ , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $\Delta E$  ἡμικύκλιον τὸ  $\Delta H E$ . Θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $\Delta H E$  ἡμικύκλιον. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς  $\Gamma B$  πρὸς τὴν  $BA$  δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς  $\Delta E$  πρὸς τὴν  $Z$ · λόγος ἄρα καὶ τῆς  $\Delta E$  πρὸς τὴν  $Z$  δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ  $\Delta E$ · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $Z$ .

Si trianguli rectanguli circa unum acutorum angulorum latera inter se rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Trianguli enim rectanguli  $AB\Gamma$  rectum habentis angulum  $BA\Gamma$ , latera  $\Gamma B$ ,  $BA$  circa unum angulorum ipsius acutorum  $AB\Gamma$  inter se rationem habeant datam; dico datum esse  $AB\Gamma$  triangulum specie.

Exponatur enim positione et magnitudine data recta  $\Delta E$ , et describatur super  $\Delta E$  semicirculus  $\Delta H E$ ; positione igitur est et  $\Delta H E$  semicirculus. Et quoniam ratio est ipsius  $\Gamma B$  ad  $BA$  data; eadem huic fiat ratio ipsius  $\Delta E$  ad  $Z$ ; ratio igitur et ipsius  $\Delta E$  ad  $Z$  data. Data autem

donc semblable au triangle  $H\Theta K$ . Mais le triangle  $H\Theta K$  est donné d'espèce (5.6); le triangle  $AB\Gamma$  est donc aussi donné d'espèce.

## PROPOSITION XLIII.

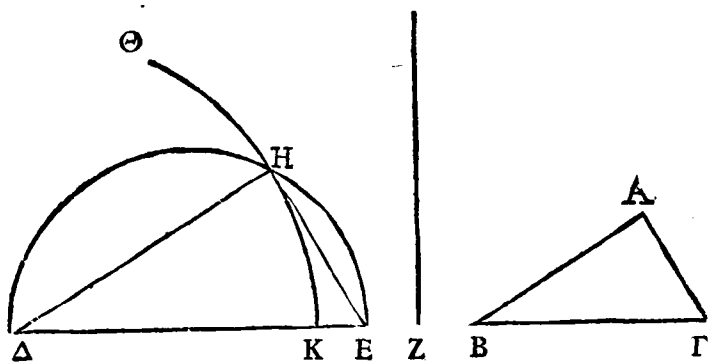
Si, dans un triangle rectangle, les côtés autour d'un des angles aigus ont entre eux une raison donnée, ce triangle est donné d'espèce.

Que dans le triangle rectangle  $AB\Gamma$  dont l'angle droit est  $BA\Gamma$ , les côtés  $\Gamma B$ ,  $BA$ , autour d'un de ses angles aigus  $AB\Gamma$ , ayent entre eux une raison donnée; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce.

Car soit  $\Delta E$  une droite donnée de position et de grandeur, et sur  $\Delta E$  décrivons le demi-cercle  $\Delta H E$ ; le demi-cercle  $\Delta H E$  sera donné de position (déf. 6). Et puisque la raison de  $\Gamma B$  à  $BA$  est donnée, faisons en sorte que la raison de  $\Delta E$  à  $Z$  soit la même que celle-ci; la raison de  $\Delta E$  à  $Z$  sera donnée. Mais  $\Delta E$  est donné;

Καὶ ἔστι μείζων ἢ ΓΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΔΕ τῆς Ζ. Ενηρμόσθω τῇ<sup>2</sup> Ζ ἴση ἢ ΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΗΚ· Θέσει

et ΔΕ; data igitur et Ζ. Et est major ΓΒ ipsâ ΒΑ; major igitur et ΔΕ ipsâ Ζ. Accommodetur ipsi Ζ æqualis ΔΗ, et jungatur ΗΕ, et centro quidem Δ, intervallo autem ΔΗ, circulus descri-



ἄρα ἔστιν ὁ ΘΗΚ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ Θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει. Θέσει δὲ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον· δοθέν ἄρα ἔστι τὸ Η σημεῖον. Ἔστι δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἐκάστη τῶν ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ τῇ Θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΔΕ τρίγωνον τῷ εἶδει. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΗ μίαν γωνίαν μίαν γωνίαν ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΗΕ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΕΔΗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΑ, ΔΕΗ

batur ΘΗΚ; positione igitur est ΘΗΚ circulus, datum est enim ipsius centrum positione, et ipsa ex centro magnitudine. Positione autem et ΔΗΕ semicirculus; datum igitur est Η punctum. Est autem et unumquodque ipsorum Δ, Ε datum; data igitur est unaquæque ipsarum ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ positione et magnitudine; datum est igitur ΗΔΕ triangulum specie. Quoniam igitur duo triangula sunt ΑΒΓ, ΔΕΗ unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum ΒΑΓ ipsi ΔΗΕ, circa alios vero angulos ΓΒΑ, ΕΔΗ latera proportionalia, reliquorum autem ΒΓΑ,

la droite Z est donc donnée (2). Mais ΓΒ est plus grand que ΒΑ (19. 1); la droite ΔΕ est donc plus grande que Ζ. Adaptons, dans le cercle, une droite ΔΗ égale à Ζ (1. 4), joignons ΗΕ, et du centre Δ et de la distance ΔΗ, décrivons le cercle ΘΗΚ, le cercle ΘΗΚ sera donné de position, car son centre est donné de position, et son rayon de grandeur (déf. 6). Mais le demi-cercle ΔΗΕ est donné de position; le point Η est donc donné (25). Mais chacun des points Δ, Ε est donné; chacune des droites ΗΔ, ΔΕ, ΕΗ est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle ΗΔΕ est donc donné d'espèce (déf. 3). Puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΗ ont un angle égal à un angle, savoir l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΔΗΕ, que les côtés autour des autres angles ΓΒΑ, ΕΔΗ sont proportionnels, et que les autres angles ΒΓΑ, ΔΕΗ sont chacun plus petits en même temps qu'un droit;

ἐκατέραν ἄμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta E\text{H}$  τριγώνῳ. Δέδοται δὲ τὸ  $\Delta E\text{H}$  τρίγωνον<sup>3</sup> τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

$\Delta E\text{H}$  utrumlibet simul minorem recto; simile igitur est  $AB\Gamma$  triangulum triangulo  $\Delta E\text{H}$ . Datum est autem  $\Delta E\text{H}$  triangulum specie; datum est igitur et  $AB\Gamma$  triangulum specie.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

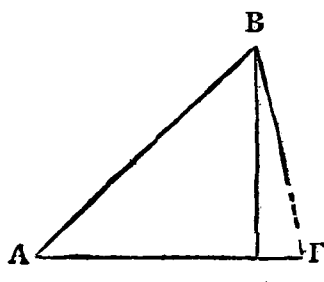
Εάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Εστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$  μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$ , περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  αἱ πλευραὶ  $AB$ ,  $B\Gamma$  λόγον ἔχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

## PROPOSITIO XLIV.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa alium autem angulum latera inter se rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Sit triangulum  $AB\Gamma$  unum habens angulum datum  $BA\Gamma$ , circa alium autem angulum  $AB\Gamma$  latera  $AB$ ,  $B\Gamma$  rationem habeant inter se datam; dico  $AB\Gamma$  triangulum datum esse specie.



Μὴ ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία ὀρθή, ἀλλὰ ἔστω πρότερον ὀξεῖα· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $B$  ση-

Non sit autem angulus  $BA\Gamma$  rectus, sed sit primum acutus; et ducatur a puncto  $B$  ad  $AG$

les triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta E\text{H}$  seront semblables (7. 6). Mais le triangle  $\Delta E\text{H}$  est donné d'espèce; le triangle  $AB\Gamma$  est donc donné d'espèce.

## PROPOSITION XLIV.

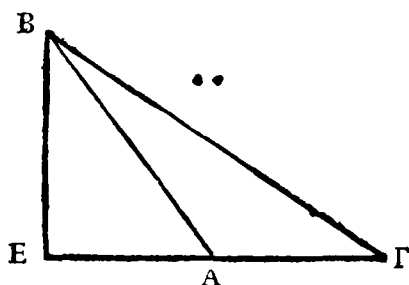
Si un triangle a un angle donné, et si les côtés autour d'un autre angle ont entre eux une raison donnée, le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle  $AB\Gamma$  ayant un angle donné  $BA\Gamma$ ; que les côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$ , autour d'un autre angle  $AB\Gamma$ , ayent entre eux une raison donnée; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce.

Car que l'angle  $BA\Gamma$  ne soit pas droit, et qu'il soit premièrement aigu; du

μείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. Καὶ<sup>2</sup> ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσα· καὶ<sup>3</sup> λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΔ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα καὶ<sup>4</sup> τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Αλλὰ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία<sup>5</sup>· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δοθεῖσα· καὶ<sup>6</sup> λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

perpendicularis ΒΔ. Et quoniam datus est ΒΔΑ angulus, est autem et ipse Β ΑΔ datus; et reliquus igitur ΑΒΔ datus est; datum est igitur ΒΑΔ triangulum specie; ratio igitur et ipsius ΒΑ ad ΒΔ data. Sed ipsius ΑΒ ad ΒΓ ratio est data; et ipsius ΒΔ igitur ad ΒΓ ratio est data. Et est rectus ΒΔΓ angulus. Datum est igitur ΒΔΓ triangulum specie; datus est igitur ΒΓΔ angulus. Est autem et angulus ΒΑΓ datus; et reliquus igitur ΑΒΓ est datus; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.



Αλλὰ δὴ<sup>7</sup> ὅστω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἀμβλεία, καὶ ἐκτελέσθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ<sup>8</sup> ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ δοθεῖσά ἐστιν. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΑ δοθεῖσα

At vero sit ΒΑΓ angulus obtusus, et producatur ΓΑ ad punctum Ε, et ducatur a puncto Β ad ΑΕ perpendicularis ΒΕ. Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus; et ipse deinceps igitur ΒΑΕ datus est. Est autem et ΒΕΑ datus; et reliquus igitur ΕΒΑ datus est; datum est igitur ΕΒΑ

point Β, menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ. Puisque l'angle ΒΔΑ est donné, et que l'angle ΒΑΔ est aussi donné, l'angle restant ΑΒΔ sera donné (32. 1)(4); le triangle ΒΑΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΒΑ à ΒΔ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de ΑΒ à ΒΓ est donnée; la raison de ΒΔ à ΒΓ est donc donnée (8). Mais l'angle ΒΔΓ est droit; le triangle ΒΔΓ est donc donné d'espèce (43); l'angle ΒΓΔ est donc donné (31. 1)(4). Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle restant ΑΒΓ est donc donné; le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

Mais que l'angle ΒΑΓ soit obtus. Prolongeons ΓΑ vers Ε, et du point Β menons ΒΕ perpendiculaire à ΑΕ. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle de suite ΒΑΕ est donné (13. 1)(4). Mais l'angle ΒΕΑ est donné; l'angle restant ΕΒΑ est

ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ EBA τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς EB πρὸς τὴν BA δοθείς. Τῆς δὲ AB πρὸς τὴν BG λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς EB ἄρα πρὸς τὴν BG λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BEG γωνία· δέδοται ἄρα τὸ EBG τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BGE. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAG γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABG γωνία δοθεῖσα ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ABG τρίγωνον τῷ εἶδει.

triangulum specie; ratio igitur ipsius EB ad BA data. Ipsius autem AB ad BG ratio est data; et ipsius igitur EB ad BG ratio est data. Et est rectus BEG angulus; datum est igitur EBG triangulum specie; datus igitur est BGE angulus. Est autem et BAG angulus datus; et reliquus igitur ABG angulus datus est; datum est igitur ABG triangulum specie.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

## PROPOSITIO XLV.

Εὰν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ συναμφοτέραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Si triangulum unum habeat angulum datum, circa datum autem angulum latera simul utraque ut unum, ad reliquum rationem habeant datam, datum est triangulum specie.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ABG μίαν γωνίαν δεδομένην ἔχον τὴν ὑπὸ BAG, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν αἱ πλευραὶ, τουτέστι συναμφοτέρος ἡ BAG, ὡς μία, πρὸς τὴν GB λόγον ἔχέτω· δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ABG τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Sit triangulum ABG unum angulum datum habens BAG, circa angulum autem BAG latera, hoc est utraque BAG, ut unum ad GB rationem habeant datam; dico ABG triangulum datum esse specie.

donc donné (32. 1) (4); le triangle EBA est donc donné d'espèce (40); la raison de EB à BA est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de AB à BG est donnée; la raison de EB à BG est donc donnée (8). Mais l'angle BEG est droit; le triangle EBG est donc donné d'espèce (43); l'angle BGE est donc donné (déf. 3). Mais l'angle BAG est donné; l'angle restant ABG est donc aussi donné; le triangle ABG est donc donné d'espèce (40).

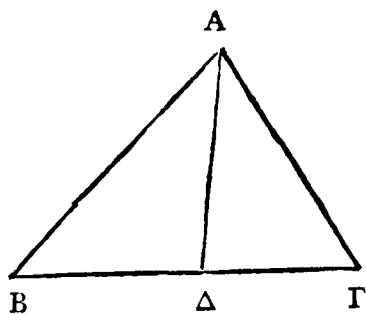
## PROPOSITION XLV.

Si un triangle a un angle donné, et si la somme des côtés autour de l'angle donné a une raison donnée avec le côté restant; le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle ABG ayant un angle donné BAG, que la somme des côtés BA, AG autour de l'angle BAG, ait avec GB une raison donnée; je dis que le triangle ABG est donné d'espèce.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ  
εὐθείᾳ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. Καὶ  
ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς

Secetur enim ΒΑΓ angulus bifariam rectâ  
ΑΔ; datus igitur est ΒΑΔ angulus. Et quoniam  
est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΔ ad ΔΓ; permutando



τὴν ΔΓ· ἐναλλάξ ἄρα<sup>2</sup> ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ  
οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς συναμφοτέρος  
ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ.  
Λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ  
δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθεὶς.  
Καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· δέδοται ἄρα  
τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ  
ὑπὸ ΑΒΔ γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία  
δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά  
ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

igitur ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΔ; et ut simul  
igitur utraque ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΔ; ratio  
autem utriusque simul ΒΑΓ ad ΒΓ data; ratio  
igitur et ipsius ΑΒ ad ΒΔ data. Et est datus ΒΑΔ  
angulus; datum igitur est ΑΒΔ triangulum spe-  
cie; datus igitur est ΑΒΔ angulus. Est autem et  
ΒΑΓ angulus datus; et reliquus igitur ΑΓΒ  
datus est; datum est igitur ΑΒΓ triangulum  
specie.

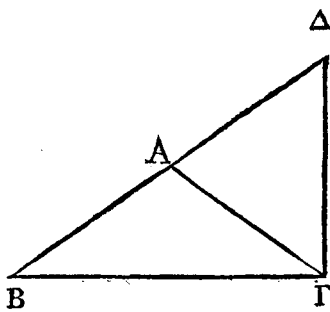
Car que l'angle ΒΑΓ soit coupé en deux parties égales par la droite ΑΔ (9. 1);  
l'angle ΒΑΔ sera donné (2). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme ΒΔ est à ΔΓ (3. 6);  
par permutation, ΑΒ sera à ΒΔ comme ΑΓ est à ΓΔ; la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ  
est donc à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΔ (12. 5). Mais la raison de la somme des  
côtés ΒΑ, ΑΓ à ΒΓ est donnée; la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais  
l'angle ΒΑΔ est donné; le triangle ΑΒΔ est donc donné d'espèce (44); l'angle  
ΑΒΔ est donc donné. Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle restant ΑΓΒ est donc  
donné (32. 1) (4); le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

## ΑΛΛΩΣ.

Εκβεβλήσθω ἡ  $BA$  ἐπ' εὐθείας, καὶ τῇ  $AG$  κείσθω ἴση ἡ  $AD$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΔΓ$ . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς  $BAΓ$  πρὸς τὴν  $ΓB$  δοθεὶς, ἴση δὲ ἡ  $ΓA$  τῇ  $ΔA$ , λόγος ἄρα τῆς  $BD$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$  δοθεὶς. Καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ

## ALITER.

Producatur  $BA$  in directum, et ipsi  $AG$  ponatur æqualis  $AD$ , et jungatur  $ΔΓ$ . Et quoniam ratio est utriusque simul  $BAΓ$  ad  $ΓB$  data, æqualis autem  $ΓA$  ipsi  $ΔA$ ; ratio igitur ipsius  $BD$  ad  $ΒΓ$  data. Et est datus  $ADΓ$  angulus, dimi-



$ADΓ$ , ἡμίσεια γάρ ἐστι τῆς ὑπὸ  $BAΓ$ . δέδοται ἄρα τὸ  $BDΓ$  τρίγωνον τῷ εἶδει, δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  δοθεῖσα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AGB$  δοθεῖσά ἐστι, δέδοται ἄρα τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

dus enim est ipsius  $BAΓ$ ; datum est igitur  $BAΓ$  triangulum specie; datus igitur est  $ABΓ$  angulus. Est autem et ipse  $BAΓ$  datus; et reliquus igitur  $AGB$  datus est; datum est igitur  $ABΓ$  triangulum specie.

## AUTREMENT.

Prolongeons  $BA$  en ligne droite, faisons  $AD$  égal à  $AG$  (2. 1), et joignons  $ΔΓ$ . Puisque la raison de la somme des droites  $BA$ ,  $AG$  à  $BF$  est donnée, et que  $GA$  est égal à  $ΔA$ , la raison de  $BD$  à  $BF$  est donnée. Mais l'angle  $ADΓ$  est donné, car il est la moitié de l'angle  $BAΓ$  (5 et 32. 1); le triangle  $BDΓ$  est donc donné d'espèce (44); l'angle  $ABΓ$  est donc donné (déf. 3). Mais l'angle  $BAΓ$  est donné; l'angle restant  $AGB$  est donc donné (32. 1) (4); le triangle  $ABΓ$  est donc donné d'espèce (40).



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

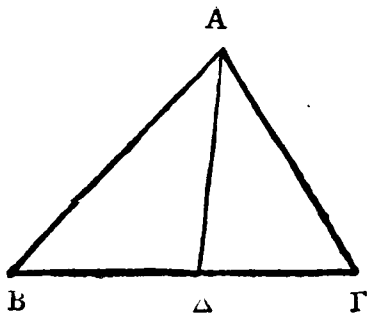
PROPOSITIO XLVI.

Εάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ συναμφοτέραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ συναμφοτέραι, ὡς μία, τουτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἔχέτωσαν<sup>1</sup> δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἶδει.

Si triangulum unum habeat angulum datum; circa alium autem angulum latera simul utraque, ut unum, ad reliquum rationem habeant datam; datum est triangulum specie.

Sit triangulum ΑΒΓ unum habens angulum datum ΑΒΓ, circa alium autem angulum ΒΑΓ latera utraque simul, ut unum hoc est ipsa ΒΑΓ ad ΒΓ rationem habeant datam; dico ΑΒΓ triangulum datum esse specie.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέροις ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Καὶ

Secetur enim ΒΑΓ angulus bifariam rectâ ΑΔ; est igitur ut utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΔ. Ratio autem utriusque simul ΒΑΓ ad ΓΒ data; ratio igitur et ipsius ΑΒ ad ΒΔ data.

PROPOSITION XLVI.

Si un triangle a un angle donné, et si la somme des côtés autour d'un autre angle a une raison donnée avec le côté restant, le triangle est donné d'espèce.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant un angle donné ΑΒΓ; que la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ, autour d'un autre angle ΒΑΓ, ait une raison donnée avec ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΔ (9. 1); la somme des droites ΒΑΓ sera à la droite ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais la raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ à la droite ΓΒ est donnée; la raison de ΑΒ à ΒΔ est



ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία· δέδοται ἄρα τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BAD$  γωνία. Καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλασίων ἡ ὑπὸ  $BAG$ · δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία<sup>2</sup>. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AGB$  δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

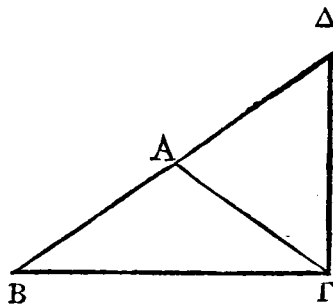
Et est datus  $AB\Delta$  angulus; datum est igitur  $AB\Delta$  triangulum specie; datus igitur est  $BAD$  angulus. Et est ipsius duplus  $BAG$  angulus; datus igitur est et  $BAG$  angulus. Est autem et ipse  $AB\Gamma$  datus; et reliquus igitur  $AGB$  datus est; datum est igitur  $AB\Gamma$  triangulum specie.

ΑΛΛΩΣΙ.

ALITER.

Εκτελέσθω ἡ  $BA$ , καὶ<sup>1</sup> κείσθω τῇ  $GA$  ἴση ἡ  $AD$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\Delta\Gamma$ . Καὶ<sup>2</sup> ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς  $BAG$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$  δοθείς· ἴση δὲ

Producatur  $BA$ , et ponatur ipsi  $GA$  æqualis  $AD$ , et jungatur  $\Delta\Gamma$ . Et quoniam ratio est utriusque simul  $BAG$  ad  $B\Gamma$  data; æqualis autem  $GA$



ἡ  $GA$  τῇ  $AD$ · λόγος ἄρα καὶ<sup>3</sup> τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$ <sup>4</sup> δοθείς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία· δέδοται ἄρα τὸ  $\Delta B\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία. Καὶ ἔστιν αὐτῆς

ipsi  $AD$ ; ratio igitur et ipsius  $\Delta B$  ad  $B\Gamma$  data. Et est datus  $AB\Gamma$  angulus; datum igitur  $\Delta B\Gamma$  triangulum specie. Datus igitur est  $BAG$  angulus. Et est ipsius duplus  $BAG$  angulus; ergo

donc donnée. Mais l'angle  $AB\Delta$  est donné; le triangle  $AB\Delta$  est donc donné d'espèce (41); l'angle  $BAD$  est donc donné (déf. 3). Mais l'angle  $BAG$  est son double; l'angle  $BAG$  est donc donné (2). Mais l'angle  $AB\Gamma$  est donné; l'angle restant  $AGB$  est donc donné (32, 1) (4); le triangle  $AB\Gamma$  est donc donné d'espèce (40).

AUTREMENT.

Prolongeons  $BA$ ; faisons  $AD$  égal à  $GA$ , et joignons  $\Delta\Gamma$ . Puisque la raison de la somme des côtés  $BA$ ,  $AG$  à  $B\Gamma$  est donnée, et que  $GA$  est égal à  $AD$ , la raison de  $\Delta B$  à  $B\Gamma$  est donnée. Mais l'angle  $AB\Gamma$  est donné; le triangle  $\Delta B\Gamma$  est donc donné d'espèce (41); l'angle  $BAG$  est donc donné (déf. 3). Mais l'angle  $BAG$  est son double

διπλὴ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι<sup>4</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

ΒΑΓ angulus datus est; et reliquus igitur ΑΓΒ datus est; datum est igitur ΑΒΓ triangulum specie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

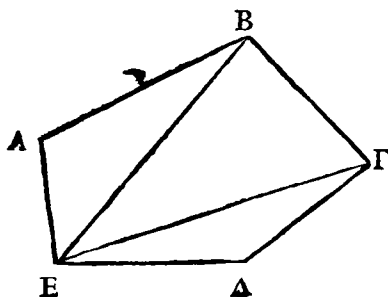
PROPOSITIO XLVII.

Τὰ δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἶδει εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται<sup>1</sup>.

Data rectilinea specie in data specie triangula dividuntur.

Ἐστω δεδομένον εὐθύγραμμον τῷ εἶδει τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται<sup>2</sup>.

Sit datum rectilineum specie ΑΒΓΔΕ; dico ΑΒΓΔΕ rectilineum in data specie triangula dividi.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΕΑ δοθείς. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστὶν ἡ

Jungantur enim ipsæ ΒΕ, ΕΓ. Et quoniam datum est ΑΒΓΔΕ rectilineum specie; datus igitur est ΒΑΕ angulus, et est ratio ipsius ΒΑ ad ΕΑ data. Quoniam igitur datus est ΒΑΕ an-

(5, et 32. 1); l'angle ΒΑΓ est donc donné; l'angle restant ΑΓΒ est donc aussi donné; le triangle ΑΒΓ est donc donné d'espèce (40).

PROPOSITION XLVII.

Des figures rectilignes données d'espèce peuvent se diviser en triangles donnés d'espèce.

Soit donnée la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ; je dis que la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ peut se diviser en triangles donnés d'espèce.

Car joignons ΒΕ, ΕΓ. Puisque la figure rectiligne ΑΒΓΔΕ est donnée d'espèce, l'angle ΒΑΕ est donné, ainsi que la raison de ΒΑ à ΕΑ (déf. 3). Et puisque l'angle

ὑπὸ BAE γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς BA πρὸς τὴν AE δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ BAE τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EBF δοθεῖσά ἐστιν. Καὶ ἔστι λόγος τῆς AB πρὸς τὴν BE δοθείς, τῆς δὲ AB πρὸς τὴν BΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς EB ἄρα πρὸς τὴν BΓ<sup>5</sup> λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΓBE γωνία· δέδοται ἄρα τὸ BΓE τρίγωνον τῷ εἶδει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΓΔE τρίγωνον τῷ εἶδει δέδοται· τὰ ἄρα δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἶδει εἰς δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται.<sup>4</sup>

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Εὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφῇ τρίγωνα<sup>1</sup> δεδομένα τῷ εἶδει· λόγον ἔξει πρὸς ἀλλήλα δεδομένον.

Απὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγεγράφθω τὰ ABΓ, ABA· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ABΓ πρὸς τὸ ABA δοθείς.

gulus, et est ratio ipsius BA ad AE data; datum est igitur BAE triangulum specie; datus igitur est ABE angulus. Est autem et totus ABΓ angulus datus; et reliquus igitur EBF datus est. Et est ratio ipsius AB ad BE data, et ipsius AB ad BΓ ratio est data; et ipsius igitur EB ad BΓ ratio est data. Et est datus ΓBE angulus; datum est igitur BΓE triangulum specie. Propter eadem utique et ΓΔE triangulum specie datum est. Ergo data rectilinea specie in data specie triangula dividuntur.

## PROPOSITIO XLVIII.

Si ab eâdem rectâ describantur triangula data specie, rationem habebunt inter se datam.

Ab eâdem enim rectâ AB duo triangula ABΓ, ABA data specie describantur; dico rationem esse ipsius ABΓ ad ABA datam.

BAE est donné, et que la raison de BA à AE est aussi donnée, le triangle BAE est donné d'espèce (41); l'angle ABE est donc donné (déf. 3). Mais l'angle entier ABΓ est donné (3); l'angle restant EBF est donc donné (4). Mais la raison de AB à BE est donnée, et la raison de AB à BΓ est aussi donnée; la raison de EB à BΓ est donc donnée (8). Mais l'angle ΓBE est donné; le triangle BΓE est donc donné d'espèce (41). Par la même raison, le triangle ΓΔE est donné d'espèce; les figures rectilignes données d'espèce peuvent donc se diviser en triangles donnés d'espèce.

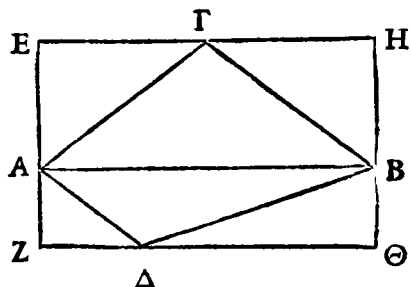
## PROPOSITON XLVIII.

Si des triangles donnés d'espèce sont décrits sur une même droite, ils ont entre eux une raison donnée.

Sur une même droite AB, décrivons les deux triangles donnés d'espèce ABΓ, ABA; je dis que la raison du triangle ABΓ au triangle ABA est donnée.

ἤχθωσαν<sup>2</sup> γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΕ, ΒΗ, καὶ ἐκτελέσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Θ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΓΗ, ΖΔΘ.

Ducantur enim a punctis Α, Β rectæ ΑΒ perpendiculares ΑΕ, ΒΗ, et producantur ad puncta Ζ, Θ, et per Γ, Δ puncta rectæ ΑΒ parallelæ ducantur ΕΓΗ, ΖΔΘ. Et quoniam datum est



Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει, λόγος ἐστὶ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ δοθεῖσα· καὶ<sup>4</sup> λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ δοθεῖσα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία<sup>5</sup> δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΑ δοθεῖσα ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. Τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ· ὥστε καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ λόγος ἐστὶ

ΑΒΓ triangulum specie, ratio est ipsius ΓΑ ad ΒΑ data. Quoniam igitur datus est ΓΑΒ angulus, est autem et ipse ΕΑΒ datus; et reliquus igitur ΕΑΓ est datus. Est autem et ΑΕΓ angulus datus; et reliquus igitur ΕΓΑ datus est; datum igitur ΑΕΓ triangulum specie; ratio igitur ipsius ΕΑ ad ΑΓ data. Ipsius autem ΓΑ ad ΑΒ ratio est data; et ipsius ΕΑ igitur ad ΑΒ ratio est data. Propter eadem utique et ipsius ΖΑ ad ΑΒ ratio est data; quare et ipsius ΕΑ ad ΑΖ ratio est data. Et est ut ΑΕ ad ΑΖ ita ΑΗ ad ΘΑ. Quare et ipsius ΑΗ ad ΘΑ ratio est data. Et est ipsius

Car par les points Α, Β, menons à la droite ΑΒ les perpendiculaires ΑΕ, ΒΗ (11. 1), et prolongeons-les vers les points Ζ, Θ, et des points Γ, Δ, menons les droites ΕΓΗ, ΖΔΘ parallèles à la droite ΑΒ (31. 1). Puisque le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce, la raison de ΓΑ à ΒΑ est donnée (déf. 3). Et puisque l'angle ΓΑΒ est donné, et que l'angle ΕΑΒ est aussi donné; l'angle restant ΕΑΓ sera donné (4). Mais l'angle ΑΕΓ est donné; l'angle restant ΕΓΑ est donc donné; le triangle ΑΕΓ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΕΑ à ΑΓ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de ΓΑ à ΑΒ est donnée; la raison de ΕΑ à ΑΒ est donc donnée (8). Semblablement la raison de ΖΑ à ΑΒ est donnée; la raison de ΕΑ à ΑΖ est donc donnée (8). Mais ΑΕ est à ΑΖ comme ΑΗ est à ΘΑ (1. 6); la raison de ΑΗ à ΘΑ

δοθείς. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν  $AH$  ἡμισυ τὸ  $AB\Gamma$ , τοῦ δὲ  $A\Theta$  ἡμισυ τὸ  $A\Delta B$ · καὶ τοῦ  $AB\Gamma$  ἄρα πρὸς τὸ  $A\Delta B$  λόγος ἔστι δοθείς.

quidem  $AH$  dimidium  $AB\Gamma$  triangulum, ipsius autem  $A\Theta$  dimidium  $A\Delta B$  triangulum; et igitur trianguli  $AB\Gamma$  ad triangulum  $A\Delta B$  ratio est data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

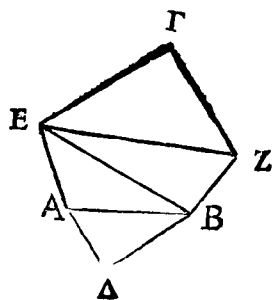
## PROPOSITIO XLIX.

Εάν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἶδει, λόγον ἔξει πρὸς ἀλλήλα δεδομένον.

Απὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$  δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχε δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγεγράφθω τὰ  $A\epsilon\Gamma ZB$ ,  $A\Delta B$ · λέγω ὅτι λόγος ἔστι τοῦ  $A\epsilon\Gamma ZB$  πρὸς  $A\Delta B$  δοθείς.

Si ab eadem rectâ duo rectilinea quælibet describantur data specie, rationem habebunt inter se datam.

Ab eâdem enim rectâ  $AB$  duo rectilinea quælibet data specie describantur  $A\epsilon\Gamma ZB$ ,  $A\Delta B$ ; dico rationem esse ipsius  $A\epsilon\Gamma ZB$  ad  $A\Delta B$  datam.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $BE$ ,  $ZE$ · δέδοται ἄρα ἑκαστον τῶν  $EZ\Gamma$ ,  $EZB$ ,  $EAB$  τριγώνων τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $EZ$  δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγράφονται τὰ

Jungantur enim ipsæ  $BE$ ,  $ZE$ ; datum est igitur unumquodque  $EZ\Gamma$ ,  $EZB$ ,  $EAB$  triangulorum specie. Et quoniam ab eâdem rectâ  $EZ$  duo triangula  $EZ\Gamma$ ,  $EZB$  data specie descripta

est donc donnée. Mais le triangle  $AB\Gamma$  est la moitié de  $AH$ , et  $A\Delta B$  est la moitié de  $A\Theta$  (41. 1); la raison du triangle  $AB\Gamma$  au triangle  $A\Delta B$  est donc donnée.

## PROPOSITION XLIX.

Si sur une même droite on décrit deux figures rectilignes quelconques, données d'espèce, elles auront entre elles une raison donnée.

Sur la droite  $AB$ , décrivons deux figures rectilignes quelconques  $A\epsilon\Gamma ZB$ ,  $A\Delta B$  données d'espèce; je dis que la raison de  $A\epsilon\Gamma ZB$  à  $A\Delta B$  est donnée.

Car joignons  $BE$ ,  $ZE$ ; chacun des triangles  $EZ\Gamma$ ,  $EZB$ ,  $EAB$  sera donné d'espèce (47). Et puisque les deux triangles donnés d'espèce  $EZ\Gamma$ ,  $EZB$  sont décrits sur la

ΕΖΓ, ΕΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΕΖ πρὸς τὸ ΖΕΒ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΒΖ δοθείς. Τοῦ δὲ ΖΕΒ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδὴ περ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΕ ἀναγέγραπται δεδομένα τῶ εἶδει τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΕΒΑ· τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα<sup>2</sup> πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι συναμφοτέρου<sup>3</sup> τοῦ ΓΕΑΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ΕΑΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΕΑΒΖ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε<sup>1</sup> καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὁμοιά τε<sup>2</sup> καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι καὶ ὁ πρὸς ἀλλήλα αὐτῶν λόγος ἐστὶ<sup>3</sup> δοθείς.

sunt; ratio igitur est ipsius ΓΕΖ ad ΖΕΒ data; et componendo igitur ratio est ipsius ΓΕΒΖ ad ΕΒΖ data. Ipsius autem ΖΕΒ ad ΕΑΒ ratio est data, quandoquidem ab eadem rectâ ΒΕ descripta sunt data specie triangula ΖΕΒ, ΕΒΑ; ipsius ΓΕΒΖ igitur ad ΕΑΒ ratio est data, et componendo ipsius ΓΕΑΒΖ ad ΕΑΒ ratio est data. Ipsius autem ΕΑΒ ad ΑΔΒ ratio est data; et ipsius ΓΕΑΒΖ igitur ad ΑΔΒ ratio est data.

PROPOSITIO L.

Si duæ rectæ inter se rationem habeant datam, et ab illis rectilinea similia et similiter descripta inter se rationem habebunt datam.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ inter se rationem habeant datam, et describatur ab ipsis ΑΒ, ΓΔ similia et similiter posita rectilinea Ε, Ζ; dico et illorum rationem inter se datam fore.

même droite ΕΖ; la raison de ΓΕΖ à ΖΕΒ sera donnée (48); donc par addition, la raison de ΓΕΒΖ à ΕΒΖ est donnée. Mais la raison de ΖΕΒ à ΕΑΒ est donnée (48), parce que les triangles ΖΕΒ, ΕΒΑ, donnés d'espèce, sont décrits sur une même droite ΒΕ (48); la raison de ΓΕΒΖ à ΕΑΒ est donc donnée (8); donc, par addition, la raison de ΓΕΑΒΖ à ΕΑΒ est donnée (6). Mais la raison de ΕΑΒ à ΑΔΒ est donnée (48); la raison de ΓΕΑΒΖ à ΑΔΒ est donc donnée (8).

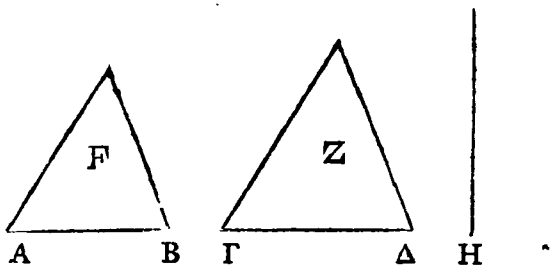
PROPOSITION L.

Si deux droites ont entre elles une raison donnée, les figures rectilignes semblables, et semblablement construites sur ces droites, auront une raison donnée.

Car que les deux droites ΑΒ, ΓΔ aient entre elles une raison donnée; sur ΑΒ, ΓΔ décrivons les figures rectilignes Ε, Ζ, semblables et semblablement placées; je dis que ces figures auront entr'elles une raison donnée.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τρίτη ἀνάλογον  
ἢ  $H$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἡ  
 $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν<sup>4</sup>  $H$ . Λόγος δὲ ὁ τῆς  $AB$  πρὸς  $\Gamma\Delta$  δο-

Sumatur enim ipsarum  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  tertia pro-  
portionalis  $H$ ; est igitur ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $\Gamma\Delta$   
ad  $H$ . Ratio autem ipsius  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  data. Ratio



θεῖς· λόγος ἄρα καὶ ὁ<sup>5</sup> τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $H$  δο-  
θεῖς· ὥστε καὶ τῆς  $AB$  πρὸς τὴν  $H$  λόγος ἐστὶ  
δοθείς. Ὡς δὲ ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $H$  οὕτως τὸ  $E$  πρὸς  
τὸ  $Z$ · λόγος ἄρα τοῦ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$  δοθείς.

igitur et ipsius  $\Gamma\Delta$  ad  $H$  data; quare et ipsius  $AB$   
ad  $H$  ratio est data. Ut autem  $AB$  ad  $H$  ita  $E$   
ad  $Z$ ; ratio igitur ipsius  $E$  ad  $Z$  data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νά.

## PROPOSITIO LI.

Εὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι  
δεδομένον, καὶ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα α'<sup>1</sup>  
ἔτυχε ἀναγραφῇ δεδομένα τῶ εἶδει· λόγον ἔξει  
πρὸς ἀλλήλας δεδομένον.

Si duæ rectæ inter se rationem habeant da-  
tam, et ab illis rectilinea quælibet describantur  
data specie; rationem habebunt inter se datam.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ<sup>2</sup>  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  πρὸς ἀλλήλας  
λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  inter se rationem  
habeant datam, et describantur ab ipsis  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$

Car prenons une troisième proportionnelle  $H$  aux deux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  (11. 6);  
la droite  $AB$  sera à la droite  $\Gamma\Delta$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $H$ . Mais la raison de  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$   
est donnée; la raison de  $\Gamma\Delta$  à  $H$  est donc donnée (8); la raison de  $AB$  à  $H$  est  
donc donnée. Mais  $AB$  est à  $H$  comme  $E$  est à  $Z$  (19, ou 20. 6); la raison de  $E$  à  $Z$   
est donc donnée.

## PROPOSITION LI.

Si deux droites ont entre elles une raison donnée, et si sur ces droites on  
décrit des figures rectilignes quelconques, données d'espèce, ces figures auront  
entre elles une raison donnée.

Que les deux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  aient entre elles une raison donnée; et sur  $AB$ ,

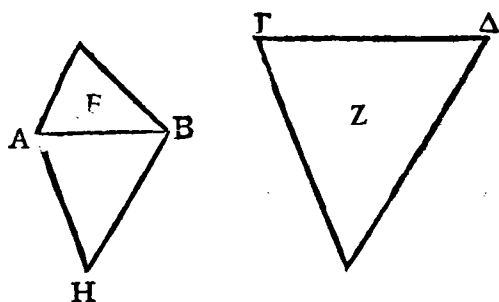


ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχ<sup>3</sup> δεδομένα τῷ εἶδει τὰ  $E$ ,  $Z$ · λέγω ὅτι τοῦ  $E$  πρὸς τὸ  $Z$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τῷ  $Z$  ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ  $AHB$ . Δέδοται δὲ τὸ

rectilinea quælibet data specie ipsa  $E$ ,  $Z$ ; dico ipsius  $E$  ad  $Z$  rationem esse datam.

Describatur enim ex  $AB$  ipsi  $Z$  simile et similiter positum ipsum  $AHB$ . Datum est au-



$Z$  τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $AHB$  τῷ εἶδει· ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ  $E$  δέδοται τῷ εἶδει, καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$ <sup>4</sup>· λόγος ἄρα τοῦ  $E$  πρὸς τὸ  $AHB$  δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τῆς  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  λόγος<sup>5</sup> δοθείς, καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $AHB$ ,  $Z$ · λόγος ἄρα τοῦ  $AH$  πρὸς τὸ  $Z$  δοθείς. Τοῦ δὲ  $AHB$  πρὸς τὸ  $E$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ  $E$  ἄρα πρὸς τὸ  $Z$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

tem ipsum  $Z$  specie; datum est igitur et  $AHB$  specie; sed quidem et ipsum  $E$  datum est specie, et descriptum est ab ipsâ rectâ  $AB$ ; ratio igitur ipsius  $E$  ad  $AHB$  data. Et quoniam est ipsius  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ratio data, et descripta sunt ab ipsis  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  similia et similiter posita rectilinea  $AHB$ ,  $Z$ ; ratio igitur ipsius  $AH$  ad  $Z$  data. Ipsius autem  $AHB$  ad  $E$  ratio est data; et ipsius  $E$  igitur ad  $Z$  ratio est data.

$\Gamma\Delta$  décrivons des figures rectilignes quelconques  $E$ ,  $Z$  données d'espèce; je dis que la raison de  $E$  à  $Z$  est donnée.

Car sur  $AB$  décrivons la figure rectiligne  $AHB$  semblable à la figure  $Z$  et semblablement placée. Puisque la figure  $Z$  est donnée d'espèce, la figure  $AHB$  sera donnée d'espèce; mais la figure  $E$  est donnée d'espèce, et elle est décrite sur la même droite  $AB$ ; la raison de  $E$  à  $AHB$  est donc donnée (49). Mais la raison de  $AB$  à  $\Gamma\Delta$  est donnée, et sur  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  on a décrit les figures rectilignes  $AHB$ ,  $Z$ , semblables et semblablement placées; la raison de  $AH$  à  $Z$  est donc donnée (50). Mais la raison de  $AHB$  à  $E$  est donnée; la raison de  $E$  à  $Z$  est donc donnée (8).



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

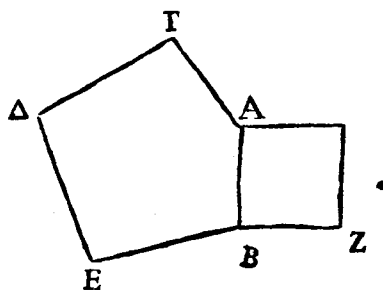
## PROPOSITIO LII.

Εάν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει, δεδο-  
μένον τῷ εἶδει εἶδος ἀναγραφῇ, δέδοται τὸ ἀνα-  
γραφὲν τῷ μεγέθει.

Απὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει τῆς  
AB δεδομένον τὸ εἶδει εἶδος ἀναγεγράφθω τὸ  
ΑΓΔΕΒ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔΕΒ δέδοται τῷ μεγέθει.

Si a datâ rectâ magnitudine, data specie fi-  
gura describatur; data est descripta magnitu-  
dine.

A datâ enim rectâ magnitudine AB data spe-  
cie figura describatur ipsa ΑΓΔΕΒ; dico ipsam  
ΑΓΔΕΒ datam esse magnitudine.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον  
τὸ AZ· δέδοται ἄρα τὸ AZ τῷ εἶδει καὶ τῷ  
μεγέθει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  
AB δύο εὐθύγραμμα ἀναγράφονται δεδομένα  
τῷ εἶδει τὰ ΑΓΔΕΒ, AZ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΓΔΕΒ  
πρὸς τὸ AZ δοθείς. Δοθὲν δὲ τὸ AZ τῷ μεγέθει,  
δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔΕΒ τῷ μεγέθει.

Describatur enim ab ipsâ AB quadratum AZ;  
data est igitur AZ specie et magnitudine. Et  
quoniam ab eâdem rectâ AB duo rectilinea  
ΑΓΔΕΒ, AZ descripta sunt, data specie; ratio  
igitur ipsius ΑΓΔΕΒ ad AZ data. Datum autem AZ  
magnitudine; datum est igitur et ΑΓΔΕΒ magni-  
tudine.

## PROPOSITION LII.

Si sur une droite donnée de grandeur, on décrit une figure donnée d'espèce, la figure décrite est donnée de grandeur.

Sur la droite AB, donnée de grandeur, décrivons une figure ΑΓΔΕΒ donnée d'es-  
pèce; je dis que ΑΓΔΕΒ est donné de grandeur.

Car sur la droite AB décrivons le carré AZ (46. 1); le carré AZ sera donné d'espèce et de grandeur (déf. 3). Et puisque sur AB, on a décrit les deux figures rectilignes ΑΓΔΕΒ, AZ données d'espèce, la raison de ΑΓΔΕΒ à AZ sera donnée (49). Mais AZ est donné de grandeur; la figure ΑΓΔΕΒ est donc donnée de gran-  
deur (2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

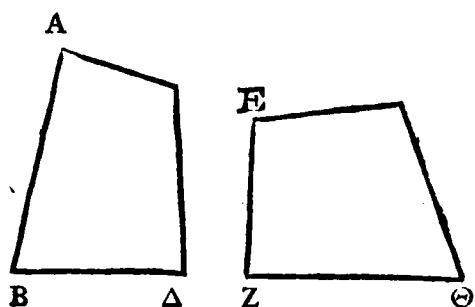
PROPOSITIO LIII.

Εὰν δύο εἶδη τῶν εἶδει δεδομένα ᾗ, καὶ μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου λόγον ἔχη δεδομένον· καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσιν δεδομένον.

Ἐστω δύο εἶδη τῶν<sup>1</sup> εἶδει δεδομένα τὰ  $ΑΔ$ ,  $ΕΘ$ , καὶ λόγος ἔστω τῆς  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΖΘ$  δοθείς· λέγω ὅτι καὶ<sup>2</sup> τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

Si duæ figuræ specie datæ sint, et unum latus unius ad unum latus alterius rationem habeat datam; et reliqua latera ad reliqua latera rationem habebunt datam.

Sint duæ figuræ specie datæ  $ΑΔ$ ,  $ΕΘ$ , et ratio sit ipsius  $ΒΔ$  ad  $ΖΘ$  data; dico et reliquorum laterum ad reliqua latera rationem esse datam.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τῆς  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΖΘ$  δοθείς, τῆς δὲ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΒΑ$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς  $ΑΒ$  ἄρα πρὸς τὴν  $ΖΘ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ  $ΖΘ$  πρὸς τὴν<sup>3</sup>  $ΕΖ$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς  $ΑΒ$  ἄρα πρὸς τὴν  $ΕΖ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim ratio est ipsius  $ΒΔ$  ad  $ΖΘ$  data, ipsius autem  $ΒΔ$  ad  $ΒΑ$  ratio est data; et ipsius  $ΑΒ$  igitur ad  $ΖΘ$  ratio est data. Ipsius autem  $ΖΘ$  ad  $ΕΖ$  ratio est data; et ipsius  $ΑΒ$  igitur ad  $ΕΖ$  ratio est data. Propter eadem utique et reliquorum laterum ad reliqua latera ratio est data.

PROPOSITION LIII.

Si deux figures sont données d'espèce, et si un des côtés de l'une a une raison donnée avec un côté de l'autre, les côtés restants auront une raison donnée avec les côtés restants.

Soient les deux figures  $ΑΔ$ ,  $ΕΘ$  données d'espèce; que la raison de  $ΒΔ$  à  $ΖΘ$  soit donnée; je dis que la raison des côtés restants aux côtés restants est donnée.

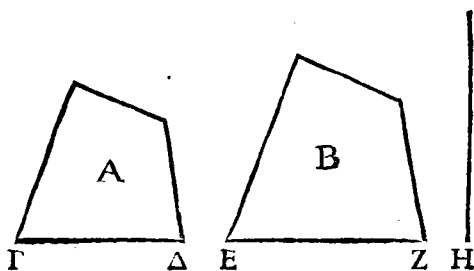
Car puisque la raison de  $ΒΔ$  à  $ΖΘ$  est donnée, et que la raison de  $ΒΔ$  à  $ΒΑ$  est aussi donnée (déf. 3); la raison de  $ΑΒ$  à  $ΖΘ$  est donnée (8). Mais la raison de  $ΖΘ$  à  $ΕΖ$  est donnée (déf. 3); la raison de  $ΑΒ$  à  $ΕΖ$  est donc donnée (8). Semblablement la raison des côtés restants aux côtés restants sera donnée.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

## PROPOSITIO LIV.

Εάν δύο εἶδη δεδομένα τῷ εἶδει πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχη δεδομένον, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.

Δύο γὰρ εἶδη δεδομένα τῷ εἶδει τὰ  $A, B$  πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔξουσι δεδομένον.



Τὸ γὰρ  $A$  τῷ  $B$  ἢ τοι ὁμοίον ἐστὶν ἢ οὐ. Εἴτω πρότερον ὁμοιον, καὶ εἰλήφθω τῶν  $\Gamma\Delta, \text{EZ}$  τρίτη ἀνάλογον ἢ  $H$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $H$  οὕτως τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$ . Λόγος δὲ τοῦ  $A$  πρὸς τὸ  $B$  δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $H$  δοθεὶς. Καὶ εἰσὶν αἱ  $\Gamma\Delta, \text{EZ}, H$  ἀνάλογον· καὶ τῆς  $\Gamma\Delta$  ἄρα πρὸς τὴν  $\text{EZ}$  λόγος ἐστὶ δοθεὶς. Καὶ

Si duæ figuræ datæ specie inter se rationem habeant datam, et latera ipsarum inter se rationem habebunt datam.

Duæ enim figuræ datæ specie ipsæ  $A, B$  inter se rationem habeant datam; dico et latera ipsarum inter se rationem habitura esse datam.

Ipsa enim  $A$  ipsi  $B$  vel similis est vel non. Sit primum similis, et sumatur ipsarum  $\Gamma\Delta, \text{EZ}$  tertia proportionalis  $H$ ; est igitur ut  $\Gamma\Delta$  ad  $H$  ita  $A$  ad  $B$ . Ratio autem ipsius  $A$  ad  $B$  data; ratio igitur et ipsius  $\Gamma\Delta$  ad  $H$  data. Et sunt ipsæ  $\Gamma\Delta, \text{EZ}, H$  proportionales; et ipsius  $\Gamma\Delta$  igitur ad  $\text{EZ}$  ratio est data. Et est

## PROPOSITION LIV.

Si deux figures données d'espèce ont entre elles une raison donnée, leurs côtés auront aussi entre eux une raison donnée.

Que les deux figures  $A, B$ , données d'espèce, aient entre elles une raison donnée; je dis que leurs côtés auront entre eux une raison donnée.

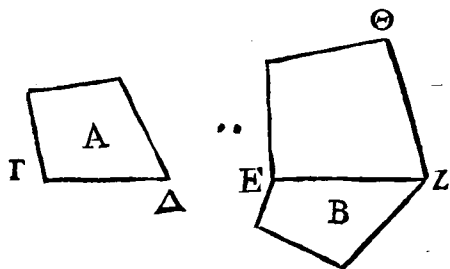
Car la figure  $A$  est semblable à la figure  $B$ , ou elle ne l'est pas. Premièrement, qu'elle lui soit semblable; prenons une troisième proportionnelle  $H$  aux droites  $\Gamma\Delta, \text{EZ}$  (11. 6); la droite  $\Gamma\Delta$  sera à  $H$  comme  $A$  est à  $B$  (20. 6). Mais la raison de  $A$  à  $B$  est donnée; la raison de  $\Gamma\Delta$  à  $H$  est donc donnée. Mais les droites  $\Gamma\Delta, \text{EZ}, H$  sont proportionnelles; la raison de  $\Gamma\Delta$  à  $\text{EZ}$  est donc donnée (24). Mais  $A$

ἔστιν ὁμοιον τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσιν δεδομένον.

Μὴ ἔστω δὲ ὁμοιον τὸ Α τῷ Β, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ Α ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΕΘ τῷ Εἶδει. Δέδοται δὲ καὶ τὸ Β. λόγος ἄρα τοῦ Β πρὸς τὸ ΕΘ δοθείς· τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Α λόγος ἐστὶ δο-

similis A ipsi B; et reliqua igitur latera ad reliqua latera rationem habebunt datam.

Non sit autem similis A ipsi B, et describatur ab EZ ipsi A similis et similiter posita EΘ; data igitur et EΘ specie. Data est autem et B; ratio igitur ipsius B ad EΘ data; ipsius autem B ad A ratio est data; et ipsius A igitur ad EΘ ratio est



θείς<sup>1</sup>· καὶ τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ὁμοιόν ἐστὶ<sup>2</sup> τὸ Α τῷ ΕΘ· λόγος ἄρα τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς<sup>3</sup> λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

data. Et similis est A ipsi EΘ; ratio igitur ipsius ΓΔ ad ΕΖ data. Propter eadem utique et reliquorum laterum ad reliqua latera ratio est data.

Α Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Εκκείσθω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΗΘ. Τὸ δὲ<sup>1</sup> Α τῷ Β ἢ τοι ὁμοιόν ἐστίν, ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον ὁμοιον.

Exponatur data recta ΗΘ. Figura utique A ipsi B vel similis est, vel non. Sit primum

est semblable à B; les côtés restants auront donc une raison donnée avec les côtés restants (53).

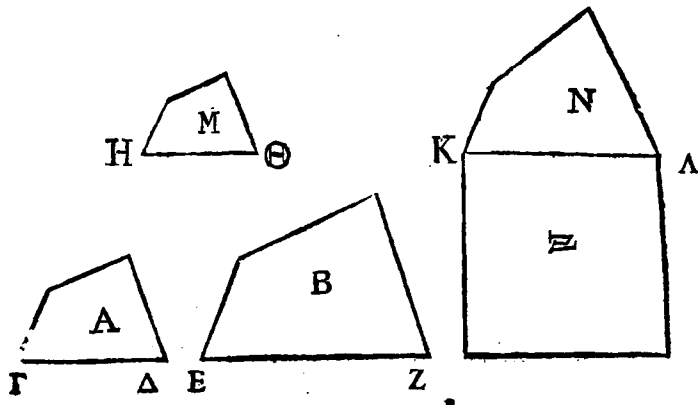
Mais que A ne soit pas semblable à B; sur EZ, décrivons la figure EΘ semblable à A, et semblablement placée (18. 6); la figure EΘ sera donnée d'espèce. Mais B est donné; la raison de B à EΘ est donc donnée (49). Mais la raison de B à A est donnée; la raison de A à EΘ est donc donnée (8). Mais A est semblable à EΘ; la raison de ΓΔ à ΕΖ est donc donnée (20. 6) (24). Semblablement la raison des côtés restants aux côtés restants est donnée.

AUTREMENT.

Soit ΗΘ une droite donnée; la figure A est semblable à B ou non. Qu'elle lui

Καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΗΘ, ΚΛ τοῖς Α, Β ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ Μ, Ν· δέδοται ἄρα τὸ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐ-

similis. Et fiat ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΗΘ ad ΚΛ, et describantur ab ΗΘ, ΚΛ ipsis Α, Β similes et similiter positæ Μ, Ν; data est igitur utraque ipsarum Μ, Ν specie. Et quoniam est ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΗΘ ad ΚΛ, et descripta sunt ab ipsis ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ similia et similiter



θύγραμμα τὰ Α, Β, Μ, Ν· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Μ πρὸς τὸ Ν δοθεὶς. Δοθέν δὲ τὸ Μ, ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει ἀναγέγραπται δεδομένου εἶδος· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ν. Αναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετράγωνον τὸ Ξ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ξ εἶδει· λόγος ἄρα τοῦ Ν πρὸς τὸ Ξ δοθεὶς. Δοθέν δὲ τὸ Ν· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ξ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν

posita rectilinea Α, Β, Μ, Ν; est igitur ut Α ad Β ita Μ ad Ν. Ratio autem ipsius Α ad Β data; ratio igitur et ipsius Μ ad Ν data. Data autem Μ, ipsa enim a datâ rectâ magnitudine descripta est data specie; data igitur et Ν. Describatur autem ab ipsâ ΚΛ quadratum Ξ; data igitur et figura Ξ specie. Ratio igitur ipsius Ν ad Ξ data. Data autem Ν; data igitur et Ξ;

soit d'abord semblable; faisons en sorte que ΓΔ soit à ΕΖ comme ΗΘ est à ΚΛ (12.6); et sur ΗΘ, ΚΛ, décrivons les figures Μ, Ν, semblables aux figures Α, Β, et semblablement placées (18.6); les figures Μ, Ν, seront données d'espèce. Puisque ΓΔ est à ΕΖ comme ΗΘ est à ΚΛ, et que sur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ on a décrit des figures rectilignes Α, Β, Μ, Ν, semblables et semblablement placées; la figure Α est à la figure Β comme Μ est à Ν (22.6). Mais la raison de Α à Β est donnée; la raison de Μ à Ν est donc donnée. Mais la figure Μ est donnée (52), puisque cette figure donnée d'espèce a été décrite sur une droite donnée de grandeur; la figure Ν est donc donnée (2). Sur ΚΛ décrivons le carré Ξ (46.1); la figure Ξ sera donnée d'espèce; la raison de Ν à Ξ est donc donnée. Mais Ν

ἡ ΚΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΗΘ δοθεῖσα· λόγος ἄρα ἐστὶν<sup>4</sup> τῇ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ δοθείς. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς. Καὶ ἔστι ὁμοιον<sup>5</sup> τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ<sup>6</sup> πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσι δεδομένον. Μὴ ἔστω δὲ ὁμοιον· ἀκολουθῶς δὲ τῇ προτέρᾳ ἀποδείξει τὸ λοιπὸν δεικνύσεται<sup>7</sup>.

data igitur est ΚΛ. Est autem et ΗΘ data; ratio igitur est ipsius ΗΘ ad ΚΛ data. Et est ut ΗΘ ad ΚΛ ita ΓΔ ad ΕΖ; ratio igitur et ipsius ΓΔ ad ΕΖ data. Et est similis Α ipsi Β, et reliqua igitur latera ad reliqua latera rationem habebunt datam. Non sit autem similis; congruenter utique præcedenti demonstrationi reliquum ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. νέ.

PROPOSITIO LV.

Εὰν χωρίον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἴσονται<sup>1</sup>.

Si spatium specie et magnitudine datum sit, et latera ejus magnitudine data erunt.

Ἐστω χωρίον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον τὸ Α· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει<sup>2</sup>.

Sit spatium Α specie et magnitudine datum; dico et latera ipsius data esse magnitudine.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ Α ὁμοιόν τε<sup>3</sup> καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Δ· δέ-

Exponatur enim positione et magnitudine data recta ΒΓ, et describatur ab ipsâ ΒΓ ipsi Α et similis et similiter posita figura Δ; data utique

est donné; la figure  $\Xi$  est donc donnée; la droite ΚΛ est donc aussi donnée. Mais ΗΘ est donné; la raison de ΗΘ à ΚΛ est donc donnée (1). Mais ΗΘ est à ΚΛ comme ΓΔ est à ΕΖ; la raison de ΓΔ à ΕΖ est donc donnée. Mais Α est semblable à Β; les côtés restants auront donc une raison donnée avec les côtés restants (53). Mais que Α ne soit pas semblable à Β; le reste se démontrera comme dans la démonstration précédente.

PROPOSITION LV.

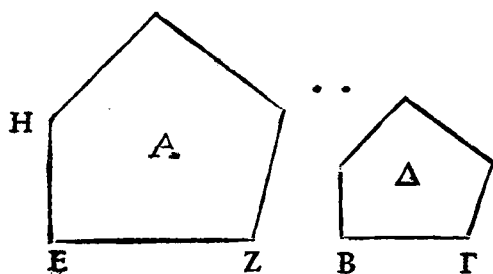
Si un espace est donné d'espèce et de grandeur, ses côtés seront donnés de grandeur.

Que l'espace Α soit donné d'espèce et de grandeur; je dis que ses côtés sont donnés de grandeur.

Car soit ΒΓ une droite donnée de position et de grandeur; sur ΒΓ décrivons la figure Δ semblable à Α et semblablement placée, la figure Δ sera donnée.

δοται δὴ τὸ  $\Delta$  τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης  
τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς  $B\Gamma$  δεδομένον τῷ εἶδει<sup>5</sup>  
εἶδος ἀναγράφεται τὸ  $\Delta$ · δέδοται ἄρα καὶ τὸ  $\Delta$

$\Delta$  specie. Et quoniam a datâ magnitudine rectâ  
 $B\Gamma$  data specie figura descripta est  $\Delta$ ; data  
igitur et  $\Delta$  magnitudine. Data est autem et  $A$ ;



τῷ μεγέθει. Δέδοται δὲ καὶ τὸ  $A$ · λόγος ἄρα τοῦ  
 $A$  πρὸς τὸ  $\Delta$  δοθείς. Καὶ ἔστι ὁμοιον<sup>6</sup> τὸ  $A$  τῷ  $\Delta$ ·  
λόγος ἄρα τῆς  $EZ$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$  δοθείς. Δοθεῖσα  
δὲ ἡ  $B\Gamma$ · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $EZ$ . Καὶ ἔστι λόγος  
τῆς  $EZ$  πρὸς τὴν  $EH$  δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  
 $EH$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν  
πλευρῶν<sup>8</sup> δέδοται τῷ μεγέθει,

ratio igitur ipsius  $A$  ad  $\Delta$  data. Et est similis  
 $A$  ipsi  $\Delta$ ; ratio igitur ipsius  $EZ$  ad  $B\Gamma$  data.  
Data autem  $B\Gamma$ ; data igitur et  $EZ$ . Et est ratio  
ipsius  $EZ$  ad  $EH$  data; data igitur et  $EH$ . Propter  
eadem utique et unumquoque reliquorum la-  
terum datum est magnitudine.

## ΑΛΛΩΣ.

## ALITER.

Εστω χωρίον τὸ  $K\Lambda M N \Xi$  δεδομένον τῷ εἶδει  
καὶ τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ  
δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει.

Sit spatium  $K\Lambda M N \Xi$  datum specie et magni-  
tudine; dico et latera ejus data esse magni-  
tudine.

d'espèce. Puisque sur  $B, \Gamma$ , donnée de grandeur, on a décrit la figure  $\Delta$  donnée d'espèce, la figure  $\Delta$  est donnée de grandeur (52). Mais  $A$  est donné; la raison de  $A$  à  $\Delta$  est donc donnée (1). Mais la figure  $A$  est semblable à la figure  $\Delta$ ; la raison de  $EZ$  à  $B\Gamma$  est donc donnée (54); mais  $B\Gamma$  est donné;  $EZ$  est donc aussi donné. Mais la raison de  $EZ$  à  $EH$  est donnée (déf. 3); le côté  $EH$  est donc aussi donné. Par la même raison, chacun des autres côtés est donné de grandeur.

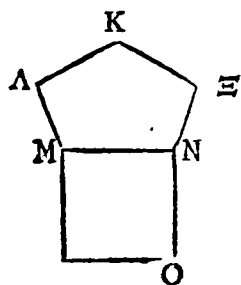
## AUTREMENT.

Soit l'espace  $K\Lambda M N \Xi$  donné d'espèce et de grandeur; je dis que ses côtés sont donnés de grandeur.



Αναγεγράφω γάρ ἀπὸ τῆς MN τετράγωνον τὸ MO· δέδοται ἄρα τῷ εἶδει. Ἀλλὰ καὶ τὸ AN· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AN πρὸς τὸ MO δοθείς. Δο-

Describatur enim ex MN quadratum MO ; datum est igitur specie. Sed et ipsum AN ; ratio igitur est ipsius AN ad MO data. Datum autem



θὲν δὲ τὸ AN τῷ μεγέθει· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ MO τῷ μεγέθει. Καὶ ἐστὶ τετράγωνον τὸ MO ἀπὸ τῆς MN· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς MN· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ MN τῷ μεγέθει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκάστη τῶν ΜΛ, ΑΚ, ΚΞ, ΞΝ δοθεῖσα ἐστὶ τῷ μεγέθει.

AN magnitudine. Datum igitur et MO magnitudine. Et est quadratum MO ex MN ; datum igitur est ipsum ex MN ; data igitur et ipsa MN magnitudine. Propter eadem utique et unaquæque ipsarum ΜΛ, ΑΚ, ΚΞ, ΞΝ data est magnitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νς'.

PROPOSITIO LVI.

Εὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλων λόγον ἔχῃ δεδομένον· ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ λοιπὴ τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἢ ἡ

Si duo æquiangula parallelogramma inter se rationem habeant datam ; erit ut primi latus ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad

Sur MN décrivons le quarré MO ( 46. 1 ) ; il sera donné d'espèce. Mais AN l'est aussi ; la raison de AN à MO est donc donnée ( 49 ). Mais AN est donné de grandeur ; donc MO est aussi donné de grandeur ( 2 ). Mais MO est le quarré de MN ; le quarré de MN est donc donné ; donc MN est donné de grandeur. Par la même raison, chacun des côtés ΜΛ, ΑΚ, ΚΞ, ΞΝ est donné de grandeur.

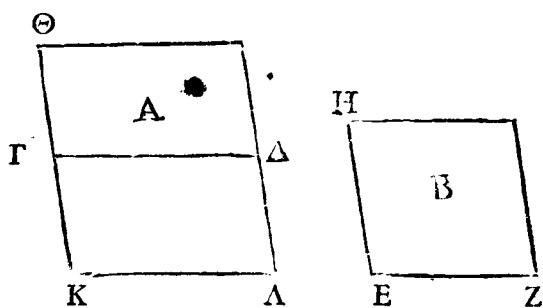
PROPOSITION LVI.

Si deux parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison donnée, un côté du premier est à un côté du second comme l'autre côté du second est à la



ἑτέρα τοῦ πρώτου πλευρὰ<sup>2</sup> λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει πρὸς τὸ<sup>3</sup> παραλληλόγραμμον.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ἡν ἡ ΓΘ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ Α παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Β παραλληλόγραμμον.



Εκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΓΘ εὐθεῖαι ἡ ΙΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΙΚ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΙΚ, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΚΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΙΚ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΚΑ, ΗΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπίνθασιν· ἴσων ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>5</sup> τὸ ΚΔ τῷ ΗΖ. Καὶ

quam alterum primi latus rationem habet datam, quam parallelogrammum habet ad parallelogrammum.

Duo enim æquiangula parallélogramma Α, Β, inter se rationem habeant datam; dico esse ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad quam ΓΘ rationem habet datam, quam Α parallelogrammum ad Β parallelogrammum.

Producatur enim in directum ipsi ΓΘ recta ΙΚ, et fiat ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΙΚ, et compleatur ΓΑ parallelogrammum. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΙΚ, æqualis autem est ΓΔ ipsi ΚΑ; est igitur ut ΚΑ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΙΚ. Et circa æquales angulos ΓΚΑ, ΗΕΖ latera reciproca sunt; æquale igitur ΚΔ ipsi ΗΖ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β

droite avec laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée, c'est-à-dire celle que l'un des parallélogrammes a avec l'autre parallélogramme.

Que les deux parallélogrammes équiangles Α, Β aient entre eux une raison donnée; je dis que ΓΔ est à ΕΖ comme ΕΗ est à la droite avec laquelle ΓΘ a la raison donnée, c'est-à-dire celle que le parallélogramme Α a avec le parallélogramme Β.

Car menons la droite ΙΚ dans la direction de ΓΘ; faisons en sorte que ΓΔ soit à ΕΖ comme ΕΗ est à ΙΚ (12. 6), et terminons le parallélogramme ΓΑ. Puisque ΓΔ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΙΚ, et que ΓΔ est égal à ΚΑ (34. 1); la droite ΚΑ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΙΚ. Mais les côtés autour des angles ΓΚΑ, ΗΕΖ sont réciproquement proportionnels; ΚΔ est donc égal à ΗΖ (14. 6). Mais la raison

ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ἴσον δὲ τὸ Β τῷ ΓΑ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΑ δοθείς. Ὡς δὲ τὸ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΑ οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΓΚ· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ δὲ ΘΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγον ἔχει δοθέντα, ὅν τὸ Α χωρίον πρὸς τὸ Β· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ἢν ἡ ΘΓ λόγον ἔχει, ὅν τὸ Α χωρίον πρὸς τὸ Β χωρίον<sup>6</sup>.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Εάν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθείσαν εὐθεῖαν<sup>1</sup> παραβληθῇ ἐν δεδομένη γωνίᾳ, δέδοται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.

Δοθὲν γάρ τὸ ΑΗ παρὰ δοθείσαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· λέγω ὅτι δοθείσά ἐστὶν ἡ ΓΑ.

Αναγεγράφθω γάρ<sup>2</sup> ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΕΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒ. Καὶ διήχθωσαν αἱ ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ ἐπὶ τὰ Δ, Θ. Καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒ, ΑΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς

data, æquale autem B ipsi ΓΑ; ratio igitur est ipsius ΘΔ ad ΓΑ data. Ut autem ΘΔ ad ΓΑ ita ΘΓ ad ΓΚ; et ipsius ΘΓ igitur ad ΓΚ ratio est data. Et quoniam est ut ΓΑ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ, ipsa autem ΘΓ ad ΓΚ rationem habet datam, quam Α spatium ad Β; est igitur ut ΓΑ ad ΕΖ ita ΕΗ ad ΓΚ quam ΘΓ rationem habet, quam Α spatium ad Β spatium.

PROPOSITIO LVII.

Si datum spatium ad datam rectam applicatum fuerit in dato angulo, data est latitudo applicationis.

Datum enim spatium ΑΗ ad datam ΑΒ applicetur in dato angulo ΓΑΒ; dico datam esse ΓΑ.

Describatur enim ab ipsâ ΑΒ quadratum ΕΒ; datum igitur est ΕΒ. Et productæ sint ipsæ ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ ad puncta Δ, Θ. Et quoniam datum est utrumque ipsorum ΕΒ, ΑΗ; ratio

de Α à Β est donnée, et Β est égal à ΓΑ; la raison de ΘΔ à ΓΑ est donc donnée. Mais ΘΔ est à ΓΑ comme ΘΓ est à ΓΚ ( 1. 6 ); la raison de ΘΓ à ΓΚ est donc donnée. Mais ΓΑ est à ΕΖ comme ΕΗ est à ΓΚ, et ΘΓ a avec ΓΚ la raison donnée, savoir celle de l'espace Α à l'espace Β; le côté ΓΑ est donc à ΕΖ comme ΕΗ est à la droite avec laquelle ΘΓ a la raison donnée, savoir celle que l'espace Α a avec l'espace Β.

PROPOSITION XVII.

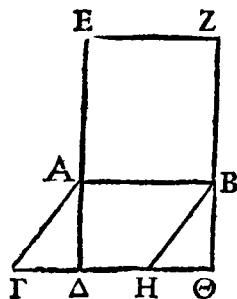
Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, dans un angle donné; la largeur de l'application est aussi donnée.

Qu'un espace donné ΑΗ soit appliqué à une droite donnée ΑΒ, dans un angle donné ΓΑΒ; je dis que ΓΑ est donné.

Sur ΑΒ décrivons le quarré ΕΒ; la figure ΕΒ sera donnée. Prolongeons ΕΑ, ΖΒ, ΓΗ vers les points Δ, Θ. Puisque chacune des figures ΕΒ, ΑΗ est donnée, la

τὸ  $AH$  δοθείς. Ἰσον δὲ τὸ  $HA$  τῷ  $A\Theta$  λόγος ἄρα καὶ τοῦ  $EB$  πρὸς τὸ  $A\Theta$  δοθείς<sup>3</sup>. Ὡστε καὶ τῆς  $EA$  πρὸς τὴν  $AD$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἰση δὲ ἡ  $EA$

igitur ipsius  $EB$  ad  $AH$  data. Æquale autem  $HA$  ipsi  $A\Theta$ ; ratio igitur et ipsius  $EB$  ad  $A\Theta$  data; quare et ipsius  $EA$  ad  $AD$  ratio est data. Æqualis



τῇ  $AB$  λόγος ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς  $BA$  πρὸς τὴν<sup>4</sup>  $AD$  δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ  $\Gamma AB$  γωνία, ὧν<sup>5</sup> ἡ ὑπὸ  $\Delta AB$  δοθεῖσά ἐστι· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma AD$  ἐστὶ δοθεῖσα<sup>6</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\Gamma DA$  δοθεῖσα, ὀρθὴ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma AD$  δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ  $\Gamma AD$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς  $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $AD$  δοθείς. Τῆς δὲ  $AD$  πρὸς τὴν  $AB$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς  $\Gamma A$  ἄρα πρὸς τὴν  $AB$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ  $BA$ · δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $AG$ . Καὶ ἐστὶ τὸ πλάτος τοῦ παραβλήματος<sup>7</sup>.

autem  $EA$  ipsi  $AB$ ; ratio est igitur et ipsius  $BA$  ad  $AD$  data. Et quoniam datus est  $\Gamma AB$  angulus, quorum et ipse  $\Delta AB$  datus est; reliquus igitur  $\Gamma AD$  est datus. Est autem ipse  $\Gamma DA$  datus, rectus enim; reliquus igitur  $\Gamma AD$  datus est; datum est igitur  $\Gamma AD$  triangulum specie; ratio igitur est ipsius  $\Gamma A$  ad  $AD$  data. Ipsius autem  $AD$  ad  $AB$  ratio est data; et ipsius  $\Gamma A$  igitur ad  $AB$  ratio est data. Et est data ipsa  $BA$ ; data igitur et ipsa  $AG$ , et est latitudo applicationis.

raison de  $EB$  à  $AH$  est donnée. Mais  $HA$  est égal à  $A\Theta$  (35. 1); la raison de  $EB$  à  $A\Theta$  est donc donnée; la raison de  $EA$  à  $AD$  est donc donnée (1. 6). Mais  $EA$  est égal à  $AB$ ; la raison de  $BA$  à  $AD$  est donc donnée. Mais l'angle  $\Gamma AB$  est donné, et l'angle  $\Delta AB$  est aussi donné; l'angle restant  $\Gamma AD$  est donc aussi donné (4). Mais l'angle  $\Gamma DA$  est donné, car il est droit; l'angle restant  $\Gamma AD$  est donc donné (32. 1) (4); le triangle  $\Gamma AD$  est donc donné d'espèce (40); la raison de  $\Gamma A$  à  $AD$  est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de  $AD$  à  $AB$  est donnée; la raison de  $\Gamma A$  à  $AB$  est donc donnée (8). Mais  $BA$  est donné; la droite  $AG$  est donc donnée (2); la largeur de l'application est donc donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν η'.

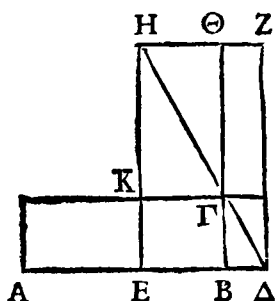
Εὰν δοθῇν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεΐαν<sup>1</sup>  
 παραβληθῇ, ἑλλειπον εἶδει δεδομένῳ τῷ εἶδει.  
 δέδοται τὰ πλάτη τοῦ ἑλλείμματος.

Δοθέν γὰρ τὸ ΓΑ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΔ πα-  
ραβεβλήσθω, ἔλλειπον εἶδει δεδομένῳ τῷ ΓΔ·  
λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΒΔ.

PROPOSITIO LVIII.

Si datum spatium ad datam rectam applicata fuerit deficiens datâ specie figurâ, datæ sunt latitudines defectûs.

Datum enim spatium  $\Gamma A$  ad datam  $A\Delta$  applicetur, deficiens datâ specie figurâ  $\Gamma\Delta$ ; dico datam esse utramque ipsarum  $\Gamma B$ ,  $B\Delta$ .



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Ε ση-  
μεῖον· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῷ μεγέθει<sup>2</sup>. Καὶ  
ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΔ τῷ ΓΔ ὅμοιον καὶ  
ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΕΖ, καὶ κατα-  
γεγράφθω τὸ σχῆμα· δέδοται ἄρα καὶ<sup>3</sup> τὸ ΕΖ τῷ  
εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΕΔ  
δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ ΕΖ·

Secetur enim  $A\Delta$  bifariam in puncto  $E$ ; data igitur est ipsa  $E\Delta$  magnitudine. Et describatur ab ipsâ  $E\Delta$  ipsi  $\Gamma\Delta$  simile et similiter positum rectilineum  $EZ$ , et construatur figura; datum est igitur et  $EZ$  specie. Et quoniam a datâ rectâ  $E\Delta$  data specie figura  $EZ$  descripta est; data est

PROPOSITION LVIII.

Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est défailant d'une figure donnée d'espèce, les largeurs du défaut sont données.

Qu'un espace donné  $\Gamma A$  soit appliqué à une droite donnée  $A\Delta$ , et que cet espace soit défailant d'une figure  $\Gamma\Delta$  donnée d'espèce; je dis que chacune des droites  $\Gamma B$ ,  $B\Delta$  est donnée.

Car partageons  $AA$  en deux parties égales au point  $E$  (10. 1); la droite  $EA$  sera donnée de grandeur (2). Sur  $EA$ , décrivons la figure rectiligne  $EZ$  semblable à la figure  $\Gamma A$  et semblablement placée (18. 6), et construisons la figure; la figure  $EZ$  sera donnée d'espèce. Puisque sur la droite donnée  $EA$ , on a décrit la figure  $EZ$  donnée d'espèce; la figure  $EZ$  sera donnée de grandeur (52). Mais

δέδοται ἄρα τὸ EZ τῷ μεγέθει. Καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΓ, ΚΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὰ ΑΓ, ΚΘ τῷ μεγέθει. Καὶ ἔστι τὸ ΑΓ δοθὲν τῷ μεγέθει, ὑπ-  
κεῖται γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘ δοθὲν ἔστι τῷ μεγέθει. Ἐστι δὲ καὶ τῷ εἶδει δοθὲν, ὁμοιον γάρ ἔστι τῷ ΓΔ· τοῦ ΘΚ ἄρα δεδομένα εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν ἡ ΚΓ. Καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΒ· δοθεῖσα ἄρα ἔστιν καὶ ἡ ΕΒ. Ἐστι δὲ καὶ ἡ ΕΔ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ δοθεῖσα ἔστι<sup>5</sup>. Καὶ λόγος τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα ἔστι καὶ<sup>6</sup> ἡ ΒΓ.

igitur ipsa EZ magnitudine. Et est æqualis ipsis ΑΓ, ΚΘ; datae sunt igitur et ipsae ΑΓ, ΚΘ magnitudine. Et est ipsa ΑΓ data magnitudine, supponitur enim; reliqua igitur ΚΘ data est magnitudine. Est autem et specie data, similis enim ipsi ΓΔ; ipsius ΘΚ igitur data sunt latera; data igitur est ipsa ΚΓ. Et est æqualis ipsi ΕΒ; data igitur est et ipsa ΕΒ. Est autem et ΕΔ data; et reliqua igitur ΔΒ data est. Et ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ data; data igitur est et ipsa ΒΓ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

## PROPOSITIO LIX.

Εὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ὑπέρβαλλον τῷ εἶδει δεδομένῳ εἶδει<sup>1</sup>· δέδοται τὰ πλάτη τῆς ὑπερβολῆς.

Δοθὲν γάρ τὸ ΑΒ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΓ παραβλήσω, ὑπέρβαλλον εἶδει δεδομένῳ εἶδει<sup>2</sup> τῷ ΓΒ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΓ, ΓΕ.

Si datum spatium ad datam rectam applicetur, excedens datâ specie figurâ, datae sunt latitudines excessûs.

Datum enim spatium ΑΒ ad datam ΑΓ applicetur, excedens datâ specie figurâ ΓΒ; dico datam esse utramque ipsarum ΘΓ, ΓΕ.

cette figure est égale à la somme des figures ΑΓ, ΚΘ ( 36, et 43. 1 ); la somme des figures ΑΓ, ΚΘ est donc donnée de grandeur. Mais ΑΓ est donné de grandeur, par supposition; la figure restante ΚΘ est donc donnée de grandeur ( 4 ). Mais elle est donnée d'espèce, car elle est semblable à la figure ΓΔ; les côtés de la figure ΘΚ sont donc donnés ( 55 ); la droite ΚΓ est donc donnée. Mais elle est égale à ΕΒ ( 34. 1 ); la droite ΕΒ est donc donné. Mais ΕΔ est donné; la droite restante ΔΒ est donc donnée ( 4 ). Mais la raison de ΒΔ à ΒΓ est donnée ( déf. 3 ); donc ΒΓ est donné ( 2 ).

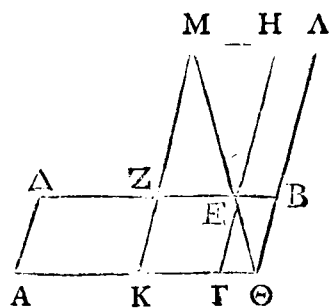
## PROPOSITION LIX.

Si un espace donné est appliqué à une droite donnée, et si cet espace est excédent d'une figure donnée d'espèce, les côtés de l'excès sont donnés.

Qu'un espace donné ΑΒ soit appliqué à une droite donnée ΑΓ, et que cet espace soit excédent d'une figure ΓΒ donnée d'espèce; je dis que chacun des côtés ΘΓ, ΓΕ est donné.

Τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον,  
καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΒ ὅμοιον καὶ  
ἐμείως κείμενον τὸ ΖΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα  
διάμετρόν ἐστι τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ· ἡχθῶ αὐτῶν διά-

Secetur enim bifariam ΔΕ in Z puncto, et  
describatur ab ipsâ ΕΖ ipsi ΓΒ simile et similiter  
positum ΖΗ; circa eadem igitur diametrum est  
ipsum ΖΗ cum ipso ΓΒ; ducatur ipsorum dia-



μετρος ἡ ΘΕΜ<sup>3</sup>, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.  
Καὶ ἐπεὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΓΒ τῷ ΖΗ<sup>4</sup>. δέδο-  
ται δὲ τὸ ΓΒ τῷ εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΖΗ  
τῷ εἶδει· καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ δεδομένης εὐ-  
θείας τῆς ΖΕ· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ μεγέθει.  
Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθὲν· δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ  
ΑΒ, ΖΗ τῷ μεγέθει. Καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ ΚΛ· δοθέν  
ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει<sup>5</sup>. Ἔστι δὲ καὶ τῷ  
εἶδει, ὅμοιον γὰρ ἐστὶ τῷ ΓΒ· τοῦ ΚΛ ἄρα αἱ  
πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει<sup>6</sup>. δοθεῖσα ἄρα  
ἐστὶν ἡ ΚΘ. Καὶ<sup>7</sup> ἡ ΚΓ δοθεῖσα ἐστίν, ἴση γάρ  
ἐστὶ τῇ ΖΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΘ ἐστὶ δοθεῖσα<sup>8</sup>, καὶ

meter ΘΕΜ, et construatur figura. Et quoniam  
simile est ΓΒ ipsi ΖΗ, datum est autem ΓΒ  
specie; datum igitur est et ΖΗ specie; et descrip-  
tum est a datâ rectâ ΖΕ; datum igitur est ΖΗ  
magnitudine. Est autem et ΑΒ datum; data  
igitur sunt ΑΒ, ΖΗ magnitudine. Et sunt æqualia  
ipsi ΚΛ; datum igitur est ΚΛ magnitudine. Est  
autem et specie, simile enim est ipsi ΓΒ; ipsius  
ΚΛ igitur latera data sunt magnitudine; data  
igitur est ΚΘ. Et ipsa ΚΓ data est, æqualis enim  
est ipsi ΖΕ; reliqua igitur ΓΘ est data, et ra-

Car partageons ΔΕ en deux parties égales au point Ζ; sur ΖΕ décrivons la figure ΖΗ semblable à ΓΒ et semblablement placée (18. 6); la figure ΖΗ sera autour de la même diagonale que la figure ΓΒ (26. 6); menons leur diagonale ΘΕΜ, et construisons la figure. Puisque ΓΒ est semblable à ΖΗ, et que ΓΒ est donné d'espèce, la figure ΖΗ sera donnée d'espèce. Mais cette figure est décrite sur la droite donnée ΖΕ; la droite ΖΗ est donc donnée de grandeur (52). Mais ΑΒ est donné; la somme des figures ΑΒ, ΖΗ est donc donnée de grandeur. Mais la somme de ces figures est égale à ΚΛ (36 et 43. 1); la figure ΚΛ est donc donnée de grandeur (3). Mais cette figure est donnée d'espèce, car elle est semblable à ΓΒ; les côtés de ΚΛ sont donc donnés de grandeur (55); la droite ΚΘ est donc donnée. Mais ΚΓ est donné, car il est égal à ΖΕ (34. 1); la droite restante ΓΘ est donc donnée. Mais

λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΘΒ δοθέντα· δοθεῖσα ἄρα  
ἐστὶ καὶ ἡ ΘΒ.

tionem habet ad ΘΒ datam ; data igitur est  
et ΘΒ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

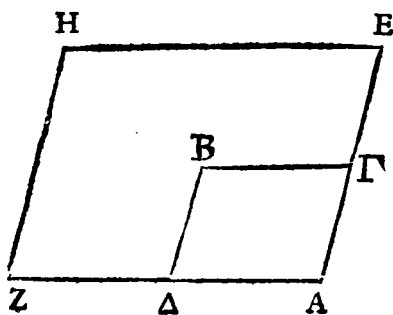
Εὰν παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἶδει  
καὶ τῷ μεγέθει δεδομένῳ γνόμονι αὐξηθῇ ἢ  
μειωθῇ, δέδοται τὰ πλάτη τοῦ γνόμονος.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒ δεδομένον τῷ  
εἶδει καὶ τῷ μεγέθει νύξησθω πρότερον δεδομένῳ  
γνόμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν  
ἐκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

## PROPOSITIO LX.

Si parallelogrammum datum specie et magni-  
tudine , dato gnomone augeatur vel minuat-  
ur, datæ sunt latitudines gnomonis.

Parallelogrammum enim ΑΒ datum specie et  
magnitudine augeatur primum dato gnomone  
ΕΓΒΔΖΗ ; dico datam esse utramque ipsarum  
ΓΕ, ΔΖ.



Επεὶ γὰρ δοθὲν ἐστὶ τὸ ΑΒ, ἐστὶ δὲ καὶ ὁ  
ΕΓΒΔΖΗ γνόμων δοθείς· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΗ  
δοθὲν ἐστὶ. Ἀλλὰ καὶ τῷ εἶδει, ὅμοιον γάρ ἐστι  
τῷ ΑΒ· τοῦ ΑΗ ἄρα δεδομένα ἐστὶν αἱ πλευραί.

Quoniam enim data est ΑΒ, est autem et  
ΕΓΒΔΖΗ gnomon datus ; et totum igitur ΑΗ  
datum est. Sed et specie, simile enim est ipsi  
ΑΒ ; ipsius ΑΗ igitur data sunt latera ; datum

cette droite a une raison donnée avec ΘΒ ( déf. 3 ) ; la droite ΘΒ est donc  
donnée ( 2 ).

## PROPOSITION LX.

Si un parallélogramme donné d'espèce et de grandeur, est augmenté ou  
diminué d'un gnomon donné, les largeurs du gnomon sont données.

Que le parallélogramme ΑΒ, donné d'espèce et de grandeur, soit augmenté  
du gnomon ΕΓΒΔΖΗ ; je dis que chacune des droites ΓΕ, ΔΖ est donnée.

Car puisque ΑΒ est donné, et que le gnomon ΕΓΒΔΗ est aussi donné, l'espace  
entier ΑΗ sera donné. Mais cet espace est donné d'espèce, car il est semblable  
à ΑΒ ( 26. 6 ) ; les côtés de ΑΗ sont donc donnés ( 55 ) ; chacune des droites ΑΕ,



δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  $AE$ ,  $AZ$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν  $ΓA$ ,  $ΑΔ$  δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν  $ΕΓ$ ,  $ZΔ$  ἐστὶ δοθεῖσα<sup>2</sup>.

Πάλιν δὴ παραλληλόγραμμον τὸ  $AH$  δεδομένον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει μεμειώσθω δεδομένῳ γνόμονι τῷ  $ΕΓΒΔΖΗ$ · λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  $ΓΕ$ ,  $ΔΖ$ .

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστὶ τὸ  $AH$ , οὗ ὁ  $ΕΓΒΔΖΗ$  γνόμων δοθεὶς ἐστὶ· λοιπὸν ἄρα τὸ  $AB$  δοθέν ἐστὶν. Ἀλλὰ καὶ τῷ εἶδει, ὁμοιον γάρ ἐστι τῷ  $HA$ <sup>3</sup>. τοῦ  $AB$  ἄρα αἱ 4 πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  $ΓA$ ,  $ΑΔ$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν  $ΕA$ ,  $AZ$  δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν  $ΕΓ$ ,  $ΔΖ$  δοθεῖσά ἐστὶν.

igitur est utraque ipsarum  $AE$ ,  $AZ$ . Est autem et utraque ipsarum  $ΓA$ ,  $ΑΔ$  data; reliqua igitur utraque ipsarum  $ΕΓ$ ,  $ZΔ$  est data.

Rursus autem parallelogrammum  $AH$  datum specie et magnitudine minuatür dato gnomone  $ΕΓΒΔΖΗ$ ; dico datam esse utramque rectarum  $ΓΕ$ ,  $ΔΖ$ .

Quoniam enim datum est  $AH$ , cujus  $ΕΓΒΔΖΗ$  gnomon datus est; reliquum igitur  $AB$  datum est. Sed et specie, simile enim est ipsi  $HA$ ; ipsius  $AB$  igitur latera data sunt; datum igitur est utrumque laterum  $ΓA$ ,  $ΑΔ$ . Est autem et utrumque laterum  $ΕA$ ,  $AZ$  datum; et reliqua igitur utraque ipsarum  $ΕΓ$ ,  $ΔΖ$  data est.

$AZ$  est donc donnée. Mais chacune des droites  $ΓA$ ,  $ΑΔ$  est donnée; chacune des droites restantes  $ΕΓ$ ,  $ZΔ$  est donc donnée aussi (4).

Mais de plus, que le parallélogramme  $AH$ , donné d'espèce et de grandeur, soit diminué du gnomon donné  $ΕΓΒΔΖΗ$ ; je dis que chacune des droites  $ΓΕ$ ,  $ΔΖ$  est donnée.

Car puisque  $AH$  est donné, et que le gnomon  $ΕΓΒΔΖΗ$  est donné aussi, la surface restante  $AB$  est donnée (4). Mais cette surface est donnée d'espèce, car elle est semblable à  $HA$  (26. 6); les côtés de  $AB$  sont donc donnés (55); chacune des droites  $ΓA$ ,  $ΑΔ$  est donc donnée. Mais chacune des droites  $ΕA$ ,  $AZ$  est donnée; chacune des droites restantes  $ΕΓ$ ,  $ΔΖ$  est donc donnée (4).



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΑ΄.

Εάν δεδομένου τῷ εἶδει εἶδους παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμον χωρίον παραβληθῇ ἐν δεδομένη γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Δεδομένου γὰρ τῷ εἶδει εἶδους τοῦ ΑΖΓΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΒ παραλληλόγραμμον χωρίον παραβελήσθω τὸ ΓΔ ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΓ εἶδους πρὸς τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον<sup>1</sup> δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

Ἡχθῶ γὰρ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΖΓ παράλληλος ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΓΒ παράλληλος ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν<sup>2</sup> δοθείσα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία, καὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· δοθέν ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει. Δέδοται δὲ τῷ εἶδει τὸ ΑΖΓΒ εἶδος, καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΓΒ παραλληλόγραμμον

## PROPOSITIO LXI.

Si ad datæ specie figuræ unum laterum parallelogrammum spatium applicetur in dato angulo, habeat autem figura ad parallelogrammum rationem datam, datum est parallelogrammum specie.

Etenim ad datæ specie figuræ ΑΖΓΒ unum laterum ΓΒ parallelogrammum spatium ΓΔ applicetur in dato angulo ΑΓΒ, ratio autem sit figuræ ΑΓ ad ΓΔ parallelogrammum data; dico datum esse ipsum ΓΔ specie.

Ducatur enim per punctum quidem Β ipsi ΖΓ parallela ΒΗ, per punctum Ζ vero ipsi ΓΒ parallela ΖΗ, et producantur ipsæ ΖΓ, ΗΒ ad Κ, Θ puncta. Quoniam igitur datus est angulus ΖΓΒ, et ratio est ipsius ΖΓ ad ΓΒ data; datum igitur est ΖΒ parallelogrammum specie. Data est autem specie figura ΑΖΓΒ, et descriptum est ab eâdem rectâ ΓΒ parallelo-

## PROPOSITION LXI.

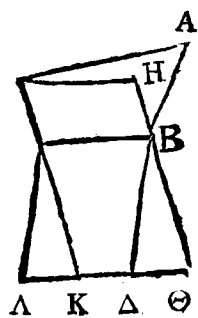
Si un parallélogramme est appliqué à un côté d'une figure donnée d'espèce dans un angle donné, et si cette figure a une raison donnée avec ce parallélogramme, ce parallélogramme est donné d'espèce.

Que le parallélogramme ΓΔ soit appliqué à un des côtés ΓΒ de la figure ΑΖΓΒ donnée d'espèce, dans l'angle donné ΑΓΒ, et que la raison de la figure ΑΓ au parallélogramme ΓΔ soit donnée; je dis que ΓΔ est donné d'espèce.

Car par le point Β menons la droite ΒΗ parallèle à ΖΓ, et par le point Ζ la droite ΖΗ parallèle à ΓΒ (31. 1). Prolongeons ΖΓ, ΗΒ vers les points Κ, Θ. Puisque l'angle ΖΓΒ est donné (déf. 3), et que la raison de ΖΓ à ΓΒ est aussi donnée, le parallélogramme ΖΒ sera donné d'espèce. Mais la figure ΑΖΓΒ est donnée d'espèce, et sur ΓΒ on a décrit le parallélogramme ΖΒ donné d'espèce;

δεδομένον τῷ εἶδει τὸ ΖΒ<sup>4</sup>· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓ εἶδους πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον δοθείς. Τοῦ δὲ ΑΖΓΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὅτι περὶ ὑποκείται<sup>5</sup>, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΚΒ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΚΒ πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ<sup>6</sup> δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ ΖΓ πρὸς

grammum datum specie ipsum ΖΒ ; ratio igitur est figuræ ΑΓ ad parallelogrammum ΖΒ data. Ipsius autem ΑΖΓΒ ad ΓΔ ratio est data , quoniam supponitur , æquale autem ΓΔ ipsi ΚΒ ; ratio igitur et ipsius ΚΒ ad ΓΗ est data ; quare et ipsius ΖΓ ad ΓΚ ratio est data.



τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ ἐστὶ<sup>7</sup> δοθείσα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία<sup>8</sup> δοθείσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ δοθεῖσά ἐστιν<sup>8</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ γωνία δοθείσα, ἴση γάρ ἐστι<sup>9</sup> τῇ ὑπὸ ΚΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ<sup>10</sup> ΓΑΚ ἐστὶ δοθείσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΚΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. Τῆς δὲ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς

Ipsius autem ΖΓ ad ΓΒ ratio est data ; et ipsius ΒΓ igitur ad ΓΚ ratio est data. Et quoniam datus est ΖΓΒ angulus ; et ipse deinceps igitur ΒΓΚ est datus. Est autem et ΒΓΑ angulus datus ; reliquus igitur ΑΓΚ datus est. Est autem et ΑΚΓ angulus datus , æqualis enim est ipsi ΚΓΒ ; reliquus igitur ΓΑΚ est datus ; datum est igitur ΑΚΓ triangulum specie ; ratio igitur est ipsius ΑΓ ad ΓΚ data. Ipsius autem ΚΓ ad ΓΒ ratio est data ; et ipsius ΑΓ

la raison de la figure ΑΓ au parallélogramme ΖΒ est donc donnée (49). Mais la raison de ΑΖΓΒ à ΓΔ est donnée, par supposition, et ΓΔ est égal à ΚΒ (35. 1) ; la raison de ΚΒ à ΓΗ est donc donnée (8) ; la raison de ΖΓ à ΓΚ est donc donnée aussi (1.6). Mais la raison de ΖΓ à ΓΒ est donnée (déf. 3) ; la raison de ΒΓ à ΓΚ est donc donnée (8). Mais l'angle ΖΓΒ est donné ; l'angle de suite ΒΓΚ est donc donné aussi (13. 1) (4). Mais l'angle ΒΓΑ est donné ; l'angle restant ΑΓΚ est donc donné (4). Mais l'angle ΑΚΓ est donné, car il est égal à l'angle ΚΓΒ (29. 1) ; l'angle restant ΓΑΚ est donc donné (32. 1) (4) ; le triangle ΑΚΓ est donc donné d'espèce (40) ; la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de

τὴν ΓΒ λόγος ἴστί δοθείς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

igitur ad ΓΒ ratio est data. Et est datus ΑΓΒ angulus; datum est igitur ΓΔ parallelogrammum specie.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ'.

## PROPOSITIO LXII.

Εὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῆς μιᾶς δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος, ἀπὸ δὲ τῆς ἐτέρας χωρίον παραλληλόγραμμον ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχη δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς ΑΒ δεδομένον τῷ εἶδει εἶδος τὸ ΑΕΒ, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΔ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΕΒ εἶδους πρὸς τὸ ΖΔ παραλληλόγραμμον δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον τῷ εἶδει.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ΖΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον<sup>2</sup> τὸ ΑΗ.

Si duæ rectæ inter se rationem habeant datam, et descripta sit ab unâ quidem data specie figura, ab alterâ vero spatium parallelogrammum in dato angulo, habeat autem figura ad parallelogrammum rationem datam; datum est parallelogrammum specie.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ inter se rationem habeant datam, et descripta sit ab ipsâ quidem ΑΒ data specie figura ΑΕΒ, ab ipsâ vero ΓΔ parallelogrammum ΔΖ in dato angulo ΖΓΔ, ratio autem sit figuræ ΑΕΒ ad ΖΔ parallelogrammum data; dico datum esse parallelogrammum ΔΖ specie.

Describatur enim ab ipsâ ΑΒ ipsi ΖΔ simile et similiter positum parallelogrammum ΑΗ. Et

ΚΓ à ΒΓ est donnée; la raison de ΑΓ à ΓΒ est donc donnée ( 1 ) Mais l'angle ΑΓΒ est donné; le parallélogramme ΓΔ est donc donné d'espèce ( déf. 3 ).

## PROPOSITION LXII.

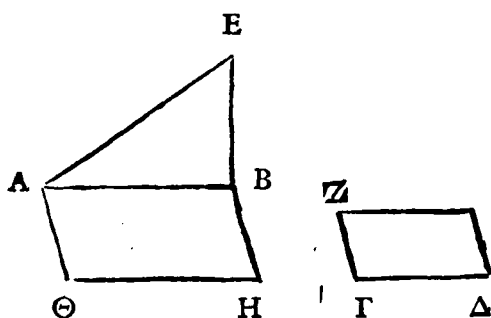
Si deux droites ont entre elles une raison donnée, si sur l'une d'elles on décrit une figure donnée d'espèce, si sur l'autre on décrit un parallélogramme dans un angle donné, et si cette figure a une raison donnée avec le parallélogramme; le parallélogramme est donné d'espèce.

Que les deux droites ΑΒ, ΓΔ aient entre elles une raison donnée; sur ΑΒ décrivons une figure ΑΕΒ donnée d'espèce, et sur ΓΔ, dans l'angle donné ΖΓΔ, décrivons le parallélogramme ΔΖ; que la raison de la figure ΑΕΒ au parallélogramme ΖΔ soit donnée; je dis que le parallélogramme ΔΖ est donné d'espèce.

Car sur ΑΒ construisons le parallélogramme ΑΗ semblable à ΖΔ et semblable-

Καὶ ἐπεὶ λόγος τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς ἐστι<sup>3</sup>, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, ZΔ.

quoniam ratio ipsius AB ad ΓΔ data est, et descripta sunt ab ipsis AB, ΓΔ similia et similiter posita AH, ZΔ; ratio igitur est ipsius



, λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ZΔ δοθείς. Τοῦ δὲ ZΔ πρὸς τὸ AEB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AEB ἄρα πρὸς τὸ AH λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ABH γωνία, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ZΓΔ· ἐπεὶ οὖν δεδομένου τῷ εἶδει εἶδους τοῦ AEB παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB παραβέβληται τὸ AH ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABH, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ AEB εἶδους πρὸς τὸ AH παραλληλόγραμμον δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ AH τῷ εἶδει. Καὶ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ZΔ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ZΔ τῷ εἶδει.

AH ad ZΔ data. Ipsius autem ZΔ ad AEB ratio est data; et ipsius AEB igitur ad AH ratio est data. Et est datus ABH angulus, æqualis enim est ipsi ZΓΔ; quoniam igitur ad unum laterum AB datæ specie figuræ AEB applicatum est ipsum AH in dato angulo ABH, et ratio est figuræ AEB ad AH parallelogrammum data, datum igitur est ipsum AH specie. Et est simile ipsi ZΔ; datum est igitur et ZΔ specie.

ment placée (18. 6). Puisque la raison de AB à ΓΔ est donnée, et que sur AB, ΓΔ on a décrit les figures AH, ZΔ semblables et semblablement placées, la raison de AH à ZΔ sera donnée (50). Mais la raison de ZΔ à AEB est donnée; la raison de AEB à AH est donc donnée (8). Et puisque l'angle ABH est donné, car il est égal à l'angle ZΓΔ; qu'à un des côtés AB de la figure AEB donnée d'espèce, on a appliqué la figure AH dans l'angle donné ABH, et que la raison de la figure AEB au parallélogramme AH est donnée (49); la figure AH sera donnée d'espèce (61). Mais cette figure est semblable à ZΔ; la figure ZΔ est donc donnée d'espèce (déf. 3).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΓ'.

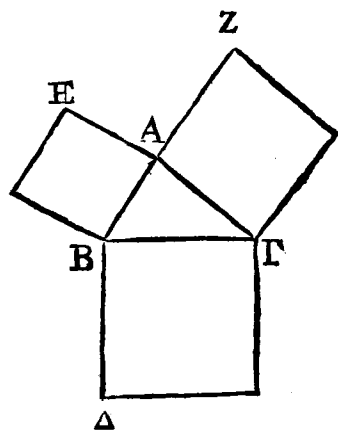
## PROPOSITIO LXIII.

Εάν τρίγωνον τῷ εἶδει δεδομένον ᾗ, τὸ ἀπὸ ἐκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνον<sup>1</sup> πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἶδει τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ ἐκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνα τὰ  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$ . λέγω ὅτι ἕκαστον τῶν  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$  πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Si triangulum specie datum sit, ab unoquoque laterum ejus quadratum ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum  $AB\Gamma$  datum specie, et describantur ab unoquoque laterum ipsius quadrata  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$ ; dico unumquodque quadratorum  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$  ad triangulum  $AB\Gamma$  rationem habiturum esse datam.



Επεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $B\Gamma$  εὐθύγραμμα δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχεν, τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ . λόγος ἄρα τοῦ  $AB\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Delta$  δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρου τῶν  $EB$ ,  $Z\Gamma$  πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγος ἴστί δοθείς.

Quoniam enim ab eadem rectâ  $B\Gamma$  rectilinea data specie descripta sunt quædam  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ ; ratio igitur ipsius  $AB\Gamma$  ad  $\Gamma\Delta$  data. Propter eadem utique et utriusque ipsorum  $EB$ ,  $Z\Gamma$  ad  $AB\Gamma$  triangulum ratio est data.

## PROPOSITION LXIII.

Si un triangle est donné d'espèce, le quarré de chacun de ses côtés aura une raison donnée avec ce triangle.

Soit  $AB\Gamma$  un triangle donné d'espèce; sur ses côtés, décrivons les quarrés  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$ ; je dis que chacun des quarrés  $EB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$  aura une raison donnée avec le triangle  $AB\Gamma$ .

Car puisque sur la même droite  $B\Gamma$ , on a décrit des figures rectilignes quelconques  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  données d'espèce, la raison de  $AB\Gamma$  à  $\Gamma\Delta$  sera donnée (49). La raison de chacun des quarrés  $EB$ ,  $Z\Gamma$  au triangle  $AB\Gamma$  est donnée par la même raison.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

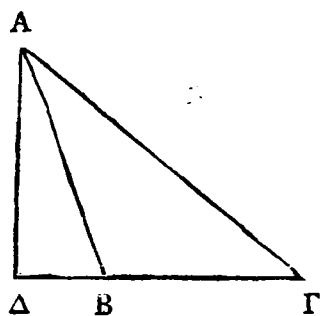
PROPOSITIO LXIV.

Εάν τρίγωνον ἄμβλειαν ἔχη γωνίαν δεδομένην ᾧ μείζον δύναται ἢ τὴν ἄμβλειαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ἄμβλειαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστω τρίγωνον ἄμβλυγώνιον τὸ  $AB\Gamma$ , ἄμβλειαν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  δεδομένην, καὶ διήχθω ἐπ' εὐθείας τῆς  $B\Gamma$  εὐθεΐα ἡ  $B\Delta$ , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὴν  $\Delta\Gamma$  κάθετος ἡ  $A\Delta$ . λέγω ὅτι ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A\Gamma$  τῶν<sup>2</sup> ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , τουτέστι τὸ δις ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$ , ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Si triangulum obtusum habeat angulum datum, quo magis potest latus obtusum angulum subtendens quam latera comprehendentia obtusum angulum, illud spatium ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum obtusangulum  $AB\Gamma$ , obtusum habens angulum  $AB\Gamma$  datum, et producat in directum ipsi  $B\Gamma$  recta  $B\Delta$ , et ducatur a puncto  $A$  ad  $\Delta\Gamma$  perpendicularis  $A\Delta$ ; dico quo majus est quadratum ex  $A\Gamma$  quam quadrata ex ipsis  $AB$ ,  $B\Gamma$ , id est rectangulum bis sub  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$ , illud spatium ad  $AB\Gamma$  triangulum rationem habere datam.



Επεὶ γὰρ δοθεὶς ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία<sup>3</sup>, καὶ ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  δοθεὶς ἐστὶν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

Quoniam enim datus est  $AB\Gamma$  angulus, et  $AB\Delta$  angulus datus est. Est autem et  $A\Delta B$  datus,

PROPOSITION LXIV.

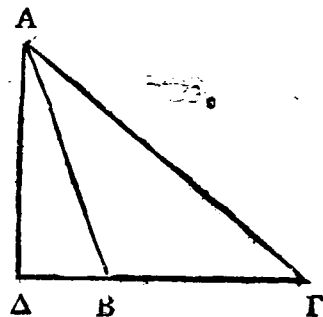
Si un triangle a un angle obtus donné, la surface dont le carré du côté qui soutend l'angle obtus surpasse la somme des carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, aura une raison donnée avec ce triangle.

Soit le triangle obtus-angle  $AB\Gamma$  ayant l'angle obtus  $AB\Gamma$  donné, menons la droite  $B\Delta$  dans la direction de  $B\Gamma$ , et du point  $A$  menons  $A\Delta$  perpendiculaire à  $\Delta\Gamma$ ; je dis que la surface dont le carré de  $A\Gamma$  surpasse la somme des carrés des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$ , c'est-à-dire que le double rectangle sous  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  a une raison donnée avec le triangle  $AB\Gamma$ .

Car puisque l'angle  $AB\Gamma$  est donné, l'angle  $AB\Delta$  est donné aussi (13. 1) (4).

$\Delta AB$  δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Delta AB$  δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς  $A\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta B$  δοθείς ἐστι<sup>5</sup>. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $A\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta B$  οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$ · ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,

et reliquus igitur  $\Delta AB$  datus est; datum est igitur  $AB\Delta$  triangulum specie; ratio igitur ipsius  $A\Delta$  ad  $\Delta B$  data est. Et est ut  $A\Delta$  ad  $\Delta B$  ita ipsum sub  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  ad ipsum sub  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$ ; quare et ipsius sub  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  ad ipsum sub  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  ratio est data; et ipsius bis igitur sub  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  ad ip-



$B\Gamma$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ<sup>6</sup> δοθείς. Ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$ <sup>7</sup> πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  ὃ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A\Gamma$  τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ · ἐκεῖνο ἄρα τὸ χωρίον πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

sum sub  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  ratio est data. Sed ipsius sub  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  ad  $AB\Gamma$  triangulum ratio est data; et ipsius bis igitur sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  ad  $AB\Gamma$  triangulum ratio est data. Et est ipsum bis sub  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  quo majus est ipsum ex  $A\Gamma$  quam ipsa ex ipsis  $AB$ ,  $B\Gamma$ ; illud igitur spatium ad  $AB\Gamma$  triangulum rationem habet datam.

Mais l'angle  $\Delta AB$  est donné; l'angle restant  $\Delta AB$  est donc donné (32. 1)(4); le triangle  $AB\Delta$  est donc donné d'espèce (40); la raison de  $A\Delta$  à  $\Delta B$  est donc donnée (déf. 3). Mais  $A\Delta$  est à  $\Delta B$  comme le rectangle sous  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  est au rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  (1. 6); la raison du rectangle sous  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  au rectangle sous  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  est donc donnée; la raison de deux fois le rectangle sous  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  au rectangle sous  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  au triangle  $AB\Gamma$  est donnée (41. 1); la raison de deux fois le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  au triangle  $AB\Gamma$  est donc donnée (8). Mais deux fois le rectangle sous  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  est la surface dont le carré de  $A\Gamma$  surpasse la somme des carrés des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  (12. 2); cette surface a donc une raison donnée avec le triangle  $AB\Gamma$ .



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΕ΄.

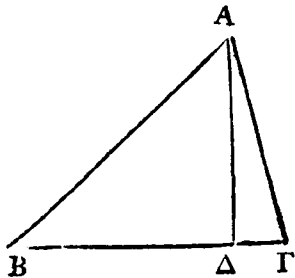
PROPOSITIO LXV.

Εάν τρίγωνον ὀξείαν ἔχη γωνίαν δεδομένην· ὃ ἔλασσον δύναται ἢ τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ  $AB\Gamma$ , ὀξείαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὴν  $B\Gamma$  κάθετος ἢ  $AD$ . λέγω ὅτι ὃ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς  $AG$  τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , τουτέστι τὸ δις ὑπὸ τῶν  $GB$ ,  $BD$ , πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Si triangulum acutum habeat angulum datum; quo minus potest latus acutum angulum subtendens quam latera acutum angulum comprehendentia, illud spatium ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum acutangulum  $AB\Gamma$ , acutum habens angulum  $AB\Gamma$ , et ducatur a puncto  $A$  ad  $B\Gamma$  perpendicularis  $AD$ ; dico quo minus est ipsum ex  $AG$  quam ipsa ex ipsis  $AB$ ,  $B\Gamma$ , hoc est ipsum bis sub  $GB$ ,  $BD$ , ad  $AB\Gamma$  triangulum rationem habere datam.



Επεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $A\Delta B$  δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $BA\Delta$  ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ  $AB\Delta$

Quoniam enim datus est  $AB\Delta$  angulus, est autem et ipse  $A\Delta B$  datus; et reliquus igitur  $BA\Delta$  est datus; datum igitur  $AB\Delta$  triangulum

PROPOSITION LXV.

Si un triangle a un angle aigu donné, la surface dont le carré du côté qui soutend l'angle aigu est surpassé par la somme des carrés des côtés qui comprennent l'angle aigu, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle acutangle  $AB\Gamma$  ayant l'angle aigu  $AB\Gamma$  donné; du point  $A$  menons  $AD$  perpendiculaire à  $B\Gamma$ ; je dis que ce dont le carré de  $AG$  est surpassé par la somme des carrés des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$ , c'est-à-dire que deux fois le rectangle sous  $GB$ ,  $BD$ , a une raison donnée avec le triangle  $AB\Gamma$ .

Car puisque l'angle  $AB\Delta$  est donné, et que l'angle  $A\Delta B$  est aussi donné, l'angle restant  $BA\Delta$  sera donné (31. 1) (4); le triangle  $AB\Delta$  est donc donné d'espèce; la



τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Αλλὰ<sup>4</sup> τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον<sup>5</sup> λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ δις<sup>6</sup> ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ὃ ἑλασσόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὃ ἄρα ἑλασσόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐκείνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει<sup>7</sup> δεδομένον.

specie ; ratio igitur ipsius ΒΔ ad ΔΑ data ; quare et ipsius sub ΓΒ, ΒΔ ad ipsum sub ΓΒ, ΑΔ ratio est data ; et ipsius bis sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ipsum sub ΓΒ, ΑΔ ratio est data. Sed ipsius sub ΒΓ, ΑΔ ad triangulum ΑΒΓ ratio est data ; et ipsius bis sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et est ipsum bis sub ΓΒ, ΒΔ, quo minus est quadratum ex ΑΓ quam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ ; quo igitur minus est quadratum ex ΑΓ quam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΣ'.

## PROPOSITIO LXVI.

Εὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχη γωνίαν· τὸ ὑπὸ τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιχουσῶν εὐθειῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔχει<sup>1</sup> δεδομένον.

Si triangulum datum habeat angulum, rectangulum sub rectis datum angulum comprehendentibus ad triangulum rationem habet datam.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Sit triangulum ΑΒΓ datum habens angulum ad Α ; dico ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datam.

raison de ΒΔ à ΔΑ est donc donnée ( déf. 3 ) ; la raison du rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au rectangle sous ΓΒ, ΑΔ est donc donnée ( 1. 6 ) ; la raison de deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au rectangle sous ΓΒ, ΑΔ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΓ, ΑΔ au triangle ΑΒΓ est donnée ( 41. 1 ) ; la raison de deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ au triangle ΑΒΓ est donc donnée ( 8 ). Mais deux fois le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est ce dont le quarré de ΑΓ est surpassé par la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ ( 13. 2 ) ; la surface dont le quarré de ΑΓ est surpassé par la somme des quarrés des droite ΑΒ, ΒΓ a donc une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

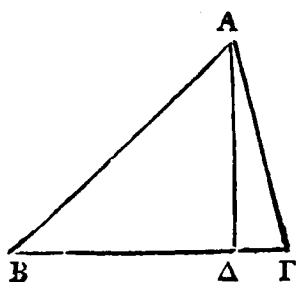
## PROPOSITION LXVI.

Si un triangle a un angle donné, le rectangle sous les droites qui comprennent l'angle donné, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle ΑΒΓ ayant un angle donné Α ; je dis que le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ

Ducatur enim a puncto B ad ΑΓ perpendicularis ΒΔ. Quoniam igitur datus est ΒΑΓ angulus, est autem et ipse ΒΔΑ datus; et reli-



ὑπὸ ΑΒΔ γωνία δέδοται<sup>2</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν<sup>3</sup> ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ<sup>4</sup> πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

quus igitur sub ΑΒΔ angulus datus est; datum est igitur ΑΒΔ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΒ ad ΒΔ data. Ut autem ΑΒ ad ΒΔ ita ipsum sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΔ, ΑΓ; quare et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΔ, ΑΓ ratio est data; ipsius autem sub ΒΔ, ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio est data.

Car du point B menons sur ΑΓ la perpendiculaire ΒΔ ( 12. 1 ). Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, et que l'angle ΒΔΑ est aussi donné; l'angle restant ΑΒΔ sera donné ( 32. 1 ) (4); le triangle ΑΒΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais ΑΒ est à ΒΔ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est au rectangle sous ΒΔ, ΑΓ (1. 6); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΒΔ, ΑΓ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΔ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΖ.

Εάν τρίγωνον δεδομένην ἔχη γωνίαν ᾧ μείζον δύνανται αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ, ὥς μία, τοῦ ἀπὸ τῆς λοιπῆς, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Διήχθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΔΓ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΕ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ. Καὶ διήκται τις<sup>3</sup> ἡ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἰση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ

## PROPOSITIO LXVII.

Si triangulum datum habeat angulum, quo majus possunt latera datum angulum comprehendentia, tanquam una recta, quam quadratum ex reliquo, illud spatium ad triangulum rationem habebit datam.

Sit triangulum ΑΒΓ datum habens angulum ΒΑΓ; dico quo majus est quadratum ex utràque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habere datam.

Producatur enim in directum ipsi ΒΑ recta ΑΔ, et ponatur ipsi ΑΓ æqualis ΑΔ; et juncta ΔΓ producat ad punctum Ε, et ducatur per punctum Β ipsi ΑΓ parallela ΒΕ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΓ; æqualis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΕ. Et ducta est quædam ΒΓ; ipsum igitur sub ΔΓ, ΓΕ cum ipso ex ΒΓ æquale est ipsi ex ΒΔ. Æqualis autem ΔΑ ipsi ΑΓ; ipsum igitur ex utràque simul ΒΑΓ æquale est ipsi sub

## PROPOSITION LXVII.

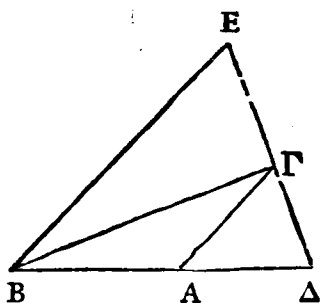
Si un triangle a un angle donné, la surface dont le quarré de la somme des côtés qui comprennent l'angle donné surpasse le quarré du côté restant, aura une raison donnée avec le triangle.

Soit le triangle ΑΒΓ ayant un angle donné ΒΑΓ; je dis que la surface dont le quarré de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ surpasse le quarré de ΒΓ, a une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

Car menons la droite ΑΔ dans la direction de ΒΑ (3. 1); faisons ΑΔ égal à ΑΓ, joignons ΔΓ, prolongeons cette droite vers Ε, et par le point Β menons ΒΕ parallèle à ΑΓ (31. 1). Puisque ΑΔ est égal à ΑΓ; la droite ΔΒ sera égale à ΒΕ (4. 6 et 14. 5). Mais on a mené une droite ΒΓ; le rectangle sous ΔΓ, ΓΕ, avec le quarré de ΒΓ, est donc égal au quarré de ΒΔ. Mais ΔΑ est égal à ΑΓ; le quarré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc égal au rectangle sous ΔΓ, ΓΕ avec le quarré

τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ<sup>5</sup> τῆς ΒΓ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ<sup>5</sup>, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ μείζον ἐστὶ<sup>6</sup> τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ. Λέγω δὲ ὅτι τοῦ ὑπὸ τῶν<sup>7</sup> ΔΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ<sup>8</sup> ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ δοθεῖσα. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΔΓΑ δοθεῖσα, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης οὔσης<sup>9</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

ΔΓ, ΓΕ cum ipso ex ΒΓ; quare ipsum ex utraque simul ΒΑΓ, hoc est ipsum ex ΒΔ quam ipsum ex ΒΓ majus est ipso sub ΔΓ, ΓΕ. Dico autem ipsius sub ΔΓ, ΓΕ ad ΑΒΓ triangulum rationem esse datam. Quoniam enim datus est ΒΑΓ angulus, et ipse deinceps igitur ΔΑΓ est datus. Est autem et uterque ipsorum ΑΔΓ, ΔΓΑ datus, uterque enim eorum dimidijs est ipsius ΒΑΓ dati existentis; datum est igitur ΔΑΓ triangulum specie; ratio



λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν<sup>10</sup> ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν<sup>11</sup> ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς<sup>12</sup> ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς

igitur est ipsius ΑΔ ad ΔΓ data; quare et ipsius ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ ratio est data. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΕΓ ad ΓΔ, sed ut quidem ΒΑ ad ΑΔ ita ipsum sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΑΔ, ut autem ΕΓ ad ΓΔ ita ipsum sub ΕΓ, ΓΔ ad ipsum ex ΓΔ; et ut igitur ipsum sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΑΔ ita ipsum sub ΕΓ,

de ΒΓ; le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ, c'est-à-dire, le carré de ΒΔ surpasse donc le carré de ΒΓ du rectangle sous ΔΓ, ΓΕ. Je dis à présent que la raison du rectangle sous ΔΓ, ΓΕ au triangle ΑΒΓ est donnée; car puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle de suite ΔΑΓ est donné (13. 1) (4). Mais chacun des angles ΑΔΓ, ΔΓΑ est donné, car chacun de ces angles est la moitié de l'angle ΒΑΓ qui est donné (5) (52. 1); le triangle ΔΑΓ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΔ à ΔΓ est donc donnée (déf. 3); la raison du carré de ΑΔ au carré de ΔΓ est donc donnée (50). Et puisque ΒΑ est à ΑΔ comme ΕΓ est à ΓΔ (2. 6), que ΒΑ est à ΑΔ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ est au carré de ΑΔ (1. 6), et que ΕΓ est à ΓΔ comme le rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est au carré de ΓΔ, le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ sera

ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. Ἰση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· λόγος ἄρα<sup>13</sup> τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν<sup>14</sup>· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον<sup>15</sup> λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ ὃ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>16</sup> ΒΓ· ὃ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκείνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

ΓΔ ad ipsum ex ΓΔ, et permutando igitur ut ipsum sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum sub ΕΓ, ΓΔ ita ipsum ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ. Ratio autem ipsius ex ΑΔ ad ipsum ex ΔΓ data; ratio igitur et ipsius sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum sub ΕΓ, ΓΔ data. Æqualis autem ΔΑ ipsi ΑΓ; ratio igitur ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΕΓ, ΓΔ data. Ipsius autem sub ΒΑ, ΑΓ ad ΒΑΓ triangulum ratio est data, propterea quod datus est ΒΑΓ angulus; et ipsius sub ΕΓ, ΓΔ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et est ipsum sub ΔΓ, ΓΕ quo majus est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ; quo igitur majus est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habebit datam.

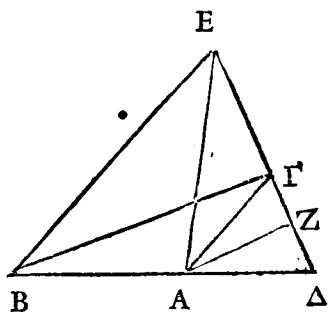
au carré de ΑΔ comme le rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est au carré de ΓΔ; donc, par permutation, le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ est au rectangle sous ΕΓ, ΓΔ comme le carré de ΑΔ est au carré de ΔΓ ( 16. 5 ). Mais la raison du carré de ΑΔ au carré de ΔΓ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΔ au rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est donc donnée. Mais ΔΑ est égal à ΑΓ; la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ΒΑΓ est donnée ( 66 ), parce que l'angle ΒΑΓ est donné; la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8). Mais le rectangle sous ΔΓ, ΓΕ est ce dont le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΒΓ; la surface dont le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΒΓ aura donc une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Κατασκευάσθω γάρ τὰ ὑπὸ τοῖς πρότερον, καὶ ἔχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΑΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΓ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ

Construantur enim eadem quæ prius, et ducatur a puncto A ad ΓΔ perpendicularis AZ et jungatur AE. Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus, et est ipsius dimidius ipse ΑΓΖ, est autem et ipse ΑΖΓ datus; datum est igitur ΑΖΓ triangulum specie; ratio igitur est ipsius



τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΖΓ δοθεῖς. Τῆς δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθεῖς, διπλασίων γάρ ἐστιν αὐτῆς· καὶ τῆς ΔΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθεῖς, διπλασίον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λό-

AZ ad ΖΓ data. Ipsius autem ΖΓ ad ΓΔ ratio est data, dupla enim est illius; et ipsius ΔΓ igitur ad ΑΖ ratio est data; quare et ipsius sub ΕΓ, ΓΔ ad ipsum sub ΑΖ, ΓΕ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΖ, ΓΕ ad ΑΓΕ triangulum ratio est data, dupla enim est illius; et ipsius sub ΕΓ, ΓΔ igitur ad ΑΓΕ triangu-

AUTREMENT.

Car faisons la même construction qu'auparavant; du point A, menons sur ΓΔ la perpendiculaire AZ (12. 1), et joignons AE. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, que l'angle ΑΓΖ est sa moitié (5) (32. 1), et que l'angle ΑΖΓ est donné, le triangle ΑΖΓ sera donné d'espèce (40); la raison de ΑΖ à ΖΓ est donc donnée (déf. 3). Mais la raison de ΖΓ à ΓΔ est donnée, à cause que la droite ΔΓ est double de ΓΖ; la raison de ΔΓ à ΑΖ est donc donnée (8); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au rectangle sous ΑΖ, ΓΕ est donc donnée (1. 6). Mais la raison du rectangle sous ΑΖ, ΓΕ au triangle ΑΓΕ est donnée, car ce rectangle est son double (41. 1); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au triangle ΑΓΕ est donc donnée (8).

γος ἐστὶ δοθείς. Ἰσον δὲ τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ  
 τριγώνῳ, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς  
 ΑΓ<sup>2</sup> καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τῶν ΑΓ, ΒΕ·  
 καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρί-  
 γωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  
 ΕΓ, ΓΔ, ὅ<sup>3</sup> μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  
 ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὅ<sup>4</sup> ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ  
 συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ<sup>3</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ,  
 ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον  
 ἔχει δεδομένον.

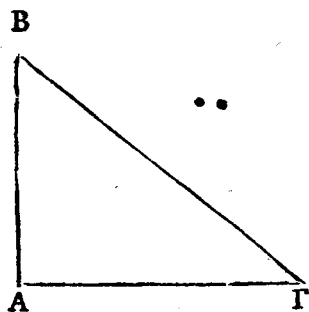
ΑΛΛΩΣ.

Ἦτοι γὰρ ἢ πρὸς τῷ Α<sup>1</sup> γωνία ὀρθή ἐστίν, ἢ  
 ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα.

lum ratio est data. Æquale autem ΑΓΕ trian-  
 gulum triangulo ΑΒΓ, etenim in eadem basi  
 sunt ΑΓ et in iisdem parallelis ΑΓ, ΒΕ; et ipsius  
 sub ΕΓ, ΓΔ igitur ad ΑΒΓ triangulum ratio  
 est data. Et est ipsum sub ΕΓ, ΓΔ quo majus  
 est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum  
 ex ΓΒ; quo igitur majus est ipsum ex utrâque  
 simul ΒΑ, ΑΓ, quam ipsum ex ΓΒ, quod spatium  
 ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

ALITER.

Vel enim angulus ad Α rectus est, vel acutus,  
 vel obtusus.



Ἐστω πρότερον ὀρθή· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέ-  
 ρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ δις  
 ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐστὶ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ

Sit primum rectus; ipsum igitur ex utrâque  
 simul ΒΑΓ ipsum ex ΒΓ superat ipso bis sub  
 ΒΑ, ΑΓ. Est autem ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ΑΒΓ

Mais le triangle AGE est égal au triangle ABG, car il est sur la même base AG et entre les mêmes parallèles AG, BE (37. 1); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΓΔ au triangle ABG est donc donnée (8). Mais le rectangle sous ΕΓ, ΓΔ est ce dont le carré de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΓΒ; la surface dont le carré de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΓΒ a donc une raison donnée avec le triangle ABG.

AUTREMENT.

L'angle en Α, est ou droit, ou aigu, ou obtus.

Premièrement, qu'il soit droit; le carré de la somme des côtés ΒΑ, ΑΓ surpassera le carré du côté ΒΓ de deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (47. 1).

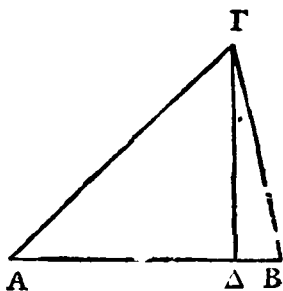


πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν  $BA\Gamma$  γωνίαν· τοῦ δὲ ἄρα ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$  πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐστω δὴ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  ἐπὶ τὴν  $AB$  κάθετος ἡ  $\Gamma\Delta$ . Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ ὀξυγώνιον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον, καὶ κάθετος ἦται ἡ  $\Gamma\Delta$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$ , ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  καὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AD$ . Κοινὸν προσ-

triangulum ratio data, quia datus est  $BA\Gamma$  angulus; ipsius igitur bis sub  $BA$ ,  $AG$  ad  $AB\Gamma$  triangulum ratio est data.

Sit autem acutus ipse  $BA\Gamma$ , et ducatur a puncto  $\Gamma$  ad  $AB$  perpendicularis  $\Gamma\Delta$ . Et quoniam acutangulum est  $AB\Gamma$  triangulum, et perpendicularis ducta est  $\Gamma\Delta$ ; ipsa igitur ex  $BA$ ,  $AG$  æqualia sunt et ipsi ex  $B\Gamma$  et ipsi bis sub  $BA$ ,  $AD$ . Commune addatur ipsum bis sub



κείσθω τὸ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$  μετὰ τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$ , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$ , ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  καὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AD$ , καὶ ἔτι τῷ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$ , τουτέστι τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου<sup>4</sup> τῆς  $\Gamma A\Delta$  καὶ τῆς  $BA$ · ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  μεῖζόν ἐστι<sup>5</sup> τοῦ

$BA$ ,  $AG$ ; ipsa igitur ex  $BA$ ,  $AG$  cum ipso bis sub  $BA$ ,  $AG$ , quod est ipsum ex utrâque simul  $BA\Gamma$ , æqualia sunt et ipsi ex  $B\Gamma$  et ipsi bis sub  $BA$ ,  $AD$ , et insuper ipsi bis sub  $BA$ ,  $AG$ , hoc est ipsi bis sub utrâque simul  $\Gamma A\Delta$  et ipsâ  $BA$ ; quare ipsum ex utrâque simul  $BA\Gamma$

Mais la raison du rectangle sous  $BA$ ,  $AG$  au triangle  $AB\Gamma$  est donnée, à cause de l'angle donné  $BA\Gamma$  (66); la raison de deux fois le rectangle sous  $BA$ ,  $AG$  au triangle  $AB\Gamma$  est donc donnée.

Que l'angle  $BA\Gamma$  soit aigu. Du point  $\Gamma$  menons à  $AB$  la perpendiculaire  $\Gamma\Delta$ . Puisque le triangle  $AB\Gamma$  est acutangle, et qu'on a mené la perpendiculaire  $\Gamma\Delta$ , la somme des quarrés des droites  $BA$ ,  $AG$  égale le quarré de  $B\Gamma$  plus deux fois le rectangle sous  $BA$ ,  $AD$  (13. 2). Ajoutons de part et d'autre le double rectangle sous  $BA$ ,  $AG$ ; la somme des quarrés des droites  $BA$ ,  $AG$ , plus deux fois le rectangle sous  $BA$ ,  $AG$ , c'est-à-dire le quarré de la somme des droites  $BA$ ,  $AG$  égale le quarré de  $B\Gamma$ , plus deux fois le rectangle sous  $BA$ ,  $AD$ , et encore deux fois le rectangle sous  $BA$ ,  $AG$  (4. 2), c'est-à-dire, plus deux fois le rectangle sous la somme des droites  $\Gamma A$ ,  $AD$  et sous  $BA$  (2. 2); le quarré de la somme des droites  $BA$ ,  $AG$  surpasse donc



ἀπὸ τῆς ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ, καὶ τῆς ΒΑ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ<sup>6</sup> λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἐστὶ δοθεῖσα<sup>7</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ<sup>8</sup> συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὲ ἄρα<sup>9</sup> ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ<sup>10</sup> δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ δὲ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ<sup>11</sup> πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἀμβλεία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐκτε-  
 ληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε<sup>12</sup>, ἢ χθω ἐπ' αὐτὴν  
 ἀπὸ τοῦ Γ<sup>13</sup> κάθετος ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΕ ἴση  
 ἡ ΑΖ. Ἐπεὶ οὖν ἀμβλεία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία,  
 καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ,  
 ΑΓ μετὰ τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, τουτέστι

maius est quam ipsum ex ΒΓ ipso bis sub  
 utrâque simul ΔΑΓ, et ipsâ ΒΑ. Et quoniam  
 datus est ΒΑΓ angulus, est autem et ΑΔΓ angulus  
 datus; et reliquus igitur ΑΓΔ est datus; datum  
 est igitur ΑΔΓ triangulum specie; ratio igitur  
 est ipsius ΑΔ ad ΑΓ data; quare et utrius-  
 que simul ΔΑΓ ad ΑΓ ratio est data; et ipsius  
 sub utrâque simul ΔΑΓ et ipsâ ΑΒ ad ipsum  
 sub ΒΑ, ΑΓ ratio est data; et ipsius bis sub  
 utrâque simul ΔΑΓ et ipsâ ΒΑ ad ipsum sub  
 ΒΑ, ΑΓ ratio est data. Ipsius autem sub ΒΑ,  
 ΑΓ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; prop-  
 terea quod datus est ΒΑΓ angulus; et ipsius  
 bis igitur sub utrâque simul ΔΑΓ et ipsâ ΑΒ  
 ad ΑΒΓ triangulum ratio est data.

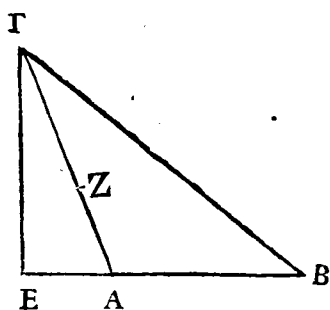
At vero sit obtusus angulus ΒΑΓ, et productâ  
 ΒΑ ad Ε, ducatur a puncto Γ ad illam perpen-  
 dicularis ΓΕ, et ponatur ipsi ΑΕ æqualis ΑΖ.  
 Quoniam igitur obtusus est ΒΑΓ angulus, et per-  
 pendicularis ducta est ipsa ΓΕ; ipsa igitur ex ipsis  
 ΒΑ, ΑΓ cum ipso bis sub ΒΑ, ΑΕ, hoc est, ipso

le carré de ΒΓ de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΒΑ. Mais l'angle ΒΑΓ est donné, et l'angle ΑΔΓ est aussi donné; l'angle restant ΑΓΔ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΔΓ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΔ à ΑΓ est donc donnée; la raison de la somme des droites ΔΑ. ΑΓ à ΑΓ est donc donnée (6); la raison du rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donnée (1. 6); la raison de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au triangle ΑΒΓ est donnée (66), à cause que l'angle ΒΑΓ est donné; la raison de deux fois le rectangle sous la somme des droites ΔΑ, ΑΓ et sous ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8).

Enfin que l'angle ΒΑΓ soit obtus. Prolongeons la droite ΒΑ. Du point Γ, menons-lui la perpendiculaire ΓΕ, et faisons ΑΖ égal à ΑΕ. Puisque l'angle ΒΑΓ est obtus, et qu'on a mené la perpendiculaire ΓΕ, la somme des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ avec deux fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ, c'est-à-dire deux fois le rectangle sous

τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AZ$ , ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BΓ$ . Κοινὸν προκείσθω τὸ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AΓ$ . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  $BA, AΓ$  μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AΓ$ , τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BAΓ$  μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AZ$ , ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AΓ$ .

bis sub  $BA, AZ$  æqualia sunt ipsi ex  $BΓ$ . Commune addatur ipsum bis sub  $BA, AΓ$ ; ipsa igitur ex  $BA, AΓ$  cum ipso bis sub  $BA, AΓ$ , hoc est ipsum ex utrâque simul  $BAΓ$  cum ipso bis sub  $BA, AZ$ , æqualia sunt ipsi ex  $BΓ$  cum ipso bis sub  $BA, AΓ$ . Commune auferatur ipsum bis



Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ δις ὑπὸ τῶν  $BA, AZ$ . τὸ ἄρα ἀπὸ<sup>14</sup> συναμφοτέρου τῆς  $BAΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $BA, ΓZ$ . ὥστε τὸ<sup>15</sup> ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BAΓ$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  ὑπερέχειν τῷ δις ὑπὸ τῶν  $BA, ΓZ$ . Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστίν ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ  $EAG$  ἄρα δοθεῖσά ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΓEA$  δοθεῖσά ἐστίν· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$  δοθεῖσά ἐστίν· δέδοται ἄρα τὸ  $ΑΓΕ$  τρίγωνον τῷ εἶδει<sup>16</sup>. λόγος ἄρα τῆς  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΕ$  δοθείς, τουτέστι καὶ<sup>17</sup> πρὸς τὴν  $AZ$ . ὥστε καὶ τῆς  $AΓ$  πρὸς τὴν  $ΓZ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ  $AΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$  λόγος

sub  $BA, AZ$ ; ipsum igitur ex utrâque simul  $BAΓ$  æquale est ipsi ex  $BΓ$  et ipsi bis sub  $BA, ΓZ$ ; quare ipsum ex utrâque simul  $BAΓ$  ipsum ex  $BΓ$  excedit ipso bis sub  $BA, ΓZ$ . Et quoniam datus est  $BAΓ$  angulus, et  $EAG$  igitur datus est. Sed et ipse  $ΓEA$  datus est; et reliquus igitur ipse  $ΑΓΕ$  datus est; datum igitur est  $ΑΓΕ$  triangulum specie; ratio igitur ipsius  $ΓΑ$  ad  $ΑΕ$  data, hoc est et ad  $AZ$ ; quare et ipsius  $AΓ$  ad  $ΓZ$  ratio est data. Ipsius autem  $AΓ$  ad  $ΓΕ$  ratio est data; et ipsius  $ΕΓ$  igitur

$BA, AZ$  est égal au carré de  $BΓ$  (13. 2). Ajoutons de part et d'autre deux fois le rectangle sous  $BA, AΓ$ ; la somme des carrés des droites  $BA, AΓ$  avec deux fois le rectangle sous  $BA, AΓ$ , c'est-à-dire le carré de la somme des droites  $BA, AΓ$  avec deux fois le rectangle sous  $BA, AZ$  égale le carré de  $BΓ$  plus deux fois le rectangle sous  $BA, AΓ$  (4. 2). Retranchons de part et d'autre deux fois le rectangle sous  $BA, AZ$ ; le carré de la somme des droites  $BA, AΓ$  égalera le carré de  $BΓ$ , plus deux fois le rectangle sous  $BA, ΓZ$  (3. 2); le carré de la somme des droites  $BA, AΓ$  surpasse donc le carré de  $BΓ$  de deux fois le rectangle sous  $BA, ΓZ$ . Mais l'angle  $BAΓ$  est donné; l'angle  $EAG$  est donc donné (13. 1) (4). Mais l'angle  $ΓEA$  est donné; l'angle restant  $ΑΓΕ$  est donc donné (32. 1) (4); le triangle  $ΑΓΕ$  est donc donné d'espèce (40); la raison de  $ΓΑ$  à  $ΑΕ$ , c'est-à-dire à  $AZ$  est donc donnée (déf. 3); la raison de  $AΓ$  à  $ΓZ$  est donc donnée (5). Mais la raison de  $AΓ$  à  $ΓΕ$  est donnée; la raison

ἐστὶ δοθεῖς· καὶ τῆς ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· ὥστε τοῦ ὑπὸ<sup>18</sup> τῶν ΕΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθεῖς<sup>19</sup>. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθεῖς· ὥστε καὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Καὶ ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

## ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ<sup>1</sup> τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπέξεύχθω ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ<sup>2</sup> ΔΑΓ δοθεῖσά ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΔ

ad ΓΖ ratio est data; quare ipsius sub ΕΓ, ΑΒ ad ipsum sub ΓΖ, ΑΒ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΓ, ΑΒ ad ipsum sub ΕΓ, ΑΒ ratio est data; et ipsius igitur sub ΑΓ, ΑΒ ad ipsum sub ΓΖ, ΑΒ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΓ, ΑΒ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; quare et ipsius bis sub ΓΖ, ΑΒ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et ipsum bis sub ΓΖ, ΑΒ est illud quo majus est ipsum ex utràque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ; quo igitur majus est ipsum ex utràque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

## ALITER.

Producatur ΒΑ ad Δ, et ponatur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ. Quoniam igitur datus est ΒΑΓ angulus, et est ejus dimidius uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ; datus igitur est uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ; et reliquus igitur ΔΑΓ angulus datus est; datum est igitur

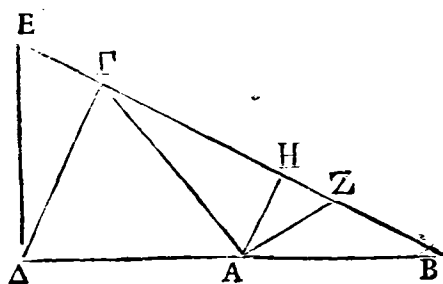
de ΕΓ à ΓΖ est donc donnée (8); la raison du rectangle sous ΕΓ, ΑΒ au rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est donc donnée (1. 6). Mais la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ au rectangle sous ΕΓ, ΑΒ est donnée (16); la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ, au rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est donc donnée (8). Mais la raison du rectangle sous ΑΓ, ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donnée (66); la raison de deux fois le rectangle sous ΓΖ, ΑΒ au triangle ΑΒΓ est donc donnée (8). Mais deux fois le rectangle sous ΓΖ, ΑΒ est ce dont le carré de la somme des droites ΒΑΓ surpasse le carré de ΒΓ; la raison de la surface dont le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le carré de ΒΓ au triangle ΑΒΓ est donc donnée.

## AUTREMENT.

Prolongeons ΒΑ vers Δ; faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ. Puisque l'angle ΒΑΓ est donné, et que chacun des angles ΑΔΓ, ΑΓΔ est sa moitié (5) (32. 1), chacun des angles ΑΔΓ, ΑΓΔ sera donné; l'angle restant ΔΑΓ est donc donné

τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, κατήχθω τῇ ΑΔΓ<sup>3</sup> ἴση ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΔΕΓ, ΔΖΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τοῦ ΔΒΕ τριγώνου οὕσα καὶ τοῦ ΔΒΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ<sup>5</sup> ΒΔΕ

ΑΓΔ triangulum specie; ratio igitur ipsius ΑΓ ad ΓΔ data. Et quoniam datus est angulus ΑΔΓ, construatur angulo ΑΔΓ æqualis uterque angulorum ΔΕΓ, ΔΖΓ. Et quoniam æqualis est angulus ΒΔΓ angulo ΔΕΓ, communis autem ipse ΔΒΕ triangulo ΔΒΕ existens et triangulo ΔΒΓ; reliquus igitur angulus ΒΔΕ reliquo angulo ΒΓΔ



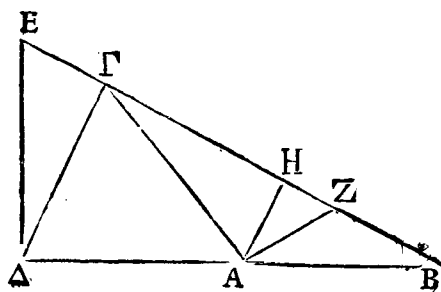
τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ΒΔ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν<sup>7</sup> ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>8</sup> ΒΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴση γάρ ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ. Λέγω οὖν ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν

est æqualis; æquiangulum igitur ΒΔΕ est triangulum triangulo ΔΒΓ; est igitur ut ΕΒ, ad ΒΔ ita ΒΔ ad ΒΓ; ipsum igitur sub ΕΒ, ΒΓ, hoc est ipsum sub ΕΓ, ΓΒ cum ipso ex ΓΒ, æquale est ipsi ex ΒΔ, hoc est ipsi ex utrâque simul ΒΑΓ, æqualis enim est ΔΑ ipsi ΑΓ; ipsum igitur sub ΕΓ, ΓΒ cum ipso ex ΒΓ, æquale est ipsi ex utrâque simul ΒΑΓ; ipsum igitur ex utrâque simul ΒΑΓ ipsum ex ΒΓ excedit ipso sub ΒΓ, ΓΕ. Dico igitur rationem ipsius sub ΒΓ, ΓΕ ad ΑΒΓ triangulum esse datam. Quoniam enim

(32. 1) (4); le triangle ΑΓΔ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΓ à ΓΔ est donc donnée (déf. 3). Et puisque l'angle ΑΔΓ est donné, faisons chacun des angles ΔΕΓ, ΔΖΓ égal à l'angle ΑΔΓ; et puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΕΓ, et que l'angle ΔΒΕ est commun aux triangles ΔΒΕ, ΔΒΓ, l'angle restant ΒΔΕ sera égal à l'angle restant ΒΓΔ (32. 1); le triangle ΒΔΕ est donc équiangle avec le triangle ΔΒΓ; la droite ΕΒ est donc à ΒΔ comme ΒΔ est à ΒΓ (4. 6); le rectangle sous ΕΒ, ΒΓ, c'est-à-dire, le rectangle sous ΕΓ, ΓΒ, avec le carré de ΓΒ, est donc égal au carré de ΒΔ (17. 6); c'est-à-dire, au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ (3. 2); car ΔΑ est égal à ΑΓ; le rectangle sous ΕΓ, ΓΒ avec le carré de ΒΓ, est donc égal au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ; le carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse donc le carré de ΒΓ du rectangle sous ΒΓ, ΓΕ. Je dis aussi que la raison du rectangle sous ΒΓ, ΓΕ au triangle ΑΒΓ est donnée.

ἡ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ὧν<sup>10</sup> ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν<sup>11</sup> ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΖ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΓ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν<sup>12</sup> ΓΕ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ. Λόγος δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δο-

æqualis est BDE angulus angulo BGD, quorum ipse ADG ipsi AGD est æqualis; reliquus igitur GDE reliquo AGB est æqualis. Est autem et DEG ipsi AZG æqualis; reliquus igitur GAZ reliquo DGE est æqualis; æquiangulum igitur est AZG triangulum triangulo DEG; est igitur ut GA ad AZ ita DG ad GE; et permutando igitur ut GA ad GD ita AZ ad GE. Ratio autem ipsius AG ad GD data; ratio igitur et ipsius AZ ad



θείς· λόγος ἄρα καὶ<sup>13</sup> τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ δο-  
θείς. Ηχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ  
ΑΗ. Καὶ ἐπεὶ δοθεὶς ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ, ἐστὶ δὲ  
καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ δοθεὶς· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΗΑΖ δοθεὶς ἐστὶ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΗΖ τρίγω-  
νον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν  
ΑΗ δοθείς. Τῆς δὲ ΖΑ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ  
δοθείς· καὶ τῆς ΑΗ ἄρα πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ  
δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ<sup>14</sup> ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ

GE data. Agatur a puncto A ad BG perpendicularis AH. Et quoniam datus est angulus AZG, est autem et angulus AHZ datus; et reliquus igitur HAZ datus est; datum est igitur AHZ triangulum specie; ratio igitur et ipsius ZA ad AH data. Ipsius autem ZA ad GE ratio est data; et ipsius AH igitur ad GE ratio est data; quare et ipsius sub AH, BG ad ipsum sub BE,

Car puisque l'angle BDE est égal à l'angle BGD, et que l'angle ADG est égal à l'angle AGD, l'angle restant GDE est égal à l'angle restant AGB. Mais l'angle DEG est égal à l'angle AZG; l'angle restant GAZ est donc égal à l'angle restant DGE (32. 1); le triangle AZG est donc équiangle avec le triangle DEG; GA est donc à AZ comme DG est à GE (4. 6); donc, par permutation, GA est à GD comme AZ est à GE. Mais la raison de AG à GD est donnée; la raison de AZ à GE est donc donnée. Du point A menons sur BG la perpendiculaire AH. Puisque l'angle AZG est donné, et que l'angle AHZ est aussi donné, l'angle restant HAZ sera donné; le triangle AHZ est donc donné d'espèce (40); la raison de ZA à AH est donc donnée. Mais la raison de ZA à GE est donnée; la raison de AH à GE est donc donnée (8); la raison du

ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα<sup>15</sup> ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ· ᾧ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ<sup>16</sup> τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΗ'.

Εὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλαι λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ ἡ<sup>2</sup> λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, ἔχέτω δὲ καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον δε-

ΓΕ ratio est data. Ipsius autem sub ΑΗ, ΒΓ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data; et ipsius igitur sub ΒΓ, ΓΕ ad ΑΒΓ triangulum ratio est data. Et est ipsum sub ΒΓ, ΓΕ illud quo majus est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΑ; quo igitur majus est ipsum ex utrâque simul ΒΑΓ quam ipsum ex ΒΓ, illud spatium ad ΑΒΓ triangulum rationem habet datam.

## PROPOSITIO LXVIII.

Si duo æquiangula parallelogramma inter se rationem habeant datam, et unum latus ad unum latus rationem habeat datam; et reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Duo enim æquiangula parallelogramma ΑΒ ΓΔ inter se rationem habeant datam, habeat autem et unum latus ad unum latus rationem

rectangle sous ΑΗ, ΒΓ au rectangle sous ΒΓ, ΓΕ est donc donnée ( 1. 6 ). Mais la raison du rectangle sous ΑΗ, ΒΓ au triangle ΑΒΓ est donnée ( 41. 1 ); la raison du rectangle sous ΒΓ, ΓΕ au triangle ΑΒΓ est donc donnée. Mais le rectangle sous ΒΓ, ΓΕ est ce dont le quarré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le quarré de ΒΑ; la surface dont le quarré de la somme des droites ΒΑ, ΑΓ surpasse le quarré de ΒΓ, a donc une raison donnée avec le triangle ΑΒΓ.

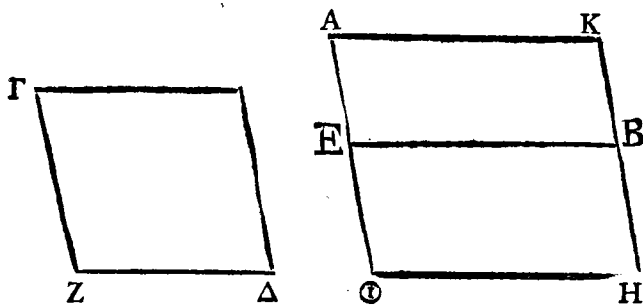
## PROPOSITION LXVIII.

Si deux parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison donnée, et si un côté a une raison donnée avec un côté, le côté restant aura une raison donnée avec le côté restant.

Que les deux parallélogrammes équiangles ΑΒ, ΓΔ ayent entre eux une raison donnée, qu'un côté ait une raison donnée avec un côté, c'est-à-dire, que la

δομένον, καὶ ἔστω τῆς BE πρὸς τὴν ZΔ λόγος  
δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς AE πρὸς τὴν ZΓ λόγος  
ἐστὶ δοθείς.

datam, et sit ipsius BE ad ZΔ ratio data;  
dico et ipsius AE ad ZΓ rationem esse datam.



Παραβελήσθω γὰρ παρὰ τὴν EB τῷ ΓΔ ἴσον  
τὸ EH παραλληλόγραμμον<sup>3</sup>, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ'  
εὐθείας εἶναι τὴν AE τῇ EΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα  
ἐστὶ καὶ ἡ KB τῇ BH. Ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ  
AB πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ EH·  
λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς τὸ EH δοθείς· ὥστε καὶ  
τῆς AE πρὸς τὴν EΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ  
ἴσον ἐστὶ τὸ EH τῷ ΓΔ· ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον·  
τῶν EH, ΓΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ περὶ  
τάς ἰσας γωνίας<sup>5</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EB πρὸς τὴν  
ZΔ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν EΘ. Λόγος δὲ τῆς EB  
πρὸς τὴν ZΔ δοθείς· καὶ τῆς ΓZ ἄρα πρὸς τὴν  
EΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ EΘ πρὸς τὴν AE  
λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς AE ἄρα πρὸς τὴν ΓZ  
λόγος ἐστὶ δοθείς.

Applicetur enim ad EB ipsi ΓΔ æquale EH  
parallelogrammum, et ponatur ita ut in directum  
sit ipsa AE ipsi EΘ; in directum igitur est et  
KB ipsi BH. Quoniam igitur ratio est ipsius  
AB ad ΓΔ data; æquale autem ΓΔ ipsi EH;  
ratio igitur ipsius AB ad EH data; quare  
et ipsius AE ad EΘ ratio est data. Et quo-  
niam æquale est EH ipsi ΓΔ, est autem et  
æquiangulum; ipsorum EH, ΓΔ igitur reci-  
proca sunt latera circa æquales angulos; est  
igitur ut EB ad ZΔ ita ΓZ ad EΘ. Ratio autem  
ipsius EB ad ZΔ data; et ipsius ΓZ igitur ad  
EΘ ratio est data. Ipsius autem EΘ ad AE  
ratio est data; et ipsius AE igitur ad ΓZ ratio  
est data.

raison du côté BE au côté ZΔ soit donnée; je dis que la raison de AE à ZΓ est donnée.

Car appliquons à la droite EB le parallélogramme EH égal au parallélogramme ΓΔ, et qu'il soit placé de manière que AE soit dans la direction de EΘ; la droite KB sera dans la direction de BH. Mais la raison de AB à ΓΔ est donnée, et ΓΔ est égal à EH; la raison de AB à EH est donc donnée (1. 6); la raison de AE à EΘ est donc donnée. Mais le parallélogramme EH est égal au parallélogramme ΓΔ et lui est équiangle; les côtés des parallélogrammes EH, ΓΔ, autour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionnels; donc EB est à ZΔ comme ΓZ est à EΘ (14. 6). Mais la raison de EB à ZΔ est donnée; la raison de ΓZ à EΘ est donc donnée. Mais la raison de EΘ à AE est donnée; la raison de AE à ΓZ est donc donnée (8).

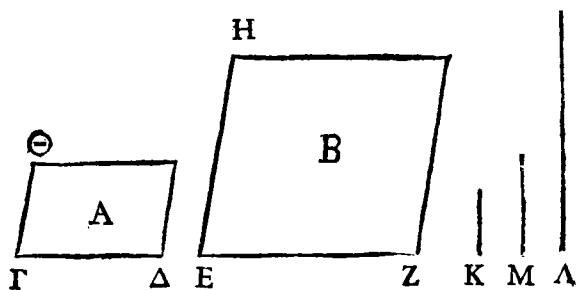


ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Εκκείσθω δεδομένη εὐθεΐα ἡ Κ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ. Λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Λ.

Exponatur data recta Κ. Et quoniam ratio est ipsius Α ad Β data, eadem huic fiat ratio ipsius Κ ad Λ. Ratio autem ipsius Α ad Β data; ratio igitur et ipsius Κ ad Λ data. Data autem Κ; data igitur et Λ. Rursus, quoniam



Πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθείς τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, ὁ<sup>1</sup> αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ<sup>2</sup> τῆς Κ πρὸς τὴν Μ· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ<sup>3</sup> ἡ Μ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ Λ δοθεῖσα· λόγος ἄρα τῆς Λ πρὸς τὴν Μ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα<sup>4</sup> πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τούτέστιν ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ<sup>5</sup>, καὶ ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ.

ratio est data ipsius ΓΔ ad ΕΖ, eadem huic fiat ratio ipsius Κ ad Μ; ratio igitur et ipsius Κ ad Μ data; Data autem Κ; data igitur et Μ. Est autem et Λ data; ratio igitur ipsius Λ ad Μ data. Et quoniam æquiangulum est Α ipsi Β; ipsum Α igitur ad Β rationem habet compositam ex lateribus, hoc est et ex ratione quam habet ΓΔ ad ΕΖ et ΘΓ ad ΗΕ. At vero et

AUTREMENT.

Soit Κ une droite donnée. Puisque la raison de Α à Β est donnée, faisons ensorte que la raison de Κ à Λ soit la même que celle-ci. Mais la raison de Α à Β est donnée; la raison de Κ à Λ est donc donnée. Mais Κ est donné; donc Λ est donné (2). De plus, puisque la raison de ΓΔ à ΕΖ est donnée, faisons ensorte que la raison de Κ à Μ soit la même que celle-ci; la raison de Κ à Μ sera donnée. Mais Κ est donné; la droite Μ est donc donnée aussi. Mais Λ est donné; la raison de Λ à Μ est donc donnée (1). Mais les parallélogrammes Α, Β sont équiangles; le parallélogramme Α a donc avec Β une raison composée des côtés, c'est-à-dire, de la raison que ΓΔ a avec ΕΖ, et de la raison que ΘΓ a avec ΗΕ (23. 6). Mais



Αλλὰ μὲν καὶ ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $\Lambda$  λόγον ἔχει τὸν  
 συγκείμενον ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ  $K$  πρὸς  
 τὴν  $M$  καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ  $M$  πρὸς τὴν  $\Lambda$ . ὁ  
 ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει  
 ἡ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $EZ$  καὶ ἡ  $\Theta\Gamma$  πρὸς τὴν  $HE$  ὁ  
 αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ  $K$   
 πρὸς τὴν  $M$  καὶ ἡ  $M$  πρὸς τὴν  $\Lambda$ . Ὡν ὁ τῆς  $\Gamma\Delta$   
 πρὸς τὴν  $EZ$  λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς  $K$  πρὸς  
 τὴν  $M$  λόγῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς  $\Theta\Gamma$  πρὸς τὴν  $HE$   
 λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς  $M$  πρὸς τὴν  $\Lambda$ . Τῆς  
 δὲ  $M$  πρὸς τὴν  $\Lambda$  λόγος ἐστὶ δοθεὶς λόγος  
 ἄρα καὶ τῆς  $\Theta\Gamma$  πρὸς τὴν  $HE$  δοθεὶς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΘ'.

Εὰν δύο παραλληλόγραμμα δεδομένας ἔχη  
 γωνίας, καὶ λόγον πρὸς ἀλλήλα ἔχη δεδομένον,  
 καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχη  
 δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν  
 πλευρὰν λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ  $AB$ ,  $EH$  δε-  
 δομένας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς  $\Delta$ ,  $Z$ ,  
 πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχεν τῷ δεδομένον, λόγος δὲ

$K$  ad  $\Lambda$  rationem habet compositam et ex ra-  
 tione quam habet  $K$  ad  $M$  et ex ipsâ quam  
 habet  $M$  ad  $\Lambda$ ; ergo composita ratio et ex ra-  
 tione quam habet  $\Gamma\Delta$  ad  $EZ$ , et  $\Theta\Gamma$  ad  $HE$ ,  
 eadem est cum compositâ ex ipsâ quam habet  
 $K$  ad  $M$ , et  $M$  ad  $\Lambda$ . Quorum ratio ipsius  
 $\Gamma\Delta$  ad  $EZ$  eadem est cum ratione ipsius  $K$  ad  $M$ ,  
 reliqua igitur ipsius  $\Theta\Gamma$  ad  $HE$  ratio eadem est  
 cum ratione ipsius  $M$  ad  $\Lambda$ . Ipsius autem  $M$   
 ad  $\Lambda$  ratio est data; ratio igitur et ipsius  $\Theta\Gamma$   
 ad  $HE$  data.

## PROPOSITIO LXIX.

Si duo parallelogramma datos habeant an-  
 gulos, et rationem inter se habeant datam; et  
 unum latus ad unum latus rationem habeat da-  
 tam; et reliquum latus ad reliquum latus ra-  
 tionem habebit datam.

Duo enim parallelogramma  $AB$ ,  $EH$  datos  
 habentia angulos ad puncta  $\Delta$ ,  $Z$ ; inter se ra-  
 tionem habeant datam; ratio autem sit ipsius

$K$  a avec  $\Lambda$  une raison composée de la raison que  $K$  a avec  $M$ , et de celle que  
 $M$  a avec  $\Lambda$ ; la raison composée de la raison que  $\Gamma\Delta$  a avec  $EZ$ , et de celle que  
 $\Theta\Gamma$  a avec  $HE$  est donc la même que la raison composée de celle que  $K$  a avec  
 $M$ , et de celle que  $M$  a avec  $\Lambda$ . Mais parmi ces raisons, celle de  $\Gamma\Delta$  à  $EZ$  est  
 la même que celle de  $K$  à  $M$ ; la raison restante de  $\Theta\Gamma$  à  $HE$  est donc la même  
 que celle de  $M$  à  $\Lambda$ . Mais la raison de  $M$  à  $\Lambda$  est donnée; la raison de  $\Theta\Gamma$  à  $HE$   
 est donc donnée.

## PROPOSITION LXIX.

Si deux parallélogrammes, ayant des angles donnés, ont entre eux une raison  
 donnée, et si un côté a une raison donnée avec un côté, le côté restant aura  
 une raison donnée avec le côté restant.

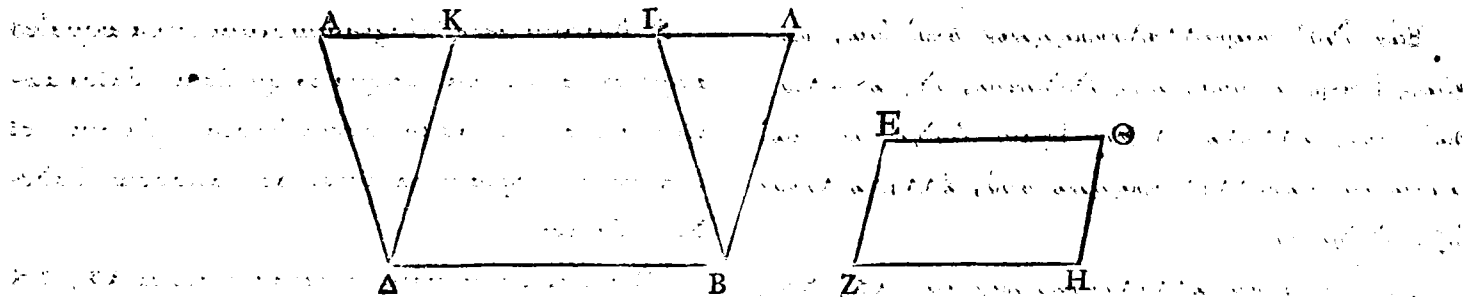
Que les deux parallélogrammes  $AB$ ,  $EH$ , ayant les angles en  $\Delta$ ,  $Z$  donnés,

ἔστω τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὴν  $ZH$  δοθεὶς· λέγω ὅτι καὶ τῆς  $\Delta\Delta$  πρὸς τὴν  $EZ$  λόγος δέδοται<sup>2</sup>.

Εἰ μὲν οὖν ἰσογώνιον ἔστι τὸ  $AB$  παραλληλόγραμμον τῷ  $EH$  παραλληλόγραμμῳ<sup>3</sup>, φανερόν.

$\Delta B$  ad  $ZH$  data; dico et ipsius  $\Delta\Delta$  ad  $EZ$  rationem datam esse.

Si quidem igitur æquiangulum est  $AB$  parallelogrammum parallelogrammo  $EH$ , hoc evidens



Εἰ δὲ οὐ· συνεστάτω πρὸς τῇ  $\Delta B$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $\Delta$ , τῇ ὑπὸ  $EZH$  γωνία ἴση ὑπὸ  $B\Delta K$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  $\Delta\Lambda$  παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσα ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $\Delta AK$ ,  $AK\Delta$  καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $A\Delta K$  ἔστι δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ  $A\Delta K$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἔστι τῆς  $\Delta\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta K$  δοθεὶς. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἔστι τοῦ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὸ  $Z\Theta$  δοθεὶς, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ  $\Delta\Gamma$  τῷ  $\Delta\Lambda$ · λόγος ἄρα καὶ τοῦ  $\Delta\Lambda$  πρὸς τὸ  $Z\Theta$  δοθεὶς. Καὶ ἔστιν ἰσογώνιον τὸ  $\Delta\Lambda$  τῷ  $Z\Theta$ <sup>4</sup>, καὶ λόγος ἔστι τοῦ  $\Delta\Delta$  πρὸς τὸ  $Z\Theta$  δοθεὶς, καὶ ἴστι τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὴν  $ZH$  λόγος δοθεὶς<sup>5</sup>, ὑπόκειται γάρ· λόγος ἄρα ἔστι καὶ τῆς  $\Delta K$  πρὸς τὴν  $EZ$  δοθεὶς. Τῆς δὲ

est. Si autem non; constituatur ad  $\Delta B$ , et ad punctum in eâ  $\Delta$ , angulo  $EZH$  æqualis  $B\Delta K$ , et compleatur parallelogrammum  $\Delta\Lambda$ . Et quoniam datus est uterque angulorum  $\Delta AK$ ,  $AK\Delta$ ; et reliquus igitur angulus  $A\Delta K$  est datus; datum est igitur  $A\Delta K$  triangulum specie; ratio igitur est ipsius  $\Delta\Delta$  ad  $\Delta K$  data. Et quoniam ratio est ipsius  $\Delta\Gamma$  ad  $Z\Theta$  data, supponitur enim, et est æquale  $\Delta\Gamma$  ipsi  $\Delta\Lambda$ ; ratio igitur et ipsius  $\Delta\Lambda$  ad  $Z\Theta$  data. Et est æquiangulum  $\Delta\Lambda$  ipsi  $Z\Theta$ , et ratio est ipsius  $\Delta\Lambda$  ad  $Z\Theta$  data, et est ipsius  $\Delta B$  ad  $ZH$  ratio data, supponitur enim; ratio igitur est et ipsius  $\Delta K$  ad  $EZ$  data. Ipsius

ayent entre eux une raison donnée, et que la raison de  $\Delta B$  à  $ZH$  soit donnée; je dis que la raison de  $\Delta\Delta$  à  $EZ$  est donnée.

Si le parallélogramme  $AB$  est équiangle avec le parallélogramme  $EH$ , la chose est évidente (68). Sinon, faisons sur  $\Delta B$  et au point  $\Delta$ , l'angle  $B\Delta K$  égal à l'angle  $EZH$  (23. 1), et achevons le parallélogramme  $\Delta\Lambda$  (31. 1). Puisque chacun des angles  $\Delta AK$ ,  $AK\Delta$  est donné, l'angle restant  $A\Delta K$  est donné (32. 1) (4); le triangle  $A\Delta K$  est donc donné d'espèce (35. 1); la raison de  $\Delta\Delta$  à  $\Delta K$  est donc donnée. Mais la raison de  $\Delta\Gamma$  à  $Z\Theta$  est donnée, par supposition, et  $\Delta\Gamma$  est égal à  $\Delta\Lambda$ ; la raison de  $\Delta\Lambda$  à  $Z\Theta$  est donc donnée. Mais  $\Delta\Lambda$  est équiangle avec  $Z\Theta$ , et la raison de  $\Delta\Lambda$  à  $ZH$  est donnée, ainsi que la raison de  $\Delta B$  à  $ZH$ , par supposition; la raison de  $\Delta K$

$\Delta K$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς  $\Delta A$   
ἄρα πρὸς τὴν  $EZ$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

autem  $\Delta K$  ad  $\Delta A$  ratio est data ; et ipsius  $\Delta A$   
igitur ad  $EZ$  ratio est data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εὰν δύο<sup>1</sup> παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο<sup>2</sup> γὰρ παραλληλογράμμων τῶν  $AB$ ,  $EH$ , περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς  $\Gamma$ ,  $Z$ , ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχεωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τῆς μὲν  $AG$  πρὸς τὴν  $EZ$  δοθείς, τῆς δὲ  $GB$  πρὸς τὴν  $ZH$ <sup>3</sup>. λέγω ὅτι καὶ τοῦ  $\Gamma A$  πρὸς τὸ  $Z\Theta$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

Εστω γὰρ ἰσογώνιον τὸ  $\Gamma A$  τῷ  $Z\Theta$ <sup>4</sup>. Καὶ παραβλήσθω παρὰ τὴν  $GB$  εὐθεῖαν τῷ  $Z\Theta$  παραλληλόγραμμῳ<sup>5</sup> ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $GM$ , καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $AG$  τῇ  $GN$ .

## PROPOSITIO LXX.

Si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos autem latera inter se rationem habeant datam : et illa parallelogramma inter se rationem habebunt datam.

Duorum enim parallelogrammorum  $AB$ ,  $EH$  circa æquales angulos ad puncta  $\Gamma$ ,  $Z$ , vel circa inæquales quidem, datos autem, latera inter se rationem habeant datam, hoc est ratio sit ipsius quidem  $AG$  ad  $EZ$  data, ipsius autem  $GB$  ad  $ZH$  ; dico et ipsius  $GA$  ad  $Z\Theta$  rationem esse datam.

Sit enim æquiangulum  $GA$  ipsi  $Z\Theta$ . Et applicetur ad  $GB$  rectam parallelogrammo  $Z\Theta$  æquale parallelogrammum  $GM$ , et ponatur ita ut in directum sit  $AG$  ipsi  $GN$  ; et  $AB$  igitur in directum

à  $EZ$  est donc donnée (68). Mais la raison de  $\Delta K$  à  $\Delta A$  est donnée ; la raison de  $\Delta A$  à  $EZ$  est donc donnée (8).

## PROPOSITION LXX.

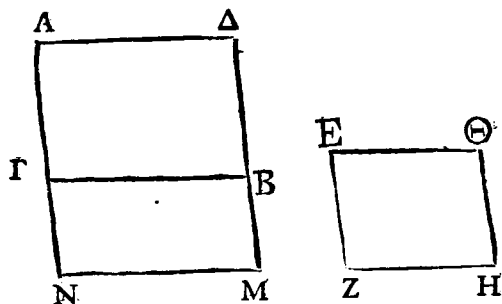
Si les côtés de deux parallélogrammes autour d'angles égaux, ou autour d'angles inégaux, mais donnés, ont entre eux une raison donnée ; ces parallélogrammes auront entre eux une raison donnée.

Que les côtés des deux parallélogrammes  $AB$ ,  $EH$ , autour des angles égaux  $\Gamma$ ,  $Z$ , ou autour d'angles inégaux, mais donnés, aient entre eux une raison donnée, c'est-à-dire, que la raison de  $AG$  à  $EZ$  soit donnée, ainsi que celle de  $GB$  à  $ZH$  ; je dis que la raison de  $GA$  à  $Z\Theta$  est donnée.

Car que  $GA$  soit équiangle avec  $Z\Theta$ . Appliquons à la droite  $GB$  le parallélogramme  $GM$  égal au parallélogramme  $Z\Theta$  (45. 1), et qu'il soit placé de manière que  $AG$

καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΘ τῷ ΖΝ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν ΒΝ, ΘΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν

est ipsi ΒΜ. Quoniam igitur æquale est ΒΘ ipsi ΖΝ, est autem et ipsi æquiangulum; ipsorum ΒΝ, ΘΖ igitur reciproca sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita



ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. Λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λίγος ἄρα καὶ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. Τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐστὶ δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.

ZE ad ΓΝ. Ratio autem ipsius ΓΒ ad ΖΗ data; ratio igitur et ipsius ΕΖ ad ΓΝ data. Ipsius autem ΕΖ ad ΑΓ ratio est data; et ipsius ΑΓ igitur ad ΓΝ ratio est data; quare et ipsius ΓΔ ad ΓΜ ratio est data. Est autem ΓΜ ipsi ΖΘ æquale; ratio igitur et ipsius ΓΔ ad ΖΘ data.

Μὴ ἔστω δὲ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. Καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ<sup>8</sup> ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΚ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθεῖσα<sup>10</sup>· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ἐστὶ δοθεῖσα. Ἐστὶ

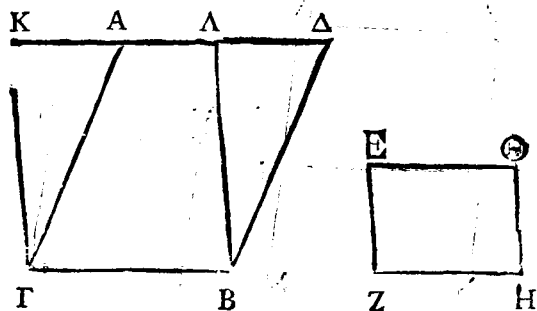
Non sit autem æquiangulum ΑΒ ipsi ΕΗ. Et constituatur ad ΒΓ rectam, et ad punctum in eâ Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΒΓΚ, et compleatur ΓΑ parallelogrammum. Et quoniam datus est angulus ΑΓΒ, est autem et ipse ΚΓΒ datus; et reliquus igitur ΑΓΚ est datus. Est autem et

soit dans la direction de ΓΝ; la droite ΔΒ sera dans la direction de ΒΜ. Puisque ΒΘ est égal à ΖΝ, et qu'il lui est aussi équiangle, les côtés des parallélogrammes ΒΝ, ΘΖ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΓΒ est à ΖΗ comme ΖΕ est à ΓΝ. Mais la raison de ΓΒ à ΖΗ est donnée; la raison de ΕΖ à ΓΝ est donc donnée. Mais la raison de ΕΖ à ΑΓ est donnée; la raison de ΑΓ à ΓΝ est donc donnée (8); la raison de ΓΔ à ΓΜ est donc donnée (1. 6). Mais ΓΜ est égal à ΖΘ; la raison de ΓΔ à ΖΘ est donc donnée.

Que ΑΒ ne soit pas équiangle avec ΕΗ. Sur la droite ΒΓ, et au point Γ de cette droite, faisons l'angle ΒΓΚ égal à l'angle ΕΖΗ (23. 1), et achevons le parallélogramme ΓΑ. Puisque l'angle ΑΓΒ est donné, et que l'angle ΚΓΒ est aussi donné, l'angle

δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΚ δοθείσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ  
 ὑπὸ ΑΚΓ ἐστὶ δοθείσα<sup>1</sup>. δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΚ τρί-  
 γωνόν τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν  
 ΓΚ δοθείς. Τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ

FAK datus; et reliquus igitur AKG est datus;  
 datum est igitur AGK triangulum specie; ratio  
 igitur est ipsius AG ad GK data. Ipsius autem  
 AG ad EZ ratio est data; et ipsius GK igitur ad EZ



δοθείς· καὶ τῆς ΓΚ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ  
 δοθείς. Ἐστὶ δὲ καὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος  
 δοθείς, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΚΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ  
 ΕΖΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΘ  
 δοθείς. Ἰσὸν δὲ τὸ ΓΑ τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα ἐστὶν  
 τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.

ratio est data. Est autem et ipsius GB ad ZH ratio  
 data, et est æqualis KGB angulus angulo EZH;  
 ratio igitur est ipsius GA ad ZΘ data. Æquale  
 autem GA ipsi GA; ratio igitur est ipsius GA  
 ad ZΘ data.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ρά.

Εάν δύο<sup>1</sup> τριγώνων, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ  
 ἀνίσους μέγ, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλ-  
 λήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ  
 τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει<sup>2</sup> δεδομένον.

#### PROPOSITIO LXXI.

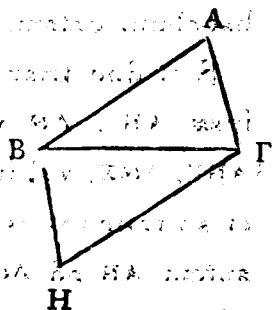
Si duorum triangulorum circa æquales an-  
 gulos, vel circa inæquales quidem, datos autem,  
 latera inter se rationem habeant datam; et  
 ipsa triangula inter se rationem habent datam.

restant AGK est donné (4). Mais l'angle ΓΑΚ est donné; l'angle restant AKG est donc  
 donné (32. 1) (4); le triangle AGK est donc donné d'espèce (40); la raison de  
 AG à GK est donc donnée. Mais la raison de AG à EZ est donnée (8); la raison de GK  
 à EZ est donc donnée. Mais la raison de GB à ZH est donnée, et l'angle ΚΓΒ est égal  
 à l'angle ΕΖΗ; la raison de ΓΑ à ΖΘ est donc donnée. Mais ΓΑ est égal à ΓΔ; la raison  
 de ΓΔ à ΖΘ est donc donnée.

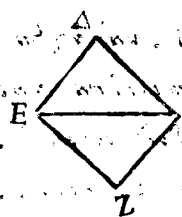
#### PROPOSITION LXXI.

Si les côtés de deux triangles autour d'angles égaux, ou autour d'angles inégaux,  
 mais donnés, ont entre eux une raison donnée, ces triangles ont entre eux une  
 raison donnée.

Δύο<sup>3</sup> γὰρ τριγώνων τῶν  $AB\Gamma$ ,  $\Delta E\Theta$ , περὶ ἴσας  
γωνίας τὰς ὑπὸ  $\Gamma$  καὶ  $\Theta$  τῶν  $A, \Delta$ , ἢ περὶ ἀνίστους μὲν,  
δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον  
ἔχουσιν δεδομένην, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν  $BA$   
πρὸς τῆς  $EA$  δοθείς, πῶς δὲ  $AF$  πρὸς τὴν  $\Delta\Theta$ ;  
λέγω ὅτι καὶ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου λόγος ἐστὶ δο-  
θείς πρὸς τὸ  $E\Delta\Theta$ .



Duorum enim triangulorum  $AB\Gamma$ ,  $\Delta E\Theta$ , circa  
æquales angulos ad puncta  $A, \Delta$ , vel circa  
inæquales quidem, datos autem, latera inter  
se rationem habeant datam, et sit ratio ipsius  
quidem  $BA$  ad  $EA$  data, ipsius vero  $AF$  ad  $\Delta\Theta$ ;  
dico et  $AB\Gamma$  trianguli rationem esse datam ad  
 $E\Delta\Theta$  triangulum.



Compleantur enim  $AH$ ,  $\Delta Z$  parallelogram-  
ma. Quoniam igitur duorum parallelogrammo-  
rum  $AH$ ,  $\Delta Z$  circa æquales angulos ad puncta  
 $A, \Delta$ , vel circa inæquales quidem, datos autem,  
latera inter se rationem habent datam et pa-  
rallelogramma rationem habebunt datam inter  
se; ratio igitur ipsius  $AH$  ad  $\Delta Z$  data; Et est  
ipsius quidem  $AH$  dimidium triangulum  $AB\Gamma$ ,  
ipsius autem  $\Delta Z$  ipsum  $\Delta E\Theta$ ; ratio igitur trian-  
guli  $AB\Gamma$  ad triangulum  $\Delta E\Theta$  data.

Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ<sup>5</sup>  $AH$ ,  $\Delta Z$  παραλλη-  
λόγραμμα. Ἐπεὶ οὖν δύο παράλληλογράμμων  
τῶν  $AH$ ,  $\Delta Z$  περὶ τὰς<sup>6</sup> ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς  
 $A, \Delta$  σημείοις, ἢ περὶ ἀνίστους μὲν, δεδομένας  
δὲ<sup>7</sup>, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δε-  
δομένον καὶ τὰ παραλληλόγραμμα λόγον ἔξει  
δεδομένον πρὸς ἀλλήλα<sup>8</sup>. λόγος ἄρα τοῦ  $AH$  πρὸς  
τὸ  $\Delta Z$  δοθείς. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $AH$  ἡμισυ τὸ  
 $AB\Gamma$  τρίγωνον, τοῦ δὲ  $\Delta Z$  τὸ  $\Delta E\Theta$ . λόγος ἄρα  
τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου πρὸς τὸ  $\Delta E\Theta$  τρίγωνον δο-  
θείς.

Que les côtés des triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta E\Theta$ , autour des angles égaux  $A, \Delta$ , ou autour  
d'angles inégaux, mais donnés, aient entre eux une raison donnée; c'est-à-dire  
que la raison de  $BA$  à  $EA$  soit donnée, ainsi que la raison de  $AF$  à  $\Delta\Theta$ ; je dis  
que la raison du triangle  $AB\Gamma$  au triangle  $\Delta E\Theta$  est donnée.

Car achevons les parallélogrammes  $AH$ ,  $\Delta Z$ . Puisque les côtés des deux parallé-  
logrammes  $AH$ ,  $\Delta Z$ , autour des angles égaux aux points  $A, \Delta$ , ou autour d'angles  
inégaux, mais donnés, ont entre eux une raison donnée, ces parallélogrammes  
auront entre eux une raison donnée; la raison de  $AH$  à  $\Delta Z$  est donc donnée (70).  
Mais le triangle  $AB\Gamma$  est la moitié de  $AH$ , et le triangle  $\Delta E\Theta$  la moitié de  $\Delta Z$  (34.1);  
la raison du triangle  $AB\Gamma$  au triangle  $\Delta E\Theta$  est donc donnée.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

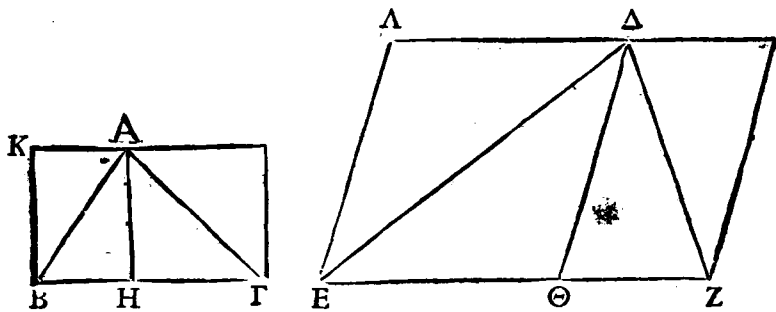
## PROPOSITIO LXXII.

Εάν δύο<sup>1</sup> τριγώνων αἱ τε βάσεις ἐν δεδομένῳ λόγῳ ᾗσι, καὶ αἱ ἐπ' αὐτάς ἡγμέναι ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἥτοι ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, ἥτοι<sup>2</sup> ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς ταῖς βάσεσιν· λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον<sup>3</sup> καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δεδομένον.

Εστώ<sup>4</sup> δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , καὶ ἡχθώσαν αἱ  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  ἥτοι ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ τῶν  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$ , ἢ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $EZ$  δοθείς, τῆς δὲ  $AH$  πρὸς τὴν  $\Delta\Theta$ <sup>5</sup> δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου πρὸς τὸ  $\Delta EZ$  τρίγωνον λόγος ἔστί δοθείς.

Si duorum triangulorum et bases in datâ ratione sint, et rectæ ad bases ductæ ab angulis vel æquales angulos faciant, vel inæquales quidem, datos autem, ad bases, rationem habeant inter se datam; et illa triangula inter se rationem habebunt datam.

Sint duo triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , et ducantur ipsæ  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  vel æquales angulos facientes  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$ , vel inæquales quidem, datos vero; et sit ratio ipsius quidem  $B\Gamma$  ad  $EZ$  data, ipsius autem  $AH$  ad  $\Delta\Theta$  data. Dico et trianguli  $AB\Gamma$  ad  $\Delta EZ$  triangulum rationem esse datam.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ  $K\Gamma$ ,  $\Lambda Z$  παραλληλόγραμμα. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$  γωνίαι

Compleantur enim  $K\Gamma$ ,  $\Lambda Z$  parallelogramma, Et quoniam  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$  anguli vel æquales sunt,

## PROPOSITION LXXII.

Si les bases de deux triangles sont en raison donnée, et si les droites menées des angles sur les bases font des angles égaux avec elles, ou des angles inégaux, mais donnés, et si ces droites ont entre elles une raison donnée, ces triangles auront entre eux une raison donnée.

Soient les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ . Menons les droites  $AH$ ,  $\Delta\Theta$ , faisant des angles égaux  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$ , ou des angles inégaux, mais donnés, que la raison de  $B\Gamma$  à  $EZ$  soit donnée, ainsi que la raison de  $AH$  à  $\Delta\Theta$ ; je dis que la raison du triangle  $AB\Gamma$  au triangle  $\Delta EZ$  est donnée.

Achevons les parallélogrammes  $K\Gamma$ ,  $\Lambda Z$ . Puisque les angles  $AH\Gamma$ ,  $\Delta\Theta Z$  sont égaux



ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἀνισοὶ μὲν, δεδομέναι δὲ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΚΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΘΖ τῇ ὑπὸ ΑΕΖ· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε ἄρα γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἀνισοὶ μὲν, δεδομέναι δὲ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ δοθείς, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΚΒ, ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΑΕ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΚΒ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς. Ἔστι δὲ καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δοθείς· καὶ<sup>5</sup> αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν<sup>6</sup>, ἢ ἀνισοὶ μὲν, δεδομέναι δὲ· καὶ τοῦ ΚΓ ἄρα παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

vel inæquales quidem, dati vero, æqualis autem ipse quidem ΑΗΓ ipsi ΚΒΓ, ipse vero ΔΘΖ ipsi ΑΕΖ; et anguli ad puncta Β, Ε igitur vel æquales sunt, vel inæquales quidem, dati vero. Et quoniam ratio est ipsius ΑΗ ad ΔΘ data, æqualis autem ipsa quidem ΑΗ ipsi ΚΒ, ipsa vero ΔΘ ipsi ΑΕ; ratio igitur et ipsius ΚΒ ad ΑΕ data. Est autem et ipsius ΒΓ ad ΕΖ ratio data; et anguli ad puncta Β, Ε vel æquales sunt, vel inæquales quidem, dati vero; et igitur parallelogrammi ΚΓ ad ΑΖ parallelogrammum ratio est data; quare et trianguli ΑΒΓ ad ΔΕΖ triangulum ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο γ'.

PROPOSITIO LXXIII.

Εὰν δύο<sup>1</sup> παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ οὕτως ἔχωσιν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως τὴν λοιπὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔχη δὲ ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ

Si duorum parallelogrammorum circa æquales angulos, vel circa inæquales quidem, datos vero, latera ita se habeant ut sit sicut primi latus ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad aliam quamdam rectam, habeat autem reliquum primi

ou inégaux, mais cependant donnés, que l'angle ΑΗΓ est égal à l'angle ΚΒΓ, et l'angle ΔΘΖ égal à l'angle ΑΕΖ (29. 1), les angles en Β et Ε seront égaux, ou inégaux mais cependant donnés. Et puisque la raison de ΑΗ à ΔΘ est donnée, que ΑΗ est égal à ΚΒ, et ΔΘ égal à ΑΕ (34. 1), la raison de ΚΒ à ΑΕ sera donnée. Mais la raison de ΒΓ à ΕΖ est donnée, et les angles aux points Β, Ε sont égaux, ou inégaux mais cependant donnés; la raison du parallélogramme ΚΓ au parallélogramme ΑΖ est donc donnée (70); la raison du triangle ΑΒΓ au triangle ΔΕΖ est donc donnée (41. 1).

PROPOSITION LXXIII.

Si les côtés de deux parallélogrammes autour d'angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, sont tels que le côté du premier soit au côté du second comme le côté restant du second est à une certaine droite, et si le côté restant du premier

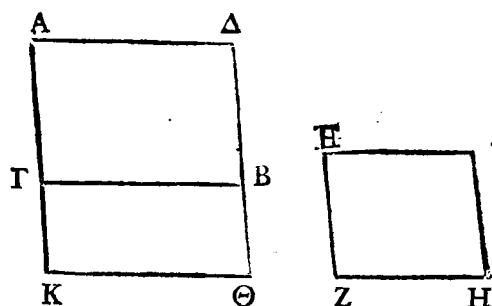


πρὸς αὐτὴν λόγον δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ πα-  
ραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔξει δε-  
δομένον.

Δύο<sup>2</sup> γὰρ παραλληλογράμμων τῶν AB, EH,  
περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν, δεδομένας  
δὲ, τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ<sup>3</sup> αἱ πλευραὶ οὕτως ἰχέ-  
τωσαν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΒ πρὸς  
τὴν ΖΗ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ, τῆς δὲ ΑΓ  
πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ  
τοῦ AB παραλληλογράμμου πρὸς τὸ EH πα-  
ραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς.

latus ad hanc rectam rationem datam; et ipsa  
parallelogramma inter se rationem habebunt  
datam.

Duorum enim parallelogrammorum AB, EH  
circa æquales angulos, vel circa inæquales qui-  
dem, datos vero, ad puncta Γ, Ζ, ita se habeant  
inter se, ut sit sicut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ,  
ipsius autem ΑΓ ad ΓΚ ratio sit data; dico et  
parallelogrammi AB ad EH parallelogrammum  
rationem esse datam.



Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ AB τῷ EH ἰσογώνιον,  
καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΒΓ εὐθείαν τῷ EH  
παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  
ΓΘ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  
ΑΓ τῇ ΚΓ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΘΒ.  
Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ EH<sup>4</sup>· ἔστι δὲ καὶ  
ἰσογώνιον· τῶν ΓΘ, EH ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ

Sit enim primum AB ipsi EH æquiangu-  
lum, et applicetur ad ΒΓ rectam parallelo-  
grammo EH æquale parallelogrammum ΓΘ; et  
ponatur ita ut in directum sit ΑΓ ipsi ΚΓ; in  
directum igitur est et ΔΒ ipsi ΘΒ. Et quoniam  
æquale est ΓΘ ipsi EH; est autem et ipsi æquian-  
gulum; ipsorum ΓΘ, EH igitur reciproca sunt

a une raison donnée avec cette droite, ces parallélogrammes auront entre eux  
une raison donnée.

Que les côtés des deux parallélogrammes AB, EH, autour d'angles égaux, ou  
autour d'angles inégaux en Γ, Ζ, mais cependant donnés, soient tels que ΓΒ soit  
à ΖΗ comme ΕΖ est à ΓΚ, et que la raison de ΑΓ à ΓΚ soit donnée; je dis que la  
raison du parallélogramme AB au parallélogramme EH est donnée.

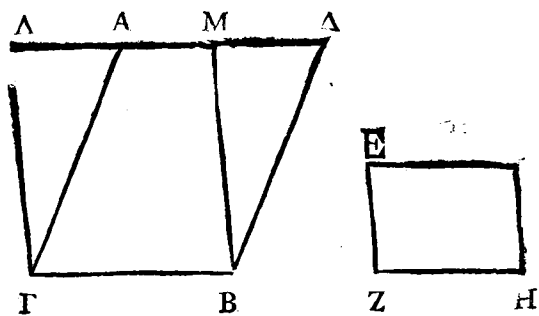
Car premièrement que AB soit équiangle avec EH. Appliquons à la droite ΒΓ le  
parallélogramme ΓΘ égal au parallélogramme EH, et qu'il soit placé de manière que  
ΑΓ soit dans la direction de ΚΓ; la droite ΔΒ sera dans la direction de ΘΒ. Puisque  
ΓΘ est égal à EH, et qu'il lui est équiangle, les côtés des parallélogrammes ΓΘ,

πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ. Ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ καὶ<sup>5</sup> πρὸς ἡν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς· ὥστε τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΘ, τοῦτέστι πρὸς τὸ ΕΗ, λόγος ἐστὶ δοθείς.

Μὴ ἔστω δὲ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ<sup>6</sup>· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γτῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΓΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΓΜ παραλληλόγραμμον· καὶ<sup>7</sup>

latera circa æquales angulos; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ. Ut autem ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ et ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam; ratio igitur ipsius ΑΓ ad ΓΚ data; quare ipsius ΑΒ ad ΓΘ, hoc est ad ΕΗ, ratio est data.

Non sit autem æquiangulum ΑΒ ipsi ΕΗ. Et constituatur ad ΒΓ rectam, et ad punctum in εἰ Γ angulo ΕΖΗ æqualis ΒΓΛ, et compleatur ΓΜ parallelogrammum. Et quoniam datus est



ἐπεὶ δοθείσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΓΒ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ ἐστὶ δοθείσα. Δέδοται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΛ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΛΑ δέδοται· ὥστε δέδοται τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ εἶδει<sup>8</sup> λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἡν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ

uterque angulorum ΑΓΒ, ΑΓΒ; et reliquus igitur ΑΓΛ est datus. Datus est autem et ipse ΓΑΛ; et reliquus igitur ipse ΓΛΑ datus est; quare datum est ΑΓΔ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΓ ad ΓΛ data. Et quoniam ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam, ipsius vero ΑΓ ad ΓΛ ratio est

ΕΗ, autour des angles égaux, seront réciproquement proportionnels (14. 6); ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΕΖ est à ΓΚ. Mais ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée; la raison de ΑΓ à ΓΚ est donc donnée; la raison de ΑΒ à ΓΘ, c'est-à-dire à ΕΗ, est donc donnée.

Mais que ΑΒ ne soit pas équiangle avec ΕΗ. Sur la droite ΒΓ, et au point Γ de cette droite, faisons l'angle ΒΓΛ égal à l'angle ΕΖΗ, et achevons le parallélogramme ΓΜ. Puisque chacun des angles ΑΓΒ, ΑΓΒ est donné, l'angle restant ΑΓΛ est donné. Mais l'angle ΓΑΛ est donné; l'angle restant ΓΛΑ est donc donné; le triangle ΑΓΛ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΑΓ à ΓΛ est donc donnée. Mais ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée, et la raison

λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον<sup>10</sup>. Καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΜ παραλληλογράμμου<sup>11</sup> πρὸς τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον<sup>12</sup> δοθείς. Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ ΓΜ τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Εὰν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν, δεδομέναις δὲ· ἐστὶ ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ<sup>1</sup> λόγον ἔχει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΕΗ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχέτω δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν, δεδομέναις δὲ, ταῖς πρὸς τοῖς Γ, Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

data; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΖΕ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam. Et est æqualis ipse ΒΓΑ angulus ipsi ΕΖΗ; ratio igitur parallelogrammi ΓΜ ad ΕΗ parallelogrammum data; æquale autem ΓΜ ipsi ΓΔ; ratio igitur ipsius ΓΔ ad ΕΗ data.

## PROPOSITIO LXXIV.

Si duo parallelogramma rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis vero; erit ut primi latus ad secundi latus ita alterum secundi latus ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Duo enim parallelogramma ΑΒ, ΕΗ inter se rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis vero, ad puncta Γ, Ζ; dico esse ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad quam ΑΓ rationem habet datam.

de ΑΓ à ΓΑ est donnée; ΓΒ est donc à ΖΗ comme ΖΕ est à la droite avec laquelle ΑΓ a une raison donnée. Mais l'angle ΒΓΑ est égal à l'angle ΕΖΗ; la raison du parallélogramme ΓΜ au parallélogramme ΕΗ est donc donnée. Mais ΓΜ est égal à ΓΔ (35. 1); la raison de ΓΔ à ΕΗ est donc donnée.

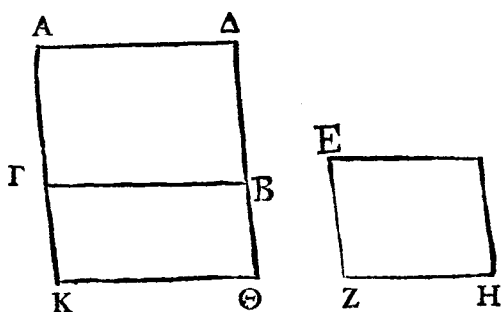
## PROPOSITION LXXIV.

Si deux parallélogrammes, placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, un côté du premier sera à un côté du second comme le côté restant du second est à la droite avec laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée.

Que les deux parallélogrammes ΑΒ, ΕΗ, placés dans des angles égaux, ou inégaux en Γ et Ζ, mais cependant donnés, aient entre eux une raison donnée; je dis que ΓΒ est à ΖΗ comme ΕΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée.

Τὸ γὰρ  $AB$  τῷ  $EH$  ἢτοι ἰσογώνιον ἐστὶν ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον ἰσογώνιον. Καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν  $GB$  εὐθεΐαν τῷ  $EH$  παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλογράμμον τὸ  $\Gamma\Theta$ , καὶ

Ipsum enim  $AB$  ipsi  $EH$  vel æquiangulum est vel non. Sit primum æquiangulum. Et applicetur ad  $GB$  rectam parallelogrammo  $EH$  æquale parallelogrammum  $\Gamma\Theta$ , et ponatur ita ut in



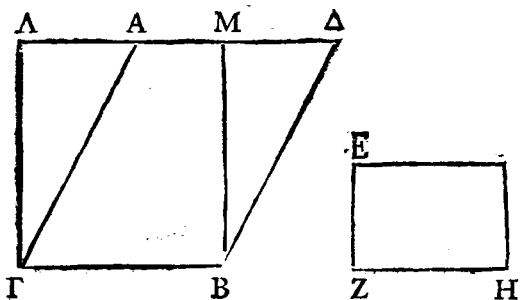
κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΚ$ . ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ΔΒ$  τῇ  $ΒΘ$ . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ  $AB$  πρὸς τὸ  $EH$  δοθείς, ἴσον δὲ τὸ  $EH$  τῷ  $\Gamma\Theta$ . λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Gamma\Theta$  δοθείς<sup>2</sup>. ὥστε καὶ τῆς  $ΑΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΚ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $\Gamma\Theta$  τῷ  $EH$ , ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν  $\Gamma\Theta$ ,  $EH$  ἄρα ἀντιπεπρόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $ΓΒ$  πρὸς τὴν  $ZH$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $ΓΚ$ . Τῆς δὲ  $ΓΚ$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  λόγος ἐστὶ δοθείς<sup>3</sup> ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $ΓΒ$  πρὸς τὴν  $ZH$  οὕτως ἡ<sup>3</sup>  $EZ$  πρὸς ἢν ἡ  $ΑΓ$  λόγον ἔχει δεδομένον.

directum sit  $ΑΓ$  ipsi  $ΓΚ$ ; in directum igitur est  $ΔΒ$  ipsi  $ΒΘ$ . Et quoniam ratio est ipsius  $AB$  ad  $EH$  data, æquale autem  $EH$  ipsi  $\Gamma\Theta$ ; ratio igitur est ipsius  $AB$  ad  $\Gamma\Theta$  data; quare et ipsius  $ΑΓ$  ad  $ΓΚ$  ratio est data. Et quoniam æquale est  $\Gamma\Theta$  ipsi  $EH$ ; est autem et æquiangulum; ipsorum  $\Gamma\Theta$ ,  $EH$  igitur reciproca sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut  $ΓΒ$  ad  $ZH$  ita  $EZ$  ad  $ΓΚ$ . Ipsius autem  $ΓΚ$  ad  $ΑΓ$  ratio est data; est igitur ut  $ΓΒ$  ad  $ZH$  ita  $EZ$  ad quam ipsa  $ΑΓ$  rationem habet datam.

Car le parallélogramme  $AB$  est équiangle avec le parallélogramme  $EH$ , ou non. Qu'il lui soit d'abord équiangle. Appliquons à la droite  $GB$  le parallélogramme  $\Gamma\Theta$  égal au parallélogramme  $EH$  (45. 1), et qu'il soit placé de manière que  $ΑΓ$  soit dans la direction de  $ΓΚ$ ; la droite  $ΔΒ$  sera dans la direction de  $ΒΘ$ . Et puisque la raison de  $AB$  à  $EH$  est donnée, et que  $EH$  est égal à  $\Gamma\Theta$ , la raison de  $AB$  à  $\Gamma\Theta$  sera donnée; la raison de  $ΑΓ$  à  $ΓΚ$  est donc donnée (1. 6). Et puisque le parallélogramme  $\Gamma\Theta$  est égal à  $EH$ , et qu'il lui est équiangle, les côtés des parallélogrammes  $\Gamma\Theta$ ,  $EH$ , autour des angles égaux, seront réciproquement proportionnels (14. 6);  $ΓΒ$  est donc à  $ZH$  comme  $EZ$  est à  $ΓΚ$ . Mais la raison de  $ΓΚ$  à  $ΑΓ$  est donnée;  $ΓΒ$  est donc à  $ZH$  comme  $EZ$  est à la droite avec laquelle  $ΑΓ$  a la raison donnée.

Μὴ ἔστω δὲ ἰσογώνιον τὸ  $AB$  τῷ  $EH$ . Καὶ συν-  
εστάτω πρὸς τῇ  $GB$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-  
μείῳ τῷ  $\Gamma$ , τῇ ὑπὸ  $EZH$  γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ  $AGB$ , καὶ  
συμπεπληρώσθω τὸ  $GM$  παραλληλόγραμμον<sup>5</sup>.

Non sit autem æquiangulum  $AB$  ipsi  $EH$ . Et  
constituatur ad  $GB$  rectam, et ad punctum in  
eâ  $\Gamma$ , angulo  $EZH$  æqualis ipse  $AGB$ , et complea-  
tur parallelogrammum  $GM$ . Quoniam igitur



Ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸ  $EH$  δοθείς, ἴσον  
δὲ τὸ  $\Gamma\Delta$  τῷ  $GM$  λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ  $GM$  πρὸς  
τὸ  $EH$  δοθείς. Καὶ ἔστιν ἴση ἢ ὑπὸ  $AGB$  γωνία<sup>6</sup>  
τῇ ὑπὸ  $EZH$  ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ  $GM$  τῷ  $EH$ <sup>7</sup>.  
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $GB$  πρὸς τὴν  $ZH$  οὕτως ἡ  $EZ$   
πρὸς ἢν ἡ<sup>8</sup>  $AG$  λόγον ἔχει δεδομένον. Τῆς δὲ  
 $\Gamma A$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς  
ἡ  $GB$  πρὸς τὴν  $ZH$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς ἢν ἡ  $AG$  λό-  
γον ἔχει δεδομένον.

ratio est ipsius  $\Gamma\Delta$  ad  $EH$  data, æquale autem  
 $\Gamma\Delta$  ipsi  $GM$ ; ratio igitur et ipsius  $GM$  ad  $EH$  data.  
Et est æqualis angulus  $AGB$  ipsi  $EZH$ ; æquian-  
gulum igitur est  $GM$  ipsi  $EH$ ; est igitur ut  $GB$   
ad  $ZH$  ita  $EZ$  ad quam ipsa  $AG$  rationem ha-  
bet datam. Ipsius autem  $\Gamma A$  ad  $\Gamma\Delta$  ratio est  
data; est igitur ut  $GB$  ad  $ZH$  ita  $EZ$  ad quam  
ipsa  $AG$  rationem habet datam.

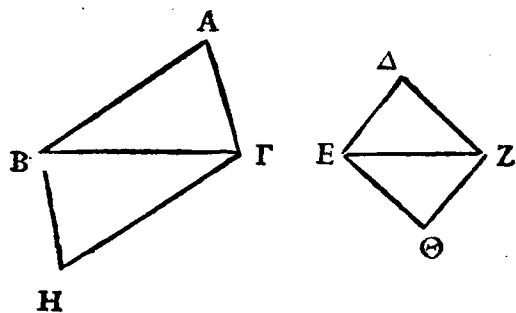
Mais que  $AB$  ne soit pas équiangle avec  $EH$ . Sur la droite  $GB$  et au point  $\Gamma$   
faisons l'angle  $AGB$  égal à l'angle  $EZH$  (23. 1), et achevons le parallélogramme  $GM$ .  
Puisque la raison de  $\Gamma\Delta$  à  $EH$  est donnée, et que  $\Gamma\Delta$  est égal à  $GM$  (55. 1); la  
raison de  $GM$  à  $EH$  sera donnée. Mais l'angle  $AGB$  est égal à l'angle  $EZH$ ;  $GM$  est  
donc équiangle avec  $EH$  (29) (34. 1);  $GB$  est donc à  $ZH$  comme  $EZ$  est à la  
droite avec laquelle  $AG$  a la raison donnée. Mais la raison de  $\Gamma A$  à  $\Gamma\Delta$  est donnée;  
 $GB$  est donc à  $ZH$  comme  $EZ$  est à la droite avec laquelle  $AG$  a une raison donnée.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. οέ.

PROPOSITIO LXXV.

Εάν δύο τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχη δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν, δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ<sup>2</sup> λόγον ἔχει δεδομένον.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς  $A$ ,  $\Delta$  γωνίαι, ἥτοι ἴσαι, ἢ<sup>3</sup> ἀνίσοι μὲν, δεδομέναι δέ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Delta E$  οὕτως ἡ  $\Delta Z$  πρὸς ἣν ἡ  $A\Gamma$  λόγον ἔχει δεδομένον.



Si duo triangula inter se rationem habeant datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus quidem, datis vero; erit ut primi latus ad secundi latus ita alterum secundi latus ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Sint duo triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  inter se rationem habentia datam, et sint anguli ad puncta  $A$ ,  $\Delta$ , vel æquales, vel inæquales quidem, dati vero; dico esse ut  $AB$  ad  $\Delta E$  ita  $\Delta Z$  ad quam ipsa  $A\Gamma$  rationem habet datam.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  παραλληλόγραμμα. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου πρὸς τὸ  $\Delta EZ$  τριγώνον<sup>4</sup> δοθείς· λόγος ἄρα καὶ

Compleantur enim  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  parallelogramma. Et quoniam ratio est trianguli  $AB\Gamma$  ad  $\Delta EZ$  triangulum data; ratio igitur et parallelogram-

PROPOSITION LXXV.

Si deux triangles placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, un côté du premier sera à un côté du second comme un autre côté du second est à la droite avec laquelle le côté restant du premier a la raison donnée.

Soient les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , ayant entre eux une raison donnée, que les angles en  $A$  et  $\Delta$  soient égaux ou inégaux, mais cependant donnés; je dis que  $AB$  est à  $\Delta E$  comme  $\Delta Z$  est à la droite avec laquelle  $A\Gamma$  a la raison donnée.

Car achevons les parallélogrammes  $AH$ ,  $\Delta\Theta$ . Puisque la raison du triangle  $AB\Gamma$  au triangle  $\Delta EZ$  est donnée, la raison du parallélogramme  $AH$  au parallélogramme  $\Delta\Theta$

τοῦ ΑΗ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΔΘ παραλληλόγραμμον δοθείς. Ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλόγραμμα τὰ ΑΗ, ΔΘ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει<sup>5</sup> δεδομένον, ἥτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν, δεδομέναις δέ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ἢ ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δοθέντα<sup>6</sup>.

mi AH ad ΔΘ parallelogrammum data. Quoniam igitur duo parallelogramma AH, ΔΘ inter se rationem habent datam, vel in æqualibus angulis, vel in inæqualibus, datis autem; est igitur ut AB ad ΔΕ ita ΔΖ ad quam ipsa ΑΓ rationem habet datam.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 05'.

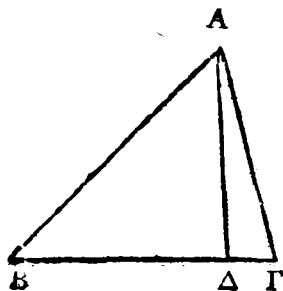
Ἐὰν τριγώνου δεδομένου τῷ εἶδει ἀπὸ τῆς κερυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἔχει<sup>1</sup> δεδομένον.

Ἐστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἶδει τὸ ΑΒΓ, καὶ

## PROPOSITIO LXXVI.

Si a trianguli specie dati vertice ad basim perpendicularis ducatur, ducta ad basim rationem habet datam.

Sit triangulum datum specie ΑΒΓ, et ducatur



ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λίγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς.

a puncto A ad BΓ perpendicularis ΑΔ; dico rationem esse ipsius ΑΔ ad BΓ datam.

est donnée (41. 1). Et puisque les deux parallélogrammes AH, ΔΘ, placés dans des angles égaux, ou inégaux mais cependant donnés, ont entre eux une raison donnée, la droite AB sera à la droite ΔΕ comme ΔΖ est à la droite avec laquelle ΑΓ a la raison donnée (74).

## PROPOSITION LXXVI.

Si du sommet d'un triangle donné d'espèce on mène une perpendiculaire à la base, la droite menée aura une raison donnée avec la base.

Soit ΑΒΓ un triangle donné d'espèce, et du point A menons à BΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que la raison de ΑΔ à BΓ est donnée.



Επει γὰρ δίδεται τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ<sup>2</sup> ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Delta A$  δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$  ἐστὶ δοθεῖσα<sup>3</sup>. δίδεται ἄρα τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς  $BA$  πρὸς τὴν  $\Delta\Delta$  δοθείς· τῆς δὲ<sup>4</sup>  $AB$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$  λόγος δοθείς· καὶ τῆς  $\Delta\Delta$  ἄρα πρὸς τὴν  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ.

Εἴαν δύο εἶδη δεδομένα τῷ εἶδει<sup>1</sup> πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν ἐνὸς τῶν εἰδῶν πρὸς ὁποιοῦν τοῦ ἐτέρου λόγον ἔξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εἶδη τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  δεδομένα τῷ εἶδει πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ μία πλευρὰ ὁποιοῦν τοῦ  $AB\Gamma$  πρὸς μίαν πλευρὰν ὁποιοῦν τοῦ  $\Delta EZ$  λόγον ἔχει<sup>2</sup> δεδομένον.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν  $B\Gamma$ ,  $EZ$  τετράγωνα τὰ  $BH$ ,  $E\Theta$ . Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐ-

Quoniam enim datum est  $AB\Gamma$  triangulum specie, datus igitur est et  $AB\Delta$  angulus. Est autem et ipse  $B\Delta A$  datus, et reliquus igitur ipse  $B\Delta\Delta$  est datus. Datum est igitur  $AB\Delta$  triangulum specie; ratio igitur est ipsius  $BA$  ad  $\Delta\Delta$  data; ipsius autem  $AB$  ad  $B\Gamma$  ratio data; et ipsius  $\Delta\Delta$  igitur ad  $B\Gamma$  ratio est data.

PROPOSITIO LXXVII.

Si duæ figuræ datæ specie inter se rationem habeant datam, et unum latus quodlibet unius figurarum ad quodlibet alterius rationem habeat datam.

Duæ enim figuræ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  datæ specie inter se rationem habeant datam; dico et unum latus quodlibet ipsius  $AB\Gamma$  ad unum latus quodlibet ipsius  $\Delta EZ$  rationem habere datam.

Describantur enim ab ipsis  $B\Gamma$ ,  $EZ$  quadrata  $BH$ ,  $E\Theta$ . Et quoniam ab eadem rectâ  $B\Gamma$  duæ

Puisque le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce, l'angle  $AB\Delta$  est donné (déf. 3). Mais l'angle  $B\Delta A$  est donné; l'angle restant  $B\Delta\Delta$  est donc donné (32. 1) (4); le triangle  $AB\Delta$  est donc donné d'espèce (40); la raison de  $BA$  à  $\Delta\Delta$  est donc donnée (déf. 3); mais la raison de  $AB$  à  $B\Gamma$  est donnée; la raison de  $\Delta\Delta$  à  $B\Gamma$  est donc aussi donnée (8).

PROPOSITION LXXVII.

Si deux figures données d'espèce ont entre elles une raison donnée, un côté quelconque de l'une de ces figures aura une raison donnée avec un côté quelconque de l'autre.

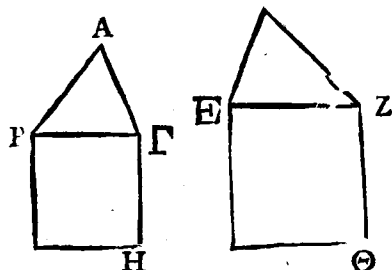
Que les deux figures  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , données d'espèce, aient entre elles une raison donnée; je dis qu'un côté quelconque de  $AB\Gamma$  aura une raison donnée avec un côté quelconque de  $\Delta EZ$ .

Car sur les droites  $B\Gamma$ ,  $EZ$ , décrivons les quarrés  $BH$ ,  $E\Theta$  (46. 1). Puisque sur la



θείας τῆς ΒΓ δύο εἶδη ἀναγράφεται ἃ ἐτυχεν  
 δεδομένα τῷ εἶδει τὰ ΑΒΓ, ΒΗ· λόγος ἄρα τοῦ  
 ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάλιν

figuræ descriptæ sunt quælibet datæ specie ΑΒΓ,  
 ΒΗ; ratio igitur ipsius ΑΒΓ ad ΒΗ data. Prop-



καὶ τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐπεὶ  
 οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ<sup>5</sup> δο-  
 θείς, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ λόγος  
 ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ  
 δοθείς· Καὶ τοῦ ΒΗ ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ  
 δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος  
 ἐστὶ δοθείς.

ter eadem utique rursus et ipsius ΔΕΖ ad ΕΘ  
 ratio est data. Quoniam igitur ratio est ipsius  
 ΑΒΓ ad ΔΕΖ data, sed ipsius quidem ΑΒΓ ad  
 ΒΗ ratio est data, ipsius autem ΔΕΖ ad ΕΘ  
 ratio est data; et ipsius ΒΗ igitur ad ΕΘ ratio  
 est data; quare et ipsius ΒΓ ad ΕΖ ratio est  
 data.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ οή'.

Εὰν δοθὲν εἶδος πρὸς τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχῃ  
 δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν  
 λόγον ἔχῃ δοθέντα· δέδοται τὸ ὀρθογώνιον τῷ  
 εἶδει.

## PROPOSITIO LXXVIII.

Si data figura ad aliquod rectangulum ra-  
 tionem habeat datam, et unum latus ad unum  
 latus rationem habeat datam, datum est rectan-  
 gulum specie.

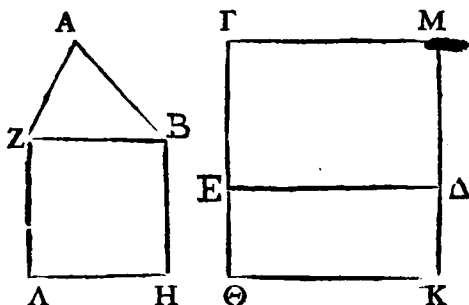
même droite ΒΓ on a décrit deux figures quelconques ΑΒΓ, ΒΗ données d'espèce,  
 la raison de ΑΒΓ à ΒΗ est donnée (49). Semblablement, la raison de ΔΕΖ à ΕΘ est  
 donnée. Et puisque la raison de ΑΒΓ à ΔΕΖ est donnée, que la raison de ΑΒΓ à ΒΗ  
 est donnée, et que la raison de ΔΕΖ à ΕΘ est aussi donnée, la raison de ΒΗ à ΕΘ  
 est donnée (8); la raison de ΒΓ à ΕΖ est donc donnée (54).

## PROPOSITION LXXVIII.

Si une figure donnée a une raison donnée avec un rectangle, et si un côté a  
 une raison donnée avec un côté, le rectangle est donné d'espèce.

Δοθέν γὰρ εἶδος τὸ AZB πρὸς τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἔχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τῆς ZB πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

Data enim figura AZB ad aliquod rectangulum ΓΔ rationem habeat datam, et sit ratio ipsius ZB ad ΕΔ data; dico datum esse ΓΔ specie.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZB τετράγωνον τὸ ZH, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΔ τῷ ZH ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, καὶ κείσθω ὥστε<sup>1</sup> ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΔΚ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ZB δύο εὐθύγραμμα ἂ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἶδει ἀναγράφονται τὰ AZB, ZH· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AZB πρὸς τὸ ZH δοθείς. Τοῦ δὲ AZB πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ZH ἄρα πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ ZH τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΕΚ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον τὸ ZH τῷ ΕΚ, ἐστὶ γάρ<sup>3</sup> καὶ ὀρθογώνιον· ἀν-

Describatur enim ab ipsâ ZB quadratum ZH, et applicetur ad ΕΔ ipsi ZH æquale parallelogrammum ΕΚ, et ponatur ita ut in directum sit ΓΕ ipsi ΕΘ; in directum igitur est et ΜΔ ipsi ΔΚ. Et quoniam ab eâdem rectâ ZB duo rectilinea quælibet data specie descripta sunt AZB, ZH; ratio igitur est ipsius AZB ad ZH data. Ipsius autem AZB ad ΓΔ ratio est data; et ipsius ZH igitur ad ΓΔ ratio est data. Sed ZH ipsi ΕΚ est æquale; et ipsius ΓΔ igitur ad ΕΚ ratio est data. Quare et ipsius ΓΕ ad ΕΘ ratio est data. Et quoniam æquale est et æquiangulum ZH ipsi ΕΚ, est enim et rectangulum;

Que la figure donnée AZB ait une raison donnée avec un rectangle ΓΔ, et que la raison de ZB à ΕΔ soit donnée; je dis que ΓΔ est donné d'espèce.

Car sur ZB décrivons le quarré ZH (46. 1); appliquons à ΕΔ le parallélogramme ΕΚ égal à ZH (45. 1), et plaçons-le de manière que ΓΕ soit dans la direction de ΕΘ; la droite ΜΔ sera dans la direction de ΔΚ. Puisque sur la même droite ZB on a décrit deux figures rectilignes quelconques AZB, ZH données d'espèce, la raison de AZB à ZH sera donnée (49). Mais la raison de AZB à ΓΔ est donnée; la raison de ZH à ΓΔ est donc donnée (8). Mais ZH est égal à ΕΚ; la raison de ΓΔ à ΕΚ est donc donnée; la raison de ΓΕ à ΕΘ est donc donnée. Mais la figure ZH est égale à ΕΚ et lui est équiangle, car c'est un rectangle; leurs côtés sont donc

τιπεπόνθασιν ἄρα αὐτῶν αἱ πλευραὶ, καὶ ἔστιν ὥς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ. Λόγος δὲ ὑπόκειται τῆς ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς. Λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ δοθείς. Τῆς δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἰση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, τετράγωνον γὰρ ἐστὶ. τῆς ΑΖ ἄρα πρὸς τὴν<sup>5</sup> ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς<sup>6</sup>. τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία. δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ τῷ εἶδει.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσιν ἔχῃ, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν, ἥ δὲ ὥς ἡ τοῦ πρώτου τριγώνου βάση πρὸς τὴν κάθετον οὕτως ἡ τοῦ ἐτέρου τριγώνου βάση πρὸς τὴν κάθετον ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΘΖΗ ἴσας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Β, Ζ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ

reciproca sunt igitur eorum latera, et est ut ΖΒ ad ΕΔ ita ΕΘ ad ΖΛ. Ratio autem supponitur ipsius ΖΒ ad ΕΔ data; ratio igitur et ipsius ΕΘ ad ΖΛ data. Ipsius autem ΕΘ ad ΓΕ ratio est data; et ipsius ΓΕ igitur ad ΖΛ ratio est data. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΖΒ, quadratum enim est; ipsius ΑΖ igitur ad ΕΔ ratio est data; ipsius ΓΕ igitur ad ΕΔ ratio est data. Et est rectus ad Ε angulus; datum est igitur ΓΔ specie.

## PROPOSITIO LXXIX.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, et ab æqualibus angulis ad bases perpendiculares rectæ lineæ ducantur, sit autem ut primi trianguli basis ad perpendicularem, ita alterius trianguli basis ad perpendicularem; æquiangula erunt triangula.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΘΖΗ æquales habentia angulos ad Β, Ζ, et ducantur a punctis

réciroquement proportionnels ( 14. 6 ); ΖΒ est donc à ΕΔ comme ΕΘ est à ΖΛ. Mais la raison de ΖΒ à ΕΔ est supposée donnée; la raison de ΕΘ à ΖΛ est donc donnée. Mais la raison de ΕΘ à ΓΕ est donnée ( 1. 6 ); la raison de ΓΕ à ΖΛ est donc donnée ( 8 ). Mais ΑΖ est égal à ΖΒ, car ΖΒ est un carré; la raison de ΑΖ à ΕΔ est donc donnée ( 8 ); la raison de ΓΕ à ΕΔ est donc donnée. Mais l'angle en Ε est droit; ΓΔ est donc donné d'espèce ( déf. 3 ).

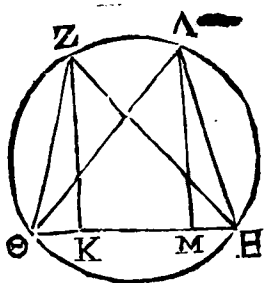
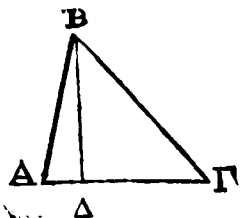
## PROPOSITION LXXIX.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si de ces angles égaux on mène des lignes droites perpendiculaires aux bases, et si la base du premier triangle est à la perpendiculaire comme la base de l'autre est à la perpendiculaire, ces triangles seront équiangles.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΘΖΗ ayant des angles égaux en Β, Ζ; des points

τῶν B, Z κάθετοι αἱ BΔ, ZK, ἔστω δὲ ὡς ἡ AΓ πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ ΘH πρὸς τὴν ZK· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον<sup>1</sup> τῷ ΘZH τριγώνῳ.

B, Z perpendiculares BΔ, ZK, sit autem ut AΓ ad BΔ ita ΘH ad ZK; dico æquiangulum esse ABΓ triangulum triangulo ΘZH.



Περιγεγράφω γάρ περὶ τὸ ΘZH τρίγωνον κύκλος οὗ τμήμα ἔστω τὸ ΘZH<sup>2</sup>, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘH εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΓAB γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ HΘΛ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ZΛ, ΛH, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΛM. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HZΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΛH, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι τοῦ κύκλου, ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ HZΘ τῇ ὑπὸ ΓBA ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ HΛΘ τῇ ὑπὸ ΓBA. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘH τῇ ὑπὸ BΛΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛHΘ τῇ ὑπὸ BΓA ἐστὶν ἴση<sup>3</sup>. ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΘΛH τριγώνῳ. Καὶ κάθετοι ἡγμέναι εἰσὶν αἱ BΔ, ΛM· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AΓ πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ ΘH πρὸς τὴν ΛM. Ἦν δὲ ὡς ἡ AΓ πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ ΘH πρὸς τὴν ZK, ὑποκείται

Describatur enim circa ΘZH triangulum circulus cujus segmentum sit ΘZH, et constituatur ad ΘH rectam, et ad punctum in eā Θ, angulo ΓAB æqualis angulus HΘΛ, et jungantur ipsæ ZΛ, ΛH, et ducatur perpendicularis ΛM. Et quoniam æqualis est HZΘ angulus ipsi ΘΛH, etenim in eodem sunt segmento circuli, est autem ipse HZΘ ipsi ΓBA æqualis; æqualis igitur est et ipse HΛΘ ipsi ΓBA. Est autem et ipse ΛΘH ipsi BΛΓ æqualis; et reliquus igitur ΛHΘ ipsi BΓA est æqualis. Simile igitur est ABΓ triangulum triangulo ΘΛH. Et perpendiculares ductæ sunt BΔ, ΛM; est igitur ut AΓ ad BΔ ita ΘH ad ΛM. Erat autem ut AΓ ad BΔ ita ΘH ad ZK, supponitur enim;

B, Z, menons les perpendiculaires BΔ, ZK, et que AΓ soit à BΔ comme ΘH est à ZK; je dis que le triangle ABΓ est équiangle avec le triangle ΘZH.

Car autour du triangle ΘZH décrivons un cercle dont ΘZH soit un segment (5.4); sur la droite ΘH, et au point Θ de cette droite, faisons l'angle HΘΛ égal à l'angle ΓAB; joignons ZΛ, ΛH, et menons la perpendiculaire ΛM. Puisque l'angle HZΘ est égal à l'angle ΘΛH, car ces angles sont dans le même segment de cercle (21.3), que HZΘ est égal à ΓBA, l'angle HΛΘ est donc égal à ΓBA. Mais l'angle ΛΘH est égal à l'angle BΛΓ; l'angle restant ΛHΘ est égal à l'angle restant BΓA; le triangle ABΓ est donc semblable au triangle ΘΛH (4.6). Mais on a mené les perpendiculaires BΔ, ΛM; AΓ est donc à BΔ comme ΘH est à ΛM (4 et 20. 6). Mais AΓ est à BΔ

γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $\Theta\text{H}$  πρὸς τὴν  $\Lambda\text{M}$  οὕτως ἡ  $\Theta\text{H}$  πρὸς τὴν  $\text{ZK}$ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $\text{ZK}$  τῇ  $\Lambda\text{M}$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $\text{ZK}$  τῇ  $\Lambda\text{M}$  παράλληλος· καὶ<sup>4</sup> ἡ  $\text{Z}\Lambda$  ἄρα τῇ  $\Theta\text{H}$  παράλληλος ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $\text{Z}\Lambda\Theta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Lambda\Theta\text{H}$ . ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ<sup>5</sup>  $\Lambda\Theta\text{H}$  τῇ ὑπὸ  $\text{B}\Lambda\Gamma$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ  $\text{Z}\Lambda\Theta$ <sup>6</sup> τῇ ὑπὸ  $\text{Z}\text{H}\Theta$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $\text{B}\Lambda\Gamma$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $\text{Z}\text{H}\Theta$  ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ<sup>7</sup> ἡ ὑπὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$  τῇ ὑπὸ  $\Theta\text{Z}\text{H}$  ἴση<sup>8</sup>. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\text{B}\Gamma\text{A}$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $\text{Z}\Theta\text{H}$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\text{Z}\Theta\text{H}$  τριγώνῳ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Εάν τρίγωνον μίαν ἔχη γωνίαν δεδομένην, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν<sup>1</sup> τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ὀρθογώνιον<sup>2</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς τετράγωνον λόγον ἔχη δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $\text{A}\text{B}\Gamma$  δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τὸ  $\text{A}$ , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\text{B}\text{A}$ ,  $\text{A}\Gamma$  πρὸς τὸ

et ut igitur  $\Theta\text{H}$  ad  $\Lambda\text{M}$  ita  $\Theta\text{H}$  ad  $\text{ZK}$ ; æqualis igitur est est  $\text{ZK}$  ipsi  $\Lambda\text{M}$ . Est autem et  $\text{ZK}$  ipsi  $\Lambda\text{M}$  parallela; et  $\text{Z}\Lambda$  igitur ipsi  $\Theta\text{H}$  parallela est; æqualis igitur est  $\text{Z}\Lambda\Theta$  angulus angulo  $\Lambda\Theta\text{H}$ . Sed ipse quidem  $\Lambda\Theta\text{H}$  ipsi  $\text{B}\Lambda\Gamma$  est æqualis, ipse autem  $\text{Z}\Lambda\Theta$  ipsi  $\text{Z}\text{H}\Theta$  est æqualis; et ipse  $\text{B}\Lambda\Gamma$  igitur ipsi  $\text{Z}\text{H}\Theta$  est æqualis. Est autem ipse  $\text{A}\text{B}\Gamma$  ipsi  $\Theta\text{Z}\text{H}$  æqualis; reliquus igitur  $\text{B}\Gamma\text{A}$  reliquo  $\text{Z}\Theta\text{H}$  est æqualis; æquiangulum igitur est  $\text{A}\text{B}\Gamma$  triangulum triangulo  $\text{Z}\Theta\text{H}$ .

## PROPOSITIO LXXX.

Si triangulum unum habeat angulum datum, et rectangulum sub lateribus datum angulum comprehendentibus ad quadratum ex reliquo latere rationem habeat datam; datum est triangulum specie.

Sit triangulum  $\text{A}\text{B}\Gamma$  datum habens angulum ad  $\text{A}$ , et ipsum sub  $\text{B}\text{A}$ ,  $\text{A}\Gamma$  ad ipsum ex  $\text{B}\Gamma$

comme  $\Theta\text{H}$  est à  $\text{ZK}$ , par supposition;  $\Theta\text{H}$  est donc à  $\Lambda\text{M}$  comme  $\Theta\text{H}$  est à  $\text{ZK}$ ;  $\text{ZK}$  est donc égal à  $\Lambda\text{M}$  (9. 5). Mais  $\text{ZK}$  est parallèle à  $\Lambda\text{M}$  (28. 1);  $\text{Z}\Lambda$  est donc parallèle à  $\Theta\text{H}$  (33. 1); l'angle  $\text{Z}\Lambda\Theta$  est donc égal à l'angle  $\Lambda\Theta\text{H}$  (29. 1). Mais l'angle  $\Lambda\Theta\text{H}$  est égal à l'angle  $\text{B}\Lambda\Gamma$ , et l'angle  $\text{Z}\Lambda\Theta$  est égal à l'angle  $\text{Z}\text{H}\Theta$  (21. 3); l'angle  $\text{B}\Lambda\Gamma$  est donc égal à l'angle  $\text{Z}\text{H}\Theta$ . Mais l'angle  $\text{A}\text{B}\Gamma$  est égal à l'angle  $\Theta\text{Z}\text{H}$ ; l'angle restant  $\text{B}\Gamma\text{A}$  est donc égal à l'angle restant  $\text{Z}\Theta\text{H}$  (32. 1); le triangle  $\text{A}\text{B}\Gamma$  est donc équiangle avec le triangle  $\text{Z}\Theta\text{H}$ .

## PROPOSITION LXXX.

Si un triangle a un angle donné, et si le rectangle sous les droites qui comprennent l'angle donné a une raison donnée avec le carré du côté restant, le triangle est donné d'espèce.

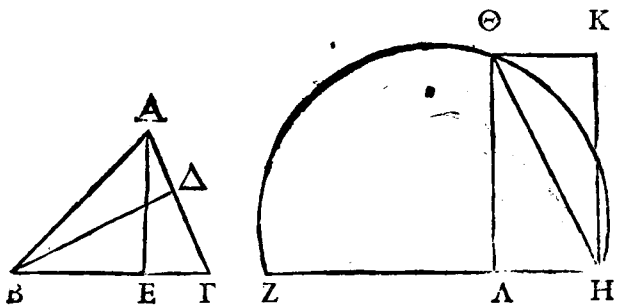
Soit le triangle  $\text{A}\text{B}\Gamma$  ayant un angle donné en  $\text{A}$ ; que le rectangle sous  $\text{B}\text{A}$ ,  $\text{A}\Gamma$

ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγον ἔχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δίδεται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει.

Ἠχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΑΕ, ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· δίδεται ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος

rationem habeat datam; dico datum esse ΑΒΓ triangulum specie.

Ducantur enim a punctis Α, Β ad ipsas ΒΓ, ΓΑ perpendiculares ΑΕ, ΒΔ. Quoniam igitur datus est ΒΑΔ angulus, est autem et ipse ΑΔΒ datus; datum est igitur ΑΔΒ trian-



ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθεῖς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ, ἐκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλασίον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ δοθεῖς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ ἄρα<sup>3</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. Ἐκκείσθω δὴ<sup>4</sup> τῇ θείσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τμήμα κύκλου<sup>5</sup> τὸ

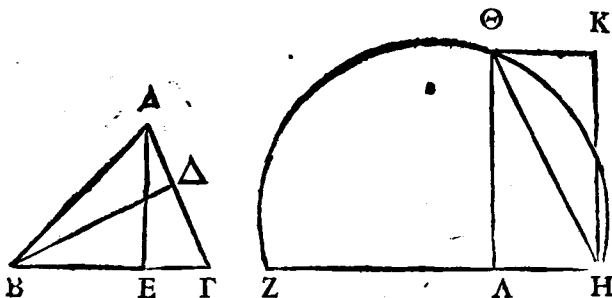
gulum specie; ratio igitur est ipsius ΑΒ ad ΒΔ data; quare et rectanguli sub ΒΑ, ΑΓ ad rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ ratio est data. Ipsi autem sub ΑΓ, ΒΔ æquale est ipsum sub ΒΓ, ΑΕ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ΑΒΓ; ratio igitur et ipsius sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum sub ΒΓ, ΑΕ data. Ipsius autem sub ΒΑ, ΑΓ ad ipsum ex ΒΓ ratio est data; et ipsius sub ΒΓ, ΑΕ igitur ad ipsum ex ΒΓ ratio est data; ipsius ΒΓ igitur ad ΑΕ ratio est data. Exponatur positione et magnitudine data recta ΖΗ, et describatur super ΖΗ seg-

ait une raison donnée avec le quarré de ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est donné d'espèce.

Car des points Α, Β menons à ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΑΕ, ΒΔ ( 12. 1 ). Puisque l'angle ΒΑΔ est donné, et que l'angle ΑΔΒ est aussi donné, le triangle ΑΔΒ sera donné d'espèce ( 40 ); la raison de ΑΒ à ΒΔ est donc donnée ( déf. 3 ); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΑΓ, ΒΔ est donc donnée ( 1. 6 ). Mais le rectangle sous ΒΓ, ΑΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΒΔ, car chacun de ces rectangles est double du triangle ΑΒΓ ( 41. 1 ); la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au rectangle sous ΒΓ, ΑΕ est donc donnée. Mais la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΓ au quarré de ΒΓ est donnée; la raison du rectangle sous ΒΓ, ΑΕ au quarré de ΒΓ est donc donnée ( 8 ); la raison de ΒΓ à ΑΕ est donc donnée ( 1. 6 ). Que la droite ΖΗ soit

ΖΟΗ, δεχόμενον<sup>6</sup> γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐν τῷ ΖΟΗ τμήματι γωνία· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΟΗ τμήμα. Ἡχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΚ. Καὶ πεποιήσθω ὥς ἡ

mentum circuli ΖΟΗ, capiens angulum æqualem ipsi ΒΑΓ; datus est autem ΒΑΓ angulus; datus igitur et in segmento ΖΟΗ angulus; positione igitur est ΖΟΗ segmentum. Ducatur a puncto Η ipsi ΖΗ ad rectos ipsa ΗΚ; positione igitur



ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ. Λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΖΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἐστὶ δοθέν<sup>7</sup> τὸ Η· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Κ. Ἡχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. Θέσει δὲ καὶ τὸ ΖΟΗ τμήμα· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. Ἐπιζεύχθωσαν δὲ<sup>8</sup> αἱ ΖΘ, ΘΗ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ<sup>9</sup> τὸ Θ σημεῖον δοθέν, καὶ ἐκεί-

est ΗΚ. Et fiat ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΗΚ. Ratio autem ipsius ΒΓ ad ΑΕ data; ratio igitur ipsius ΖΗ ad ΗΚ data. Data autem ΖΗ; data igitur et ΗΚ. Sed et positione, et est datum punctum Η; datum igitur punctum Κ. Ducatur per punctum Κ ipsi ΖΗ parallela ΚΘ; positione igitur est ΚΘ. Positione autem et ΖΟΗ segmentum; datum igitur Θ punctum. Jungantur autem ipsæ ΖΘ, ΘΗ, et ducatur perpendicularis ΘΛ; positione igitur est ΘΛ. Est autem et Θ punctum datum, et utrumque punctorum

donnée de position et de grandeur; sur ΖΗ décrivons un segment de cercle ΖΟΗ qui reçoive un angle égal à l'angle ΒΑΓ (33. 3). Mais l'angle ΒΑΓ est donné; l'angle dans le segment ΖΟΗ est donc donné; le segment ΖΟΗ est donc donné de position (déf. 8). Du point Η et sur ΖΗ menons la perpendiculaire ΗΚ (11. 1); la droite ΗΚ sera donnée de position (29). Faisons en sorte que ΒΓ soit à ΑΕ comme ΖΗ est à ΗΚ (12. 6). Puisque la raison de ΒΓ à ΑΕ est donnée, la raison de ΖΗ à ΗΚ est donnée. Mais ΖΗ est donné; la droite ΗΚ est donc donnée (2). Mais cette droite est donnée de position, et le point Η est donné; le point Κ est donc donné (27). Par le point Κ menons ΚΘ parallèle à ΖΗ (31. 1); la droite ΚΘ sera donnée de position. Mais le segment ΖΟΗ est donné de position (28); le point Θ est donc donné (25); Joignons ΖΘ, ΘΗ, et menons la perpendiculaire ΘΛ; la droite ΘΛ sera donnée de position (30). Mais le point Θ est donné, ainsi que



τερον τῶν  $Z, H$ · δίδεται ἄρα ἐκάστη τῶν  $\Theta Z, ZH, \Theta H$  τῇ θέσει καὶ τῇ μεγέθει· δίδεται ἄρα τὸ  $Z\Theta H$  τρίγωνον τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $AE$  οὕτως ἡ  $ZH$  πρὸς τὴν  $HK$ , ἴση δὲ ἡ  $HK$  τῇ  $\Lambda\Theta$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $B\Gamma$  πρὸς τὴν  $AE$  οὕτως ἡ  $ZH$  πρὸς τὴν  $\Theta\Lambda$ . Καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $Z\Theta H$ · ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Theta ZH$  τριγώνῳ. Δίδεται δὲ τὸ  $Z\Theta H$  τρίγωνον τῷ εἶδει· δίδεται ἄρα καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ εἶδει.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ  $A^1$ , λόγος δὲ ἔστω τοῦ ὑπὸ τῶν  $BA, A\Gamma$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma B^2$  δοθείς· λέγω ὅτι δίδεται τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\epsilon^3$  εἶδει.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία· ὅ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma B$ , ἐκείνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.  $\Omega$  δὲ ἐστὶ  $\epsilon^5$  μείζον τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Gamma B$ ,

$Z, H$ ; data est igitur unaquæque ipsarum  $\Theta Z, ZH, \Theta H$  positione et magnitudine; datum est igitur  $Z\Theta H$  triangulum specie. Et quoniam est ut  $B\Gamma$  ad  $AE$  ita  $ZH$  ad  $HK$ , æqualis autem  $HK$  ipsi  $\Lambda\Theta$ ; est igitur ut  $B\Gamma$  ad  $AE$  ita  $ZH$  ad  $\Theta\Lambda$ . Et est æqualis  $BA\Gamma$  angulus ipsi  $Z\Theta H$ ; æquiangulum igitur est  $AB\Gamma$  triangulum triangulo  $\Theta ZH$ . Datum est autem  $Z\Theta H$  triangulum specie; datum est igitur et  $AB\Gamma$  triangulum specie.

ALITER.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , datum habens angulum ad  $A$ , ratio autem sit ipsius sub  $BA, A\Gamma$  ad ipsum ex  $\Gamma B$  data; dico datum esse  $AB\Gamma$  triangulum specie.

Quoniam enim datus est  $BA\Gamma$  angulus; quo igitur majus est ipsum ex utràque simul  $BA\Gamma$  quam ipsum ex  $\Gamma B$ , illud spatium ad  $AB\Gamma$  triangulum rationem habet datam. Quo autem est majus ipsum ex utràque simul  $BA\Gamma$  quam ipsum

chacun des points  $Z, H$ ; chacune des droites  $\Theta Z, ZH, \Theta H$  est donc donnée de position et de grandeur (26); le triangle  $Z\Theta H$  est donc donné d'espèce. Et puisque  $B\Gamma$  est à  $AE$  comme  $ZH$  est à  $HK$ , et que  $HK$  est égal à  $\Lambda\Theta$  (34. 1); la droite  $B\Gamma$  est à  $AE$  comme  $ZH$  est à  $\Theta\Lambda$ . Mais l'angle  $BA\Gamma$  est égal à l'angle  $Z\Theta H$ ; le triangle  $AB\Gamma$  est donc équiangle avec le triangle  $\Theta ZH$  (79). Mais le triangle  $Z\Theta H$  est donné d'espèce; le triangle  $AB\Gamma$  est donc donné d'espèce.

AUTREMENT.

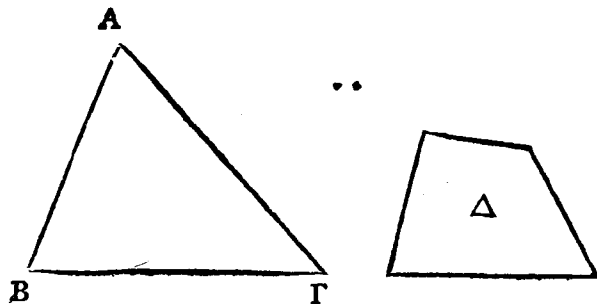
Soit le triangle  $AB\Gamma$  ayant l'angle  $A$  donné, que la raison du rectangle sous  $BA\Gamma$  au carré de  $\Gamma B$  soit donné; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est donné d'espèce.

Car puisque l'angle  $BA\Gamma$  est donné, l'espace dont le rectangle sous  $BA, A\Gamma$  surpasse le carré de  $\Gamma B$  a une raison donnée avec le triangle  $AB\Gamma$  (67). Soit  $\Delta$  l'espace dont le rectangle sous  $BA, A\Gamma$  surpasse le carré de  $\Gamma B$ ; la raison de l'espace



ἔστω τὸ  $\Delta$  χωρίον· λόγος ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> τοῦ  $\Delta$  χωρίου  
πρὸς τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον δοθείς. Τοῦ δὲ  $AB\Gamma$  τριγώ-  
νου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $BA, A\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς,  
διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνίαν· καὶ

ex  $B\Gamma$ , sit  $\Delta$  spatium; ratio igitur est spatii  $\Delta$   
ad  $AB\Gamma$  triangulum data. Trianguli autem  $AB\Gamma$   
ad ipsum sub  $BA, A\Gamma$  ratio est data, quia datus  
est  $BA\Gamma$  angulus; et igitur spatii  $\Delta$  ad ipsum



τοῦ  $\Delta$  ἄρα χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $BA, A\Gamma$  λό-  
γος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν  $BA, A\Gamma$  πρὸς  
τὸ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ  $\Delta$  ἄρα  
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συν-  
θέντι<sup>8</sup> ἄρα τοῦ  $\Delta$  χωρίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  
 $B\Gamma$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  λόγος<sup>9</sup> ἐστὶ δοθείς.  
Αλλὰ τὸ  $\Delta$  χωρίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  τὸ ἀπὸ  
συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  ἐστὶ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ  
συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  δο-  
θείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς  $BA\Gamma$  πρὸς τὴν  
 $B\Gamma$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ  
 $BA\Gamma$  γωνία· δέδοται ἄρα τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  
ᾧδε<sup>10</sup>.

sub  $BA, A\Gamma$  ratio est data. Ipsius autem sub  
 $BA, A\Gamma$  ad ipsum ex  $B\Gamma$  ratio est data; et ipsius  
 $\Delta$  igitur ad ipsum ex  $B\Gamma$  ratio est data; et  
componendo igitur spatii  $\Delta$  cum ipso ex  $B\Gamma$   
ad ipsum ex  $B\Gamma$  ratio est data. Sed spatium  $\Delta$   
cum ipso ex  $B\Gamma$  est ipsum ex utraque simul  
 $BA\Gamma$ ; ratio igitur ipsius ex utraque simul  $BA\Gamma$   
ad ipsum ex  $B\Gamma$  data; quare et utriusque si-  
mul  $BA\Gamma$  ad  $B\Gamma$  ratio est data. Et est datus  
 $BA\Gamma$  angulus; datum est igitur  $AB\Gamma$  triangulum  
specie.

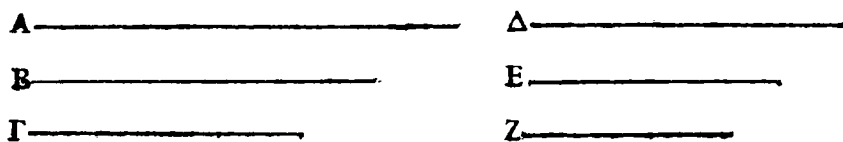
$\Delta$  au triangle  $AB\Gamma$  sera donnée. Mais la raison du triangle  $AB\Gamma$  au rectangle sous  $BA, A\Gamma$  est donnée, à cause que l'angle  $BA\Gamma$  est donné (66); la raison de l'espace  $\Delta$  au rectangle sous  $BA, A\Gamma$  est donc donnée (8). Mais la raison du rectangle sous  $BA, A\Gamma$  au carré de  $B\Gamma$  est donnée; la raison de l'espace  $\Delta$  au carré de  $B\Gamma$  est donc donnée (8); donc, par addition, la raison de l'espace  $\Delta$  avec le carré de  $B\Gamma$  au carré de  $B\Gamma$  est donnée (6). Mais l'espace  $\Delta$ , avec le carré de  $B\Gamma$ , est égal au carré de la somme des droites  $BA, A\Gamma$ ; la raison du carré de la somme des droites  $BA\Gamma$  au carré de  $B\Gamma$  est donc donnée; la raison de la somme des droites  $BA, A\Gamma$  à  $B\Gamma$  est donc donnée (54). Mais l'angle  $BA\Gamma$  est donné; le triangle  $AB\Gamma$  est donc donné d'espèce (45).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

PROPOSITIO LXXXI.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον οὔσαι τρισὶν εὐθεαῖς ἀνάλογον οὔσαις, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχωσιν· καὶ τὰς μέσας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔξουσιν· καὶ ἐὰν ἡ ἄκρα πρὸς τὴν ἄκραν λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἡ μέση πρὸς τὴν μέσην· καὶ ἡ λοιπὴ ἄκρα πρὸς τὴν<sup>1</sup> λοιπὴν ἄκραν λόγον ἔξει δεδομένον.

Τρεῖς γὰρ εὐθεῖαι ἀνάλογον οὔσαι αἱ A, B, Γ τρισὶν εὐθεαῖς ἀνάλογον οὔσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχέτωσαν, καὶ<sup>2</sup> τῆς μὲν A πρὸς τὴν Δ λόγος ἔστω<sup>3</sup> δοθείς, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος δοθείς<sup>4</sup>· λέγω ὅτι καὶ τῆς B πρὸς τὴν Ε λόγος ἔστί δοθείς.



Επεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ<sup>5</sup> τῆς μὲν A πρὸς τὴν Δ δοθείς<sup>5</sup>, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ δοθείς<sup>6</sup>· λόγος ἄρα

Quoniam enim ratio est ipsius quidem A ad Δ data, ipsius autem Γ ad Ζ data; ratio

PROPOSITION LXXXI.

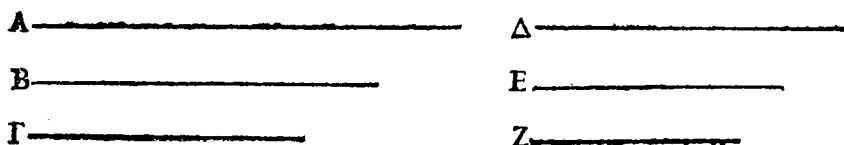
Si trois droites étant proportionnelles, et trois autres droites encore proportionnelles, les extrêmes ont entre eux une raison donnée, les moyens auront aussi entre eux une raison donnée; et si un extrême a une raison donnée avec un extrême, et si le moyen a une raison donnée avec le moyen, l'extrême restant aura une raison donnée avec l'extrême restant.

Les trois droites A, B, Γ étant proportionnelles; et les trois droites Δ, Ε, Ζ étant aussi proportionnelles, que les extrêmes aient entre elles une raison donnée, c'est-à-dire que la raison de A à Δ soit donnée, ainsi que la raison de Γ à Ζ; je dis que la raison de B à Ε est aussi donnée.

Car puisque la raison de A à Δ est donnée, ainsi que la raison de Γ à Ζ, la raison

τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. Ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

igitur ipsius sub Α, Γ ad ipsum sub Δ, Ζ data. Sed ipsi quidem sub Α, Γ æquale est ipsum ex Β, ipsi autem sub Δ, Ζ æquale est ipsum ex Ε; ratio igitur est ipsius ex Β ad ipsum ex Ε data; quare et ipsius Β ad ipsam Ε ratio est data.



Ἐστω δὲ πάλιν τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος δοθείς, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος<sup>7</sup> δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Sit autem rursus ipsius quidem Α ad Δ ratio data, ipsius autem Β ad Ε ratio data; dico et ipsius Γ ad Ζ rationem esse datam.

Ἐπεὶ γὰρ<sup>8</sup> τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ<sup>9</sup> δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ<sup>10</sup> τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. Καὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Α πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim ipsius quidem Α ad Δ, ipsius autem Β ad Ε ratio est data; ratio igitur est et ipsius ex Β ad ipsum ex Ε data. Sed ipsi quidem ex Β æquale est ipsum sub Α, Γ, ipsi autem ex Ε æquale est ipsum sub Δ, Ζ; ratio igitur est ipsius sub Α, Γ ad ipsum sub Δ, Ζ data. Et unius lateris Α ad unum latus Δ ratio est data. Et reliqui igitur Γ ad reliquum Ζ ratio est data.

de l'espace sous Α, Γ, à l'espace sous Δ, Ζ est donnée (70). Mais le carré de Β est égal au rectangle sous Α, Γ, et le carré de Ε est égal au rectangle sous Δ, Ζ (17. 6), ; la raison du carré de Β au carré de Ε est donc donnée; la raison de Β à Ε est donc aussi donnée (54).

De plus, que la raison de Α à Δ soit donnée, ainsi que la raison de Β à Ε; je dis que la raison de Γ à Ζ est donnée.

Car puisque la raison de Α à Δ est donnée, ainsi que la raison de Β à Ε, la raison du carré de Β au carré de Ε est donc aussi donnée (50). Mais le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β (17. 6); et le rectangle sous Δ, Ζ est égal au carré de Ε; la raison du rectangle sous Α, Γ au rectangle sous Δ, Ζ est donc donnée. Mais la raison d'un côté Α à un côté Δ est donnée; la raison du côté restant Γ au côté restant Ζ est donc aussi donnée (68).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβ'.

## PROPOSITIO LXXXII.

Εάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν<sup>ο</sup> ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς ἡν ἡ δευτέρα λόγον ἔχει δεδομένον, οὕτως ἡ τρίτη πρὸς ἡν ἡ τετάρτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω<sup>1</sup> ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν<sup>2</sup> ὡς ἡ Α πρὸς ἡν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἡν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_

Si quatuor rectæ proportionales sint ; erit ut prima ad quam secunda rationem habet datam, ita tertia ad quam quarta rationem habet datam.

Sint quatuor rectæ proportionales Α, Β, Γ, Δ, et sit ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad quam Β rationem habet datam, ita ipsam Γ ad quam Δ rationem habet datam.

E \_\_\_\_\_  
Z \_\_\_\_\_

Εστω γὰρ πρὸς ἡν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἡ Ε, καὶ πεποιήσω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Λόγος δὲ τῆς Β πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ὡς ἡ Α πρὸς τὴν

Sit enim ad quam ipsa Β rationem habet datam ipsa Ε, et fiat ut Β ad Ε ita Δ ad Ζ. Ratio autem ipsius Β ad Ε data; ratio igitur et ipsius Δ ad Ζ data. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, est autem et ut Β ad Ε ita Δ ad Ζ; ex æquo igitur est ut Α ad Ε

## PROPOSITION LXXXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, la première sera à celle avec laquelle la seconde a une raison donnée, comme la troisième est à celle avec laquelle la quatrième a la raison donnée.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre droites proportionnelles, c'est-à-dire, que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à celle avec laquelle Β a une raison donnée, comme Γ est à celle avec laquelle Δ a la raison donnée.

Car soit Ε la droite avec laquelle Β a une raison donnée, et faisons en sorte que Β soit à Ε comme Δ est à Ζ (16. 6). Mais la raison de Β à Ε est donnée; la raison de Δ à Ζ est donc donnée. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ, et Β est à Ε comme Δ est à Ζ; donc, par égalité, la droite Α est à la droite Ε comme Γ

Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν Ε πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον, ἡ δὲ Ζ πρὸς ἣν ἡ Δ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

ita  $\Gamma$  ad  $Z$ . Et est quidem ipsa  $E$  ad quam  $B$  rationem habet datam, ipsa autem  $Z$  ad quam ipsa  $\Delta$ ; est igitur ut  $A$  ad quam ipsa  $B$  rationem habet datam ita ipsa  $\Gamma$  ad quam ipsa  $\Delta$  rationem habet datam.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

## PROPOSITIO LXXXIII.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι οὕτως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιωνοῦν, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ἀνάλογον<sup>1</sup> πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τῶν<sup>2</sup> ἐξ ἀρχῆς τεσσάρων εὐθειῶν λόγον ἔχη δεδομένον, ἀνάλογον γίνεσθαι τὰς τέσσαρας εὐθείας· ἔσται ὡς ἡ τετάρτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως ἡ δευτέρα πρὸς ἣν ἡ πρώτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Si quatuor rectæ ita se habeant inter se ut tribus sumptis ex iis quibuscumque, et quartâ ipsis sumptâ proportionali, ad quam reliqua ipsarum ex principio quatuor rectarum rationem habet datam, proportionales fiant quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam ita secunda ad quam prima rationem habet datam.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ οὕτως ἔχουσιν πρὸς ἀλλήλας ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιωνοῦν τῶν<sup>3</sup> Α, Β, Γ, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης<sup>4</sup> τῆς Ε, πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον

Sint quatuor rectæ Α, Β, Γ, Δ ita se habentes inter se, ut tribus sumptis ex iis quibuscumque Α, Β, Γ, et quartâ ipsis acceptâ ipsâ Ε, ad quam ipsa Δ rationem ha-

est à  $Z$  (22. 5). Mais  $E$  est la droite avec laquelle  $B$  a une raison donnée, et  $Z$  est la droite avec laquelle  $\Delta$  a la raison donnée; la droite  $A$  est donc à la droite avec laquelle  $B$  a une raison donnée, comme  $\Gamma$  est à celle avec laquelle  $\Delta$  a la raison donnée.

## PROPOSITION LXXXIII.

Si quatre droites sont entre elles de manière qu'en ayant pris trois quelconques et une quatrième droite qui leur soit proportionnelle, et qui ait une raison donnée avec la droite restante des quatre premières, ces quatre dernières droites étant proportionnelles, la quatrième sera à la troisième comme la seconde est à celle avec laquelle la première a une raison donnée.

Soient quatre droites Α, Β, Γ, Δ qui soient entre elles de manière qu'en ayant pris trois quelconques Α, Β, Γ, et une quatrième Ε avec laquelle Δ ait une raison

ἔχει δεδομένον, ἀνάλογον εἶναι τὰς  $A, B, \Gamma, E$  εὐ-  
θείας· λέγω ὅτι ὡς ἡ  $\Delta$  πρὸς τὴν  $\Gamma$  οὕτως ἡ  $B$   
πρὸς ἡν ἡ  $A$  λόγον ἔχει δεδομένον.

bet datam; proportionales sint  $A, B, \Gamma, E$   
rectæ; dico ut  $\Delta$  ad  $\Gamma$  ita  $B$  ad quam  $A$  rationem  
habet datam.

$A$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  
 $\Gamma$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $E$  \_\_\_\_\_

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $\Gamma$   
πρὸς τὴν  $E$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, E$  ἴσον ἐστὶ τῷ  
ὑπὸ τῶν  $B, \Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς  $E$  πρὸς  
τὴν  $\Delta$  δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν  $A,$   
 $\Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $A, E$  δοθείς· τῷ δὲ ὑπὸ  
τῶν  $A, E$  ἐστὶν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν  $B, \Gamma$ · λόγος  
ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν  $A, \Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  
 $B, \Gamma$  ἐστὶ δοθείς· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $\Delta$  πρὸς τὴν  
 $\Gamma$  οὕτως ἡ  $B$  πρὸς ἡν ἡ  $A$  λόγον ἔχει δεδομένον.

Quoniam enim est ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $E$ ;  
ipsum igitur sub  $A, E$  æquale est ipsi sub  
 $B, \Gamma$ . Et quoniam ratio est ipsius  $E$  ad  $\Delta$  data;  
ratio est igitur et ipsius sub  $A, \Delta$  ad ipsum  
sub  $A, E$  data. Ipsi autem sub  $A, E$  est æquale  
ipsum sub  $B, \Gamma$ ; ratio igitur et ipsius sub  $A, \Delta$   
ad ipsum sub  $B, \Gamma$  est data; est igitur ut  $\Delta$  ad  
 $\Gamma$  ita ipsa  $B$  ad quam ipsa  $A$  rationem habet  
datam.

donnée, les droites  $A, B, \Gamma, E$  étant proportionnelles; je dis que  $\Delta$  est à  $\Gamma$   
comme  $B$  est à la droite avec laquelle  $A$  a une raison donnée.

Car puisque  $A$  est à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $E$ , le rectangle sous  $A, E$  est égal au  
rectangle sous  $B, \Gamma$  (16. 6). Mais la raison de  $E$  à  $\Delta$  est donnée; la raison du  
rectangle sous  $A, \Delta$  au rectangle sous  $A, E$  est donc donnée. Mais le rectangle  
sous  $A, E$  est égal au rectangle sous  $B, \Gamma$ ; la raison du rectangle sous  $A, \Delta$  au  
rectangle sous  $B, \Gamma$  est donc donnée (1. 6); la droite  $\Delta$  est donc à  $\Gamma$  comme  $B$   
est à la droite avec laquelle  $A$  a une raison donnée (56).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

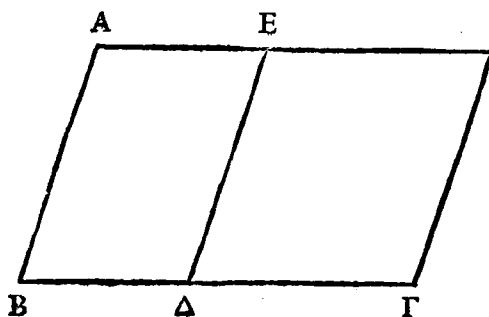
## PROPOSITIO LXXXIV.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνίᾳ, ἡ δὲ ἑτέρα τῆς ἑτέρας δοθείσης μείζων ᾗ· καὶ ἑκάτερα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $BF$  δοθὲν χωρίον περιέχωσαν τὸ  $AF$  ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ABF$ , ἡ δὲ  $FB$  τῆς  $BA$  δοθείσης μείζων ἔστω· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστὶν ἑκάτερα τῶν  $AB$ ,  $BF$ .

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, altera autem quam altera, datâ, major sit; et utraque ipsarum erit data.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $BF$  datum spatium comprehendant  $AF$  in dato angulo  $ABF$ , ipsa autem  $FB$  ipsâ  $BA$  datâ major sit; dico datam esse utramque ipsarum  $AB$ ,  $BF$ .



Επεὶ γὰρ ἡ  $FB$  τῆς  $BA$  δοθείσης μείζων ἐστὶ, δοθεῖσα ἔστω  $\Delta\Gamma$ . λοιπὴ ἄρα ἡ  $\Delta B$  τῇ  $BA$  ἴση ἐστί. Καὶ<sup>2</sup> συμπληρώσω τὸ  $A\Delta$  παραλληλόγραμμον<sup>3</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $B\Delta$ , λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς  $AB$  πρὸς τὴν  $B\Delta$  δοθείς. Δο-

Quoniam enim  $FB$  quam  $BA$  datâ major est, data sit  $\Delta\Gamma$ ; reliqua igitur  $\Delta B$  ipsi  $BA$  æqualis est. Et compleatur  $A\Delta$  parallelogrammum. Et quoniam æqualis est  $AB$  ipsi  $B\Delta$ ; ratio igitur est ipsius  $AB$  ad  $B\Delta$ . Data autem et  $AB\Delta$  an-

## PROPOSITION LXXXIV.

Si deux droites comprennent un espace donné dans un angle donné, et si l'une d'elles est plus grande que l'autre d'une droite donnée, chacune d'elles sera donnée.

Que les deux droites  $AB$ ,  $BF$  comprennent un espace donné  $AF$  dans un angle donné  $ABF$ , et que  $FB$  soit plus grand que  $BA$  d'une droite donnée; je dis que chacune des droites  $AB$ ,  $BF$  est donnée.

Car puisque  $FB$  est plus grand que  $BA$  d'une droite donnée, que cette donnée soit  $\Delta\Gamma$ , le reste  $\Delta B$  sera égal à  $BA$  (déf. 2). Achétons le parallélogramme  $A\Delta$ ; puisque  $AB$  est égal à  $B\Delta$ ; la raison de  $AB$  à  $B\Delta$  est donnée. Mais l'angle  $AB\Delta$  est



θεῖσα δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία· δέδοται ἄρα τὸ  $A\Delta$  τῷ εἶδει. Ἐπεὶ οὖν τὸ  $A\Gamma$  δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν τὴν  $\Delta\Gamma$  παραβέβληται ὑπερβάλλον εἶδει δεδομένη τῷ εἶδει τῷ  $A\Delta$ · δέδοται ἄρα<sup>5</sup> τὸ πλάτος τῆς ὑπερβολῆς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ  $B\Delta$ . Ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Delta\Gamma$ · καὶ ὅλη ἄρα ἡ  $B\Gamma$  δοθεῖσά ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $AB$  δοθεῖσα· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  δοθεῖσά ἐστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνίᾳ, ἥ δὲ συναμφοτέρος δοθεῖσα· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

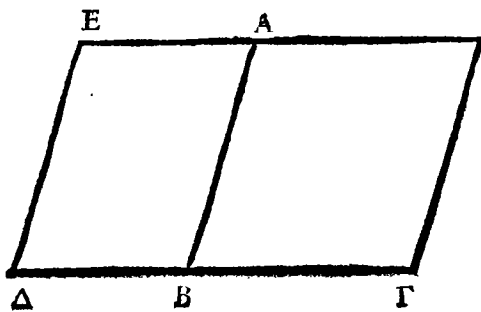
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δοθὲν χωρίον περιέχουσιν τὸ  $A\Gamma$  ἐν δεδομένη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

gulus ; datum est igitur ipsum  $A\Delta$  specie. Quoniam igitur ipsum  $A\Gamma$  datum ad datam  $\Delta\Gamma$  applicatum est excedens figurâ  $A\Delta$  datâ specie ; data est igitur latitudo excessûs ; data igitur est  $B\Delta$ . Sed et ipsa  $\Delta\Gamma$  ; et tota igitur  $B\Gamma$  data est. Est autem et  $AB$  data. Utraque igitur ipsarum  $AB$ ,  $B\Gamma$  data est,

PROPOSITIO LXXXV.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo , sit autem simul utraque data ; et utraque ipsarum erit data.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $B\Gamma$  datum spatium comprehendant  $A\Gamma$  in dato angulo  $AB\Gamma$ , et sit



$AB\Gamma$ , καὶ ἔστω συναμφοτέρος ἡ  $AB\Gamma$  δοθεῖσα· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  ἐστὶ δοθεῖσα<sup>2</sup>.

utraque simul  $AB\Gamma$  data ; dico et utramque ipsarum  $AB$ ,  $B\Gamma$  esse datam.

donné ;  $A\Delta$  est donc donné d'espèce. Et puisqu'à la droite donnée  $\Delta\Gamma$  on a appliqué l'espace donné  $A\Gamma$ , excédant d'une figure donnée d'espèce, la largeur de l'excès est donnée (59) ;  $B\Delta$  est donc donné. Mais  $\Delta\Gamma$  est donné aussi ; la droite entière  $B\Gamma$  est donc donnée. Mais  $AB$  est donné (3) ; chacune des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  est donc donnée.

PROPOSITION LXXXV.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si leur somme est donnée, chacune d'elles sera donnée.

Que les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  comprennent un espace donné  $A\Gamma$ , dans un angle donné  $AB\Gamma$ , et que la somme des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  soit donnée ; je dis que chacune des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  est donnée.

III.



Διήχθω γὰρ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΑ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΕ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐπεὶ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΕΒ τῷ εἶδει. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστι συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ, ἴση δὲ<sup>3</sup> ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν<sup>4</sup> ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν δοθέν τὸ ΑΓ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει δεδομένῳ τῷ εἶδει<sup>5</sup> ΕΒ· δέδοται τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. Ἀλλὰ καὶ συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι<sup>6</sup>. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δοθέν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, δοθέντι, μείζον ἢ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα<sup>1</sup>.

Car prolongeons ΓΒ vers Δ, faisons ΒΔ égal à ΑΒ, par le point Δ menons ΔΕ parallèle à ΒΑ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Puisque ΔΒ est égal à ΒΑ, et que l'angle ΑΒΔ est donné, car son angle de suite est donné, le parallélogramme ΕΒ sera donné d'espèce. Mais la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donnée, et ΑΒ est égal à ΒΔ; la droite ΔΓ est donc donnée (3). Et puisque l'espace donné ΑΓ est appliqué à la droite donnée ΔΓ défailant d'une figure ΕΒ donnée d'espèce, les largeurs du défaut sont données (58); les droites ΑΒ, ΒΔ sont donc données. Mais la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donnée; la droite ΒΓ est donc donnée; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est donc donnée (4).

## PROPOSITION LXXXVI.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si le carré de la plus grande surpasse le carré de la plus petite, d'une donnée, chacune d'elles sera donnée.

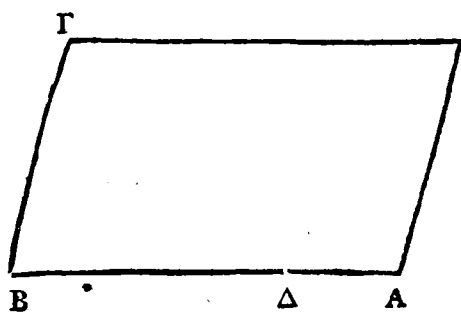
Producatur enim ΓΒ ad punctum Δ, et ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΒΔ, et per punctum Δ ipsi ΒΑ parallela ducatur ΔΕ, et compleatur ΑΔ. Et quoniam æqualis est ΔΒ ipsi ΒΑ, et est datus ΑΒΔ angulus, quia et qui est deinceps ipsi datus est; datum est igitur ipsum ΕΒ specie. Et quoniam data est simul utraque ΑΒΓ, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; data igitur est ΔΓ. Quoniam igitur datum ΑΓ ad datum ΔΓ applicatum est, deficiens figurâ ΕΒ datâ specie; datæ sunt latitudines defectûs; datæ igitur sunt ΑΒ, ΒΔ. Sed et simul utraque ΑΒΓ data est; et reliqua igitur ipsa ΒΓ data est; data igitur est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ.

## PROPOSITIO LXXXVI.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, ipsum autem ex majori quam ipsum ex minori, dato, majus sit; et utraque ipsarum erit data.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δοθέν περιεχέτωσαν χωρίον<sup>2</sup> τὸ  $ΑΓ$  ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $AB\Gamma$ , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς  $AB$ , δοθέντι, μείζον ἔστω τοῦ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$ <sup>3</sup>. λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ .

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $B\Gamma$  datum comprehendunt spatium  $ΑΓ$  in dato angulo  $AB\Gamma$ , quadratum autem ex  $AB$ , dato, majus sit quam quadratum ex  $B\Gamma$ ; dico datam esse utramque ipsarum  $AB$ ,  $B\Gamma$ .



Επεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$ , δοθέντι, μείζον ἔστιν, ἀφηρήσθω τὸ δοθέν, καὶ ἔστω<sup>4</sup> τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Delta$ . λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $A\Delta$  ἴσον ἐστὶ τῷ<sup>5</sup> ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Delta$  δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  δοθείς. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Delta$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  οὕτως ἢ  $\Delta B$  πρὸς τὴν<sup>6</sup>  $B\Gamma$ . λόγος ἄρα καὶ τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὴν<sup>7</sup>  $B\Gamma$  δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$ <sup>9</sup> δοθείς. Τῷ δὲ

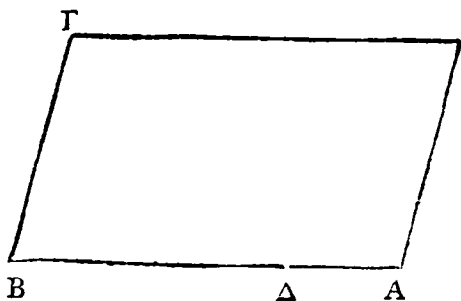
Quoniam enim ipsum ex  $AB$  quam ipsum ex  $B\Gamma$ , dato, majus est, auferatur datum, et sit ipsum sub  $AB$ ,  $B\Delta$ ; reliquum igitur sub  $BA$ ,  $A\Delta$  æquale est ipsi ex  $B\Gamma$ . Et quoniam datum est ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  (*vide lemma*), est autem et ipsum sub  $AB$ ,  $B\Delta$  datum; ratio igitur ipsius sub  $AB$ ,  $B\Delta$  ad ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  data. Et est ut ipsum sub  $AB$ ,  $B\Delta$  ad ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  ita  $\Delta B$  ad  $B\Gamma$ ; ratio igitur et ipsius  $\Delta B$  ad  $B\Gamma$  data; ratio igitur et ipsius ex  $\Delta B$  ad ipsum ex  $B\Gamma$  data. Ipsi autem ex  $\Gamma B$

Que deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  comprennent un espace donné  $ΑΓ$ , dans un angle donné  $AB\Gamma$ , et que le carré de  $AB$  soit plus grand que le carré de  $B\Gamma$  d'un espace donné; je dis que chacune des droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  est donnée.

Car puisque le carré de  $AB$  est plus grand que le carré de  $B\Gamma$  d'un espace donné, retranchons l'espace donné, et que cet espace soit le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Delta$ ; le rectangle restant sous  $BA$ ,  $A\Delta$  sera égal au carré de  $B\Gamma$  (2. 2). Et puisque le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  est donné, et que le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Delta$  est aussi donné, la raison du rectangle sous  $AB$ ,  $B\Delta$  au rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  sera donnée (1). Mais le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Delta$  est au rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  comme  $\Delta B$  est à  $B\Gamma$ ; la raison de  $\Delta B$  à  $B\Gamma$  est donc donnée; la raison du carré de  $\Delta B$  au carré de  $B\Gamma$  est donc donnée (50). Mais le rectangle sous  $BA$ ,  $A\Delta$  est égal

ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τὸ<sup>10</sup> ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ. λόγος ἄρα  
ἐστὶ<sup>11</sup> καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  
ΔΒ δοθείς· καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ  
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τε-  
τράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ<sup>12</sup> μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  
ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ<sup>13</sup> δοθείς. Ἀλλὰ τὸ

æquale est ipsum sub ΒΑ, ΑΔ ; ratio igitur et  
ipsius sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex ΔΒ data ; et  
ipsius quater igitur sub ΒΑ, ΑΔ ad ipsum ex  
ΔΒ data ; ratio igitur ipsius quater sub ΒΑ,  
ΑΔ cum ipso ex ΔΒ ad ipsum ex ΒΔ data.



τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ  
ὅτι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ<sup>13</sup>· λόγος  
ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ  
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμ-  
φοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὴν<sup>14</sup> ΔΒ δοθείς. Καὶ  
συνθέντι συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ μετὰ τῆς ΔΒ,  
τουτέστι δύο τῶν ΑΒ πρὸς τὴν<sup>15</sup> ΔΒ λόγος ἐστὶ  
δοθείς· καὶ μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ  
δοθείς. Τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς·  
καὶ<sup>16</sup> τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς.  
Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν<sup>17</sup> ΒΔ δοθείς,

Sed ipsum quater sub ΒΑ, ΑΔ cum ipso  
ex ΒΔ est ipsum ex utràque simul ΒΑ, ΑΔ ;  
ratio igitur et ipsius ex utràque simul ΒΑ,  
ΑΔ ad ipsum ex ΔΒ data ; ratio igitur et utrius-  
que simul ΒΑ, ΑΔ ad ΔΒ data. Et compo-  
nendo simul utriusque ΒΑ, ΑΔ cum ΔΒ, hoc  
est duarum ΑΒ ad ΔΒ ratio est data ; et unius  
igitur ipsius ΑΒ ad ΒΔ ratio est data. Ipsius  
autem ΔΒ ad ΒΓ ratio est data ; ipsius autem  
ΔΒ ad ΒΓ ratio est data ; et ipsius ΑΒ igitur  
ad ΒΓ ratio est data. Et quoniam ratio est ipsius

au carré de ΓΒ (2. 2) ; la raison du rectangle sous ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc  
donnée ; la raison de quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc  
donnée ; la raison de quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ avec le carré de ΔΒ au  
carré de ΒΔ est donc donnée. Mais quatre fois le rectangle sous ΒΑ, ΑΔ avec le  
carré de ΒΔ est égal au carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ (8. 2) ; la raison du  
carré de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ au carré de ΔΒ est donc donnée ; la raison  
de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ à ΔΒ est donc donnée ; donc, par addition, la  
raison de la somme des droites ΒΑ, ΑΔ avec ΔΒ, c'est-à-dire, de deux fois ΑΒ à ΒΔ  
est donnée (6) ; la raison d'une seule fois ΑΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais la raison  
de ΔΒ à ΒΓ est donnée ; la raison de ΑΒ à ΒΓ est donc donnée (8). Mais la raison de

καὶ ἔστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν<sup>18</sup>  $BA$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BA$  λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BA$  δοθεὶς. Δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BA$ , οὕτως γὰρ δοθέν ἀφήρηται· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  δοθεῖσα ἄρα ἡ  $AB$ . Καὶ ἔστι λόγος τῆς  $AB$  πρὸς τὴν<sup>19</sup>  $BF$  δοθεὶς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $BF$ .

$AB$  ad  $BA$  data, et est ut  $AB$  ad  $BA$  ita ipsum ex  $AB$  ad ipsum sub  $AB, BA$ ; ratio igitur et ipsius ex  $AB$  ad ipsum sub  $AB, BA$  data. Datum autem ipsum sub  $AB, BA$ , sic enim datum ablatum fuit; datum igitur et ipsum ex  $AB$ ; data igitur  $AB$ . Et est ratio ipsius  $AB$  ad  $BF$  data; data igitur et  $BF$ .

Λ Η Μ Μ Α.

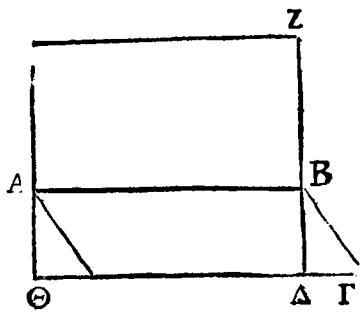
Πῶς δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ABF$  ὀρθογώνιον, ἀμβλείας ὑποκειμένης τῆς ὑπὸ  $ABF$  γωνίας;

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ  $B$  σημείου κάθετος ἡ  $BA$ · καὶ ἐκτελέσθω ἡ  $GA$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  $B\Theta A$  ὀρθογώνιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AA$  τῷ  $AG$ . Καὶ ἐκτελέσθω ἡ  $AB$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ κείσθω τῇ  $BF$

LEMMA.

Quomodo datum est rectangulum sub  $ABF$ , obtuso supposito  $ABF$  angulo?

Agatur a puncto  $B$  perpendicularis  $BA$ ; et producat  $GA$  ad punctum  $\Theta$ ; et compleatur  $B\Theta A$  rectangulum; æquale igitur est ipsum  $AA$  ipsi  $AG$ . Et producat  $AB$  ad punctum  $Z$ , et



ἴση ἡ  $BZ$ , καὶ συμπληρώσθω τὸ  $AZ$  ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ οὖν δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABF$  γωνία, ὑπόκειται

ponatur ipsi  $BF$  æqualis  $BZ$ , et compleatur  $AZ$  rectangulum. Quoniam igitur datus est  $ABF$  an-

$AB$  à  $BA$  est donnée, et  $AB$  est à  $BA$  comme le carré de  $AB$  est au rectangle sous  $AB, BA$  (1. 6); la raison du carré de  $AB$  au rectangle sous  $AB, BA$  est donc donnée. Mais le rectangle sous  $AB, BA$  est donné, car c'est ainsi qu'on a retranché l'espace donné (2); le carré de  $AB$  est donc donné; la droite  $AB$  est donc donnée. Mais la raison de  $AB$  à  $BF$  est donnée; la droite  $BF$  est donc donné.

LEMMA.

L'angle  $ABF$  étant supposé obtus, comment le rectangle sous  $AB, BF$  est-il donné?

Du point  $B$  menons la perpendiculaire  $BA$ , et prolongeons  $GA$  vers  $\Theta$ ; achevons le rectangle  $B\Theta A$ ; le rectangle  $AA$  sera égal à  $AG$ . Prolongeons  $AB$  vers  $Z$ ; faisons  $BZ$  égal à  $BF$ , et achevons le rectangle  $AZ$ . Puisque l'angle  $ABF$  est donné, par supposi-

γάρ, δοθεῖσα δὲ καὶ ἡ ὑπο  $AB\Delta$ , ὀρθὴ γάρ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπο  $\Delta B\Gamma$  δοθεῖσά ἐστι. Καὶ ὀρθὴ ἡ  $\Delta$ · λοιπὴ ἄρα ἡ  $\Gamma$  δοθεῖσά ἐστι. Δοθέν ἄρα τὸ  $B\Gamma\Delta$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς  $\Delta B$  πρὸς  $B\Gamma$  δοθείς. Ἰση δὲ ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $BZ$ · λόγος ἄρα καὶ τῆς  $\Delta B$  πρὸς τὴν  $BZ$  δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ  $B\Theta$  πρὸς τὴν  $ZA$  λόγος δοθείς. Ἰσον δὲ τὸ  $B\Theta$  τῷ  $AG$ · λόγος ἄρα τοῦ  $AG$  πρὸς τὸ  $AZ$  δοθείς. Καὶ δοθέν τὸ  $AG$ · δοθέν ἄρα καὶ τὸ  $AZ$ , τουτέστι τὸ ὑπο  $AB$ ,  $BZ$ , τουτέστι τὸ ὑπο  $AB$ ,  $B\Gamma$ .

gulus, supponitur enim, datus autem et angulus  $AB\Delta$ , rectus enim; reliquus igitur  $\Delta B\Gamma$  datus est. Et rectus ipse  $\Delta$ ; reliquus igitur  $\Gamma$  datus est. Datum igitur  $B\Gamma\Delta$  triangulum specie; ratio igitur ipsius  $\Delta B$  ad  $B\Gamma$  data. Æqualis autem  $B\Gamma$  ipsi  $BZ$ ; ratio igitur et ipsius  $\Delta B$  ad  $BZ$  data; quare et ipsius  $B\Theta$  ad  $ZA$  ratio data. Æquale autem  $B\Theta$  ipsi  $AG$ ; ratio igitur ipsius  $AG$  ad  $AZ$  data. Et datum  $AG$ ; datum igitur  $AZ$ , hoc est ipsum sub  $AB$ ,  $BZ$ , hoc est ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$ .

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.

Εάν δύο εὐθεῖαι δοθέν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένη γωνία, δύνηται δὲ ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μείζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα<sup>2</sup>.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι<sup>3</sup>  $AB$ ,  $B\Gamma$  δοθέν χωρίον περιέχουσιν τὸ  $AG$  ἐν δεδομένη γωνία τῇ ὑπὸ  $AB\Gamma$ , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς  $GB$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $BA$  δοθέντι, μεί-

## PROPOSITIO LXXXVII.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in dato angulo, possit autem altera alterâ, dato, majus est quam in ratione; et utraque isparum erit data.

Duæ enim rectæ  $AB$ ,  $B\Gamma$  datum spatium comprehendant  $AG$  in dato angulo  $AB\Gamma$ , ipsum autem ex  $B\Gamma$  ipso ex  $BA$ , dato, majus sit quam

tion, que l'angle  $AB\Delta$  est aussi donné, car il est droit, l'angle restant  $\Delta B\Gamma$  sera donné. Mais l'angle  $\Delta$  est droit; l'angle restant  $\Gamma$  est donc donné; le triangle  $B\Gamma\Delta$  est donc donné d'espèce; la raison de  $\Delta B$  à  $B\Gamma$  est donc donnée (40). Mais  $B\Gamma$  est égal à  $BZ$ ; la raison de  $\Delta B$  à  $BZ$  est donc donnée, et par conséquent la raison de  $B\Theta$  à  $ZA$ . Mais  $B\Theta$  est égal à  $AG$ ; la raison de  $AG$  à  $AZ$  est donc donnée. Mais  $AG$  est donné;  $AZ$  est donc donné, c'est - à - dire, le rectangle sous  $AB$ ,  $BZ$ , c'est - à - dire, le rectangle sous  $AB$ ,  $B\Gamma$ .

## PROPOSITION LXXXVII.

Si deux droites comprennent un espace donné, dans un angle donné, et si le carré de l'une est plus grand à l'égard du carré de l'autre, d'une donnée, qu'en raison, chacune d'elles sera donnée.

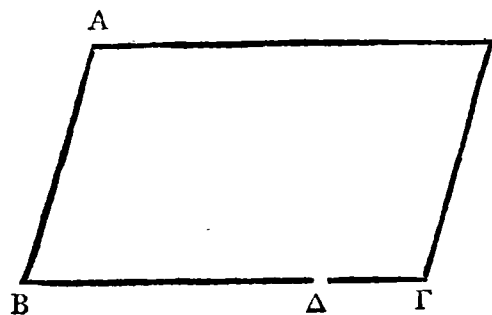
Que les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  comprennent un espace donné  $AG$ , dans un angle donné  $AB\Gamma$ , et que le carré de  $GB$  soit plus grand à l'égard du carré de  $BA$ ,

ζον ἔστω ἡ ἐν λόγῳ λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἐστὶ δοθεῖσα<sup>4</sup>.

Επεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓB$  τοῦ<sup>5</sup> ἀπὸ τῆς  $BA$ , δοθέντι, μείζον ἐστὶν ἡ ἐν λόγῳ, ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν, καὶ ἔστω<sup>6</sup> τὸ ὑπὸ τῶν  $ΓB$ ,  $BΔ$ . λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  λόγος ἐστὶ

in ratione; dico et utramque ipsarum  $AB$ ,  $BΓ$  esse datam.

Quoniam enim ipsum ex  $ΓB$  ipso ex  $BA$ , dato, majus est quam in ratione, auferatur datum, et sit ipsum sub  $ΓB$ ,  $BΔ$ ; reliqui igitur sub  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  ad ipsum ex  $AB$  ratio est data.



δοθείς. Καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ , ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΓB$ ,  $BΔ$  δοθέν<sup>7</sup> λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $ΓB$ ,  $BΔ$  δοθείς. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $ΓB$ ,  $BΔ$  οὕτως ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΔ$ . ὥστε καὶ τῆς  $AB$  πρὸς τὴν  $BΔ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $BΔ$  λόγος ἐστὶ δοθείς. Τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  λόγος ἐστὶ δοθείς<sup>8</sup>. καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ τοῦ τετραγώνου ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  πρὸς τὸ

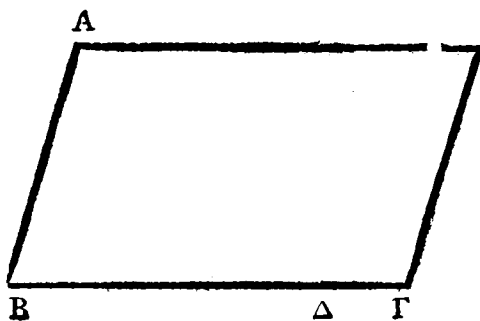
Et quoniam datum est ipsum sub  $AB$ ,  $BΓ$ , est autem et ipsum sub  $ΓB$ ,  $BΔ$  datum; ratio igitur est ipsius sub  $AB$ ,  $BΓ$  ad ipsum sub  $ΓB$ ,  $BΔ$  data. Ut autem ipsum sub  $AB$ ,  $BΓ$  ad ipsum sub  $ΓB$ ,  $BΔ$  ita  $AB$  ad  $BΔ$ ; quare et ipsius  $AB$  ad  $BΔ$  ratio est data; quare et ipsius ex  $AB$  ad ipsum ex  $BΔ$  ratio est data. Ipsius autem ex  $AB$  ad ipsum sub  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  ratio est data; et ipsius sub  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  igitur ad ipsum ex  $AB$  ratio est data; quare et ipsius quater sub  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  ad ipsum

d'une donnée, qu'en raison; je dis que chacune des droites  $AB$ ,  $BΓ$  est donnée.

Car puisque le carré de  $ΓB$  est plus grand à l'égard du carré de  $BA$ , d'une donnée, qu'en raison, retranchons la donnée, que cette donnée soit égale au rectangle sous  $ΓB$ ,  $BΔ$ ; la raison du rectangle restant sous  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  au carré de  $AB$  sera donnée (déf. 11). Et puisque le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est donné, et que le rectangle sous  $ΓB$ ,  $BΔ$  est aussi donné, la raison du rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  au rectangle sous  $ΓB$ ,  $BΔ$  sera donnée (1). Mais le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est au rectangle sous  $ΓB$ ,  $BΔ$  comme  $AB$  est à  $BΔ$  (1. 6); la raison de  $AB$  à  $BΔ$  est donc donnée; la raison du carré de  $AB$  au carré de  $BΔ$  est donc donnée (50). Mais la raison du carré de  $AB$  au rectangle sous  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  est donnée; la raison du rectangle sous  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  au carré de  $AB$  est donc donnée; la raison de quatre fois le rec-

ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ τετράκισ  
ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα<sup>9</sup> μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς  
τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἀλλὰ τὸ τε-  
τράκισ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ  
τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶ τῆς ΒΓ, ΓΔ· λόγος  
ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ,  
ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ συναμ-  
φοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δο-  
θείς· καὶ συνθέντι ἄρα τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ,

ex ΒΔ ratio est data ; ipsius quater sub ΒΓ,  
ΓΔ igitur cum ipso ex ΒΔ ad ipsum ex ΒΔ ratio  
est data. Sed ipsum quater sub ΒΓ, ΓΔ cum  
ipso ex ΒΔ est ipsum ex utrâque simul ΒΓ,  
ΓΔ ; ratio igitur est et ipsius ex utrâque simul ΒΓ,  
ΓΔ, ad ipsum ex ΒΔ data ; quare et utriusque  
simul ΒΓ, ΓΔ ad ΒΔ ratio est data ; et com-  
ponendo igitur ipsarum ΒΓ, ΓΔ et ipsius ΒΔ,



τουτέστι<sup>10</sup> δύο τῶν ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος  
ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ μιᾶς τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ  
λόγος ἐστὶ δοθείς. Ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν<sup>11</sup> ΒΔ  
οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ·  
καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  
ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ,  
ΒΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα

hoc est duarum ΓΒ ad ΒΔ ratio est data ;  
quare et unius ΓΒ ad ΒΔ ratio est data. Ut  
autem ΓΒ ad ΒΔ ita ipsum sub ΓΒ, ΒΔ ad ipsum  
ex ΒΔ ; et ipsius sub ΓΒ, ΒΔ igitur ad ipsum  
ex ΒΔ ratio est data. Datum autem sub ΓΒ,  
ΒΔ ; datum igitur et ipsum ex ΒΔ ; data igitur

tangle sous ΒΓ, ΓΔ au carré de ΒΔ est donnée (8) ; la raison de quatre fois le  
rectangle sous ΒΓ, ΓΔ avec le carré de ΒΔ au carré de ΒΔ est donc donnée (6).  
Mais quatre fois le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ avec le carré de ΒΔ est égal au carré  
de la somme des droites ΒΓ, ΓΔ (8. 2) ; la raison du carré de la somme des  
droites ΒΓ, ΓΔ au carré de ΒΔ est donc donnée ; la raison de la somme des  
droites ΒΓ, ΓΔ à ΒΔ est donc donnée (54) ; donc, par addition, la raison de la  
somme des droites ΒΓ, ΓΔ, ΒΔ, c'est-à-dire de deux fois ΓΒ à ΒΔ est donnée (6) ;  
la raison d'une fois ΓΒ à ΒΔ est donc donnée. Mais ΓΒ est à ΒΔ comme le rec-  
tangle sous ΓΒ, ΒΔ est au carré de ΒΔ (1. 6) ; la raison du rectangle sous ΓΒ,  
ΒΔ au carré de ΒΔ est donc donnée. Mais le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est donné ;



ἔστιν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι, τῆς γὰρ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθεὶς, καὶ δέδοται ἡ ΒΔ<sup>12</sup>. Καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ ΑΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ<sup>13</sup> γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ· ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

est ΒΔ ; quare et ΒΓ data est, ipsius enim ΒΓ ad ΒΔ ratio est data, et data est ΒΔ. Et est datum ΑΓ, et datus ΑΒΓ angulus ; data igitur est et ΑΒ ; utraque igitur ipsarum ΑΒ, ΒΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη'.

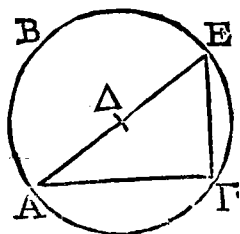
PROPOSITIO LXXXVIII.

Εὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθείᾳ γραμμῇ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducta fuerit, auferens segmentum quod capiat angulum datum, data est ducta magnitudine.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ ἤχθω<sup>1</sup> ἡ ΑΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα τὸ

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ ducta fuerit ipsa ΑΓ auferens segmentum ΑΕΓ



ΑΕΓ δεχόμενον γωνίαν ΑΕΓ<sup>2</sup> δοθεῖσαν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ δέδοται τῷ μεγέθει.

quod capiat angulum ΑΕΓ datum ; dico ΑΓ datam esse magnitudine.

le carré de ΒΔ est donc donné (2) ; la droite ΒΔ est donc donnée, et par conséquent la droite ΒΓ est donnée (2), car la raison de ΒΓ à ΒΔ est donnée ; mais ΒΔ est donné ; la droite ΑΓ est donc donnée, et l'angle ΑΒΓ est aussi donné ; la droite ΑΒ est donc donnée ; chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est donc donnée (57).

PROPOSITON LXXXVIII.

Si dans un cercle donné de grandeur, on mène une ligne droite qui retranche un segment comprenant un angle donné, la droite menée sera donnée de grandeur.

Dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons la droite ΑΓ qui retranche un segment ΑΕΓ comprenant un angle donné ΑΕΓ ; je dis que la droite ΑΓ est donnée de grandeur.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΕ. Δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΕ, ὀρθὴ γὰρ ἐστίν<sup>3</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἶδει. λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΕΑ τῷ μεγέθει, ἐπεὶ καὶ ὁ κύκλος δέδοται τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta ΑΔ producatur ad Ε, et jungatur ΓΕ. Datus igitur est ΑΓΕ angulus, rectus enim. Est autem et ΑΕΓ angulus datus; reliquus igitur ipse ΓΑΕ datus est. Datum est igitur ΑΓΕ triangulum specie; ratio igitur est ipsius ΕΑ ad ΑΓ data. Data igitur ΕΑ magnitudine, quia circulus datus est magnitudine; data igitur est ipsa ΑΓ magnitudine.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Εὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει· ἀπολήφεται τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΓ δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι ἀπολήφεται τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ,

## PROPOSITIO LXXXIX.

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducta fuerit data magnitudine; auferet segmentum quod capiet angulum datum.

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ recta linea ducatur ΑΓ data magnitudine; dico illam auferre segmentum capiens angulum datum.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta

Car prenons le centre du cercle (1. 3), qu'il soit Δ; joignons la droite ΑΔ, et prolongeons-la vers Ε, et joignons ΓΕ. L'angle ΑΓΕ sera donné, car il est droit (31. 3). Mais l'angle ΑΕΓ est donné (1); l'angle restant ΓΑΕ est donc donné (32. 1) (4); le triangle ΑΓΕ est donc donné d'espèce (40); la raison de ΕΑ à ΑΓ est donc donnée (déf. 3). Mais ΕΑ est donné de grandeur, parce que le cercle est donné de grandeur (déf. 5); la droite ΑΓ est donc donnée de grandeur (2).

## PROPOSITION LXXXIX.

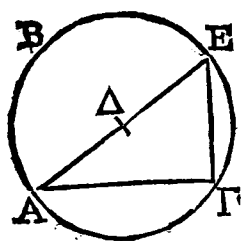
Si dans un cercle donné de grandeur, l'on mène une ligne droite donnée de grandeur, cette droite retranchera un segment qui comprendra un angle donné.

Dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons une ligne droite ΑΓ donnée de grandeur; je dis qu'elle retranchera un segment qui comprendra un angle donné.

Car prenons le centre du cercle, qu'il soit Δ (1. 3); joignons la droite ΑΔ,

καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ

ΑΔ producat<sup>r</sup> ad Δ, et jungatur ΓΕ. Et quoniam data est utraque ipsarum ΕΑ, ΑΓ, ratio



τέρα τῶν ΕΑ, ΑΓ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἶδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία.

igitur est ipsius ΕΑ ad ΑΓ data. Et est rectus ΑΓΕ angulus; datum est igitur ΑΓΕ triangulum specie; datus igitur est et ΑΕΓ angulus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO XC.

Εὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ἐπὶ τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον ληθῇ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην γωνίαν ποιούσα· δέδοται τὸ ἕτερον πέρας τῆς κλασθείσης.

Si in circuli dati positione circumferentiâ datum punctum sumptum fuerit, ab ipso autem ad circuli circumferentiam inflexa fuerit aliqua recta datum angulum faciens; data est altera extremitas inflexæ.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ εἰλήθῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον τὸ Β,

In circuli enim positione dati ΑΒΓ circumferentiâ sumatur datum punctum Β, a puncto

prolongeons-la vers Δ, et joignons ΓΕ. Puisque chacune des droites ΕΑ, ΑΓ est donnée, la raison de ΕΑ à ΑΓ est donnée (1). Mais l'angle ΑΓΕ est droit (31. 3); le triangle ΑΓΕ est donc donné d'espèce (44); l'angle ΑΕΓ est donc donné (déf. 3).

PROPOSITION XC.

Si dans la circonférence d'un cercle donné de position l'on prend un point donné, et si de ce point on mène une droite qui, étant brisée à la circonférence, fasse un angle donné, l'autre extrémité de la ligne brisée sera donnée.

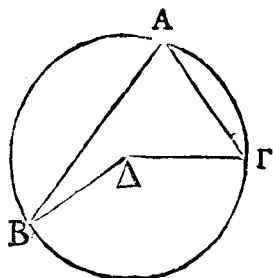
Dans la circonférence du cercle ΑΒΓ donné de position, prenons un point

ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου<sup>2</sup> κεκλίσθω εὐθεῖα ἡ ΒΑΓ  
 δεδομένην ποιῶσα γωνίαν τὴν ὑπὸ<sup>3</sup> ΒΑΓ. λέγω  
 ὅτι δέδοται τὸ Γ σημεῖον.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ<sup>4</sup> κέντρον τὸ Δ,  
 καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. Καὶ<sup>5</sup> ἐπεὶ δοθέν

autem B inflectatur recta ΒΑΓ datum faciens  
 angulum ΒΑΓ; dico datum esse punctum Γ.

Sumatur enim circuli centrum Δ, et jun-  
 gantur ΒΔ, ΔΓ. Et quoniam datum est utrum-



ἐστὶν ἐκάτερον τῶν Β, Δ, θέσει ἄρα<sup>6</sup> ἐστὶν ἡ ΒΔ.  
 Καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δο-  
 θεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>7</sup> ἡ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐπεὶ οὖν πρὸς  
 θέσει δεδομένη εὐθεία τῇ ΒΔ<sup>8</sup>, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ  
 σημείῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ<sup>9</sup> ἦκται ἡ ΔΓ δεδο-  
 μένην ποιῶσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΔΓ· δοθεῖσα ἄρα  
 ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ θέσει. Θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖς  
 καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δο-  
 θεῖσά ἐσττιν ἡ ΔΓ. Καὶ δοθέν τὸ Δ<sup>10</sup>. δοθέν ἄρα  
 ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον.

que punctorum Β, Δ, positione igitur est ipsa ΒΔ.  
 Et quoniam datus est ΒΑΓ angulus; datus igitur  
 est et ipse ΒΔΓ. Quoniam igitur ad datam posi-  
 tionem rectam ΒΔ, et ad punctum in eâ Δ, recta  
 ducta est ΔΓ datum faciens angulum ΒΔΓ; data  
 igitur est ΔΓ positione. Positione autem et  
 magnitudine datus et ΑΒΓ circulus; positione  
 igitur et magnitudine data est ΔΓ. Et datum  
 Δ punctum; datum igitur est punctum Γ.

donné B, et du point B menons une droite ΒΑΓ qui, étant brisée à la circonfé-  
 rence, fasse un angle donné ΒΑΓ; je dis que le point Γ est donné.

Car prenons le centre du cercle (1. 3), qu'il soit Δ, et joignons ΒΔ, ΔΓ.  
 Et puisque chacun des points Β, Δ est donné, la droite ΒΔ est donnée de posi-  
 tion (26). Et puisque l'angle ΒΑΓ est donné, l'angle ΒΔΓ sera donné (20. 3)  
 (2). Mais à la droite ΒΔ donnée de position, et au point Δ de cette droite, on a  
 mené la droite ΔΓ faisant un angle donné ΒΔΓ; la droite ΔΓ est donc donnée de  
 position (29). Mais le cercle ΑΒΓ est donné de position et de grandeur; la  
 droite ΔΓ est donc donnée de position et de grandeur (25 et 26). Mais le  
 point Δ est donné; le point Γ est donc donné (27).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4α.

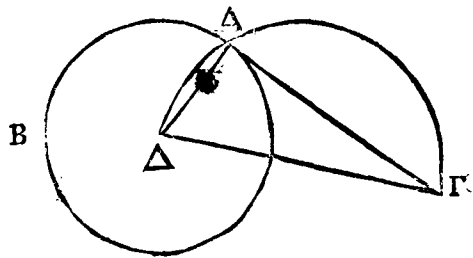
PROPOSITIO XCI.

Εάν ὑπὸ δεδομένου σημείου, τοῦ<sup>1</sup> θέσει δεδομένου κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Απὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Γ, θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑ εὐθεῖα δέδοται τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Si a dato puncto, positione datum circulum contingens recta ducatur; data est ducta positione et magnitudine.

A dato enim puncto Γ, positione datum circulum ΑΒ contingens recta ΓΑ ducatur; dico ΓΑ rectam datam esse positione et magnitudine.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ<sup>2</sup> κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ. Καὶ<sup>3</sup> ἐπεὶ δοθέν ἐστίν ἐκάτερον τῶν Δ, Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ. Καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΔΓ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ Α. Ἠχθω, καὶ ἐστω τὸ<sup>5</sup> ΔΑΓ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑΓ.

Sumatur enim centrum Δ circuli, et jungantur ipsæ ΔΑ, ΔΓ. Et quoniam datum est utrumque punctorum Δ, Γ; data igitur est ΔΓ. Et est rectus ΔΑΓ angulus; ergo super ΔΓ descriptus semicirculus transibit per punctum Α. Transeat et sit ipse ΔΑΓ; positione igitur est ipse ΔΑΓ. Positione autem et ΑΒ

PROPOSITION XCI.

Si, d'un point donné, on mène une droite qui touche un cercle donné de position, la droite menée est donnée de position et de grandeur.

Du point donné Γ, menons une droite ΓΑ qui touche le cercle ΑΒ donné de position; je dis que la droite ΓΑ est donnée de position et de grandeur.

Car prenons le centre Δ du cercle (1. 3), et joignons ΔΑ, ΔΓ. Puisque chacun des points Δ, Γ est donné, la droite ΔΓ est donnée (26). Mais l'angle ΔΑΓ est droit (18. 3); le demi-cercle décrit sur ΔΓ passera donc par le point Α (31. 3); qu'il y passe, et que ΔΑΓ soit ce demi-cercle. Le demi-cercle ΔΑΓ sera donné

Θέσει δὲ καὶ ὁ AB κύκλος δοθείς· δοθέν ἐστίν ἄρα τὸ A. Ὡστόσο καὶ τὸ Γ δοθέν ἐστὶ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

circulus datus; datum est igitur punctum A. Sed et punctum Γ datum est; data igitur est ipsa AG positione et magnitudine.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4β'.

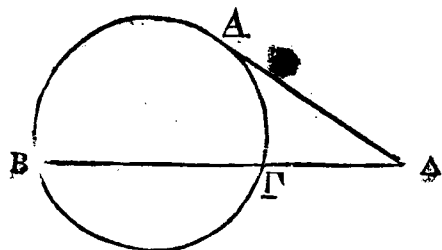
Εάν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληθῇ τι σημείον ἐκτὸς δοθέν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα· τὸ ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστὶ.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ABΓ, εἰ-

## PROPOSITIO XCII.

Si, circulo dato positione, sumatur aliquod punctum extrinsecus datum, a puncto autem in circulum ducatur aliqua recta; sub ductâ et rectâ inter punctum et convexam circumferentiam comprehensum rectangulum datum est.

Circulo enim dato positione ABΓ, sumatur



λήθω τι σημείον ἐκτὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σημείου διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΒ τέμνουσα τὸν κύκλον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τοῦ ABΓ κύκλου ἑφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΔΑ· δοθεῖσα ἄρα<sup>2</sup> ἐστὶν ἡ

aliquod punctum extrinsecus Δ, a puncto autem Δ ducatur aliqua recta ΔΒ secans circulum; dico datum esse ipsum sub ΒΔ, ΔΓ.

Ducatur a puncto Δ circulum ABΓ tangens recta ΔΑ; data igitur est ΔΑ positione et mag-

de position (déf. 6); Mais le cercle AB est donné de position; donc le point A est donné (25). Mais le point Γ est donné; la droite AG est donc donnée de position et de grandeur (26).

## PROPOSITION XCII.

Si hors d'un cercle donné de position, on prend un point donné, et si de ce point on mène à ce cercle une droite, le rectangle sous la droite menée, et la droite placée entre ce point et la circonférence convexe est donné.

Hors du cercle ABΓ donné de position, prenons un point Δ, et du point Δ menons une droite ΔΒ qui coupe le cercle; je dis que le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est donné.

Car du point Δ menons une droite ΔΑ qui touche le cercle ABΓ (17. 3); la droite ΔΑ sera donnée de position et de grandeur (91). Et puisque ΑΔ est donné,

ΔΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. Ἐπεὶ οὖν δοθεὶς ἔστιν ἡ ΑΔ· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ· δοθέν ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

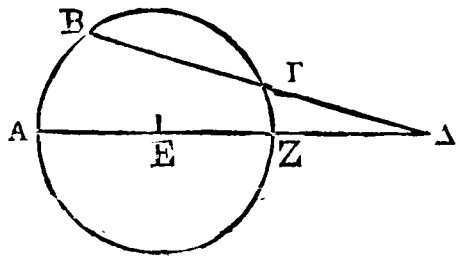
nitudine. Quoniam igitur data est ΑΔ; datum igitur et ipsum ex ΑΔ. Et est æquale ipsi sub ΒΔ, ΔΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΔ, ΔΓ.

ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Α· καὶ ἐπεὶ δοθέν ἔστιν ἑκάτερον τῶν Ε, Δ· διθείσα ἄρα ἔστιν ἡ ΕΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει<sup>1</sup>. Δέδοται δὲ καὶ ὁ ΑΒΖ κύκλος· δοθέν ἄρα ἔστιν ἑκάτερον τῶν Α, Ζ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· διθείσα

ALITER.

Sumatur centrum E circuli, et jungatur ΔΕ, et producat ad punctum Α; et quoniam datum est utrumque punctorum Ε, Δ; data igitur est ΕΔ positione et magnitudine. Datus est autem et ΑΒΖ circulus; datum igitur utrumque punctorum Α, Ζ. Est autem et punctum Δ



ἄρα ἔστιν ἑκατέρω τῶν ΑΔ, ΔΖ· δοθέν ἄρα ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ<sup>2</sup>. δοθέν ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

datum; data igitur est utraque ipsarum ΑΔ, ΔΖ; datum igitur est ipsum sub ΑΔ, ΔΖ. Et est æquale ipsum sub ΑΔ, ΔΖ ipsi sub ΒΔ, ΔΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΔ, ΔΓ.

le carré de ΑΔ est donné (52). Mais le carré de ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΔ, ΔΓ (36. 3); le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est donc donné.

AUTREMENT.

Prenons le centre Ε de ce cercle (1. 3), joignons la droite ΔΕ, et prolongeons cette droite vers Α. Puisque chacun des points Ε, Δ est donné, la droite ΕΔ est donnée de position et de grandeur (26). Mais le cercle ΑΒΖ est donné; chacun des points Α, Ζ est donc donné (2. 5). Mais le point Δ est donné; chacune des droites ΑΔ, ΔΖ est donc donnée (26); le rectangle sous ΑΔ, ΔΖ est donc donné. Mais le rectangle sous ΑΔ, ΔΖ est égal au rectangle sous ΒΔ, ΔΓ (36. 3); le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est donc donné.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47'.

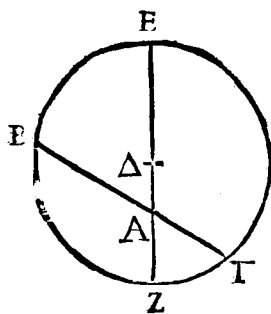
Εάν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληφθῇ τι σημείον ἐντὸς δοθέν, διὰ δὲ τοῦ σημείου διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστίν.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΒΓ, εἰλήφθω τι σημείον ἐντὸς τὸ Α δοθέν, διὰ δὲ τοῦ Α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΒ· λέγω ὅτι δεδομένον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

## PROPOSITIO XCIII.

Si, circulo dato positione, sumatur aliquod punctum intus datum, per punctum autem ducatur aliqua recta in circulum; ipsum sub ductæ segmentis comprehensum rectangulum datum est.

Circulo enim ΒΓ dato positione, sumatur aliquod punctum intus ipsum Α datum, per punctum autem Α ducatur aliqua recta ΓΒ; dico datum esse ipsum sub ΒΑ, ΑΓ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Ε. Ἐπεὶ οὖν δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Δ, Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. Θέσει δὲ καὶ ὁ ΓΒΖ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Ζ, Ε. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΖΑ,

Sumatur enim centrum Δ circuli, et juncta ΑΔ producat ad puncta Ζ, Ε. Quoniam igitur datum est utrumque ipsorum Δ, Α; positione igitur est ipsa ΔΑ. Positione autem et ΓΒΖ circulus; datum igitur est utrumque punctorum Ζ, Ε. Est autem et punctum Α datum; data igitur

## PROPOSITION XCIII.

Si dans un cercle donné de position, on prend un point donné, et si, par ce point, on mène une droite dans le cercle, le rectangle sous les segments de la droite menée est donné.

Dans le cercle ΒΓ donné de position, prenons un point donné Α, et par le point Α menons une droite ΓΒ; je dis que le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donné.

Car prenons le centre Δ de ce cercle (1. 3), joignons ΔΑ, et prolongeons cette droite vers les points Ζ, Ε. Puisque chacun des points Δ, Α est donné, la droite ΔΑ est donnée de position (26). Mais le cercle ΓΒΖ est donné; chacun des points Ζ, Ε est donc donné (25). Mais le point Α est donné; chacune des



ΑΕ· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΑ, ΑΕ. Καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν<sup>3</sup> ΒΑ, ΑΓ· δεθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

est utraque ipsarum ΖΑ, ΑΕ; datum igitur est ipsum sub ΖΑ, ΑΕ. Et est æquale ipsi sub ΒΑ, ΑΓ; datum igitur est et ipsum sub ΒΑ, ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48'.

PROPOSITIO XCIV.

Εὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθείᾳ γραμμῇ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθείσαν, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία δίχα τμηθῇ· συναμφοτέροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσιν πλευραὶ πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἔξουσιν δεδομένων, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ<sup>2</sup> δοθέν ἔσται.

Si in circulum datum magnitudine recta linea ducatur, auferens segmentum quod capiat angulum datum, et in segmento angulus bifariam secetur; simul utraque latera datum angulum comprehendunt ad ipsam quæ bifariam secat angulum rationem habebunt datam, et ipsum sub utrâque simul rectarum datum angulum comprehendunt, et sub abscissâ inferne ab ipsâ quæ bifariam secant angulum in circumferentiâ, datum erit.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθείᾳ ἤχθῃ ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα δεχόμενον γωνίαν δοθείσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ.

In circulum enim datum magnitudine ΑΒΓ recta ducatur ΒΓ, auferens segmentum quod comprehendat angulum datum ΒΑΓ, et secetur ΒΑΓ angulus bifariam rectâ ΑΔ; dico rationem esse

droites ΖΑ, ΑΕ est donc donnée (26); le rectangle sous ΖΑ, ΑΕ est donc donné. Mais ce rectangle est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ (35. 3); le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ est donc donné.

PROPOSITION XCIV.

Si, dans un cercle donné de grandeur, on mène une ligne droite qui re-tranche un segment comprenant un angle donné, et si l'angle dans le segment est partagé en deux parties égales, la somme des côtés qui comprennent l'angle donné, aura une raison donnée avec la droite qui partage l'angle en deux parties égales; et le rectangle sous la somme des droites qui comprennent l'angle donné, et sous le segment inférieur de la droite qui partage l'angle à la circonférence en deux parties égales, sera donné.

Car dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, menons la droite ΒΓ qui re-tranche un segment comprenant un angle donné ΒΑΓ, et partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΔ; je dis que la raison de la somme des droites

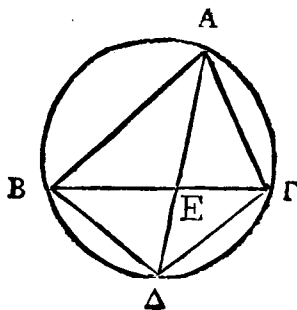


λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς, καὶ ὅτι δοθέν ἐστὶ τὸ ὑπο συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

Επεζεύχθω ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ διῆκται εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμήμα τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν δοθείσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· δοθείσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῷ μεγέθει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ δοθείσα ἐστὶ τῷ μεγέθει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα

utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ datam, et datum esse ipsum sub utraque simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ.

Jungatur ΒΔ. Et quoniam in circulum datum magnitudine ΑΒΓ ducta est recta ΒΓ, auferens segmentum ΒΑΓ quod capit angulum datum ΒΑΓ; data igitur est ΒΓ magnitudine. Propter eadem utique et ΒΔ data est magnitudine; ratio igitur est ipsius ΒΓ ad ΒΔ data. Et quoniam



τέτμηται τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὡς ἄρα συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση·

niam ΒΑΓ angulus bifariam sectus est rectâ ΑΔ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΕ ad ΕΓ; permutando igitur ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΑΓ ad ΓΕ; et ut igitur utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΓ ad ΓΕ. Et quoniam est æqualis ΒΑΕ angulus ipsi ΕΑΓ; est autem et ipse ΑΓΕ ipsi ΒΔΕ

BA, ΑΓ à la droite ΑΔ est donnée, et que le rectangle sous la somme des droites BA, ΑΓ et sous ΕΔ, est aussi donné.

Joignons ΒΔ. Puisque dans le cercle ΑΒΓ donné de grandeur, on a mené la droite ΒΓ, retranchant le segment ΒΑΓ qui comprend un angle donné ΒΑΓ, la droite ΒΓ sera donnée de grandeur (88). Par la même raison ΒΔ est donné de grandeur; la raison de ΒΓ à ΒΔ est donc donnée (1). Et puisque l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ, la droite ΒΑ sera à ΑΓ comme ΒΕ est à ΕΓ (3. 6); donc, par permutation, ΑΒ est à ΒΕ comme ΑΓ est à ΓΕ (16. 5); la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est donc à ΒΓ comme ΑΓ est à ΓΕ (12. 5). Et puisque l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΑΓ, et que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle

λοιπή ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>.  
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τρι-  
γώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΔ  
πρὸς τὴν ΔΒ. Αλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως  
συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐστὶν ἄρα ὡς  
συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς  
τὴν ΔΒ· ἐναλλάξ ἄρα<sup>5</sup> ὡς συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ  
πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ. Λόγος δὲ  
τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συ-  
ναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς.

Λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ  
καὶ τῆς ΕΔ δοθὲν ἐστὶ.

Επεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ  
ΔΕΒ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ  
οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς  
τὴν ΓΕ οὕτως ἐστὶ συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν  
ΒΓ· καὶ ὡς συναμφοτέρος ἄρα<sup>6</sup> ἡ ΒΑΓ πρὸς  
τὴν ΓΒ οὕτως ἐστὶν<sup>7</sup> ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἄρα  
ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ ἐστὶν ἴσον<sup>8</sup>  
τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ. Δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ,  
ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς  
ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

æqualis; reliquus igitur ΑΕΓ reliquo ΑΒΔ est  
æqualis; æquiangulum igitur est ΑΕΓ triangulum  
triangulo ΑΒΔ; est igitur ut ΑΓ ad ΓΕ ita ΑΔ  
ad ΔΒ. Sed ut ΑΓ ad ΓΕ ita utraque simul  
ΒΑΓ ad ΒΓ; est igitur ut utraque simul ΒΑΓ  
ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΒ; permutando igitur ut  
utraque simul ΒΑΓ ad ΑΔ ita ΒΓ ad ΒΔ. Ratio  
autem ipsius ΒΓ ad ΒΔ data; ratio igitur et  
utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ data.

Dico et ipsum sub utrâque simul ΒΑΓ et  
sub ipsâ ΕΔ datum esse.

Quoniam enim æquiangulum est ΑΕΓ trian-  
gulum triangulo ΔΕΒ; est igitur ut ΒΔ ad  
ΔΕ ita ΑΓ ad ΓΕ; ut autem ΑΓ ad ΓΕ ita  
est utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ. Et ut utra-  
que simul igitur ΒΑΓ ad ΓΒ ita est ΒΔ ad ΔΕ;  
ipsum igitur sub utrâque simul ΒΑΓ et sub ipsâ  
ΕΔ est æquale ipsi sub ΓΒ, ΒΔ. Datum autem  
ipsum sub ΓΒ, ΒΔ; datum igitur et ipsum  
sub utrâque simul ΒΑΓ et sub ipsâ ΕΔ.

BAE (21. 3), l'angle restant AEF sera égal à l'angle restant ABA (32. 1); le triangle AEF est donc équiangle avec le triangle ABA; donc AF est à FE comme AD est à AB (4. 6). Mais AF est à FE comme la somme des droites BA, AF est à BF; la somme des droites BA, AF est donc à BF comme AD est à AB; donc, par permutation, la somme des droites BA, AF est à AD comme BF est à BA. Mais la raison de BF à BA est donnée; la raison de la somme des droites BA, AF à AD est donc donnée.

Je dis aussi que le rectangle sous la somme des droites BA, AF et sous EA est donné.

Car puisque le triangle AEF est équiangle avec le triangle AEB (15. 1) (21. 3), la droite BA sera à AE comme AF est à FE (4. 6); mais AF est à FE comme la somme des droites BA, AF est à BF; la somme des droites BA, AF est donc à BF comme BA est à AE (11. 5); le rectangle sous la somme des droites BA, AF et sous EA est donc égal au rectangle sous BF, BA (16. 6). Mais le rectangle sous BF, BA est donné; le rectangle sous la somme des droites BA, AF et sous EA est donc donné.



τῆς AB πρὸς τὴν ΒΔ δοθεὶς, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν δοθεῖσα ἐστὶν<sup>4</sup> λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ δοθεὶς.

Καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΒΔ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἡ δὲ ΕΑ συναμφοτέρος ἐστὶν ἡ ΑΓΒ· ὡς ἄρα συναμφοτέρος ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ καὶ τῆς ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ. Δοθέν δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθέν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ καὶ τῆς ΖΔ.

Α Λ Λ Ω Σ.

Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ, ΔΖ. Καὶ<sup>1</sup> ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΔΓ· δύο δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΖΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία<sup>2</sup> τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἐστὶν ἴση, ἐπειδὴ περ ἐν κύ-

autem est ipsius AB ad ΒΔ data; utraque enim ipsarum data est; ratio igitur est utriusque simul ΑΓΒ ad ΓΔ data.

Et quoniam æquiangulum est ΕΑΒ triangulum triangulo ΖΒΔ; est igitur ut ΕΑ ad ΑΒ ita ΒΔ ad ΔΖ. Ipsa autem ΕΑ utraque simul est ΑΓΒ; ut igitur utraque simul ΑΓΒ ad ΑΒ ita ΒΔ ad ΔΖ; ipsum igitur sub utrâque simul ΑΓΒ et sub ipsâ ΖΔ æquale est ipsi sub ΑΒ, ΒΔ. Datum autem est ipsum sub ΑΒ, ΒΔ; data igitur utraque ipsarum; datum igitur est et ipsum sub utrâque simul ΑΓΒ et sub ipsâ ΖΔ.

Α L I T E R.

Producatur ΑΓ ad punctum Ζ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΓΖ, et jungantur ipsæ ΒΔ, ΔΓ, ΔΖ. Et quoniam æqualis est ipsa quidem ΒΑ ipsi ΓΖ, ipsa autem ΔΒ ipsi ΔΓ; duæ utique ΑΒ, ΒΔ duabus ΖΓ, ΓΔ æquales sunt utraque utrique. Et angulus ΑΒΔ angulo ΔΓΖ est æqua-

à ΒΔ. Mais la raison de ΑΒ à ΒΔ est donnée (1), car chacune d'elles est donnée (88); la raison de la somme des droites ΑΓ, ΓΒ à ΓΔ est donc donnée.

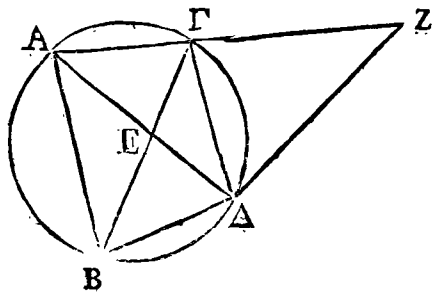
Puisque le triangle ΕΑΒ est équiangle avec le triangle ΖΒΔ, la droite ΕΑ sera à ΑΒ comme ΒΔ est à ΔΖ (4. 6). Mais ΕΑ est égal à la somme des droites ΑΓ, ΓΒ; la somme des droites ΑΓ, ΓΒ est donc à ΑΒ comme ΒΔ est à ΔΖ; le rectangle sous la somme des droites ΑΓ, ΓΒ et sous ΖΔ est donc égal au rectangle sous ΑΒ, ΒΔ (16. 6). Mais le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est donné; chacune de ces droites est donc donnée (88); le rectangle sous la somme des droites ΑΓ, ΓΒ et sous ΖΔ est donc donné.

A U T R E M E N T.

Prolongeons ΑΓ vers Ζ, faisons ΓΖ égal à ΒΑ, et joignons ΒΔ, ΔΓ, ΔΖ. Puisque ΒΑ est égal à ΓΖ, et ΔΒ égal à ΔΓ (26. et 29. 3), les deux droites ΑΒ, ΒΔ seront égales aux deux droites ΖΓ, ΓΔ, chacune à chacune. Mais l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle

κλω ἐστὶ τὸ  $AB\Delta\Gamma$  τετράπλευρον· βάσεις ἄρα ἢ  $A\Delta$  βάσει τῇ  $\Delta Z$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $\Gamma\Delta Z$  τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις<sup>3</sup> ἴσαι ἔσονται ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta Z\Gamma$ . Δοθεῖσα δὲ ἐστὶν

lis, quia in circulo est  $AB\Delta\Gamma$  quadrilaterum; basis igitur  $A\Delta$  basi  $\Delta Z$  est æqualis, et  $AB\Delta$  triangulum triangulo  $\Gamma\Delta Z$  est æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est  $B\Delta\Delta$  angulus ipsi  $\Delta Z\Gamma$ . Datus autem est  $B\Delta\Delta$  angu-



ἢ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$  γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>4</sup> ἢ ὑπὸ  $\Delta Z\Gamma$  γωνία. Ἐστὶ δὲ καὶ ἢ ὑπὸ  $\Delta AZ$  γωνία δοθεῖσα· δοθέν ἄρα τὸ  $A\Delta Z$  τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς  $ZA$  πρὸς τὴν  $A\Delta$  δοθείς. Ἡ δὲ  $AZ$  συναμφοτέρως ἐστὶν ἢ  $B\Delta\Gamma$ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν  $\Gamma Z$  τῇ  $BA$ · λόγος ἄρα ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς  $B\Delta\Gamma$  πρὸς τὴν  $A\Delta$  δοθείς.

lus; datus igitur est et angulus  $\Delta Z\Gamma$ . Est autem et  $\Delta AZ$  angulus datus; datum est igitur  $A\Delta Z$  triangulum specie; ratio igitur est ipsius  $ZA$  ad  $A\Delta$  data. Ipsa autem  $AZ$  utraque simul est  $B\Delta\Gamma$ , quia æqualis est  $\Gamma Z$  ipsi  $BA$ ; ratio igitur est utriusque simul  $B\Delta\Gamma$  ad  $A\Delta$  data.

Καὶ ὁμοίως τῷ πρότερον δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς  $B\Delta\Gamma$  καὶ τῆς  $E\Delta$  δοθέν ἐστὶ.

Et congruenter antecedenti ostendemus ipsum sub utraque simul  $B\Delta\Gamma$  et sub ipsâ  $E\Delta$  datum esse;

$\Delta\Gamma Z$  (13. 1), parce que le quadrilatère  $AB\Delta\Gamma$  est dans un cercle (22. 3); la base  $A\Delta$  est donc égale à la base  $\Delta Z$  (4. 1), le triangle  $AB\Delta$  égal au triangle  $\Gamma\Delta Z$  et les autres angles égaux aux autres angles, c'est-à-dire les angles sous les côtés égaux; l'angle  $B\Delta\Delta$  est donc égal à l'angle  $\Delta Z\Gamma$ . Mais l'angle  $B\Delta\Delta$  est donné; l'angle  $\Delta Z\Gamma$  est donc donné. Mais l'angle  $\Delta AZ$  est donné; le triangle  $A\Delta Z$  est donc donné d'espèce (40); la raison de  $ZA$  à  $A\Delta$  est donc donnée (déf. 3). Mais  $AZ$  est égal à la somme des droites  $BA$ ,  $A\Gamma$ , parce que  $\Gamma Z$  est égal à  $BA$ ; la raison de la somme des droites  $BA$ ,  $A\Gamma$  à  $A\Delta$  est donc donnée.

Nous démontrerons de la même manière que le rectangle sous la somme des droites  $BA$ ,  $A\Gamma$  et sous  $E\Delta$  est donné.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ. 7 ε΄.

## PROPOSITIO XCV.

Εάν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ἐπὶ τῆς διαμέτρου δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσβλήθῃ τις εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τῆς τομῆς τις<sup>1</sup> πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ, διὰ δὲ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου<sup>2</sup>, παράλληλος ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ· δοθέν ἐστι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστὶ.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ, ἐπὶ τῆς<sup>3</sup> διαμέτρου τῆς ΒΓ εἰλήφθω δοθέν σημεῖον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον προσβλήσθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα<sup>4</sup> ἡχθῶ ἡ ΑΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἡχθῶ ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι δοθέν ἐστὶ τὸ Ζ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ χωρίον δοθέν ἐστὶ.

Διήχθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. Ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΕΑ γωνία, ἡ ΘΑ διὰ-

Si in circuli dati positione diametro datum punctum sumatur, a puncto autem ad circumulum producatu quædam recta, et a sectione quædam ad rectos ducatur in productam, per punctum autem, in quo occurrit ipsa ad rectos circumferentiæ circuli, parallela ducatur productæ; datum est punctum in quo occurrit parallela diametro, et ipsum sub parallelis comprehensum rectangulum datum erit.

Circulo enim positione dato ΑΒΓ, in diametro ΒΓ sumatur datum punctum Δ, per punctum autem Δ ad circumulum producatu recta quædam ΔΑ, et a puncto Α ipsi ΔΑ ad rectos angulos recta ducatur ΑΕ; per punctum autem Ε ipsi ΑΔ parallela ducatur ΕΖ; dico datum esse punctum Ζ, et sub ΑΔ, ΕΖ spatium datum esse.

Producatur ΕΖ ad punctum Θ, et jungatur ΑΘ. Quoniam rectus est ΘΕΑ angulus, ipsa

## PROPOSITION' XCV.

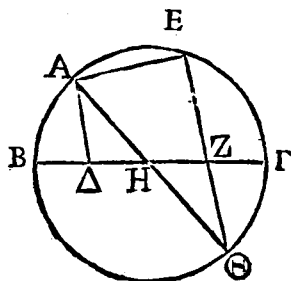
Si, dans le diamètre d'un cercle donné de position, on prend un point donné, si de ce point on mène une droite dans le cercle, si du point de section on mène une droite à angles droits sur la droite qui a été menée, si par le point où la droite à angles droits rencontre la circonférence du cercle, on mène une parallèle à la droite qui a été menée, le point où cette parallèle rencontrera le diamètre sera donné, et le rectangle sous les parallèles sera aussi donné.

Car dans le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ donné de position, prenons un point donné Δ, du point Δ, menons dans le cercle la droite ΔΑ, du point Α menons la droite ΑΕ à angles droits sur la droite ΔΑ, et par le point Ε menons la droite ΕΖ parallèle à ΑΔ; je dis que le point Ζ est donné, et que l'espace sous ΑΔ, ΕΖ est aussi donné.

Prolongeons ΕΖ vers Θ, et joignons ΑΘ. Puisque l'angle ΘΕΑ est droit, la

μετρός ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΔ$  κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $ΒΓ$  τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου διάμετρος<sup>5</sup>. τὸ  $Η$  ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ  $Η$ . Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ<sup>6</sup>  $Δ$  δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΔΗ$  τῇ μεγέθει. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν

$ΘΑ$  diameter est circuli  $ΑΒΔ$ . Est autem et ipsa  $ΒΓ$  circuli  $ΑΒΓ$  diameter; punctum  $Η$  igitur est centrum circuli  $ΑΒΓ$ ; datum igitur est punctum  $Η$ . Est autem et punctum  $Δ$  datum; data igitur est  $ΔΗ$  magnitudine. Et quoniam paral-



ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΕΘ$ , καὶ ἐστὶν ἴση ἡ  $ΘΗ$  τῇ  $ΗΑ$ . Ἰση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν  $ΔΗ$  τῇ  $ΗΖ$ , ἡ δὲ  $ΑΔ$  τῇ  $ΖΘ$ . δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ  $ΗΖ$ . Ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· ἑκατέρα ἄρα<sup>7</sup> τῶν  $ΗΖ$ ,  $ΗΔ$  δοθεῖσά ἐστι. Καὶ ἐστὶ δοθέν τὸ  $Η$ · δοθέν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $Ζ$ <sup>8</sup>.

Καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ<sup>9</sup> κύκλῳ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ  $ΑΒΓ$  εἰληπται σημεῖον τὸ  $Ζ$  δοθέν, καὶ διῆκται ἡ  $ΕΖΘ$ · δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΕΖ$ ,  $ΖΘ$ . Ἰση δὲ ἡ  $ΘΖ$  τῇ  $ΔΑ$ · δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΕΖ$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>10</sup>.

lela est  $ΑΔ$  ipsi  $ΕΘ$ , et æqualis est  $ΘΗ$  ipsi  $ΗΑ$ ; æqualis igitur est et ipsa  $ΔΗ$  quidem  $ΔΗ$  ipsi  $ΗΖ$ , ipsa vero  $ΑΔ$  ipsi  $ΖΘ$ ; data igitur et ipsa  $ΗΖ$ ; Sed et positione; utraque igitur ipsarum  $ΗΖ$ ,  $ΗΔ$  data est. Et est datum punctum  $Η$ , datum igitur est et punctum  $Ζ$ .

Et quoniam intra circulum datum positione  $ΑΒΓ$  sumptum est punctum  $Ζ$  datum, et ducta est ipsa  $ΕΖΘ$ ; datum igitur est ipsum sub  $ΕΖ$ ,  $ΖΘ$ . Æqualis autem ipsa  $ΘΖ$  ipsi  $ΔΑ$ ; datum igitur est ipsum sub  $ΑΔ$ ,  $ΕΖ$ . Quod oportebat ostendere.

droite  $ΘΑ$  sera un diamètre du cercle  $ΑΒΔ$  (31. 3). Mais  $ΒΓ$  est aussi un diamètre du cercle  $ΑΒΓ$ ; le point  $Η$  est donc le centre du cercle  $ΑΒΓ$ ; le point  $Η$  est donc donné. Mais le point  $Δ$  est aussi donné; la droite  $ΔΗ$  est donc donnée de grandeur (26). Mais  $ΑΔ$  est parallèle à  $ΕΘ$ , et  $ΘΗ$  est égal à  $ΗΑ$ ; donc  $ΔΗ$  est égal à  $ΗΖ$ , et  $ΑΔ$  égal à  $ΖΘ$  (29. 1) (4. 6); donc  $ΗΖ$  est donné. Mais ces droites sont données de position; chacune des droites  $ΗΖ$ ,  $ΗΔ$  est donc donnée. Mais le point  $Η$  est donné; le point  $Ζ$  est donc aussi donné (27).

Puisque dans un cercle  $ΑΒΓ$  donné de position, on a pris un point donné  $Ζ$ , et qu'on a mené une droite  $ΕΖΘ$ , le rectangle sous  $ΕΖ$ ,  $ΖΘ$  sera donné (93). Mais  $ΘΖ$  est égal à  $ΔΑ$ ; le rectangle sous  $ΑΔ$ ,  $ΕΖ$  est donc donné: ce qu'il fallait démontrer.



# HYPsiclis

## DE QUINQUE CORPORIBUS

### LIBER PRIMUS.

---

ΒΑΣΙΛΙΔΗΣ ὁ Τύριος, ὃ Πρώταρχε, παρα-  
γεννηθεὶς εἰς Αλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ  
πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συ-  
γένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς  
ἐπιδημίας χρόνον. Καί ποτε διελοντες τὸ  
ὑπὸ Ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως  
τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς  
τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον  
ἔχει ταῦτα πρὸς ἀλλήλα· ἔδοξαν ταῦτα μὴ  
ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Ἀπολλώνιον. Αὐτοὶ δὲ  
ταῦτα διακαθάραντες ἔγραψαν ὡς ἦν ἀκούειν

Basilides Tyrius, Protarche, cum venisset  
Alexandriam, et commendatus fuisset patri nos-  
tro ob mathematicæ familiaritatem, versatus est  
cum eo multum peregrinationis tempore. Et ali-  
quando expendentes id quod ab Apollonio scrip-  
tum est de comparatione dodecaedri et icosaedri  
in eâdem sphaerâ descriptorum, scilicet quam  
rationem habeant illa inter se, existimaverunt  
ea non recte descripta fuisse ab Apollonio. Illi  
autem hæc purgantes scripserunt, ut audiveram

## LE PREMIER LIVRE

### DES CINQ CORPS D'HYPsicLE.

---

Lorsque Basilide de Tyr, cher Protarque, vint à Alexandrie, il fut recommandé à mon père, à cause qu'ils étaient l'un et l'autre très-versés dans les sciences mathématiques; il eut beaucoup de conversations avec lui pendant tout le temps de son voyage. Ayant disserté plusieurs fois ensemble sur ce qu'Apollonius avait écrit sur la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre, décrits dans une même sphère, c'est-à-dire sur la raison que ces solides ont entre eux, ils furent d'avis qu'Apollonius était en cela tombé dans l'erreur; ils rectifièrent, ainsi que je l'ai appris de mon père, ce que Apollonius avait écrit sur ce sujet. Mais dans



τοῦ πατρός. Εγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἐτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδομένῳ, καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου· καὶ μεγάλως ἐψύχαγωγήθην ἐπὶ τῇ προβλήματι ζητήσαι. Τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται· τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος, ἔκρινα προσφωνῆσαί σοι, διὰ τὴν ἐν ἅπασιν μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίας προκοπὴν, ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθισόμενα· διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν Πατέρα συνήθειαν, καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὐνοίαν, εὐμενῶς ἀκουσμένῳ τῆς πραγματείας. Καίρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἀρχεσθαι.

ex Patre. Ego autem postea incidi in alium librum ab Apollonio editum, et continentem demonstrationem accuratam rei propositæ; et valde oblectatus sum ob problematis indagacionem. Quod quidem ab Apollonio editum est, licet omnibus illud considerare, etenim circumfertur. Quod autem a nobis visum est postea scribere studiose, quantum videri licet, id dedicabo tibi, propter tuos in omnibus mathematicis, maxime autem in geometriâ progressus, perite iudicaturò quæ dixerò; propter quoque tuam cum Patre consuetudinem, et tuam erga nos benevolentiam, benigne audituro hanc tractacionem. Sed jam tempus est proœmium finiendi, opus vero aggrediendi.

la suite, je tombai sur un autre livre qu'Apollonius a mis au jour, et qui renferme une démonstration exacte de ce qui était proposé; ce qui me fit beaucoup de plaisir. Chacun peut examiner le livre publié par Apollonius, puisqu'il est entre les mains de tout le monde. Je te dédie ce que j'ai jugé à propos d'écrire dans la suite sur ce sujet; ce que j'ai fait avec soin, comme on peut le voir. Je te fais cette dédicace, parce qu'à cause des progrès que tu as faits dans les sciences mathématiques, et principalement dans la géométrie, tu jugeras sainement mon écrit; et encore parce que l'amitié qui te liait avec mon père, et ta bienveillance pour moi, feront que tu me liras avec bénignité. Mais il est temps de finir, et de commencer mon ouvrage.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰσὼς κύκλος ὁ  $ABΓ$ , καὶ ἐν τῷ  $ABΓ$  κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ  $ΒΓ$ , καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ  $Δ$ , καὶ ἐπὶ τὴν  $BE$  κάθετος ἤχθω ἡ  $ΔΕ$ , καὶ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας τῆς  $ΔΕ$  εὐθεῖα ἡ  $AEZ$ . λέγω ὅτι ἡ  $ΔΕ$  ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου πλευρὰς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΔΓ$ ,  $ΓΖ$ , καὶ κείσθω τῇ  $EZ$  ἴση ἡ  $HE$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $H$  ἐπὶ τὸ  $Γ$  ἐπεζεύχθω ἡ  $ΗΓ$ . Επεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς  $BZΓ$  περιφερείας, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας

PROPOSITIO I.

Quæ a centro circuli alicujus ad latus pentagoni in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque simul et ipsius ex centro circuli et lateris decagoni in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus  $ABΓ$ , et in  $ABΓ$  circulo pentagoni æquilateri latus  $ΒΓ$ , et sumatur centrum  $Δ$  circuli, et ad  $BE$  perpendicularis ducatur  $ΔΕ$ , et producat in directum ipsi  $ΔΕ$  recta  $AEZ$ ; dico  $ΔΕ$  dimidiam esse lateris hexagoni et lateris decagoni, in eodem circulo descriptorum.

Jungantur enim ipsæ  $ΔΓ$ ,  $ΓΖ$ , et ponatur ipsi  $EZ$  æqualis ipsa  $HE$ , et a puncto  $H$  ad  $Γ$  ducatur  $ΗΓ$ . Quoniam quintupla est totius circuli circumferentia circumferentiæ  $BZΓ$ , et est quidem totius circuli circumferentiæ dimidia ipsa  $ΑΓΖ$ , ipsius

PROPOSITION I.

La perpendiculaire menée du centre d'un cercle au côté du pentagone décrit dans ce même cercle, est égale à la moitié de la somme du rayon et du côté du décagone, ce rayon et ce côté étant décrits dans la circonférence du même cercle.

Soit le cercle  $ABΓ$ ; dans le cercle  $ABΓ$  décrivons le côté  $ΒΓ$  du pentagone équilatéral; prenons le centre  $Δ$  du cercle; menons  $ΔΕ$  perpendiculaire à  $BE$ , et menons la droite  $AEZ$  dans la direction de  $ΔΕ$ ; je dis que  $ΔΕ$  est la moitié de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces deux polygones étant décrits dans le même cercle.

Car joignons  $ΔΓ$ ,  $ΓΖ$ , faisons  $HE$  égal à  $EZ$ , et du point  $H$  menons au point  $Γ$  la droite  $ΗΓ$ . Puisque la circonférence du cercle entier est quintuple de l'arc  $BZΓ$ , que l'arc  $ΑΓΖ$  est la moitié de la circonférence du cercle entier, et que



ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

teri decagoni; ipsa ΔΕ igitur dimidia est et lateris hexagoni et lateris decagoni, in eodem circulo descriptorum. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Φανερόν δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Evidens utique ex decimi tertii libri theorematibus rectam quæ ex centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse ipsius ex centro circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Idem circulus comprehendit et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eadem sphaerâ descriptorum.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγεγραφομένῳ πέντε σχημάτων σύγκρισις· ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγ-

Hoc autem conscribitur quidem ab Aristæo in inscripto de quinque figurarum comparatione; ab Apollonio autem in secundâ editione com-

la droite ΔΕ est donc égale à la moitié de la somme du côté de l'hexagone et du côté du décagone, ces polygones étant décrits dans un même cercle, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il est évident, d'après les théorèmes du livre XIII (12. 13) que la perpendiculaire menée du centre du cercle au côté du triangle équilatéral, est la moitié du rayon du cercle.

PROPOSITION II.

Le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosàèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère.

Cela est écrit par Aristée, dans le livre de la comparaison des cinq corps, et par Apollonius, dans la seconde édition de la comparaison du dodécaèdre

κρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου ἐπιφάνειαν οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· διὰ δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσάεδρου τρίγωνον. Γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσάεδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προγραφέντος τοῦδε.

Εὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἀπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτείνουσιν εὐθείας, πενταπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ τετραγώνου.

parationis dodecaedri cum icosaedro; quod est ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita et ipsum dodecaedrum ad icosaedrum; quia eadem est perpendicularis a centro sphaerae ad dodecaedri pentagonum et ad icosaedri triangulum. Ostendendum est autem et a nobis metipsis eundem circulum comprehendere et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum, in eadem sphaera descriptorum, hoc praemisso.

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur, quadratum ex latere pentagoni, et quadratum ex recta duo latera pentagoni subtendente quintupla erunt quadrati ex ipsa quae est ex circuli centro.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ΑΒΓ circulo pentagoni latus sit ΑΓ, et sumatur centrum Δ circuli, et ad ΑΓ perpendicularis ΔΖ, et producat ad puncta Β, Ε, et jungatur ΑΒ; dico quadrata ex ΒΑ, ΑΓ quintupla esse quadrati ex ΔΕ.

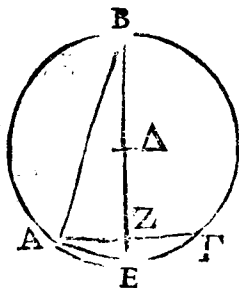
avec l'icosaèdre, où il fait voir que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le dodécaèdre est à l'icosaèdre, parce que la perpendiculaire menée du centre de la sphère au pentagone du dodécaèdre, est la même que la perpendiculaire menée au triangle de l'icosaèdre. Nous démontrerons que le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre, et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère, après avoir exposé ce qui suit :

Si dans un cercle on décrit un pentagone équilatéral, la somme des carrés du côté du pentagone, et de la droite qui soutend deux côtés du pentagone, est quintuple du carré du rayon de ce cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, que ΑΓ soit le côté du pentagone décrit dans le cercle ΑΒΓ, prenons le centre Δ de ce cercle, menons ΔΖ perpendiculaire à ΑΓ, prolongeons ΔΖ vers les points Β, Ε, et joignons ΑΒ; je dis que la somme des carrés des droites ΒΑ, ΑΓ est quintuple du carré de ΔΕ.

Επιζεύχθω ἡ ΑΕ· δωδεκαγώνου ἄρα ἡ ΑΕ.  
Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, τετραπ-  
λάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΔ.  
Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ,

Jungatur ΑΕ; dodecagoni igitur latus ipsa ΑΕ.  
Et quoniam dupla est ΒΕ ipsius ΕΔ, quadru-  
plum igitur ipsum ex ΒΕ ipsius ex ΕΔ. Ipsi  
autem ex ΒΕ æqualia sunt ipsa ex ΒΑ, ΑΕ;



ΑΕ· τετραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΕ τοῦ  
ἀπὸ ΕΔ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΑΒ,  
ΑΕ καὶ ΕΔ τοῦ ἀπὸ ΕΔ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ,  
ΕΑ ἴσα τῷ ἀπὸ ΑΓ· πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ  
ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΔ.

quadrupla igitur ipsa ex ΒΑ, ΑΕ ipsius ex ΕΔ;  
quintupla igitur ipsa ex ΑΒ, ΑΕ et ΕΔ ipsius ex  
ΕΔ. Ipsa autem ex ΔΕ, ΕΑ æqualia ipsi ΑΓ;  
quintupla igitur sunt ipsa ex ΒΑ, ΑΓ ipsius  
ex ΕΔ.

Τούτου δεδειγμένου, δεικτέον ὅτι ὁ αὐτὸς  
κύκλος λαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεν-  
τάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν  
εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Hoc ostenso, ostendendum est eundem cir-  
culum comprehendere et dodecaedri pentago-  
num et icosaedri triangulum, in eadem sphærâ  
descriptorum.

Εκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ,  
καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκά-  
εδρόν τε καὶ εἰκοσαέδρον, καὶ ἔστω ἐν μὲν τὸ

Exponatur sphæræ diameter ΑΒ, et descri-  
batur in eadem sphærâ et dodecaedrum et  
icosaedrum, et sit unum quidem dodecaedri

Car joignons ΑΕ; la droite ΑΕ sera le côté du dodécagone. Et puisque ΒΕ est double de ΕΔ, le quarré de ΒΕ sera quadruple du quarré de ΕΔ (20. 6). Mais la somme des quarrés des droites ΒΑ, ΑΕ est égale au quarré de ΒΕ; la somme des quarrés des droites ΒΑ, ΑΕ est donc quadruple du quarré de ΕΔ; la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΑΕ et ΕΔ est donc quintuple du quarré de ΕΔ. Mais la somme des quarrés des droites ΔΕ, ΕΑ est égale au quarré de ΑΓ (10. 13); la somme des quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ est donc quintuple du quarré de ΕΔ.

Cela étant démontré, il faut démontrer que le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère.

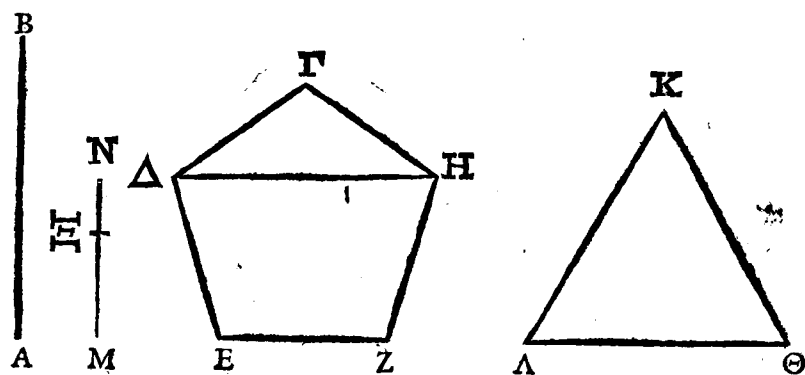
Soit ΑΒ le diamètre d'une sphère, décrivons dans cette sphère un dodé-

τοῦ δωδεκαέδρου ποντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, εἰκο-  
σαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ· λέγω ὅτι αἱ ἐκ  
τῶν κέντρων τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσὶν,  
τουτέστιν ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει  
τό, τε ΓΔΕΖΗ πενταγώνον καὶ τὸ ΚΛΘ τρί-  
γωνον.

Επιζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ ΔΗ. Εκ-  
κείσθω δὲ τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶ-  
ναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ. Ἐστί δὲ καὶ ἡ τῆς σφαί-  
ρας

pentagonum ΓΔΕΖΗ, icosaedri vero triangulum  
ΚΛΘ; dico rectas ex centris circulorum circa  
ipsa esse æquales, hoc est eundem circulum  
comprehendere et ΓΔΕΖΗ pentagonum et ΚΛΘ  
triangulum.

Jungatur ΔΗ; cubi igitur latus ipsa ΔΗ. Ex-  
ponatur autem aliqua recta ΜΝ, ita ut quin-  
tuplum sit ipsum ΑΒ ipsius ex ΜΝ. Est au-



ρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ  
κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέ-  
γραπται· ἡ ΜΝ ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κύκλου τοῦ ἀφ'  
οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται<sup>2</sup>. Τετμήσθω τοῦ  
ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἵστα-  
τὸ μείζον τμήμα ἡ ΜΞ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ.  
Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ,

tem et sphaeræ diameter potentiâ quintupla  
ipsius ex centro circuli a quo icosaedrum des-  
cribitur; ergo ΜΝ est ipsa ex centro circuli  
a quo icosaedrum describitur. Secetur ΜΝ ex-  
tremâ et mediâ ratione in Ξ, et sit major portio  
ipsa ΜΞ; decagoni igitur latus ipsa ΜΞ. Et  
quoniam quintuplum est ipsum ex ΑΒ ipsius

caèdre et un icosàèdre, que ΓΔΕΖΗ soit un pentagone du dodécaèdre, et ΚΛΘ  
un triangle de l'icosàèdre; je dis que les rayons des cercles décrits autour de  
ces polygones sont égaux, c'est-à-dire que le même cercle comprend le pen-  
tagone ΓΔΕΖΗ et le triangle ΚΛΘ.

Joignons ΔΗ; la droite ΔΗ sera le côté du cube (8 et 17. 13). Soit une  
droite ΜΝ, de manière que le carré de ΑΒ soit quintuple du carré de ΜΝ. Mais  
le diamètre de la sphère est quintuple en puissance du rayon du cercle d'après  
lequel l'icosàèdre est décrit (16. 13); la droite ΜΝ est donc le rayon du cercle  
d'après lequel l'icosàèdre est décrit. Coupons ΜΝ en extrême et moyenne raison  
au point Ξ (30. 6), et que ΜΞ soit le plus grand segment; la droite ΜΞ est donc le  
côté du décagone. Et puisque le carré de ΑΒ est quintuple du carré de ΜΝ, et



τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ  $AB$  τοῦ ἀπὸ  $\Delta H$ · τρία ἄρα τὰ ἀπὸ  $\Delta H$  ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ  $MN$ . Ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ  $\Delta H$  πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ  $MN$  οὕτως ἐστὶ τρία τὰ ἀπὸ  $\Gamma H$  πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ  $M\Xi$ <sup>3</sup>. τρία οὖν τὰ ἀπὸ  $\Gamma H$  τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ  $M\Xi$  ἐστὶν ἴσα. Πέντε δὲ τὰ ἀπὸ  $KA$  τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ  $MN$  καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ  $M\Xi$  ἐστὶν ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ  $KA$  ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ  $\Delta H$  καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ  $\Gamma H$ <sup>4</sup>. Τρία δὲ τὰ ἀπὸ  $\Delta H$  καὶ τρία τὰ ἀπὸ  $\Gamma H$  ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ  $\Gamma\Delta EZH$ , προεδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ  $\Delta H$  μετὰ τοῦ ἀπὸ  $\Gamma H$  πεντεπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ  $\Gamma\Delta EZH$  κύκλου. Ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ  $KA$ , ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ  $KA\Theta$  τρίγωνον κύκλου, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ  $KA$  τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ  $KA\Theta$  τριγώνου κύκλου<sup>5</sup>. δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ τοῖς

ex  $MN$ , triplum autem ipsum ex  $AB$  ipsius ex  $\Delta H$ ; tria igitur ipsa ex  $\Delta H$  æqualia quinque ipsis ex  $MN$ . Ut autem tria ipsa ex  $\Delta H$  ad quinque ipsa ex  $MN$  ita tria ipsa ex  $\Gamma H$  ad quinque ipsa ex  $M\Xi$ ; tria igitur ipsa ex  $\Gamma H$  quinque ipsis ex  $M\Xi$  sunt æqualia. Quinque autem ipsa ex  $KA$  quinque ipsis ex  $MN$  et quinque ipsis ex  $M\Xi$  sunt æqualia; quinque igitur ipsa ex  $KA$  æqualia sunt tribus ipsis ex  $\Delta H$  et tribus ipsis ex  $\Gamma H$ . Tria autem ipsa ex  $\Delta H$  et tria ipsa ex  $\Gamma H$  æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro circuli descripti circa  $\Gamma\Delta EZH$ , ostensum est enim ipsum ex  $\Delta H$  cum ipso ex  $\Gamma H$  quintuplum esse ipsius ex rectâ ex centro circuli descripti circa pentagonum  $\Gamma\Delta EZH$ . Sed quinque quidem ipsa ex  $KA$  æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro circuli descripti circa  $KA\Theta$  triangulum, ostensum est autem ipsum ex  $KA$  triplum esse ipsius ex rectâ ex centro circuli descripti circa  $KA\Theta$  triangulum; quindecim igitur ipsa ex rectâ ex centro circuli

que le carré de  $AB$  est triple du carré de  $\Delta H$ , le triple du carré de  $\Delta H$  sera quintuple du carré de  $MN$ . Mais le triple du carré de  $\Delta H$  est au quintuple du carré de  $MN$  comme le triple du carré de  $\Gamma H$  est au quintuple du carré de  $M\Xi$  (0. 13 et 7 14); le triple du carré de  $\Gamma H$  est donc égal au quintuple du carré de  $M\Xi$ . Mais le quintuple du carré de  $KA$  est égal à la somme du quintuple du carré de  $MN$  et du quintuple carré de  $M\Xi$  (8. 9 et 10. 13); le quintuple du carré de  $KA$  est donc égal à la somme du triple carré de  $\Delta H$  et du triple carré de  $\Gamma H$ . Mais la somme du triple carré de  $\Delta H$  et du triple carré de  $\Gamma H$  est égale à quinze fois le carré du rayon du cercle décrit autour du pentagone  $\Gamma\Delta EZH$ , car on a démontré que la somme des carrés des droites  $\Delta H$ ,  $\Gamma H$  est quintuple du carré du rayon du cercle décrit autour du pentagone  $\Gamma\Delta EZH$ . Mais le quintuple du carré de  $KA$  est égal à quinze fois le carré du rayon du cercle décrit autour du triangle  $KA\Theta$ , et l'on a démontré que le carré de  $KA$  est triple du carré du rayon du cercle décrit autour du triangle  $KA\Theta$  (12. 13); quinze fois le carré du rayon du premier cercle est donc égal à



δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου<sup>6</sup>· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ.

Ο αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν ᾗ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἄχθῃ· τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Εστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ.

Επεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ

æqualia sunt quindecim ipsis ex rectâ ex centro circuli; ergo diameter æqualis est diametro.

Idem igitur circulus comprehendit et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eâdem sphærâ descriptorum.

## PROPOSITIO III.

Si sit pentagonum et æquilaterum et æquiangulum, et circa ipsum circulus, et a centro perpendicularis ad unum latus ducatur; ipsum tricies sub uno laterum et perpendiculari æquale est dodecaedri superficiei.

Sit pentagonum æquilaterum et æquiangulum ΑΒΓΔΕ, et circa pentagonum circulus, et sumatur centrum Ζ, et a puncto Ζ ad ΓΔ perpendicularis ducatur ΖΗ; dico ipsum tricies sub ΓΔ, ΖΗ æquale esse duodecim pentagonis ΑΒΓΔΕ.

Jungantur ipsæ ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam ipsum

quinze fois le carré du rayon du second cercle; les diamètres sont donc égaux.

Le même cercle comprend donc le pentagone du dodécaèdre, et le triangle de l'icosaèdre, ces polygones étant décrits dans un même cercle.

## PROPOSITION III.

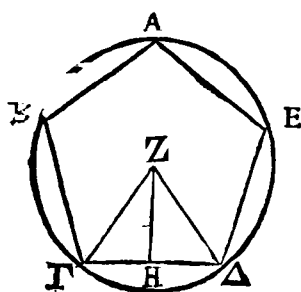
Si l'on a un pentagone équilatéral et équiangle, si on lui circonscrit un cercle, et si du centre du cercle on mène une perpendiculaire à un des côtés, trente fois le rectangle sous un des côtés et la perpendiculaire sera égal à la surface du dodécaèdre.

Soit ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle, circonscrivons lui un cercle, prenons le centre Ζ, et du point Ζ menons la perpendiculaire ΖΗ; je dis que trente fois la rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est égal à douze fois le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Joignons ΓΖ, ΖΔ. Puisque le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est double du triangle ΓΔΖ

ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΔΖ τριγώνου, τῷ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τρίγωνα ἐστὶν ἴσα¹. Τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα,

sub ΓΔ, ΖΗ duplum est trianguli ΓΔΖ, ipsi igitur quinquies sub ΓΔ, ΖΗ decem triangula æqualia sunt. Sed decem triangula duo sunt pen-

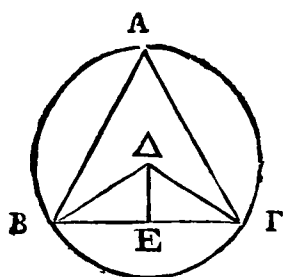


καὶ πάντα ἑξάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. Δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

tagona, et tota sexties; ipsum igitur tricies sub ΓΔ, ΖΗ æquale est duodecim pentagonis. Duodecim autem pentagona dodecaedri est superficies; ipsum igitur tricies sub ΓΔ, ΖΗ æquale est dodecaedri superficiei.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος,

Similiter utique ostendemus et si sit triangulum æquilaterum ut ΑΒΓ, et circa ipsum circulus,



καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.

et centrum circuli Δ, et perpendicularis ΔΕ, ipsum tricies sub ΒΓ, ΔΕ æquale esse icosaedri superficiei.

(40. 1), dix angles seront égaux au quintuple du rectangle sous ΓΔ, ΖΗ. Mais dix triangles sont égaux à deux pentagones, ainsi que six fois les tous; trente fois le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est donc égal à douze pentagones. Mais douze pentagones forment la surface du dodécaèdre; trente fois le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est donc égal à la surface du dodécaèdre.

Nous démontrerons semblablement que si l'on a un triangle équilatéral comme ΑΒΓ, que si on lui circonscrit un cercle dont le centre soit Δ, et que si l'on mène une perpendiculaire ΔΕ, trente fois le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ sera égal à la surface de l'icosaèdre.

Επεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ, καὶ πάντα τρεῖς· ἕξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἴσα ἐστὶ πρὸς τοῖς ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. Ἐξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΑΒΓ, ἴσα ἐστὶ δύο τοῖς ΑΒΓ, καὶ πάντα δεκάκεις· τὸ ἄρα τριακοντάκεις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ· ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ

Quoniam enim rursus ipsum sub ΒΓ, ΔΕ duplum est ipsius ΑΒΓ; duo igitur triangula æqualia sunt ipsi sub ΒΓ, ΔΕ, et omnia ter; sex igitur triangula ΑΒΓ, æqualia sunt tribus sub ΒΓ, ΔΕ; sex autem triangula ut ΑΒΓ æqualia sunt duobus ΑΒΓ, et omnia decies; ipsum igitur tricies sub ΒΓ, ΔΕ æquale est viginti ΑΒΓ triangulis, hoc est icosædri superficiei; quare erit ut dodecaedri superficies ad icosædri superficiem ita ipsum sub ΓΔ, ΖΗ ad ipsum sub ΒΓ, ΔΕ.

## COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est ut dodecaedri superficies ad icosædri superficiem ita ipsum sub latere pentagoni et perpendiculari ex centro circuli circa pentagonum ad latus ductâ ad ipsum sub latere icosædri et perpendiculari a centro circuli circa triangulum ad latus ductâ,

Car puisque le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ est double du triangle ΑΒΓ (41. 1), deux triangles seront égaux au rectangle sous ΒΓ, ΔΕ, ainsi que trois fois les tous; les six triangles ΑΒΓ sont donc égaux aux trois rectangles sous ΒΓ, ΔΕ. Mais six triangles comme ΑΒΓ sont égaux a deux triangles ΑΒΓ, ainsi que dix fois les tous; trente fois le rectangle sous ΒΓ, ΔΕ est donc égal à vingt fois le triangle ΑΒΓ, c'est-à-dire à la surface de l'icosædre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosædre comme le rectangle sous ΓΔ, ΖΗ est au rectangle sous ΒΓ, ΔΕ.

## COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosædre comme le rectangle sous le côté du pentagone et la perpendiculaire menée à ce côté du centre du cercle circonscrit au pentagone, est au rectangle sous le côté de l'icosædre et la perpendiculaire menée à ce côté du centre du

τρίγωνον κύκλῳ ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

in eâdem sphærâ descriptis icosaedro et dodecaedro.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τούτου δήλου ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

Εκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ ΓΔ, πενταγώνου δὲ ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐκτελίσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΗ εὐθεῖα ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ Θ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

PROPOSITIO IV.

Hoc manifesto existente, ostendendum est fore ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita cubi latus ad icosaedri latus.

Exponatur circulus ΑΒΓ comprehendens et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eâdem sphærâ descriptorum, et describatur in ΑΒΓ circulo trianguli quidem æquilateri latus ΓΔ, pentagoni autem latus ΑΓ, et sumatur centrum Ε circuli, et a puncto Ε ad ΔΓ, ΓΑ ducantur perpendiculares ΕΖ, ΕΗ, et producat in directum ipsi ΕΗ recta ΗΒ, et jungatur ΒΓ, et exponatur cubi latus Θ; dico esse ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita Θ ad ΓΔ.

cercle circonscrit au triangle, le dodécaèdre et l'icosaèdre étant décrits dans la même sphère.

PROPOSITION IV.

Cela étant évident, il faut démontrer que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre.

Soit exposé un cercle ΑΒΓ qui comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère (2. 14), décrivons dans le cercle ΑΒΓ le côté ΓΔ d'un triangle équilatéral, et le côté ΑΓ du pentagone, prenons le centre Ε du cercle; du point Ε menons aux droites ΔΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΕΖ, ΕΗ, prolongeons ΗΒ dans la direction de ΕΗ, joignons ΒΓ, et soit exposé le côté Θ du cube; je dis que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre, comme Θ est à ΓΔ.



εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἢ  $\Theta$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

superficies ad icosaedri superficiem ita  $\Theta$  ad  $\Gamma\Delta$ . Quod oportebat ostendere.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν· προγραφείτος τοῦδε.

Ostendere ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita cubi latus ad icosaedri latus; hoc autem præmisso.

Ἐστω κύκλος ὁ  $AB\Gamma$ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ  $AB$ ,  $ΑΓ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $B\Gamma$ , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ  $\Delta$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ  $\Delta$  ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ  $A\Delta$ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς  $A\Delta$  εὐθεῖα ἡ  $\Delta E$ , καὶ κείσθω τῆς μὲν  $A\Delta$  εὐθείας ἡμίσεια ἡ  $\Delta Z$ , ἡ δὲ  $H\Gamma$  τῆς  $\Gamma\Theta$  τριπλῇ ἴστω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ  $AZ$ ,  $B\Theta$  ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ.

Sit circulus  $AB\Gamma$ , et describantur in  $AB\Gamma$  circulo pentagoni æquilateri latera  $AB$ ,  $ΑΓ$ , et jungatur  $B\Gamma$ , et sumatur centrum  $\Delta$  circuli, et a puncto  $A$  ad  $\Delta$  ducatur recta  $A\Delta$ , et producat in directum ipsi  $A\Delta$  recta  $\Delta E$ , et ponatur rectæ  $A\Delta$  dimidia  $\Delta Z$ , ipsa autem  $H\Gamma$  ipsius  $\Gamma\Theta$  tripla sit; dico ipsum sub  $AZ$ ,  $B\Theta$  æquale esse pentagono.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ  $B$  ἐπὶ τὸ  $\Delta$  ἐπεζεύχθω ἡ  $B\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ  $A\Delta$  τῆς  $\Delta Z$ , ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς  $A\Delta$  ἡ  $AZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τριπλῇ

Etenim a puncto  $B$  ad  $\Delta$  ducatur  $B\Delta$ . Et quoniam dupla est  $A\Delta$  ipsius  $\Delta Z$ , sesquialtera igitur est ipsius  $A\Delta$  ipsa  $AZ$ . Rursus, quoniam

est au rectangle sous  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$  (16. 6), c'est-à-dire que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme  $\Theta$  est a  $\Gamma\Delta$  (3. 14): ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Démontrer que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, après avoir exposé ce qui suit:

Soit le cercle  $AB\Gamma$ , dans le cercle  $AB\Gamma$ , décrivons les côtés  $AB$ ,  $ΑΓ$  d'un pentagone équilatéral, joignons  $B\Gamma$ , prenons le centre  $\Delta$  du cercle, du point  $A$  au point  $\Delta$  menons la droite  $A\Delta$ , prolongeons la droite  $\Delta E$  dans la direction de  $A\Delta$ , faisons  $\Delta Z$  égal à la moitié de  $A\Delta$ , et que  $H\Gamma$  soit triple de  $\Gamma\Theta$ , je dis que le rectangle sous  $AZ$ ,  $B\Theta$  est égal au pentagone.

Car du point  $B$ , menons au point  $\Delta$  la droite  $B\Delta$ . Puisque  $A\Delta$  est double de  $\Delta Z$ , la droite  $AZ$  sera égale aux trois moitiés de  $A\Delta$ . De plus, puisque  $H\Gamma$  est triple de





ἐνὶ τῷ ὑπὸ  $AZ$ ,  $H\Theta$ , καὶ δέκα τὰ ὑπὸ  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  ἴσα ὅτι πέντε τοῖς ὑπὸ  $AZ$ ,  $H\Theta$ , τουτέστι δύο πεντάγωνα· ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  ἴσα ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ. Πεντάκις δὲ τὸ ὑπὸ  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  ἴσα ἰστί τῷ ὑπὸ  $AZ$ ,  $\Theta B$ , ἐπειδὴ πενταπλὴ ἐστὶν ἡ  $\Theta B$  τῆς  $\Theta\Gamma$ , καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ  $AZ$ . Τὸ ἄρα ὑπὸ  $AZ$ ,  $\Theta B$  ἴσον ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ.

Τούτου δήλου ὄντος, νῦν ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφωσαν εἰς τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ  $BA$ ,  $AG$ , καὶ ἐπέξεύχθω ἡ  $B\Gamma$ , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ  $E$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $A$  ἐπὶ τὸ  $E$  ἐπέξεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ  $AE$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ ἔστω ἡ  $AE$  τῆς  $E\Theta$  διπλὴ, τριπλὴ δὲ ἡ  $K\Gamma$  τῆς  $\Gamma\Theta$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $H$  τῇ  $AZ$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $\Delta M$ · τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ  $\Delta M$ · ἰσοπλευρὴν ἄρα ἰστί τὸ  $A\Delta M$  τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ  $AH$ ,  $\Theta B$  ἴσον ἰστί τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ  $AH$ ,  $H\Delta$  τῷ  $A\Delta M$  τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς

$H\Theta$ , et decem ipsa sub  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  æqualia sunt quinque ipsis sub  $AZ$ ,  $H\Theta$ , hoc est duo pentagona; quare quinque ipsa sub  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  æqualia sunt uni pentagono. Quinque autem ipsa sub  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  æqualia sunt ipsi sub  $AZ$ ,  $\Theta B$ , quia quintupla quidem est  $\Theta B$  ipsius  $\Theta\Gamma$ , et communis altitudo est ipsa  $AZ$ . Ipsum igitur sub  $AZ$ ,  $\Theta B$  æquale est uni pentagono.

Hoc manifesto existente, nunc exponatur circulus comprehendens et dodecaedri pentagonum, et icosaedri triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum, et describantur in  $AB\Gamma$  circulo pentagoni æquilateri latera  $BA$ ,  $AG$ , et jungatur  $B\Gamma$ , et sumatur centrum  $E$  circuli, et a puncto  $A$  ad  $E$  ducatur  $AE$ , et producat  $AE$  ad  $Z$ , et sit  $AE$  ipsius  $E\Theta$  dupla, tripla autem  $K\Gamma$  ipsius  $\Gamma\Theta$ , et a puncto  $H$  ipsi  $AZ$  ad rectos ipsa  $\Delta M$ ; trianguli igitur est æquilateri latus ipsa  $\Delta M$ ; æquilaterum igitur est  $A\Delta M$  triangulum. Et quoniam ipsum quidem sub  $AH$ ,  $\Theta B$  æquale est pentagono, ipsum autem sub  $AH$ ,  $H\Delta$  triangulo  $A\Delta M$ ; est igitur

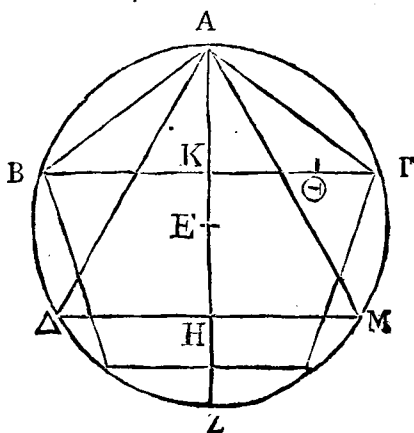
et dix fois le rectangle sous  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  égal à cinq fois le rectangle sous  $AZ$   $H\Theta$ , c'est-à-dire, à deux pentagones; cinq fois le rectangle sous  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  est donc égal à un pentagone. Mais cinq fois le rectangle sous  $AZ$ ,  $\Theta\Gamma$  est égal au rectangle sous  $AZ$ ,  $\Theta B$ , parce que  $\Theta B$  est quintuple de  $\Theta\Gamma$ , et que  $AZ$  est la hauteur commune. Le rectangle sous  $AZ$ ,  $\Theta B$  est donc égal à un pentagone.

Cela étant démontré, soit exposé un cercle qui comprène le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosàèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère; décrivons dans le cercle  $AB\Gamma$  les côtés,  $BA$ ,  $AG$  d'un pentagone équilatéral, joignons  $B\Gamma$ , prenons le centre  $E$  du cercle, du point  $A$  menons au point  $E$  la droite  $AE$ , prolongeons  $AE$  vers le point  $Z$ , que  $AE$  soit double de  $E\Theta$ , et  $K\Gamma$  triple de  $\Gamma\Theta$ , et du point  $H$  menons  $\Delta M$  perpendiculaire à  $AZ$ ; la droite  $\Delta M$  sera le côté d'un triangle équilatéral (cor. 1. 14). Le triangle  $A\Delta M$  est donc équilatéral. Et puisque le rectangle sous  $AH$ ,  $\Theta B$  est égal au pentagone, et que le rectangle sous  $AH$ ,  $H\Delta$  est égal au triangle  $A\Delta M$ , le rectangle sous  $AH$ ,  $\Theta B$



τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως  
τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. Ὡς δὲ τὸ  
ὑπὸ ΑΗ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως ἡ ΒΘ  
πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ ὥς ἄρα δώδεκα αἱ ΘΒ πρὸς  
εἴκοσι ΔΗ οὕτως δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι  
τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφά-  
νεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. Καὶ ἔστι δώδεκα  
μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ

tur ut ipsum sub ΑΗ, ΘΒ ad ipsum sub ΑΗ,  
ΗΔ ita pentagonum ad triangulum. Ut autem  
ipsum sub ΑΗ, ΒΘ ad ipsum sub ΑΗ, ΗΔ ita ΒΘ  
ad ΔΗ; et ut igitur duodecim ΘΒ ad viginti ΔΗ  
ita duodecim pentagona ad viginti triangula,  
hoc est dodecaedri superficies ad icosaedri su-  
perficiem. Et sunt duodecim ΒΘ quidem decem  
ΒΓ, et ipsa enim quidem ΒΘ ipsius ΘΓ est quintu-



ἔστι πενταπλῆ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΘΓ ἑξαπλῆ·  
δώδεκα ἄρα αἱ ΒΘ ἴσαι εἰσὶ δέκα ταῖς ΒΓ. Εἴκοσι  
δὲ ἡ ΗΔ δέκα εἰσὶν αἱ ΔΜ, διπλῆ γὰρ ἡ ΜΔ τῆς  
ΔΗ· ὥς ἄρα δέκα αἱ ΒΓ πρὸς δέκα τὰς ΔΜ,  
τουτέστιν ὥς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ἡ τοῦ  
δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου  
ἐπιφάνειαν. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΓ ἡ τοῦ κύβου  
πλευρὴ, ἡ δὲ ΔΜ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά·  
καὶ ὥς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς

pla, ipsa autem ΒΓ ipsius ΘΓ sextupla; duodecim  
igitur ΒΘ æquales sunt ipsis decem ΒΓ. Viginti au-  
tem ΗΔ decem sunt ΔΜ, dupla enim ΜΔ ipsius  
ΔΗ; ut igitur decem ΒΓ ad decem ΔΜ, hoc est  
ut ΒΓ ad ΔΜ, ita dodecaedri superficies ad ico-  
saedri superficiem. Et est ΒΓ quidem cubi la-  
tus, ΔΜ autem icosaedri latus; et ut igitur do-  
decaedri superficies ad icosaedri superficiem ita

sera au rectangle sous ΑΗ, ΗΔ comme le pentagone est au triangle. Mais le  
rectangle sous ΑΗ, ΒΘ est au rectangle sous ΑΗ, ΗΔ comme ΒΘ est à ΔΗ; douze  
fois ΘΒ est donc à vingt fois ΔΗ comme dix pentagones sont à vingt triangles, c'est-  
à-dire comme la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre. Mais  
douze fois ΒΘ est égal à dix fois ΒΓ, car ΒΘ est quintuple de ΘΓ, et ΒΓ est sextuple  
de ΘΓ; douze fois ΒΘ est donc égal à dix fois ΒΓ. Mais vingt fois ΗΔ est égal à dix  
fois ΔΜ, car ΜΔ est double de ΔΗ; dix fois ΒΓ est donc à dix fois ΔΜ, c'est-à-dire ΒΓ  
à ΔΜ, comme la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre. Mais ΒΓ  
est le côté du cube, et ΔΜ le côté de l'icosaèdre (8 et 17. 15); la surface du dodé-

τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

BΓ ad ΔΜ, hoc est cubi latus ad icosaedri latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ εὐθείας ἡσδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒ περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφόμενων, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τὶς ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστω ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ ΓΔ

Ostendendum est igitur et rectâ quâlibet sectâ extremâ et mediâ ratione, quam rationem habet potens quadratum ex totâ et quadratum ex maiore portione ad potentem quadratum ex totâ et quadratum ex minore portione eandem habere rationem cubi latus ad icosaedri latus.

Sit circulus ΑΒ comprehendens et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum, et sumatur centrum Γ circuli, et producaturs aliqua a puncto Γ ut libet recta ΓΒ, et secetur extremâ et mediâ ratione in Δ, et major portio sit ΓΔ; decagoni igitur latus est ipsa ΓΔ in eodem circulo descripti.

caèdre est donc à la surface de l'icosaèdre comme ΒΓ est à ΔΜ; c'est-à-dire comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre.

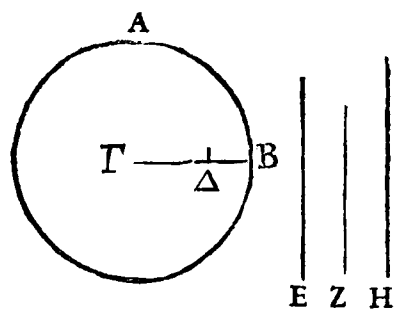
PROPOSITION V.

Une droite étant coupée en extrême et moyenne raison, il faut démontrer aussi que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre comme le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment est au carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment.

Soit un cercle ΑΒ qui comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la même sphère; prenons le centre Γ du cercle; du point Γ menons une droite quelconque ΓΒ; coupons cette droite en extrême et moyenne raison au point Δ, et que ΓΔ soit le plus grand segment; la droite ΓΔ sera le côté du dodécagone décrit dans le même cercle (5 et 9, 13).

εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. Ἐκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η· ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μείζον ἐστὶ τμήμα. Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ΒΓ· τριπλασίον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ΓΒ,

Exponatur itaque icosaedri latus Ε, dodecaedri autem Ζ, cubi vero Η; ergo Ε quidem trianguli æquilateri est latus, Ζ vero pentagoni in eodem circulo descripti, Ζ autem ipsius Η major est portio. Et quoniam Ε æqualis est lateri trianguli æquilateri, latus autem trianguli æquilateri potentiâ triplum est ipsius ΒΓ, triplum igitur est ipsum ex Ε ipsius ex ΒΓ. Sunt autem et ipsa ex



ΒΔ τριπλασία τοῦ ἀπὸ ΓΔ· καὶ ἐναλλάξ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ· μείζον γάρ ἐστὶ τμήμα ἡ Ζ τῆς Η· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ

ΓΒ, ΒΔ tripla ipsius ex ΓΔ; et permutando, ut igitur ipsum ex Ε ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ ita ipsum ex ΓΒ ad ipsum ex ΓΔ. Ut autem ipsum ex ΒΓ ad ipsum ex ΓΔ ita est ipsum ex Η ad ipsum ex Ζ; major enim est portio Ζ quam Η; et ut igitur ipsum ex Ε ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ ita ipsum

Que la droite Ε soit le côté de l'icosaèdre (18. 13), la droite Ζ le côté du dodécaèdre, et la droite Η le côté du cube; la droite Ε sera le côté d'un triangle équilatéral, et la droite Ζ le côté du pentagone décrit dans le même cercle, cette droite étant le plus grand segment de Η (17. 13). Puisque Ε est égal au côté du triangle équilatéral, et que le côté du triangle équilatéral est triple de ΒΓ en puissance (12. 13), le carré de Ε sera triple du carré de ΒΓ. Mais la somme des carrés des droites ΓΒ, ΒΔ est triple du carré de ΓΔ (4. 13); donc, par permutation, le carré de Ε est à la somme des carrés des droites ΓΒ, ΒΔ comme le carré de ΓΒ est au carré de ΓΔ. Mais le carré de ΒΓ est au carré de ΓΔ comme le carré de Η est au carré de Ζ (7. 14), car le segment de Ζ est plus grand que Η (17. 15); le carré de Ε est donc à la somme des carrés des droites ΓΒ,

Ζ, καὶ ἐναλλάξ καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ  
 Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ πρὸς τὰ  
 ἀπὸ ΓΒ ΒΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ Ζ ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ  
 ΒΓ, ΔΓ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύνα-  
 ται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν, καὶ τὴν  
 τοῦ δέκαγώνου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ  
 ἀπὸ Ε οὕτως τὰ ἀπὸ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ  
 ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς  
 τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτως, εὐθείας ἡσδηποτοῦν  
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ ἀπὸ  
 τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος  
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος  
 τμήματος· καὶ ὡς ἄρα τῆς ἀπὸ τῆς Η πρὸς  
 τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως, εὐθείας ἡσδηποτοῦν  
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη  
 τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος  
 τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς  
 ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. Καὶ  
 ἴσθιν ἡ μὲν Η κύβου πλευρὰ, ἡ δὲ Ε εἰκοσαέδρου·  
 εἰάν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,

ex H ad ipsum ex Z, et permutando et inver-  
 tendo; ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E ita  
 ipsum ex Z ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ. Ipsi autem ex  
 Z æqualia sunt ipsa ex ΒΓ, ΔΓ, etenim penta-  
 goni latus potest et latus hexagoni, et latus de-  
 cagoni; ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E ita  
 ipsa ex ΒΓ ΓΔ ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ. Ut au-  
 tem ipsa ex ΒΓ, ΓΔ ad ipsa ex ΓΒ, ΒΔ ita,  
 rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ,  
 ipsum ex totâ et ipsum ex majore portione  
 ad ipsum ex totâ et ipsum ex minore por-  
 tione; et ut igitur ipsum ex H ad ipsum ex E  
 ita, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione  
 sectâ, potens ipsum ex totâ et ipsum ex majore  
 portione ad potentem ipsum ex totâ et ipsum  
 ex minore portione. Et est H quidem cubi la-  
 tus, E vero icosædri; si igitur recta extremâ  
 et mediâ ratione secetur, erit ut potens totam

ΒΔ comme le quarré de Η est au quarré de Ζ, et par permutation et par inversion;  
 le quarré de Η est donc au quarré de Ε comme le quarré de Ζ est à la somme  
 des quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ. Mais la somme des quarrés des droites ΒΓ, ΔΓ est  
 égale au quarré de Ζ, car le quarré du côté du pentagone est égal à la somme  
 des quarrés du côté de l'exagone et du côté du décagone (10. 13); le carré de Η  
 est donc au quarré de Ε comme la somme des quarrés des droites ΒΓ, ΓΔ est  
 à la somme des quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ (7. 14). Mais si une droite est  
 coupée en extrême et moyenne raison, la somme des quarrés des droites ΒΓ,  
 ΓΔ est à la somme des quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ comme la somme des quarrés  
 d'une droite entière et du plus grand segment est à la somme des quarrés  
 de la droite entière et du plus petit segment; si donc une droite est coupée  
 en extrême et moyenne raison, le quarré de Η est au quarré de Ε comme le  
 quarré d'une droite égale à la somme des quarrés de la droite entière et du  
 plus grand segment est au quarré d'une droite égal à la somme des quarrés  
 de la droite entière et du plus petit segment. Mais Η est le côté du cube,  
 et Ε le côté de l'icosaèdre; si donc une droite est coupée en extrême

ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον  
 τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ  
 ἔλασσον τμήμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ  
 πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν  
 σφαῖραν ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et majorem sectionem ad potentem totam et  
 minorem portionem, ita cubi latus ad latus ico-  
 saedri in eadem sphaerâ descriptorum; quod  
 oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Δεικτέον δὴ νῦν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου  
 πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως τὸ  
 στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ  
 εἰκοσαέδρου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό τε  
 τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέ-  
 δρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγ-  
 γραφομένων· ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι  
 ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ γὰρ ἀπὸ  
 τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων  
 ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ  
 τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν· ὥστε αἱ ἀπὸ  
 τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύ-

## PROPOSITIO VI.

Ostendendum autem nunc est ut cubi latus ad  
 latus sicosaedri ita solidum dodecaedri ad so-  
 lidum icosaedri.

Quoniam enim æquales circuli comprehen-  
 dunt et dodecaedri pentagonum et icosaedri  
 triangulum, in eadem sphaerâ descriptorum;  
 in sphaeris autem æquales circuli æqualiter  
 distant a centro, rectæ enim a centro sphaeræ  
 ad circulorum plana perpendiculares ductæ et  
 æquales sunt et in centra circulorum cadunt;  
 quare rectæ a centro sphaeræ ad centrum

et moyenne raison, le quarré d'une droite égal à la somme des quarrés de  
 la droite entière, et du plus grand segment est au quarré d'une droite égal  
 à la somme des quarrés de la droite entière et du plus petit segment, comme  
 le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans la  
 même sphère. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION VI.

Il faut démontrer maintenant que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre  
 comme le solide du dodécaèdre est au solide de l'icosaèdre.

Car puisque des cercles égaux comprennent et le pentagone du dodécaèdre,  
 et le triangle de l'icosaèdre, ces solides étant décrits dans une même sphère  
 (2. 14), et que dans les sphères les cercles égaux sont également éloignés du  
 centre, car les perpendiculaires menées du centre de la sphère aux plans de ces  
 cercles sont égales et tombent aux centres des cercles, les droites menées du centre

κλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον ἴσαι εἶσι, τουτέστιν αἱ κάθετοι· ἰσοῦφείς ἄρα εἰσιν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. Αἱ δὲ ἰσοῦφείς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἔχουσας. Καὶ δώδεκα πεντάγωνα ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστίν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστίν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώ-

circuli comprehendentis et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum æquales sunt, hoc est, perpendiculares; æquealtæ igitur sunt pyramides bases habentes dodecaedri pentagona et bases habentes icosaedri triangula; æquealtæ autem pyramides inter se sunt ut bases; ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis cujus basis quidem est dodecaedri pentagonum, vertex autem centrum sphæræ, ad pyramidem cujus basis quidem est icosaedri triangulum, vertex autem centrum sphæræ; et ut igitur duodecim pentagona ad viginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides triangulares bases habentes. Et duodecim pentagona dodecaedri superficies sunt, viginti autem triangula icosaedri superficies sunt; est igitur ut dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides triangulares bases ha-

de la sphère au centre du cercle décrit autour du pentagone du dodécaèdre et du triangle de l'icosaèdre, seront égales, c'est-à-dire perpendiculaires; les pyramides qui ont pour bases les pentagones de l'icosaèdre et les triangles de l'icosaèdre, sont donc de même hauteur. Mais les pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases (5 et 6, 12); le pentagone est donc au triangle comme la pyramide qui a pour base le pentagone du dodécaèdre et pour sommet le centre de la sphère, est à la pyramide qui a pour base le triangle de l'icosaèdre et pour sommet le centre de la sphère; les douze pentagones du dodécaèdre sont donc aux vingt triangles de l'icosaèdre comme les douze pyramides qui ont des bases pentagonales sont aux vingt pyramides qui ont des bases triangulaires. Mais les douze pentagones sont la surface du dodécaèdre, et les vingt triangles sont la surface de l'icosaèdre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosaèdre comme les douze pyramides qui ont des bases pentagonales sont aux vingt pyramides

νοὺς βάσεις ἔχουσας. Καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσας τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσας τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ὡς δὲ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἐδείχθη ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Οτι δὲ εἰάν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τιμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτως.

Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ τὸ δὲ μείζον τμήμα

bentes. Et sunt duodecim quidem pyramides pentagonales bases habentes solidum dodecaedri, viginti autem pyramides triangulares bases habentes solidum icosaedri, et ut igitur dodecaedri superficies ad icosaedri superficiem ita solidum dodecaedri ad solidum icosaedri. Ut autem superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri ita ostensum est esse cubi latus ad icosaedri latus; et ut igitur cubi latus ad icosaedri latus ita solidum dodecaedri ad solidum icosaedri.

## PROPOSITIO VII.

Si autem duæ rectæ extremâ et mediâ ratione secantur, eas in proportionem esse subjectâ, sic ostendemus.

Secetur enim recta quidem AB extremâ et mediâ ratione in Γ, major autem portio ipsius

qui ont des bases triangulaires. Mais les douze pyramides qui ont des bases pentagonales sont la solidité du dodécaèdre, et les vingt pyramides qui ont des bases triangulaires sont la solidité de l'icosaèdre; la surface du dodécaèdre est donc à la surface de l'icosaèdre, comme la solidité du dodécaèdre est à la solidité de l'icosaèdre. Mais on a démontré que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre (4. 14); le côté du cube est donc au côté de l'icosaèdre comme la solidité du dodécaèdre est à la solidité de l'icosaèdre.

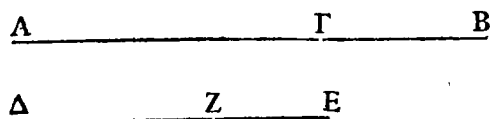
## PROPOSITION VII.

Ensuite, si deux droites sont coupées en extrême et moyenne raison, nous démontrerons ainsi qu'elles sont dans la proportion suivante :

Car que la droite AB soit coupée en extrême et moyenne raison au point Γ,



αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον τμήμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΔΖ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔστιν οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ

sit ΑΓ; similiter autem et ΔΕ extrema et media ratione secetur in Ζ, et major portio ipsius sit ΔΖ; dico esse ut tota ΑΒ ad maiorem portionem ΑΓ, ita totam ΔΕ ad maiorem portionem ΔΖ.

Quoniam enim ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΑΓ, ipsum autem sub ΔΕ, ΕΖ æquale est ipsi ex ΔΖ; est igitur ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ ad ipsum ex ΑΓ, ita ipsum sub ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et ut ipsum quater igitur sub ΑΒ, ΒΓ ad ipsum ex ΑΓ est ita ipsum quater sub ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et componendo est ut ipsum quater sub ΑΒ, ΒΓ cum ipso ex ΑΓ ad ipsum ex ΑΓ ita ipsum quater sub ΔΕ, ΕΖ cum ipso ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΖ; quare et ipsum ex utraque simul ΑΒ, ΒΓ ad ipsum ex ΑΓ ita ipsum ex

et que ΑΓ soit son plus grand segment; que la droite ΔΕ soit aussi semblablement coupée en extrême et moyenne raison au point Ζ, et que son plus grand segment soit ΔΖ; je dis que la droite entière ΑΒ est à son plus grand segment ΑΓ comme la droite entière ΔΕ est à son plus grand segment ΔΖ.

Car puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΑΓ, et que le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est égal au carré de ΔΖ (17. 6); le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ sera au carré de ΑΓ comme le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ; quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est donc au carré de ΑΓ comme quatre fois le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ (15. 5); donc, par addition, quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ conjointement avec le carré de ΑΓ est au carré de ΑΓ, comme quatre fois le rectangle sous ΔΕ, ΕΖ conjointement avec le carré de ΔΖ est au carré de ΔΖ; le carré de la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donc au carré de ΑΓ comme le carré de la somme des droites ΔΕ, ΕΖ est au carré de ΔΖ;



ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΔΕ, ΕΖ πρὸς ΔΕ· συνθέντι ἄρα ὡς συναμφοτέρος αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ, τουτέστι δύο αἱ ΑΒ πρὸ ΑΓ, οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τουτέστι ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

utraq̃ue simul ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΖ; et longitudine, ut utraq̃ue simul ΑΒ, ΒΓ ad ΑΓ ita utraq̃ue simul ΔΕ, ΕΖ; ad ΔΕ componendo igitur, ut utraq̃ue simul ΑΒ, ΒΓ cum ΑΓ ad ΑΓ, hoc est duæ ΑΒ ad ΑΓ ita utraq̃ue simul ΔΕ, ΕΖ cum ΔΖ ad ΔΖ, hoc est duæ ΔΕ ad ΔΖ; et antecedentium dimidia, hoc est ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΔΕ ad ΔΖ. Quod oportebat ostendere.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δεδειγμένου δὴ τοῦδε, ὅτι, εὐθείας ἡσδηποῦν ἄκρον καὶ μέτον λόγον τμηθείσης, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεδειγμένου δὴ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν οὕτως ἢ τοῦ δωδεκαέδρου επιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφο-

## COROLLARIUM.

Hoc utique ostenso, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ, quam rationem habet potens ipsum ex totâ et ipsum ex majere portione ad potentem ipsum ex totâ et ipsum ex minore portione, illam habere cubi latus ad icosaedri latus. Hoc et utique ostenso, ut cubi latus ad icosaedri latus ita esse dodecaedri superficiem ad icosaedri superficiem, in eâdem

(8. 2); la somme des droites ΑΒ, ΒΓ est donc à ΑΓ comme la somme des droites ΔΕ, ΕΖ, est à ΔΕ; donc par addition, la somme des droites ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ est à ΑΓ, c'est-à-dire deux fois ΑΒ, est à ΑΓ comme la somme des droites ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ est à ΔΖ (22. 6), c'est-à-dire comme deux fois ΔΕ est à ΔΖ; et prenant les moitiés des antécédents, ΑΒ sera à ΑΓ comme ΔΕ est à ΔΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

## COROLLAIRE.

Ayant donc démontré que si une droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre (5. 14). Ayant démontré aussi que le côté du cube est au côté de l'icosaèdre comme la surface du dodécaèdre est à la surface de

μένων· προσενηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι  
ὥς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν  
τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως καὶ αὐτὸ  
τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, διὰ τὸ  
ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό-  
τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ  
εἰκοσαέδρου τρίγωνον· δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν  
αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρον τε καὶ εἰ-  
κοσάεδρον, λόγον ἔξουσιν εὐθείας οἷα σδιπο-  
τοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἡ δυνα-  
μένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος  
τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης  
καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

sphærâ descriptorum; hoc autem et cognito,  
ut dodecaedri superficies ad icosaedri superfi-  
ciem ita et ipsum dodecaedrum ad icosaedrum,  
propterea quod ab eodem circulo comprehen-  
duntur et dodecaedri pentagonum et icosaedri  
triangulum; evidens est si in eâdem sphærâ des-  
cribantur et dodecaedrum et icosaedrum, ratio-  
nem illa habitura esse quam, rectâ quâlibet ex-  
tremâ et mediâ ratione sectâ, potens ipsum ex  
totâ et ipsum ex majore portione ad potentem  
ipsum ex totâ et ipsum ex minore portione.

L'icosaèdre, ces solides étant décrits dans une même sphère; et sachant outre cela que la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre comme le dodécaèdre est à l'icosaèdre (6. 14), parceque le même cercle comprend le pentagone du dodécaèdre et le triangle de l'icosaèdre, il est évident que si dans la même sphère l'on décrit un dodécaèdre et un icosaèdre, et que si l'on coupe une droite en extrême et moyenne raison, le dodécaèdre aura avec l'icosaèdre la même raison que le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment a avec le carré d'une droite égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment.



# HYPsiclis

## DE QUINQUE CORPORIBUS

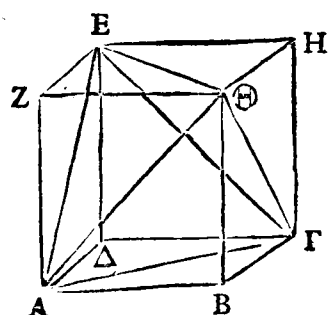
### LIBER SECUNDUS.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.  
 Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν  
 δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ  
 ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. Φανερόν δὴ ὅτι τὰ

#### PROPOSITIO I.

In dato cubo pyramidem describere.  
 Sit datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, in quo oportet  
 pyramidem describere. Jungantur ipsæ ΑΓ, ΑΕ,  
 ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. Evidens est utique triangula



ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι,  
 τετραγώνων γάρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραὶ πυ-  
 ραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ, καὶ ἐγγέγραπται  
 εἰς τὸν δοθέντα κύβον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ æquilatera esse, quadra-  
 torum enim sunt diametri eorum latera; pyra-  
 mis igitur est ΑΕΓΘ, et descripta est in dato  
 cubo. Quod oportebat facere.

## LE SECOND LIVRE

### DES CINQ CORPS D'HYPsicLE.

#### PROPOSITION I.

Inscrire une pyramide dans un cube donné.

Soit ΑΒΓΔΕΖΗΘ un cube donné, dans lequel il faut décrire une pyramide. Joignons ΑΓ, ΓΕ, ΕΘ, ΘΓ. Il est évident que les triangles ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ sont équila-  
 téraux, car leurs côtes sont les diagonales des quarrés; le solide ΑΕΓΘ est donc une  
 pyramide, et elle est décrite dans le cube (déf. 26. 11). Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

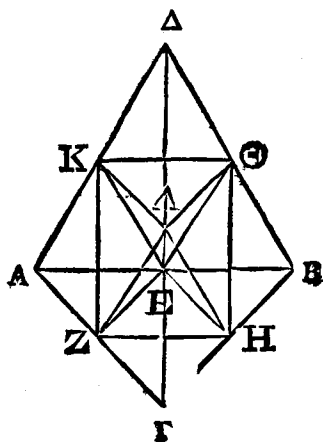
## PROPOSITIO II.

Εἰς τὴν πυραμίδα ἰσόπλευραν ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἐστω ἡ πυραμὶς ἰσόπλευρα ἡ  $AB\Gamma\Delta$ , ἥς κορυφὴ τὸ  $\Delta$  σημεῖον, εἰς ἣν δεῖ ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. Τεμήσθωσαν αἱ  $AB$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΓΔ$  δίχα κατὰ τοῖς  $E$ ,  $Z$ ,  $K$ ,  $H$ ,  $\Theta$ ,  $\Lambda$  σημείοις, καὶ πεζεύχθωσαν αἱ  $\Theta K$ ,  $\Theta\Lambda$ ,  $ZH$ ,  $ZE$ , καὶ αἱ λοιπαί.

In pyramide æquilaterâ octaedrum describere.

Sit pyramis æquilatera  $AB\Gamma\Delta$ , cujus vertex punctum  $\Delta$ , in quâ oportet octaedrum describere. Secentur ipsæ  $AB$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΓΔ$  bifariam in punctis  $E$ ,  $Z$ ,  $K$ ,  $H$ ,  $\Theta$ ,  $\Lambda$ , et jungantur ipsæ  $\Theta K$ ,  $\Theta\Lambda$ ,  $ZH$ ,  $ZE$ , et reliquæ.



[ Ἐπεὶ γὰρ ἡ  $AB$  διπλὴ ἐστὶν ἑκατέρας τῶν  $\Theta K$ ,  $HZ$ , καὶ αὐταῖς παράλληλος, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Theta K$  τῇ  $HZ$  καὶ παράλληλος. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ  $ΔΓ$  διπλὴ ἐστὶν ἑκατέρας τῶν  $\Theta H$ ,  $KZ$ , καὶ αὐταῖς παράλληλος, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Theta H$  τῇ  $KZ$ , καὶ παράλληλος. Ἰση δὲ ἐστὶν ἡ  $ΔΓ$  τῇ

[Quoniam enim ipsa  $AB$  dupla est utriusque ipsarum  $\Theta K$ ,  $HZ$ , et ipsis parallela, æqualis igitur est  $\Theta K$  ipsi  $HZ$ , et parallela. Rursus, quoniam  $ΔΓ$  dupla est utriusque ipsarum  $\Theta H$ ,  $KZ$ , et ipsis parallela, æqualis igitur est  $\Theta H$  ipsi  $KZ$ , et parallela; æqualis autem est  $ΔΓ$  ipsi  $AB$ ; æquales

## PROPOSITION II.

Décrire un octaèdre dans une pyramide équilatérale.

Soit  $AB\Gamma\Delta$  une pyramide équilatérale, ayant pour le sommet le point  $\Delta$ ; il faut décrire un octaèdre dans cette pyramide. Coupons en deux parties les droites  $AB$ ,  $ΑΓ$ ,  $ΑΔ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΒΔ$ ,  $ΓΔ$  aux points  $E$ ,  $Z$ ,  $K$ ,  $H$ ,  $\Theta$ ,  $\Lambda$ , et joignons  $\Theta K$ ,  $\Theta\Lambda$ ,  $ZH$ ,  $ZE$ , etc.

[ Puisque la droite  $AB$  est double de chacune des droites  $\Theta K$ ,  $HZ$ , et qu'elle leur est parallèle, la droite  $\Theta K$  sera égale et parallèle à  $HZ$ . De plus, puisque  $ΔΓ$  est double de chacune des droites  $\Theta H$ ,  $KZ$ , et qu'elle leur est parallèle, la droite  $\Theta H$

AB· ἴσαι ἄρα εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ΚΛ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΛΖ, ΘΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΛ, ΕΗ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΘΚ, ΛΚΖ, ΛΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ τρίγωνα. Οκταέδρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΘΚΖΗΕ, καὶ ἐγγράπται εἰς τὴν δοθεῖσαν ἰσόπλευραν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι \*.]

igitur sunt inter se ipsæ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ. Propter eadem utique et ipsæ ΚΛ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΛΖ, ΘΕ æquales inter se sunt. Ipsa autem ΚΘ ipsi ΚΛ est æqualis; quare et ipsæ ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΛ, ΕΗ, et reliquæ æquales inter se sunt; æquilatera igitur sunt ipsa ΛΘΚ, ΛΚΖ, ΛΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ triangula. Octaedrum igitur est ΛΘΚΖΗΕ, et descriptum est in pyramide æquilaterâ. Quod oportebat facere\*.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκταέδρον ἐγγράψαι.

In dato cubo octaedrum describere.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφιστώτων τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· λέγω ὅτι τὸ ΚΛΜΝ τετράγωνόν ἐστιν. Ηχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ταῖς ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. Ἐπεὶ οὖν διπλῇ ἐστὶν ἡ ΠΟ τῇς

Sit datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, et sumantur centra insistentium quadratorum Κ, Λ, Μ, Ν, et jungantur ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ; dico ipsum ΚΛΜΝ quadratum esse. Ducantur enim per puncta Κ, Λ, Μ, Ν ipsis ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ parallelæ ΗΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. Quoniam igitur

sera égal et parallèle à ΚΖ. Mais ΔΓ est égal à ΑΒ; les droites ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ sont donc égales entre elles. Par la même raison, les droites ΚΛ, ΕΗ, ΛΘ, ΖΕ, ΚΕ, ΛΗ, ΛΖ, ΘΕ sont égales entre elles. Mais ΚΘ est égal à ΚΛ; les droites ΘΚ, ΚΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΚΛ, ΕΗ, etc. sont donc égales entre elles; les triangles ΛΘΚ, ΛΚΖ, ΛΖΗ, ΛΗΘ, ΕΘΚ, ΕΚΖ, ΕΖΗ, ΕΗΘ sont donc équilatéraux; le solide ΛΘΚΖΗΕ est donc un octaèdre, et il est décrit dans une pyramide équilatérale. Ce qu'il fallait faire \*.]

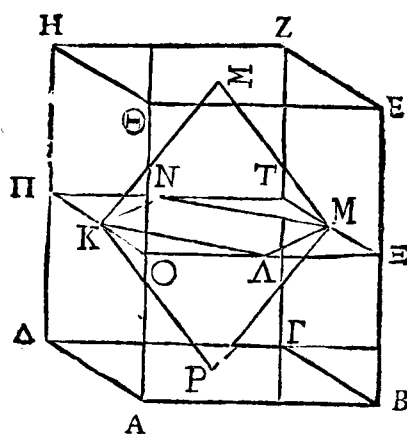
PROPOSITION III.

Dans un cube donné décrire un octaèdre.

Soit ΑΒΓΔΕΖΗΘ le cube donné, prenons les centres Κ, Λ, Μ, Ν des quarrés latéraux, et joignons ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ; je dis que ΚΛΜΝ est un quarré. Car par les points Κ, Λ, Μ, Ν, menons les droites ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ parallèles aux droites ΔΑ,

\* Demonstratio huius propositionis quæ eadem est in omnibus manuscriptis et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ, ex toto est corruptissima, et propositum nullo modo attingit. Hanc demonstrationem ex integro restitui.

ΟΚ, ἡ δὲ ΕΟ τῆς ΟΛ, ἴση ἡ ΠΟ τῇ ΕΟ· διὰ  
τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΟΚ τῇ ΟΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ  
διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΟΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ  
dupla est ΠΟ ipsius ΟΚ, ipsa autem ΕΟ ipsius ΟΛ,  
æqualis vero ΠΟ ipsi ΕΟ; propter hæc utique ΟΚ  
ipsi ΟΛ; ipsum igitur ex ΚΛ duplum est ipsius  
ex ΟΛ. Propter eadem utique et ipsum ex ΜΛ



καὶ τὸ ἀπὸ ΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΛΞ·  
ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΛΜ, καὶ ἡ ΚΛ τῇ  
ΜΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ· καὶ φανε-  
ρὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Εἰλήφθω τῶν ΒΔ, ΕΗ  
δύο τετράγωνων τὰ κέντρα τὰ Ρ, Σ, καὶ  
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ,  
ΣΜ, ΣΝ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ  
ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα· τῷ γὰρ αὐ-  
τῷ λόγῳ ἀποδείξομεν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

duplum est ipsius ex ΛΞ; æquale igitur ipsum  
ex ΚΛ ipsi ex ΛΜ, et ΚΛ ipsi ΜΛ; æquilate-  
rum igitur est ΚΛΜΝ; et evidens est et esse  
rectangulum. Sumantur duorum quadratorum  
ΒΔ, ΕΗ centra Ρ, Σ, et jungantur ipsæ ΡΚ,  
ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. Et evidens  
est æquilatera esse efficientia octaedrum trian-  
gula; eadem enim ratione hæc demonstrabi-  
mus. Quod oportebat facere.

AB, BG, GD. Puisque ΠΟ est double de ΟΚ, que ΕΟ est double de ΟΛ, et que ΠΟ est égal à ΕΟ, la droite ΟΚ sera égale à ΟΛ; le carré de ΚΛ est donc double du carré de ΟΛ (47. 1). Le carré de ΜΛ sera double du carré de ΛΞ, par la même raison; le carré de ΚΛ est donc égal au carré de ΛΜ, et ΚΛ égal à ΜΛ; le quadrilatère ΚΛΜΝ est donc équilatéral; et il est évident qu'il est rectangulaire. Prenons les centres Ρ, Σ des deux carrés ΒΔ, ΕΗ, et joignons ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. Il est évident que les triangles qui forment l'octaèdre sont équilatéraux, car nous démontrerions cela par la même raison. Ce qu'il fallait faire.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ  $AB\Gamma$ ,  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΔΕ$ ,  $ΑΕΒ$ , τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $\Lambda\Theta$ ,  $\Lambda\Κ$ ,  $\Κ\ Η$ ,  $\ Η\Theta$ . λέγω ὅτι τὸ  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$  τετράγωνόν ἐστιν. Ἡχθωσαν διὰ τῶν  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$ , ταῖς  $B\Gamma$ ,  $\GammaΔ$ ,  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$  παράλληλοι αἱ  $M\Nu$ ,  $\Nu\Xi$ ,  $\Xi\omicron$ ,  $\omicron M$ . Ἐπεὶ οὖν ἰσοπλευρόν ἐστι τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ  $\Lambda$  ἐπὶ τὸ  $\Theta$  κέντρον τοῦ περὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ  $\Lambda$  τῷ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου· ἴση ἄρα ἡ  $\Nu\Theta$  τῇ  $\omicron M$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ  $M\ Η$  τῇ  $\ Η\omicron$ . Ἐπειδὴ δὲ ἡ  $M\Nu$  τῇ  $\omicron M$ , καὶ ἡ  $\omicron M$  τῇ  $\omicron\Xi$  ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ  $\Nu\Theta$  τῇ  $M\ Η$ , καὶ ἡ  $\omicron M$  τῇ  $\ Η\omicron$  καὶ ἡ  $M\ Η$  τῇ  $\omicron\Κ$ . Αἱ δὲ ὑπὸ  $\omicron M\ Η$ , καὶ  $\ Η\omicron\Κ$  ὀρθαί· ἐξ οὗ φανερόν· ὅτι ἡ  $\Theta\ Η$  ἴση ἐστὶ τῇ  $\ Η\Κ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ οὖν παράλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$ , ἐν ἐνὶ ἐστὶν

In dato octaedro cubum describere.

Sumantur circulorum circa  $AB\Gamma$ ,  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΔΕ$ ,  $ΑΕΒ$  triangula centra  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$ , et jungantur ipsæ  $\Lambda\Theta$ ,  $\Lambda\Κ$ ,  $\Κ\ Η$ ,  $\ Η\Theta$ ; dico  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$  quadratum esse. Ducantur per puncta  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$  ipsis  $B\Gamma$ ,  $\GammaΔ$ ,  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$  parallelæ  $M\Nu$ ,  $\Nu\Xi$ ,  $\Xi\omicron$ ,  $\omicron M$ . Quoniam igitur æquilaterum est  $AB\Gamma$  triangulum, recta a puncto  $\Lambda$  ad centrum  $\Theta$  circuli circa  $AB\Gamma$  triangulum bifariam secatur angulum ad  $\Lambda$  trianguli  $AB\Gamma$ ; æqualis igitur  $\Nu\Theta$  ipsi  $\omicron M$ . Propter eadem utique æqualis est et  $M\ Η$  ipsi  $\ Η\omicron$ . Quoniam autem  $M\Nu$  ipsi  $\omicron M$ , et  $\omicron M$  ipsi  $\omicron\Xi$  est æqualis; æqualis igitur et  $\Nu\Theta$  ipsi  $M\ Η$ , et  $\omicron M$  ipsi  $\ Η\omicron$ , et  $M\ Η$  ipsi  $\omicron\Κ$ . Anguli autem  $\omicron M\ Η$  et  $\ Η\omicron\Κ$  recti; ex quo evidens est  $\Theta\ Η$  æqualem esse ipsi  $\ Η\Κ$ . Propter eadem utique et reliquæ. Quoniam igitur parallelogramum est  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$ , in uno est plano. Et quoniam dimi-

PROPOSITION IV.

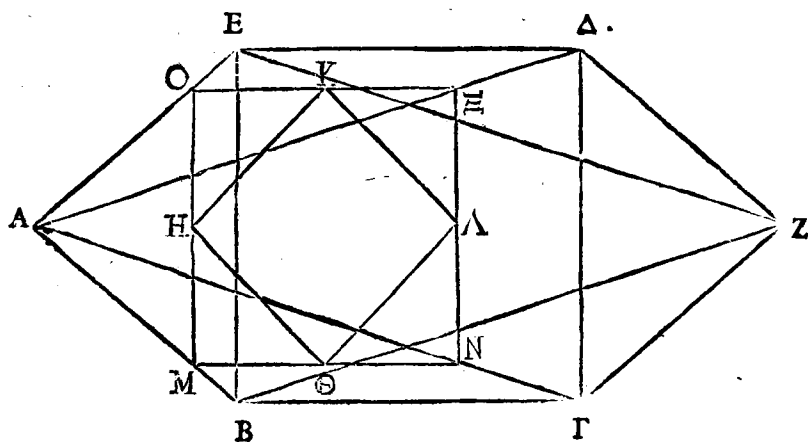
Décrire un cube dans un octaèdre donné.

Prenons les centres  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$ , des cercles décrits autour des triangles  $AB\Gamma$ ,  $ΑΓΔ$ ,  $ΑΔΕ$ ,  $ΑΕΒ$ , et joignons  $\Lambda\Theta$ ,  $\Lambda\Κ$ ,  $\Κ\ Η$ ,  $\ Η\Theta$ ; je dis que le quadrilatère  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$  est un carré. Par les points  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Κ$ ,  $\ Η$ , menons les droites  $M\Nu$ ,  $\Nu\Xi$ ,  $\Xi\omicron$ ,  $\omicron M$  parallèles aux droites  $B\Gamma$ ,  $\GammaΔ$ ,  $ΔΕ$ ,  $ΕΒ$ . Puisque le triangle  $AB\Gamma$  est équilatéral, la droite menée du point  $\Lambda$  au centre  $\Theta$  du cercle décrit autour du triangle  $AB\Gamma$  coupera en deux parties égales l'angle en  $\Lambda$  du triangle  $AB\Gamma$ ; la droite  $\Nu\Theta$  est donc égale à  $\omicron M$  (4. 1). La droite  $M\ Η$  sera égale à  $\ Η\omicron$ , par la même raison. Et puisque  $M\Nu$  est égal à  $\omicron M$ , et que  $\omicron M$  est égal à  $\omicron\Xi$ , la droite  $\Nu\Theta$  sera égale à  $M\ Η$ , la droite  $\omicron M$  égale à  $\ Η\omicron$ , et la droite  $M\ Η$  égale à  $\omicron\Κ$ . Mais les angles  $\omicron M\ Η$ ,  $\ Η\omicron\Κ$  sont droits; il est donc évident que la droite  $\Theta\ Η$  est égale à  $\ Η\Κ$ . Les droites restantes seront égales par la même raison. Mais le quadrilatère  $\Theta\Lambda\Κ\ Η$  est un parallélogramme; ce qua-



ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡμισὺ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  
ὕπὸ  $M\Theta$ ,  $OHK$  ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Theta HK$   
ὀρθή ἐστίν. Ομοίως καὶ αἱ λοιπαὶ τετράγωνον  
ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Theta AKH$ . Δυνατὸν δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς

dium recti est uterque ipsorum  $M\Theta$ ,  $OHK$ ,  
reliquus igitur  $\Theta HK$  rectus est. Similiter et re-  
liqui; quadratum igitur est  $\Theta AKH$ . Possibile



λαμβάνοντα τὰ  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $K$ ,  $H$  κέντρα, καὶ πα-  
ραλλήλους ἀγαγόντα τὰς  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $OM$   
ἐπιζεύξαι τὰς  $\Theta\Lambda$ ,  $\Lambda K$ ,  $KH$ ,  $H\Theta$ , καὶ εἰπεῖν  
τὸ  $\Theta AKH$  τετράγωνον. Εἰ δὲ λάβωμεν καὶ τῶν  
λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἐπιζεύξωμεν  
καὶ τὰ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα,  
καὶ ἔξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγ-  
γεγραμμένον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

autem est a principio, si sumantur centra  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  
 $K$ ,  $H$ , et parallelæ ducantur  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  $OM$ ,  
jungere  $\Theta\Lambda$ ,  $\Lambda K$ ,  $KH$ ,  $H\Theta$ , et dicere  $\Theta AKH$  qua-  
dratum esse. Si igitur sumamus et reliquorum  
triangulorum centra, et jungamus et ipsa, os-  
tendemus reliqua quadrata esse, et habebimus  
in dato octaedro cubum descriptum. Quod op-  
portebat facere.

drilatère est donc dans un seul plan (7. 11). Mais chacun des triangles  $M\Theta$ ,  
 $OHK$  est la moitié d'un droit; l'angle restant  $\Theta HK$  est donc droit; il en sera de  
même des angles restants; le quadrilatère  $\Theta AKH$  est donc un carré. Mais si l'on  
prend d'abord les centres  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $K$ ,  $H$ , si l'on mène les parallèles  $MN$ ,  $N\Xi$ ,  $\Xi O$ ,  
 $OM$ , si l'on joint  $\Theta\Lambda$ ,  $\Lambda K$ ,  $KH$ ,  $H\Theta$ , il est possible de dire que le quadrilatère  $\Theta AKH$   
est un carré. Si nous prenons aussi les centres des triangles restants, et si nous  
les joignons par des droites, nous démontrerons que les quadrilatères restants  
sont aussi des carrés, et nous aurons décrit un cube dans l'octaèdre donné.  
Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Ε΄.

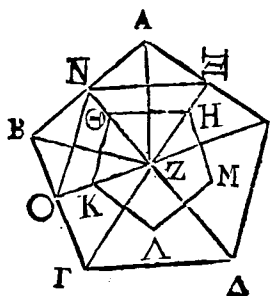
PROPOSITIO V.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

Εκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσάεδρου τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ τρίγωνα, τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, Ν, Ο· δίχα δὲ τμηθήσονται αἱ ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ, τοῖς Ξ, Ν, Ο σημείοις, καὶ ὥς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΟ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΚ.

Exponatur pentagonum icosaedri ΑΒΓΔΕ, et Η, Θ, Κ, Λ, Μ centra circulorum circa ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ triangula, et jungantur ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et rursus junctæ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ producantur ad Ξ, Ν, Ο puncta; bifariam utique secabuntur ipsæ ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ in punctis Ξ, Ν, Ο, et ut ΝΞ ad ΝΟ ita ΗΘ ad ΘΚ; æqualis igitur et ΗΘ ipsi ΘΚ. Similiter autem et reliqua



Ὀμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. Λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Επεὶ γὰρ δύο αἱ ΝΞ, ΝΟ παρά

pentagoni ΗΘΚΛΜ latera æqualia ostendentur. Dico et æquiangulum. Quoniam enim duæ ΝΞ, ΝΟ parallelæ duabus ΗΘ, ΘΚ æqua-

PROPOSITION V.

Décrire un dodécaèdre dans un icosàèdre donné.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone de l'icosàèdre, que les points Η, Θ, Κ, Λ, Μ soient les centres des cercles autour des triangles ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, ΔΖΕ, et joignons ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et de plus ayant joint ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, prolongeons ces droites vers les points Ξ, Ν, Ο; les droites ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ seront coupées en deux parties égales aux points Ξ, Ν, Ο, et ΝΞ sera à ΝΟ comme ΗΘ est à ΘΚ (4, 7); la droite ΗΘ est donc égale à ΘΚ. Nous démontrerons semblablement que les côtés restants du pentagone ΗΘΚΛΜ sont égaux entre eux; je dis aussi que ce pentagone est équiangle. Car puisque les deux droites ΝΞ, ΝΟ parallèles aux deux droites ΗΘ, ΘΚ com-

δύο τὰς  $\text{H}\Theta$ ,  $\Theta\text{K}$  ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερὰ. Νενοήσθω ἀπὸ τοῦ  $\text{Z}$  ἐπὶ τὸ τοῦ  $\text{ABΓΔEZ}$  πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἡγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. Εἰ δὲ ἀπὸ τοῦ  $\text{N}$  ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ  $\text{Z}$  κάθετος, ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ  $\Theta$  παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερόν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ  $\text{Z}$  καθετῶ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ  $\text{Z}$  καθετου. Πάλιν, εἰ ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν  $\Xi$ ,  $\text{O}$  ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ  $\text{ABΓΔE}$  πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ  $\Theta$  τῇ ἀπὸ τοῦ  $\text{Z}$  πρὸς τὰ  $\text{H}$ ,  $\text{K}$ , φανερόν ὅτι αἱ ἐπιζευγνύμεναι ὀρθὰς περιέξουσι μετὰ τῆς αὐτῆς. Εξ οὗ φανερόν ὅτι ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ  $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{M}$  πεντάγωνον.

les angulos comprehendunt, et reliqua manifesta. Intelligatur a puncto  $\text{Z}$  ad  $\text{ABΓΔEZ}$  pentagoni planum perpendicularis ducta, quæ cadet in centrum circuli circa pentagonum. Si igitur rectam a puncto  $\text{N}$  ad punctum in quod cadit perpendicularis a puncto  $\text{Z}$ , jungamus, et per punctum  $\Theta$  parallelam ipsi ducamus, evidens est illam occurrere perpendiculari a puncto  $\text{Z}$ , et parallelam a puncto  $\Theta$  rectum angulum comprehensuram esse cum perpendiculari a puncto  $\text{Z}$ . Rursus, si rectas ducamus a punctis  $\Xi$ ,  $\text{O}$  ad centrum circuli circa  $\text{ABΓΔE}$  pentagonum, et a puncto, in quo occurrit recta a puncto  $\Theta$  ipsi a puncto  $\text{Z}$  ad  $\text{H}$ ,  $\text{K}$ , manifestum est junctas rectos comprehensuras esse cum ipsâ. Ex hoc manifestum est in uno plano esse  $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{M}$  pentagonum.

prènent des angles égaux, le reste sera évident. Concevons une perpendiculaire menée du point  $\text{Z}$  au plan du pentagone  $\text{ABΓΔEZ}$ ; cette perpendiculaire tombera au centre du cercle décrit autour du pentagone. Si du point  $\text{N}$  nous menons une droite au point où tombe la perpendiculaire menée du point  $\text{Z}$ , et si par le point  $\Theta$  nous lui menons une parallèle, il est évident que cette parallèle rencontrera la perpendiculaire menée par le point  $\text{Z}$ , et que la perpendiculaire menée par le point  $\Theta$  comprendra un angle droit avec la perpendiculaire menée par le point  $\text{Z}$ . De plus, si des points  $\Xi$ ,  $\text{O}$ , nous menons des droites au centre du cercle décrit autour du pentagone  $\text{ABΓΔE}$ , et si du point où la droite menée par le point  $\Theta$ , rencontre la droite menée par le point  $\text{Z}$ , nous menons des droites aux points  $\text{H}$ ,  $\text{K}$ , il est évident, que ces droites comprendront des angles droits avec la perpendiculaire menée par le point  $\text{Z}$ . D'après cela il est évident que le pentagone  $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{M}$  est dans un seul plan.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Τῶν πέντε σωμάτων τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας ἱξευρεῖν.

Δει εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχη τὸ εἰκοσαέδρον, φήσομεν οὕτως. Φανερόν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσαέδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνεται δὲ ἐξήκοντα, ὧν ἡμισυ γίνεται τριάκοντα. Ομοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου. Ἐπεὶ δὴ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκαέδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, καὶ γίνονται ἐξήκοντα· πάλιν τὸ ἡμισυ γίνεται τριάκοντα. Διὰ τὸδε ἡμισυ ποιοῦμεν, ἐπειδὴ ἐκάστη πλευρὰ, καὶ ἂν τε ἢ τρίγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ τετράγωνον, ὡς ἐπὶ κύβου, ἐν δευτέρου λαμβάνεται. Ομοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὐρήσεις τὰς πλευρὰς.

## PROPOSITIO VI.

Quinque corporum latera et angulos invenire.

Oportet nos scire si quis interroget nos, quot latera habeat icosaedrum, nos sic responsuros. Evidens est sub viginti triangulis contineri icosaedrum, et utrumque triangulorum sub tribus rectis contineri. Oportet igitur nos multiplicare viginti triangula per latera trianguli, fiunt autem sexaginta, quorum dimidium fit triginta. Similiter autem et in dodecaedro. Quoniam igitur duodecim pentagona comprehendunt dodecaedrum, rursus autem utrumque pentagonum habet quinque rectas, conficiemus duodecies quinque, et fiunt sexaginta; rursus dimidium fit triginta. Propter hoc dimidium facimus, quia utrumque latus, sive sit triangulum, vel pentagonum, vel quadratum, ut in cubo bis sumitur. Similiter autem eadem methodo et in cubo, et in pyramide, et in octaedro faciens invenies latera.

## PROPOSITION VI.

Trouver les côtés et les angles des cinq corps.

Si quelqu'un nous demande quel est le nombre des côtés de l'icosaèdre? nous répondrons ainsi. Puisque l'icosaèdre est compris par vingt triangles, et que chaque triangle est compris par trois droites, il est évident qu'il faut multiplier vingt triangles par les côtés d'un triangle; le produit sera soixante, et la moitié trente. Nous ferons la même chose pour le dodécaèdre. Car puisque douze pentagones comprennent le dodécaèdre, et que chaque pentagone a cinq droites, nous multiplierons douze par cinq, le produit sera soixante, et la moitié trente. Nous prenons la moitié, parce que chaque côté est pris deux fois, soit pour le triangle, ou pour le pentagone, ou pour le carré, comme dans le cube. Par la même méthode, on trouvera semblablement les côtés de l'octaèdre, de la pyramide, et du cube.

Εἰ δὲ βουλευθείης πάλιν ἐκάστω τῶν πέντε σχημάτων εὐρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ· οἷον, ἐπειδὴ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι ἑπτὰ τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰς ἑπτὰ γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέριζε παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις κ' γωνίας οὔσας τοῦ δωδεκαέδρου. Ὀμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὐρήσεις τὰς γωνίας.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Τῶν ἐπιπέδων τῶν πέντε στερεῶν ἕκαστον περιεχόντων κλίσιν ἐξευρεῖν.

Εἰρητήθη πῶς ἐφ' ἐκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων, ἐνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιοῦν δοθέντος, εὐρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ἣ κέκλιται πρὸς ἀλλήλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὐρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας δι-

Si autem velis rursus singularum quinque figurarum invenire angulos, rursus eadem faciens, divide per plana comprehenduntia unum angulum solidi; ut, quoniam icosaedri angulum comprehendunt quinque triangula, divide per quinque, fient duodecim anguli icosaedri. Quoniam autem dodecaedri tria pentagona comprehendunt angulum, divide per tria, et habebis viginti angulos existentes dodecaedri. Similiter autem et in reliquis invenies angulos.

## PROPOSITIO VII.

Planorum quæ quinque solidorum unumquodque continent inclinationem invenire.

Quæsitum est quomodo in unâquâque quinque solidarum figurarum, uno plano comprehenduntium dato, inveniatur et inclinatio, in quam inclinantur inter se comprehenduntia plana unamquamque figurarum. Inventio autem, ut Isidorus

Si l'on veut trouver les angles de chacune des cinq figures, on fera la même chose; on divisera par le nombre des plans qui comprennent un angle du solide; ainsi l'angle de l'icosaèdre étant compris par cinq triangles, on divisera par cinq, et l'on aura douze angles pour l'icosaèdre. Et puisque trois pentagones comprennent l'angle du dodécaèdre, on divisera par trois, et l'on aura vingt angles pour le dodécaèdre. On trouvera semblablement les angles des autres figures.

## PROPOSITION VII.

Trouver les inclinaisons des plans qui comprennent les cinq solides.

On demande comment dans chacune des cinq figures solides, un des plans qui la comprennent étant donné, on peut trouver l'inclinaison qu'ont entre eux les plans qui comprennent chacune de ces cinq figures. Notre célèbre maître Isidore m'avait enseigné que cette inclinaison se trouvait ainsi. Pour le cube, il est

δάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ὀρθὴν γωνίαν τέμνουσι τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. Ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος, ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη καθέτῳ, περιφέρειαι γραφεῖσιν τεμνέτωσαν ἀλλήλας· καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγραφῶσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπεζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφεῖσιν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς

noster docuit magnus magister, habet hunc modum. In cubo quidem ad rectum angulum sese secare comprehendentia ipsum plana manifestum est. In pyramide vero, exposito uno triangulo, centris terminis unius lateris, intervallo autem rectâ a vertice ad basim ductâ perpendiculari, circumferentiæ descriptæ sese mutuo secant; et a sectione ad centra junctæ rectæ comprehendunt inclinationem comprehendentium pyramidem planorum. In octaedro autem ex latere trianguli descripto quadrato, centris terminis diametri, intervallo autem similiter trianguli perpendiculari describantur circumferentiæ, et rursus rectæ a sectione communi ad centra junctæ comprehendunt reliquum ex duobus rectis inquisitæ inclinationis. In icosaedro autem a latere trianguli descripto pentagono, jungatur recta duobus lateribus subtensa, et centris terminis ipsius, intervallo autem trianguli perpendiculari descriptis cir-

évident que les plans qui le comprènent se coupent à angles droits. Pour la pyramide, un triangle étant exposé, des extrémités d'un côté comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du sommet à la base, décrivez des arcs de cercle; ces arcs se couperont; et les droites menées du point de section aux centres, comprendront l'inclinaison des plans qui contiennent la pyramide. Dans l'octaèdre, ayant décrit un quarré avec le côté du triangle, des extrémités de la diagonale comme centres, et d'un intervalle semblablement égal à la perpendiculaire du triangle, décrivez des arcs de cercle; les droites menées du point de la commune section aux centres comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison cherchée. Dans l'icosaèdre, décrivez un pentagone avec un des côtés du triangle, et menez une diagonale, de deux des extrémités de cette diagonale comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, décrivez des arcs de cercles; les droites menées du

ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσας εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένη καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφωσαν περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου.

Οὕτως μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλείεστατος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως· ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνίσω· καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος.

Νενοήσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλευρῶν

cumferentiis, rectæ a communi sectione ad centra. junctæ comprehendent reliquum, similiter ex duobus rectis inclinationis icosædri planorum. In dodecaedro vero, exposito uno pentagono, junctâ similiter rectâ duo latera subtendente, centris terminis ejus, intervallo autem ductâ perpendiculari a bipartitâ sectione ipsius ad parallelum ipsi latus pentagoni describantur circumferentiæ, et rectæ a puncto in quo conveniunt inter se ad centra junctæ similiter comprehendent reliquum ex duobus rectis inclinationis planorum dodecaedri.

Ita quidem dictus clarrissimus vir de dictis habuit sermonem, manifestâ uniuscujusque visâ sibi demonstratione; ut autem perspicue fiat in eis demonstrativa theoria sermonem in unoquoque explicabo; et primum in pyramide.

Intelligatur pyramis ABΓΔ quatuor æquila-

point de la commune section aux centres, comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison des plans de l'icosaèdre. Dans le dodécaèdre, un pentagone étant exposé, menez semblablement une droite qui soit soutendante de deux côtés, des extrémités de cette droite comme centres et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du milieu de la soutendante au côté parallèle, décrivez deux arcs de cercle, les droites menées du point où les arcs se coupent aux centres, comprendront semblablement un angle dont le supplément à deux droits, sera l'inclinaison des plans du dodécaèdre.

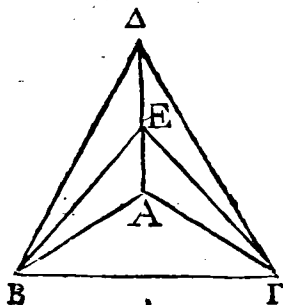
Tel est le discours que cet homme illustre tenait sur cet objet, car la démonstration de tout cela lui paraissait évidente. Mais comme la chose deviendra plus claire à l'aide de démonstrations, je vais expliquer le discours d'Isidore dans toutes ses parties; et je commence par la pyramide.

Concevons une pyramide ABΓΔ comprise par quatre triangles équilatéraux;



τρεγώνων περιεχομένη ἡ  $AB\Gamma\Delta$ , τοῦ  $AB\Gamma$  βάσιως  
ροουμένου, κορυφῆς δὲ τοῦ  $\Delta$  καὶ τμηθείσης τῆς  
 $A\Delta$  πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ  $E$ , ἐπιζεύχθωσαν αἱ  
 $BE$ ,  $EG$ . Καὶ ἐπεὶ ἰσοπλευρά ἐστι τὰ  $A\Delta B$ ,  $A\Delta\Gamma$   
τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ  $A\Delta$  αἱ  $BE$ ,  $EG$   
ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν  $A\Delta$ . Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ  
 $BEG$  γωνία ὀξεῖα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ διπλῇ ἐστίν  
ἡ  $AG$  τῆς  $AE$ , τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς  
 $AG$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$ . Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς  $AG$  ἴσον  
ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EG$ , ὧν τὸ ἀπὸ  $AG$  πρὸς  
τὸ ἀπὸ  $GE$  λόγον ἔχει ὡς δ' πρὸς γ', καὶ ἐστὶν ἴση  
ἡ  $GE$  τῇ  $EB$ . τὸ ἄρα ἀπὸ  $B\Gamma$  ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ

teris triangulis contenta, basi  $AB\Gamma$  intellectâ,  
vertice vero  $\Delta$ ; et secto  $A\Delta$  latere bifariam in  
 $E$ , jungantur ipsæ  $BE$ ,  $EG$ . Et quoniam æquila-  
tera sunt  $A\Delta B$ ,  $A\Delta\Gamma$  triangula, et bifariam seca-  
tur  $A\Delta$ ; ipsæ  $BE$ ,  $EG$  igitur perpendiculares sunt  
ad  $A\Delta$ . Dico  $BEG$  angulum acutum esse. Quoniam  
enim dupla est  $AG$  ipsius  $AE$ , quadruplum est ip-  
sum ex  $AG$  ipsius ex  $AE$ . Sed ipsum ex  $AG$  æquale  
est ipsis  $AE$ ,  $EG$ , quorum ipsum ex  $AG$  ad ipsum  
ex  $GE$  rationem habet quam 4 ad 3, et est æqua-  
lis  $GE$  ipsi  $EB$ ; ipsum igitur ex  $B\Gamma$  minus est



$BE$ ,  $EG$  ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BEG$ . Ἐπεὶ οὖν δύο  
ἐπιπέδων τῶν  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ  
 $A\Delta$ , καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς ἐν ἑκατέρῳ  
τῶν ἐπιπέδων ἡγμέναι εἰσὶν αἱ  $BE$ ,  $EG$ , καὶ  
ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν· ἡ ὑπὸ  $BEG$  ἄρα γω-

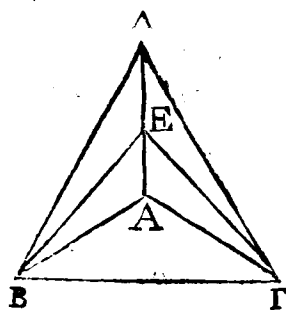
ipsis ex  $BE$ ,  $EG$ ; acutus igitur est angulus  $BEG$ .  
Quoniam igitur duorum planorum  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$   
communis sectio est  $A\Delta$ , et communi sectioni  
ad rectos in utroque planorum ductæ sunt  
rectæ  $BE$ ,  $EG$ , et acutum angulum comprehen-

que cette pyramide ait pour base  $AB\Gamma$ , et pour sommet le point  $\Delta$ ; coupons le  
côté  $A\Delta$  en deux parties égales au point  $E$ , et joignons  $BE$ ,  $EG$ . Puisque les  
triangles  $A\Delta B$ ,  $A\Delta\Gamma$  sont équilatéraux, et que  $A\Delta$  est coupé en deux parties égales,  
les droites  $BE$ ,  $EG$  seront perpendiculaires à  $A\Delta$  (8. 1). Je dis que l'angle  $BEG$  est  
aigu. Car puisque  $AG$  est double de  $AE$ , le quarré de  $AG$  sera quadruple du  
quarré de  $AE$ . Mais le quarré de  $AG$  est égal à la somme des quarrés des droites  
 $AE$ ,  $EG$ , et le quarré de  $AG$  à avec le quarré de  $GE$ , la raison de quatre à trois,  
et  $GE$  est égal à  $EB$ ; le quarré de  $B\Gamma$  est donc plus petit que la somme des quarrés  
des droites  $BE$ ,  $EG$ ; l'angle  $BEG$  est donc aigu (13. 2). Et puisque la droite  $A\Delta$   
est la commune section des plans  $AB\Delta$   $A\Delta\Gamma$ , que les droites  $BE$ ,  $EG$  sont menées  
perpendiculairement à la commune section dans l'un et l'autre plan, et qu'elles



νία ἡ κλίσις ἔσται τῶν ἐπιπέδων· καὶ ἔστι δεδο-  
μένη, δίδεται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ οὕσα τοῦ τριγώ-  
νου, καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΒ, ΕΓ κάθετος οὕσα  
τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· κέντροις τοίνυν τοῖς  
Β, Γ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς,  
διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γρα-  
φόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας ὡς κατὰ

dunt; ipse BEF igitur angulus inclinatio erit pla-  
norum; et est ipsa data, data est enim ipsa ΒΓ  
latus existens trianguli, et utraque ipsarum ΗΒ,  
ΕΓ, perpendicularis existens æquilateri trianguli;  
centris igitur Β, Γ, hoc est terminis unius lateris,  
intervallo autem trianguli perpendiculari, cir-  
cumferentiæ descriptæ se secant ut in punc-



τὸ Ε σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Β, Γ  
ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν  
τῶν ἐπιπέδων. Τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. Καὶ  
ὅτι μὲν κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ  
τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμενοι κύκλοι τέμ-  
νουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκατέρα γὰρ τῶν ΒΕ,  
ΕΓ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· οἱ δὲ κέν-  
τροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς  
ΒΓ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων·

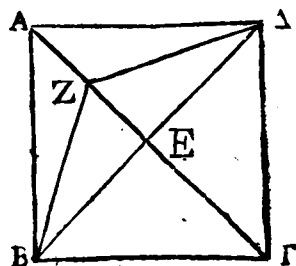
to Ε, et ab eo ad puncta Β, Γ junctæ rectæ  
comprehendent inclinationem planorum. Hoc  
autem erat dictum. Et centris quidem Β, Γ, inter-  
vallo autem trianguli perpendiculari, descriptos  
circulos sese secare, manifestum est; utraque  
enim ΒΕ, ΕΓ major est quam dimidiâ ipsius ΒΓ;  
et centris Β, Γ, intervallo autem dimidiâ ipsius  
ΒΓ, descripti circuli sese tangunt; si autem minor

comprènent un angle aigu, l'angle BEF sera l'inclinaison des plans (déf. 6. 11).  
Mais cette inclinaison est donnée, car la droite ΒΓ, côté du triangle, est donnée,  
ainsi que chacune des droites ΗΒ, ΕΓ, qui sont les perpendiculaires d'un triangle  
équilatéral; les arcs décrits des centres Β, Γ, c'est-à-dire des extrémités d'un côté,  
et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, se couperont donc en  
un point Ε, et les droites menées du point Ε aux points Β, Γ, comprendront par-  
conséquent l'inclinaison des plans; et c'est là ce qu'on disait. Or il est évident que  
les arcs décrits des points Β, Γ, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du  
triangle se couperont, car chacune des droites ΒΕ, ΕΓ est plus grande que la moitié  
de ΒΓ; et en effet, si les arcs de cercle étaient décrits des points Β, Γ, d'un intervalle

εἰ δὲ ἐλάττων ᾗ, οὐδὲ ἐφάτονται, οὐδὲ τέμνουσιν·  
εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι· καὶ οὕτως ὁ περὶ  
τῆς πυραμίδος σαφὴς τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς  
ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Νενοήσθω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ ΑΒΓΔ  
πυραμὶς κερυφὴν ἔχουσα τὸ Ε, καὶ τὰ περιέ-  
χοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσό-  
πλευρα· ἔσται δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἡμισυ ὀκ-  
ταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἐνὸς τριγώνου  
ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  
ΒΖ, ΔΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι



ἐπὶ τὴν ΑΕ. Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεία  
ἐστίν. Επεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τετρά-  
γωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διαμέτρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ

sit, neque sese tangunt, nec secant; si vero major  
omnino secant; et ita de pyramide et manifestus  
et congruens demonstrationibus apparet sermo.

PROPOSITIO VIII.

Intelligatur rursus super quadratum ΑΒΓΔ  
pyramis verticem habens Ε, et comprehendentia  
ipsam præter basim triangula æquilatera; erit  
igitur ΑΒΓΔΕ pyramis dimidium octaedri. Secetur  
unum latus ΑΕ unius trianguli bifariam in Ζ, et  
jungantur ΒΖ, ΔΖ; æquales igitur sunt ipsæ ΒΖ,

ΔΖ et perpendiculares ad ΑΕ. Dico ΒΖΔ angulum  
obtusum esse. Jungatur enim ΒΔ. Et quoniam  
quadratum est ΑΓ, diameter autem ΒΔ, ipsum ex

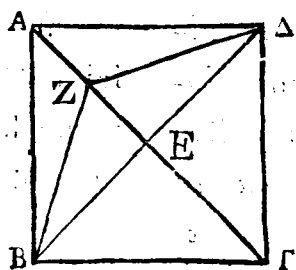
égal à la moitié de ΒΓ, ces arcs se toucheraient l'un l'autre; ils ne se toucheraient,  
ni ne se couperaient, si l'intervalle était plus petit, et ils se couperaient, s'il  
était plus grand. Ainsi ce que l'on disait touchant la pyramide, est évident, et  
conforme à la démonstration.

PROPOSITION VIII.

Concevons sur le quarré ΑΒΓΔ une pyramide ayant pour sommet le point Ε,  
cette pyramide, la base exceptée, étant comprise par des triangles équilaté-  
raux; la pyramide ΑΒΓΔΕ sera la moitié d'un octaèdre. Coupons un côté ΑΕ  
d'un triangle en deux parties égales au point Ζ, et joignons ΒΖ, ΔΖ; les  
droites ΒΖ, ΔΖ seront égales et perpendiculaires à ΑΕ. Je dis que l'angle ΒΖΔ  
est obtus. Joignons ΒΔ. Puisque ΑΓ est un quarré, et que ΒΔ est sa diagonale,

ΒΔ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν δ' πρὸς γ'. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία. Ἰση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΔ μείζον ἐστίν· καὶ ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία.

ΒΔ duplum est ipsius ex ΔΑ, ipsum autem ex ΔΑ ad ipsum ex ΔΖ rationem habet, ut antea dictum est, quam 4 ad 3; et ipsum ex ΒΔ igitur ad ipsum ex ΔΖ rationem habet quam 8 ad 3. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΖΒ; ipsum igitur ex ΒΔ ipsis ex ΒΖ, ΖΔ majus est; et obtusus igitur est ΒΖΔ angulus.



Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ τεμνόντων ἄλληλα κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ ΑΕ, αἱ δὲ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΖΔ περιέχουσαι ἀμβλείαν· ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ ἐπιπέδων· ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ, δεδοταὶ καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου, ἡ ΑΔ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀνα-

Et quoniam duorum planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ sese secantium communis sectio est ΑΕ, ad rectos autem ipsi in utroque planorum ductæ sunt ΒΖ, ΖΔ comprehendentes angulum obtusum; angulus igitur ΒΖΔ reliquus est ex duobus rectis inclinationis planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ; si igitur datis sit angulus ΒΖΔ, data est et dicta inclinatio. Quoniam igitur datum est triangulum octaedri, et unum latus octaedri est ΑΔ, et ex ipso quadratum ΑΓ descriptum est; data est et

le carré de ΒΔ sera double du carré de ΔΑ, et le carré de ΔΑ aura avec le carré de ΔΖ, la raison que quatre a avec trois, comme on l'a démontré plus haut; le carré de ΒΔ aura donc avec le carré de ΔΖ, la raison que huit a avec trois. Mais ΔΖ est égal à ΖΒ; le carré de ΒΔ est donc plus grand que la somme des carrés des droites ΒΖ, ΖΔ; l'angle ΒΖΔ est donc obtus (12. 2). Et puisque les plans ΑΒΕ, ΑΔΕ se coupent, que ΑΕ est leur section commune, et que les droites ΒΖ, ΖΔ, menées perpendiculairement à ΑΕ, dans l'un et l'autre plan, comprennent un angle obtus, le supplément de l'angle ΒΖΔ a deux droits, sera l'inclinaison des plans ΑΒΕ, ΑΔΕ (déf. 6. 11). Si donc l'angle ΒΖΔ est donné, l'inclinaison sera donnée. Et puisque le triangle de l'octaèdre est donné, que ΑΔ est un côté de l'octaèdre, que sur ce côté on a construit le carré ΑΓ, que

γέγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος οὔσα τοῦ τετραγώνου. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ κάθετοι τοῦ τριγώνου· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία δέδοται· ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τοῦ ΑΓ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τῆς ΒΔ, ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν ὑπὸ ΒΖΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. Καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφεῖς μὲν ὡς ἑκάτερα τῶν ΒΖ, ΖΔ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ· καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. Καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς μὲν τὴν ΔΖ δυνάμει λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς ΒΔ δυνάμει ἐστὶ τετραπλασία· ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκάτεραν τῶν ΒΖ, ΖΔ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ. Καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

ΒΔ diameter existens quadrati. At vero et ΒΖ, ΖΔ perpendiculares trianguli; quare et ΒΖΔ angulus datus est; descripto igitur quadrato a latere trianguli ut ΑΓ, et junctâ diametro ut ΒΔ, si centris Β, Δ, intervallo autem trianguli perpendiculari circulos describamus, sese secant in Ζ, et a puncto Ζ ad centra junctæ rectæ comprehendunt angulum ΒΖΔ, qui est reliquus, ut dictum est, ex duobus rectis planorum inclinationis. At vero hoc loco patet utramque ipsarum ΒΖ, ΖΔ majorem esse quam dimidiam ipsius ΒΔ; et ideo in organicâ constructione necesse est sese secare circulos. Sed et ex demonstratione evidens fit ipsam ΒΔ ad ΔΖ quidem potentiâ rationem habere quam 8 ad 3, dimidiæ autem ipsius ΒΔ potentiâ est quadrupla; quare ob id major fit utraque ipsarum ΒΖ, ΖΔ quam dimidia ipsius ΒΔ. Et hæc quidem de octaedro.

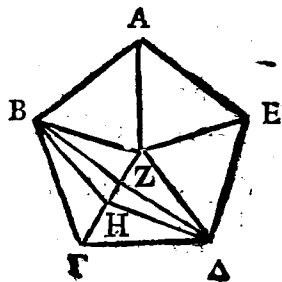
la diagonale ΒΔ du quarré est donnée, et que les droites ΒΖ ΖΔ sont les perpendiculaires du triangle, l'angle ΒΖΔ sera donné; ayant donc décrit sur un côté du triangle le quarré ΑΓ, et ayant mené la diagonale ΒΔ, si des centres Β, Δ, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire du triangle, nous décrivons des arcs de cercles, ces arcs se couperont en un point Ζ, et les droites menées du point Ζ aux centres comprendront un angle ΒΖΔ, dont le supplément à deux droites sera l'inclinaison des plans. Or il est évident que chacune des droites ΒΖ, ΖΔ est plus grande que la moitié de ΒΔ; c'est pourquoi, dans la construction organique, les cercles doivent se couper mutuellement. Car, d'après la démonstration, il est évident que le quarré de ΒΔ a avec le quarré de ΔΖ, la raison que huit a avec trois, et que le quarré de la droite ΒΔ est quadruple du quarré de sa moitié (20. 6); chacune des droites ΒΖ, ΖΔ est donc plus grande que la moitié de ΒΔ; et voilà ce qui regarde l'octaèdre.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

## PROPOSITIO IX.

Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου γενοήσθω πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ζ, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσοπλευρά εἶναι· ἔσται δὴ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἐνὸς τριγώνου ἡ ΖΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΗ, ΗΔ ἴσαι τε οὔσαι, καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι· καὶ

In icosaedro autem intelligatur pentagonum et æquilaterum et æquiangulum ΑΒΓΔΕ, super hoc autem pyramis verticem habens punctum Ζ, ita ut comprehendenda ipsam triangula æquilatera sint; erit igitur ΑΒΓΔΕ pyramis pars icosaedri figuræ. Secetur unum latus ΖΓ unius trianguli bifariam in Η, et jungantur ductæ ΒΗ, ΗΔ et æquales existentes et perpendiculares factæ ad ΖΓ; dico ΒΗΔ angulum obtusum esse;



ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΒΔ ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ ΒΓΔ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. Ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΔ· ἐλάττονες γὰρ αἱ ΒΗ, ΗΔ τῶν ΒΓ, ΓΔ. Ομοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ἑρθὰς τῆς κλίσεως τῶν

et est hic evidens. Juncta enim ΒΔ obtusum quidem subtendit ΒΓΔ angulum pentagoni. Hoc autem major est angulus ΒΗΔ; minores enim ipsæ ΒΗ, ΗΔ ipsis ΒΓ, ΓΔ. Congruenter utique præcedentibus angulus ΒΗΔ reliquus est ex

## PROPOSITION IX.

Concevons dans l'isocaèdre le pentagone équilatéral et équiangle ΑΒΓΔΕ, et sur ce pentagone concevons une pyramide ayant son sommet en Ζ, de manière que les triangles qui la comprennent soient équilatéraux; la pyramide ΑΒΓΔΕ sera une partie de l'icosaedre. Coupons un côté ΖΓ d'un triangle en deux parties égales au point Η, et joignons ΒΗ, ΗΔ; ces droites seront égales et perpendiculaires à ΖΓ; je dis que l'angle ΒΗΔ est obtus; ce qui est ici évident. En effet, joignons ΒΔ, cette droite soutendra l'angle obtus ΒΓΔ du pentagone; et l'angle ΒΗΔ est plus grand que celui-ci (21. 1), car les droites ΒΗ, ΗΔ sont plus petites que les droites ΒΓ, ΓΔ. Conformément à ce qui précède, le supplément

ΒΖΓ, ΓΖΔ τριγώνων. Ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων· ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεिनούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τῆς ΒΔ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ΒΗ, ΗΔ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΔ. Εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς ΒΔ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ Η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὰ Β, Δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ἑρβὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. Καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν ὅτι ἑκάτερα τῶν ΒΗ, ΗΔ μείζων ἴστί τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ· εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι.

Νενεχθῶ χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ ΘΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΛ πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ ΚΜΝΞΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ, καὶ ἦχθω

duobus rectis Inclinationis triangulorum ΒΖΓ, ΓΖΔ. Hoc dato, data erit et inclinatio icosaedri planorum; a latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, junctâ duo latera pentagoni subtendente, ut in figurâ, ipsâ ΒΔ datâ, similiter autem et perpendicularibus ΒΗ, ΗΔ triangulorum, datus est et angulus ΒΗΔ. Si enim centris terminis ipsius duo latera pentagoni subtendentis, ut ΒΔ, intervallo autem trianguli perpendiculari circuli describantur, sese secant, ut in puncto Η, et a puncto Η ad puncta Β, Δ junctæ rectæ comprehendunt reliquum ex duobus rectis planorum inclinationis. Et hoc loco ex figurâ quidem manifestum est utramque ipsarum ΒΗ, ΗΔ majorem esse dimidiâ ipsius ΒΔ; hoc autem potest ex organicâ constructione demonstrari.

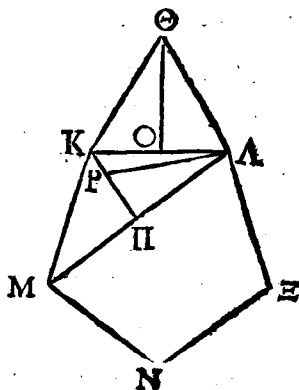
Intelligatur scorsim æquilaterum quidem triangulum ΘΚΛ, et ab ipsâ ΚΛ pentagonum describatur ΚΜΝΞΛ, et jungatur ΜΛ, et ducatur

de l'angle ΒΗΔ à deux droits, sera l'inclinaison des triangles ΒΖΓ, ΓΖΔ. Cet angle étant donné, l'inclinaison des plans de l'icosaèdre sera donnée; car ayant décrit un pentagone sur un côté d'un triangle de l'icosaèdre, et étant donnée la droite ΒΔ, qui soutend deux côtés du pentagone, comme dans la figure, ainsi que les perpendiculaires ΒΗ, ΗΔ des triangles, l'angle ΒΗΔ sera donné. Car si des extrémités de la droite ΒΔ qui soutend deux côtés du pentagone, comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire d'un triangle, on décrit des arcs de cercle qui se coupent en un point Η, les droites menées du point Η aux points Β, Δ, comprendront un angle dont le supplément à deux droits sera l'inclinaison des plans. Il est évident ici, d'après la figure, que chacune des droites ΒΗ, ΗΔ, est plus grande que la moitié de ΒΔ; ce qui peut aussi se démontrer par la construction organique.

Car concevons séparément le triangle équilatéral ΘΚΛ; sur ΚΛ décrivons le pentagone ΚΜΝΞΛ; joignons ΜΛ, et menons la perpendiculaire ΘΟ du triangle

κάθετος τοῦ  $\Theta\text{ΚΛ}$  τριγώνου ἢ  $\Theta\text{Ο}$ · λέγω ὅτι ἡ  $\Theta\text{Ο}$  μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς  $\text{ΜΛ}$  τῆς ὑποτείνουσας τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ  $\text{Κ}$  ἐπὶ τὴν  $\text{ΜΛ}$  κάθετου τῆς  $\text{ΚΠ}$ , ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $\text{ΚΑΠ}$  μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς

perpendicularis  $\Theta\text{Ο}$  trianguli  $\Theta\text{ΚΛ}$ ; dico  $\Theta\text{Ο}$  majorem esse dimidiā ipsius  $\text{ΜΛ}$  subtendentis inclinationem planorum. Ductā a puncto  $\text{Κ}$  ad  $\text{ΜΛ}$  perpendiculari  $\text{ΚΠ}$ , quoniam angulus  $\text{ΚΑΠ}$  major est tertiā parte recti, hoc est angulo



υπὸ  $\text{ΚΘΟ}$ , συνεστώτω τῇ ὑπὸ  $\text{ΚΘΟ}$  ἴση ἡ ὑπὸ  $\text{ΠΑΡ}$ · ἡ ἄρα  $\text{ΠΑ}$  κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ  $\text{ΡΑ}$ · ὥστε τὸ ἀπὸ  $\text{ΡΑ}$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $\text{ΑΠ}$  λόγον ἔχει ὃν ὁ  $\delta'$  πρὸς τὸν  $\gamma'$ . Μείζων δὲ ἡ  $\text{ΚΛ}$  τῆς  $\text{ΑΡ}$ · τὸ ἄρα ἀπὸ  $\text{ΚΛ}$  πρὸς τὸ ἀπὸ  $\text{ΑΠ}$  μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ  $\delta'$  πρὸς τὸν  $\gamma'$ . Ἐχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ  $\Theta\text{Ο}$  ὃν ὁ  $\delta'$  πρὸς τὸν  $\gamma'$ · ἡ ἄρα  $\text{ΚΛ}$  πρὸς τὴν  $\text{ΑΠ}$  μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τῶν  $\Theta\text{Ο}$ · μείζων ἄρα ἡ  $\Theta\text{Ο}$  τῆς  $\text{ΑΠ}$ .

$\text{ΚΘΟ}$ , constituatur angulo  $\text{ΚΘΟ}$  æqualis angulus  $\text{ΠΑΡ}$ ; ipsa igitur  $\text{ΠΑ}$  perpendicularis est æquilateri trianguli, ejus latus  $\text{ΡΑ}$ . Quare ipsum ex  $\text{ΡΑ}$  ad ipsum  $\text{ΑΠ}$  rationem habet quam 4 ad 3. Major autem  $\text{ΚΛ}$  ipsā  $\text{ΑΡ}$ ; ipsum igitur ex  $\text{ΚΛ}$  ad ipsum ex  $\text{ΑΠ}$  majorem rationem habet quam 4 ad 3. Habet autem et ad ipsum ex  $\Theta\text{Ο}$  quam 4 ad 3; ipsa igitur  $\text{ΚΛ}$  ad  $\text{ΑΠ}$  majorem rationem habet quam ad  $\Theta\text{Ο}$ ; major igitur  $\Theta\text{Ο}$  quam  $\text{ΑΠ}$ .

$\Theta\text{ΚΛ}$ ; je dis que  $\Theta\text{Ο}$  est plus grand que la moitié de  $\text{ΜΛ}$  qui soutend l'inclinaison des plans. Du point  $\text{Κ}$  menons  $\text{ΚΠ}$  perpendiculaire à  $\text{ΜΛ}$ . Puisque l'angle  $\text{ΚΑΠ}$  est plus grand que la troisième partie du droit, c'est-à-dire que l'angle  $\text{ΚΘΟ}$ , faisons l'angle  $\text{ΠΑΡ}$  égal à l'angle  $\text{ΚΘΟ}$ ; la droite  $\text{ΠΑ}$  sera la perpendiculaire du triangle équilatéral, dont  $\text{ΡΑ}$  est le côté; le carré de  $\text{ΡΑ}$  a donc avec le carré de  $\text{ΑΠ}$ , la raison que quatre a avec trois. Mais  $\text{ΚΛ}$  est plus grand que  $\text{ΑΡ}$  (21. 1); le carré de  $\text{ΚΛ}$  a donc avec  $\text{ΑΠ}$  une raison plus grande que celle de quatre à trois. Mais le carré de  $\text{ΚΛ}$  a avec le carré de  $\Theta\text{Ο}$ , la raison que quatre a avec trois, la droite  $\text{ΚΛ}$  a donc avec  $\text{ΑΠ}$  une raison plus grande qu'avec  $\Theta\text{Ο}$ ; la droite  $\Theta\text{Ο}$  est donc plus grande que  $\text{ΑΠ}$  (10, 5).

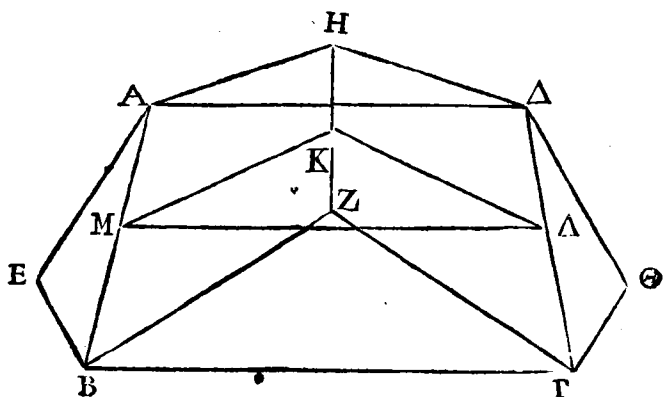


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτως. Νενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται τὸ  $AB\Gamma\Delta$ , καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ  $AEBZH$ ,  $HA\Theta\Gamma Z$ ; λέγω δὴ καὶ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγόνων. Τετμήσθω ἡ  $ZH$  δίχα κατὰ τὸ  $K$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $K$  τῇ  $ZH$  πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ  $K\Lambda$ ,  $KM$ , καὶ ἐπε-

In dodecaedro autem hoc modo. Intelligatur unum quadratum  $AB\Gamma\Delta$ . cubi, a quo dodecaedrum describitur, et duo plana dodecaedri  $AEBZH$ ,  $HA\Theta\Gamma Z$ ; dico igitur et sic datam esse inclinationem duorum pentagonorum. Secetur  $ZH$  bifariam in  $K$ , et a puncto  $K$  ipsi  $ZH$  ad rectos ducantur in utroque planorum ipsæ  $K\Lambda$ ,  $KM$ , et jungatur  $M\Lambda$ . Dico igitur primum  $MKA$



ζεύχθω ἡ  $M\Lambda$ . λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ  $MKA$  γωνία ἀμβλεία ἐστὶ. Δέδεικται γάρ ἐν τῷ ιγ'. Ἐξελίψ τῶν στοιχείων ἥτοι τῆς στάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ  $K$  κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευ-

angulum obtusum esse. Ostensum est enim in decimo tertio libro elementorum, scilicet in constructione dodecaedri, ipsam a puncto  $K$  perpendicularem ductam ad  $AB\Gamma\Delta$  quadratum di-

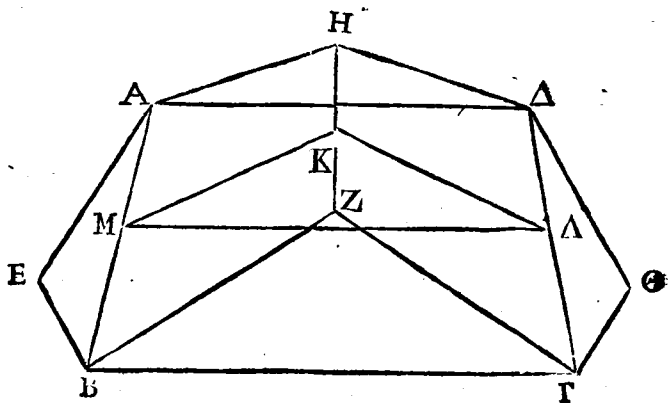
PROPOSITION X.

Quant au dodécaèdre, nous procéderons ainsi. Concevons que  $AB\Gamma\Delta$  soit un des quarrés du cube d'après lequel on a construit le dodécaèdre (17. 13); que  $AEBZH$ ,  $HA\Theta\Gamma Z$  soient deux plans du dodécaèdre; je dis que l'inclinaison de deux pentagones est donnée ainsi. Coupons  $ZH$  en deux parties égales au point  $K$ ; du point  $K$  menons dans l'un et l'autre plan les droites  $K\Lambda$ ,  $KM$  perpendiculaires à  $ZH$ , et joignons  $M\Lambda$ . Je dis premièrement que l'angle  $MKA$  est obtus. Car dans le treizième livre des Éléments, dans la construction du dodécaèdre, on a démontré



ρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς  $ΜΛ$ · καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ  $ΜΚΛ$  γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. Συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ  $ΚΛ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν  $ΚΛ$  καὶ τὴν  $ΚΜ$ , ἴσας οὖσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς  $ΜΛ$ · τῆς ἄρα ὑπὸ  $ΜΚΛ$  γωνίας δοθείσης, ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ἑρθὰς ἡ κλίσις ἐσται τῶν ἐπιπέδων

midiam esse lateris pentagoni; quare minor est dimidiâ ipsius  $ΜΛ$ ; et ob id angulus  $ΜΚΛ$  obtusus est. Demonstratum est autem in eodem theoremate, et ipsum quidem ex  $ΚΛ$  æquale esse ipsi ex dimidio lateris cubi, et ipsi ex dimidio lateris pentagoni, ita ut eadem  $ΚΛ$  et ipsa  $ΚΜ$  æquales existentes, majores sint dimidiâ ipsius  $ΜΛ$ ; ergo  $ΜΚΛ$  angulo dato, reliquus ex duobus rectis inclinatio erit planorum data. Quoniam igitur



δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ  $ΑΒΓΔ$  τετραγώνου ἡ ὑποτείνουσα ἐστὶ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δοδέται δὲ τὸ πεντάγωνον· δέδοται ἄρα ἡ  $ΜΛ$ . Δοδέται δὲ καὶ ἑκατέρω τῶν  $ΜΚ$ ,  $ΚΛ$ , κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ

latus quadrati  $ΑΒΓΔ$  subtendit duo latera pentagoni, datum est autem pentagonum; data igitur est  $ΜΛ$ . Data est autem et utraque ipsarum  $ΜΚ$ ,  $ΚΛ$ , perpendiculares enim sunt a bipar-

que la perpendiculaire menée du point  $K$  au carré  $ΑΒΓΔ$  est la moitié du côté du pentagone; cette perpendiculaire est donc plus petite que la moitié de  $ΜΛ$ ; l'angle  $ΜΚΛ$  est donc obtus. Mais on a démontré aussi dans ce même théorème que le carré de  $ΚΛ$  est égal au carré de la moitié du côté du cube, et au carré de la moitié du côté du pentagone; les droites  $ΚΛ$ ,  $ΚΜ$  égales entre elles, sont donc plus grandes que la moitié de  $ΜΛ$ ; l'angle  $ΜΚΛ$  étant donné, le supplément de cet angle a deux droits, qui est l'inclinaison des plans, est donc donné. Et puisque le côté du carré  $ΑΒΓΔ$  soutend deux côtés du pentagone, et que le pentagone est donné, la droite  $ΜΛ$  sera donnée. Mais chacune des droites

τῆς διχοτομίας τῆς<sup>1</sup> ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑπο-  
τεινούσης ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ  
πενταγώνου, ὡς τὴν ΖΗ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  
ΛΚΜ ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς  
τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. Καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς  
ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρὴ δοθέντος  
τοῦ πενταγώνου ἐπιζεύξαι τὴν ὑποτείνουσαν  
ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ  
τοῦ κύβου· καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς,  
διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένη  
καθέτῳ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ τοῦ πεντα-  
γώνου πλευρὰν ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς ἡ ΚΛ  
τῇ ΚΜ γραφεῖσθαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς  
συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέν-  
τρα ἐπιζεύξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπου-  
σαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων.  
Οτι γὰρ ἡ ΚΛ κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας  
τῆς ΜΛ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συνα-  
ποδίδεικται τοῦτο.

titâ duo latera subtendente ad parallelum ipsi  
latus pentagoni, ut ZH; datus est igitur et  
ΛΚΜ angulus reliquus, ut dictum est, ex duo-  
bus rectis inquisitæ inclinationis. Pulchre igitur  
in organicâ constructione dixit oportere in  
dato pentagono jugere subtendentem duo latera,  
quæ æqualis fit lateri cubi; et centris terminis  
ipsius, intervallo autem perpendiculari a bi-  
paritâ ductâ ad parallelum ipsi pentagoni latus,  
ut in figurâ sunt ΚΛ, ΚΜ, describere cir-  
cumferentias, et a puncto concursûs circumfe-  
rentiarum ad centra jungere rectas compren-  
dentes reliquum ex duobus rectis inclinationis  
planorum. Ipsam autem ΚΛ perpendicularem  
majorem esse dimidiâ ipsius ΜΛ dictum est, ut  
in elementis hoc demonstratum est.

МК, КΛ est donnée, car ces droites sont menées des milieux des droites AB, ΔΓ, qui soutendent deux côtés du pentagone, perpendiculairement au côté ΖΗ qui est parallèle aux droites AB, ΔΓ; l'angle ΛΚΜ dont le supplément a deux droits est, ainsi qu'on l'a dit, l'inclinaison cherchée, est donc donné. C'est donc avec raison qu'Isidore dit que, dans la construction organique, il faut, dans le pentagone donné, mener une droite qui soutende deux côtés, laquelle est égale au côté du cube; décrire des arcs de cercle des extrémités de cette droite, comme centres, et d'un intervalle égal à la perpendiculaire menée du milieu de cette droite au côté du pentagone qui lui est parallèle (telles sont, dans la figure, les droites ΚΛ, ΚΜ), et du point de rencontre des deux arcs mener à leurs centres des droites qui comprendront un angle dont le supplément a deux droits, sera l'inclinaison des plans. Car on a déjà dit que la perpendiculaire ΚΛ est plus grande que la moitié de ΜΛ, et cela est démontré dans les Éléments.



COLLATIO  
CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ  
REGIÆ,  
CUM EDITIONE OXONIÆ,  
CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI  
SUNT MOMENTI.

Litterâ *a* antecedente designatur codex 190; litterâ *b*, editio Oxoniæ; litterâ *c*, codex 1038; litterâ *d*, codex 2466; litterâ *e*, codex 2344; litterâ *f*, codex 2345; litterâ *g*, codex 2342; litterâ *h*, codex 2346; litterâ *k*, codex 2481; litterâ *l*, codex 2531; litterâ *m*, codex 2347; litterâ *n*, codex 2343; litterâ *o*, codex 2448; litterâ *p*, codex 2352; litterâ *q*, codex 2363; litterâ *r*, codex 2349; litterâ *s*, codex 2350; litterâ *t*, codex 1981; litterâ *v*, codex 2467; litterâ *x*, codex 2472; litterâ *y*, codex 2366; litterâ *z*, codex 2348.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                    |
|---------------------------------|----------------------|-----------------------------------|
| 1. ὑποκειμένω, . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτῷ ὑποκειμένω                   |
| 2. ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος |
| 3. ἐπιζευχθῇ, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἀποζευχθῇ                         |
| 4. ὁξεῖα . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.        |
| 5. ὑπὸ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | περὶ                              |
| 6. ἡ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                            |
| 7. γωνιῶν ἐπιπέδων . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπιπέδων γωνιῶν                   |
| 8. καὶ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                            |
| 9. ὁ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                            |
| 10. εὐθεῖα . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                            |

# 534 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                                                                       |                                              |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 11. ἐστίν, . . . . .                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                         | δε                         |
| 12. γωνίαν, . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                     |
| 13. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεόν τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. | Hæc definitio deest in omnibus manuscriptis. | concordat cum edit. Paris. |

Definitio 28 subsequitur definitionem 29 in *a, h*.

## PROPOSITIO I.

- |                                                                                                                    |                                                                                                                                     |                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. μετεωροτέρω. . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                | τῷ μετεώρῳ                                                 |
| 2. μετεωροτέρω. . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                | μετεώρῳ                                                    |
| 3. δὴ δοθεῖσων . . . . .                                                                                           | ἄρα, . . . . .                                                                                                                      | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 4. εὐθεῖα γὰρ εὐθεῖα οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. . . . | ἐπεὶ δὲ περὶ ἐὰν κέντρῳ τῷ B, καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γράψωμεν, αἱ δάμετροι ἀνίσους ἀποληφόνται τοῦ κύκλου περιφερείας. . . . . | concordat cum edit. Paris.<br>MM. <i>d, e, f, l, m, n.</i> |
- et enim si centro B, et intervallo AB circulum describamus, diametri inæquales asument circuli circumferentias.
- car si du centre B et de l'intervalle AB, nous décrivions un cercle, les diamètres soutiendraient des arcs inégaux.
- MM. *a, g, h.* . . .

PROPOSITIO II.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                       |                 |                            |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἐπιπέδω, . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἢ . . . . .        | Id... . . . .   | εἴη                        |

PROPOSITIO III.

- |                      |               |                            |
|----------------------|---------------|----------------------------|
| 1. τεμνέτω . . . . . | Id... . . . . | τεμνέτωσαν                 |
| 2. δὴ . . . . .      | δὲ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO IV.

- |                          |                 |                            |
|--------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. τριγώνω . . . . .     | Id... . . . .   | deest.                     |
| 2. ἐστίν. . . . .        | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ταῖς . . . . .        | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶν ἴση . . . . .   | Id... . . . .   | ἴση ἐστὶ.                  |
| 5. ἐπὶ . . . . .         | Id... . . . .   | deest.                     |
| 6. ἴση ἐδείχθη . . . . . | Id... . . . .   | ἐδείχθη ἴση                |
| 7. διὰ . . . . .         | Id... . . . .   | ὑπὸ                        |

PROPOSITIO V.

- |                           |               |            |
|---------------------------|---------------|------------|
| 1. μετεωροτέρω, . . . . . | Id... . . . . | μετέωρω,   |
| 2. δὴ τομὴν . . . . .     | Id... . . . . | τομὴν δὴ   |
| 3. ἐκάτεραν . . . . .     | Id... . . . . | ἐκάτερον   |
| 4. αὐτῆς ἢ BZ . . . . .   | Id... . . . . | ἢ BZ αὐτῆς |
| 5. ἐστίν . . . . .        | Id... . . . . | deest.     |
| 6. μετεωροτέρω . . . . .  | Id... . . . . | μετέωρω    |

PROPOSITIO VI.

- |                       |                   |                            |
|-----------------------|-------------------|----------------------------|
| 1. αὐτῷ . . . . .     | Id... . . . .     | deest.                     |
| 2. ἄρα . . . . .      | deest . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστίν . . . . .    | Id... . . . .     | deest.                     |
| 4. ἐστὶν ἴση. . . . . | Id... . . . .     | ἴση ἐστίν.                 |
| 5. ὑπὸ . . . . .      | ὑπὸ τῶν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. εὐθείαι . . . . .  | Id... . . . .     | deest.                     |

## PROPOSITIO VII.

| EDITIO PARISIENSIS.      | CODEx 190.           | EDITIO OXONIÆ. |
|--------------------------|----------------------|----------------|
| 1. μετεωρωτέρω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | μετέωρω        |
| 2. μετεωροτέρω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | μετέωρω        |
| 3. ἐπὶ τὸ Z . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |

## PROPOSITIO VIII.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. AB, ΓΔ, ΒΔ ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα AB, ΓΔ, ΒΔ             |
| 2. πρὸς ὀρθάς . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθή                       |
| 3. ἐστὶν . . . . .          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. εὐθεία . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθείας                    |
| 5. ἐστὶν . . . . .          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO IX.

|                            |                      |                            |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τῇ EZ παράλληλος, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | παράλληλος τῇ EZ,          |
| 2. ἄρα . . . . .           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO X.

|                                                    |                      |                             |
|----------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. αἱ AB, ΒΓ ἀπτόμεναι ἀλλήλων . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, ΒΓ |
| 3. καὶ μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                      |
| 4. ABΓ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | ABΓ τῇ                      |

## PROPOSITIO XI.

|                                         |                      |                        |
|-----------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. δοθὲν . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| 2. κάθετον . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | κάθητον                |
| 3. ὑποκείμενον . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | συνκείμενον            |
| 4. ὑποκείμενον . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | συνκείμενον            |
| 5. ἄρα . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| 6. τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ |
| 7. ἄρα δοθέντος . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | δοθέντος ἄρα           |



PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                                                  |              |                                                           |
|--------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------|
| 2. μετέωρόν τι σημείον τὸ B,                     | <i>Id...</i> | τὸ σημείον μετέωρον τὸ B,                                 |
| 3. σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἀνέσ-<br>ταται ἡ AD. | <i>Id...</i> | δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐ-<br>θεῖα γραμμὴ ἀνίσταται. |

PROPOSITIO XIII.

- |                                                                                                               |              |                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ<br>αὐτῷ ἐπιπέδῳ,                                                                  | <i>Id...</i> | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς<br>αὐτῷ σημείου,                                                              |
| 3. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ A<br>τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐ-<br>θεῖαι αἱ AB, AG πρὸς ὀρθὰς<br>ἀνιστάτωσαν, | <i>Id...</i> | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς<br>αὐτῷ σημείου τοῦ A δύο εὐ-<br>θεῖαι αἱ AB, AG πρὸς ὀρθὰς ἀν-<br>εστάσθωσαν |
| 4. τῷ                                                                                                         | deest        | concordat cum edit. Paris.                                                                                    |
| 5. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ<br>αὐτῷ ἐπιπέδῳ                                                                   | deest        | τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς<br>αὐτὸ σημείου                                                              |

PROPOSITIO XIV.

- |                |              |             |
|----------------|--------------|-------------|
| 6. ἴσται       | <i>Id...</i> | ἴστι        |
| 2. ἐκβλητέντι  | <i>Id...</i> | ἐκβεβλήθεντ |
| 3. δὴ          | <i>Id...</i> | δὲ          |
| 4. εἰσὶν ἴσαι, | <i>Id...</i> | ἴσαι εἰσὶν  |

PROPOSITIO XV.

- |            |             |                            |
|------------|-------------|----------------------------|
| 1. ἀλλήλων | <i>Id..</i> | ἀλλήλων παράλληλοι         |
| 2. τῷ διὰ  | deest       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστι    | deest       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

- |                                                                                                        |              |                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 et 2. ἐκβαλλόμεναι αἱ EZ, HΘ,<br>ἥτοι ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ<br>τὰ E, H συμπεσοῦνται. Εκβε-<br>III. | <i>Id...</i> | ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ EZ,<br>HΘ, ἥτοι ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη, ἢ<br>ἐπὶ τὸ EH. Εκβεβλήσθω πρό-<br>68. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|



# 538 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

ελήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Z, Θ  
μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν πρό-  
τερον . . . . .

τερον ὡς ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη,  
καὶ συμπιπτέτωσαν

- |                                                |                      |                                |
|------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 3. ἐστὶν ἐπιπέδω. . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπιπέδῳ ἐστίν.                 |
| 4. ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη συμπεσοῦν-<br>ται. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη. |
| 5. τὰ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |

## PROPOSITIO XVII.

- |                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα                        |
| 6. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὴν . . . . .  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 11. τὴν . . . . .  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XVIII.

- |                                        |                      |                            |
|----------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἐστὶν. . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἐσται.                     |
| 2. ἐστὶν . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ἐπίπεδον. . . . .                   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XIX.

- |                                        |                      |                            |
|----------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δὲ . . . . .                        | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθάς, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ὀρθάς ἀνασταθήσεται,  |

## PROPOSITIO XX.

- |                                                  |                           |                               |
|--------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 1. εἰσιν. . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .      | εἰσιν πάντα μεταλαμβανόμεναι. |
| 3. δύο δὲ ΔΑ, ΑΒ δυσὶν ΑΕ, ΑΒ<br>ἴσαι, . . . . . | δύο δυσὶν ἴσαι, . . . . . | concordat cum edit. Paris.    |

PROPOSITIO XXI.

| EDITIO PARISIENSIS.        | CODEx 190.      | EDITIO OXONIAE.            |
|----------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἡ . . . . .             | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. Αἱ δὲ . . . . .         | Id. . . . .     | Καὶ ἔτι αἱ                 |
| 3. ἄρα ἔξ . . . . .        | Id. . . . .     | ἔξ ἄρα                     |
| 4. εἰσὶ μείζονες . . . . . | Id. . . . .     | μείζονες εἰσι              |
| 5. γωνίαι . . . . .        | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXII.

|                                                        |                 |                              |
|--------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------|
| 1. αὐτὰς . . . . .                                     | Id. . . . .     | αὐτὰ                         |
| 2. εἰσιν . . . . .                                     | Id. . . . .     | ἔστωσαν.                     |
| 3. εἰσιν. . . . .                                      | Id. . . . .     | εἰσι πάντα μεταλαμβανόμεναι. |
| 4. ταῖς . . . . .                                      | Id. . . . .     | deest.                       |
| 5. ἐστὶν . . . . .                                     | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 6. δυοῖ . . . . .                                      | δύο . . . . .   | concordat cum edit. Paris.   |
| 7. ὑπὸ ΔΕΖ . . . . .                                   | Id. . . . .     | πρὸς τῷ Ε                    |
| 8. δὴ . . . . .                                        | Id. . . . .     | δὲ                           |
| 9. καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ<br>μείζονες εἰσι . . . . . | Id. . . . .     | αἱ δὲ ΗΚ, ΔΖ τῆς ΑΓ          |
| 10. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . .                         | Id. . . . .     | deest.                       |

ALITER.

|                                                 |                         |                                 |
|-------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 1. ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ,<br>ΗΚ, . . . . . | Id. . . . .             | ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσαι, |
| Lin. 13. Εἰ δὲ οὐ, . . . . .                    | Id. . . . .             | οὐ δὲ οὐ                        |
| 2. ἔσται . . . . .                              | Id. . . . .             | ἐστὶ                            |
| 3. μείζων ἐστί. . . . .                         | μείζονες εἰσι . . . . . | concordat cum edit. Paris.      |
| 5. ἴση ἐστί . . . . .                           | Id. . . . .             | ἐστὶν ἴση.                      |
| 6. ἐστί. . . . .                                | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris.      |
| 6. ἐστίν. . . . .                               | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris.      |
| 7. τῆς ΑΓ μείζονες εἰσι . . . . .               | Id. . . . .             | μείζονες εἰσι τῆς ΑΓ            |
| 8. ἐστὶν . . . . .                              | Id. . . . .             | deest.                          |

## PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                        |                     |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. ἴσται δὴ ἥτοι ἐντὸς τοῦ AMN<br>τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευ-<br>ρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός. | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| Εστω πρότερον ἐντὸς, . .                                                               |                     |                            |
| 2. ἢ ΛΞ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. .                                                         | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| Ultima lin. δυσὶ . . . . .                                                             | δύο . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ABΓ . . . . .                                                                       | ABΓ γωνία . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. εἰσὶν ἴσαι. . . . .                                                                 | Id. . . . .         | ἴσαι εἰσὶν.                |
| 6. εἰσὶν ἴσαι. . . . .                                                                 | Id. . . . .         | ἴσαι εἰσὶν.                |
| 7. ἄρα αἱ . . . . .                                                                    | αἱ ἄρα . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἴση ἐστὶ. Λέγω δὴ . . . . .                                                         | Id. . . . .         | ἐστὶν ἴση λέγω             |
| 10. λοιπὴ . . . . .                                                                    | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 11. τὴν . . . . .                                                                      | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ἄρα . . . . .                                                                      | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 14. τὴν . . . . .                                                                      | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 15. εὐθειᾶι . . . . .                                                                  | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 16. εἰσὶν ἐλάσσονες. . . . .                                                           | Id. . . . .         | ἐλάσσονες εἰσὶν.           |
| 17. ἐστὶν . . . . .                                                                    | Id. . . . .         | deest.                     |
| 18. ἴσον ἔστω . . . . .                                                                | Id. . . . .         | ἔστω ἴσον                  |
| 19. ἐστὶν ἴση. . . . .                                                                 | Id. . . . .         | ἴση ἐστὶν.                 |
| 20. γωνία . . . . .                                                                    | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 21. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . .                                                         | Id. . . . .         | deest.                     |
| 22. τὸ . . . . .                                                                       | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 23. ἐστὶν . . . . .                                                                    | Id. . . . .         | κεῖται                     |
| 24. ἐστὶν . . . . .                                                                    | Id. . . . .         | deest.                     |
| 25. ἐστὶ . . . . .                                                                     | Id. . . . .         | deest.                     |
| 26. δὴ . . . . .                                                                       | Id. . . . .         | δὲ                         |
| 27. ΝΞ. . . . .                                                                        | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 28. δυσὶ . . . . .                                                                     | δύο . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 29. ἐστὶν . . . . .                                                                    | deest . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 30. δυσὶ ταῖς ὑπὸ . . . . .                                                            | δύο ταῖς . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 31. ἀλλ αἱ . . . . .                                                                   | Id. . . . .         | ἀλλὰ καὶ αἱ                |
| 32. δύο. . . . .                                                                       | δύο . . . . .       | δύο                        |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS. 541

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                              |                              |                            |
|------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 33. ἐστὶν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                     |
| 34. τὴν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .         | τὸ                         |
| 35. πρόβλημα . . . . .       | πρόβλημα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |
| 36. οὕτως . . . . .          | deest . . . . .              | concordat cum edit. Paris. |
| 37. δυοῖ . . . . .           | deest . . . . .              | concordat cum edit. Paris. |
| 38. καὶ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                     |
| 39. τὴν ΛΞ εὐθείαν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .         | τῇ ΛΞ εὐθείᾳ               |
| 40. δυοῖ . . . . .           | δύο . . . . .                | concordat cum edit. Paris. |
| 41. ἴση ἐστίν. . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .         | ἐστὶν ἴση.                 |
| 42. δυοῖ . . . . .           | δύο . . . . .                | concordat cum edit. Paris. |
| 43. δυοῖ . . . . .           | δύο . . . . .                | concordat cum edit. Paris. |

## LEMMA.

|                                                            |                                               |                                              |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. μὴ μείζονι οὕση τῆς AB διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἢ ΑΓ, . .   | <i>Id.</i> . . . . .                          | εὐθεῖα ἴση ἢ ΑΓ,                             |
| 2. τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                          | τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ.          |
| 3. μείζον ἐστι . . . . .                                   | ὑπερέκει . . . . .                            | concordat cum edit. Paris.                   |
| 4. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον ἐστι . . . . . | ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB μείζον ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ | τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον ἐστι |
| 5. τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ μείζον . . .                             | μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ                         | concordat cum edit. Paris.                   |
| 6. πρόκειται . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                          | πρόκειται                                    |

## PROPOSITIO XXIV.

|                         |                      |                   |
|-------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. ἐστὶν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 2. παρὰ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς              |
| 3. εἶσιν, . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | παράλληλοί εἰσιν, |
| 4. περιέχουσιν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | μεριέχουσιν.      |
| 5. ἐστὶν ἴση. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση.              |
| 6. ἐστὶν ἴση, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστίν,        |

## PROPOSITIO XXV.

|                           |                      |                |
|---------------------------|----------------------|----------------|
| 1. ὁσαυδηποτοῦν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 2. συμπληρώσθω . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | συμπληρώσθωσαν |

542 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| Lin. 9. μὲν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἐστὶν . . . . .    | εἰσιν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐπτιν . . . . .    | εἰσιν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶν . . . . .    | εἰσιν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. ἐστὶ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. στερεοῦ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 9. ἴση, . . . . .     | ἴσον . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXVI.

|                                                        |                          |                                               |
|--------------------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. δοθεῖσα . . . . .                                   | δοθεῖσα εὐθεῖα . . . . . | concordat cum edit. Paris.                    |
| 2. αὐτῇ δοθέν . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | αὐτῇ                                          |
| 3. τῶν . . . . .                                       | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                    |
| 4. τῷ . . . . .                                        | τῇ . . . . .             | concordat cum edit. Paris.                    |
| 5. τῷ . . . . .                                        | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                    |
| 6. περιεχομένη . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                        |
| 7. ἐστὶν . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                        |
| 9. δυοὶ . . . . .                                      | δύο . . . . .            | concordat cum edit. Paris.                    |
| 10. ἐστὶν ἴση . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴση ἐστὶν                                     |
| 11. δυοὶ . . . . .                                     | δύο . . . . .            | concordat cum edit. Paris.                    |
| 12. εἰς ἴσαι, . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴσαι εἰς,                                     |
| 13. τῇ AB . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                        |
| 14. τῷ A . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                        |
| 15. δοθείση στερεᾷ γωνία τῇ πρὸς<br>τῷ Δ ἴση . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | τῇ δοθείση στερεᾷ γωνία ἴσην<br>στερεᾷ γωνίαν |

PROPOSITIO XXVII.

|                                                                |                      |                                            |
|----------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------|
| 1. τὴν δὲ . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔτι τὴν                                |
| 2. καὶ . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                     |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                     |
| 4. ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία<br>τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                     |
| 5. δοθείσης ἀρὰ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἀρὰ δοθείσης                               |
| Lin. 12. ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ. . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | στερεὸν παραλληλέπιπτον ἀνα-<br>γέγραπται. |

PROPOSITIO XXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.             | EDITIO OXONIE.             |
|-------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. διαγωνίους . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .   | διαγωνίας                  |
| 2. καὶ τὸ . . . . .     | καὶ αὐτὸ . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τε . . . . .         | <i>Id.</i> , . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO XXIX.

|                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὄντα, . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. μὲν . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO XXX.

|                                                                                  |                      |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                                                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .                                                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐφιστῶται . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | αἱ ἐφιστῶται               |
| 4. ΔΘ, . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ΘΔ, καὶ ἔτι αἱ HE, ZM,     |
| 5 et 6. τὸ P, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθω-<br>σαν αἱ ZM, HE ἐπὶ τὰ O, Π,<br>καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὰ O, P, Π, Ξ, σημεῖα, καὶ |
| 7. αἱ . . . . .                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι . . . . .                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ αὐτῶν αἱ ἐφιστῶσαι     |
| 9. ἔστι . . . . .                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. μὲν . . . . .                                                                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 11. πάλιν . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 12. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι αἱ . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ αὐτῶν αἱ ἐφιστῶσαι     |
| 13. τῶν . . . . .                                                                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXXI.

|                          |                      |                                                            |
|--------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .         | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 2. βάσεων, . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | βάσεων, ἢ δὲ ὑπὸ AAB τῇ ὑπὸ<br>ΓΡΔ ἄνισος,                 |
| 3. PY, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | PY, καὶ πρὸς τῷ Υ σημείῳ τῇ PT<br>παράλληλος ἀνίστατω ἢ YX |
| 4. ἐστὶν ἢ μὲν . . . . . | μὲν ἢ . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 5. τί . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                     |

# 544 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                              |                          |                            |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 6. τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖν ἀπεναντίον . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 7. ἡ Ττ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ καὶ συνεζεύχθωσαν . | ἡ αΤτ καὶ ἐκβεβλήσθω . . | concordat cum edit. Paris. |
| 8. μὲν . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 9. ὧν αἱ ἐφιστῶσαι, . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .     | καὶ αὐτῶν αἱ ἐφιστῶσαι     |
| 10. ἐστὶν ἴσον . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴσον ἐστὶν.                |
| 11. ἐστὶν ἴσον. . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴσον ἐστὶν.                |
| 12. στερεόν. . . . .                                         | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 13. βάσις . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 14. στερεόν . . . . .                                        | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 15. ἐστὶ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 16. ὁ περ ἔδει δεῖξαι. . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 17. ἐστὶ . . . . .                                           | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 18. γὰρ . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 19. ἐπιπεδον . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 20. ἐστὶν ἴσον, . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴσον ἐστὶν,                |

## PROPOSITIO XXXII.

|                        |                      |         |
|------------------------|----------------------|---------|
| 1. Εστω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστωσαν |
| 2. ὅτι ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |
| 3. δὲ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                                                            |                         |                            |
|------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. εὐθείας . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .    | εὐθείαις                   |
| 2. παραλληλογράμμω, . . . .                                | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστὶν . . . . .                                         | εἰσὶν . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ καὶ ὅμοια . . . . .                                | εἰσὶν καὶ ὅμοια . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια . . | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 6. ἥ περ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .    | ἡ                          |
| 7. καὶ . . . . .                                           | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 8. μὲν . . . . .                                           | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 9. μὲν . . . . .                                           | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 10. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς                              | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |



COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἐπειδήπερ . . . . . ἐπείπερ . . . . . concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXIV.

|                                                                                         |                          |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος<br>στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς<br>ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. | Id. . . . .              | deest.                     |
| 2. ἐστὶ . . . . .                                                                       | Id. . . . .              | deest.                     |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                       | Id. . . . .              | deest.                     |
| 4. ἐσται . . . . .                                                                      | ἔσονται . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἄλλο δέ τι τὸ ΓΦ, . . . .                                                            | ἔξυθεν δὲ τὸ ΓΦ, . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶν ἄρα ὡς . . . . .                                                               | Id. . . . .              | ὡς ἄρα                     |
| 7. γὰρ . . . . .                                                                        | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἴσων . . . . .                                                                       | Id. . . . .              | ἴσον                       |
| 9. ἐστὶ . . . . .                                                                       | Id. . . . .              | καὶ                        |
| 10. ἀλλ' . . . . .                                                                      | Id. . . . .              | καὶ                        |
| 11. ἐστὶ . . . . .                                                                      | Id. . . . .              | deest.                     |
| 12. τοῦ . . . . .                                                                       | τούτου . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 13. οὖν . . . . .                                                                       | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 14. βάσις . . . . .                                                                     | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 15. ΓΦ . . . . .                                                                        | ΓΦ ἐστὶ . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 16. στερεὸν . . . . .                                                                   | Id. . . . .              | deest.                     |
| 17. ἐστὶ . . . . .                                                                      | Id. . . . .              | deest.                     |
| 18. βάσεων ἐπίπεδα . . . .                                                              | ἐπίπεδα . . . . .        | βάσεων ἐπίπεδοι            |
| 19. σημεία, . . . . .                                                                   | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 20. γὰρ . . . . .                                                                       | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 21. ἐστὶν . . . . .                                                                     | Id. . . . .              | deest.                     |
| 22. στερεοῦ . . . . .                                                                   | Id. . . . .              | deest.                     |
| 23. ἄρα στερεῶν . . . . .                                                               | Id. . . . .              | στερεῶν ἄρα                |
| 25. ἐστὶ . . . . .                                                                      | Id. . . . .              | deest.                     |
| 24. τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΑΒ . . . .                                                             | Id. . . . .              | τῷ μὲν ΒΓ τὸ ΑΒ            |



## PROPOSITIO XXXV.

| EDITIO PARISPENSIS.             | CODEX 190.               | EDITIO OXONIÆ.              |
|---------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 1. ὑπὸ τῶν καθέτων, . . . .     | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 2. γωνίας περιέχουσαι . . . .   | <i>Id.</i> . . . . .     | περιέχουσαι γωνίας          |
| 3. εἰλήφθω . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .     | εἰλήφθωσαν                  |
| 4. τὰ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 5. καὶ . . . . .                | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 6. ἐστὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 7. ἐστὶν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 8. ἐστὶν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 9. τὰς . . . . .                | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 10. ἐστὶν . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 11. ἴση ἐστὶν. . . . .          | ἐστὶν ἴση οὕτως. . . . . | concordat cum edit. Paris.  |
| 12. τοῖς ἀπὸ τῶν . . . . .      | τὸ ἀπὸ τῶν . . . . .     | τοῖς ἀπὸ τῆς.               |
| 13. τῆς . . . . .               | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 14. ἐστὶ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 15. ἐστὶν . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 16. τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση. . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .     | ἴση τῇ ὑπὸ ΕΔΜ.             |
| 17. ὑπόκειται . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .     | ὑπόκειται                   |
| 18. δυοὶ . . . . .              | δύο . . . . .            | concordat cum edit. Paris.  |
| 19. ἴση ἐστί. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .     | ἐστὶν ἴση.                  |
| 20. τῇ ὑπὸ ZEN ἐστὶν ἴση. . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | γωνία τῇ ὑπὸ ZEN ἴση ἐστὶν. |
| 21. ταῖς . . . . .              | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 22. ἐστὶν . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                      |
| 23. τῆς . . . . .               | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.  |
| 24. . . . .                     | . . . . .                | deest conclusio.            |

## COROLLARIUM.

|                       |                               |                            |
|-----------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. ἐπίπεδοι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .          | εὐθύγραμμοι                |
| 2. αὐτῶν . . . . .    | αὐτὰς . . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 3. εἰσίν. . . . .     | εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXXVI.

| EDITIO PARISIENSIS.                            | CODĒX 190.               | EDITIO OXONIÆ.             |
|------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ τῶν . . . . . | τῶν . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 2. κείσθω . . . . .                            | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἡ . . . . .                                 | Id. . . . .              | deest.                     |
| 4. ἑκατέρα τῶν ΛΞ, ΕΔ, . . .                   | Id. . . . .              | ἐκάστη τῶν ΛΞ, ΕΖ, ΕΗ, ΕΔ, |
| 5. ἐστὶ . . . . .                              | Id. . . . .              | deest.                     |
| 6. ἐφεστήκασιν . . . . .                       | ἐφέστασιν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἐστὶ . . . . .                              | Id. . . . .              | deest.                     |
| 8. στερεὸν . . . . .                           | στερεὸν παραλληλεπίπεδον | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXXVII.

|                     |             |            |
|---------------------|-------------|------------|
| 1. στερεὰ . . . . . | Id. . . . . | deest.     |
| 2. στερεὰ . . . . . | Id. . . . . | deest.     |
| 3. ὁμοίον . . . . . | Id. . . . . | deest.     |
| 4. ΛΓ, . . . . .    | Id. . . . . | ΛΓ ὁμοίον, |
| 5. καὶ . . . . .    | Id. . . . . | deest.     |

PROPOSITIO XXXVIII.

|                       |                 |                            |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἦχθω . . . . .     | ἔστω . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶν . . . . .    | Id. . . . .     | deest.                     |
| 3. δὴ . . . . .       | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. δυσὶν . . . . .    | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἀδύνατον . . . . . | Id. . . . .     | ἀτοπον.                    |

PROPOSITIO XXXIX.

In codicibus *a*, *h* hīc agitur de cubo, in cōteris autem de parallelepipedo.

|                                                |                     |                            |
|------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. στερεοῦ παραλληλεπιπέδου .                  | κύβου . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 2. στερεοῦ παραλληλεπιπέδου .                  | κύβου . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 3. στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέ-<br>δου . . . . . | κύβου γὰρ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐκβεβλήσθω . . . . .                        | Id. . . . .         | ἐκβεβλήσθωσαν              |

# 548 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER UNDECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                                                                                                                                                      |                                                           |                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 5. τομή τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ,<br>τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλε-<br>πιπέδου . . . . .                                                                                                                                 | τομή τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ<br>ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου . . . . . | τῶν ἐπιπέδων τομή ἔττω ἡ ΥΣ,<br>τῶν δὲ στερεοῦ παραλληλεπι-<br>πέδου . . . . .    |
| 6. ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, .                                                                                                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                      | αἱ ΥΣ, ΔΗ δίχα τέμνουσιν ἀλλή-<br>λας, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΥΤ τῇ<br>ΤΣ ἴση ἐστὶν, |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                                                                            |
| 8. τῇ ΥΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΥ<br>τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν<br>ἴσον, . . . . .                                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                      | βάσει τῇ ΥΕ ἴση ἐστὶ, τὸ δὲ ΔΕΥ<br>τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἴσον<br>ἐστὶ,          |
| 9. γωνίαις ἴσαι . . . . .                                                                                                                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                      | γωνίας.                                                                           |
| 10. γωνία . . . . .                                                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                                                                            |
| 11. ἐστὶν . . . . .                                                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                                                                            |
| 12. Καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐ-<br>τῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ,<br>Η, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ<br>ΔΗ, ΥΣ. ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπι-<br>πέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ<br>παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ<br>ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ μὲν . . . . . | ἴση ἄρα ἡ μὲν . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris,<br>solo deficiente vocabulo<br>μὲν.                    |
| 13. Η δὲ . . . . .                                                                                                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                      | ἐστὶ δὲ καὶ ἡ                                                                     |
| 14. ἴση . . . . .                                                                                                                                                                                                    | deest . . . . .                                           | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 15. ἄρα . . . . .                                                                                                                                                                                                    | deest . . . . .                                           | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 16. πλευραῖς . . . . .                                                                                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                                                                            |
| 17. στερεοῦ, καὶ τὰ ἐξῆς. . . . .                                                                                                                                                                                    | κύβου, καὶ τὰ ἐξῆς. . . . .                               | concordat cum edit. Paris.                                                        |

## PROPOSITIO XL.

|                  |                 |                            |
|------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. Καὶ . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|------------------|-----------------|----------------------------|

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.      | EDITIO OXONIÆ.             |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἴστι . . . . .       | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. γωνία . . . . .      | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστὶν ἴση, . . . . . | Id. . . . .     | ἴση ἐστὶν,                 |
| 4. ἐστὶν ἴση. . . . .   | Id. . . . .     | ἴση ἐστὶν.                 |
| 5. ἐστὶ . . . . .       | Id. . . . .     | deest.                     |
| 6. τῆς . . . . .        | Id. . . . .     | deest.                     |
| 7. τετράγωνον . . . . . | Id. . . . .     | deest.                     |

PROPOSITIO II.

|                                                                                                    |                                                                                         |                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.           | ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ .  | concordat cum edit. Paris.                    |
| 2. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, . . . . . | ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                    |
| 3. τετράγωνον . . . . .                                                                            | deest . . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris.                    |
| 4. εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ . .                                        | Id. . . . .                                                                             | τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου ὑπὸ |
| 5. ἀπὸ . . . . .                                                                                   | ἐπὶ . . . . .                                                                           | concordat cum edit. Paris.                    |
| 6. παραλληλόγραμμα, . . . .                                                                        | Id. . . . .                                                                             | παραλλήλων,                                   |
| 7. τμήματα . . . . .                                                                               | ἀποτμήματα . . . . .                                                                    | concordat cum edit. Paris.                    |
| 8. βιβλίου, . . . . .                                                                              | Id. . . . .                                                                             | deest.                                        |
| 9. καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, . . . . .                                             | deest . . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris.                    |
| 10. ἐστὶν . . . . .                                                                                | Id. . . . .                                                                             | deest.                                        |
| 11. ὅστιν . . . . .                                                                                | Id. . . . .                                                                             | deest.                                        |
| 12. τῆς . . . . .                                                                                  | deest . . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris.                    |

# 550 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                  |                 |                            |
|----------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 13. τῆς . . . . .                | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 14. ἐστὶν . . . . .              | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 15. κύκλος . . . . .             | Id. . . . .     | deest.                     |
| 16. ΖΘ . . . . .                 | Id. . . . .     | ΖΘ τετράγωνον              |
| 17. ἀδύνατον εἰδείχθαι . . . . . | Id. . . . .     | εἰδείχθη ἀδύνατον          |
| 18. ἐστὶν . . . . .              | Id. . . . .     | deest.                     |
| 19. τετράγωνον . . . . .         | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## LEMMA.

|                                |                 |                            |
|--------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                 | Id. . . . .     | deest.                     |
| 2. ἄρα . . . . .               | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. χωρίον . . . . .            | Id. . . . .     | deest.                     |
| 4. ἐστὶν . . . . .             | Id. . . . .     | deest.                     |
| 5. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι . . . . . | Id. . . . .     | deest.                     |

## PROPOSITIO III.

|                                                             |                                                  |                            |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις<br>ἔχουσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ . | ἀλλήλας καὶ τῇ ὅλῃ τρι-<br>γώνους ἔχουσας βάσεις | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τε καὶ ὁμοίας . . . . .                                  | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 3. Καὶ . . . . .                                            | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ . . . . .                                           | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 5. δὲ . . . . .                                             | Id. . . . .                                      | δὴ                         |
| 6. τέ . . . . .                                             | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 7. περιέχουσιν . . . . .                                    | Id. . . . .                                      | περιέχουσιν                |
| 8. ἐστὶν . . . . .                                          | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 9. ἐστὶν . . . . .                                          | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον . . . . .                            | Id. . . . .                                      | καὶ ὁμοιόν ἐστὶν           |
| 11. ἐστὶ . . . . .                                          | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 12. ἐστὶ . . . . .                                          | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 13. ἐστὶ . . . . .                                          | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 14. ΔΛΘ . . . . .                                           | Id. . . . .                                      | ΔΘΛ τριγώνω.               |
| 15. οὖσαι . . . . .                                         | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 16. περιέχουσιν . . . . .                                   | Id. . . . .                                      | περιέχουσιν                |
| 17. ἐστὶν . . . . .                                         | Id. . . . .                                      | deest.                     |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS. 551

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                                                                                                                            |                                              |                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 18. ἴστί . . . . .                                                                                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                                                 |
| 19. ὁμοία εἰδείχθη . . . . .                                                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                         | εἰδείχθη ὁμοία                                         |
| 20. ὥστε καὶ πυραμῖς, ἥς βάσις<br>μὲν ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, κε-<br>ρυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία<br>ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν<br>ἐστὶ τὸ AΕΗ τρίγωνον, κερυφὴ<br>δὲ τὸ Θ σημεῖον . . . . . | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 21. ἡ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, .                                                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                         | δύο, πρίσματα ἰσοῦψῃ ᾧσι,                              |
| 22. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                         | εἰσὶν                                                  |
| 23. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                                                 |
| 24. βάσις, . . . . .                                                                                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                         | βάσεις,                                                |
| 24. βάσεις . . . . .                                                                                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                         | βάσις                                                  |
| 25. καὶ . . . . .                                                                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                                                 |
| 26. μὲν . . . . .                                                                                                                                                                          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 27. μὲν . . . . .                                                                                                                                                                          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 28. μὲν . . . . .                                                                                                                                                                          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 29. μὲν . . . . .                                                                                                                                                                          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 30. μὲν . . . . .                                                                                                                                                                          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                             |
| 31. τε δύο πυραμίδας, ἴσας τε<br>καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας<br>τῇ ὅλῃ, . . . . .                                                                                                       | τε δύο πυραμίδας, ἴσας<br>ἀλλήλαις . . . . . | δύο πυραμίδας, reliqua con-<br>cordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO IV.

|                                                                                                                         |                      |                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων<br>ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ<br>τοῦτο ἀεὶ γίνηται . . . . .                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 2. καὶ . . . . .                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                      |
| 3. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων<br>ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νε-<br>κρήσθω διηρημένη, καὶ τοῦτο<br>ἀεὶ γιγνέσθω . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 4. πάντα . . . . .                                                                                                      | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 5. τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ.<br><i>Id.</i> . . . . .                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ. |

# 552 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

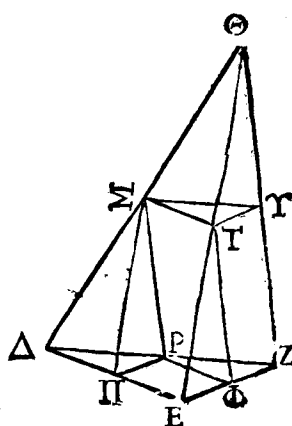
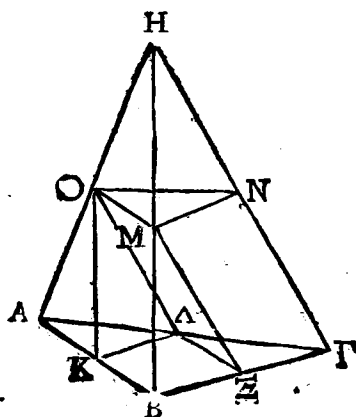
EDITIO OXONIÆ.

6. τῆς ΓΞ, ἡ δὲ EZ τῆς ΖΦ. . . . . *Id.* . . . . . τῆς ΓΞ, ἡ δὲ EZ τῆς ΖΦ.  
 7. εὐθύγραμμα . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 8. τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον . . . . . οὕτως τὸ ΛΞΓ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 9. ἐστι . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

10. A vocabulo καὶ duodecimæ lineæ paginæ 134 ad calcem propositionis, hæc legere sunt in codicibus *a*, *h*; alii vero codices concordant cum editione Oxoniæ. Sed in codice *g*, glossema marginale concordat cum editione Oxoniæ.

Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα,

Ut autem dicta prismata inter se sunt ita prisma cuius basis quidem ΚΒΞΛ parallelogrammum, opposita autem ΟΜ recta, ad prisma cuius basis quidem ΠΕΦΡ parallelogrammum, opposita autem recta ΣΤ, et duo igitur prismata



καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὗτε βάσις μὲν τὸ

et cuius basis quidem ΚΒΞΛ parallelogrammum, opposita autem ipsa ΟΜ, et cuius basis quidem ΛΞΓ triangulum, oppositum autem ipsum ΟΜΝ, ad prismata et cuius basis quidem ipsum ΠΕΦΡ,

Mais les prismes dont nous venons de parler sont entre eux comme le prisme dont la base est le parallélogramme ΚΒΞΛ opposé à la droite ΟΜ est au prisme dont la base est le parallélogramme ΠΕΦΡ opposé à la droite ΣΤ, et comme les deux prismes qui ont pour bases le parallélogramme ΚΒΞΛ opposé à la droite ΟΜ, et le triangle ΛΞΓ opposé à ΟΜΝ, sont aux prismes qui ont pour bases



ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βά-  
 σις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ·  
 καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν  
 οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρη-  
 μένα δύο πρίσματα. Καὶ ὁμοίως ἐὰν διαιρεθῶσιν  
 αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἰς τε δύο πρίσματα  
 καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὥς ἡ ΟΜΝ βάσις  
 πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ  
 πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ  
 πυραμίδι δύο πρίσματα. Αλλ' ὥς ἡ ΟΜΝ βάσις  
 πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς  
 τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ,  
 ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΔΞΓ, ΡΦΖ· καὶ  
 ὥς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν  
 οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα  
 πρίσματα. Ὁμοίως δὲ καὶ τὰς ὑπολειπομένας  
 πυραμίδας διέλωμεν εἰς τε δύο πυραμίδας καὶ  
 εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς  
 τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι  
 πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι  
 πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

opposita autem ΣΤ recta, et cujus basis qui-  
 dem ΡΦΖ triangulum, oppositum vero ipsum  
 ΣΤΥ; et ut igitur ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim  
 ita dicta duo prismata ad dicta duo prismata.  
 Et similiter, si dividantur ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ py-  
 ramides et in duo prismata, et in duas pyra-  
 mides, erit ut ΟΜΝ basis ad ΣΤΥ basim ita  
 ipsa in ΟΜΝΗ pyramide duo prismata ad ipsa  
 in ΣΤΥΘ pyramide duo prismata. Sed ut ΟΜΝ  
 basis ad ΣΤΥ basim ita ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ ba-  
 sim, æquale enim utrumque ipsorum ΟΜΝ,  
 ΣΤΥ triangulorum utrique ipsorum ΔΞΓ, ΡΦΖ;  
 et ut igitur ΑΒΓ basis ad ΔΕΖ basim ita qua-  
 tuor prismata ad quatuor prismata. Similiter  
 autem et si reliquas pyramides dividamus et in  
 duas pyramides et in duo prismata, erit ut ΑΒΓ  
 basis ad ΔΕΖ basim ita ipsa in ΑΒΓΗ pyramide  
 prismata omnia ad ipsa in ΔΕΖΘ pyramide  
 prismata omnia multitudine æqualia. Quod  
 oportebat ostendere.

le parallélogramme ΠΕΦΡ opposé à la droite ΣΤ, et le triangle ΡΦΖ opposé à ΣΤΥ;  
 la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme les deux prismes dont nous avons  
 parlé sont aux deux prismes dont nous avons parlé. Semblablement, si nous  
 partageons les pyramides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ en deux prismes et en deux pyramides,  
 la base ΟΜΝ sera à la base ΣΤΥ comme les deux prismes contenus dans la pyramide  
 ΟΜΝΗ sont aux deux prismes contenus dans la pyramide ΣΤΥΘ. Mais la base ΟΜΝ  
 est à la base ΣΤΥ comme la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ, car chacun des triangles  
 ΟΜΝ, ΣΤΥ est égal à chacun des triangles ΔΞΓ, ΡΦΖ; la base ΑΒΓ est donc à la base  
 ΔΕΖ comme quatre prismes sont à quatre prismes. Semblablement, si nous parta-  
 geons les pyramides restantes en deux pyramides et en deux prismes, la base ΑΒΓ  
 sera à la base ΔΕΖ comme la somme des prismes contenus dans la pyramide ΑΒΓΗ  
 est à la somme des prismes contenus, en même nombre, dans la pyramide ΔΕΖΘ.  
 Ce qu'il fallait démontrer.



# 554 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

11. ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν OMN, *Id...* deest.  
 ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρω τῶν  
 ΛΕΓ, ΡΦΖ.

## LEMMA.

|                     |              |                            |
|---------------------|--------------|----------------------------|
| 1. τὸ ΡΦΖ           | zρφ          | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τρίγωνον,        | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τρίγωνα          | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 4. αἱ               | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶ             | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τυγχάνον τα πρὸς | καὶ πρὸς     | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ὅστιν,           | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶν,           | <i>Id...</i> | ἔσται,                     |

## PROPOSITIO V.

|                                  |              |                               |
|----------------------------------|--------------|-------------------------------|
| 1. βάσιν                         | <i>Id...</i> | deest.                        |
| 2. πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν, | <i>Id...</i> | διηρήσθωσαν πυραμίδες ὁμοίως, |
| 3. ἐλάττονες                     | <i>Id...</i> | ἐλάσσους                      |
| 4. ἕνεκα                         | ἕνεκεν       | concordat cum edit. Paris.    |
| 5. ἀλλὰ καὶ                      | <i>Id...</i> | ἀλλ'                          |
| 6. ἐστὶν                         | <i>Id...</i> | deest.                        |
| 7. ἐστὶν                         | <i>Id...</i> | deest.                        |
| 7. ἐστὶν                         | <i>Id...</i> | deest.                        |

## PROPOSITIO VI.

|                                                                         |              |                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1. ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ABΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ M, N σημεῖα | <i>Id...</i> | πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, κορυφὰς δὲ τὰ M, N σημεῖα |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------------------------------------------------------------|

3. Sic se habent omnes codices et editiones Basilæ Oxoniæque, codicibus a, h tantum exceptis, qui concordant cum editione Parisiensi.

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS. 555

Διηρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΑ εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΑ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἐκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοῦψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.

Dividatur enim basis quidem ΑΒΓΔΕ in ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ triangula; basis autem ΖΗΘΚΑ in ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΑ triangula, et intelligentur super unoquoque triangulo pyramides æquealtæ cum sex ex principio pyramidibus. Et quoniam est ut ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΑΒΓΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem, et componendo ut ΑΒΓΔ trapezium ad ΑΓΔ triangulum ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad ΑΓΔΜ pyramidem. Sed et ut ΑΓΔ triangulum ad ΑΔΕ triangulum ita ΑΓΔΜ pyramis ad ΑΔΕΜ pyramidem;

Car partageons la base ΑΒΓΔΕ en triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, et la base ΖΗΘΚΑ en triangles ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΑ, et imaginons sur chaque triangle des pyramides de même hauteur que les six premières pyramides. Puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ (5. 12), par addition, le trapèze ΑΒΓΔ sera au triangle ΑΓΔ comme la pyramide ΑΒΓΔΜ est à la pyramide ΑΓΔΜ. Mais le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΔΕ comme la pyramide ΑΓΔΜ est à la pyramide ΑΔΕΜ;

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                         |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 4. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι .                                                                                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                    | διὰ τὰ αὐτὰ δὴ             |
| 5. τρίγωνα . . . . .                                                                                                                                                                                | τριγώνους . . . . .                                                                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ὕψος ἴσον . . . . .                                                                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                    | ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος.          |
| Lin. 11, pag. 145. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα, ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΑ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΑΝ πυραμίδα . . | ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν οὕτως ἢν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα καὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 8. πάλιν . . . . .                                                                                                                                                                                  | deest . . . . .                                                                                         | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VII.

- |                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔχούσας βάσεις . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | βάσεις ἔχούσας.            |
| 2. Καὶ . . . . .            | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

# 556 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 3. ἐστὶν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ἐστὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. ἐστι . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. ἐστι . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. ἐστιν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. ἐστι . . . . .               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἐχούσας βάσεις . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | βάσεις ἐχούσας.            |
| 10. μὲν . . . . .               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 11. μὲν . . . . .               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 12. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## COROLLARIUM.

|                                                                                 |                                                                                                                                    |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὴν αὐτὴν βάσιν . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                               | τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν        |
| 2. τὸ . . . . .                                                                 | deest . . . . .                                                                                                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ τὸ αὐτὸ . . . . .                                                        | τὸ αὐτὸ καὶ . . . . .                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 4. διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον . . . . . | καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον καὶ ὡς ἡ ὅλη βάση πρὸς ἑκάστον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VIII.

|                                        |                               |                            |
|----------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. ἐστὶν . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                     |
| 2. γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία . . . . . | γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ . . . . . | ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία         |
| 3. ἐστὶ . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                     |
| 4. παραλληλόγραμμα . . . . .           | deest . . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τε καὶ ὁμοιά ἐστι, . . . . .        | deest . . . . .               | τέ ἐστι καὶ ὁμοία,         |
| 5. τε καὶ ὁμοιά ἐστι. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .          | τέ ἐστι καὶ ὁμοία.         |
| 6. περιέχεται . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .          | περιέχονται.               |
| 7. ἐστὶ . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                     |
| 8. ἄρα . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                     |

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium in codice 190 exaratum est in infimâ paginâ.

| EDITIO PARISIENSIS.                                      | CODEX 190.               | EDITIO OXONIÆ.             |
|----------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 2. καὶ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .     | καὶ εἰς                    |
| 3. ἔχουσιν βάσιν . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .     | βάσιν ἔχουσιν              |
| 4. πυραμίδα, . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 5. ἰμύλογος πλευρὰ πρὸς τὴν<br>ὁμόλογον πλευράν. . . . . | πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO IX.

|                                                          |                          |                                                  |
|----------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους<br>βάσεις ἔχουσιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἔχου-<br>σαι βάσεις    |
| 2. βάσιν . . . . .                                       | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                       |
| 3. ἄρα ABΓΗ, ΔΕΖΘ . . . . .                              | ABΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα . . . . . | concordat cum edit. Paris.                       |
| 4. παραλληλόγραμμον . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                           |
| 5. μὲν . . . . .                                         | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                       |
| 6. βάσεις . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                           |
| 7. παραλληλεπίπεδου ὕψος. . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                           |
| 8. ἐστὶ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                           |
| 9. στερεοῦ . . . . .                                     | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                       |
| 10. ἴση ἄρα ἡ ABΓΗ πυραμὶς τῇ<br>ΔΕΖΘ πυραμίδι. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . .     | ἡ ἄρα ABΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ<br>πυραμίδι ἴση ἐστὶ. |

PROPOSITIO X.

|                                                                                                                             |                      |                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. ἐστίν. . . . .                                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ἐσται.                                                      |
| 2. μὴ γάρ. . . . .                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | γὰρ μὴ                                                      |
| 3. στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσ-<br>ματα ἰσοῦς τὰ δὲ ὑπὲρ τὸ<br>αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλ-<br>ληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἰσοῦς τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα<br>πρίσματα τὰ ἄρα πρίσματα |
| 4. τετραγώνου . . . . .                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | κύκλου                                                      |
| 5. ἡμίση ἐστὶ . . . . .                                                                                                     | ἡμίση ἐστὶ . . . . . | ἡμίση ἐστὶ                                                  |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                      |
| Lin. 20. μὲν . . . . .                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | μὲν ἐστὶ                                                    |

# 558 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.                                | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                          |
|----------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| 7. ἐστι . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |
| 8. ἐστὶν . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἔσται                                   |
| 9. τριπλάσιος . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | τριπλασίων                              |
| 10. ἐστὶν ἢ τριπλάσιος . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ τρίπλάσιός ἐστιν                      |
| 11. κύκλον τετράγωνον περιγρά-<br>φωμεν, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγω-<br>νον, |
| 12. τετραγώνου . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |
| 13. τὸ . . . . .                                   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.              |
| Lin. 3, pag. 163, ἑαυτὸ . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἑαυτὴν                                  |
| 15. τμήματα . . . . .                              | ὑποτμήματα . . . . . | concordat cum edit. Paris.              |
| 16. ἐστὶ μέρος . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | μέρος                                   |
| 17. ἐστὶν . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |

## PROPOSITIO XI.

|                                                                                                                            |                                                     |                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. εἰσιν . . . . .                                                                                                         | deest . . . . .                                     | concordat cum edit. Paris.                       |
| 2. κῶνον . . . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                | deest.                                           |
| 3. ἔσται . . . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                | ἔστω                                             |
| 4. ἦτοι . . . . .                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                | ἦ                                                |
| 5. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ<br>ΕΖΗΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ<br>ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν<br>ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, . . . | deest . . . . .                                     | concordat cum edit. Paris.                       |
| 6. μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος<br>τοῦ καθ' ἑαυτὸ . . . . .                                                               | μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ<br>τοῦ καθ' ἑαυτὸ . . . . . | μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ<br>καθ' ἑαυτὴν |
| 7. τέμνοντες . . . . .                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                | τέμνοντας                                        |
| 8. ἀεὶ τοῦτο . . . . .                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                | τοῦτο ἀεὶ                                        |
| 9. ἔσται . . . . .                                                                                                         | ἐστὶν . . . . .                                     | concordat cum edit. Paris.                       |
| 10. οὐδέ ἐστιν . . . . .                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                | οὐδ'                                             |
| 11. ἀδύνατον εἰδείχθαι . . .                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                | εἰδείχθαι ἀδύνατον                               |
| 12. κύκλον . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                | deest.                                           |
| 13. οὕτως . . . . .                                                                                                        | deest . . . . .                                     | concordat cum edit. Paris.                       |

PROPOSITIO XII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                             | CODEX 190.                  | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . .        | ἢ                          |
| 2. ἔστιν . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 3. ἔστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .        | ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ   |
| 4. ἔχει . . . . .                                               | ἔχει . . . . .              | concordat cum edit. Paris. |
| 5. πρότερον πρὸς ἑλαττον . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .        | πρὸς ἑλαττον πρότερον      |
| 6. τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .        | ἰσοῦψης.                   |
| 7. μέρος . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 8. ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .        | ἀπ' αὐτοῦ                  |
| 9. καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρω, . . . . . | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἔστι . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 11. ἔστι . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 12. ἔστι . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 13. ἐπεὶ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .        | ἐπειδὴ                     |
| Lin. 12. ἐπεὶ . . . . .                                         | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 15. ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας, . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .        | εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ,          |
| 16. ἐφ' ἑκάστου . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .        | ἐπὶ                        |
| 17. τὰς αἰτὰς κορυφὰς . . . . .                                 | τὴν αὐτὴν κορυφὴν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 18. ἀλλ' . . . . .                                              | καὶ . . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 19. τὸ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 20. πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον . . . . .                 | κορυφὴ δὲ τὸ Α . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 21. μὲν . . . . .                                               | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 22. καὶ . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 23. μὲν . . . . .                                               | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 24. ἔστιν . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 25. σημεῖον, . . . . .                                          | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 26. πολύγωνον, . . . . .                                        | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 27. ἔστιν . . . . .                                             | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 28. σημεῖον, . . . . .                                          | deest . . . . .             | concordat cum edit. Paris. |
| 29. ἔστιν . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |

# 560 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                                                      |                      |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 30. μέν ἐστιν . . . . .                                                                                              | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 31. σημείον, . . . . .                                                                                               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 32. ἐστιν . . . . .                                                                                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 33. ἄρα κῶνος . . . . .                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | κῶνος ἄρα                  |
| 34. οὕτως . . . . .                                                                                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 35. ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυ-<br>λίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν<br>αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ<br>ὑψος ἴσον . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XIII.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                      |                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον . .                                                                                                                                                                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | EZ ἄξονι                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 2. ἐστὶν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 3. μέν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                              |
| Lin. 4. καὶ νοείσθω ὁ πὶ τοῦ ΛΜ<br>ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ οὗ βάσεις<br>οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκτε-<br>τελήσθω διὰ τῶν Ν, Ζ σημείων<br>ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ,<br>ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ<br>κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς<br>ΡΣ, ΤΘ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ<br>κέντρα. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Α, Ν, Ξ,<br>Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα<br>τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν<br>ἐν τοῖς διὰ τῶν Α, Ν, Ξ, Μ<br>ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Α, Ν,<br>Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ,<br>ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νε-<br>νοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ,<br>ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. |
| 4. οἱ ἄρα . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | καὶ οἱ . . . . .     | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                              |
| 5. ἀλλήλοις. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 6. καὶ οἱ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | οἱ                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 7. εἰσὶν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 8. τῶν ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει<br>τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | τῷ πλήθει . . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                              |
| 9. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 10. ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων<br>καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου,                                                                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | ΚΑ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων<br>καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυ-<br>λίνδρου,                                                                                                                                                                                              |
| 11. μεγεθῶν ὄντων, . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ὄντων μεγεθῶν                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 12. κύλινδρος. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                  |



PROPOSITIO XIV.

| EDITIO PARISIENSIS.                              | COD. 190.            | EDITIO OXONIÆ.                                   |
|--------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| 1. κύκλων οἱ EB, ZΔ· λέγω ὅτι<br>ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | κύλινδροι οἱ EB, ZΔ· λέγω ὅτι                    |
| 2. νενοήσθω . . . . .                            | ἐννοήσθω . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                       |
| 3. ἀλλήλοις . . . . .                            | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                       |
| 4. κῶνον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | κῶνον· τριπλάσιον γὰρ οἱ κύλινδροι<br>τῶν κῶνων· |

PROPOSITIO XV.

|                                                    |                      |                                                        |
|----------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 2. καὶ ἐστὶν . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | τούτέστιν                                              |
| 3. ἀντιπεπτονθὲν, . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἀντιπεπτόνθασιν,                                       |
| 4. μείζον τὸ MN, . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ MN μείζον,                                          |
| 5. τοῖς τῶν EZHΘ, PO κύκλῳ<br>ἐπιπέδοις, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις<br>τῶν EZHΘ, PO κύκλων, |
| 6. ἄλλος δέ τις ὁ EZ κύλινδρος·                    | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                             |
| 7. κύλινδρον . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 8. βάσιν, . . . . .                                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                             |
| Lin. 2, pag. 186. τῷ ΤΥΣ . . . . .                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                             |
| 9. καὶ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 10. ὕψος. . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 11. ὕψος . . . . .                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                             |
| 12. κύλινδρον· . . . . .                           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                             |

PROPOSITIO XVI.

|                                  |                        |                            |
|----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. τε καὶ ἀρτίοπλευρον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 2. εὐθεία . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 3. ἐστὶν . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 4. δὴ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .   | δὲ                         |
| 5. ἐγγραφήσεται . . . . .        | ἐγγραφήσεται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τε . . . . .                  | deest . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |



## PROPOSITIO XVII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                  | CODEX 190.                                     | EDITIO OXONIENSIS.                |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. ἐπιφέρειαν . . . . .                              | περιφέρειαν . . . . .                          | concordat cum edit. Paris.        |
| 2. ἐγένετο . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἐγένετο                           |
| 3. καὶ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                            |
| 4. εὐθειῶν . . . . .                                 | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 5. τε . . . . .                                      | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 6. ἐπεζευχθείσα, . . . . .                           | ἐπεζευχθείσα . . . . .                         | concordat cum edit. Paris.        |
| 7. ἔστω . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἔστωσαν                           |
| 8. ἐστὶν ὀρθὰ . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                           | ὀρθὰ ἐστὶν                        |
| 9. καὶ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                            |
| 10. ἐκότερον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἐκότερα                           |
| 11. καὶ . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                            |
| 12. καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαίριου . . . . .         | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 13. ἐγγεγραμμένον . . . . .                          | συγγεγραμμένον . . . . .                       | concordat cum edit. Paris.        |
| 14. ἐκ πυραμίδων συγκεῖμενον ὧν βάσεις μὲν . . . . . | πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις μὲν . . . . . | ἢ πυραμίδων συγκεῖμενον ὧν βάσεις |
| 15. ἰσάφεται . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἰσάπτεται                         |
| 16. ἡ ΑΨ, . . . . .                                  | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 17. ἐκατέραν . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἐκατέρας                          |
| 18. ἐστὶ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἄρα                               |
| 19. ἀπὸ τῆς . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                            |
| 20. Καὶ ἡχθὼ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου                       | ἡχθὼ ἀπὸ τοῦ ΚΟ . . . . .                      | concordat cum edit. Paris.        |
| 21. δὴ . . . . .                                     | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 22. τῶν . . . . .                                    | deest . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |
| 23. ἔτι . . . . .                                    | ἔστι . . . . .                                 | concordat cum edit. Paris.        |
| 24. ψαύσει . . . . .                                 | ψαύει . . . . .                                | concordat cum edit. Paris.        |

## ALITER.

|                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἐστὶ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. τῆς . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DUODECIMUS. 563

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                 |                                                                  |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 5. ἄρα . . . . .                                                                | deest . . . . .                                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τῆς ΗΩ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ<br>τῆς ΑΗ· . . . . . | ΗΩ λοιπὸν· ἄρα τὸ ἀπὸ<br>ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ<br>ΑΗ· . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## COROLLARIUM.

|                                                              |                                                   |                                    |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1. σφαῖρας . . . . .                                         | Id. . . . .                                       | deest.                             |
| 2. πυραμὶς ἄρα, . . . . .                                    | Id. . . . .                                       | ἄρα πυραμὶς,                       |
| 3. τὸ . . . . .                                              | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.         |
| 4. δὲ . . . . .                                              | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.         |
| 5. τὸ . . . . .                                              | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.         |
| 6. ἐτέρας . . . . .                                          | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.         |
| Lin. 6. καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ<br>τὸ κέντρον τὸ Α σφαῖρα . . | καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ<br>κέντρον τὸ Α σφαῖρα . . | ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α |
| Lin. 8. σφαῖρα . . . . .                                     | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.         |
| 7. ἔχει . . . . .                                            | Id. . . . .                                       | ἔχει                               |

## PROPOSITIO XVIII.

|                                                                                                                   |                                               |                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1. Νενοήσθωσαν . . . . .                                                                                          | Εννοήσθωσαν . . . . .                         | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 2. Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς<br>τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα<br>λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν<br>ΕΖ, . . . . . | Id. . . . .                                   | Εἰ γὰρ μὴ,                                                       |
| 3. ἡ πρὸς μείζονα τριπλασίονα<br>λόγον . . . . .                                                                  | τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς<br>μείζονα . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 4. νενόησθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα . . .                                                                                    | ἐννοήσθω ἡ ΔΕΖ . . . . .                      | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 5. καὶ . . . . .                                                                                                  | Id. . . . .                                   | deest.                                                           |
| 6. λόγον . . . . .                                                                                                | λόγον ἔχει . . . . .                          | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                                                  | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 8. ὅπερ ἀδύνατον . . . . .                                                                                        | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 9. ἐπειδὴ περὶ μείζον ἐστὶ ἡ ΑΜΝ<br>τῆς ΔΕΖ, ὡς ἐμπροσθεν εἰδείχ-<br>θη . . . . .                                 | Id. . . . .                                   | ὡς ἐμπροσθεν εἰδείχθη, ἐπειδὴ περὶ<br>μείζον ἐστὶ ἡ ΑΜΝ τῆς ΔΕΖ· |
| 10. τίνα . . . . .                                                                                                | Id. . . . .                                   | deest.                                                           |

## LIBER DECIMUS-TERTIUS.

## PROPOSITIO I.

| EDITIO PARISIENSIS.                                      | CODEx 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                |
|----------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------|
| 1. τῆς ὅλης . . . . .                                    | τετραγώνου . . . . . | concordat cum edit. Paris.                    |
| 2. τῇ ΑΓ . . . . .                                       | τῆς ΑΓ . . . . .     | concordat cum edit. Paris.                    |
| 3. τῆς . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ                                            |
| 4. Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ,<br>ΔΓ τετράγωνα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | Αναγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ,<br>ΔΓ τετράγωνων |
| 5. τῆς ΑΘ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ΑΘ.                                        |
| 6. τοῦ ΓΘ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                        |
| 7. τοῦ ΓΘ διπλάσια . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | διπλάσια τοῦ ΓΘ.                              |
| 8. ἴσον ὅλον ἄρα . . . . .                               | ἴσον ἄρα . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                    |
| 9. ἄρα . . . . .                                         | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                    |

## PROPOSITIO II.

|                                                              |                                      |                                          |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|
| Lin. 11. ἀφ' . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                 | ἀπὸ                                      |
| 2. ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, . . . . .                              | τὸ ἐν τῷ ΑΖ σχῆμα, . . . . .         | concordat cum edit. Paris.               |
| 3. ΖΒ ἐπὶ τὸ Ε. . . . .                                      | ΒΕ. . . . .                          | concordat cum edit. Paris.               |
| 5. πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ<br>ΑΘ, τετραπλάσιος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                 | τουτέστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ, τετρα-<br>πλάσιος |
| 6. τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ΓΑ, . . . . .                | ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, . . . . . | concordat cum edit. Paris.               |
| 7. τοῦ ΘΒ διπλάσια . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                 | διπλάσια τοῦ ΘΒ.                         |

## LEMMA.

|                                                                 |                      |                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1. διπλῇ τῆς ΓΑ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς ΓΑ διπλῇ.                                                              |
| 2. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν<br>ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πεντάπλασιον ἄρα ἐκάτερον τῶν<br>ἀπὸ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ<br>ἀπὸ τῆς ΓΑ. |
| 3. διπλασίων ἐστὶ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | διπλασία                                                                   |
| 4. διπλασίων . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . . | διπλάσιόν                                                                  |
| 5. μείζον . . . . .                                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                                                 |

PROPOSITIO III.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                                          | CODEx 190.           | EDITIO OXONIE.                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| 1. ἡ . . . . .                                                                                                                                               | τὸ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                        |
| 2. διπλαῖον . . . . .                                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                            |
| 3. καὶ . . . . .                                                                                                                                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 4. ἄρα . . . . .                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστι                                              |
| 5. μὲν . . . . .                                                                                                                                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 6. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ . . . . .                                                                                                                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 7. ἀλλὰ τὸ ΜΖ, ΓΗ ἴσιν ἴσον . . . . .                                                                                                                        | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 8. ἄρα . . . . .                                                                                                                                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 9. τετραγώνου· ὁ ΕΟΠ ἄρα γνώ-<br>μων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πεν-<br>ταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλ' ὁ<br>ΕΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετρά-<br>γώνον ἐστι τὸ ΔΝ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι<br>τοῦ ΗΖ τετραγώνου· |

PROPOSITIO IV.

|                                                               |                                                                                     |                            |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε καὶ . . . . . | τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τρι-<br>πλάσιά ἐστι τοῦ ΘΚ τε-<br>τραγώνου· καὶ ἔστιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|

PROPOSITIO V.

|                                                                |                      |                                                    |
|----------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------|
| 1. αὐτῇ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                             |
| 2. ἡ ὅλη . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἔλη ἡ                                              |
| 3. σημείον, . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                             |
| 4. κείσθω . . . . .                                            | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                         |
| 5. οὖν . . . . .                                               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                         |
| 6. τῆς . . . . .                                               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                         |
| 7. τῶν . . . . .                                               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                         |
| 8. τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ,<br>τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ, τὸ δὲ<br>ΓΘ ἴσον τῷ ΔΘ· |
| 9. ἔλῳ τῷ ΑΕ ἴσιν ἴσον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΕ.                              |

ALITER.

Hoc *aliter* adest in *a, c, e, g, h, m*; deest autem in *b, d, f, l, n*; in *c, e* vero deest quintum theorema, cujus *aliter* locum tenet.

ANALYSIS ET SYNTHESIS.

In codicibus *h, m, n*, analyses et syntheses quinque priorum theorematum conjunctim subsequuntur quintum theorema, et in codicibus *a, e* (per errorem) sextum theorema; in codicibus vero *d, f, g, l*, et in editionibus Basilie Oxoniæque analyses et syntheses separatim subsequuntur theoremata ad quæ spectant.

| EDITIO PARISIENSIS.                                       | CODEx 190.               | EDITIO OXONIÆ.             |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 2. Τί ἐστὶν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ<br>σύνθεσις ; . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 3. μὲν οὖν . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 4. δὲ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . .     | ἐστὶ                       |
| 5. τὴν τοῦ ζητουμένου κατάλη-<br>ξιν ἢ κατάληψιν. . . . . | τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. | concordat cum edit. Paris. |

PRIMI THEOREMATIS ANALYSIS SINE FIGURA.

|                                                                        |                          |                                                             |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ-<br>ΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΚΑ-<br>ΤΑΓΡΑΦΗΣ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | ΤΟΥ ΕΙΡΗΜΕΝΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ-<br>ΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ<br>ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ. |
| 2. τῆς ΑΔ . . . . .                                                    | ΑΔ. . . . .              | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 3. τῆς . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . .     | τοῦ                                                         |
| 4. τῆς ΑΔ. . . . .                                                     | ΑΔ. . . . .              | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 5. ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. . . . .                                        | ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ. . . . . | τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.                                             |

SYNTHESIS.

|                        |                      |                            |
|------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ΣΥΝΘΕΣΙΣ. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ.        |
| 2. τῆς . . . . .       | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 13. τῶν . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῆς ΑΔ . . . . .    | ΑΔ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |

SECUNDI THEOREMATIS ANALYSIS SINE FIGURA.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                      | CODEX IGO.                                        | EDITIO OXONIE.                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1. ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ-<br>ΤΟΥ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΝΕΥ ΚΑ-<br>ΤΑΓΡΑΦΗΣ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                              | ΤΟΥ ΕΙΡΗΜΕΝΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑ-<br>ΤΟΣ Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ.                      |
| 2. γὰρ . . . . .                                                         | deest . . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 3. δὲ . . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                              | deest.                                                         |
| 4. τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ·<br>ὥστε καὶ . . . . .                          | ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε καὶ                           | τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε                                    |
| 5. πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ<br>τῆς ΔΑ. ἔστι δὲ. . . . .                  | πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ<br>ἀπὸ ΑΔ. ἔστι δὲ. . . . . | πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ΔΑ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὑπὲρθεσιν. |

SYNTHESIS.

|                               |                      |                            |
|-------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τετραπλάσιόν . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | τετραπλάσιά                |
| 2. τῆς . . . . .              | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ     |

TERTII THEOREMATIS ANALYSIS.

|                     |                      |                            |
|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἡ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 2. τὸ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ                        |
| 3. ὅρα τὸ . . . . . | τὸ ἄρα . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |

SYNTHESIS.

|                      |                  |                            |
|----------------------|------------------|----------------------------|
| 1. ἄρα τὸ . . . . .  | τὸ ἄρα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀπὸ τῆς . . . . . | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

QUARTI THEOREMATIS ANALYSIS.

|                     |                  |                            |
|---------------------|------------------|----------------------------|
| 1. ἄρα τὸ . . . . . | τὸ ἄρα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀπαξ . . . . .   | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

SYNTHESIS.

|                         |                      |                            |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἄρα τὸ . . . . .     | τὸ ἄρα . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τριπλάσιόν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τριπλάσιονά                |
| 3. τετράγωνα . . . . .  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## QUINTI THEOREMATIS SYNTHESIS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

|                  |                 |                            |
|------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. οὖν . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἄρα . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τε . . . . .  | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VI.

Hoc theorema deest in codice e.

|                                      |                                   |                            |
|--------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| 1. ἐπὶ τὸ Δ, . . . . .               | deest . . . . .                   | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ῥητὴ γάρ ἐστιν . . . . .          | ῥητὴ γάρ . . . . .                | ῥητὸν γάρ ἐστιν            |
| 4. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ . . . . . | τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VII.

|                                          |                                                      |                            |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. δύο . . . . .                         | αἱ δύο . . . . .                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία . . . . .         | καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ . . . . .                              | ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία            |
| 3. καὶ . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .                                 | deest.                     |
| 4. ἐστὶν . . . . .                       | deest . . . . .                                      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. γωνίαις . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .                                 | deest.                     |
| Lin. 12. ἴση . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .                                 | ἴση ἐστὶ                   |
| Lin. 14. ἐστὶ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .                                 | deest.                     |
| 8. ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ, . . . . . | ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. . . . .                             | concordat cum edit. Paris. |
| 9. πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ . . . . .    | καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση καὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἐστὶ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .                                 | deest.                     |

## PROPOSITIO VIII.

|                                                    |                      |                            |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. σημεῖον, . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἐστὶν . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. γωνίας ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐπειδήπερ . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπειδὴ                     |
| 5. ἄρα γωνία . . . . .                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |



PROPOSITIO IX.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                          | CODEX 190.                                                                     | EDITIO OXONIÆ.                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1. τὸν αὐτὸν κύκλον . . . . .                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                                                           | αὐτὸν                                                                       |
| 2. κατὰ τὸ Γ, . . . . .                                                                      | deest . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 3. καὶ ἔστω . . . . .                                                                        | deest . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 4. ἐγγραφομένου, . . . . .                                                                   | deest . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 5. ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ<br>γωνία . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                           | γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ<br>ΓΔΕ.                                        |
| 6. γωνία . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                                           | deest.                                                                      |
| 7. λοιπῇ . . . . .                                                                           | deest . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 8. ἐστὶ . . . . .                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                           | deest.                                                                      |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                             | deest . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 10. εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λό-<br>γον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ<br>τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα . . . | εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λό-<br>γον τέτμηται, καὶ τὸ<br>μείζον αὐτῆς τμήμα . . . | ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται<br>κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμή-<br>μα αὐτῆς |

PROPOSITIO X.

|                                                    |                                              |                             |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. ΑΒΓΔΕ κύκλον . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                         | αὐτὸν                       |
| 2. ἰσόπλευρον ἐγγεγράφω . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .                         | ἐγγεγράφω ἰσόπλευρον        |
| 2. σημεῖον, . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                      |
| 3. καὶ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                      |
| 4. δὲ . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                         | γάρ                         |
| 6. τῆς . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                         | τῇ                          |
| 7. τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .                         | τῆς ΒΚ περιφερείας.         |
| 8. μὲν καὶ . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                      |
| 9. περιφερείᾳ . . . . .                            | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Pa ris. |
| 10. τῆς . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .                         | τῇ                          |
| 11. ἐστὶ . . . . .                                 | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.  |
| 12. καὶ . . . . .                                  | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.  |
| 13. τῆς . . . . .                                  | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris.  |
| 14. καὶ . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                      |
| 15. τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ, ἡ<br>ὑπὸ ΝΑΚ . . . . . | τοῦ ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ ἡ<br>πρὸς τῷ Α . . . . . | concordat cum edit. Paris.  |
| 16. ΚΑ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                         | ΚΑ εὐθεῖα                   |



## PROPOSITIO XI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                        | CODEX 190.                                    | EDITIO OXONIE.             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------|
| 1. πλευρά . . . . .                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                          | πλευρά ἢ ΑΒΓΔΕ.            |
| 2. τῆς . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                          | τῇ                         |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                     |
| 4. ἐπιζεύζωμεν . . . . .                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                          | ἐπιζεύζομεν                |
| 5. τῆς . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                          | τῇ                         |
| 6. δὴ . . . . .                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                     |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                           | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶ . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                     |
| 9. τὴν . . . . .                                                                           | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὴν . . . . .                                                                          | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 11. Ὡς δὲ . . . . .                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                          | Ἀλλ' ὥς                    |
| Lin. 13. τὴν . . . . .                                                                     | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 12. τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς<br>ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ . . .                                 | ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς<br>τὸ ἀπὸ ΚΖ. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 13. τετμημένης, . . . . .                                                                  | τεμνομένης, . . . . .                         | concordat cum edit. Paris. |
| 14. τῇ . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                          | τῷ.                        |
| 16. ἐστὶ . . . . .                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                     |
| 17. λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς<br>ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς<br>τὸ ἀπὸ τῆς ΚΣ. . . . . | δυνάμει μόνον . . . . .                       | concordat cum edit. Paris. |
| 19. τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ΚΖ. . . . .                                               | ἢ ΚΒ τῆς ΚΖ . . . . .                         | concordat cum edit. Paris. |
| 20. τῆς . . . . .                                                                          | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 21. ἢ ΒΚ . . . . .                                                                         | ἐστὶν ἢ ΚΒ . . . . .                          | concordat cum edit. Paris. |
| 23. δὴ . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                          | γὰρ                        |
| 24. μήκει . . . . .                                                                        | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 26. μήκει . . . . .                                                                        | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 27. μήκει . . . . .                                                                        | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |
| 28. γίγασθαι . . . . .                                                                     | γίνεσθαι . . . . .                            | concordat cum edit. Paris. |
| 29. τριγώνῳ . . . . .                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                     |
| 30. ἐστίν . . . . .                                                                        | deest . . . . .                               | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XII.

| EDITIO PARISIENSIS.      | CODEx 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἡ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἐστὶ μέρος . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | μέρος ἴστι                 |
| 3. πλευρά . . . . .      | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἄρα . . . . .         | ἐστὶ . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 9. τῆς BE . . . . . | BE . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIII.

|                                                    |                                                                                                                                                                 |                            |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσο-<br>πλεύρων, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                            | deest.                     |
| 2. καταγεγράφθω . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                            | γεγράφθω                   |
| 3. τοῦ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                            | deest.                     |
| 4. ἀφαιρέσθω . . . . .                             | ἀφαιρέσθω . . . . .                                                                                                                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τῆς ΔΓ, . . . . .                               | τῆς ΑΔ, ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς<br>ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ οὕτως τὸ<br>ἀπὸ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ<br>ΑΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ<br>ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ<br>ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ<br>ΔΓ, . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τριγώνων . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                            | τριγώνων ἴσων καὶ          |
| 7. δυνάμει . . . . .                               | deest . . . . .                                                                                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶ . . . . .                                  | ἐστὶ δυνάμει . . . . .                                                                                                                                          | concordat cum edit. Paris. |
| 11. γίνεσθαι . . . . .                             | γίνεσθαι . . . . .                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ἔσται . . . . .                                | ἔστιν . . . . .                                                                                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 13. ἄρα ἡμισολία . . . . .                         | ἡμισολία ἄρα . . . . .                                                                                                                                          | concordat cum edit. Paris. |
| 14. δυνάμει . . . . .                              | deest . . . . .                                                                                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 16. ἐστὶν . . . . .                                | deest . . . . .                                                                                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIV.

|                           |                      |                            |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὴν πυραμίδα . . . . . | τὰ πρότερα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῆς . . . . .          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστιν . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. κορυφαὶ . . . . .      | κορυφή . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 5. συνίσταται . . . . .   | συνίσταται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

|                    |                      |        |
|--------------------|----------------------|--------|
| 6. ὀρθὰς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσας   |
| 7. ἔστιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XV.

|                           |                          |                            |
|---------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. συστήσασθαι, . . . . . | συνεστήσασθαι, . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὰ πρότερα . . . . .   | τὴν πυραμίδα . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τριπλασίων . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . .     | τριπλῆ                     |
| 4. τὴν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .     | ἐκάστην                    |
| 5. περιεχόμενος. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . .     | περιεχόμενον               |
| 6. τριπλασίων . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . .     | τριπλασία                  |
| 7. καὶ ἂν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .     | καὶ                        |
| 8. ἥξει . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .     | ἥξει                       |
| 9. ὁμοίως . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .     | ὁμοίως δὲ                  |
| 10. πάλιν . . . . .       | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 11. ἢ KE τῇ EA . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . .     | τῇ EA ἢ KE *               |
| 12. δοθείση . . . . .     | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XVI.

|                                                                                 |                      |                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------|
| Lin. 17. pag. 270. EA, AZ, ZM, MH, HN, NO, ΘΕ, ΕΚ, KO, OE, καὶ ὁμοίως . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.      |
| 3. ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι |
| 4. καὶ παράλληλός ἐστιν. . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστιν καὶ παράλληλός.           |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ                             |
| 7. πενταγώνου . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | πεντάγωνος                      |
| 8. τριγώνων . . . . .                                                           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.      |
| 9. EZHΘK κύκλου . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . . | κύκλου τοῦ EZHΘK                |
| 10. ἐστὶ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                          |
| 11. ἐστὶ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                          |
| 12. δὴ . . . . .                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                          |
| 13. αὐτὸ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτὸν                           |
| 14. Επεὶ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | Επειδὴ                          |
| 15. μὲν . . . . .                                                               | ἐστὶν . . . . .      | concordat cum edit. Paris.      |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS-TERTIUS. 573

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                 |                                            |                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------|
| 16. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γρα-<br>φόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ<br>διὰ τοῦ Α. . . . . | deest . . . . .                            | concordat cum edit. Paris.             |
| 17. τετραπλασίων . . . . .                                                      | τετραπλῆ . . . . .                         | concordat cum edit. Paris.             |
| 18. πενταπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ<br>ΑΒ τῆς ΒΓ. . . . .                              | πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ<br>τῆς ΒΓ. . . . . | πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ<br>ἐστίν. |
| 19. ἴση ἡ ΔΒ . . . . .                                                          | Id. . . . .                                | ἡ ΔΒ ἴση                               |
| 20. τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου . . . . .                                                  | Id. . . . .                                | τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ                   |
| 21. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . .                                                  | deest . . . . .                            | concordat cum edit. Paris.             |

## COROLLARIUM.

|                          |                                              |                            |
|--------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τῆς τοῦ . . . . .     | Id. . . . .                                  | τῆς                        |
| 2. δύο τῶν . . . . .     | Id. . . . .                                  | τῶν δύο                    |
| 3. ἐγγραφομένων. . . . . | ἐγγραφομένων. Ὅπερ εἶδει<br>δεῖξαι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XVII.

|                                                |                 |                                      |
|------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------|
| 1. σημεία . . . . .                            | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris.           |
| 2. τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΝΟ,<br>ΟΞ, ΘΠ . . . . . | Id. . . . .     | τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ<br>εὐθείαι |
| 3. ἐκκείσθωσαν . . . . .                       | Id. . . . .     | κείσθωσαν                            |
| 4. αὐτῆς . . . . .                             | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.           |
| 5. ἐστὶν . . . . .                             | Id. . . . .     | deest.                               |
| 6. ἴση ἐστίν . . . . .                         | Id. . . . .     | ἐστὶν ἴση                            |
| 7. τοῦ κύβου μέρη . . . . .                    | Id. . . . .     | μέρη τοῦ κύβου                       |
| 7. πλευραῖς . . . . .                          | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.           |
| 9. καὶ . . . . .                               | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.           |
| 10. τῶν . . . . .                              | Id. . . . .     | τῆς                                  |
| 11. ἐστὶν . . . . .                            | Id. . . . .     | deest.                               |
| 12. ἐστὶν . . . . .                            | Id. . . . .     | deest.                               |
| 13. ἴσται . . . . .                            | Id. . . . .     | ἐστι                                 |
| 14. τέ . . . . .                               | Id. . . . .     | deest.                               |
| 15. τε . . . . .                               | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.           |
| 16. ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον. . . . .            | Id. . . . .     | deest.                               |
| 18. τῆς πλευρᾶς . . . . .                      | Id. . . . .     | πλευρὰ                               |

574 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS-TERTIUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                        |                      |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 19. ἐστὶ . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 20. δυνάμει . . . . .                                                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 21. πλευρᾶς τοῦ κύβου . . . . .                                                        | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ κύβου πλευρᾶς.         |
| 22. τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον<br>λόγον τεμνομένης τὸ μείζον<br>τμήμα ἐστὶν ἡ ΟΣ, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 23. ἐστὶν . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 24. οὕτως . . . . .                                                                    | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 25. ἰσάκεις . . . . .                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | ὡσαύτως                    |
| 26. τὴν . . . . .                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | τῶν                        |
| 27. τῆς . . . . .                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | τῶν                        |

27. In infimâ paginâ codicis 190, et in textu codicum *g*, *m*, hæc legere sunt:

ρητὴ γὰρ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσ-  
θω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ ΑΓ· προσκείσθω  
δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς AB. Ρητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. Καὶ  
ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς  
ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶν δυνάμει μόνον σύμ-  
μετροι· ἀποτομή ἄρα ἡ ΑΓ. Ρητὴ δὲ ἡ AB, τὸ

rationalis enim AB extremâ et mediâ ratione se-  
cetur in Γ, et sit ΑΓ major portio; ponatur  
autem ΑΔ dimidia ipsius AB; rationalis igitur  
et ΑΔ. Et quoniam quintuplum ipsum ex ΓΔ  
ipsius ex ΔΑ; ipsæ ΓΔ, ΔΑ igitur rationales  
sunt potentiâ solum commensurabiles; apo-  
tome igitur ipsa ΑΓ. Rationalis autem ipsa AB,

A ——— Γ ——— B

δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παράβαλλόμενον  
πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ  
ΒΓ· ἑκατέρως ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστὶ  
προσαρμοζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἡ ΑΔ, τῆς δὲ  
ΓΒ ἡ ΓΔ·

ipsum vero ex apotomê ad rationalem appli-  
catum latitudinem facit apotomen; apotome  
igitur est ΒΓ; utraque igitur ΑΓ, ΓΒ apotome  
est; at vero congruens ipsi ΑΓ ipsa ΑΔ, ipsi  
autem ΓΒ ipsa ΓΔ;

car que AB soit coupé en extrême et moyenne raison au point Γ; que ΑΓ soit  
le plus grand segment, et que ΑΔ soit la moitié de AB; la droite ΑΔ sera ratio-  
nelle. Et puisque le carré de ΓΔ est quintuple du carré de ΔΑ, les droites  
ΓΔ, ΔΑ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la  
droite ΑΓ est donc un apotome. Mais AB est une rationnelle, et le carré d'un  
apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un apotome; la  
droite ΒΓ est donc un apotome; chacune des droites ΑΓ, ΓΒ est donc un apotome;  
or la droite ΑΔ est la congruente de ΑΓ, et la droite ΓΔ la congruente de ΒΓ:

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS-TERTIUS. 575

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                               |                 |                            |
|-------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 28. ἡ καλουμένη . . . . .     | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 29. ἡ καλουμένη . . . . .     | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 30. Οπερ ἔδει δεῖξαι. . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## COROLLARIUM.

|                    |                           |                            |
|--------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. πλευρά. . . . . | πλευρά. Οπερ ἔδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |
|--------------------|---------------------------|----------------------------|

## PROPOSITIO XVIIII.

|                                                                                            |                  |                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|----------------------------|
| 1. μὲν . . . . .                                                                           | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. αἱ . . . . .                                                                            | Id. . . . .      | αἱ                         |
| 3. τῆς . . . . .                                                                           | Id. . . . .      | deest.                     |
| 4. τριπλασίων. . . . .                                                                     | Id. . . . .      | τριπλῆ                     |
| 5. κύβου . . . . .                                                                         | κύκλου . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                                                          | Id. . . . .      | deest.                     |
| 7. ἴση τῇ AB, . . . . .                                                                    | Id. . . . .      | τῇ AB ἴση,                 |
| 8. ἐστὶ . . . . .                                                                          | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἐστὶν . . . . .                                                                         | Id. . . . .      | deest.                     |
| 10. ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου<br>ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰ-<br>κοσάεδρον ἀναγράφεται. . . | Id. . . . .      | deest.                     |
| 11. ἡ τῆς σφαίρας . . . . .                                                                | Id. . . . .      | τῆς σφαίρας ἡ              |
| 12. τοῦ . . . . .                                                                          | Id. . . . .      | deest.                     |
| 13. τῆς . . . . .                                                                          | Id. . . . .      | deest.                     |
| 14. διπλασίων, . . . . .                                                                   | Id. . . . .      | τριπλασίων                 |
| 15. ἡ . . . . .                                                                            | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 16. ἡ . . . . .                                                                            | ἡ μὲν . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 17. ἥ τε . . . . .                                                                         | ἡ . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 18. δὲ . . . . .                                                                           | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 19. τῆς ΖΒ. . . . .                                                                        | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 20. τῇ . . . . .                                                                           | Id. . . . .      | τῇ                         |
| 21. ἐστὶν . . . . .                                                                        | Id. . . . .      | deest.                     |

## ALITER.

## EDITIO PARISIENSIS.

## CODEX 190.

## EDITIO OXONIÆ.

|                                                                              |                                             |                                              |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. Ἐπεὶ . . . . .                                                            | Ὅτι μείζων ἐστὶ ἢ MB τῆς NB. Ἐπεὶ . . . . . | Ἀλλως ὅτι μείζων ἢ MB τῆς NB. Ἐπεὶ . . . . . |
| 2. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς KA ἐξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζον ἴσ-<br>τιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                        | deest.                                       |

## LEMMA.

|                                                                                                   |                      |                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|
| 1. ὑπὸ . . . . .                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπὸ                                   |
| 2. ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἢ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης. | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.            |
| 3. τοῦ ἀπὸ τῆς BN μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | μείζον ἐστὶ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς BN. |
| 4. τῆς . . . . .                                                                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.            |
| 5. τῆς . . . . .                                                                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.            |

## SCHOLIUM.

|                                    |                      |                            |
|------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οὐ συσταθήσεται . . . . .       | συνίσταται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τέσσαρσιν . . . . .             | τέτρασιν . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἢ . . . . .                     | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. πενταγώνου ἰσοπλεύρου . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἰσοπλεύρου πενταγώνου      |
| 5. αὐτὸ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. σχῆμα . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## LEMMA.

|                                     |                      |                            |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τε . . . . .                     | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τε . . . . .                     | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ Z, . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔστω τὸ Z              |
| 4. τοῦ . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. τέσσαρσιν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | τέτρασιν                   |
| 6. πέμπτου . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | πέμπτης                    |
| 7. ἐστὶ ὀρθῆς καὶ πέμπτου . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθῆς ἐστὶ καὶ πέμπτης     |



EUCLIDIS DATA.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                      | CODEx 190.           | EDITIO OXONIE.                                  |
|----------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------|
| 1. ἀλλήλας . . . . .                                     | ἀλλήλους . . . . .   | deest.                                          |
| 2. λέγονται, . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | λέγεται                                         |
| 3. καὶ γωνίαι, ἃ τὸν αὐτὸν αἰὲς<br>τόπον ἐπέχει. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ χωρία, καὶ γωνίαι ἃ τὸν αἰὲς<br>τόπον ἔχει. |
| 4. ἡ δὲ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἡ                                           |
| 5. κύκλων . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | κύκλου                                          |
| 6. τε . . . . .                                          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                      |
| 7. τῷ . . . . .                                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                      |
| 8. εὐθεία . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαν                                         |
| 9. δεδομένη . . . . .                                    | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                      |

PROPOSITIO I.

|                               |                 |                            |
|-------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 2. ἄρα . . . . .              | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO II.

|                      |                      |                            |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δέδοται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δέδοται καὶ                |
| 2. τὸ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἴσον . . . . .    | αὐτὸν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. καὶ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO IV.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. ὅτι . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ὅτι καὶ    |
| 2. ἐστὶν ἴσον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶν |

PROPOSITIO V.

|                        |                      |                            |
|------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. λόγον . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. πεποιήσθω . . . . . | πεπορίσθω . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |



EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                          |              |                            |
|--------------------------|--------------|----------------------------|
| 3. ἐστι...               | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστιν,                | deest        | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὸ ΒΓ δοθείς ἐστιν... | τὸ ΒΓ δοθείς | ΒΓ δοθείς ἐστιν.           |

## PROPOSITIO VI.

|                                                                                                                      |             |                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------|
| 1. ἐκάτερον αὐτῶν                                                                                                    | <i>Id.</i>  | αὐτῶν ἐκάτερον                          |
| 2. τὰ                                                                                                                | <i>Id.</i>  | deest.                                  |
| 3. τὸ                                                                                                                | deest       | concordat cum edit. Paris.              |
| 4. δοθέν δὲ τὸ ΔΕ· δοθέν ἄρα καὶ<br>τὸ ΕΖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ δοθέν<br>ἐστίν· ἐστὶν δὲ ἐκατέρων τῶν<br>ΔΕ, ΕΖ δοθέν. | <i>Id.</i>  | ἐστὶν εὖν ἐκατέρου τῶν ΔΕ, ΕΖ<br>δοθέν. |
| 5. τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ.                                                                                                 | ΔΕ πρὸς ΕΖ. | concordat cum edit. Paris.              |
| 6. τὸ ΖΕ.                                                                                                            | ΖΕ.         | concordat cum edit. Paris.              |
| 7. τὸ ΔΕ.                                                                                                            | ΔΕ.         | concordat cum edit. Paris.              |

## PROPOSITIO VII.

|              |            |        |
|--------------|------------|--------|
| Lin. 12. καὶ | <i>Id.</i> | deest. |
|--------------|------------|--------|

## PROPOSITIO VIII.

|            |            |        |
|------------|------------|--------|
| 1. τὸ      | <i>Id.</i> | deest. |
| 2. τὸ      | <i>Id.</i> | deest. |
| 3. δοθείς. | <i>Id.</i> | deest. |
| 4. ὁ       | <i>Id.</i> | deest. |

## PROPOSITIO IX.

|          |            |        |
|----------|------------|--------|
| 1. Δ ἄρα | <i>Id.</i> | ἄρα Δ. |
|----------|------------|--------|

## PROPOSITIO X.

|        |            |                            |
|--------|------------|----------------------------|
| 1. τὸ  | <i>Id.</i> | deest.                     |
| 2. δὴ  | <i>Id.</i> | δὴ                         |
| 3. τεῖ | deest      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. γὰρ | ἄρα        | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                             | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ ΑΔ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔστο τὸ ΑΔ.            |
| 2. Ἀνάπαλιν . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | Ἀνάπαλιν δὴ                |
| 3. καὶ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. τὸ . . . . .                                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τοῦ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. ἔσται . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν                      |
| 7. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΑΓ, δο-<br>θέντι, μεῖζόν ἐστίν ἢ ἐν λόγῳ, | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. τὸ ΔΕ . . . . .                                              | ΔΕ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τὸ ΔΕ . . . . .                                              | ΔΕ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ . . . . .                                  | ΑΕ λόγος . . . . .   | τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ           |
| 11. ὧν τοῦ ΒΔ πρὸς τὸ ΔΕ . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ὡς καὶ τοῦ ΑΔ πρὸς ΕΔ      |
| 12. δὴ . . . . .                                                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XII.

|                  |                      |                            |
|------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἄρα . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIII.

|                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δοθεὶς τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, . | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθεὶς,  |
| 2. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἄρα . . . . .               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIV.

|                                  |                            |                            |
|----------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. ἔσται . . . . .               | ἔστιν . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὰ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                     |
| 3. τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ. | ΓΔ οὕτως τὸ ΗΑ πρὸς ΓΖ.    | deest.                     |
| 4. τὸ ΖΔ δοθεὶς. Καὶ ἔστι τὸ .   | ΖΔ δοθεὶς. Καὶ ἔστι τὸ . . | τὸ ΖΔ δοθεὶς. Καὶ ἔστι     |

PROPOSITIO XV.

|                    |                      |       |
|--------------------|----------------------|-------|
| 1. ἔσται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν |
| 2. ἀφ' . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπὸ   |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                    |                 |                            |
|--------------------|-----------------|----------------------------|
| 3. ἔσται . . . . . | ἔστιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ ΓΖ . . . . . | ΓΖ . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τὸ . . . . .    | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὸ . . . . .    | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .  | Id. . . . .     | deest.                     |

## PROPOSITIO XVI.

|                                                |                                          |                            |
|------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------|
| 1. μὲν τοῦ . . . . .                           | Id. . . . .                              | τοῦ μὲν                    |
| 2. τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ<br>τοῦ . . . . . | ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ<br>τοῦ . . . . . | τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ |
| 3. τὸ . . . . .                                | deest . . . . .                          | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶ . . . . .                              | καὶ . . . . .                            | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὸ ΓΕ· καὶ λοιποῦ ἄρα . . .                 | ΓΕ· καὶ λοιποῦ . . . . .                 | τὸ ΓΕ· λοιποῦ ἄρα          |

## PROPOSITIO XVII.

|                                                                                                                         |                            |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΖΒ<br>πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθεὶς·<br>καὶ τοῦ ΖΒ ἄρα πρὸς τὸ ΗΕ<br>λόγος ἐστὶ δοθεὶς. . . . . | Id. . . . .                | Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δο-<br>θέντι, μείζον ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ,<br>ἀφηρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ<br>ΔΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΕ πρὸς<br>τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθεὶς. Τοῦ δὲ<br>ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δο-<br>θείς· καὶ λόγος ἄρα τοῦ ΖΒ<br>πρὸς τὸ ΗΕ ἐστὶ δοθεὶς. |
| 2. ἦτοι πρὸς ἄλληλα . . . . .                                                                                           | πρὸς ἄλληλα ἦτοι . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                             |

## PROPOSITIO XVIII.

|                       |                 |                            |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. ἔσται . . . . .    | ἔστιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τοῦ . . . . .      | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἄρα . . . . .      | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τὸ . . . . .       | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὸ . . . . .       | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 18. τὸ . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἔστιν ὡς τὸ HB πρὸς τὸ ΓΔ ὡς τὸ HB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως concordat cum edit. Paris.  
οὕτως καὶ . . . . .

ALITER.

1. Εστω . . . . . Δυνατὸν δὲ ἔστιν καὶ οὕτως. concordat cum edit. Paris.  
Εστω . . . . .  
2. ἔστω . . . . . ἔστιν . . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. καὶ . . . . . Id. . . . . deest.  
4. τὸ . . . . . Id. . . . . deest.

PROPOSITIO XX.

1. ἔσται . . . . . ἔστιν . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. τὸ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. τῷ AE πρὸς τὸ . . . . . τῷ AE πρὸς . . . . . τοῦ AE πρὸς

PROPOSITIO XXI.

1. ἔσται . . . . . ἔστιν . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. τὸ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. τὸ . . . . . Id. . . . . deest.  
2. συναμφοτέρων . . . . . συμφότερον . . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. τὸ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIII.

1. τὸ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
Lin. 13. τὸ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. τὸ ΓΗ ἐστὶ . . . . . ΓΗ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ τοῦ . . . . . καὶ λοιποῦ τοῦ . . . . . δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ  
4. καὶ ἀναστρέφαντι . . . . . Id. . . . . ἀναστρέφαντι ἄρα καὶ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                              |                       |                            |
|------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 5. δοθείς . . . . .          | deest . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ . . .  | καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς . . . | ἀρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ     |
| Lin. 7, 8 et 9. τὸ . . . . . | deest . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXIV.

|                                                   |                      |                                     |
|---------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| 1. τὴν . . . . .                                  | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.          |
| 2. καὶ ἔστω . . . . .                             | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.          |
| 3. τὴν . . . . .                                  | τὸ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.          |
| 4. ἐστὶ . . . . .                                 | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.          |
| 5. καὶ . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν                               |
| 6. τῆς Ε' . . . . .                               | Ε' . . . . .         | concordat cum edit. Paris.          |
| 7. τῷ μὲν ὑπὸ τῶν, Α, Γ ἴσον<br>ἐστὶ τὸ . . . . . | deest . . . . .      | τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ<br>τῷ |

## ALITER.

|                         |                      |        |
|-------------------------|----------------------|--------|
| 1. ἐστὶ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| Lin. 12. ἴσας . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσων   |

## PROPOSITIO XXV.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. τῇ θέσει. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. ἡ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XXVI.

|                       |                 |                            |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. τῆς ΑΒ . . . . .   | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. σημείου, . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXVII.

|                             |                      |                 |
|-----------------------------|----------------------|-----------------|
| 1. τὸ Α δοθέν ἔστω. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δοθέν ἔστω τὸ Α |
|-----------------------------|----------------------|-----------------|

## ALITER.

|                         |                 |                            |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. περιφέρεια . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ΑΓΔ γωνίας τὸ . . . . . τῶν ΑΓΔ γωνίας τὸ . . . ΑΓΔ γωνίας  
 2. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 3. ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΑ, . . . τῶν ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν concordat cum edit. Paris.  
 ΕΓΑ, . . . . .

PROPOSITIO XXX.

2. γωνία, . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 3. ἐστὶν ἀδύνατον . . . . . *Id.* . . . . . ἀδύνατόν ἐστιν.

ALITER.

1. εὐθεία παράλληλος . . . . . *Id.* . . . . . παράλληλος εὐθεία  
 2. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ *Id.* . . . . . Καὶ ἐπεὶ εἰς παράλληλοι αἱ ΒΓΔ,  
 ΕΑΖ τῇ ΒΑΓ . . . . . ΕΔΖ,  
 3. γωνία . . . . . *Id.* . . . . . deest.

ALITER.

1. Καὶ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. αὐτὰς . . . . . *Id.* . . . . . αὐτοὺς  
 4. ὑπὸ ΑΔΓ . . . . . ὑπὸ τῶν ΑΔΓ . . . . . ΑΔΓ γωνία.  
 5. ὑπὸ ΖΕΓ . . . . . ὑπὸ τῶν ΖΕΓ . . . . . ΖΕΓ

ALITER.

1. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστὶν ἑκάτερον ἐπεὶ δοθέν ἐστὶν τὸ Α ση- concordat cum edit. Paris.  
 τῶν Α, Ε σημείων . . . . . μείων . . . . .  
 2. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία *Id.* . . . . . δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ.  
 δοθεῖσα . . . . .  
 4. δεδομένω . . . . . *Id.* . . . . . deest.

## PROPOSITIO XXXI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἡ ΑΔ, . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO XXXII.

1. Καὶ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

3. ἡ . . . . . Id. . . . . deest.

4. ἐστίν. . . . . Id. . . . . deest.

## PROPOSITIO XXXIII.

1. τῷ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

2. τῷ μετέθει. . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

3. καὶ ἡ . . . . . Id. . . . . deest.

Lin. 9. καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ· καὶ . Id. . . . . ἐστίν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ· ἡ

## ALITER.

1. καὶ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

2. ἐστίν . . . . . Id. . . . . deest.

3. τοῦ . . . . . Id. . . . . deest.

5. οὖν . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

7. λοιπὴ ἡ ὑπὸ ZEB . . . . Id. . . . . ἡ ὑπὸ ZEB ἄρα

## PROPOSITIO XXXIV.

1. τὴν . . . . . τὸ . . . . . concordat cum edit. Paris.

2. Καὶ . . . . . deest . . . . . concordat cum edit. Paris.

3. τὴν . . . . . τὸ . . . . . concordat cum edit. Paris.

## ALITER.

1. Καὶ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

2. εὐθεῖα γραμμὴ . . . . . Id. . . . . deest.

3. δοθέν ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν Κ, Θ σημείων  
Κ, Θ σημείων. Ἐστὶ δὲ . . . . . ἐκάτερον ἄρα τῶν Κ, Θ σημείων  
δοθέν ἐστίν. Ἐστὶ δὲ



EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

|                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 4. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τὴν . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXXV.

|                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                  |                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                             | deest.                     |
| 2. καὶ . . . . .                                                                                                                               | deest . . . . .                                                                                                                                                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὴν . . . . .                                                                                                                               | deest . . . . .                                                                                                                                                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                             | deest.                     |
| 5. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθεὶς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθεὶς· . | καὶ ἐπεὶ ἔστι λόγος τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ δοθεὶς, ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΑ, δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΑ λόγος· λόγος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΘΚ πρὸς τὴν ΚΑ δοθεὶς· . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθεὶς· . . . . .                                                                                                   | ἐστὶ τῆς ΑΘ πρὸς ΑΚ δοθεὶς· . . . . .                                                                                                                                            | τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθεὶς· |
| 7. τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῷ μεγέθει. . . . .                                                                                        | δοθεῖσα ἄρα καὶ ΑΚ. . . . .                                                                                                                                                      | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τὸ Α δοθὲν . . . . .                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                             | δοθὲν τὸ Α                 |

PROPOSITIO XXXVI.

|                                                                                                                                           |                              |                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν. . . . .                                                                                                   | τῇ θέσει δεδομένην . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                             |
| 2. ἐπὶ . . . . .                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .         | ἀπὸ                                                                                                                                    |
| 3. καὶ . . . . .                                                                                                                          | deest . . . . .              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                             |
| 4. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΔΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθεὶς, ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΗ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΘΑ πρὸς τὴν ΑΗ δοθεὶς. | <i>Id.</i> . . . . .         | καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΑΔ δοθεὶς, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΔΑ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ δοθεὶς. |



## PROPOSITIO XXXVII.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὰς . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | τὰς ἐν                     |
| 2. γραμμὴ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. οὖν . . . . .                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ὑπὸ . . . . .                | ὑπὸ τῶν . . . . .    | ὑπὸ τοῦ                    |
| 5. τὴν . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 6. τὴν ΑΜ ἐστὶ δοθεὶς λόγος . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΑΜ λόγος ἐστὶ δοθεὶς.   |

## PROPOSITIO XXXVIII.

|                                                                               |                                                      |                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1. τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς<br>τῇ θέσει δεδομένας παραλλή-<br>λους . . . . . | παρὰ τὰς τῇ θέσει δεδομέ-<br>νας παράλληλους . . . . | τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς θέσει<br>δεδομένας παραλλήλους |
| 2. παράλληλος . . . . .                                                       | deest . . . . .                                      | concordat cum edit. Paris.                               |
| 3. οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου .                                                | ἀπὸ δεδομένου σημείου . .                            | οὖν ἀπὸ δεδομένου                                        |

## PROPOSITIO XXXIX.

|                                                                                                                                                                     |                           |                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει δεδομένη ἢ ΔΗ,                                                                                                                                 | εὐθεῖα τῇ θέσει ἢ ΔΗ, . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                           |
| 2. καὶ . . . . .                                                                                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                                                                                                                               |
| 3. κείσθω . . . . .                                                                                                                                                 | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                           |
| 4. Πάλιν, κείσθω τῇ . . . . .                                                                                                                                       | τῇ δὲ . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                           |
| 5. ἐστὶ δοθέν . . . . .                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .      | δοθέν ἐστὶ                                                                                                                           |
| 6. κύκλος γεγράφθω . . . . .                                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .      | γεγράφθω κύκλος                                                                                                                      |
| 7. Πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Ζ,<br>διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ κύκλος<br>γεγράφθω ὁ ΗΚΛ· θέσει ἄρα<br>ἐστὶν ὁ ΗΚΛ. Θέσει δὲ καὶ ὁ<br>ΔΚΘ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶ<br>καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .      | κύκλος. Πάλιν, τῷ μὲν κέντρῳ Ζ,<br>διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ, γεγράφ-<br>θω ΗΚΛ κύκλος· θέσει ἄρα<br>ἐστὶν ὁ ΗΚΛ κύκλος· δοθέν ἄρα<br>ἐστὶ |

## PROPOSITIO XL.

|                                |                      |                         |
|--------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                  |
| 2. δίδεται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                               |                           |                            |
|-------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 3. τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἴση ἐστί. . . . | ἴστι ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΕ . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. σημείοις γωνιῶν . . . . .  | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 5. καὶ . . . . .              | Id. . . . .               | deest.                     |

PROPOSITIO XLII.

|                       |                 |                            |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. αἱ . . . . .       | Id. . . . .     | δύο                        |
| 2. γωνίαν . . . . .   | Id. . . . .     | γωνιῶν                     |
| 3. τὸ . . . . .       | Id. . . . .     | deest.                     |
| 4. καὶ . . . . .      | Id. . . . .     | deest.                     |
| 5. τρίγωνον . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XLIII.

|                          |                 |                                                                            |
|--------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἔχωσι . . . . .       | Id. . . . .     | ἔχέτωσαν                                                                   |
| 2. τὴν . . . . .         | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                 |
| 3. τὴν . . . . .         | deest.. . . .   | concordat cum edit. Paris.                                                 |
| 4. μὲν . . . . .         | Id. . . . .     | deest.                                                                     |
| 5. ἐστίν . . . . .       | Id. . . . .     | deest.                                                                     |
| 6. πρὸς τὴν ΗΚ . . . . . | Id. . . . .     | πρὸς τὴν ΗΚ· ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΓ<br>πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς<br>τὴν ΚΘ· |

PROPOSITIO XLIII.

|                                                        |                 |                            |
|--------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                       | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῇ . . . . .                                        | Id. . . . .     | τῷ                         |
| 3. τρίγωνον τῷ ΔΕΗ τριγώνῳ. Δίδοται δὲ τὸ ΔΕΗ τρίγωνον | Id. . . . .     | τῷ ΔΕΗ. Δέδοται δὲ τὸ ΔΕΗ  |

PROPOSITIO XLIV.

|                    |                 |                            |
|--------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. γωνία . . . . . | Id. . . . .     | deest.                     |
| 2. καὶ . . . . .   | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .   | Id. . . . .     | deest.                     |
| 4. καὶ . . . . .   | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. γωνία . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. καὶ . . . . .   | Id. . . . .     | deest.                     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                  |                      |                            |
|------------------|----------------------|----------------------------|
| 7. δὴ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. καὶ . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα καὶ                    |

## PROPOSITIO XLV.

|                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἐχέτω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐχέτωσαν                   |
| 2. ἄρα . . . . .   | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## ALITER.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| Lin. 2. καὶ . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ΒΑΓ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ΒΑΓ γωνία                  |

## PROPOSITIO XLVI.

|                                                                                             |                                                                             |                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. αἱ πλευραὶ συναμφοτέραι, ὥς<br>μία, τουτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς<br>τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν . . . | αἱ πλευραὶ τουτέστιν συ-<br>ναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς<br>τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτω . . | concordat cum edit. Paris.<br>vocabulo <i>ai</i> tantum defi-<br>ciente. |
| Lin. 14. οὕτως . . . . .                                                                    | deest . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris.                                               |
| 2. γωνία . . . . .                                                                          | deest . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris.                                               |

## ALITER.

|                                                        |                      |                            |
|--------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Εκβέβλησθω ἡ ΒΑ, καὶ . . .                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .                                       | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δο-<br>θεῖσά ἐστι . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XLVII.

|                                 |                                            |                              |
|---------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------|
| 1. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται. | τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ-<br>δει . . . . . | τρίγωνα τῷ εἶδει διαιρεῖται. |
| 2. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται. | τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ-<br>δει . . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 3. Καὶ . . . . .                | deest . . . . .                            | concordat cum edit. Paris.   |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                 |                           |                            |
|---------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 5. EB ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ . . .     | <i>Id.</i> . . . . .      | ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΕ         |
| 4. τῷ εἶδει τρίγωνα διαιρεῖται. | τρίγωνα διαιρεῖται τῷ εἶ- | concordat cum edit. Paris. |
|                                 | δει. . . . .              |                            |

PROPOSITIO XLVIII.

- |                                |                        |                                  |
|--------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 1. ἀναγραφῇ τρίγωνα . . . .    | τρίγωνα ἀναγραφῇ . . . | concordat cum edit. Paris.       |
| 2. Ηχθωσαν . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .   | Ηχθω                             |
| 3. Καὶ . . . . .               | deest . . . . .        | concordat cum edit. Paris.       |
| 4. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                           |
| 5. ἐστὶ δοθεῖσα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ | <i>Id.</i> . . . . .   | δοθεῖσά ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ |
| ὑπὸ ΑΕΓ γωνία . . . . .        |                        | ΑΕΓ.                             |
| 6. τὸ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                           |

PROPOSITIO XLIX.

- |                                 |                        |                            |
|---------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .   | τῆς                        |
| 1. τὸ . . . . .                 | deest . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 2. δεδομένα τῷ εἶδει τρίγωνα τὰ | καὶ τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα . . . | concordat cum edit. Paris. |
| ZEB, EBA τοῦ ΓΕΒΖ ἄρα . .       |                        |                            |
| 3. συσταμφοτέρου . . . . .      | deest . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO L.

- |                                |                      |                              |
|--------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. τε . . . . .                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.   |
| 2. τε . . . . .                | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.   |
| 3. πρὸς ἀλλήλα αὐτῶν λόγος ἐσ- | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτῶν πρὸς ἀλλήλα λόγος ἐστὶ |
| ται . . . . .                  |                      |                              |
| 4. οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν . . .   | ἡ ΓΔ πρὸς . . . . .  | concordat cum edit. Paris.   |
| 5. ΓΔ δοθείς λόγος ἄρα καὶ ὁ . | <i>Id.</i> . . . . . | τὴν ΓΔ δοθείς λόγος ἄρα καὶ  |

PROPOSITIO LI.

- |                       |                      |           |
|-----------------------|----------------------|-----------|
| 1. ᾧ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ὡς        |
| 2. αἱ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 3. ᾧ ἔτυχεν . . . . . | ᾧ ἔτυχεν . . . . .   | ὡς ἔτυχεν |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. τὸ AHB. Δέδοται δὲ τὸ Z τῷ  
εἶδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ AHB  
τῷ εἶδει· ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ E  
δέδοται τῷ εἶδει, καὶ ἀναγέ-  
ραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας  
τῆς AB· . . . . .

Id. . . . .

εὐθύγραμμον τὸ AH. Ἐπεὶ οὖν τὸ  
E δέδοται τῷ εἶδει, καὶ ἀνα-  
γέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐ-  
θείας τὸ εὐθύγραμμον AH δι-  
δομένον τῷ εἶδει·

5. λόγος . . . . .

deest . . . . .

concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO LII.

1. τὰ . . . . .

Id. . . . .

deest.

Lin. 13. Δοθὲν δὲ τὸ AZ τῷ με-  
γέθει. . . . .

deest. . . . .

concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO LIII.

1. εἶδη τῷ . . . . .

Id. . . . .

deest.

2. καὶ . . . . .

Id. . . . .

deest.

3. τὴν . . . . .

deest . . . . .

concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO LIV.

1. τοῦ δὲ B πρὸς τὸ A λόγος  
ἐστὶ δοθείς· . . . .

Id. . . . .

deest.

2. ἐστι . . . . .

Id. . . . .

deest.

3. τὰς . . . . .

Id. . . . .

τὰ

## ALITER.

1. δὴ . . . . .

Id. . . . .

δὲ

2. τὸ . . . . .

deest . . . . .

concordat cum edit. Paris.

3. καὶ . . . . .

deest . . . . .

concordat cum edit. Paris.

4. ἐστὶν . . . . .

Id. . . . .

καὶ

5. ἐστὶν ὁμοιον . . . . .

Id. . . . .

ὁμοιόν ἐστι

6. ἄρα πλευραὶ . . . . .

Id. . . . .

πλευραὶ ἄρα

7. τὸ λοιπὸν δεικνύσεται. . . .

τοῦ πρώτου δεικνύται. . .

concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LV.

|                                                                 |                                                  |                                   |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. ἴσονται . . . . .                                            | ἴσονται τῷ εἶδει . . . .                         | concordat cum edit. Paris.        |
| 2. καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέ-<br>ναι εἰσὶ τῷ μεγέθει. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                             | αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσίν. |
| 3. τε . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                             | deest.                            |
| 4. δὴ . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                             | ἄρα                               |
| 4. τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δε-<br>δομένον τῷ εἶδει . . . . .  | εὐθείας τῆς ΒΓ τῷ μεγέθει<br>δεδομένον . . . . . | concordat cum edit. Paris.        |
| 6. ἔστιν ὁμοιον . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                             | ὁμοιόν ἐστι                       |
| 7. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ . . . . .                                    | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.        |
| 8. πλευρῶν . . . . .                                            | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.        |

ALITER.

|                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO LVI.

|                           |                      |                            |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἴσται . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν                      |
| 2. πλευρά . . . . .       | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἔχει πρὸς τὸ . . . . . | πρὸς τὸ . . . . .    | ἔχει πρὸς                  |
| 4. εὐθεῖα . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. καὶ . . . . .          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. χωρίον. . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | τουτέστι τῆς ΘΓ πρὸς ΓΚ.   |

PROPOSITIO LVII.

|                                                                              |                             |                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1. χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν                                              | παρὰ δοθεῖσαν . . . . .     | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 2. γὰρ . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                                                                      |
| 3. ἴσον δὲ τὸ ΗΑ τῷ ΑΘ λόγος<br>ἄρα καὶ τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΘ<br>δεθείς. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .        | Τῷ δὲ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΘ καὶ<br>τοῦ ΕΒ ἄρα πρὸς τὸ ΑΘ λόγος<br>ἐστὶ δεθείς. |
| 4. ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν                                              | ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                  |
| 5. γωνία, ὧν . . . . .                                                       | ὧν . . . . .                | γωνία, ὡς καὶ                                                               |
| 6. ἐστὶ δεθεῖσα. . . . .                                                     | <i>Id.</i> . . . . .        | δεθεῖσά ἐστι.                                                               |
| 7. Καὶ ἐστὶ τὸ πλάτος τοῦ πα-<br>ραβλήματος. . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                                                                      |

## PROPOSITIO LVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.              | EDITIO OXONIAE.            |
|---------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθείαν | Παρὰ δοθεῖσαν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ μεγέθει. . . . .          | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 3. σχῆμα· δέδοται ἄρα καὶ . .   | EZ· δέδοται ἄρα καὶ . . | σχῆμα· δέδοται ἄρα         |
| 4. καὶ . . . . .                | Id. . . . .             | deest.                     |
| 5. ἐστὶ . . . . .               | Id. . . . .             | deest.                     |
| 6. καὶ . . . . .                | Id. . . . .             | deest.                     |

## PROPOSITIO LIX.

|                                                                                              |                                                                      |                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 1. χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθείαν<br>παραβληθῇ, ὑπερέαλλον τῷ<br>εἶδει δεδομένῳ εἶδει . . .    | παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ,<br>ὑπερέαλλον εἶδει δεδο-<br>μένῳ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 2. εἶδει . . . . .                                                                           | deest . . . . .                                                      | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 3. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον<br>ἐστὶ τὸ ZH τῷ ΓΒ· ἢ χθω αὐτῶν<br>διάμετρος ἡ ΘΕΜ, . . . . | Id. . . . .                                                          | deest.                                                           |
| 4. τῷ ZH . . . . .                                                                           | τῷ ZH . . . . .                                                      | τῷ ZH· περὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου<br>ἄρα ἐστὶ τὸ ZH τῷ ΓΒ·         |
| 5. Καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ ΚΛ· δοθέν<br>ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει. .                                | Id. . . . .                                                          | Τοῖς δὲ AB, ZH ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ·<br>δέδοται ἄρα τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει. |
| 6. τῷ μεγέθει . . . . .                                                                      | deest . . . . .                                                      | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 3. καὶ . . . . .                                                                             | οὖν . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                       |
| 8. ἐστὶ δοθεῖσα, . . . . .                                                                   | Id. . . . .                                                          | δοθεῖσά ἐστι,                                                    |
| Lin. 1. τὴν . . . . .                                                                        | Id. . . . .                                                          | τὸ                                                               |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                             | Id. . . . .                                                          | ἄρα ἐστὶ                                                         |

## PROPOSITIO LX.

|                               |                 |                            |
|-------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .               | Id. . . . .     | deest.                     |
| 2. ἐστὶ δοθεῖσα. . . . .      | Id. . . . .     | δοθεῖσά ἐστι·              |
| 3. ὅμοιοι γάρ ἐστι τῷ ΗΑ· . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. αἱ . . . . .               | Id. . . . .     | deest.                     |



PROPOSITIO LXI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                       | CODEX 190.                                         | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. παραλληλόγραμμον . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                               | deest.                     |
| 2. οὖν . . . . .                                          | deest . . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                         | deest . . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 4. παραλληλόγραμμον δεδομένον<br>τῷ εἶδει τὸ ΖΒ . . . . . | deest . . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐπειδὴ ὑπέκειται, . . . .                              | ἐπειδὴ καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς<br>τὸ ΓΔ ὑπέκειται, . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .                               | deest.                     |
| 7. ἐστὶ δοθεῖσα. . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .                               | δοθεῖσά ἐστιν.             |
| 7. γωνία . . . . .                                        | deest. . . . .                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 8. δοθεῖσά ἐστιν. . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                               | ἐστὶ δοθεῖσα.              |
| 9. ἐστι . . . . .                                         | deest . . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἢ ὑπὸ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                               | deest.                     |

PROPOSITIO LXII.

|                                                 |                                              |                            |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                     |
| 2. παραλληλόγραμμον . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .                         | εὐθύγραμμον                |
| 3. τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ δοθεῖς<br>ἐστὶ, . . . . . | ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ<br>δοθεῖς, . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXIII.

|                         |                 |                            |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. τετράγωνον . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|-------------------------|-----------------|----------------------------|

PROPOSITIO LXIV.

|                                                                                                                                                      |                          |                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἔχον γωνίαν . . . . .                                                                                                                             | γωνίαν ἔχον . . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                                                                       |
| 2. τῶν . . . . .                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | τοῦ                                                                                                                              |
| 3. γωνία, . . . . .                                                                                                                                  | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                                                                       |
| 4. καὶ . . . . .                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                                                                                                           |
| 5. ἐστι. . . . .                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                                                                                                           |
| 6. ἄστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ,<br>ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ<br>λόγος ἐστὶ δοθεῖς καὶ τοῦ δις<br>ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ<br>ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ λόγος ἐστὶ | <i>Id.</i> . . . . .     | λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ,<br>ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ<br>δοθεῖς καὶ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ<br>τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν<br>ΑΔ, ΒΓ |
| 7. ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ . . .                                                                                                                          | ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ἄρα . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                       |



## PROPOSITIO LXV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἡ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | λοιπὴ ἄρα παρὰ             |
| Lin. 4. p. 410. πρὸς τὸ ὑπὸ<br>τῶν ΓΒ, ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς.. | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Ἀλλὰ . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | Ἀλλὰ καὶ                   |
| 5. τρίγωνον . . . . .                                         | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. δις . . . . .                                              | δις ὁ . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἔχει . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἔξει                       |

## PROPOSITIO LXVI.

|                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔχει . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἔξει                       |
| 2. δέδοται . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | δοθεῖσά ἐστι.              |
| 3. τὴν . . . . .               | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἄρα |

## PROPOSITIO LXVII.

|                                                                               |                                                                        |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἔχει . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | ἔξει                       |
| 2. ἡ ΒΕ. . . . .                                                              | deest . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τις . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 5. ἀπὸ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | ὑπὸ                        |
| 5. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ . .                                                 | deest . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | εἶναι                      |
| 7. τῶν . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | τῆς                        |
| 8. καὶ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 9. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά<br>ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης<br>οὕσης . . . . . | ἡμίσεια γὰρ ἐστὶ τῆς ὑπὸ<br>τῶν ΒΑΓ δέδοται γὰρ<br>ἡ ὑπὸ ΒΑΓ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἐστὶν . . . . .                                                           | deest . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 4. b. τῶν . . . . .                                                      | deest . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris. |
| 12. τῆς . . . . .                                                             | deest . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris. |
| 13. ἄρα . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | ἄρα καὶ                    |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                        |                 |                            |
|------------------------|-----------------|----------------------------|
| 14. γωνίαν . . . . .   | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 15. τρίγωνον . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 16. τῆς . . . . .      | Id. . . . .     | deest.                     |

ALITER.

|                          |               |                            |
|--------------------------|---------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .         | Id. . . . .   | deest.                     |
| 2. ἐστὶ τῆς ΑΓ . . . . . | Id. . . . .   | τῆς ΑΓ εἰς                 |
| 3. ὅ . . . . .           | καὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ΒΑ, ΑΓ . . . . .      | ΒΑΓ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

ALITER.

|                                                                                                                                                                                                            |                                                                             |                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. πρὸς τῷ Α . . . . .                                                                                                                                                                                     | Α . . . . .                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 16. Ἐστὶ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν<br>ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον<br>λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν<br>εἶναι τὴν ΒΑΓ γωνίαν τοῦ δις<br>ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ<br>ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δο-<br>θείς. . . . . | καὶ ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν<br>ΒΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρί-<br>γωνον λόγος δοθείς, . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                                                                                                                                                                                           | deest . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 4. συναμφοτέρου . . . . .                                                                                                                                                                                  | Id. . . . .                                                                 | deest.                     |
| 5. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                                          | Id. . . . .                                                                 | εἶναι                      |
| 6. γωνία δοθεῖσα καὶ . . . . .                                                                                                                                                                             | Id. . . . .                                                                 | δοθεῖσα                    |
| 7. ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἐστὶ δοθεῖσα . . . . .                                                                                                                                                                      | Id. . . . .                                                                 | πρὸς ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστίν     |
| 8. ὑπὸ . . . . .                                                                                                                                                                                           | Id. . . . .                                                                 | ἀπὸ                        |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                                                                                                                                           | deest . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὸ . . . . .                                                                                                                                                                                           | Id. . . . .                                                                 | deest.                     |
| 11. ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς<br>ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ . . . . .                                                                                                                                                   | ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ<br>καὶ τῆς ΑΒ ἄρα . . . . .                        | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ἐκβληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ<br>τὸ Ε, . . . . .                                                                                                                                                              | ἐκβληθείσης τῆς ΒΑ, . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 13. ἀπὸ τοῦ Γ . . . . .                                                                                                                                                                                    | deest . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 14. ἀπὸ . . . . .                                                                                                                                                                                          | Id. . . . .                                                                 | deest.                     |
| 15. τὸ . . . . .                                                                                                                                                                                           | τὰ . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris. |

## EDITIO PARISIENSIS.

## CODEX 190.

## EDITIO OXONIE.

|                                                                                                                                                           |                       |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Lin. 14. ἐστι . . . . .                                                                                                                                   | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 16. τῷ εἶδει . . . . .                                                                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .  | τὸ εἶδει.                  |
| 17. καὶ . . . . .                                                                                                                                         | deest . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 18. τοῦ ὑπὸ . . . . .                                                                                                                                     | καὶ τοῦ ὑπὸ . . . . . | τοῦ ἀπὸ                    |
| 19. Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς<br>τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ λόγος ἐστὶ<br>δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν<br>ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ,<br>ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς . . . | deest . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## ALITER.

|                                                                                            |                      |                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------|
| 1. ἐπὶ . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς                                           |
| 2. ὑπὸ . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ τοῦ                                        |
| 3. τῇ ΑΔΓ . . . . .                                                                        | αὐτῇ . . . . .       | concordat cum edit. Paris.                     |
| 4. ἐστὶν ἴση . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστίν.                                     |
| 3. ἐστὶ τὸ . . . . .                                                                       | τὸ . . . . .         | ἐστὶ                                           |
| 6. τὴν . . . . .                                                                           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 7. τὴν . . . . .                                                                           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 8. τῆς . . . . .                                                                           | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 9. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέ-<br>ρου τῆς ΒΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συν-<br>αμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς συναμφοτέ-<br>ρου τῆς ΒΑΓ. |
| 10. ὧν . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ὧς                                             |
| 11. ἐστὶν . . . . .                                                                        | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 12. τὴν . . . . .                                                                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 13. καὶ . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                         |
| 14. τοῦ . . . . .                                                                          | τὸ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                     |
| 15. ἄρα . . . . .                                                                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |
| 16. ΑΒΓ . . . . .                                                                          | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                     |

## PROPOSITIO LXVIII.

|                            |                      |        |
|----------------------------|----------------------|--------|
| 1. πρὸς ἀλλήλα . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. ἡ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. παραλληλόγραμμον, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 4. καὶ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν *Id.* . . . . . deest.  
 EH, ΓΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν  
 αἱ πλευραὶ περὶ τὰς ἴσας γω-  
 νίας . . . . .

ALITER.

|                                  |                          |                            |
|----------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                   | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὁ . . . . .                   | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 4. Α ἄρα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .     | ἄρα Α                      |
| 5. ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ  | ἐξ οὗ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ | concordat cum edit. Paris. |
| πρὸς τὴν EZ, . . . . .           | πρὸς τὴν EZ, . . . . .   |                            |
| 6. τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς | τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν | concordat cum edit. Paris. |
| τὴν Μ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει         | Μ, καὶ . . . . .         |                            |
| 7. τε τοῦ λόγου . . . . .        | τοῦ . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐκ τοῦ . . . . .              | ἐξ οὗ . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ὁ . . . . .                   | ὁ ὁ . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἔστι . . . . .               | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 12. καὶ . . . . .           | καὶ ὁ . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XLIX.

|                                 |                      |                                  |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|
| 1. ἔχη . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                           |
| 2. δέδοται . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστι δοθεῖς.                     |
| 3. παραλληλόγραμμον τῷ EH       | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ EH,                           |
| παραλληλογράμμῳ . . . . .       |                      |                                  |
| 4. Καὶ ἔστιν ἰσογώνιον τὸ ΔΑ τῷ | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐπειδὴ περὶ ἰσογώνιον ἔστι τὸ ΔΑ |
| ZΘ, . . . . .                   |                      | τῷ ZΘ                            |
| 5. λόγος δοθεὶς, . . . . .      | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.       |

PROPOSITIO LXX.

|                         |                      |                          |
|-------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. δύο . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | δυοῖν                    |
| 2. δύο . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | δυοῖν                    |
| 3. τὴν ΖΗ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | τὴν ΖΗ λόγος ἔστω δοθεὶς |
| 4. τὸ ΓΔ τῷ ZΘ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ ZΘ τὸ ΓΔ.             |

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                 | CODEX 190.                                             | EDITIO OKONIE.             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------|
| 5. τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ .                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                   | παραλληλόγραμμῳ ΖΘ         |
| 6. καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ<br>τῇ ΒΜ. Ἐπεὶ οὖν . . . . .                       | καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΒΜ ἐστὶν<br>ἐπ' εὐθείας. Καὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. καὶ . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                   | deest.                     |
| 8. γωνίᾳ . . . . .                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                   | deest.                     |
| 9. τὸ . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                   | deest.                     |
| 10. γωνία· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ<br>ΚΓΒ δοθεῖσα· . . . . .                              | deest . . . . .                                        | concordat cum edit. Paris. |
| Lin. 18. ἐστὶ δοθεῖσα. . . . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                                   | δοθεῖσά ἐστι.              |
| 11. ἐστὶ δοθεῖσα· . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                   | δοθεῖσά ἐστι·              |
| 11. τὸ . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                   | τὴν                        |
| Lin. 9. Ἰσον δὲ τὸ ΓΑ τῷ ΓΔ·<br>λόγος ἄρα ἐστὶν τοῦ ΓΔ πρὸς<br>τὸ ΖΘ δοθείς.. . . . | <i>Id.</i> . . . . .                                   | deest.                     |

## PROPOSITIO LXXI.

|                                                                               |                            |                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------|
| 1. δύο . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .       | δυοῖν                                       |
| 2. ἔχει . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .       | ἔξει                                        |
| 3. δύο . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .       | δυοῖν                                       |
| 4. λόγος ἐστὶ δοθείς πρὸς τὸ<br>ΕΔΘ. . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .       | πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον λόγος ἐστὶ<br>δοθείς.  |
| 5. τὰ . . . . .                                                               | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                                      |
| 6. τὰς ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς<br>Α, Δ σημείοις, . . . . .                  | τὰς ἴσας γωνίας, . . . . . | ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ<br>σημείοις, |
| 7. δὲ . . . . .                                                               | δὲ τοῖς Α, Δ . . . . .     | concordat cum edit. Paris.                  |
| 8. καὶ τὰ παραλληλόγραμμα<br>λόγον ἔξει δεδομένον πρὸς ἀλ-<br>λήλα· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                                      |
| 9. τριγώνου . . . . .                                                         | deest . . . . .            | concordat cum edit. Paris.                  |

## PROPOSITIO LXXII.

|                   |                      |       |
|-------------------|----------------------|-------|
| 1. δύο . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | δυοῖν |
| 2. ἥτοι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                     |                 |                            |
|-----------------------------------------------------|-----------------|----------------------------|
| 3. λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας<br>δεδομένον . . . . . | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Εστω . . . . .                                   | Id. . . . .     | Εστωσαν                    |
| 5. τὴν ΔΘ . . . . .                                 | Id. . . . .     | τὴν ΔΘ λόγος ἔστω          |
| 4. καὶ . . . . .                                    | Id. . . . .     | ἐστὶ                       |
| 5. καὶ . . . . .                                    | Id. . . . .     | καὶ ἐπεὶ                   |
| 6. ἴσαι εἰσὶν, . . . . .                            | Id. . . . .     | εἰσὶν ἴσαι,                |

PROPOSITIO LXIII.

|                                                                                                                                                                                                                                                  |                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. δύο . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | Id. . . . .               | δυοῖν                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 2. δύο . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | Id. . . . .               | δυοῖν                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 3. τοῖς Γ, Ζ . . . . .                                                                                                                                                                                                                           | Id. . . . .               | τοῖς Γ, Ζ σημείοις                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 4. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν<br>ΒΓ εὐθεΐαν τῷ ΕΗ παραλληλο-<br>γράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμ-<br>μον τὸ ΓΘ· καὶ κείσθω ὥστε<br>ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΚΓ·<br>ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ<br>τῇ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ<br>ΓΘ τῷ ΕΗ. . . . . | Id. . . . .               | καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι<br>τὴν ΑΓ τῇ ΚΓ, καὶ συμπειπλη-<br>ρώσθω τὸ ΑΘ παραλληλόγραμ-<br>μον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ΓΒ πρὸς<br>τὴν ΖΗ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν<br>ΓΚ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς<br>τὴν ΕΖ οὕτως ἢ ΖΗ πρὸς τὴν<br>ΓΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΚ<br>ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ·<br>τὸ ΓΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΗ. |
| 5. καὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | Id. . . . .               | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 6. τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ· . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | deest. . . . .            | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 7. παραλληλόγραμμον· Καὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                               | παραλληλόγραμμον· . . . . | Καὶ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 8. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΛΑ<br>δίδοται· ὥστε δίδοται τὸ ΑΓΔ<br>τρίγωνον τῷ εἶδει, . . . . .                                                                                                                                                       | Id. . . . .               | δίδοται ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ<br>εἶδει·                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 9. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                | Id. . . . .               | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 10. ἢν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδο-<br>μένον. . . . .                                                                                                                                                                                                   | τὴν ΓΛ. . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 11. παραλληλογράμμου . . . . .                                                                                                                                                                                                                   | Id. . . . .               | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 12. παραλληλόγραμμον . . . . .                                                                                                                                                                                                                   | Id. . . . .               | deest.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

## PROPOSITIO LXXIV.

## EDITIO PARISIENSIS.

## CODEX 190.

## EDITIO OXONIÆ.

|                                                         |                 |                                                      |
|---------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------|
| 1. πλευρά . . . . .                                     | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.                           |
| 2. λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AB πρὸς<br>τὸ ΓΘ δοθείς . . . . . | Id. . . . .     | τοῦ AB ἄρα πρὸς τὸ ΓΘ λόγος<br>ἐστὶ δοθείς . . . . . |
| 3. ἡ . . . . .                                          | Id. . . . .     | ὁ                                                    |
| 4. τὸ AB τῷ EH. . . . .                                 | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.                           |
| 5. τὸ ΓM παραλληλόγραμμον. . . . .                      | Id. . . . .     | παραλληλόγραμμον ΓM.                                 |
| 6. γωνία . . . . .                                      | Id. . . . .     | deest.                                               |
| 7. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓM<br>τῷ EH. . . . .           | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.                           |
| 8. ἡ . . . . .                                          | Id. . . . .     | ὁ                                                    |

## PROPOSITIO LXXV.

|                                     |                 |                               |
|-------------------------------------|-----------------|-------------------------------|
| 2. πλευρά . . . . .                 | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.    |
| 3. ἡ . . . . .                      | Id. . . . .     | ἡτοι                          |
| 4. τριγώνον . . . . .               | Id. . . . .     | deest.                        |
| 5. πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει . . . . . | Id. . . . .     | εἰσι πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα |
| 6. δοθέντα. . . . .                 | Id. . . . .     | δεδομένον                     |

## PROPOSITIO LXXVI.

|                          |             |                 |
|--------------------------|-------------|-----------------|
| 1. ἔχει . . . . .        | Id. . . . . | ἔξει            |
| 2. καὶ . . . . .         | Id. . . . . | deest.          |
| 3. ἐστὶ δοθείσα. . . . . | Id. . . . . | δοθείσά ἐστι.   |
| 4. τῆς δὲ . . . . .      | Id. . . . . | ἐστὶ δὲ καὶ τῆς |

## PROPOSITIO LXXVII.

|                                                |                 |                                |
|------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| 1. τῷ εἶδει . . . . .                          | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.     |
| 2. ἔχει . . . . .                              | Id. . . . .     | ἔξει                           |
| 3. καὶ . . . . .                               | deest . . . . . | concordat cum edit. Paris.     |
| 4. πάλιν . . . . .                             | Id. . . . .     | deest.                         |
| 5. λόγος ἐστὶ τοῦ ABΓ πρὸς τὸ<br>ΔΕΖ . . . . . | Id. . . . .     | τοῦ ABΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ λόγος ἐστὶ |



PROPOSITIO LXXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                          | CODEx 190.                | EDITIO OXONIÆ.             |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. ὥστε . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . .      | ἔστ'                       |
| 2. ὥστε καὶ τῆς ΓΕ πρὸς τὴν ΕΘ<br>λόγος ἐστὶ διθείς. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                     |
| 3. γὰρ . . . . .                                             | δὲ . . . . .              | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστι . . . . .                                            | deest. . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὴν . . . . .                                             | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 6. δοθείς . . . . .                                          | δοθείς· σύγκειται γὰρ καὶ | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXXIX.

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                            |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ ΑΒΓ τρίγωνον . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                       | τρίγωνον ΑΒΓ               |
| 2. τὸ ΖΘΗ, . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                       | ΘΖΗ                        |
| 3. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ<br>γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑΗ, ἐν γὰρ<br>τῷ αὐτῷ εἰς τμήματι τοῦ<br>κύκλου, ἐστὶ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ<br>τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ<br>καὶ ἡ ὑπὸ ΗΛΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ.<br>Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῇ ὑπὸ<br>ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ<br>ΛΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· | Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν<br>ΒΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν<br>ΛΘΗ· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ<br>τῶν ΘΑΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ<br>ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ<br>ὑπὸ τῶν ΒΓΑ λοιπὴ τῇ<br>ὑπὸ τῶν ΘΗΑ ἐστὶν ἴση· | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἡ ΖΚ τῇ ΑΜ παράλληλος· καὶ                                                                                                                                                                                                                                                 | παράλληλος· καὶ . . . . .                                                                                                                                                  | ἡ ΖΚ τῇ ΑΜ παράλληλος·     |
| 5. ὑπὸ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | ὑπὸ τῶν . . . . .                                                                                                                                                          | deest.                     |
| 6. ΖΛΘ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                       | ΖΛΘ γωνία                  |
| 7. δὲ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | δὲ καὶ . . . . .                                                                                                                                                           | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἴση· . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                       | ἴση· καὶ                   |

PROPOSITIO LXXX.

|                                              |                              |                            |
|----------------------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . .         | deest                      |
| 2. πλευρῶν ὀρθογώνιον . . . . .              | εὐθειῶν . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ ἄρα . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .         | ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ         |
| Lin. 15. τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν<br>ΑΕ . . . . . | καὶ τῆς ΒΓ πρὸς ΑΕ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |



## EDITIO PARISIENSIS.

## CODEX 190.

## EDITIO OXONIÆ.

|                         |                          |                            |
|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 4. δὴ . . . . .         | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 3. κύκλου . . . . .     | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. δεχόμενον . . . . .  | δεδομένην ἔχον . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἐστὶ δοθέν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | δοθέν ἐστὶ                 |
| 8. δὲ . . . . .         | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 9. καὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |

## ALITER.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τῷ A, . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ A,                      |
| 2. τῆς ΓΒ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ ΒΓ                     |
| 3. τῷ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 4. τῆς . . . . .      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἐστὶ . . . . .     | ἐστὶν ἄρα . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἐστὶ . . . . .     | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τριγώνου . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 8. συνθέντι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | συνθέντι λόγος             |
| 9. λόγος . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. τῷ εἶδει. . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXXI.

|                           |                          |                            |
|---------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. τὴν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 2. καὶ . . . . .          | καὶ ἔστω λόγος . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. λόγος ἔστω . . . . .   | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 4. λόγος δοθείς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 5. λόγος ἐστὶ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 5. δοθείς, . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |
| 6. δοθείς . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .     | λόγος ἐστὶ δοθείς          |
| 7. λόγος . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .     | λόγος ἔστω                 |
| 8. γὰρ . . . . .          | λόγος ἐστὶ . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 9. λόγος ἐστὶ . . . . .   | deest . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἐστὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                     |

PROPOSITIO LXXXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ ἔστω . . . . . | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἐστὶν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἔσται                      |
| 4. ἡ Δ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον   |

PROPOSITIO LXXXIII.

|                                                |                      |                            |
|------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. προσληφθείσης ἀνάλογον . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ληφθείσης ὡς ἔτυχεν        |
| 2. τῶν , . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιοῦν<br>τῶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὁποιοῦν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν |
| 4. προσληφθείσης . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | προσληφθείσης ὡς ἔτυχεν    |
| 5. τῷ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 6. ἐστὶν ἴσον τὸ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶ τῷ               |
| 7. ἄρα . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ἐστὶ                   |
| 8. ἐστὶ . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO LXXXIV.

|                            |                           |                            |
|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. δοθεῖσα ἔστω ἡ ΔΓ . . . | ἔστω ἡ δοθεῖσα ἡ ΔΓ . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. Καὶ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                     |
| 3. παραλληλόγραμμον . . .  | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῷ εἶδει . . . . .      | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἄρα , . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                     |

PROPOSITIO LXXXV.

|                                                 |                      |                            |
|-------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. περιέχεν τὸ ΑΓ . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΓ περιέχεν                |
| 2. ἐστὶ δοθεῖσα . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | δοθεῖσά ἐστι.              |
| 3. δὲ . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ καὶ                     |
| 4. ἐστὶν . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. εἶδει . . . . .                              | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσά<br>ἐστι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## PROPOSITIO LXXXVI.

Hoc theorema adest ad calcem Datorum in codice *a*; in margine codicis *g*; in textu codicum *s*, *v*, *z*, et deest in omnibus aliis codicibus.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                               | CODEX 190.                                       | EDITIO OXONIÆ.                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. ἔσται δοθείσα. . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                             | δοθείσα ἔσται.                                      |
| 2. δοθὲν περιέχουσιν χωρίον .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                             | δοθὲν χωρίον περιέχουσιν                            |
| 3. τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ . . . . .                                                                                       | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 4. καὶ ἔστω . . . . .                                                                                             | deest. . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.                          |
| 5. τῷ . . . . .                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                             | τὸ                                                  |
| 6. τὴν . . . . .                                                                                                  | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 7. τὴν . . . . .                                                                                                  | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 9. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                             | τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ |
| 10. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τὸ .                                                                                    | τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ .                       | concordat cum edit. Paris.                          |
| 11. ἐστὶ . . . . .                                                                                                | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 12. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δοθείσης λόγος<br>ἄρα τοῦ τετραγώνου ὑπὸ τῶν ΒΑ,<br>ΑΔ . . . . .                              | deest. . . . .                                   | concordat cum edit. Paris.                          |
| 13. ΒΔ . . . . .                                                                                                  | ΒΔ λόγος . . . . .                               | concordat cum edit. Paris.                          |
| 13. ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου<br>τῆς ΒΑ, ΑΔ . . . . .                                                              | τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς<br>ΒΑ, ΑΔ ἐστὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                          |
| 14. τὴν . . . . .                                                                                                 | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 15. τὴν . . . . .                                                                                                 | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 16. μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν<br>ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. Τῆς δὲ<br>ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ<br>δοθείς καὶ . . . . . | τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος<br>δοθείς καὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                          |
| 17. ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν . .                                                                                      | τῆς ΑΒ πρὸς . . . . .                            | concordat cum edit. Paris.                          |
| 18. τὴν . . . . .                                                                                                 | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |
| 19. τὴν . . . . .                                                                                                 | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |

LEMMA.

Hoc lemma deest in editionibus Oxoniæ et Claudii Hardy, nec non in versione Zamberti; adest ad calcem Datorum in codicibus  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ; adest in margine codicis  $g$ , et deest in omnibus aliis codicibus.

PROPOSITIO LXXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

Hæc desunt in omnibus codicibus.

Εάν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον πε-  
ρίχωσιν ἐν δεδομένη γωνία,  
τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ  
τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μείζον  
ἢ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐ-  
τῶν ἔσται δοθεῖσα.

|                                                                              |                           |                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 2. ἔσται δοθεῖσα. . . . .                                                    | Id. . . . .               | δοθεῖσα ἔσται.                                                 |
| 3. εὐθεῖαι . . . . .                                                         | Id. . . . .               | εὐθεῖαι αἱ                                                     |
| 4. ἐστὶ δοθεῖσα. . . . .                                                     | Id. . . . .               | δοθεῖσά ἐστι.                                                  |
| 5. τοῦ . . . . .                                                             | Id. . . . .               | τῷ                                                             |
| 6. καὶ ἔστω . . . . .                                                        | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 7. λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν<br>AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν<br>GB, BA . . . . .  | Id. . . . .               | τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς<br>τὸ ὑπὸ τῶν GB, BA λόγος ἐστὶ,   |
| 8. Τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ<br>ὑπὸ τῶν BG, GA λόγος ἐστὶ<br>δοθείς. . . . . | Id. . . . .               | Τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν BG, GA πρὸς τὸ<br>ἀπὸ τῆς AB λόγος ἐστὶ δοθείς. |
| 9. τοῦ τετραγώνου ὑπὸ τῶν BG,<br>GA ἄρα . . . . .                            | Id. . . . .               | καὶ τοῦ τετραγώνου ἄρα ὑπὸ τῶν<br>BG, GA                       |
| 10. τῶν BG, GA καὶ τῆς BA,<br>τούτ' ἐστι . . . . .                           | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 11. τὴν . . . . .                                                            | deest . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 12. ἢ BA. . . . .                                                            | ἢ BA. Δίδεται ἄρα καὶ BG. | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 13. ἢ ὑπὸ ABG . . . . .                                                      | ἢ . . . . .               | concordat cum edit. Paris.                                     |

PROPOSITIO LXXXVIII.

|                   |                  |                            |
|-------------------|------------------|----------------------------|
| 1. ἡχθω . . . . . | διήχθω . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. AEG . . . . .  | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστίν. . . . . | deest . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXXIX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                             |                   |                            |
|-----------------------------|-------------------|----------------------------|
| Lin. 16. p. 466. ἀπολήψεται | λήψεται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. Καὶ . . . . .            | deest . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XC.

|                                                                                                                                   |                                      |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. γωνίαν ποιοῦσα . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                 | ποιοῦσα γωνίαν.            |
| 2. σημείου . . . . .                                                                                                              | deest . . . . .                      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ὑπὸ . . . . .                                                                                                                  | ἀπὸ τῶν . . . . .                    | περὶ                       |
| 4. τοῦ κύκλου τὸ . . . . .                                                                                                        | deest . . . . .                      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. Καὶ . . . . .                                                                                                                  | deest . . . . .                      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἄρα . . . . .                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                 | deest.                     |
| 7. καὶ . . . . .                                                                                                                  | deest . . . . .                      | concordat cum edit. Paris. |
| 8. δεδομένη εὐθεία τῇ ΒΔ, . .                                                                                                     | εὐθεία, . . . . .                    | concordat cum edit. Paris. |
| 9. γραμμὴ . . . . .                                                                                                               | deest . . . . .                      | concordat cum edit. Paris. |
| 10. Θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δο-<br>θείς καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος· θέσει<br>ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖσά ἐσ-<br>τιν ἡ ΔΓ. Καὶ δοθέν τὸ Δ . . | Θέσει δὲ δοθείς καὶ ὁ ΑΒΓ<br>κύκλος. | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XCI.

|                                   |                            |                               |
|-----------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .                  | deest . . . . .            | concordat cum edit. Paris.    |
| 2. τὸ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                        |
| 3. Καὶ . . . . .                  | deest . . . . .            | concordat cum edit. Paris.    |
| 4. ἐπὶ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .       | ἀπὸ                           |
| 5. τὸ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .       | ὁ                             |
| 6. δοθείς· δοθέν ἐστίν ἄρα τὸ Α . | δοθέν ἐστίν ἄρα τὸ Α . . . | δοθείς· ἐστίν ἄρα τὸ Α δοθέν. |
| 7. ἄρα . . . . .                  | deest . . . . .            | concordat cum edit. Paris.    |

PROPOSITIO XCII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                            |                      |        |
|----------------------------|----------------------|--------|
| 1. τις . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| Lin. 4. p. 471. ἐστὶ . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

ALITER.

- |                                                     |                         |                            |
|-----------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει . . .                    | θέσει . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ<br>τῶν ΒΔ, ΔΓ . . . . . | τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XCIII.

- |                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἐστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ                        |
| 3. τῶν . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XCIV.

- |                               |                                              |                            |
|-------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|
| 1. πλευραὶ . . . . .          | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris. |
| 2. περιφερεία . . . . .       | περιφερεία ὑπὸ τῆς διαχ-<br>θείσης . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἡ ΒΕ πρὸς τὴν . . . . .    | ΒΕ πρὸς . . . . .                            | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶν ἴση . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .                         | ἴση ἐστὶν                  |
| 5. ἄρα . . . . .              | deest . . . . .                              | concordat cum edit. Paris. |
| 6. καὶ ὡς συαμφότερος ἄρα . . | <i>Id.</i> . . . . .                         | ὡς ἄρα συαμφότερος         |
| 7. ἐστὶν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                     |
| 8. ἐστὶν ἴσον . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .                         | ἴσον ἐστὶν                 |

ALITER.

- |                              |                                                  |                            |
|------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. Καὶ . . . . .             | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὡς ἄρα . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .                             | καὶ ὡς ἄρα                 |
| 3. ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως . | ἐστὶν ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ<br>οὕτως ἐστὶν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστι . . . . .            | deest . . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |

## ALITER.

| EDITIO PARISIENSIS.  | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .     | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. γωνία . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. γωνίαις . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. καὶ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## PROPOSITIO XCV.

|                                |                         |                            |
|--------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. τις . . . . .               | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τοῦ κύκλου, . . . . .       | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῆς . . . . .               | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 4. γωνίας εὐθεία . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 5. τοῦ ABΓ κύκλου διάμετρος    | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὸ . . . . .                | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἄρα . . . . .               | deest . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶ καὶ τὸ Z. . . . .      | καὶ τὸ Z ἐστίν. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 10. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |

*Nota.* In Datis codicis 190 semper legere est γωνία ὑπὸ τῶν ABΓ pro γωνία ὑπὸ ABΓ.



# HYP SICLIS

## LIBER PRIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIAE.

Lin. 9. p. 481. ὑπὸ . . . . . παρά

### PROPOSITIO II.

Lin. 2. p. 488. λέγω ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων λέγω  
τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσὶν, τουτέστιν.

Lin. 12. ἡ MN ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κύκλου τοῦ deest.  
ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. . . .

Lin. 4. pag. 489. ἐστὶ . . . . . deest.

Lin. 14. κέντρου . . . . . deest.

### PROPOSITIO III.

Lin. 1. pag. 491. τῶ . . . . . τὸ

Lin. 3. pag. 492. ὑπὸ . . . . . ἀπὸ

### PROPOSITIO IV.

Lin. 1. pag. 494. τῆς . . . . . τῶν

Lin. 3. τῆς . . . . . τῶν

Lin. 2. pag. 495. ὅπερ εἶδει δεῖξαι . . . . deest.

### ALITER.

Lin. 4. p. 497. τὸ . . . . . τα

Lin. 17. ἔστω . . . . . ἔσται

III.



## PROPOSITIO V.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIAE.

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| Lin. 7. pag. 499. τοῦ      | τῆς    |
| Lin. 7. pag. 500. τριγώνου | deest. |
| Lin. 10. τῶν               | τῆς    |
| Lin. 11. ὡς ἄρα            | ἄρα ὡς |
| Lin. 16. τὰ                | τὸ     |

## PROPOSITIO VI.

|                      |            |
|----------------------|------------|
| Lin. 2. pag. 503. τὸ | deest.     |
| Lin. 15. πενταγώνους | πενταγώνων |

## PROPOSITIO VII.

|                                                                                                             |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Lin. 16. pag. 504. ὅτι                                                                                      | καὶ ἐξῆς ὅτι                                                                        |
| Lin. 1. b. τὸ δὲ μείζον                                                                                     | μείζον δὲ                                                                           |
| Lin. 4. pag. 505. ἡ ὅλη ἡ AB πρὸς τὸ<br>μείζον τμήμα τὴν AG οὕτως ἡ ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς<br>τὸ μείζον τμήμα τὴν AZ | ἔλη ἡ AB πρὸς τὸ μείζον τμήμα τῆς AG οὕτως<br>ἔλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τῆς ΔΖ. |
| Lin. 9. ἔστιν                                                                                               | ἔστι δὲ                                                                             |
| Lin. 11. ὑπὸ                                                                                                | deest.                                                                              |
| Lin. 16. ἀπὸ                                                                                                | deest.                                                                              |
| Lin. 3. pag. 506. συναμφοτέρος ἡ                                                                            | συναμφοτέρος αἱ                                                                     |
| Lin. 4. τουτέστι δύο αἱ AB πρὸς AG                                                                          | deest.                                                                              |
| Hæc lectio mea est.                                                                                         |                                                                                     |
| Lin. 5. συναμφοτέρος ἡ                                                                                      | συναμφοτέραι αἱ                                                                     |

## COROLLARIUM.

|                 |        |
|-----------------|--------|
| Lin. 10. δὴ     | deest. |
| Lin. 12. ἔχει   | deest. |
| Lin. 14. τὸ ἀπὸ | τοῦ    |
| Lin. 4. b. καὶ  | deest. |

Ad calcem primi libri subsequētia adjecta sunt in omnibus codicibus, et in editionibus Basiliæ Oxoniæ que, nec non in Zamberti et Commandini versionibus; illa tanquam redundantem ac verbosam præcedentium repetitionem ex textu meo rejeci.

Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῶν γενομένων, δῆλον ὅτι εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔξει ὃν εὐθείας οἷας διηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἢ δυναμένη τὴν ἔλιν, καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην ἔλιν καὶ ἔλαττον τμήμα. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον οὕτως ἢ τοῦ δωδεκάεδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου, τουτέστιν ὡς ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου πλευρά· ὡς δὲ ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσάεδρου οὕτως ἐστὶν, εὐθείας ἥς διηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἢ δυναμένη τὴν ἔλιν, καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ἔλιν καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα· ὡς ἄρα τὸ δωδε-

His utique omnibus notis nobis factis, manifestum est, si in eadem sphaerâ describantur dodecaedrum et icosaedrum, dodecaedrum ad icosaedrum rationem habiturum esse quam, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ, potens totam et majorem portionem ad potentem totam et minorem portionem. Quoniam enim est ut dodecaedrum ad icosaedrum ita dodecaedri superficies ad ipsam icosaedri, hoc est cubi latus ad icosaedri latus; ut autem cubi latus ad ipsum icosaedri ita est, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione sectâ, potens totam et majorem portionem ad potentem totam et minorem portionem; ut igitur dodecaedrum ad

Toutes ces choses nous étant connues, si l'on décrit dans la même sphère un dodécaèdre et un icosaèdre, et si l'on coupe une droite quelconque en extrême et moyenne raison, il est évident que le dodécaèdre aura avec l'icosaèdre, la même raison que le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, a avec le carré d'une droite, égal aux carrés de la droite entière et du plus grand segment. Car, puisque le dodécaèdre est à l'icosaèdre comme la surface du dodécaèdre est à la surface de l'icosaèdre, c'est-à-dire comme le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, et que si une droite quelconque est coupée en extrême et moyenne raison, le côté du cube est au côté de l'icosaèdre, comme le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite, égal à la somme des carrés de la droite entière et du plus petit segment; si donc un dodécaèdre et un icosaèdre sont décrits dans une même sphère, et si une droite quelconque est coupée en extrême et moyenne raison, le dodécaèdre

κάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν  
σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως εὐθείας ἥς δηπο-  
τοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυνα-  
μένη τὴν ἔλιν καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν  
δυναμένην τὴν ἔλιν καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα.

icosaedrum; illis in eadem sphæra descriptis,  
ita, rectâ quâlibet extremâ et mediâ ratione  
sectâ, potens totam et maiorem portionem ad  
potentem totam et minorem portionem.

sera à l'icosaèdre comme le carré d'une droite, égal à la somme des carrés de  
la droite entière et du plus grand segment, est au carré d'une droite, égal à  
la somme des carrés de la droite entière et du plus grand segment.

## LIBER SECUNDUS.

### PROPOSITIO II.

Hæc erat secundi libri demonstratio quam in textu ex integro restitui.

#### EDITIO PARISIENSIS.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγρά-  
ψαι.

Εστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τετ-  
μήσθω δίχα τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ  
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ, καὶ αἱ  
λοιπαί.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλὴ ἐστὶν ἐκατέρας τῶν  
ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΗΖ, καὶ  
παράλληλος. Ομοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι  
καὶ παράλληλος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ.

#### EDITIO OXONIE.

In datâ pyramide octaedrum describere.

Sit data pyramis ΑΒΓΔ, et secentur in Ε, Ζ,  
Η, Θ, Κ, Λ punctis, et jungantur ipsæ ΘΚ, ΘΛ,  
ΕΖ, ΖΗ, et reliquæ.

Et quoniam ΑΒ dupla est utriusque ipsarum  
ΘΚ, ΗΖ, æqualis igitur est ipsa ΘΚ ipsi ΗΖ,  
et parallela. Similiter et ipsa ΘΗ ipsi ΖΚ et  
æqualis est et parallela; æquilaterum igitur est

Décrire un octaèdre dans une pyramide donnée.

Soit donnée la pyramide ΑΒΓΔ; coupons les côtés ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΓ, aux  
points Ε, Ζ, Θ, Κ, Λ, et joignons ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ, etc.

Puisque la droite ΑΒ est double de chacune des droites ΘΚ, ΗΖ, et qu'elle leur  
est parallèle, la droite ΘΚ sera égale et parallèle à ΗΖ. La droite ΘΗ est semblable-  
ment égale et parallèle à ΖΚ; le quadrilatère ΘΚΖΗ est donc équilatéral; je dis

λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Εὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ΚΛ  
κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ΕΖΒΗ,  
ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΓΖΗ, ὁμοίως δείξομεν τὰ  
ἐπὶ τοῦ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. Ὅπερ εἶδει  
ποιῆσαι.

ipsum ΘΚΖΗ; dico et rectangulum. Si enim  
ab ipsâ ΚΛ perpendiculares ducantur ad plana  
ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, similiter ostende-  
mus ipsa in ΘΚΖΗ quadrato æquilatera esse.  
Quod oportebat facere.

aussi qu'il est rectangle. Car si de la droite ΚΛ, nous menons des perpendi-  
culaires aux plans ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, nous démontrerons semblablement  
que les quadrilatères compris dans le quarré ΘΚΖΗ, sont équilatéraux. Ce qu'il  
fallait faire.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIÆ.

Lin. 14. p. 511. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, deest.

ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ. . . . .

Lin. 16. τῶν . . . . . τῆς

PROPOSITIO IV.

Lin. 5. p. 615. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΛΘ, deest.

ΛΚ, ΚΗ, ΗΘ, . . . . .

PROPOSITIO V.

Lin. 13. p. 516. καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ'  
ὃ συμβάλλει ἡ ὑπὸ τοῦ Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς  
τὰ Η, Κ, φανερόν ἐστι αἱ ἐπιζευγνύμεναι ὀρθὰς  
περιέξουσι μετὰ τῆς αὐτῆς . . . . .

Sic se habet Oxoniæ editio.  
Καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ  
Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὰ Η, Κ, φανερόν ἐστι  
ἡ ἐπιζευγνυμένη ὀρθὰς περιέξει μετὰ τῆς  
αὐτῆς.

In omnibus autem manuscriptis, et in  
editionibus Basilicæ Oxoniæque hæc  
legere sunt.

Καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ  
Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπιζευγνυμένη ὀρθὴ ᾧ  
περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς.

## PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

EDITIO OXONIE.

|                     |           |        |
|---------------------|-----------|--------|
| Lin. 5. p. 517. ἔχη | . . . . . | ἔχει.  |
| Lin. 11. δὴ         | . . . . . | δὲ     |
| Lin. 6. p. 518. καὶ | . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO VII.

|                                 |           |                     |
|---------------------------------|-----------|---------------------|
| Lin. 2. p. 519. γωνίαν τέμνουσι | . . . . . | τέμνουσι γωνίαν     |
| Lin. 7. ἀγομένη καθεύω,         | . . . . . | καθεύω ἀγομένη      |
| Lin. 15. p. 521. ὀρθὰς          | . . . . . | ὀρθὰς εἰσὶν εὐθεῖαι |
| Lin. 16. εἰσὶν                  | . . . . . | deest.              |
| Lin. 1. p. 522. ἔσται           | . . . . . | ἐστὶ                |
| Lin. 7. ὥς                      | . . . . . | deest.              |

## PROPOSITIO VIII.

|                                          |           |                                 |
|------------------------------------------|-----------|---------------------------------|
| Lin. 6. p. 523. νενοήσθω                 | . . . . . | Συννοείσθω                      |
| Lin. 9. δὴ                               | . . . . . | δὲ                              |
| Lin. 7. p. 524. καὶ ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ  |           | ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BZΔ.    |
| ὑπὸ BZΔ γωνία.                           | . . . . . |                                 |
| Lin. 10. p. 525. περιέξουσιν             | . . . . . | περιέχουσιν                     |
| Lin. 14. μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ |           | ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς BΔ μείζων |

## PROPOSITIO IX.

|                                  |           |        |
|----------------------------------|-----------|--------|
| Lin. 3. p. 526. τε καὶ ἰσογώνιον | . . . . . | deest. |
| Lin. 16. ὀρθὰς                   | . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO X.

|                     |           |           |
|---------------------|-----------|-----------|
| Lin. 5. p. 529. καὶ | . . . . . | deest.    |
| Lin. 1. p. 531. τῆς | . . . . . | τῆς AB    |
| Lin. 3. καὶ         | . . . . . | deest.    |
| Lin. 12. ἡ KA τῇ KM | . . . . . | αἱ KA, KM |

FIN.

## ERRATA TOMI SECUNDI.

| Pagina      | linea |                                                                                                                                   | Pagina | linea |                                                                                                                     |
|-------------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 58,         | 7, b. | multiplant, <i>lege</i> multipliant.                                                                                              |        |       | sitionis et in aliis figuris similibus quæ subsequuntur, jungatur recta ΘΚ.                                         |
| 60,         | 6, b. | <i>Idem.</i>                                                                                                                      |        |       |                                                                                                                     |
| 74,         | 10,   | ἄλλου, <i>lege</i> ἄλλου πρώτου.                                                                                                  | 264,   | 1, b. | ΗΞ, <i>lege</i> ΗΖ in tribus linguis.                                                                               |
| —           | —     | numero, <i>lege</i> numero primo.                                                                                                 | 270,   | 4, b. | τὴν ῥητὴν ΔΕ, <i>lege</i> τὴν ΔΕ ῥητὴν.                                                                             |
| 75,         | 6,    | γάρ, <i>lege</i> γάρ ἐστι.                                                                                                        | 322,   | 2, b. | un premier apotome, <i>lege</i> le premier apotome ; <i>on lira de même</i> , le second, le troisième etc. apotome. |
| 171 et 172. |       | deleatur in figurâ littera Δ, quæ non est in lineâ ΖΕ.                                                                            | 365,   | 5,    | ἀσύμμετρος, <i>lege</i> σύμμετρος.                                                                                  |
| 181,        | 10,   | Οπερ ἔδει δεῖξαι, <i>lege</i> ῥητὸν περιέχουσαι. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.                                                               | —      | 6,    | incommensurabilis, <i>lege</i> commensurabilis.                                                                     |
| —           | —     | commensurabiles, <i>lege</i> commensurabiles, rationale continentes.                                                              | —      | 4,    | incommensurable, <i>lege</i> commensurable.                                                                         |
| —           | 6,    | commensurable en puissance seulement, <i>lege</i> commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle. | 414,   | 8,    | commensurable, <i>lege</i> la même.                                                                                 |
| 223,        | 9,    | μόνον διαιρεῖται, <i>lege</i> ἄρα διαρεῖται μόνον.                                                                                | 459,   | 2, b. | ἔστω, <i>lege</i> ἐστί.                                                                                             |
| 247,        |       | In figurâ hujus propo-                                                                                                            | 479,   | 1, b. | rationelle, <i>lege</i> mediale.                                                                                    |

## TOMI TERTII.

| Pagina | linea |                                   | Pagina | linea |                                   |
|--------|-------|-----------------------------------|--------|-------|-----------------------------------|
| 66,    | 9,    | τά, <i>lege</i> τὰ μὲν.           | 100,   | 13,   | ἀπὸ τῆς, <i>lege</i> ἀπὸ τῶν.     |
| —      | 10,   | εἰσιν, <i>lege</i> ἐστίν.         | 129,   | 15,   | ᾧσι, deleatur.                    |
| 68,    | 6,    | αὐτῇ, <i>lege</i> αὐτῇ δεθῆν.     | 137,   | 1,    | corollarium, <i>leg.</i> lemma.   |
| 71,    | 5,    | δεθείση, <i>lege</i> τῇ δεθείση.  | 138,   | 9,    | τυγχάνον, <i>lege</i> τυγχάνοντα. |
| 84,    | 7,    | ἐστὶν ἔτι, <i>lege</i> ἔτι ἐστίν. |        |       |                                   |

| Pagina | linea |                                      | Pagina | linea |                           |
|--------|-------|--------------------------------------|--------|-------|---------------------------|
| 144.   | 6,    | πυραυδα, lege πυραυδα <sup>ς</sup> . | 488,   | 4, b. | πδ, deleatur.             |
| 161,   | 4,    | ἡ ἱερὴ ἡ, lege ἱερὴ ἡ.               | 499,   | 1, b. | dodecagone, lege de-      |
| 180,   | 4,    | ῥιόδα, lege ῥιόδα.                   |        |       | cagone.                   |
| 188,   | 12,   | εὐδία, lege εὐδία.                   | 500,   | 10,   | πδ, lege πδ.              |
| 189,   | 7,    | ἡ ὑπερσυνα, lege ὑπερ-               | 506,   | 3,    | α, lege ἡ.                |
|        |       | συνα.                                | 557,   | 6, b. | deest, lege πδ.           |
| 254,   | 9,    | γινώσκει, lege γινώσκει.             | 540,   | 1, b. | δδ, lege δδ.              |
| 260,   | 6,    | γινώσκει, lege γινώσκει.             | 544,   | 3,    | ἡ ὑπερσυνα, lege ὑπερ-    |
| 271,   | 9,    | ἡ ὑπερσυνα, lege ὑπερ-               |        |       | συνα ἡ ὑπερσυνα.          |
|        |       | συνα.                                | 545,   | 2, b. | 25, lege lin. 5.          |
| 279,   | 2, b. | πδ, lege πδ.                         | 548,   | 11,   | 10, lege lin. 11.         |
| 309,   | 14,   | α, lege α.                           | 552,   | 2,    | 6, lege pag. 355, lin. 9. |
| 343,   | 3, b. | ΔΙΑ, lege ΔΙΑ ἡ τριῶν                | 555,   | 11,   | lin. 11 b, lege lin. 1.   |
|        |       | linguis.                             | 570,   | 3, b. | γινώσκει, lege γινώσκει.  |
| 357,   | 10,   | πδ, lege πδ.                         | 579,   | 2,    | πδ, lege πδ.              |
| 372,   | 2,    | πρὸς, lege πρὸς.                     | —      | 5, b. | deest, lege concordat.    |
| 455,   | 4, b. | π, deleatur.                         |        |       |                           |