

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
ELEMENTA

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.

BEROLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXV.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

GRAECE ET LATINE

COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECEN-
TIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI
MAXIME ILLUSTRATI.

EDIDIT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

GYMNASII STUTTGARDIANI RECTOR.

TOM. II. COMPLECTENS LIBR. IV—VI.

CUM VI. TABULIS.

BEROLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXV.

UNIVERSITÄT
BIBLIOTHEK

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

R

L

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
LIBRI SEX PRIORES.

Ε Τ Κ Λ Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Τ Ε Τ Α Ρ Τ Ο Ν .

Ο Ρ Ο Ι .

α. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

β. Σχήμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

γ. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἄπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ¹⁾.

ε. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται ²⁾.

1) Ita rectius omnino cum Cod. a. legit Peyrardus. Prior editiones habebant: ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, hic legendum fuerit ἐφάπτηται.

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. **F**igura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus tangit unumquodque latus eius, in qua inscribitur.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae tangit unumquemque angulum eius, circa quam circumscribitur.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptae tangit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circumscriptum circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figura similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus eius, in qua inscribitur contingit.

DEFIN.

Obs. Campanus habet tantum duas primas huius libri definitiones. At illae ipsae nusquam adhibentur. Hinc du-

ζ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ὑπὶται.

ζ'. Εὐθεία εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓ$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ $Δ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον τῇ $Δ$ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦχθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΒΓ$. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $Δ$, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθὲν ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον τῇ

bium videri possit, annon serius adiectae fuerint ad analogiam sequentium.

PROPOSITIO I.

Obs. Quam punctum F in circumferentia pro lubitu sumi queat, patet, innumeris modis problema solvi posse, nisi nova adhuc determinatio accedat. Eiusmodi determinatio ea esse potest, si punctum F datum esse sumere velis. Verum, etiam hoc sumto, duplex tamen, quod et Commandinus monuit, solutio locum habebit: aequae enim ducta recta FZ ad punctum Z , in quo circuli iterum sibi occurrunt, problemati satisfaciet, ac recta FA . Alia determinatio haec esse poterit, ut recta circulo inscribenda vel ipsa, vel producta, per datum punctum transeat, quod non sit in circuli circumferentia; vel ut illa parallela sit rectae positione datae. Et,

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius, circa quam circumscribitur, tangit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini eius in circumferentia sunt circuli.

PROPOSITIO I. (Fig. 283.)

In dato circulo datae rectae, quae non maior sit diametro circuli, aequalem rectam aptare.

Sit datus circulus $AB\Gamma$, data autem recta Δ non maior circuli diametro, oportet igitur in circulo $AB\Gamma$ rectae Δ aequalem rectam aptare.

Ducatur circuli $AB\Gamma$ diameter $B\Gamma$. Si quidem igitur $B\Gamma$ aequalis est Δ , factum erit propositum. Aptata est enim in circulo $AB\Gamma$, $B\Gamma$ rectae Δ ae-

si quidem illud postuletur, ut recta circulo dato inscribenda per datum punctum transeat, problema unum ex iis est, quae Pappo testante in Praefat. ad libr. VII. Collect. Math. Apollonius in libris $\pi\epsilon\pi\lambda\iota\ \nu\epsilon\upsilon\sigma\epsilon\omega\nu$ tractavit. (Cf. Apollonii Pergaei Inclinat. Libri duo ed. Horsley Oxon. 1770. et: Die Bücher des Apollonius von Perga de Inclinationibus von Diesterweg Berlin. 1823). Et particulare illud problema facile solvetur sequentem in modum.

Anal. Puta factum, et Fig. 284. recta AB , quae aequalis sit rectae datae Δ diametro non maiori, inscripta sit circulo dato ABZ , eaque ipsa aut producta per datum punctum Γ transeat, quod non sit in circuli dati circumferentia. Et 1) quidem, si recta data sit aequalis diametro circuli, recta circulo inscribenda erit diameter per datum punctum ducta. Si autem non fuerit diameter, erit ex hyp. minor diametro,

Δ εὐθεία ἴση ἢ $B\Gamma$. Εἰ δὲ οὐ μείζων ἐστὶν ἢ $B\Gamma$ τῆς Δ , καὶ κείσθω ¹⁾ τῇ Δ ἴση ἢ $ΓΕ$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ , διαστήματι δὲ τῷ $ΓΕ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΕΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΓΑ$.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΕΖ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ $ΓΑ$ τῇ $ΓΕ$. Ἀλλὰ τῇ Δ ἢ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ $ΓΑ$ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν $ΑΒΓ$, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ²⁾, μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴση ἐνῆρμυσται ἡ $ΓΑ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ΔΕΖ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

1) Peyrardus cum Cod. a legit: εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἢ $B\Gamma$ τῆς Δ , κείσθω. Nos restituiimus lectionem ed. Oxon.

2) Peyrardus cum Cod. a. omittit verba μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου et eorum loco ponit τῇ Δ : nos ista verba, quae necessariam omnino determinationem continent, restituiimus.

adeoque extra centrum E transibit (III. 15.). Demissa igitur in eam e centro perpendicularis $E\Theta$ eam bisecabit (III. 3.), adeoque, ob datam AB , data erit dimidia $A\Theta$, adeoque data erit, vel inveniri poterit in triangulo ad Θ rectangulo $A\Theta E$, in quo etiam EA datur, recta $E\Theta$ (I. 47. Cor. 20.) vel distantia, qua recta AB a centro E abest, vel, ut aliter dicamus, notum erit, in qua distantia a centro E situm esse debeat punctum Θ , nempe in circulo centro E , radio $E\Theta$ descripto. (Quod ipsum brevius e III. 15. Cor. derivari poterat.). Qui circulus si describatur, continget cum recta AB

qualis. Sin minus, maior est BF ipsa A , et ponatur ipsi A aequalis FE (I. 3.), et centro F , intervallo vero FE , circulus describatur AEZ (Post. 3.), et iungatur FA .

Quoniam igitur punctum F centrum est circuli AEZ , aequalis est FA ipsi FE . Sed FE ipsi A est aequalis; et A igitur ipsi FA est aequalis.

In dato igitur circulo ABF , datae rectae, quae non maior est diametro circuli, aequalis aptata est FA . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO II. (Fig. 285.)

In dato circulo inscribere triangulum aequiangulum dato triangulo.

Sit datus circulus ABF , datum vero triangulum AEZ ; oportet in circulo ABF triangulo AEZ aequiangulum triangulum inscribere.

in Θ (III. 16.), adeoque tota extra eum posita erit. Unde, ut recta AB transire possit per punctum datum F , necesse est, ut punctum F non sit intra circulum centro E , radio $E\Theta$, descriptum. Quodsi non fuerit, problema reductum est ad hoc: e puncto dato F , quod non sit intra circulum datum, ducere ad hunc circulum rectam, quae eum contingat, i. e. ad III. 17.

Compositio problematis itaque huc redit. Si recta data A aequalis sit diametro circuli dati, ducatur per punctum datum F diameter circuli. (Punctum nempe F a centro E diversum esse sumitur, quodsi non foret, quaevis diameter problemati satisfaceret.). Sin autem recta data minor sit diametro circuli dati, sumatur in circumferentia circuli punctum quodeunque H , et ex IV. 1. circulo inscribatur recta $HK=A$, et, demisso in HK perpendicularo EL , centro E , radio EL , describatur circulus. Quodsi iam punctum datum F sit intra hunc circu-

"Ἦχθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $HΘ$ κατὰ τὸ A , καὶ συνεστατάω πρὸς μὲν τῇ $AΘ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ $ΘΑΓ$, πρὸς δὲ τῇ HA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ HAB , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $BΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλον τοῦ $ABΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεία ἡ $ΘA$, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ ἡ ἄρα ὑπὸ $ΘΑΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ $ABΓ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΘΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓB$ τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $BAΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $EΖΔ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ABΓ$ κύκλον.

lum, problema solvi nequit. Si autem HK transeat per punctum Γ , factum erit, quod petebatur. Sin minus ex puncto Γ ducatur recta $ΑΓB$ circumulum interiorem contingens (III. 17. vel III. 16. Cor.) eritque illa $=HK$ (Obs. 4. ad III. 18.) $=A$. Et patet ex III. 17. duas semper solutiones locum habere, excepto eo casu, quo punctum Γ est in circumferentia circuli interioris, qui non nisi unam solutionem admittit. Notari meretur, ad facillimum hoc et simplicissimum problema facile reduci posse alia magis composita v. c. problema, circulo dato inscribendi triangulum, cuius duo latera parallela sint duabus rectis positione datis, et cuius tertium latus transeat per datum punctum, vel generalius problema circulo dato inscribendi Polygonum quodcunque, quod impari laterum numerum habeat, ita, ut eius latera omnia, uno excepto, sicut parallela rectis positione datis, reliquum autem latus transeat per punctum datum, vel etiam, ut omni polygoni

Ducatur recta $H\Theta$ contingens circulum $AB\Gamma$ in A (III. 17.), et constituatur ad rectam $A\Theta$ et ad punctum in ea angulo ΔEZ aequalis $\Theta A\Gamma$ (I. 23.); rursus, ad rectam HA et ad punctum in ea A angulo $Z\Delta E$ aequalis HAB , et iungatur $B\Gamma$.

Quoniam igitur circulum $AB\Gamma$ contingit aliqua recta ΘA , a contactu autem ad A in circulo ducta est recta $A\Gamma$, angulus $\Theta A\Gamma$ aequalis est angulo $AB\Gamma$ in alterno circuli segmento (III. 32.). Sed angulus $\Theta A\Gamma$ ipsi ΔEZ est aequalis; angulus igitur $AB\Gamma$ ipsi ΔEZ est aequalis. Ex eadem ratione et angulus $A\Gamma B$ ipsi $Z\Delta E$ est aequalis, et reliquis igitur $B A\Gamma$ reliquo $EZ\Delta$ est aequalis (I. 32.). Triangulum igitur $AB\Gamma$ aequiangulum est triangulo ΔEZ , et inscriptum est in circulo $AB\Gamma$.

latera transeant per puncta data, aliaque huius generis plura, quod primum ostendit Annibale Giordano di Ottaviano (Memorie di Fisica e di Math. della Societa Italiana T. IV.), et post eum eodem loco Malfatti. Cf. l'Huilier Elémens d'Analyse Géométrique et d'Analyse Algébrique §. 146. sqq. Klügel. Wörterb. T. III. p. 155. Meier. Hirsch. Samml. geom. Aufg. I. Th. §. 150. sqq. Carnot. Géom. de Position. Transcramus iam ad aliud, de quo ante diximus, problema. Inscribenda nempe sit circulo dato recta AB aequalis rectae datae A , quae non maior esse ponitur, quam circuli diameter, ita, ut recta AB simul parallela sit rectae positione datae. Praetermisso eo casu, quo recta data A aequalis est diametro, ostendetur, ut in problemate praecedente, rectam AB esse contingentem circuli ex eodem centro cum circulo dato descripti: cuius radii quadratum aequale sit differentiae quadrati radii circuli dati, et quadrati dimidia rectae A . Quum itaque

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, τὸ δὲ δοθέν τριγώνον τὸ $ΔΕΖ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ $ΕΖ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ $Η, Θ$ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου κέντρον τὸ $Κ$, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεΐα ἡ $ΚΒ$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΚΒ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Κ$ τῇ μὲν ὑπὸ $ΔΕΗ$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $ΒΚΑ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΔΖΘ$ ἴση ἢ ὑπὸ $ΒΚΓ$, καὶ διὰ τῶν $Α, Β, Γ$ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου αἱ $ΑΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐφαπτόνται τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου αἱ $ΑΜ, ΜΝ, ΝΑ$ κατὰ τὰ $Α, Β, Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Κ$ κέντρον ἐπὶ τὰ $Α, Β, Γ$ ¹⁾ σημεία ἐπιζευγνύμεναί εἰσιν αἱ $ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ$ ὁρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς $Α$,

1) Verba: ἀπὸ δὲ τοῦ $Κ$ κέντρον ἐπὶ τὰ $Α, Β, Γ$, quae cum Cod. a. omittit Peyrardus, ex antiq. ed. restituiimus, quod magis determinate exprimunt, rectas ex centro ductas esse.

hic circulus eodem ac ante modo describi possit, problema redit ad id, de quo Qbs. 5. ad III. 17. diximus. Aliam et faciliorem huius problematis solutionem tradunt Commandinus et ex eo Clavius. Nempe ducta diametro rectae positione datae parallela, abscindantur in ea e centro ex utraque parte segmenta aequalia dimidia rectae $Δ$, atque ex horum extremitatibus erigantur ad diametrum perpendiculara, quae inter se comprehendunt segmenta circuli, quorum singulae chordae

In dato igitur circulo triangulum dato triangulo aequiangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III. (Fig. 286.)

Circa datum circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datum autem triangulum ΔEZ ; oportet circa $AB\Gamma$ circulum triangulo ΔEZ aequiangulum triangulum circumscribere.

Producatur EZ ex utraque parte ad H , Θ puncta, et sumatur centrum K circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et ducatur utcunque recta KB , et constituatur ad KB rectam et ad punctum in ea K angulo ΔEH aequalis BKA , angulo vero $\Delta Z\Theta$ aequalis $BK\Gamma$ (I. 23.) et per puncta A , B , Γ ducantur rectae AM , MBN , NGA circulum $AB\Gamma$ contingentes.

Et quoniam contingunt circulum $AB\Gamma$ rectae AM , MN , NA in punctis A , B , Γ , ex centro K autem ad puncta A , B , Γ ductae sunt KA , KB , $K\Gamma$, recti sunt anguli ad puncta A , B , Γ (III. 18.). Et propositum efficient. Caeterum (ope III. 20.) ad hoc problema facile reducitur illud: circulo dato inscribere triangulum, cuius singula latera parallela sint rectis positione datis, quae omnes se intersecant.

PROPOSITIO II.

Obs. In hoc quoque problemate punctum A in circumferentia pro lubitu sumi, aut datum esse, aut nova aliqua alia conditio accedere potest. Praeterea, etiam si punctum A datum sit, triangulum circulo inscribendum sex diversis modis in circulo poni poterit. Nempe angulus $\Theta A\Gamma$ cuilibet angulorum E , A , Z aequalis fieri potest, quo ipso iam tres

B, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ AMBK τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέττασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK, καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, KBM γωνίαι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN λοιπῇ τῇ ὑπὸ EAZ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AMN τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιέγγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιέγγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

modi trianguli constituendi efficiuntur. Deinde, cuicumque angulorum *B, Δ, Z* angulum *ΘΑΓ* aequalem facias, duo reliqui adhuc anguli locum inter se mutare possunt, quo itaque sex omnino modi prodeunt. Magnitudo tamen laterum trianguli semper eadem est, quamvis variari possit eorum positio. Facile etiam patet, reduci hoc problema posse (ut a Borellio factum est) ad Prop. III. 34. adeoque etiam ad alteram, quae ibi allata est, solutionem, vel eam quoque, quam tum habuimus, conditionem admittere.

COR. Nominatim itaque circulo dato triangulum aequi-

quoniam quadrilateri $AMBK$ quatuor anguli quatuor rectis aequales sunt (I. 32.), quippe in duo triangula dividitur $AMBK$, et sunt recti anguli MAK , KBM ; reliqui igitur AKB , AMB duobus rectis aequales sunt; sunt autem et $\triangle E H$, $\triangle E Z$ duobus rectis aequales (I. 13.); anguli igitur AKB , AMB angulis $\triangle E H$, $\triangle E Z$ aequales sunt, quorum AKB ipsi $\triangle E H$ est aequalis; reliquus igitur AMB reliquo $\triangle E Z$ est aequalis. Similiter ostendetur et angulum ANM ipsi $\triangle E Z$ esse aequalem; et reliquus igitur MAN reliquo $E A Z$ est aequalis. Triangulum igitur AMN aequiangulum est triangulo $\triangle E Z$, et circumscribitur circum ABF circulum.

Circa datum igitur circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IV. (Fig. 287.)

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum AFB ; oportet in triangulo ABF circulum inscribere.

angulum, adeoque (I. 6.) aequilaterum inscribetur ope I. 1. quod ipsum fieri posse in IV. 16. sumitur.

PROPOSITIO III.

Obs. Similes hic observationes locum habent ac in praecedente. Nempe punctum B pro lubitu, *à volonté*, in circumferentia sumi aut etiam datum esse, aut quacunque alia ratione determinari potest. Deinde etiam determinato puncto B sex variis modis trianguli AMN situs variari potest, quamvis magnitudo laterum non varietur. Praeterea iure quidem

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι δίχα ταῖς $ΒΔ$, $ΓΔ$ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὰς AB , $ΒΓ$, $ΓΑ$ εὐθείας κάθετοι αἱ $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ABΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ABΓ$, ἵστί δὲ καὶ ὀρθῇ ἡ ὑπὸ $BEΔ$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $BZΔ$ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $EBΔ$, $ZBΔ$, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυαὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν $ΒΔ$, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν ἴση ἄρα ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΔΖ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Δ$, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν AB , $ΒΓ$, $ΓΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , H σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρον $Δ$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΔΕ$, $ΔΖ$, $ΔΗ$ γραφόμενος

observat Austin., demonstrari oportere, contingentes AM , BN , $ΓΑ$ inter se convenire, quod facillimum est, ducta v. c. recta AB , quae tum, quum anguli KAM , KBN recti sint, summam angulorum MAB , $ΜΒΑ$ duobus rectis minorem efficiet, unde res consequitur ope 11. axiom. vel 1. Post. 5., verum eandem demonstrationem iam dederat Tacquet. Denique notandum Peletarium et Borellium aliam adhuc huius problematis solutionem exhibere, in qua, ope praecedentis propositionis primum circulo triangulum dato aequiangulum inscribitur, et deinde ope problem. in Obs. 5. ad III. 17.

Secentur $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ anguli bifariam a rectis BA , ΓA (I. 9.), et conveniant inter se in puncto Δ , et ducantur a Δ ad AB , $B\Gamma$, ΓA rectae perpendiculares ΔE , ΔZ , ΔH (I. 12.).

Et quoniam aequalis est angulus $AB\Delta$ angulo $\Delta B\Gamma$, est autem et rectus $BE\Delta$ recto $BZ\Delta$ aequalis; duo igitur sunt triangula $EB\Delta$, $ZB\Delta$, duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, et utrique commune $B\Delta$, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur ΔE ipsi ΔZ . Ex eadem ratione et ΔH ipsi ΔZ est aequalis. Tres igitur rectae ΔE , ΔZ , ΔH aequales inter se sunt; ergo centro Δ , et intervallo una ipsarum ΔE , ΔZ , ΔH circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , $B\Gamma$, ΓA rectas, propterea quod recti sunt ad E , Z , H puncta anguli. Si enim secet ipsas, recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta intra ipsum cadet circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.); circulus igitur centro Δ , intervallo autem una ipsarum ΔE , ΔZ , ΔH descriptus non secat rectas AB ,

rectae inscripti huius trianguli lateribus parallelae circulum contingentes ducuntur. Caeterum de simili problemate generaliore vide infra ad IV. 7. Obs. 2.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Analysis huius problematis ita institui potest. Quum centrum circuli esse debeat ex III. 17. Obs. 1. in recta, quae angulum $AB\Gamma$ bifariam dividit, dividat eum bifariam recta BA , eritque in BA centrum circuli (vel, ut aliter geometrarum more dicamus, erit recta BA locus centri circuli

κύκλος τέμνει τὰς AB , BF , FA εὐθείας· ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ABF τρίγωνον. Ἐγγεγράφθω ὡς ZEH ¹⁾.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABF κύκλος ἐγγράπται ὁ EZH . "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

"Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABF · δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABF κύκλον περιγράψαι.

Τετμηθῶσιν αἱ AB , AF εὐθεῖαι διχα κατὰ τὰ Δ , E σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ , E σημείων ταῖς AB , AF πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσιν αἱ ΔZ , ZE · συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ABF τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς BF εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς BF .

1) Verba: Ἐγγεγράφθω ὡς ZEH , quae in edd. Oxon. te Basil. omitta sunt, recte omnino e Cod. a restituit Peyrardus. Pariter certe in Prop. 5. 9. 13. 14. ad finem similia verba adiecta legimus. Eadem tamen ad finem Prop. 8. desunt.

describendi). Eodem modo, quum id centrum esse debeat in recta, quae angulum AFB bifariam dividit, dividat eum bifariam recta FA , eritque in recta FA centrum circuli. Erit itaque in concursu utriusque rectae. Rectas autem BA , FA necessario concurrere, facile patet. Quum enim anguli ABF , AFB simul minores sint duobus rectis (I. 17.), multo magis anguli ABF , AFB simul (quippe dimidii priorum) minores erunt duobus rectis, adeoque rectae BA , FA convenient (Ax. 11. vel I. Post. 5.).

Obs. 2. Cor. 1. Quum etiam rectae AE , AF circumulum contingant, recta quoque AD , quae angulum BAF bifariam dividit, in eodem puncto A , centro circuli, conveniet (III. 17. Obs. 1.). Itaque tres rectae, quae angulos trianguli aliquius bifariam secant, in eodem intra ipsum puncto conve-

BF , FA ; contingit igitur ipsas, et erit circulus descriptus in triangulo ABF (IV. Def. 5.). Inscribatur ut ZHE .

In dato igitur triangulo ABF circulus inscriptus est EZH . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V. (Fig. 290.)

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ABF ; oportet circa datum triangulum ABF circulum circumscribere.

Secentur AB , AF rectae bifariam in A , E punctis (I. 10.), et punctis A , E ipsis AB , AF ad rectos angulos ducantur AZ , ZE (I. 11.). Convenient autem vel intra triangulum ABF , vel in recta BF , vel extra BF .

niunt. Et vice versa: Recta, quae ex puncto A , in quo conveniunt rectae, quae duos angulos B et F trianguli bisecant, ad tertium angulum ducitur, hunc quoque bisecat (Obs. 2. ad I. 26. Cas. 5.). Cf. Pflleiderer., e cuius annotationibus partim manuscriptis, etiam in hoc libro plura hausimus, Schol. in VI. Elem. P. I. §§. 41. 42. Caeterum ipsam propositionem IV. 4. Euclides ex absurdo demonstrat, Rob. Simpson. paulo brevius directe. Neque vero cum Matthias (Anszug aus Rob. Simsons Uebersetzung) dixerim, verba εἰ γὰρ τεμῆι αὐτὰς κ. τ. λ. usque ad finem demonstrationis manifesto otiosum esse additamentum. Ad indirectam demonstrationem omnino necessaria sunt.

Obs. 3. Cor. 2. Et, quae a puncto, in quo tres rectae conveniunt, quae angulos alicuius trianguli bisecant, ad latera eius trianguli demittuntur, sunt inter se aequalia.

Obs. 4. Cor. 3. Et, quum sit $AE=AH$, et $FZ=FH$ (III. 17. Obs. 5.), erit itaque $BZ+BE$, vel, quod eodem redit, $2BE$ excessus, quo summa duorum laterum BA , BF .

Συμπιπτεύωσαν οὖν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZB , $ZΓ$, ZA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΔ$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθῶς ἡ $ΔΖ$ βάσις ἄρα ἡ AZ ῥύσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ $ΓΖ$ τῇ AZ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $ZΓ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ZA , ZB , $ZΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήμῳ δὲ ἐπὶ τῶν ZA , ZB , $ZΓ$ κύκλος γοαφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐστὶ περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον. Περιγραφείσθω ὡς ὁ $ΑΒΓ$.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐπὶ τῆς $ΒΓ$ εὐθείας κατὰ τὸ Z , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AZ . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AZ , EZ συμπιπτεύωσαν ἐκτὸς τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου, κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , BZ , $ΓΖ$. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΒ$, κοινὴ

superat tertium $ΑΓ$, quo ipso propius determinatur I. 20. Hanc observationem Clavius ad Ioann. Baptistam Benedictum refert.

Obs. 5. Facile patet, eadem ratione solvi problema generalius, quo iubetur circulus describi, qui contingat tres rectas positione datas, quae non omnes tres inter se sunt parallelae. Erunt enim vel a) (Fig. 288.) duae rectarum positione datarum AB , $ΓΔ$ parallelae, et secabuntur a tertia $ΑΓ$ in punctis A , $Γ$, et tum eodem modo ostendetur, si anguli $ΓΑΒ$, $ΑΓΔ$ bifariam secantur rectis $ΓΕ$, $ΑΕ$, has rectas in puncto aliquo E convenire, et demissa ex E in rectas perpendiculara EZ , $EΘ$, $ΕΗ$ esse inter se aequalia, adeoque cir-

Convenient igitur primum intus in Z , et iungantur ZB , $Z\Gamma$, ZA . Et quoniam AA aequalis est BA , communis autem et ad rectos angulos AZ ; basis igitur AZ basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter ostendemus, et rectam ΓZ rectae AZ esse aequalem, quare et ZB aequalis est $Z\Gamma$; tres igitur ZA , ZB , $Z\Gamma$ aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z , intervallo autem una ipsarum ZA , ZB , $Z\Gamma$ descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circulus circumscriptus (IV. Def. 6.) circa $AB\Gamma$ triangulum. Circumscribatur ut $AB\Gamma$.

Sed AZ , EZ convenient in recta $B\Gamma$ in Z , ut in secunda figura, et iungatur AZ . Similiter ostendemus punctum Z centrum esse circuli circa $AB\Gamma$ triangulum circumscripti.

Sed AZ , EZ convenient extra triangulum $AB\Gamma$, rursus in Z , ut in tertia figura, et iungantur AZ , BZ , ΓZ . Et quoniam rursus AA aequalis est AB , communis autem et ad rectos angulos AZ ; basis igitur

circuli centro E , radio EZ descriptum tres rectas in Z , Θ , H contingere. Et eodem modo etiam ex altera rectae $A\Gamma$ parte inveniatur circulus, qui propositum efficiet. Aliter, ducto ad utramque rectarum parallelarum perpendicularo quocunque ZH , eoque in E bifariam diviso, ac per E ducta recta Ea parallela rectis AB , ΓA , ostendetur, in hac parallela esse centra describendorum circulorum. Vel (Fig. 289.) b) nulla rectarum positione datarum parallela erit alteri. Omnes igitur tres AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ inter se convenient, vel triangulum $AB\Gamma$ efficient, adeoque problema idem erit, quod nostrum IV. 4. et inveniatur centrum A circuli intra triangulum describendi, qui tres rectas AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ contingat.

δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ AZ βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἡ ZF τῇ ZA ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ ZF ἐστὶν ἴση, ὁ ἄρα πάλιν κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐν τῶν ZA , ZB , ZF κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ABF τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ABF .

Περὶ τὸ δοθέν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται., Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Καὶ φανερόν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ BAF γωνία, ἐν μείζονι τμημάτων τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς BF εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ BAF γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει ¹⁾, ἡ ὑπὸ BAF , ἐν ἐλάττω

1) Ita sane rectius Peyrardus ex Cod. a habet, quam vulgata lectio: ὅταν ἐκτὸς τῆς BF εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει. Caeterum iam Gregorius in versione latina veram lectionem expressit.

Facile autem patet, eodem modo intra spatia $KBF\Theta$, $ABAN$, $MΓAO$ describi posse circulos, qui rectas AB , BF , AF extra triangulum ABF contingant. Nolumus huic problemati, quod unum ex iis est, quae Apollonius in libris de Tactionibus tractavit, plenius evolvendo insistere. Plura scitu digna, quae ad illud pertinent, et ex hac constructione derivari possunt, conguessit Pflaederer, ebene Trigonometrie Tüb. 1802. Ita v.

c. facile patet, esse $A\varepsilon = A\eta = \frac{AB + AF + BF}{2}$, pariter ac in

Obs. 4. vidimus esse $AE = \frac{AB + AF - BF}{2}$, et angulum $AB\delta$ esse rectum etc.

tur AZ basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter ostendemus et ZF aequalem esse ZA , quare et ZB aequalis est ZF ; ergo rursus circulus centro Z , intervallo autem una ipsarum ZA , ZB , ZF descriptus transibit per reliqua puncta, et erit circa triangulum ABF circumscriptus. Describatur igitur ut ABF .

Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quod si centrum circuli intra triangulum cadit, angulus $B\hat{A}F$, in segmento maiore quam semicirculo positus, minor sit recto; si autem centrum in rectam BF cadit, angulus $B\hat{A}F$, in semicirculo positus, rectus sit; si vero centrum circuli extra triangulum cadit, angulus $B\hat{A}F$, in segmento minore quam semicirculo, maior sit recto.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Rob. Simson. putat, demonstrationem huius propositionis ab aliquo vitiatam esse, non enim ostendere, rectas, quae latera trianguli bifariam et ad angulos rectos secant, inter se convenire, et inepte dividere propositionem in tres casus, cum una eademque demonstratio omnibus inseruiat, ut iam Campanus observavit. Et illud quidem, rectas, quae ex A et E ad angulos rectos lateribus ducantur, inter se convenire, facile, ut est apud Campanum, probatur, ducta recta AE , unde res eodem modo ex Ax. 11. vel I. Post. 5. patet, ac in IV. 3. de rectis circulum contingentibus. Quod autem rectae FZ , EZ nec in unam lineam coincidere possint, inde patet, quod si id fieret, rectae AB , AF forent inter se parallelae (I. 28.), quod est contra hypothesin. Rob. Simson. rectas AZ , EZ convenire inde probat, quod si non conveni-

τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὡστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ AZ , EZ · ὅταν δὲ ὀρθῇ, ἐπὶ τῆς $BΓ$ · ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ¹⁾).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔ$ · δεῖ δὴ εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἠχθωσαν τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ · καὶ ἐπεζεύχθω αἱ AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$.

1) Ἐκτὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ex coniectura, quam iam versiones Campani, Clavil, Gregorii, Rob. Simsonis aliorumque habent, posuimus pro vulgata omnium editionum (in Paris. ex sphalmate typographico est ἐντὸς pro ἐκτὸς) ἐκτὸς τῆς $BΓ$.

rent parallelæ forent; at si parallelæ forent AZ , EZ , parallelæ quoque forent AB , $ΑΓ$, qui iis sunt ad angulos rectos. Hanc demonstrationem reprehendit Matthias Auszug aus Rob. Sims. Uebersetzung et Austin., quod propositio illa, rectas, quæ perpendicularæ sint ad duas parallelas, ipsas etiam parallelas esse, non præcedat. Facillime tamen res ad I. 28. reducitur. Caeterum poterat quoque Analysis addi simili ratione ac in IV. 4. facile deducenda ex III. 1. Cor. 1.

Obs. 2. Cor. 2. Quum centrum circuli describendi esse debeat (III. 1. Cor. 1.) in recta AZ , quæ rectam AB bifariam et ad angulos rectos secat, pariterque in recta EZ , quæ rectam $ΑΓ$ bifariam et ad angulos rectos secat, et denique eodem modo in recta, quæ rectam $BΓ$ bifariam et ad angulos rectos secat, patet, hoc, quod ultimo loco diximus, perpendiculum cum duobus reliquis in uno eodemque puncto convenire debere.

Quare et si datus angulus minor est recto, intra triangulum convenient AZ , EZ ; si autem rectus, in BF ; si vero maior recto, extra triangulum ABF .

PROPOSITIO VI. (Fig. 291.)

In dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma A$; oportet in circulo $AB\Gamma A$ quadratum inscribere.

Ducantur circuli $AB\Gamma A$ duae diametri $A\Gamma$, BA ad rectos angulos inter se (I. 11.), et iungantur AB , $B\Gamma$, ΓA , AA .

Obs. 3. Cor. 3. Et quae ab hoc communi trium perpendicularum concursu ad angulos trianguli A , B , Γ ducuntur rectae ZA , ZB , $Z\Gamma$ aequales sunt. Casu itaque figurae secundae (Fig. 290. b.) quo angulus $BA\Gamma$ rectus est, centrum Z circuli circumscribendi facillime invenitur, bisecando tantum latus recto angulo oppositum. Cf. III. 31. Cor. 2.

Obs. 4. Eodem modo per tria puncta, quae non in eadem recta sunt, circulus describetur.

Obs. 5. Corollarii 1., quod in graeco textu legitur, pars prior non est apud Campanum, neque omnino ex hac constructione consequitur, sed patet ex III. 31. Pars posterior consequitur ex conversa III. 31. vid. Obs. ad III. 31. In parte posteriore corollarii praeterea, ut Rob. Simson. notat, sermo est de angulo dato, quum tamen propositio nihil habeat, nec habere possit de angulo dato, atque hinc ille corollarium hoc manifeste vitiatum esse concludit. Austin. id omnino ex hoc loco eliminandum esse putat.

PROPOSITIO VI.

Obs. A sexta inde huius libri propositione Euclides non nisi de figuris quibusdam regularibus tractat, et de his iis,

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EA , κέντρον γὰρ τὸ E , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς ἡ EA βάσις ἄρα ἡ AB βάσει τῇ AD ἴση ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκατέρω τῶν $BΓ$, $ΓΔ$ ἐκατέρω τῶν BA , AD ἴση ἐστίν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τετράπλευρον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ BD εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ BAD ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAD γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκόντη τῶν ὑπὸ $ABΓ$, $ΒΓΔ$, $ΓΔΑ$ ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα $ABΓΔ$ κύκλον.

Εἰς ἄρα δοθέντα κύκλον τὸν $ABΓΔ$ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ $ABΓΔ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.
Ἔστω δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓΔ$ · δεῖ δὲ περὶ τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

quae Prop. 2—5 generatim de triangulis docuerat, similia proponit. Neque enim poterant ad figuras multilateras quas-cunque illa omnia applicari. Nonnulla tamen de aliis quoque figuris non regularibus valent. Propositio sexta, ut de hac iam dicamus, de quadrato idem docet, quod Prop. 2. de triangulo dato alicui aequiangulo. Quodvis autem quadratum etiam cuiusvis alii quadrato est aequiangulum. Nec vero generaliter iam proponi poterat problema: in dato circulo inscribere quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum. Vidimus nempe in Obs. 2. ad III. 22., ut quadrilaterum circulo inscribi possit, necesse esse, si quaesitio sit de figuris, quae nullos angulos gibbos habent, ut duo anguli oppositi simul sumti aequales sint reliquis duobus angulis. Itaque etiam, si circulo dato

Et quoniam BE aequalis est EA , centrum enim E , communis autem et ad rectos angulos EA ; basis igitur AB basi AA aequalis est (I. 4.). Ex eadem ratione et utraque rectarum BF , GA utrique rectarum BA , AA aequalis est; aequilaterum igitur est quadrilaterum $ABGA$. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim recta BA diameter est circuli $ABGA$, semicirculus igitur est BAA ; quare angulus BAA rectus est (III. 31.). Ex eadem ratione et unusquisque angulorum ABG , BGA , GAA rectus est; rectangulum igitur est quadrilaterum $ABGA$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et inscriptum est in dato circulo $ABGA$.

In dato igitur circulo $ABGA$ quadratum inscriptum est $ABGA$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VII. (Fig. 293.)

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $ABGA$; oportet circa circulum $ABGA$ quadratum circumscribere.

inscribi debet quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum, in dato quadrilatero eadem conditio obtinere debet. Quod si fuerit, poterit non modo, et quidem ita, ut punctum in circumferentia, per quod unum laterum quadrilateri inscribendi transeat, datum sit, aut pro lubitu sumatur, res fieri, sed innumeris modis fieri poterit, vel, ut aliter dicamus, problema generaliter sumtum erit indeterminatum. Nempe, si propositum sit, dato circulo ABG (Fig. 292.) inscribere quadrilaterum, quod aequiangulum sit dato quadrilatero $EZOH$, cuius anguli oppositi $ZEH + ZO H = Z + H = 2$ rectis, ita, ut unum eius latus transeat per punctum datum A in circumferentia circuli, fieri id poterit sequentem in modum. Abscindatur per III. 34. recta AF segmentum $AA'F$, quod ca-

"Ἡχθωσαν τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, καὶ διὰ τῶν A , B , Γ , Δ σημείων ἡχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου αἱ ZH , $H\Theta$, ΘK , KZ .

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ZH τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ E κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ A ἐπαρῆν ἐπέξευκται ἡ EA . αἱ ἄρα πρὸς τῷ A γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς B , Γ , Δ

piat angulum aequalem angulo H , ductaque ΘE fiat angulus $\Gamma A A = \Theta E H$, et $\Gamma A B = \Theta E Z$, et iungantur $B\Gamma$, $\Delta \Gamma$, eritque, ut facile ex III. 22. consequitur, quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$ aequiangulum quadrilatero $EZ\Theta H$. Neque vero solum quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$ propositum efficiet. Quodsi enim v. g. ducta fuisset recta $\zeta\theta$ parallela rectae $Z\Theta$, iunctaque $E\theta$, angulus $\Gamma A \delta = \theta E H$, et angulus $\Gamma A \beta = \theta E \zeta$ constitutus esset, quadrilaterum $A\beta\Gamma\delta$ pariter scopo respondisset, atque ita innumera alia, quae idem praestarent, exhiberi poterant. Nominatim, si circulo dato inscribenda fuerit figura quadrato aequiangula, innumera rectangula problema solvent. At, si figura inscribenda ipsa etiam quadratum esse, et per punctum in circumferentia datum A transire debet, una tantum figura his conditionibus satisfaciet. Si circulo inscribi iubetur figura multilatera aequiangula figurae datae, ante omnia, an res fieri possit, ex observatis ad III. 22. diiudicari debet, et si fieri possit, problema plerumque erit indeterminatum. Caeterum propositioni VI. 6. addi potest hoc

Cor. Circulus quoque (Fig. 291.) diametris $ΑΓ$, $ΒΔ$ in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rectas circulum contingentes HZ , ΘK cum contingentibus $H\Theta$, ZK convenire, patet ex I. 29. Cor. 3.

Cor. 1. Quodvis quadrati circumscripti latus aequale est diametro circuli, cui circumscribitur (I. 54.).

Ducantur circuli $AB\Gamma A$ duae diametri AF , BA ad rectos angulos inter se (I. 11.), et per puncta A , B , Γ , A ducantur rectae ZH , $H\Theta$, ΘK , KZ circulum $AB\Gamma A$ contingentes (III. 17.).

Quoniam igitur ZH contingit circulum $AB\Gamma A$ centro autem E ad contactum A ducta est EA ; anguli ad A recti sunt (III. 18.). Ex eadem ratione et anguli ad B , Γ , A puncta recti sunt. Et quoniam

Cor. 2. Si ductis rectis AB , $B\Gamma$, ΓA , AA eidem circulo quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum duplum quadrati inscripti, hoc nempe erit aequale duplo quadrati radii (I. 47.), illud autem quadrato diametri. Cor. 1.

Cor. 3. Circulus etiam hic diametris AF , BA in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

Cor. 4. Pariter latera quadrati circumscripti diametris AF , BA bisecantur. Est nempe $HA=BE$ (I. 34.) et $ZA=EA$. At $BE=EA$, itaque et $HA=ZA$.

Obs. 2. Quum quodvis quadratum aequiangulum sit cuiusvis alii, etiam haec propositio conferri potest cum propositione IV. 3. Et facile patet, propositionem IV. 3. longe generalius, et certe ad figuram rectilineam quamcunque, quae angulos gibbos non habet, extendi posse. Factis nempe (Fig. 294.) ut in IV. 3. angulis ad centrum O circuli dati ex ordine aequalibus iis, qui deinceps sunt angulis figurae datae $Z\Theta HKA$, nempe angulo $\alpha O \epsilon =$ angulo, qui Z deinceps est $\alpha O \beta$ ei, qui Θ deinceps est etc. ductisque per puncta ϵ , α , β etc. (quorum unum etiam datum esse potest) rectis circulum contingentibus, demonstrabitur, ut in IV. 3. rectarum harum contingentium unamquamque convenire cum duabus ipsi proxime positis, et esse figuram ita enatam aequiangulam datae $Z\Theta HKA$. Nec generaliter omnes ii casus excluduntur, quibus figura data angulos gibbos habet: in figura autem datae aequiangula circa circulum circumscripta latera angulos gibbos comprehendunt non ipsa, sed producta tantum intra figuram circulum con-

σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ AEB γωνία, ἔσται δὲ ὀρθή καὶ ἡ ὑπὸ EBH παράλληλος ἄρα ἐστίν ἡ $H\Theta$ τῇ AF . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ AF τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος. Ὡστε καὶ ἡ $H\Theta$ τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος. Ὀμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν HZ , ΘK τῇ BEA ἐστὶ παράλληλος. Παράλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ HK , HG , AK , ZB , BK . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ ΘK , ἡ δὲ $H\Theta$ τῇ ZK . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AF τῇ BA , ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν AF ἑκατέρα τῶν $H\Theta$, ZK , ἡ δὲ

tingent, et anguli quoque ad centrum situm aliquatenus diversum obtinebunt, quae omnia, quam singulis casibus evolvendis haud vacet, hic et in sequentibus praeterimus.

Obs. 3. In figuris circulo alicui circumscriptis (hic quoque praeterimus eas, quae angulos gibbos habent) observari potest circa latera aliquid admodum simile ei, quod in figuris circulo inscriptis circa angulos observavimus Obs. 2. sq. ad III. 22. Nempe, si parem laterum numerum habuerint, et latera, initio facto a quocunque eorum ordine numeris indicentur, erit summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis summae laterum numeris paribus notatorum. Sit v. c. talis figura, quae nullos angulos gibbos habet $ABΓAEZ$ (Fig. 295.), quae circulum contingat in punctis α , β , γ , etc. eritque ex III. 17. Obs. 1.

$$A\alpha = A\zeta$$

$$B\beta = B\beta$$

$$\Gamma\gamma = \Gamma\beta$$

$$\Delta\gamma = \Delta\delta$$

$$E\epsilon = E\delta$$

$$Z\zeta = Z\epsilon$$

$$\text{unde } (A\alpha + B\alpha) + (\Gamma\gamma + \Delta\gamma) + (E\epsilon + Z\zeta) = (B\beta + \Gamma\beta) + (\Delta\delta + E\delta) + (Z\epsilon + A\zeta)$$

$$\text{i. e. } AB + \Gamma A + EZ = B\Gamma + \Delta E + ZA.$$

Similis demonstratio locum habet in figuris, quae plura ha-

rectus est angulus AEB , rectus autem est et EBH ; $H\Theta$ parallela erit AI' (I. 28.) Ex eadem ratione et AI' parallela est ZK ; quare et $H\Theta$ parallela est ZK (I. 30.). Similiter ostendemus et utramque ipsarum HZ , ΘK ipsi BEA esse parallelam. Parallelogramma igitur sunt HK , HI' , AK , ZB , BK ; aequalis igitur est HZ quidem ipsi ΘK , $H\Theta$ vero ipsi ZK . Et quoniam AI' aequalis est BA , sed et AI' utrique ipsarum $H\Theta$, ZK , BA vero utrique ipsarum HZ , ΘK est aequalis; et utraque $H\Theta$, ZK utrique HZ ,

bent latera. Hinc consequitur, rectangulum et rhomboiden circulo AE circumscribi non posse.

Obs. 4. Simile quid obtinet in figuris circulo circumscriptis, quae numerum laterum imparem habent. In illis nempe, si unius cuiuscunque lateris v. c. (Fig. 296.) in pentagono $ABFAE$ lateris EA partes As , et AE in quae in puncto contactus dividitur, separatim numeremus, pariter summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae numeris paribus notatorum, quod eodem modo demonstrabitur.

Obs. 5. In quadrilateris propositio, quam Obs. 3. habuimus, valet etiam conversa. Nempe si quod quadrilaterum ita comparatum sit, ut summa duorum laterum oppositorum aequalis sit summae duorum reliquorum laterum oppositorum, poterit illi circulus inscribi. Demonstrari id potest vel directe, vel indirecte. Directa demonstratio haec erit. Sit (Fig. 297.) quadrilaterum $ABFA$, in quo summa laterum $AB + FA$ aequalis est summae laterum $BF + AA$, poterit ei circulus inscribi. Nam ex Obs. 5. ad IV. 4. circulus potest describi, quibus tria quaecunque contigua latera v. c. AB , BF , FA contingat in punctis α , β , γ , adeoque erit, si O huius circuli centrum sit, $O\alpha = O\beta$, et $O\alpha^2 = O\gamma^2$. Est autem $O\alpha^2 = OA^2 - A\alpha^2$, et $O\gamma^2 = OA^2 - A\gamma^2$ (I. 47. Cor. 2.), adeoque erit $OA^2 - A\alpha^2 = OA^2 - A\gamma^2$. Et, quum sit ex hyp. $AB + FA = BF + AA$, et

$ΒΔ$ ἐκατέρα τῶν $ΗΖ$, $ΘΚ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἐκατέρα ἄρα τῶν $ΗΘ$, $ΖΚ$ ἐκατέρα τῶν $ΗΖ$, $ΘΚ$ ἐστὶν ἴση. Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΗΘΚ$ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΗΒΕΑ$, καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΗΒ$. Ομοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Θ$, $Κ$, $Ζ$ γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΗΘΚ$ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον τετράγωνον ἄρα ἐστὶν. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλῳ.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ἦ.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$ · δεῖ δὴ εἰς τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἐκατέρα τῶν $ΑΒ$, $ΔΑ$ δίχα κατὰ τὰ $Ζ$, $Ε$ σημεία, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Ε$ ὁποῦτα τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ παράλληλος ἤχθῳ ἡ $ΕΘ$, διὰ δὲ τοῦ $Ζ$ ὁποῦτα τῶν $ΑΔ$, $ΒΓ$ παράλληλος ἤχθῳ ἡ $ΖΚ$ · παραλληλό-

$Βα=Ββ$, $Γγ=Γβ$ (Obs. 1. ad III. 17.) erit, aequalibus utrimque demtis, $Αα+Δγ=ΔΔ$. Iam erit vel $Αα=Δγ$ (Fig. 297. a), vel alterutra earum maior altera (Fig. 297. b.): Utroque casu, demisso ex $Ο$ in $ΔΔ$ perpendicularo $Οδ$, dico esse $Οδ=Ογ$. Nam, si 1) $Αα=Δγ$, erit tam $Αα$, quam $Δγ=\frac{ΔΔ}{2}$.

Et, quum $ΟΑ^2-Αα^2=ΟΔ^2-Δγ^2$, erit $ΟΑ_2=ΟΔ^2$, adeoque $ΟΑ=ΟΔ$, unde perpendicularum $Οδ$ rectam $ΔΔ$ bisecabit in $δ$ (I. 26. Cor. 3.), eritque $Αδ=\frac{ΔΔ}{2}=Δγ$. Est autem $Οδ_2=ΟΔ^2-Αδ^2$ et $Ογ^2=ΟΔ^2-Δγ^2$, itaque $Οδ^2=Ογ^2$, adeoque $Οδ=Ογ$. Sin autem non sit $Αα=Δγ$, sit alterutra earum v. c.

ΘK est aequalis. Aequilaterum igitur est $ZH\Theta K$ quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est $HBEA$, et est rectus angulus AEB ; rectus igitur et AHB . Similiter ostendemus et angulos ad Θ , K , Z rectos esse; rectangulum igitur est quadrilaterum $ZH\Theta K$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa $AB\Gamma A$ circum.

Circa datum igitur circum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 299.)

In dato quadrato circum inscribere.

Sit datum quadratum $AB\Gamma A$; oportet in quadrato $AB\Gamma A$ circum inscribere.

Secetur utraque ipsarum AB , AA bifariam in punctis E , Z (I. 10.), et per E alterutri rectarum AB , ΓA parallela ducatur $E\Theta$ (I. 31.); per Z vero alterutri rectarum AA , $B\Gamma$ parallela ducatur ZK (I.

$\Delta\gamma$ maior altera Aa . Quoniam igitur $OA^2 - Aa^2 = OA^2 - \Delta\gamma^2$: erit $\Delta\gamma^2 - Aa^2 = OA^2 - OA^2$. At, demisso ex O in rectam AA perpendicularo $O\delta$, est $OA^2 - OA^2 = A\delta^2 - A\delta^2$ (I. 47. Cor. 3), itaque $\Delta\gamma^2 - Aa^2 = A\delta^2 - A\delta^2$ i. e. rectangulum $(\Delta\gamma + Aa)(\Delta\gamma - Aa) = \text{rectang. } (A\delta + A\delta)(A\delta - A\delta)$ (II. 4. Cor. 4.) Quum autem sit $\Delta\gamma + Aa = A\delta + A\delta$, erit $\Delta\gamma - Aa = A\delta - A\delta$ (Obs. 3. ad I. 40.), adeoque erit $A\Gamma + Aa + \Delta\Gamma - Au = A\delta + A\delta + A\delta - A\delta$ i. e. $2\Delta\gamma = 2A\delta$, vel $\Delta\gamma = A\delta^2$, et quum $O\delta = OA - A\delta$ et $O\gamma^2 = OA^2 - \Delta\gamma^2$, erit $O\delta = O\gamma^2$, et $O\delta = O\gamma$, adeoque utroque casu circulus radio $O\gamma$ descriptus etiam per δ transibit, et continget rectam AA in δ (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur quadrato et rhombo circum posse inscribi.

γραμμιον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν AK , KB , $AΘ$, $ΘΔ$, AH , $HΓ$, BH , $HΔ$, καὶ αἱ ἀπέναντιον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ AB , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΑΔ$ ἡμίσεια ἡ AE , τῆς δὲ AB ἡμίσεια ἡ AZ , ἴση ἄρα καὶ ἡ AE τῇ AZ . ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ZH τῇ HE . Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν $HΘ$, HK ἑκατέρω τῶν ZH , HE ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ HE , HZ , $HΘ$, HK ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν HE , HZ , $HΘ$, HK κύκλος γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐξάψεται τῶν AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , $Θ$, K γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν HE , HZ , $HΘ$, HK κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς AB ,

Obs. 6. In figuris autem, quae plura quam quatuor latera habent, propositio, quam Obs. 3. habuimus, pariterque altera Obs. 4. exhibita converti nequit, quod similiter fere demonstratur ac Obs. 6. ad III. 22. Sit nempe (Fig. 298.) figura $ABΓAEZ$ circulo, cuius centrum est O , radius Oa circumscripta, et contingat ille latera in punctis α , β , γ , δ , ϵ , ζ , iam sumantur duo quaecunque latera contigua v. c. AZ , EZ , et producat utrumque ultra Z usque ad Θ et H eadem quantitate, nempe ita, ut sit $Z\Theta = ZH$, et centro A radio $A\Theta$, pariterque centro E radio EH describantur circuli, qui se intersecabunt in puncto aliquo K , ita ut ductis AK , EK sit punctum Z inter AK et EK , oriaturque novum polygonum $ABΓAEK$, quod a priore $ABΓAEZ$ tantum quoad latera AK , EK , eorumque positionem discrepabit, caeterum vero,

31.); parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK , KB , AO , OA , AH , HT , BH , HA , et opposita ipsorum latera aequalia sunt (I. 31.). Et quoniam AA aequalis est AB , et ipsius quidem AA dimidia est AE , ipsius vero AB dimidia AZ , aequalis erit et AE ipsi AZ ; quare, et opposita aequalia sunt, ergo ZH aequalis HE . Similiter ostendemus et utramque HO , HK utrique ZH , HE esse aequalem. Quatuor igitur HE , HZ , HO , HK aequales inter se sunt. Circulus igitur centro H , intervallo vero aequali uni ipsarum HE , HZ , HO , HK descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget rectas AB , BT , TA , AA , propterea quod recti sunt anguli ad E , Z , O , K anguli; si enim secat circulus rectas AB , BT , TA , AA , quae diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum ostensum est (III. 16.) Circulus igitur centro H , intervallo vero aequali uni ipsarum HE , HZ , HO , HK descriptus non secat rectas

quum polygonum $ABTAEZ$ circulo circumscriptum sit, erit ex Obs. 3. $AB+TA+EZ=BT+AE+ZA$, adeoque, quum $EK=EZ+ZH$, et $KA=ZA+ZO$, sumtum autem sit $ZH=ZO$, erit etiam $AB+TA+EK=BT+AE+KA$. Polygonum itaque $ABTAEK$ etiam ita comparatum est, ut numerus laterum alterne numeratorum aequalis sit numero reliquorum laterum, et tamen manifestum est, huic polygono circulum inscribi non posse. Si enim inscribi posset, idem etiam latera AB , BT , TA ex ea parte lateris BT contingere deberet, ex qua sunt reliqua latera. At, qui hoc efficit, unicus circulus est, nempe is, qui centro O radio Oa describitur. Is autem, quum latera EZ , AZ contingat, nequit simul latera EK , AK extra illa posita contingere.

$B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ εὐθείας. Ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγράπται.
Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεξευχθεῖσαι γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Lambda$ τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ $ΑΓ$, δύο δὴ αἱ $\Delta\Lambda$, $ΑΓ$ δυοὶ ταῖς BA , $ΑΓ$ ἴσαι εἶσι, καὶ βάσις ἡ $\Delta Γ$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta ΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BA\Gamma$. ἢ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta\Lambda$ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, ΔB εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔAB γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΔAB ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EAB , τῆς δὲ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EBA καὶ ἡ ὑπὸ EAB ἄρα τῇ ὑπὸ EBA ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EA πλευρὰ τῇ EB ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκατέρα τῶν EA , EB εὐθειῶν ἐκατέρα τῶν $ΕΓ$, $ΕΔ$ ἴση ἐστὶν. Αἱ τεσσαρες ἄρα αἱ EA , EB ,

Obs. 7. In figuris circulo circumscriptis, quae numerum laterum imparem habent, propositio, quam Obs. 4. habuimus, etiam ita exprimi poterit: erit in illis summa laterum primi, tertii, quinti etc. aequalis summae laterum secundi, quarti etc. si huic addas duplum segmentum primi lateris, quod inter punctum contactus et eum eius terminum iacet, a quo numerare coeptum est, v. c. (Fig. 296.) in pentagono

AB , BF , FA , AA . Continget igitur ipsas et erit inscriptus in quadrato $ABFA$.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IX. (Fig. 291.)

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum $ABFA$; oportet circa quadratum $ABFA$ circulum circumscribere.

Iunctae AF , BA sese secant in E .

Et quoniam AA aequalis est AB , communis autem AF , duae AA , AF duabus BA , AF aequales sunt, et basis AF basi BF aequalis; angulus igitur AAF aequalis est BAF (I. 8.); angulus igitur AAB bifariam sectus est ab AF . Similiter ostendemus et unumquemque angulorum ABF , BFA , FAA bifariam sectum esse a rectis AF , AB . Et quoniam aequalis est angulus AAB angulo ABF , et est ipsius AAB dimidius angulus EAB , et ipsius ABF dimidius angulus EBA ; et EAB igitur angulo EBA erit aequalis. Quare et latus EA lateri EB est aequale (I. 6.). Similiter ostendemus, et utramque rectarum EA , EB utrique EF , EA aequalem esse; quatuor igitur EA , EB , EF , EA aequales inter se

circulo circumscripto, quod supra delineatum fuit, erat, si a puncto A versus B numerare incipias ex Obs. 4. $AB + FA + EA = BF + EA + Ae$ unde si utrimque addas Ae , erit $AB + FA + EA = BF + EA + 2Ae = BF + EA + 2Aa$. Hinc consequitur, si latera figurae circulo circumscriptae, quae numerum laterum imparem habet, omnia data sint, data etiam esse segmenta, in quae illa in puncto contactus dividuntur. Erit nempe $2Aa$

$ΕΓ$, $ΕΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἶσιν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ε$, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ΕΑ$, $ΕΒ$, $ΕΓ$, $ΕΔ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$.

. Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγεγράφεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συνστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$, καὶ τετμησθῶ κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ $ΓΑ$ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $Α$, διαστήματι δὲ τῷ $ΑΒ$ κύκλος γεγράφθω ὁ $ΒΔΕ$, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν $ΒΔΕ$ κύκλον τῇ $ΑΓ$ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ $ΒΔΕ$ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ $ΒΔ$ καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΓΔ$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον κύκλος ὁ $ΑΓΔ$.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $ΑΓΔ$ εἵληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ $Β$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Β$ πρὸς τὸν $ΑΓΔ$ κύκλον προστεπτόμεναι δύο εὐθεῖαι αἱ $ΒΑ$, $ΒΔ$, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ

$= AB + ΓΔ + ΕΑ - ΒΓ - ΔΕ$. Caeterum haec disquisitio a tertia inde observatione instituta primum facta est a Pitot. (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris 1725. p. 45.). Cf. Kraft. Geom. Sublim. §. 104.

sunt. Circulus igitur centro E , et intervallo aequali uni rectarum EA , EB , EF , EA descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa quadratum $ABFA$. Circumscribatur ut $ABFA$.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 301.)

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum ad basin duplum reliqui.

Ponatur aliqua recta AB , et secetur in puncto I , ita ut rectangulum sub AB , BI contentum aequale sit quadrato ex IA (II. 11.); et centro A , et intervallo AB describatur circulus BAE (Post. 3.), et appetur in circulo BAE rectae AI , quae non maior est diametro circuli BAE , aequalis recta BA (IV. 1.); et iungantur AA , IA , et circumscribatur circa triangulum AAI circulus AAI .

Et quoniam rectangulum sub AB , BI aequale est quadrato ex AI , AI autem aequalis BA , rectangulum igitur sub AB , BI aequale est quadrato ex BA . Et quoniam extra circulum AAI sumptum est aliquod punctum B , et a B in circulum AAI cadunt duae rectae BA , BI , quarum altera quidem ipsum secat, altera vero in eum incidit; et est rectangulum

PROPOSITIO VIII.

Obs. Si cui rhombo dato $ABFA$ (Fig. 300.) circulus inscribendus est, quod ex Obs. 5. ad praeced. semper fieri potest, centrum quidem circuli inscribendi eadem ratione inveniri potest, ut hic pro quadrato ostensum fuit, ductis nempe

τῆς BA ἢ BA ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΑΓΔ$. [Καὶ ἐπεὶ
 ἐφάπτεται μὲν ἡ BA , ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ $Δ$ ἐκαστῆς
 διῆκται ἡ $ΔΓ$ ἢ ἄρα ὑπὸ $BAΓ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ
 ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ
 $ΔΑΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$,
 κοινῇ προσκεῖσθω ἡ ὑπὸ $ΓΔΑ$ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BΔΑ$
 ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$. Ἀλλὰ ταῖς
 ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ἢ
 ἄρα ὑπὸ $BΔΑ$ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ
 $BΔΑ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΔΑ$
 τῇ AB ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ $ΔBA$ τῇ ὑπὸ $BΓΔ$
 ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔBA$, $BΓΔ$
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔBΓ$
 γωνία τῇ ὑπὸ $BΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ $BΔ$ πλευρᾷ
 τῇ $ΔΓ$. Ἀλλ' ἡ $BΔ$ τῇ $ΓΑ$ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ
 $ΑΓ$ ἄρα τῇ $ΓΔ$ ἐστὶν ἴση ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
 $ΓΔΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ
 $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ εἰσὶ διπλασίους. Ἰση δὲ
 καὶ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΓΔΑ$, $ΔΑΓ$ · καὶ ἡ ὑπὸ
 $BΓΔ$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΔΑΓ$ ἐστὶ διπλῇ. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ
 $BΓΔ$ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔBA$ · καὶ ἑκατέρα ἄρα
 τῶν ὑπὸ $BΔΑ$, $ΔBA$ τῆς ὑπὸ $BΔΑ$ ἐστὶ διπλῇ.

rectis ZK , $EΘ$ per puncta, quae latera rhombi opposita bifa-
 riam dividunt, eruntque adhuc ut ante $ZH=HK=HE=HΘ=$
 $\frac{AA}{2}$: at circulus inscribendus iam alium radium habebit, qui

invenitur, demisso ex H ad unum laterum rhombi v. c. AA
 perpendiculo He , quod, ut facile probatur, aequale est per-
 pendiculo cuicunque ex H in reliqua latera demisso v. c. $Hζ$.
 Est enim in triangulis HEe , $HζZ$, $HE=Hζ$, angulus $E=Z$ et
 ad e et $ζ$ sunt anguli recti, unde ex I. 26. est $He=Hζ$, et
 circulus centro H radio He descriptus etiam per puncta $ζ$, $θ$,

sub AB, BF aequale; quadrato ex BA , recta BA contingit circulum AGA (III. 37.). Quoniam igitur BA contingit, a contactu vero ad A ducta est AF ; angulus igitur BAF aequalis est angulo AGA in alterno circuli segmento (III. 32.). Quoniam igitur aequalis est angulus BAF angulo AAF , communis addatur GAA . Totus igitur BAA aequalis est duobus GAA, AAF . Sed angulis GAA, AAF aequalis est exterior BGA (I. 32.); angulus igitur BAA aequalis est angulo BGA . Sed angulus BAA angulo GBA est aequalis, quoniam et latus AA lateri AB est aequale (I. 5.); quare et ABA ipsi BGA est aequalis. Tres igitur BAA, ABA, BGA aequales inter se sunt. Et quoniam aequalis est angulus ABF angulo BGA , et latus BA aequale est lateri AF (I. 6.). Sed BA ipsi GA ponitur aequalis; et AF igitur ipsi GA est aequalis; quare et angulus GAA angulo AAF est aequalis (I. 5.); anguli igitur GAA, AAF anguli AAF sunt dupli. Aequalis autem et BGA angulis GAA, AAF (I. 32.); et BGA igitur anguli AAF est duplus. Aequalis autem et BGA utrique angulorum BAA, ABA , uterque igitur angulorum BAA, ABA anguli BAA est duplus.

* transit, et rhombum in his punctis contingit (III. 16. Cor. 1.). Paullo brevius centrum H invenietur, ductis diagonalibus AF, BA , quae pariter in H se intersecant.

PROPOSITIO IX.

Obs. Eadem constructione etiam circa rectangulum non aequilaterum circulus circumscribetur, quod fieri semper posse patet ex Obs. 5. ad III. 22. Demonstratio tantum paulo diversa erit, et absolvetur ope I. 31. Cor. 1. et I. 34. Cor. 17.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ $ΑΒΒ$, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ $ΑΒ$ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$: δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ΖΗΘ$, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς $Η$, $Θ$ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ $Ζ$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον τῷ $ΖΗΘ$ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ $ΑΓΔ$, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ $Ζ$ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ $ΓΑΔ$, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς $Η$, $Θ$ ἴσην ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ$, $ΓΔΑ$ καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ$, $ΓΔΑ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἰσὶ διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ$, $ΓΔΑ$ δίχα ὑπὸ τῶν $ΓΕ$, $ΔΒ$ εὐθειῶν, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΑ$.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΑΓΔ$, $ΓΔΑ$ γωνιῶν διπλασίον ἰσὶ τῆς ὑπὸ $ΓΑΔ$, καὶ τετμημέναι εἰσὶ

PROPOSITIO X.

Praemitti potest huic problemati sequens analysis. Puta factum, sitque $ΑΒΔ$ triangulum sequicrurum, in quo uterque angulorum ad basin duplus est reliqui. Bisecetur unus angulorum ad basin recta $ΑΓ$ (I. 9.), eritque angulus $ΒΑΓ=ΒΑΔ$, pariterque $ΓΔΑ=ΒΑΔ$, adeoque (I. 5.) $ΑΓ=ΓΔ$. Praeterea, quum in triangulis $ΒΓΔ$, $ΒΔΑ$ sit $ΒΑΓ=ΒΑΔ$, et angulus $Β$ communis, erit etiam reliquus $ΒΓΔ=ΑΔΒ$ (I. 32.). At ex Hyp. $ΑΒΔ=ΑΔΒ$: erit itaque $ΒΓΔ=ΑΒΔ$, adeoque $ΑΓ=ΒΔ$. Praeterea, si triangulo $ΑΓΔ$ circumscribatur circulus

Isosceles igitur triangulum constitutum est AAB habens utrumque angulorum ad AB basin duplum reliqui. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 302.)

In dato circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus $ABΓAE$; oportet in circulo $ABΓAE$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Ponatur triangulum isosceles $ZHΘ$ duplum habens utrumque angulorum ad $H, Θ$ anguli ad Z (IV. 10.), et inscribatur in circulo $ABΓAE$, triangulo $ZHΘ$ aequiangulum triangulum $AΓA$ (IV. 2.), ita ut angulo quidem Z aequalis sit angulus $ΓAA$, uterque vero angulorum ad $H, Θ$ aequalis utrique angulorum $AΓA, ΓAA$; et uterque igitur angulorum $AΓA, ΓAA$ anguli $ΓAA$ est duplus. Secetur autem uterque angulorum $AΓA, ΓAA$ bifariam a rectis $ΓE, AB$ (I. 9.) et iungantur $AB, BΓ, AE, EA$.

Quoniam igitur uterque angulorum $AΓA, ΓAA$ duplus est anguli $ΓAA$; et secti sunt bifariam a re-

(IV. 5.), ob angulum $BAG=BAΓ$, BA hunc circulum continget (Obs. 2. ad III. 32.), adeoque erit $BAq=AB \times BΓ$ (III. 36.), vel ob $BA=AG=AT$, $ATq=AB \times EI$. Solutio problematis itaque eo redit, ut recta AB ita secetur in I , ut rectangulum sub tota et segmento $BΓ$ aequale sit quadrato reliqui segmenti AT i. e. ad 11. 11. Quo facto sumenda erit in circulo BAE recta $BA=AT$, et ducenda AA . Caeterum manifestum est, positionem rectae AB pro lubitu sumi, itaque, si datum sit punctum A , punctum B in circumferentia cir-

διχα ὑπὸ τῶν ΓE , ΔB εὐθειῶν αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta A \Gamma$, $A \Gamma E$, $E \Gamma \Delta$, $\Gamma \Delta B$, $B \Delta A$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΔB , $B \Gamma$, $\Gamma \Delta$, ΔE , $E A$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔB , $B \Gamma$, $\Gamma \Delta$, ΔE , $E A$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta B \Gamma \Delta E$ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔB περιφέρεια τῇ ΔE περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ $B \Gamma \Delta$ · ὅλη ἄρα ἡ $\Delta B \Gamma \Delta$ περιφέρειᾳ ὅλη τῇ $E \Delta \Gamma B$ περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $\Delta B \Gamma \Delta$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta E \Delta$, ἐπὶ δὲ τῆς $E \Delta \Gamma B$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $B A E$ · καὶ ἡ ὑπὸ $B A E$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta E \Delta$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $\Delta B \Gamma$, $B \Gamma \Delta$, $\Gamma \Delta E$ γωνιῶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ $B A E$, $\Delta E \Delta$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta B \Gamma \Delta E$ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον.

culi $B \Delta E$ pro lubitu sumi aut datum esse posse. Compositio deinde fiet, ut apud Euclidem.

Cor. 1. Quum $\Delta B \Delta = \Delta \Delta B = 2 B \Delta \Delta$, erit $B \Delta \Delta = \frac{\Delta B \Delta + \Delta \Delta B + B \Delta \Delta}{5}$, vel, quum $\Delta B \Delta + \Delta \Delta B + B \Delta \Delta = 2$ rectis

(I. 32.), erit $B \Delta \Delta = \frac{2 \text{ Rect.}}{5} = \frac{4 \text{ Rect.}}{10}$, et angulus $\Delta B \Delta = \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$.

Cor. 2. Simul cum nostro problemate solutum est etiam hoc: Isosceles triangulum constituere, cuius angulus ad verticem triplus sit utriusque anguli ad basin. Id nempe est triangulum $\Delta \Gamma \Delta$, quod vidimus esse isosceles, nempe $\Delta \Gamma = \Gamma \Delta$, et in quo angulus $\Delta \Gamma \Delta = \Delta B \Delta + B \Delta \Gamma = 3 B \Delta \Gamma = 3 \Gamma \Delta \Delta =$

ctis FE , AB ; quinque igitur anguli $\angle AAF$, $\angle ATE$, $\angle ETA$, $\angle AR$, $\angle BAA$ aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent (III. 26.); quinque igitur circumferentiae AB , BF , FA , AE , EA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtendunt (III. 29.); quinque igitur rectae AB , BF , FA , AE , EA aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est $ABFAE$ pentagonum. Dico et aequiangulum. Quoniam enim circumferentia AB circumferentiae AE est aequalis, communis addatur BF ; tota igitur circumferentia $ABFA$ toti circumferentiae $EATB$ est aequalis. Et insistit quidem circumferentiae $ABFA$ angulus AEA , circumferentiae vero $EATB$ angulus BAE , et angulus BAE igitur angulo AEA est aequalis (III. 27.) Ex eadem ratione unusquisque angulorum ABF , BF , FAE alterutri angulorum BAE , AEA est aequalis; aequiangulum igitur est pentagonum $ABFAE$. Ostensum est autem et aequilaterum.

37AA. Et vice versa, si quis construere sciat triangulum isosceles AF , in quo $AF = 3FA$, construere quoque poterit triangulum isosceles BA , in quo $BA = \frac{AB}{2}$.

Obs. 2. Campanus et Peletarius, ut bene monet Clavius, sine causa se excruciant, ut probent, rectam BA contingere circumulum AF , quum id ex III. 37. manifesto consequatur. Id autem iure observat Campanus, circulos AF , BAE se in puncto A non contingere, sed se iterum secare in puncto aliquo E , ita, ut arcus maioris circuli $AE = BA$, pariterque arcus minoris circuli $AE = FA$. Quod facile ita probatur. Hi circuli se non contingunt in A , si enim contingerent, recta BA , quae minorem contingit, contingeret etiam maiorem (Obs. 2. ad III. 17.). Eadem autem maiori inscripta est

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Ὅπερ εἶδει
ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιβ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν
τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ
τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν
γωνιῶν σημεῖα, τὰ $Α, Β, Γ, Δ, Ε$, ὥστε ἴσας εἶναι
τὰς $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ περιφερείας· καὶ διὰ
τῶν $Α, Β, Γ, Δ, Ε$ ῥχθῶσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτό-
μεναι αἱ $ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΗ$. καὶ εἰλήφθω
τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κέντρον τὸ $Ζ$, καὶ ἐπεξεύχθω-
σαν αἱ $ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΑ$.

q. e. a. Secent igitur se in E , eritque, ductis rectis AE ,
 $ΔE$, angulus $AEΔ=BGΔ$ (III. 22. Cor. 1.) $=ABΔ$. Est au-
tem etiam, ob $AE=ΔΔ$ (I. Def. 15.) $ΔΔE=ABΔ$ (I. 5.)
 $=ABΔ=ΔΔB$. Itaque (I. 32.) aequiangula sunt triangula
 $ΔΔE, ΔΔB$, et nominatim angulus $ΔΔE=BAΔ$, unde et ar-
cus maioris circuli $ΔE=AB$ (III. 26.) et recta $ΔE=BA$ (III.
29.) $=ΓΔ$, adeoque et arcus minoris circuli $ΔE=ΓΔ$. Pe-
letarius addit, rectam $ΓΔ$ vel $ΑΓ$ esse latus pentagoni regu-
laris circulo $ΑΓΔ$ inscripti. Nempe quum, ut vixdum vidi-
mus, sit arcus $ΔE=ΓΔ$, recta autem $ΓΔ=ΑΓ$, erit etiam
arcus $ΑΓ=ΓΔ=ΔE$ (III. 28.). Eodem modo, quum recta
 $ΔE=ΔΔ$, erit arcus $ΔZE=ΑΓΔ$ (III. 28.), adeoque, si is
bifariam secetur, circulus $ΑΓΔ$ in quinque arcus aequales di-
visus erit, quorum chordae aequales sunt (III. 29.) et binae
proximae angulos aequales comprehendunt (III. 27.).

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 303.)

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta E$; oportet circa circulum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum æquilaterum et æquiangulum circumscribere.

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E , ita ut æquales sint $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ circumferentiae; et per A, B, Γ, Δ, E ducantur rectae circulum contingentes $H\Theta, \Theta K, KA, AM, MH$ (III. 17.); et sumatur circuli $AB\Gamma\Delta E$ centrum Z , et iungantur $ZB, ZK, Z\Gamma, ZA, ZE$.

PROPOSITIO XI.

Cor. (Clavij.) Quum ex IV. 10. Cor. 1. angulus $\Gamma A\Delta$ sit $2/3$ rect. sit autem $B\Delta\Gamma = \Gamma A\Delta = \Delta A E$, sequitur, angulum $B\Delta E$ pentagoni regularis complecti sex quintas unius recti, vel tres quintas duorum rectorum, quod consentit cum I. 32. Cor. 18.; angulus autem $ABE = AEB$ erit (I. 32.) quinta pars duorum rectorum: itaque angulus $B\Delta E$ triplus est anguli ABE . Cf. IV. 10. Cor. 2. Caeterum simpliciolem propositionis IV. 11. solutionem dabit XIII. 10.

Obs. Eodem modo, quo hic ostensum fuit, descriptionem pentagoni regularis in dato circulo pendere a constructione trianguli æquicruri, cuius angulus ad basin uterque duplus sit reliqui — dum nempe ope huius trianguli, aliusque illi æquicruri in dato circulo descripti circulus in quinque partes æquales divisus fuit, quo facto res erat facillima — generaliter demonstrabitur, descriptionem polygoni regularis cuius-

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν $ΚΑ$ εὐθεία ἐφάπτεται τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ κύκλου κατὰ τὸ $Γ$, ἀπὸ δὲ τοῦ $Ζ$ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ $Γ$ ἐπαφὴν ἐπέξενεται ἡ $ΖΓ$ ἢ $ΖΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΚΑ$ ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν πρὸς τῷ $Γ$ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Β, Δ$ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ἴσὸν ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΓ, ΓΚ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ, ΒΚ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΚ$ ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $ΖΓ, ΓΚ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΖΒ, ΒΚ$ ἐστὶν ἴσα, ἴσὺν τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΚ$ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ $ΓΚ$ τῇ $ΒΚ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΖΒ$ τῇ $ΖΓ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΖΚ$, δύο δὴ αἱ $ΒΖ, ΖΚ$ δύοι ταῖς $ΓΖ, ΖΚ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $ΒΚ$ βάσει τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΚΖΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΖ$ τῇ ὑπὸ $ΖΚΓ$ ἐστὶν ἴση· διπλῇ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΚΓ$ τῆς ὑπὸ $ΖΚΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΖΔ$ τῆς $ΓΖΑ$ ἐστὶ διπλῇ ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΑΔ$ τῆς ὑπὸ $ΓΑΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ περιμέτρεια τῇ $ΓΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΔ$. Καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΖΓ$ τῆς ὑπὸ $ΚΖΓ$ διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΖΓ$ διπλῇ τῆς ὑπὸ $ΑΖΓ$ · ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΚΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΖΓ$ · ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΚ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΓΑ$ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΖΚΓ, ΖΑΓ$

cunque, quod numerum laterum imparum $= 2n + 1$ habeat, pendere a descriptione trianguli sequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro heptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verticem; in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pro

Et quoniam recta KA contingit circulum $AB\Gamma\Delta E$ in Γ , a centro autem Z in contactum ad Γ ducta est $Z\Gamma$; erit $Z\Gamma$ perpendicularis ad KA (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad Γ . Ex eadem ratione anguli ad puncta B , Δ recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $Z\Gamma K$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $Z\Gamma$, ΓK (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB , BK aequale est quadratum ex ZK ; quare quadrata ex $Z\Gamma$, ΓK quadratis ex ZB , BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $Z\Gamma$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta ΓK rectae BK . Et quoniam aequalis est ZB ipsi $Z\Gamma$, et communis ZK , duae BZ , ZK duabus ΓZ , ZK aequales sunt, et basis BK basi ΓK est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZ\Gamma$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZK\Gamma$ est aequalis; duplus igitur angulus BZI anguli $KZ\Gamma$, angulus autem $BK\Gamma$ anguli $ZK\Gamma$. Ex eadem ratione et angulus ΓZA anguli ΓZA est duplus, angulus autem ΓAA anguli ΓAZ . Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ ipsi ΓA , aequalis est et angulus $BZ\Gamma$ angulo ΓZA (III. 27.). Et est angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$ duplus, angulus autem $AZ\Gamma$ duplus anguli $AZ\Gamma$; aequalis igitur et $KZ\Gamma$ ipsi $AZ\Gamma$; est autem et angulus $Z\Gamma K$ angulo $Z\Gamma A$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZK\Gamma$, $ZA\Gamma$ duos angulos duobus omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pendebit eius descriptio a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit $(n-1/2)$.

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντ' ἑκατέ-
ραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν, μὲν πλευρὰ ἴσην,
κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς
ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γω-
νίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεία τῇ
ΓΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ. Καὶ
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΑ, διπλὴ ἄρα ἡ ΚΑ τῆς
ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δεῖχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς
ΒΚ διπλὴ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση ¹⁾ καὶ ΘΚ
ἄρα τῇ ΚΑ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ
ἐκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΑ
ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον.
Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ
ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν
ὑπὸ ΖΚΓ διπλὴ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΑΓ
διπλὴ ἡ ὑπὸ ΚΑΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ ἄρα τῇ ὑπὸ
ΚΑΜ ἐστὶν ἴση. Ὀμοίως δὴ δεῖχθήσεται καὶ ἐκάστη
τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ,
ΚΑΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΑ,
ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώ-
νιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη
δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ
κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε
καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ
τῇ ΚΓ, καὶ ἐστὶ διπλὴ ἡ μὲν ΚΑ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ·
καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΑ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera
repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Péyardo et
Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latus uni lateri aequale, commune ipsis $Z\Gamma$, et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta $K\Gamma$ rectae ΓA , angulus vero $ZK\Gamma$ angulo $Z\Lambda\Gamma$. Et quoniam aequalis est $K\Gamma$ ipsi ΓA , dupla igitur KA ipsius $K\Gamma$. Ex eadem ratio. e et ΘK ipsius BK dupla ostendetur. Et est BK ipsi $K\Gamma$ aequalis; et ΘK igitur ipsi KA est aequalis. Similiter ostendetur et unaquaeque rectarum ΘH , HM , MA alterutri ipsarum ΘK , KA aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $H\Theta KAM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus $ZK\Gamma$ angulo $Z\Lambda\Gamma$, et ostensus est anguli $ZK\Gamma$ duplus angulus ΘKA , anguli autem $Z\Lambda\Gamma$ duplus angulus KAM ; et angulus ΘKA angulo KAM est aequalis: Similiter et unusquisque angulorum $K\Theta H$, ΘHM , HMA ostendetur alterutri angulorum ΘKA , KAM aequalis; quinque igitur anguli $H\Theta K$, ΘKA , KAM , AMH , $MH\Theta$ aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $H\Theta KAM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $AB\Gamma\Delta E$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sin $(4 - \frac{1}{2})$ plus vel $\frac{7}{2}$ plus anguli ad verticem esse debeat. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius Schol. ad IV. 16.; Boermannus Schol. 3. ad IV. 11. aliiqua. Potest etiam haec observatio pro polygonis impari aut pari laterum nu-

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ εἰς τὸ $ABΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ $ΓΖ$, $ΔΖ$ εὐθεῖαι, ἐπεξέχθωσαν αἱ ZB , ZA , ZE εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΔ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΖ$, δύο δὴ αἱ $ΒΓ$, $ΓΖ$ δυοὶ ταῖς $ΔΓ$, $ΓΖ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓΖ$ ἴση ἐστὶ· βάσει οὖν ἡ BZ τῇ βάσει $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $BZΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΖΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση οὖν ἡ ὑπὸ $ΓΒΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΖ$. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ τῆς ὑπὸ $ΓΔΖ$, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isoscelis, in quo utervis angulus ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero, ut facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate erit describere triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice versa. Possunt autem etiam polygoni, quae parem laterum numerum habent, quando is non est formae $2n$, reduci ad polygoni, quae impari laterum numerum habent; si autem est formae $2n$, ad quadrata.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Probandum erat ante omnia, quod Austin, monet, rectas $ΘΚ$, $ΚΑ$, $ΑΜ$ etc. inter se convenire, quod, ductis rectis $ΒΓ$, $ΓΔ$ etc. facile eodem modo probatur, ac in IV. 3. vidimus.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔΕ$; oportet in pentagono $ABΓΔΕ$ circulum inscribere.

Secetur uterque angulorum $BΓΔ$, $ΓΔΕ$ bifariam ab utraque rectarum $ΓΖ$, $ΔΖ$ (I. 9.); et a puncto Z , in quo conveniunt inter se rectae $ΓΖ$, $ΔΖ$, ducantur rectae ZB , ZA , ZE . Et quoniam $BΓ$ aequalis est $ΓΔ$, communis autem $ΓΖ$, duae $BΓ$, $ΓΖ$ duabus $ΔΓ$, $ΓΖ$ aequales sunt, et angulus $BΓΖ$ angulo $ΔΓΖ$ aequalis est; basis igitur $BΖ$ basi $ΔΖ$ est aequalis (I. 4.), et triangulum $BΖΓ$ triangulo $ΔΖΓ$ est aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus $ΓBΖ$ angulo $ΓΔΖ$. Et quoniam duplus est $ΓΔΕ$ anguli $ΓΔΖ$, aequalis autem angulus $ΓΔΕ$ angulo $ABΓ$, angulus vero $ΓΔΖ$ angulo $ΓBΖ$, et angulus $ΓBA$

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis circulo inscripti, ducantur rectae circulum contingentes, enasci exinde polygonum regulare eundem habens laterum numerum, eique circulo circumscriptam. Circumscriptio polygoni regularis circa circulum datum itaque pariter pendet a divisione circuli in tot partes aequales, quot polygonum latera habet. Caeterum in hoc et praecedente problemate unum punctorum in circumferentia v. c. A pro libitu sumi aut datum esse potest.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Quamvis hypothetice sumi possit pentagonum regulare vel aequilaterum et aequiangulum super aliqua recta $ΓΔ$ descriptum esse, etiamsi modus illud describendi antea ostensus non fuerit, multi tamen geometrae hac occasione docuerunt, quomodo super data recta describi possit pentagonum

$\Gamma\Delta E$ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἢ δὲ $\Gamma\Delta Z$ τῇ ὑπὸ ΓBZ , καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma B A$ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓBZ ἴστί διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$ · ἡ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς BZ εὐθείας. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAE , AED δίχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ZA , ZE εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἐπὶ τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθείας κάθετοι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Theta\Gamma Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Gamma Z$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $Z\Theta\Gamma$ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $ZK\Gamma$ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $Z\Theta\Gamma$, $ZK\Gamma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὴν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν $Z\Gamma$ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ $Z\Theta$ κάθετος τῇ ZK καθέτῳ. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ZA , ZM , ZH ἑκατέρα τῶν $Z\Theta$, ZK ἴση ἐστίν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφαρτάται τῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H , Θ , K , A , M

regulare. Et Clavius quidem ad IV. 11. ita hoc problema solvit. Sit super recta data ΓA (Fig. 302.) describendum pentagonum regulare. Fiat triangulum aequicrurum $ZH\Theta$ tale, ut uterque angulus ad basin duplus sit reliqui (IV. 10.). Deinde circa triangulum $A\Gamma A$, quod super basi ΓA ope I. 23. triangulo $ZH\Theta$ aequiangulum constructitur, describatur circulus (IV. 5.), huicque inscribatur ex IV. 11. ope eiusdem trianguli $A\Gamma A$ pentagonum regulare. Eodem fere redit constructio

igitur anguli ΓBZ est duplus; aequalis igitur angulus ABZ angulo ZBT . Ergo angulus ABT bifariam secatur a recta BZ . Similiter ostendetur et utrumque angulorum BAE , AEA bifariam secari ab utraque rectarum ZA , ZE . Ducantur autem a puncto Z ad AB , BT , ΓA , ΔE , EA rectae perpendiculares ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM (I. 12.). Et quoniam aequalis est angulus $\Theta \Gamma Z$ angulo $K \Gamma Z$, est autem et rectus $Z\Theta \Gamma$ recto $ZK \Gamma$ aequalis, duo triangu-
la sunt $Z\Theta \Gamma$, $ZK \Gamma$ duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune scilicet utrique $Z\Gamma$, subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur perpendicularis $Z\Theta$ perpendiculari ZK . Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZA , ZM , ZH , alterutri rectarum $Z\Theta$, ZK aequalem esse; quinque igitur rectae ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , BT , ΓA , ΔE , EA rectas; propterea quod recti sunt anguli ad puncta H , Θ , K , A , M . Si enim ipsas non contingit, sed secat, eveniet ut recta diametro circuli ad rectos angulos ab

Peletarii, quam habet ille ad IV. 10. Alia Clavii solutio nititur observatione in Cor. ad IV. 10. et in Cor. ad IV. 11. facta. Nempe, quum in triangulo $ZH\Theta$ (Fig. 302.) uterque angulorum ad basin sit ex IV. 10. Cor. $= \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$, erit angulus ei deinceps, qui basi producta oritur, $= 2 \text{ Rect.} - \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$.

(I. 13.) $= \frac{6 \text{ Rect.}}{5}$ i. e. ex Cor. IV. 11. $=$ angulo, quem dup-

σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ
 τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύ-
 κλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν
 τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον
 τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA ,
 ZM εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς AB , BF ,
 GA , AE , EA εὐθείας. Ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν. Γε-
 γράφω ὡς ὁ $H\Theta KAM$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει
 ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν
 τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

latera contigua pentagoni regularis comprehendunt. Sufficiet
 igitur, ad punctum Γ extremum rectae datae ΓA angulum ap-
 plicare, qui aequalis sit ei, qui angulo $ZH\Theta$ deinceps est, et
 rectam sub hoc angulo ductam aequalem facere rectae datae
 ΓA , atque ita per omnem describendi pentagoni ambitum rem
 continuare.

Obs. 2. Simili ratione in polygono regulari quocunque
 circulus inscribetur.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Cor. Quum centrum circuli pentagono regulari
 circumscribendi in IV. 14. prorsus eodem modo inveniatur,
 ac centrum circuli eidem pentagono inscribendi in IV. 13. pa-
 tet, utrumque circulum idem centrum habere.

Obs. 2. Generaliter eodem modo circa datum polygo-
 num regulare quodcunque circulus circumscribetur.

Obs. 3. Hinc etiam (coll. 2. Obs. ad IV. 13.) Cor. in
 Obs. 1. allatum valet generaliter, nempe circulus polygono

extremitate ducta cadat intra circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.). Circulus igitur centro Z , intervallo vero una ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , ZA , ZM rectarum descriptus non secabit rectas AB , BF , ΓA , ΔE , EA ; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta KAM$.

In dato igitur pentagono, quod est aequilaterum et aequiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 305.)

Circa datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulum circumscribere.

alicui regulari inscriptus idem centrum habebit, quod circulus ei circumscriptus.

Obs. 4. Quodsi e centro circuli polygono alicui regulari inscripto, vel (quod eodem redit Obs. 3.) circumscripto ad singulos polygones angulos ducantur rectae, dividunt illae polygonum in tot triangula aequalia, quot polygonum latera habet.

Obs. 5. Haec triangula omnia eandem habent altitudinem, quae si circulus polygono inscriptus sit, aequalis est radio circuli inscripti; si circulus polygono circumscriptus sit, aequalis est perpendiculari e centro in unum laterum polygones demissum. Radius itaque circuli inscripti aequalis est huius perpendiculari, quod et apothema vocatur.

Obs. 6. Summa omnium istorum triangulorum, i. o. integrum polygonum itaque aequale est (I. 38. Cor. 4.) triangulo, cuius basis aequalis est perimetro polygones, et cuius altitudo aequalis est altitudini unius ex istis triangulis, i. e. si circulus polygono circumscriptus sit, radio circuli polygones

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $ABΓΔΕ$. δεῖ δὴ περὶ τὸ $ABΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ $Β$, $Α$, $Ε$ σημεία ἐπεξέχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν $ΖΒ$, $ΑΖ$, $ΕΖ$ εὐθειῶν.

inscripti, vel si circulus polygono circumscriptus sit, perpendiculo e centro circuli polygono circumscripti in unum latrum demisso.

Obs. 7. Observatio praecedena valet etiam, si polygonum aliquod non regulare circulo alicui sit *circumscriptum*, quod nempe etiam tum omnia triangula, in quae illud dispesci potest rectis e centro ad singulos angulos polygoni ductis, eandem habent altitudinem nempe radium circuli ipsi inscripti. Tali tamen polygono non semper circulus circumscribi poterit, quod hic obiter notamus.

His observationibus circa polygona regularia addi possunt adhuc sequentia.

Obs. 8. Si quod polygonum regulare (Fig. 306.) v. c. pentagonum circulo inscriptum sit, et bifariam dividantur singuli eius anguli ad centrum, adeoque etiam (III. 26.) singuli arcus, quos subtendunt latera polygoni circulo inscripti, et per puncta, in quibus hi arcus dividuntur, ducantur rectae circulum contingentes, enascetur novum polygonum regulare priori aequilaterum, circulo circumscriptum. Quod simili ratione demonstrabitur ac IV. 12. Et facile patet, singula latera polygoni circumscripti parallela esse singulis lateribus polygoni circulo inscripti. Habet hanc Prop. de pentagono Peletarius ad IV. 12. et generaliter Ambros. Rhodius ad IV. 6.

Obs. 9. Quaevis figura aequilatera circulo inscripta est

Sit datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔΕ$; oportet circa pentagonum $ABΓΔΕ$ circulum circumscribere.

Secetur uterque angulorum $ΒΓΔ$, $ΓΔΕ$ bifariam ab utraque rectarum $ΓΖ$, $ΖΔ$ (I. 9.), et a puncto Z , in quo conveniunt rectae, ad puncta B , A , E ducantur rectae ZB , ZA , ZE : Similiter ut in praecedente ostendetur et unumquemque angulorum $ΓΒΑ$, $ΒΑΕ$, $ΑΕΔ$ bifariam secari ab una rectarum ZB , AZ , EZ . Et quoniam aequalis est angulus $ΒΓΔ$

etiam aequiangulara. Latera enim eius abscindunt arcus aequales (III. 28.), adeoque anguli a binis quibusvis polygoni lateribus contiguis comprehensi arcubus aequalibus insistent, adeoque aequales sunt (III. 27.). At non omnis figura aequiangulara circulo inscripta necessario quoque aequilatera est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel, si par est, quando duo latera proxima aequalia sunt, vel dummodo, duo quaecunque aequalia sint, quorum uno posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum, sextum etc. Est haec observatio Clavii. Nempe, si circulo inscripta sit figura aequiangulara quaecunque v. c. (Fig. 305.) $ABΓΔΕ$, erit, ob angulum $ΒΑΕ=ΑΒΓ$, etiam arcus $ΒΑΕ=ΓΒΑ$ (III. 26. Cor. 1.), hinc, demto communi AB arcus $ΑΕ=$ arc. $ΒΓ$, adeoque recta $ΑΕ=$ rectae $ΒΓ$ (III. 29.). Eadem ratione erit recta $ΒΓ=ΑΕ$, atque ita deinceps, si figura plura habet latera, erit semper tertium quodque latus ei, a quo tertium est, uno relicto in medio, aequale: hoc est, primum (quodvis autem latus constitui primum potest) aequale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo etc., atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita aequalia inter se erunt. Eadem autem ratione omnia latera locorum parium, ut secundum, quartum, sextum etc. aequalia inter se erunt, quum quartum sit a secundo tertium etc. Et haec quidem in omnibus figuris aequiangularis circulo inscriptis locum habebunt.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $BΓΔ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΖΔΓ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΖΓ$ πλευρᾷ τῇ $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν $ΖΒ$, $ΖΑ$, $ΖΕ$ ἐκατέρᾳ τῶν $ΖΓ$, $ΖΔ$ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΖΑ$, $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΔ$, $ΖΕ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ζ$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΖΑ$, $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΔ$, $ΖΕ$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ $ΑΒΓΔΕ$.

Iam vero, si figura inscripta imparem laterum numerum habeat, inde consequetur, ultimum latus aequale esse primo, cui proximum est, quod nempe et ultimum impari loco erit. Idem ultimum autem etiam aequale erit secundo, quod quippe ab ultimo tertium est. Itaque omnia latera inter se aequalia erunt. Si vero figura inscripta parem laterum numerum habeat, nihil concludi poterit, nisi omnia ea latera, quae impari loco sunt, inter se esse aequalia, et pariter omnia ea, quae pari loco sunt, inter se esse aequalia. Quodsi autem unum eorum, quae impari loco sunt, aequale sit uni eorum, quae pari loco sunt, etiam omnia latera inter se erunt aequalia. Caeterum esse posse figuras aequiangulas circulo inscriptas, quae tamen non sint aequilaterae, iam exemplo rectangulorum constat (III. 22. Obs. 5.).

Obs. 10. Simili ratione omnis quidem figura aequiangularis circulo circumscripta est etiam aequilatera, at non omnis figura aequilatera circulo circumscripta est etiam necessario aequiangularis, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel, si par est, quando duo proximi anguli aequales sunt, vel dummodo duo quicunque anguli aequales sint, quorum uno posito primo, alter occupet locum parem

angulo ΓAE , et est anguli BIA dimidius angulus $Z\Gamma A$, anguli vero ΓAE dimidius ΓAZ , et $Z\Gamma A$ igitur angulo ZAI est aequalis; quare (I. 6.) et latus $Z\Gamma$ lateri ZA est aequale. Similiter ostendetur et unamquamque rectarum ZB , ZA , ZE alterutri $Z\Gamma$, ZA esse aequalem; quinque igitur rectae ZA , ZB , $Z\Gamma$, ZA , ZE aequales inter se sunt. Circulus igitur centro Z et intervallo una rectarum ZA , ZB , $Z\Gamma$, ZE descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit, circumscriptus. Circumscribatur, et sit $AB\Gamma AE$.

quemcunque, ut quartum, sextum etc. (Est et haec observatio Clavii contra Campanum, qui in nota ad IV. 15. putaverat, omnem figuram aequilateram circulo circumscriptam esse aequiangulam.). Nempe si (Fig. 304.) circulo, cuius centrum Z circumscripta sit aliqua figura aequiangula $AB\Gamma AE$, ducantur e centro rectae ad angulos figurae ZA , ZB etc., quae omnes hos angulos bisecabunt (III. 17. Obs. 1.), et, quum integri anguli aequales sint, aequales erunt etiam dimidii. Quum igitur in triangulis AZB , $BZ\Gamma$ commune sit latus BZ , angulus autem $BAZ = B\Gamma Z$, et $ABZ = \Gamma BZ$, erit et (I. 26.) $AB = B\Gamma$, atque ita duo quaecunque latera inter se aequalia erunt. Sin autem figura $AB\Gamma AE$ circulo circumscripta sit aequilatera, erit iterum $ABZ = \Gamma BZ$, et quum praeterea in triangulis ABZ , ΓBZ $AB = B\Gamma$ et BZ communis, erit (I. 4.) $B\Gamma Z = BAZ$. At, quum $BAZ = \frac{BAE}{2}$, et $B\Gamma Z = \frac{B\Gamma A}{2}$, erit etiam $BAE = B\Gamma A$, i. e. primus quisque angulus aequalis erit tertio, tertius quinto etc. Eademque ratione omnes anguli parium locorum ut secundus, quartus, sextus etc. aequales erunt. Et haec quidem in omnibus figuris aequilateralis circulo circumscriptis. Iam, si numerus angulorum impar sit, erit

Περὶ ἄρα τὸ δοθέν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευ-
ρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. ἽΟπερ
ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιε.

Εἰς τὸν δοθέντ᾽ αὖ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε
καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕΖ$. δεῖ δὴ εἰς
τὸν $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἦχθω τοῦ $ΑΒΓΔΕΖ$ κύκλου διάμετρος ἡ $ΑΔ$,
καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Η$, καὶ κέντρον
μὲν τῷ $Δ$, διαστήματι δὲ τῷ $ΔΗ$ κύκλος γεγράφθω
ὁ $ΕΗΓΘ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $ΕΗ$, $ΓΗ$ διήχθωσαν

ultimus angulus, quippe impari loco positus, aequalis primo,
qui ei proximus est: at etiam secundo, quippe qui ab ultimo
tertius est: itaque omnes anguli aequales erunt. Sin autem
figura circumscripta parem angulorum numerum habeat, nihil
concludi poterit, nisi omnes angulos, qui impari loco sunt,
aequales inter se esse, et pariter omnes eos, qui pari loco
sunt. Quodsi autem unus eorum, qui ad secundam classem
pertinent, aequalis sit uni eorum, qui ad primam classem per-
tinent, omnes anguli aequales erunt. — Esse autem posse
figuras aequilateras circulo circumscriptas, quae tamen non
sint aequiangulae, iam exemplo rhombi constat (IV. 7.
Obs. 5.).

Obs. 11. In figuris quoque non regularibus, quibus cir-
culus circumscribi potest, centrum circuli circumscribendi in-
venitur, si duo latera continua bisecentur, et in punctis se-
ctionis perpendiculara ad ea erigantur, quorum sectio centrum
erit, ut in IV. 8. in figuris autem non regularibus, quibus
circulus inscribi potest, centrum circuli inscribendi invenitur,
si duo anguli proximi bisecentur, ubi pariter rectarum istos

Circa datum igitur pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XV. (Fig. 307.)

In dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta EZ$; oportet in circulo $AB\Gamma\Delta EZ$ hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Ducatur circuli $AB\Gamma\Delta EZ$ diameter AA , et sumatur centrum circuli H , et centro quidem A , intervallo vero AH circulus describatur $EHT\Theta$ (Post. 3.), et iunctae EH , ΓH producantur ad puncta B , Z , et

angulos bisecantium sectio centrum erit, ut in IV. 9. In figuris regularibus utraque methodus eodem redit, unde in IV. 8. problema circulum dato quadrato inscribendi modo priore, in IV. 9. autem problema circulum dato quadrato, circumscribendi modo posteriore traditur.

PROPOSITIO XV.

Obs. 1. Ex hac propositione alia consequitur methodus facilior ea, quam in IV. 2. Cor. habuimus circulo dato triangulum aequilaterum inscribendi, ductis nempe rectis AT , ΓB , EA . Et quum $AB\Gamma H$ sit figura aequilatera, patet ex I. 8. eam a recta AT bifariam dividi, unde consequitur, triangulum circulo inscriptum esse hexagoni regularis eidem circulo inscripti dimidium.

Obs. 2. Quum angulus $\angle ABH = \angle HBT = \frac{2 \text{ Rect.}}{3}$, erit angulus $\angle AB\Gamma = \frac{4 \text{ Rect.}}{3}$, et angulus $\angle B\Gamma A = \angle \Gamma AB = \frac{\text{Rect.}}{3}$. Patet itaque ratio describendi trianguli isoscelis $AB\Gamma$, cuius

ἐπὶ τὰ B, Z σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB, BG, GA, AE, EZ, ZA . λέγω ὅτι τὸ $ABGAEZ$ ἑξαγώνον ἰσοπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABGAEZ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ HA . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $EHT\Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AH . Ἀλλ' ἡ HE τῇ HA ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ HE ἄρα τῇ EA ἴση ἐστὶν ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ EHA τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ EHA, HAE, AEH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυαὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἢ ἄρα ὑπὸ EHA γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. Ὀμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ AHG τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ GH εὐθεῖα ἐπὶ τὴν EB σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ EHG, GHB δυαὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ GHB τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν αἱ ἄρα ὑπὸ EHA, AHB, GHB γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ BHA, AHZ, ZHE ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ EHA, AHG, GHB . αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $EHA, AHG, GHB, BHA, AHZ, ZHE$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν αἱ ἔξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB, BG, GA, AE, EZ, ZA ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν αἱ ἔξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABGAEZ$ ἑξα-

angulus ad verticem sit quadruplus utriusque anguli ad basin. Et generaliter (Cf. etiam Obs. ad V. 11.) facile patet, si describi possit polygonum regulare, quod laterum numerum =

iungantur AB , BF , FA , AE , EZ , ZA ; dico hexagonum $ABFAEZ$ aequilaterum esse et aequiangulum.

Quoniam enim punctum H centrum est circuli $ABFAEZ$, HE aequalis est HA . Rursus, quoniam punctum A centrum est circuli $EHT\Theta$, AE aequalis est AH . Sed HE ipsi HA ostensa est aequalis, HE igitur ipsi EA aequalis est; aequilaterum igitur est triangulum EHA , et tres igitur ipsius anguli EHA , HAE , AEH aequales inter se sunt (I. 5.), quia isoscelium triangulorum ad basin anguli aequales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis aequales (I. 32.); angulus igitur EHA tertia pars est duorum rectorum. Similiter ostendetur et AHT tertia pars duorum rectorum. Et quoniam recta TH super EB insistens angulos deinceps EHT , THB duobus rectis aequales facit (I. 13.), et reliquus igitur THB tertia pars est duorum rectorum; anguli igitur EHA , AHT , THB aequales inter se sunt; quare et anguli ad verticem BHA , AHZ , ZHE aequales sunt ipsis EHA , AHT , THB (I. 15.); sex igitur anguli EHA , AHT , THB , BHA , AHZ , ZHE aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent (III. 26.); sex igitur circumferentiae AB , BF , FA , AE , EZ , ZA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtiendunt (III. 29.); sex igitur rectae aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est hexagonum $ABFAEZ$;

N habeat, describi etiam posse triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit ($N-2$) plus utriusque anguli ad basin, et vice versa.

γωνιον· λῖγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ZA περιφέρεια τῇ EA περιφερείᾳ, κοινῇ προσκείσθω ἡ $ABΓΔ$ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ $ZABΓΔ$ ὅλη τῇ $EAΓBA$ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $ZABΓΔ$ περιφερείας ἡ ὑπὸ $ZEΔ$ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς $EAΓBA$ περιφερείας ἡ ὑπὸ AZE γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ $ZEΔ$. Ὁμοίως δὴ δευχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ $ABΓΔEZ$ ἐξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ AZE , $ZEΔ$ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔEZ$ ἐξαγώνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $ABΓΔEZ$ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντα κύκλον ἐξαγώνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ εἰν διὰ τῶν $A, B, Γ, Δ, E, Z$ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφθήσεται περὶ τὸν κύκλον ἐξαγώνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἐτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου

Obs. 3. Quum recta AG a recta BH bifariam et ad angulos rectos secetur (I. 34. Cor. 1. et 20.), erit quadratum dimidia AG , i. e. quarta pars quadrati ex AG (II. 4. Cor. 2.) aequale excessui quadrati ex AH super quadratum ex dimidia BH vel AH (I. 47. Cor. 2.) i. e. (II. 4. Cor. 2.) = tribus quartis quadrati radii. Quadratum ex AG , latere trianguli aequilateri igitur triplum est quadrati radii eius circuli, in quem inscriptum est. Tacquet ad h. l.

dico etiam et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est circumferentia ZA circumferentiae EA , communis addatur $AB\Gamma A$ circumferentia; tota igitur $ZAB\Gamma A$ toti $E\Gamma BA$ est aequalis, et insistit quidem circumferentiae $ZAB\Gamma A$ angulus $ZE A$, circumferentiae vero $E\Gamma BA$ angulus AZE . Aequalis igitur angulus AZE angulo $ZE A$. Similiter ostendetur et reliquos angulos hexagoni $AB\Gamma AEZ$ sigillatim aequales esse alterutri angulorum AZE , $ZE A$. Aequiangulum igitur est hexagonum $AB\Gamma AEZ$. Ostensum est autem et aequilaterum, et inscriptum est in circulo $AB\Gamma AEZ$.

In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum hexagoni latus aequale esse circuli semidiametro.

Et si per puncta A , B , Γ , Δ , E , Z contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum, congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt. Et etiam con-

Obs. 4. Circa circulum quemcunque centro H , radio $= \frac{HA}{2}$ descriptum e punctis A , B , Γ , Δ , E , Z describi possunt sex circuli, inter se et primum descripto aequales, quorum quisque tres, nempe eum, qui ex H radio $\frac{HA}{2}$ descriptus est, et duos sibi proximos continget, si nempe radii omnium eorum sumantur aequales $\frac{HA}{2}$ (Obs. 3. ad III. 12.).

εἰρημίνους, εἰς τὸ δοθέν ἐξάγωνον ¹⁾ κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$ · δεῖ δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

1) Rob. Simson. monet, addendum hic esse ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Recte ille quidem. Attamen haec ex praecedentibus facile suppleri posse sine dubio auctor putabat. Et si omnia ad summum rigorem exigere velis, etiam ad initium Cor. similiter addendum erat ἰσόπ. καὶ ἰσώγων. ubi nec ipse Simson. addit.

PROPOSITIO XVI.

Obs. 1. Eodem modo, quo Euclides ostendit, quum arcus $ΑΓ$ sit $1/3 = 5/15$ circuli integri, et arcus $ΑΒ = 1/5 = 3/15$ circuli integri, fore arcum $ΒΓ = 2/15$, adeoque per III. 30. inveniri posse arcum, qui sit $1/15$ integri circuli, generaliter ostendetur, si describi possit in circulo polygonum regulare m laterum, aliudque n laterum, ubi $m > n$ sumitur, et si $m - n$ vel $pm - qn$ per continuas bisectiones ad unitatem reduci possit, vel ut aliter dicamus, si $m - n$ vel $pm - qn$ sit $2r$, describi quoque posse in circulo polygonum regulare, quod habeat $m \cdot n$ latera, ubi p et q denotare potest numeros integros quoscunque.

Obs. 2. Ex iis, quae Euclides hoc libro tradidit, consequitur, circulum posse in 3, 6, 12, 24 etc.

— 4, 8, 16, 32 ...

— 5, 10, 20, 40 ...

— 16, 30, 60, 120 ...

partes aequales dividi, et figuras regulares totidem laterum ipsi posse inscribi et circumscribi. Figuras autem regulares,

gruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, in dato hexagono circulum inscribemus et circumscribemus.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 308.)

In dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus *ABTA*; oportet in circulo *ABTA* quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

quorum laterum numerus in istis seriebus haud contineretur, geometricae in circulo describendi ars hactenus ignorabatur. Gaussius, iam apud Göttingenses Matheseos, Professor, in Disquisitionibus Arithmeticis 1801. editis, Sect. VII. de aequation. circuli section. definientibus, primus methodo algebraico-trigonometrica demonstravit, circulum non tantum in

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2^0+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2^1+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2^2+1 \end{smallmatrix} \right) \text{ verum etiam in } \left(\begin{smallmatrix} 17 \\ 2^4+1 \end{smallmatrix} \right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 257 \\ 2^8+1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 65537 \\ 2^{16}+1 \end{smallmatrix} \right) \text{ etc. generaliter nempe in } 2^m+1 \text{ par-}$$

tes dividi posse, quoties 2^m+1 sit numerus primus. Ope divisionis in 17. partes aequales, collatis iis, quae in Obs. 1. et in Obs. ad IV. 11. diximus, circulus deinde porro in 2×17 , 4×17 , 8×17 etc. praeterea in 3×17 vel 51 partes aequales dividetur, quod nempe $6/17 - 1/3 = 1/15$

$$\text{in } 5 \times 17 \text{ vel } 85, \text{ quia } 1/5 - 3/17 = 2/85$$

$$\text{in } 15 \times 17 \text{ vel } 255, \text{ quia } 1/15 - 1/17 = 2/255$$

et in eas adhuc partes aequales, quae bisectionibus ex praecedentibus consequuntur. Cf. etiam v. Hugenin. mathem. Beiträge Königsb. 1803. p. 272. sq. et Rothe. de Divisione Peripheriae circuli in 17. et 13. partes aequales, Erlangae 1804., qui pro quaestione generali, an polygonon aliquod regulare geometricae circulo inscribi possit, hanc adfert regulam generalem: sit M numerus quicunque integer positivus, atque litera m designetur multitudo numerorum integrorum positivorum $< M$ atque

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἢ $ΑΓ$, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἢ $ΑΒ$ οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ $ABΓΔ$ κύκλος ¹⁾ ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, ταιούτων ἢ μὲν $ΑΒΓ$ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἐστὶ πέντε· ἢ δὲ $ΑΒ$ περιφέρεια, πεμπτόν οὔσα τοῦ κύκλου, ἐστὶ τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἢ $ΒΓ$ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἢ $ΒΓ$ διχα κατὰ τὸ $Ε$, ἑκά- τερα ἄρα τῶν $ΒΕ$, $ΕΓ$ περιφερειῶν πεντεκαίδεκατον ἐστὶ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου. Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς $ΒΕ$, $ΕΓ$ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐ- θείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον, ἐστὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, εἰὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγά- γωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαίδε- κάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. "Ἐτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ

1) Pro ὁ $ABΓΔ$ κύκλος Rob. Simson. mavult legere: ἢ $ABΓΔ$ περιφέρεια. Quum tamen vox κύκλου etiam postea saepius recurrat, κύκλος hic dictum videtur pro integra circumferentia.

erga M relative primorum. Polygonon regulare M laterum geometricè circulo inscribi poterit, si M potentia est numeri 2 exponentis integri positivi. Si vero hoc non valeat, peripheria etiam in M partes aequales geometricè dividi, nequit. Caeterum geometrica quoque solutio ex formulis, quas habent viri supra laudati, deduci omnino potest, et Pflaiderer. pervenit ad geometricam constructionem satis elegantem et pro rei natura concinnam, cuius etiam demonstrationem exhibuit e mere geometricis principiis petitam. Aliam e formulis

Inscribatur in circulo $AB\Gamma A$ trianguli aequilateri in ipso inscripti latus $A\Gamma$ (IV. 2.), pentagoni vero aequilateri latus AB (IV. 11.); qualium igitur est circulus $AB\Gamma A$ aequalium segmentorum quindecim, talium circumferentia $AB\Gamma$, quae tertia pars est circuli, erit quinque; AB vero circumferentia, quae quinta est circuli, erit trium; reliqua igitur $B\Gamma$ aequalium duarum. Secetur $B\Gamma$ bifariam in E (III. 30.), utraque igitur circumferentiarum BE , EF quintadecima erit circuli $AB\Gamma A$. Si igitur iungentes rectas BE , EF , aequales ipsis in continuum rectas aptemus in circulo $AB\Gamma A$ (IV. 1.), erit in ipso inscriptum quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. Quod oportebat facere.

Congruenter autem eis, quae de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circumulum ducamus, circumscribetur circa circumulum quindecagonum aequilate-

algebraicis a Röthe. exhibitis deductam constructionem exhibet Müller. (Mathem. kritische Bearbeit. des ersten Buchs der Elemente 1821. im Anhang.). Aliam satis concinnam constructionem vide in Paukers ebene Geometrie 1825. p. 187. sq. Illa tamen hoc loco praetereunda nobis sunt, quum demonstratio ex ipsa problematis natura non possit non esse proluxa, et ex parte haud exigua e libris elementorum sequentibus demum petita. Praeterea plures subiinde mathematici methodos tradiderunt vel generales, vel ad singulares figuras spectantes, polygona regularia quaecunque, aut certe plura adhuc, quam Euclides docuerat, circulo dato inscribendi etc., haud quidem, ut probe norant, rigore veras, at tamen magis minus prope ad veritatem accedentes, atque ita comparatas, ut usui pra-

εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαίδεκάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευ-
τόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομεν τε καὶ πε-
ριγράψομεν.

ctico, ubi saepe summus rigor attingi nequit, inservire posse
videantur. Haec talia autem satis ingeniose nonnunquam ex-
cogitata nihil huc pertinent, nec diiudicatio horum tentami-
num plerumque ex altioribus fontibus repetenderum, vel metis
mechanicorum, huius loci esse potest. Huc tamen haud refetri

rum et aequiangulum. Praeterea congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

debent eorum conatus, qui aperte falsa de arcu quocunque in aequales, quotquot libuerit, partes dividendo praecepta dedere, qualia v. c. videre est in Hadaly de Hada Toxometria edita Budae 1820.

Ε Τ Κ Λ Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Η Ε Μ Π Τ Ο Ν .

Ο Ρ Ο Ι .

α. *Μέρος* ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἐλάσσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῇ τὸ μείζον.

β. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηῇται ὑπὸ τοῦ ἐλάττωτος.

Isaac. Monachus in scholiis ad hunc librum refert, asserere nonnullos, huius libri doctrinam ab Eudoxo, Platonis praeceptore, inventam traditamque esse. Caeterum aliqua in eo corrupta ad nos pervenisse, ex sequentibus patebit.

D E F I N. I.

Pars, ut iam Isaacus Monachus, Campanus, Commandinus, Clavius alique notant, duplici sensu apud Geometras adhibetur. Aut enim designat quamvis magnitudinem minorem altera eiusdem generis. Ita v. c. Euclides I. 9. Def. ait: omne totum sua parte maius est. Aut sensu strictiore, ut hic, sumitur pro ea magnitudine minore, quae aliquoties repetita aliam maiorem eiusdem generis efficit aut *mensurat*, unde eius *mensura* vocatur. Priore sensu v. c. 4. erit pars numeri 6, non vero posteriore sensu: 3 autem utroque sensu pars est numeri 6. Diximus, maiorem magnitudinem, cum qua minor

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. **P**ars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando mensurat maiorem.

2. Multiplex autem maior minoris, quando mensuratur a minore.

comparetur, esse debere eiusdem generis ac minorem. Patet enim lineam v. c. non nisi a linea, superficiem a superficie, corpus a corpore, pondus a pondere etc. mensurari posse. Caeterum, quam Euclides vocat hic partem sensu strictiore, alii partem *aliquotam*, aut *submultipulum* maioris vocant, maior contra *multipulum* minoris appellatur, quam exacte aliquoties continet (Def. 2.). Ita 3 erit submultipulum numeri 6, nempe eius pars dimidia, vel subdupla: 2 est numeri 6 pars tertia aut subtripla etc. Pars aliquota igitur aut submultipla prodit, si magnitudo aliqua in quocunque partes aequales dividatur. Talis pars *aliquota* distinguitur ab *aliquantis*, magnitudinem ipsam non metientibus, sed conflatis ex summa aliquot eius partium aliquotarum. Ita 4 erit pars *aliquanta* numeri 6, nempe erit eius pars tertia bis sumta. Euclidis libro VII. et sqq. partes aliquotas et aliquantas ita distinguit, ut priores simpliciter *partem*, posteriores *partes* appellet.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικιότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις 1).

1) Robert. Simson. persuasus de huius et sequentis octavae definitionis inutilitate, quam et Barrovius fateatur, firmiter se credere ait, eas non Euclidis esse, sed cuiusdam manus periti editoris. Eodem modo iudicat Borellius in Obs. ad axioma VI. L. III. Euclid. restituit.

DEFIN. II

Addi potest, duas magnitudines A, B duarum C, D *aequemultiplas*, aut *aequemultiplices* vocari, si maior A minorem C toties exacte contineat, quoties B continet D, seu, si minor C toties praecise repetenda est, ut efficiat aequalem maiori A, quoties D repeti debet, ut efficiatur aequalis magnitudini B. Eodem casu magnitudines C, D duarum A, B *partes aequae aliquotas* vocantur. Ita v. c. quum sit $15 = 3 \cdot 5$ et $20 = 4 \cdot 5$, erunt numeri 15 et 20 numerorum 3 et 4 *aequemultiplices*, et contra numeri 3 et 4 numerorum 15 et 20 *aequae aliquotae partes*. *Aequemultiplices* autem partium *aequae aliquotarum* duarum magnitudinum vocantur *magnitudinum harum partes aequae aliquantae*. Sic 6 et 8 erunt numerorum 15 et 20 *partes aequae aliquantae*. *Partes aequae aliquotas* duarum magnitudinum Euclides *eandem* illarum *partem*, *aequae aliquantas* autem *easdem partes* appellat. Quodsi eadem magnitudo minor C utramque A et B metitur, tum C *communis mensura* magnitudinum A et B vocatur. Cf. Pfeiderer *Expositio ac Dilucidatio* libri V. Elem. Euclid. Tub. 1782. p. 11. Peletarius vocem *multiplex* aliter intelligi vult, pariter ac vocem *pars* in Def. 1. Nempe multiplicem vocat maiorem minoris, non tantum: quum a minore ipsa, verum etiam, quum a parte aliqua minoris maior exacte mensuratur. Ita ait, 5 esse multiplicem numeri 2, esse nempe eius duplum sesquialterum: ternarium esse binarii, unitatem esse sui ipsius multiplicem. At vulgo hae voces non hoc sensu dicuntur, nec ab Euclide ita sumtae sunt, et multiplex semper *repetitionem* minoris, aut certe po-

3. Ratio est duarum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem (quantuplicitatem) inter se quaedam habitudo.

sitionem *integras* alterius (quo sensu: *simplam* dicitur), non vero positionem partis tantum minoris involvere videtur. Idem de aequemultiplis dicendum.

DEFIN. III.

„*ῥῑος*, ratio, sensu generalissimo indicat modum quemcunque ex mutua duarum quantitatum comparatione erutum, magnitudinem unius ex magnitudine alterius determinandi seu inferendi, atque ita necessario ad duas quantitates homogeneas restringitur. Concipi autem possunt infiniti modi diversi, magnitudinem unius duorum quantorum ex magnitudine alterius determinandi. Horum simplicissimi sunt, qui quantitates ipsas immediate, absque ulla earum praevia mutatione invicem comparant, magnitudinemque unius ex altera determinant, indicando: vel quanto una alteram excedat, aut ab ea deficiat; vel quoties una alteram contineat, aut in eo insit. Posteriori modum quantitates invicem comparandi, magnitudinemque unius ex magnitudine alterius determinandi accuratissime libro V. discutit, atque in sequentibus libris ad objecta geometriae applicat Euclides, nulla uspiam iniecta mentione expressa prioris: unde suspicari licet factum esse, ut eiusmodi rationes *geometricae*; altera autem priores, quae excessu unius magnitudinis super alteram, seu defectu unius ab altera occupantur, et quae primarum arithmetices operationum simplicium, additionis ac subtractionis obiectum constituunt, arithmeticae vocari consueverint. Caeterum neutra harum rationum ad arithmetica vel ad geometriam seorsim pertinent; verum utraque in numeris pariter et extensis locum habet, et ambae iunctim limites fere figunt matheseos, quam vocant elementarem.“ Cf. Pfeiderer. l. c. p. 6. Definitio itaque haec nostra, in qua, ut semper apud Euclidem de *geometrica* tantum ratione sermo est, nihil aliud dicere videtur, quam in hac ra-

8. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἄλλήλων ὑπερέχειν.

tione disquiri, quanta sit una magnitudo comparata cum alia eiusdem generis i. e. si aliam eiusdem generis pro mensura prioris sumere velis; vel (Wallisii verbis utimur in Tract. de Algebr. Oper. T. II. p. 86.) qualiter se habeat una ad alteram quoad quantuplicitatem (*πληκότητα*) considerata. Putat autem Wallisius, Euclidem dixisse potius *πληκότητα* quam *ποσότητα*, quo facilius etiam quantitates incommensurabiles, nec eae tantum, quarum una multipla est alterius, hac voce comprehenderentur. Atque eo, quo Wallisius vult, sensu vocem *πληκότητα* intelligere, suadet etiam ordo Def. 3. Post. 1. et 2. atque expressio Def. 4. 5. 7., ut observat Pflöiderer. in Promptuario Mathem. Lips. Fascic. 7. p. 259. Idem tamen addit ibidem, Fasc. 8. p. 445. vocem *πληκότης* videri potius significare *quantitatem*, quo sensu occurrat apud P olem. Magna Syntax. L. I. p. 8. (Basil. 1558.) *περὶ τῆς πληκότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν*, et ita vocem interpretatos esse Clavius et Barrovius in Lection. Cantabrig. Observare tamen liceat, chordarum quoque catalogum non absolutam aliquam rectatum circulo inscriptarum quantitatem, sed semper relativam tantum, i. e. comparatam cum aliqua unitate v. c. cum radio circuli continere, ita ut doceat, quot vicibus quaeque earum hanc unitatem aut eius partes contineat, aut *quantupla* illius sit. Denique Barrow. notat l. c. p. 225. verba: *πρὸς ἄλληλα* significare *ἀδιαφορίαν* quandam, quoad situm et ordinem terminorum, ita ut utervis prior, alter autem posterior poni possit. Is autem, qui prior positus est, antecedens vulgo, qui posterior, consequens dici solet. Quod rationis genera attinet, antecedens aut maior est consequente, quae ratio maioris inaequalitatis vocatur, vel ei aequalis est — quae ratio aequalitatis, vel antecedens minor est consequente, — quae ratio minoris inaequalitatis appellatur. Praeterea haec genera in varias de novo species dividunt, quas videre est apud Clavius aut Barrovium p. 240., quibus hic immorari nihil attinet. Antecedens autem consequentis non

4. Rationem inter se magnitudines habere dicuntur, quae multiplicatae sese superare possunt.

tantum aliquod multipulum, sed etiam eius pars aliquota aut pars aliquanta esse potest. „Numerus integer vel fractus, hicque vel spurius vel verus, qui indicat, quoties antecedens continet consequentem, *exponens rationis* vocatur. Praeterea autem occurrunt magnitudines eiusdem generis, e. g. lineae, quarum maior nec ipsa, nec ullum eius multipulum, minoris cuipiam multiplo aequatur. Eiusmodi magnitudines, mensuram quippe communem nullam habentes, *incommensurabiles* vocantur. Ratio igitur istiusmodi duarum magnitudinum assignari numeris nequit, quare etiam *irrationales* vocantur: limites tamen exponentis huius definiri possunt, qui invicem minus differant, quam dato numero fracto quocunque; seu duo assignari possunt multipla immediate contigua magnitudinis unius, quae sint limites multipli cuiuscunque dati magnitudinis alterius; hoc est, quorum unum dato hoc multiplo minus sit, alterum maius.“ Pfeiderer Expos. ac Dilucid. L. V. p. 7. Atque haec quidem causa fuisse videtur Euclidi, cur in sequentibus nunquam definitionem V. 3., si modo ea genuina sit, in ulla demonstratione adhiberet, sed quartam insuper adderet. „Nihil forte aliud, Barrovii verba sunt p. 230. in definitione 3. tradenda, Euclidi propositum fuit, quam ut methodi plenioris, aut ornatus qualiscunque causa, praeludens scilicet accuratioribus istis eiusdem, maioris et minoris rationis definitionibus mox subiungendis, *generalem quandam* et *ἀποχρηστὴν τοῦ λόγου* ideam discentium insinuaret animis per metaphysicam hanc definitionem, metaphysicam dico, nec enim proprie mathematica est, cum ab ea nihil quicquam dependeat aut deducatur a mathematicis, nec, ut existimō, deduci possit. Cuiusmodi quoque censi potest posthac tradita definitio analogiae: analogia est rationum similitudo, quae nulli mathematico deserviat usui, nec, alio opinor fine proponitur, quam ut per eam generalis quaedam analogiae notio, crasse licet et confusa tyronibus indatur. Definitionibus autem ex-

ε. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μετέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τέταρτου ἰσάκεις πολλαπλάσιων, καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρου ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ἢ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατὰλληλα.

ς. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μετέθῃ, ἀνάλογον καλεῖσθω.

quisitis, mox ab illo subiunctis tota rationum doctrina, tota res mathematica subnititur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doctrina perfectius elucescit: haec et consimiles absque notabili matheseos detrimento prorsus omitti possent: sicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nulla tamen rationis numero competentis exhibita definitione; quamvis illic aequae necessaria fuit et utilis talis definitio, atque hic est, sed neutro loco magna fuit necessitas." Unde et Rob. Simsonem has definitiones pro spuris habuisse diximus. Et cum Rob. Simson. consentit Pflaiderer. l. c. p. 9., qui observat, Euclidem hac definitione non solum nusquam in sequentibus uti, verumetiam uti ob vagam, quam offerat, notionem non potuisse.

DEFIN. IV.

Sive genuina sit definitio 3., sive spuria, Euclidi certe ob eas, quas diximus, causas non ex omni parte satisfacere poterat. Hinc definitionem 4. vel priori adiunxisse vel solam dedisse censendus est, qua non tam rationis geometricae rationem ipsam explicare, quam characterem distinctivum magnitudinum, quas vocant, homogenearum, et quae terminos rationis alicuius constituere possunt, assignare volebat: ita tamen, ut simul innueret, quid in illis, quatenus ratio earum geometrica spectatur, praecipue sit considerandum. Accuratorem notionis evolutionem definitionibus identitatis ac diversitatis rationum reservavit. Cf. Pflaiderer. l. c. p. 8. Caete-

5. In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aequae multiplices, secundae et quartae aequae multiplices, iuxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt inter se comparatae.

6. Magnitudines autem eandem rationem habentes proportionales vocentur.

rum Campanus hanc definitionem non habet, eius loco autem aliam haud satis claram, qua quantitates continue proportionales explicare studet. Quo magis confirmare videtur, quod Barrovius monet, qui p. 277. ita habet: „Non diffiteor, elementi quinti definitiones attentius inspectanti, nonnihil in iis exscriptorum culpa videri-transpositum ac immutatum.“

DEFIN. V.

Male omnino hanc definitionem intellexit Campanus, qui eius sensum ita explicat: proportio primae ad secundam est sicut tertiae ad quartam, cum sumtis aequemultiplicibus ad primam et tertiam, itemque aequemultiplicibus ad secundam et quartam, erit proportio multiplicis primae ad multiplex secundae, sicut multiplex tertiae ad multiplex quartae. Hoc enim, ut Campanus ipse ad definitionem praecedentem observat, esset idem per idem definire, nec illud vitium corrigeretur, si verborum Euclidis, quamvis non aperte idem dicerent, is tamen sensus esset. Falsam hanc Campani interpretationem sequitur etiam Orontius Finaeus. Iure autem id absurdum esse, Clavius ait. Nec melius Euclidis sensum assecutus est Ramus, qui vel eodem modo ac Campanus, rem interpretatur, vel definitionem Euclidis pro falsa haberi posse putat, quoniam v. e. si quatuor numeri sint 4, 3, 5, 4, et sumatur primi et tertii sexuplum 24, 30, secundi et quarti autem nonuplum 27, 36, sit simul $24 < 27$, et $30 < 36$, adeoque putare quis possit, esse $4:3=5:4$, ubi prorsus obli-

ζ' Όταν δὲ τῶν ἰσάνεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

η'. Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ταυτότης ¹⁾.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὁροῖς ἐλαχίστη ἐστὶν ²⁾.

1) Haec definitio in edd. Oxon. et Basil. est octava, atque ita nos restituiimus. Praeterea in his edd. loco: ταυτότης legitur: ὁμοιότης. Peyrardus secutum se esse ait Codd. a. et c. i. e. 190. et 1038., et huic definitioni quantum locum assignat. Et apud Campanum etiam est haec definitio 4., pariterque apud Zambertum et Claviū.

2) Ita melius Peyrardus e Cod. a. quam edd. Basil. et Oxon. quae legunt: ἐλαχίστοις. Cf. quae infra ad hanc definitionem monēbimus.

citur verborum, quae in Euclidis definitione sunt: καὶ ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμόν. Quodsi enim v. c. sumtum fuerit in iisdem numeris primi quidem et tertii sexuplum 24, 30, secundi autem et quarti octuplum 24, 32, erit quidem $24 = 24$, at $30 < 32$, unde patet, quatuor numeros 4, 3, 5, 4 non esse proportionales. Nempe tum saltim erit proportio, si in aequemultiplis quibuscunque locum habet, quod in definitione dicitur, ut iam Candalla respondit ad istam obiectionem. Plura, quae ad hanc definitionem, et ad V. 7. Def. pertineant, vide in Excursu ad finem huius libri.

DEFIN. VIII.

Barrovius notat l. c. p. 275. melius forte pro ὁμοιότης aut ταυτότης dici posse ἰσότης. Similitudinem enim verbum esse laxius et magis ambiguum, et identitatem haud optime quadrare rebus actu diversis immediate qua talibus, et sub diversorum ratione comparatis; praeterea rationum habitudines alias, hyperlogiam nimirum et hypologiam non ex dissi-

7. Quando vero aequae multiplicium, primae quidem multiplex superat multiplicem secundae, multiplex vero tertiae non superat multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

8. Proportio autem est rationum identitas.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis consistit.

militudine vel diversitate, sed ex inaequalitate denominari maioritatem et minoritatem; denique rationum aequalium denominatores, a quibus rationes habeant, quod ullatenus inter se comparentur, non eosdem, aut similes, sed aequales esse. De latina voce *proportio* idem observat p. 194. sqq. reperiri eam a Cicerone aliquoties usurpatam, quanquam non sensu exacte eodem. Alias enim apud ipsum idem valere videri, quod simplex ratio, nonnunquam vero rationum similitudinem vel analogiam designare, primumque videri illum ipsum eius usum adinvenisse, saltim ad res mathematicas primum applicuisse. Sic in fragmento, quod Timaeus inscribitur, eum dicere „graecorum *ἀναλογία* (audendum est enim, quoniam haec primum a nobis novantur) comparatio, proportiove dici potest.“ Eius autem effingendae hinc acceptam videri originem vel occasionem. Cum in corrogandis vectigalibus, vel importandis oneribus publicis, pro facultatum modo, secundum aequas leges taxato, sua cuique pars persolvenda cesserit, quae nempe rata cuiusque portio dicta sit; hinc unumquemqueolvere dictum pro portione, vel pro rata sua portione: hinc emersisse vocabulum *proportio*, dignum visum Ciceroni, quum graecas litteras suo donare Latio studeret, quod *λόγον* et *ἀναλογίαν*, obvias Platonem et alios graecos philosophos inspectanti voces, referret et exprimeret. — Caeterum, uti rationes alias dicunt arithmeticas, alias geometricas, ita simili modo proportionibus alias vo art solent arithmeticas, eas

i. "Όταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον."

ιι. "Όταν δὲ τέσσαρα μεγέθη (συνεχῆς) ¹⁾ ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον καὶ αἰεὶ ἐξῆς ὁμοίως ὡς ²⁾ ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

1) Vocem *συνεχῆς*, quamvis in nullo codice reperiatur, addidimus, quod monente Rob. Simson. omnino necessaria est, et in XI. 33. ita citatur.

2) Ita Peyrardus e Cod. a. Edd. Basil. et Oxon. contra: καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐν πλεόν, ὥς ἂν, quod nescio an non sit praefendum. Caeterum definitioni 11. Rob. Simson. subiungit aliam praecedentibus analogam, qua ratio composita explicatur. Aliam quidem rationis compositae definitionem vulgo habent in VI. Def. 5. ubi plura videbimus.

nempe, quibus prima magnitudo secundam eodem excedit, quae tertia quartam; alias geometricas, de quibus solis Euclidi tum in omni opere, tum hic potissimum et in V. 3. Def. sermo est. His postea addiderunt, quod verbo indicasse sufficiat proportionibus harmonicas, seu musicas. Dicunt nempe, tres magnitudines A, B, C esse *harmonice continuae proportionales*, si *geometrica* ratio primae ad tertiam aequalis sit *geometricae* rationi excessus $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{secundae super primam} \\ \text{primae super secundam} \end{smallmatrix} \right\}$ ad excessum $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{tertia super secundam} \\ \text{secundae super tertiam} \end{smallmatrix} \right\}$ i. e. si sit $A : C = \frac{(B-A) \cdot (C-B)}{(A-B) \cdot (B-C)}$ v. c. in numeris 3, 4, 6, quum sit $3 : 6 = 4 - 3 : 6 - 4$. Eodem modo quatuor magnitudines A, B, C, D harmonice proportionales esse dicunt, si fuerit $\frac{(A-B) \cdot (C-D)}{(B-A) \cdot (D-C)} = A : D$. Rationem huius denominationis vide v. c. in Klügels mathem. Wörterb. ad vocem: Harmon. Proportion.

DEFIN. IX.

Haud satis clare patet, quid verba huius definitionis sibi velint, quae edd. Basil. et Oxon. ita proferunt: *Ἀναλογία ἐν*

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, eius quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines (deinceps) proportionales sint, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius quam habet ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

τρίων ὅρων ἐλαχίστοις εἶναι. Quid enim termini minimi sibi velint, incertum videri possit. Candalla quidem explicat ἐλαχίστοις saltim, atque eodem modo Peletarius et Gregorii ponunt: *minimum* vel *ad minimum*, quam ipsam interpretationem habent etiam Ambros. Rhodius, Baermannus, Rob. Simson. alique. Roste illi quidem, quoad sensum, an tamen vox ἐλαχίστοις grammaticè id significari possit, valde dubitamus. Hinc præferendam putavimus lectionem Peyrardi: ἐλαχίστη, quae facilius certe ac illa altera significare posse videtur, proportionem, quum illa minima i. e. minimis terminis expressa sit, vel, ut aliter dicamus, *ad minimum* tres continere terminos. Simplicissimum forte fuerit, in graeco quoque ponere: ἐλάχιστα, idque adverbialiter sumere. Quod deinde vocem ὅρων attinet, ea ipsa quoque, ut Candalla monet, improprie hic sumta est. Nempe in omni ratione duo omnino termini, alter antecedens, alter consequens adesse debet, adeoque, quum duae rationes inter se comparantur, ut sit in analogia, proprie quatuor omnino termini aderunt, quamvis, ut sit in proportionem continua, eadem magnitudo, quae efficit terminum consequentem prioris rationis, efficere simul possit terminum antecedentem posterioris, ubi deinde improprie tres saltim terminos dicere possis, quum potius tres magnitudines, quarum secunda bis ponitur, quatuor etiam punct terminos efficiant. Forte itaque pro ὅρων ponendum fuerit μέγεθειν, qua voce Euclides etiam alias, ubi de rationibus sermo est, utitur. Et usus ille vocis ὅροι, quo terminos rationis significat, forte sequioris saltim aevi fuerit. Cf. Pfeiderer. in

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

Schol. ad libr. VI. Elem. Euclid. §. 132. et, qui ab eo citatur, Isaac. Barrov. (Lecton. Cantabrig. habitae 1666. p. 197. sq. et p. 214.). Hinc omnis haec definitio Pflciderero l. c. suspecta est. Quum tamen sequens definitio 10. se ad eam referre videatur, possis fortasse eam, ita, uti diximus, mutatam aut intellectam retinere.

DEFIN. X. XI.

Post has definitiones locum proprium fuisse definitionis rationis compositae Rob. Simson. recte monet. Caeterum Clavius observat, probe distinguendum esse inter rationem duplicam et duplicatam, triplam et triplicatam etc. Et Euclides quoque semper dicit *λόγος διπλασίων*, non, ut de recta aut angulo *διπλάσιος* aut *δίπλος*. Quodsi igitur fuerint magnitudines A, B, C, D, E etc. continue proportionales i. e. ita, ut $A:B=B:C=C:D=D:E$ etc. ratio A:C duplicata dicitur rationis A:B, quoniam inter A et C duae rationes ponuntur, quae aequales sunt rationi A ad B: eodem modo ratio A:D triplicata dicitur rationis A:B etc. Contra, eodem casu, ratio A:B dicitur subduplicata rationis A:C; eodemque modo ratio A:B subtriplicata dicetur rationis A:D, subquadruplicata rationis A:E etc. Pariter, si fuerit $A:B=B:C$, sique $M:N=A:C$, etiam M:N dicetur aequalis rationi, quae duplicata est rationis A:B, vel brevitatis causa ratio M:N dicetur duplicata rationis A:B, idemque valebit in ratione triplicata, quadruplicata etc. Eodem modo, si sit $A:B=B:C$ et $P:Q=A:B$, dicetur P:Q ratio, quae eadem est subduplicatae rationis A:C, vel brevius P:Q dicetur subduplicata rationis

12. Homologae magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna (permutata) ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

$A:C$, atque ita in reliquis. Ratio duplicata, triplicata etc. species tantum sunt rationis compositae, in quibus nempe singulae rationes, ex quibus aliae componuntur, inter se aequales sunt. Unde ea omnia, quae ex definitione rationis compositae consequuntur (vide infra in Exc. ad libr. VI.) et applicari possunt ad rationem duplicatam, triplicatam etc. etiam de hac valent. Nominatim, ut hoc non demonstrationis causa, quae in locis citatis infra habetur, sed in antecessum, ut aiunt, dicamus, rationum inter se earundem duplicatae (triplicatae etc.) sunt pariter inter se eadem (Excurs. in libr. VI. §. 9. et infra Cor. ad V. 22.) et vice versa, rationum inter se earundem subduplicatae, subtriplicatae sunt inter se eadem (vid in Exc. ad Libr. V. Cor. ad Prop. m.). Et si, quando id fieri potest, numeris exprimantur rationes duplicatae, triplicatae etc. erit (Exc. ad Libr. VI. §. 7.) exponens rationis duplicatae (triplicatae) numerus quadratus (cubus) multiplicatione denominatoris rationis simplicis per se ipsum factus, vel ratio duplicata (triplicata) eadem est rationi quadratorum (cuborum) eorum numerorum, qui rationem simplicem exhibent. Porro, si $A:C$ est ratio duplicata (triplicata) rationis $A:B$, inverse erit $C:A$ ratio duplicata (triplicata) rationis $B:A$ (Exc. ad Libr. VI. §. 17.) etc. Caeterum apud ipsum Euclidem nulla rationis duplicatae etc. mentio fit ante VI. 19.

DEFIN. XIII.

Quae hic alterna ratio dicitur, melius forsan alterna *proportio* diceretur. Manifesto enim non de duabus saltim quantitibus, sed de quatuor sermo est. Caeterum patet, ut quan-

ιδ'. *Ανάπαλιν λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.*

ιε'. *Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἐνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.*

ις'. *Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.*

ις'. *Ἀναστοφὴ λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.*

ιη'. *Διῶσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανόμενων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. "Ἡ ἄλλως. *Λήψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.*

ιθ'. *Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἐπόμενον πρὸς ἄλλό τι ¹⁾.*

κ'. *Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος,*

1) Peyrardus refert, hanc definitionem omitti a Codd. a. c. quod, quum perturbata ratio postea tamen occurrat, mera librarii oscitantia, cuius oculus a *τεταγμένη* in *τεταραγμένη* aberrabat, factum fuisse videtur.

titates ita alterne comparare possint, omnes quatuor eiusdem generis esse debere.

DEFIN. XVI. et XVII.

Manifestum est, summi in his definitionibus, consequentem

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio autem rationis est sumptio excessus, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat consequentem.

18. Ex (aequo) aequalitate ratio est, quando, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero aequalibus, et in eadem ratione binis sumptis, est, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero aequaliorem esse antecedente. Quodsi contra consequens maior fuerit antecedente, similis erit argumentatio, si sumatur excessus, quo consequens superat antecedentem.

DEFIN. XVIII—XX.

Monente Rob. Simson. Def. 19. et 20. speciem tantum continent eius proportionis, quae Def. 18. explicatur. Unde forte conicere liceat, in Def. 18. quoque pro λόγος legendum esse ἀναλογία. Erit igitur ex Def. 19. τεταγμένη sive διόσου

γίνεται, ὥς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον· ὥς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εὰν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάνις πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ AB , $ΓΔ$ ὅποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E , Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάνις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν ἐστι

τεταγμένη ἀναλογία, sive simpliciter διῶσον, quando fuerit (prorsus ut in Def. 18.) prima ad secundam in primis quantitatibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem in primis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam, et ita deinceps, et concluditur, ut in Def. 18. dictum est. Vide V. 22. Ex Def. 20, autem διῶσον τεταραγμένη, vel simpliciter τεταραγμένη ἀναλογία est, quando in primis magnitudinibus fuerit ut prima ad secundam, ita in secundis penultima ad ultimam; ut autem in primis secunda ad tertiam, ita in secundis antepenultima ad penultimam; et ut in primis tertia ad quartam, ita in secundis quae antepenultimam praecedit ad antepenultimam, et ita deinceps, et concluditur, ut in Def. 18. Vide V. 23. Ita fere Rob. Simson. rem explicat.

AXIOMATA.

Sequentia praemittit Rob. Simson. et ex eo Playfair.

1. Eiusdem sive aequalium aequemultiples inter se aequales sunt.
2. Quarum eadem aequae multiplex est, vel quarum aequales sunt aequae multiplices, et ipsae inter se sunt aequales.

qualibus, fit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quaequam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. (Fig. 309.)

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines $AB, \Gamma\Delta$ quotcunque magnitudinum E, Z aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, dico quam multiplex est

3. Multiplex maioris maior est aequemultiplici minoris.

4. Magnitudo, cuius multiplex maior est aequemultiplici alterius, maior est altera illa magnitudine.

Quae sane ita perspicua sunt, ut axiomatum loco haberi possint. Demonstravit ea tamen PHeiderer. in Promptuario Mathem. Lipsiensi Fascic. 7. 1798. p. 263. sqq. §§. 14—19. et in dissertatione de Dimensione circuli P. II. Tub. 1790. p. 5. not. 4. Cf. Hauber. de rationibus inter se diversis Demonstr. Tub. 1793. §. 2. Aliud autem axioma vel postulatum, quod Campanus, Clavius alique complures pariter sumere se posse putarunt, quodque ita habet:

„Quam rationem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaevis magnitudo proposita ad aliquam aliam; et eandem habebit quaedam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam“

merito accuratiores Geometrae respuunt. Vid. Exc. ad hunc librum.

PROPOSITIO I.

Symbolice haec propositio ita efferri potest. Si sit $A=$

τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E , καὶ τὸ $ΓΔ$ τοῦ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ $ΓΔ$ ἴσα τῷ Z . Ληροῦσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH , HB , τὸ δὲ $ΓΔ$ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ $ΓΘ$, $ΘΔ$ ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλήθος τῶν AH , HB τῷ πλήθει τῶν $ΓΘ$, $ΘΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E , τὸ δὲ $ΓΘ$ τῷ Z ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH , $ΓΘ$ τοῖς E , Z . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E , καὶ τὸ $ΘΔ$ τῷ Z ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB , $ΘΔ$ τοῖς E , Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E , τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB , $ΓΔ$ ἴσα τοῖς E , Z ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E , τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB , $ΓΔ$ τῶν E , Z . Ἐὰν ἄρα ᾖ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

r.L; B=r.M; C=r.N etc. r denotante numerum integrum quemcunque, erit et $A+B+C$ etc. = $r(L+M+N$ etc.). Caeterum propositioni huic vulgaris iunittur praxis multiplicandum compositum per multiplicatorem simplicem multiplicandi. Nimirum, ut v. g. numerum 7364 per 8 multiplicemus, seu ut octuplum efficiamus numeri 7364: octies sumimus primum 4 unitates, tum 6 denarios, dein 3 centenarios, denique 7

AB ipsius E , tam multiplices esse et AB , ΓA ipsarum E , Z .

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius E ac ΓA ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in ΓA aequales ipsi Z . Dividatur AB quidem in magnitudines AH , HB aequales ipsi E , ΓA vero in partes $\Gamma\Theta$, ΘA aequales ipsi Z ; erit igitur multitudo ipsarum AH , HB aequalis multitudini ipsarum $\Gamma\Theta$, ΘA . Et quoniam aequalis est AH quidem ipsi E , $\Gamma\Theta$ vero ipsi Z ; erunt et AH , $\Gamma\Theta$ aequales ipsis E , Z (1. Ax. 2.); ex eadem ratione et HB aequalis est ipsi E , et ΘA ipsi Z ; aequales igitur et HB , ΘA ipsis E , Z ; quot igitur sunt in AB aequales ipsi E , tot sunt et in AB , ΓA aequales ipsis E , Z ; quam multiplex igitur est AB ipsius E , tam multiplices erunt et AB , ΓA ipsarum E , Z . Si igitur quocunque etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 310.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sit autem et quinta secundae aequae multiplex ac sexta quartae; et simul sumptae prima et quinta secundae aequae erunt multiplices ac tertia et sexta quartae.

millenarios, horumque octuplorum conficimus summam. Cf. Pfeiderer. Expos. et Dilucid. Libri V. Elem. p. 2.

PROPOSITIO II.

Symbolice haec propositio generalius ita effertur. Si sit $A=p.L$, $B=g.L$, $C=r.L$ etc. et simul $E=p.M$, $F=g.M$, $G=r.M$ etc. p , g , r denotantibus numeros integros quoscun-

Πρώτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔστω
πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ Z , ἔστω
δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλα-
πλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $E\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . λέγω ὅτι
καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου
τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον
τὸ $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ
 Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθῃ
ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE ἴσα τῷ Z . Διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ , το-
σαῦτα καὶ ἐν τῷ $E\Theta$ ἴσα τῷ Z . ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν
ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ $\Delta\Theta$
ἴσα τῷ Z . ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ , το-
σαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ $\Delta\Theta$ τοῦ Z . καὶ συντεθὲν
ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ
ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ
 $\Delta\Theta$ τετάρτου τοῦ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ
τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ
πρώτου καὶ τρίτου· καὶ διῷσου τῶν ληφθέντων ἐκά-

que: erunt tam $A+B+C$ etc. $=(p+g+r$ etc.). L, quam
 $E+F+G$ etc. $=(p+g+r$ etc.). M. Generaliorem hanc enun-
ciationem corollarii loco subiungit Rob. Simson. propositionem
ipsam statim ita exprimit Pfeleiderer. l. c. p. 3. Huic propo-
sitioni innititur praxis numerum per multiplicatorem compo-
situm multiplicandi. Nempe ut ex gr. numerum 5728 per
634 multiplicemus, primum quater sumimus numerum propo-
situm 5728, tum tricies, dein sexcenties, horumque produ-

Prima enim AB secundae Γ aequae sit multiplex ac tertia AE quartae Z , sit autem et quinta BH secundae Γ aequae multiplex ac sexta $E\Theta$ quartae Z ; dico et simul sumptas primam et quintam AH secundae Γ aequae fore multiplices ac tertiam et sextam $A\Theta$ ipsius Z .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi Γ , tot et in AE erunt aequales ipsi Z . Ex eadem ratione et quot sunt in BH aequales ipsi Γ , tot et in $E\Theta$ erunt aequales ipsi Z ; quot igitur sunt in tota AH aequales ipsi Γ , tot et in tota $A\Theta$ aequales ipsi Z ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ , tam multiplex erit et $A\Theta$ ipsius Z ; et simul sumptae igitur prima et quinta AH secundae Γ aequae erunt multiplices ac tertia et sexta $A\Theta$ quartae Z . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 311.)

Si prima secundae aequae sit multiplex ac tertia quartae, sumantur autem aequae multiplices primae et tertiae; et ex aequo sumptarum utraque utriusque ae-

ctorum particularium colligimus summam. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 3. 4.

PROPOSITIO III.

Symbolice ita: si sit $A \equiv p.L$, $I \equiv n.A$, et $E \equiv p.M$, $K \equiv n.E$, erit tam $I \equiv (n.p).L$, quam $E \equiv (n.p)M$, n et p designantibus numeros integros quoscunque, et $n.p$ designante productum, quod fit ex numero p toties sumto, quot

τερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ A δευτέρου τοῦ B ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ A , καὶ εἰλήφθω τῶν A, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ $EZ, H\Theta$ λέγω ὅτι ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ B καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ A .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EZ τοῦ A καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ Γ ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ EZ ἴσα τῷ A , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ $H\Theta$ ἴσα τῷ Γ . Διηγήσθω τὸ μὲν EZ εἰς τὰ τῷ A μεγέθη ἴσα τὰ EK, KZ , τὸ δὲ $H\Theta$ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ $HA, A\Theta$ ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν EK, KZ τῷ πλῆθει τῶν $HA, A\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ A τοῦ B καὶ τὸ Γ τοῦ A ἴσον δὲ τὸ μὲν EK τῷ A , τὸ δὲ HA τῷ Γ ἰσάκεις ἄρα ἔστι πολλαπλάσιον τὸ EK τοῦ B καὶ τὸ HA τοῦ A . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ KZ τοῦ B καὶ τὸ $A\Theta$ τοῦ A . Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ EK δευτέρου τοῦ B ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ HA τετάρτου τοῦ A ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ KZ δευτέρου τοῦ B ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ $A\Theta$ τετάρτου τοῦ A καὶ συντεθέν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ EZ δευτέρου

alter n continet unitates. Huic propositioni, quod sit nA , seu $n(pL) = (n.p).L$, innuitur praxis multiplicandi nuntium integrum per multiplicatorem, qui solis denariis, vel centenariis etc. constat. Nempe, ut v. g. numerum 5728 per 30 vel pex 600 multiplicemus, triplo vel sextuplo numeri 5728 unum vel duo zero ad dextram adiungimus, hoc est, triplum numeri 5728 decuplicamus, sextuplum centuplicamus, sicque huius numeri efficiamus trigecuplum, sexcentuplum. Pariter

que erit multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aequae sit multiplex ac tertia Γ quartae Δ , et sumantur ipsarum A , Γ aequae multiplices EZ , $H\Theta$; dico aequae esse multiplicem EZ ipsius B ac $H\Theta$ ipsius Δ .

Quoniam enim aequae est multiplex EZ ipsius A ac $H\Theta$ ipsius Γ ; quot magnitudines sunt in EZ aequales ipsi A , tot et in $H\Theta$ erunt aequales ipsi Γ . Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A aequales EK , KZ , $H\Theta$ vero in magnitudines ipsi Γ aequales HA , $A\Theta$; erit aequalis multitudo ipsarum EK , KZ multitudini ipsarum HA , $A\Theta$. Et quoniam A aequae est multiplex ipsius B , ac Γ ipsius Δ ; aequalis autem EK quidem ipsi A , HA vero ipsi Γ ; aequae multiplex est EK ipsius B ac HA ipsius Δ . Ex eadem ratione aequae multiplex est KZ ipsius B ac $A\Theta$ ipsius Δ . Quoniam igitur prima EK secundae B aequae est multiplex ac tertia HA quartae Δ , est autem et quinta KZ secundae B aequae multiplex ac sexta $A\Theta$ quartae Δ ; et composita e prima et quinta nempe EZ secundae B aequae multiplex erit ac composita e

duodecénplum e. g. numeri alicuius efficitur, sumto tripli eius quadruplo, vel quadrupli triplo. Cf. Pflöiderer. l. c. p. 4. Generalius idem theorema ita exprimi et simili ratione demonstrari poterit: si sit $A = mB$, $B = nC$, $C = pD$ etc. pariterque $\alpha = m\beta$, $\beta = n\gamma$, $\gamma = p\delta$ etc. erit tam $A = mnp \dots D$ quam $\alpha = mnp \dots \delta$.

Obs. Ex hac propositione sequitur etiam alia illi similis, quam Nordmark. (Lacunae in Doctr. proportionum Euclidea

τοῦ B ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τοῦ $H\Theta$ τετάρτου τοῦ Δ . Εἰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Εἰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρῶτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γάρ το A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν A, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ E, Z , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ .

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν E, Z ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ , τῶν δὲ H, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ¹⁾ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν E τοῦ A , τὸ δὲ Z τοῦ Γ , καὶ εἰληπται τῶν E, Z ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ K τοῦ A καὶ τὸ Λ τοῦ Γ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσά-

1) Verba ἄλλα ἃ ἔτυχεν non habent edd. Basil. et Oxon. Ea autem necessaria esse iure censuerat Rob. Simson. in nota ad hunc locum. Hanc viri doctissimi coniecturam confirmavit Peyrardus, qui e Cod. a. ea textui inseruit.

animadversæ Expletio in Nov. Act. Reg. Societ. Upsal. Vol. VI. Upsalæ 1799.) his verbis exhibet et demonstrat: si sint (Fig. 312.) quotcunque magnitudines AL, B, C , et. aliae ipsæ

tertia et sexta nempe $H\Theta$ quartae Δ (V. 2.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 313.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae ad aequae multiplices secundae et quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , et sumantur ipsarum quidem A , Γ aequae multiplices E , Z , ipsarum vero B , Δ aliae utcunque aequae multiplices H , Θ ; dico esse ut E ad H , ita Z ad Θ .

Sumantur enim ipsarum quidem E , Z aequae multiplices K , Λ , ipsarum vero H , Θ aliae utcunque aequae multiplices M , N .

Et quoniam aequae multiplex est E ipsius A , atque Z ipsius Γ , et sumptae sunt ipsarum E , Z aequae multiplices K , Λ ; aequae igitur multiplex est K ipsius A ac Λ ipsius Γ (V. 3.). Ex eadem ratione aequae

numero aequales D , E , F , quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata earum multiplicitas, h. e. sit AL ipsius B aequae multiplex, atque E ipsius F ; similiter sit B ipsius C totuplex, quotuplex est D ipsius E : erunt ex aequo etiam aequemultiplices, seu quantuplex est AL ipsius C , tantuplex erit D ipsius F . Dem. Ponantur primo tres esse utrimque magnitudines. Sumatur GP ipsius C aequemultiplex,

κίς ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ M τοῦ B καὶ τὸ N τοῦ A .
 Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς
 τὸ Δ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν A , Γ ἰσάκίς πολλαπλά-
 σια τὰ K , Λ , τῶν δὲ B , Δ ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάκίς
 πολλαπλάσια τὰ M , N . ἐκ ἄρα ὑπερέχει τὸ K τοῦ
 M , ὑπερέχει τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ
 ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν K , Λ τῶν E ,
 Z ἰσάκίς πολλαπλάσια, τὰ δὲ M , N τῶν H , Θ
 ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάκίς πολλαπλάσιον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ
 E πρὸς τὸ H , οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ . Ἐὰν ἄρα
 πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ K τοῦ M ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ
 ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ M τοῦ
 K , ὑπερέχει καὶ τὸ N τοῦ A καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ
 εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶ καὶ ὡς τὸ
 H πρὸς τὸ E , οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Z . Ἐκ δὲ τοῦ-
 του φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ,
 καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ᾗ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκίς ᾗ πολλαπλάσιον,
 ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοι-
 ποῦ ἰσάκίς ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστι τὸ
 ὅλον τοῦ ὅλου.

ac est AL ipsius B, vel E ipsius F, sitque GP divisa in par-
 tes GM, MN, NP singulas ipsi C aequales; et AL in partes
 AH, HK, KL aequales ipsi B: eritque multitudo partium
 GM, MN, NP aequalis multitudini partium AH, HK, KL.

multiplex est M ipsius B ac N ipsius A . Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad A , et sumptae sunt ipsarum quidem A , Γ aequae multiplices K , A ; ipsarum vero B , A aliae utcumque aequae multiplices M , N ; si K superat ipsam M , superat et A ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor erit (V. Def. 5.). Et sunt K , A ipsarum E , Z aequae multiplices, M , N vero ipsarum H , Θ aliae utcumque multiplices; est igitur ut E ad H , ita Z ad Θ (V. Def. 5.) Si igitur prima etc.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M , superare et A ipsam N ; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; manifestum est, et si M superat K , superare et N ipsam A ; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; et propterea ut H est ad E , ita erit Θ ad Z . Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, et inverse proportionales fore.

PROPOSITIO V. (Fig. 314.)

Si magnitudo magnitudinis aequae sit multiplex ac ablata ablatae, et reliqua reliquae aequae multiplex erit ac multiplex est tota totius.

Quum igitur sit $AH=HK=KL=B$, et $GM=MN=NP=C$; erunt AH , HK , KL , B ipsarum GM , MN , NP , C aequemultiplices, adeoque tota AL erit totius GP aequemultiplex atque AH est ipsius GM (V. 1.), vel B ipsius C , vel D

Μέγεθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ $ΓΑ$ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀγαιρεθὲν τὸ AE ἀγαιρεθέντος τοῦ $ΓΖ$ · λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ EB λοιπῷ τοῦ $ΖΔ$ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλον τοῦ $ΓΑ$.

Ὅσαπλάσιον γὰρ ἐστὶ τὸ AE τοῦ $ΓΖ$, τοσαυταπλάσιον γεγονένω καὶ τὸ EB τοῦ $ΗΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$ (καὶ τὸ EB τοῦ $ΗΓ$ · ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$)¹⁾ καὶ τὸ AB τοῦ $ΗΖ$ · κείται δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ AB τοῦ $ΓΑ$ · ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB ἐκαστέρου τῶν $ΗΖ$, $ΓΑ$ · ἴσον ἄρα τὸ $ΗΖ$ τῷ $ΓΑ$ · κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $ΓΖ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΗΓ$ λοιπῷ τῷ $ΑΖ$ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ EB τοῦ $ΗΓ$, ἴσον δὲ τῷ $ΗΓ$ τὸ $ΑΖ$ · ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ EB τοῦ $ΖΔ$. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ $ΓΖ$ καὶ τὸ AB τοῦ $ΓΑ$ · ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ EB τοῦ $ΖΔ$ καὶ τὸ AB τοῦ $ΓΑ$.

1) Verba, quae uncis inclusimus, desunt in edd. Basil. et Oxon. Peyrardus ea e Cod. a. addidit. Quamvis autem abesse possint, aliquid tamen ad facilius intelligendam demonstrationem facere videntur.

ipsius E. Habentur igitur tres magnitudines AL, GP, C, atque aliae ipsis numero aequales D, E, F, quarum binae sumptae sunt in eadem multiplicitate, idque ordinate, ita nempe, ut AL et D sint ipsarum GP et E aequemultiplices, similiterque GP et E ipsarum C et F: ergo (V. 3.) erit AL ipsius C aequemultiplex ac D ipsius F. Si quatuor pluresve sint utrimque magnitudines, patet demonstrationis continuatio per iam ostensa .Q.E.D. Symbolice ita: si sit $A=mb$, $B=rC$, pariterque $D=re$, $E=mF$, erit tam $A=mr.C$, quam $D=mr.F$.

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓA aequae multiplex sit ac ablata AE ablatae ΓZ ; dico et reliquam EB reliquae $Z A$ aequae fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓA .

Quam multiplex enim est AE ipsius ΓZ , tam multiplex fiat et EB ipsius ΓH .

Et quoniam aequae multiplex est AE ipsius ΓZ ac (EB ipsius $H\Gamma$; aequae igitur multiplex est AE ipsius ΓZ ac) AB ipsius HZ (V. 1.); ponitur autem aequae multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓA ; aequae igitur multiplex est AB utriusque ipsarum HZ , ΓA ; aequalis igitur HZ ipsi ΓA . Communis auferatur ΓZ ; reliqua igitur $H\Gamma$ reliquae AZ est aequalis (I. Ax. 3.). Et quoniam aequae multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $H\Gamma$, AZ autem aequalis ipsi $H\Gamma$; aequae igitur multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $Z A$. Aequae autem ponitur multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓA ; aequae igitur multiplex est EB ipsius

PROPOSITIO IV.

Symbolice haec propositio, eiusque demonstratio ita exprimi poterit. Si $A:B=C:D$, erit etiam $pA \cdot qB = pC \cdot qD$; p , q denotantibus numeros integros quoscumque, unitate haud exclusa. Nam ob $A:B=C:D$, erit, quoties $npA > < rqB$, etiam $npC > < rqD$ (V. Def. 5.), adeoque ex eadem definitione $pA:qB = pC:qD$. Pfeiderer. l. c. p. 19. De demonstratione huius propositionis ex vulgari proportionalium definitione vide Excursum ad hunc librum.

Corollarium huic propositioni adiectum, ut rite observat Rob. Simson., verum quidem est, at non huc pertinet, nec legitima est, quae ex Prop. V. 4. deducitur, eius demonstratio. Nempe ostensum quidem est, si sit $K > < M$, esse etiam $A > < N$, at non ex eo, quod proportionales sint

καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ZA ἰσάνεις ἔσται
πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου
τοῦ GA . Ἐὰν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάνεις ἢ πολλα-
πλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάνεις ἢ
πολλαπλάσια καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἐστὶν,
ἢ ἰσάνεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, GA δύο μεγεθῶν τῶν
 E, Z ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ
 AH, GO τῶν αὐτῶν τῶν E, Z ἰσάνεις ἔστω πολλα-
πλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB, OA τοῖς E, Z
ἦτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάνεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

E, H, Z, O , id enim erat conclusio propositionis, unde in-
eptum est illud ratiocinium: Quoniam ostensum est etc. Po-
terat autem legitime, non adhibita propositione V. 4. propo-
sizio in hoc corollario contenta deduci, ut Rob. Simson. osten-
dit. Nos autem hanc reliquasque a Rob. Simson. huic libro
insertas vel adiectas propositiones exhibebimus infra in Ex-
cursu ad hunc librum, ubi et hanc vide nota B designatam.
Aliam autem propositionem meliore iure corollarii nomine
subiungit Rob. Simson., quod distinctionis causa

Cor. a.

appellabimus, quodque ita habet: si prima ad secundam ean-
dem habet rationem quam tertia ad quartam, et aequae multi-
plices primae et tertiae iuxta quamvis multiplicationem ad se-
cundam et quartam eandem rationem habebunt: et similiter
prima et tertia ad aequae multiples quasvis secundae et quarte
eandem habebunt rationem. Quod eodem prorsus modo ac
ipsa propositio demonstratur, ut facile etiam patet, posita in
symbolica propositionis expressione, quam supra dedimus, vel
 $p=1$, vel $q=1$. Hoc corollarium ex V. 22. demonstrat Cla-

ZA ac AB ipsius ΓA ; et reliqua igitur EB reliquae ZA aequae multiplex erit ac multiplex est tota AB totius ΓA . Si igitur magnitudo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 316.)

Si duae magnitudines duarum magnitudinum aequae multiplices sint, et ablatae quaedam earundem sint aequae multiplices; et reliquae iisdem vel aequales sunt, vel earum aequae multiplices.

Duae enim magnitudines AB , ΓA duarum magnitudinum E , Z aequae sint multiplices, et ablatae AH , $\Gamma\Theta$ earundem E , Z aequae sint multiplices; dico et reliquas HB , ΘA ipsis E , Z vel aequales esse, vel aequae multiplices earum.

vius, at non satis accurate. Sumit enim propositionem C (in Excursu ad hunc librum afferendam), quam non ante demonstraverat.

PROPOSITIO V.

Iure observat Rob. Simson., constructionem, quae demonstrationi in textu graeco praemittitur, depravatam videri. Nempe, ut iam Peletarius monuerat, id quod sumitur, ut EB fiat aequemultiplex ipsius ΓH , ac est AE ipsius ΓZ , eo credit, ut magnitudo EB in partes aequales, quotcumque libuerit, dividatur, quod nec de rectis quidem lineis, nedum de aliis magnitudinibus ante VI. 9. docuerat Euclides. Nec ad excusationem rei sufficit, quod Peletarius observat divisionem hanc rectae EB demonstrationis causa tantum sumi, non ad usum aliquem praesentem adhiberi, quippe etiam demonstrationis causa talia non sumere solet Euclides. Accedit, quod perfacilis est alia demonstratio, quam iam Campani ex arabico facta transductio, caeterum hac propositione valde vitiosa, innuit, et quam, praeeunte Peletario et Clavio, qui tamen etiam vitiosam illam vulgarem demonstrationem habent,

Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ HB τῷ E ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘA τῷ Z ἴσον ἐστίν. Κεῖσθω γὰρ τῷ Z ἴσον τὸ ΓK .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AH τοῦ E καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τοῦ Z , ἴσον δὲ τὸ μὲν HB τῷ E , τὸ δὲ $K\Gamma$ τῷ Z : ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E καὶ τὸ $K\Theta$ τοῦ Z . Ἰσάνεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E , καὶ τὸ ΓA τοῦ Z : ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $K\Theta$ τοῦ Z , καὶ τὸ ΓA τοῦ Z . Ἐπεὶ οὖν ἐκάτερον τῆς $K\Theta$, ΓA τοῦ Z ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $K\Theta$ τῷ ΓA . Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ $\Gamma\Theta$: λοιπὸν ἄρα τὸ $K\Gamma$ λοιπῷ τῷ ΘA ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Z τὸ $K\Gamma$ ἐστίν ἴσον· καὶ τὸ ΘA ἄρα τῷ Z ἴσον ἐστίν. Ὡστε εἰ τὸ HB τῷ E ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘA ἴσον ἔσται τῷ Z .

Rob. Simson., praemisso propositionis enunciato his verbis exhibet: Quam multiplex est (Fig. 315.) AE ipsius ΓZ , tam multiplex fiat AH ipsius ZA . (Hoc vero fieri potest, magnitudine ZA sibi ipsi aliquoties addita). Erit igitur (V. 1.) AE aequemultiplex ipsius ΓZ , ita EH ipsius ΓA ; ponitur autem AB aequemultiplex ipsius ΓZ , ac AB ipsius ΓA : ac propterea EH ipsi AB aequalis est (V. Ax. 1.). Communis auferatur AE , reliqua igitur AH aequalis est reliquae EB . Itaque, quoniam AE aequemultiplex est ipsius ΓZ , atque AH ipsius ZA , estque AH aequalis EB ; erit AB aequemultiplex ipsius ΓZ , ac EB ipsius ZA . Aequemultiplex autem ponitur AE ipsius ΓZ , ac AB ipsius ΓA ; ergo EB ipsius ZA aequemultiplex est ac AB ipsius ΓA . Quare, si etc. Symbolice propositio ita exprimetur: si sint mA , mB quaecunque aequemultiplica magnitudinum A , B , quarum $A > B$, erit etiam $mA - mB$ idem multipulum magnitudinis $A - B$, nempe erit $mA - mB = m(A - B)$.

Sit enim primum (Fig. 316. a.) HB ipsi E aequalis; dico et θA ipsi Z aequalem esse. Ponatur enim ipsi Z aequalis ΓK .

Et quoniam aequae multiplex est AH ipsius E ac $\Gamma\theta$ ipsius Z , aequalis autem HB ipsi E , $K\Gamma$ vero ipsi Z ; aequae igitur multiplex est AB ipsius E ac $K\theta$ ipsius Z . Aequae autem multiplex ponitur AB ipsius E ac ΓA ipsius Z ; aequae igitur multiplex est $K\theta$ ipsius Z ac ΓA ipsius Z . Et quoniam utraque ipsarum $K\theta$, ΓA ipsius Z aequae multiplex est; aequalis igitur est $K\theta$ ipsi ΓA . Communis auferatur $\Gamma\theta$; reliqua igitur $K\Gamma$ reliquae θA aequalis est. Sed $K\Gamma$ ipsi Z est aequalis; et θA igitur ipsi Z aequalis est. Quare si HB ipsi E aequalis est, et θA aequalis erit ipsi Z .

PROPOSITIO VI.

Rob. Simson. observat, casus posterioris demonstrationem omissam esse in textu graeco, quum tamen in versione Campani ex arab. facta utriusque casus demonstratio habeatur. Id autem eo factum arbitratur, quod in mutilata Theonis editione libri quinti huius casus nulla occurrat applicatio. Eundem tamen casum adhiberi perfectiori V. Prop. 18. demonstrationi, cui soli etiam prior casus et V. 5. inserviat. Unde ipse et huius posterioris casus demonstrationem addidit. Ego autem putaverim, omissam esse in textu graeco, qui caeterum figuram posteriori casui inservientem in omnibus editionibus habet, casus posterioris demonstrationem eo tantum, quod sit demonstrationi casus prioris simillima. Si enim casu posteriore, quam multiplex est HB ipsius E , tam multiplex sumatur $K\Gamma$ ipsius Z , reliqua prorsus eodem modo procedunt ac in casu priore, adhibita V. 2. Caeterum utriusque casus communem demonstrationem hanc tradit Clavius. Quum ex hyp. magnitudines AB , ΓA ipsarum E , Z sint sequemulti-

Ὅμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ τὸ HB τοῦ E , τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘA τοῦ Z .
 Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ζ.

Τὸ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ A, B , ἄλλο δέ τι ὁ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ . λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A, B .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A, B ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Δ, E , τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ A καὶ τὸ E τοῦ B , ἴσον δὲ τὸ A τῷ B ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ E . Ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε τὸ Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Z , ὑπερέχει καὶ τὸ E τοῦ Z · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Δ, E τῶν A, B ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Z τοῦ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Γ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

plices, erunt in AB tot magnitudines aequales ipsi E , quot in TA sunt aequales ipsi Z . Unde, si ex numero aequali magnitudinum, quae in AB, TA continentur, dematur numerus aequalis magnitudinem, quae in $AH, T\Theta$ sunt; remanebit in HB numerus magnitudinum ipsi E aequalium aequalis numero magnitudinum ipsi Z aequalium, quae in $A\Theta$ conti-

Similiter (Fig. 316. b.) ostendemus et si multiplex est HB ipsius E , aequae multiplicem fore et magnitudinem θA ipsius Z . Si igitur duae etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 317.)

Aequales magnitudines ad eadem eandem habent rationem, et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A , B , alia autem quaelibet magnitudo Γ ; dico utramque ipsarum A , B ad Γ habere eandem rationem; et Γ ad utramque ipsarum A , B .

Sumantur enim ipsarum A , B aequae multiplices A , E , ipsius vero Γ alia utcunque multiplex Z .

Quoniam igitur aequae multiplex est A ipsius A ac E ipsius B , aequalis autem A ipsi B ; aequalis igitur et A ipsi E . Alia vero Z ipsius Γ utcunque multiplex est; si igitur superat A ipsam Z , superat et E ipsam Z ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt quidem A , E ipsarum A , B aequae multiplices, ipsa vero Z ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut A ad Γ , ita B ad Γ (V. Def. 5.).

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum A , B eandem habere rationem.

nentur i. e. si $HB=E$, erit etiam $\theta\theta=Z$: sin autem HB sit multiplex ipsius E , erit etiam $\theta\theta$ aequemultiplex ipsius Z . Symbolice propositio haec ita exhibetur: si sit $A=pL$, $B=qL$; et $E=pM$, $F=qM$, p , q denotantibus numeros integro quoscumque, quorum prior p maior altero q : erit tam $A-B=(p-q)L$, quam $E-F=(p-q)M$, speciatim tam $A-B=L$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δεί-
 ξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ E . ἄλλο δέ τι τὸ Z εἰ
 ἄρα ὑπερέχει τὸ Z τοῦ Δ , ὑπερέχει καὶ τοῦ E . καὶ
 εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ
 μὲν Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ , E τῶν A ,
 B ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκως πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς
 τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ B . Τὰ ἴσα
 ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς ¹⁾).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ
 μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἔλαττον καὶ τὸ αὐτὸ
 πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ
 μείζον.

Ἔστω ἀνισα μεγέθη τὰ AB , Γ , καὶ ἔστω μείζον
 τὸ AB , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχεν τὸ Δ · λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς
 τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ , καὶ
 τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ
 AB .

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ Γ , κείσθω τῷ
 Γ ἴσον τὸ BE , τὸ δὴ ἔλασσον τῶν AE , EB πολ-
 λαπλασιαζόμενον ἐστὶ ποτὲ τοῦ Δ μείζον. Ἔστω
 πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB , καὶ πεπολλαπλα-
 σιάσθω τὸ AB , καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ZH
 μείζον ὃν τοῦ Δ , καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ ZH τοῦ

1) Codex a. hic addit: Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν,
 ὅτι ἂν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ἢ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἐσται.
 Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. At hoc Corollarium, quod idem dicit,
 quod Rob. Simsonis Prop. B. V. minime ex praecedente pro-
 positioni consequitur: indicare tamen hanc lectionem volui-
 mus.

quam $E-F=M$, si fuerit $p-q=1$, seu $p=q+1$. Cf. Pfei-
 derer. l. c. p. 4. 5. Post hanc propositionem Rob. Simson.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, aequalem esse Δ ipsi E ; alia vero quaedam est Z : si igitur superat Z ipsam Δ , superat Z et ipsam E ; et si aequalis, aequalis; et si minor minor. Et est Z quidem ipsius Γ multiplex; ipsae autem Δ , E ipsarum A , B aliae utcunque aequae multiplices; est igitur ut Γ ad A , ita Γ ad B (V. Def. 5.). Aequales igitur etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 318. a. b.)

Inaequalium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem maiorem rationem habet quam ad maiorem.

Sint inaequales magnitudines AB , Γ , et sit maior AB , alia vero utcunque Δ ; dico AB ad Δ maiorem rationem habere quam Γ ad Δ , et Δ ad Γ maiorem rationem habere quam ad AB .

Quoniam enim maior est AB ipsa Γ , ponatur ipsi Γ aequalis BE (I. 3.), minor ipsarum AE , EB multiplicata erit aliquando ipsa Δ maior (V. Def. 4.). Sit primum AE minor ipsa EB , et multiplicetur AE , et sit ipsius multiplex ZH maior ipsa Δ , et quam multiplex est ZH ipsius AE , tam multiplex fiat et

addit prepositiones A , B , C , D , quas vide in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO VII.

Cor. Eodem modo ostenditur, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

AE , τοσαυταπλάσιον γεγόνετω καὶ τὸ μὲν $H\Theta$ τοῦ EB , τὸ δὲ K τοῦ Γ καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ A , τριπλάσιον δὲ τὸ M , καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ K . Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ N τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ , πρώτως δὲ μείζον τοῦ K .

Ἐπεὶ οὖν τὸ K τοῦ N πρώτως ἐστὶν ἑλαττον, τὸ K ἄρα τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἑλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ EB , ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ $Z\Theta$ τοῦ AB . Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ K τοῦ Γ . Ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $Z\Theta$ τοῦ AB , καὶ τὸ K τοῦ Γ τὸ $Z\Theta$, K ἄρα τῶν AB , Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ EB καὶ τὸ K τοῦ Γ , ἴσον δὲ τὸ EB τῷ Γ ἴσον ἄρα καὶ τὸ K τῷ $H\Theta$. Τὸ δὲ K τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἑλαττον οὐδ' ἄρα τὸ $H\Theta$ τοῦ M ἑλαττόν ἐστιν. Μείζον δὲ τὸ ZH τοῦ Δ ὅλον ἄρα τὸ $Z\Theta$ συναμφοτέρων τῶν Δ , M μείζον ἐστιν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ , M τῷ N ἐστὶν ἴσα· (ἐπειδὴπερ τὸ M τοῦ Δ τριπλάσιον ἐστὶ, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ , M τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ N τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ M , Δ τῷ N ἴσα ἐστὶν. Ἀλλὰ τὸ $Z\Theta$ τῶν Δ , M μείζον ἐστὶν¹⁾· τὸ $Z\Theta$ ἄρα τοῦ N

1) Quae uncis inclusimus e Cod. a. Peyrardus addidit. Poterant tamen egregie abesse, aut certe saltem usque ad vocem τετραπλάσιον illustrationis causa adici.

PROPOSITIO VIII.

Rob. Simson. in nota ad hanc propositionem primo ex-

$H\Theta$ ipsius EB , ipsa vero K ipsius Γ ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem Δ , tripla vero M , et deinceps una maior, quoad sumpta multiplex fiat ipsius Δ et primo maior ipsa K . Sumatur, et si N quadrupla ipsius Δ , et primo maior ipsa K .

Quoniam igitur K primo minor est quam N , non erit K ipsa M minor. Et quoniam aequae multiplex est ZH ipsius AE ac $H\Theta$ ipsius EB , aequae igitur multiplex est ZH ipsius AE ac $Z\Theta$ ipsius AB (V. 1.). Aequae autem multiplex est ZH ipsius AE ac K ipsius Γ ; aequae igitur multiplex est $Z\Theta$ ipsius AB ac K ipsius Γ ; ipsae $Z\Theta$, K igitur ipsarum AB , Γ aequae multiplices sunt. Rursus, quoniam aequae est multiplex $H\Theta$ ipsius EB ac K ipsius Γ , EB autem aequalis Γ ; aequalis igitur et K ipsi $H\Theta$. Sed K ipsa M non est minor; non igitur est $H\Theta$ minor quam M . Maior autem ZH ipsa Δ ; tota igitur $Z\Theta$ utrisque simul Δ , M maior est. Sed utraeque simul Δ , M ipsi N sunt aequales, (quandoquidem M ipsius Δ est tripla, utraeque autem simul Δ , M ipsius Δ sunt quadruplae, est vero et N ipsius Δ quadrupla, utraeque simul igitur M , Δ ipsi N aequales sunt. Sed $Z\Theta$ ipsis Δ , M maior est); $Z\Theta$ igitur ipsam N superat. K vero ipsam N non superat. Et sunt $Z\Theta$,

plicat, cur demonstratio in textu graeco obvia non eadem constructione pro utroque casu, quem habet, uti potuerit; iure deinde illud potissimum ineptum esse dicit, quod utroque casu magnitudo K demonstrationi inserta sit, quae nulli ali rei inserviat, nisi ut demonstratio prolixior fiat. Denique ad-

ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὰ μὲν $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ N τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἐτυχε πολλαπλάσιον· τὸ AB ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι τὸ μὲν N τοῦ K ὑπερέχει, τὸ δὲ N τοῦ $Z\Theta$ οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὸ μὲν N τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB .

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE τοῦ EB μείζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μείζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ $H\Theta$ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ EB , μείζον δὲ τοῦ Δ · καὶ ὁσαυτάσιόν ἐστι τὸ $H\Theta$ τοῦ EB , τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ZH τοῦ AE , τὸ δὲ K τοῦ Γ . Ὅμοιως δὴ δεῖξομεν ὅτι τὰ $Z\Theta$, K τῶν AB , Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰληφθῶ ὁμοίως τὸ N πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ , πρῶτως δὲ μείζον τοῦ ZH ὥστε πάλιν τὸ ZH τοῦ M μὴ ἔλασσον εἶναι, μείζον δὲ τὸ $H\Theta$ τοῦ Δ ὅλον ἄρα τὸ $Z\Theta$ τῶν Δ , M τοντέστι τοῦ N ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει.

dit, esse etiam tertium casum specialem, cuius mentio non facta sit in demonstratione, nempe si AE in primo, aut EB in secundo casu maior sit quam Δ , in quo sumendae sint quaecvis ipsius AE et EB aequemultiplices, v. c. duplae ipsarum. (Quin deest etiam alius adhuc casus generalis. Casus enim, quos graecus textus habet, sunt 1) si $AE < EB$ 2) si $AE > EB$. At potest etiam esse 3) $AE = EB$.) Ex his omnibus Simson. concludit, Theorem aut alium geometriae non

K ipsarum AB , Γ aequae multiplices, N vero ipsius A alia utcumque multiplex; AB igitur ad A maiorem rationem habet quam Γ ad A (V. Def. 7.).

Dico autem et A ad Γ maiorem rationem habere, quam A ad AB .

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, N superare K , ipsam vero $Z\Theta$ non superare. Et est N quidem ipsius A multiplex, et $Z\Theta$, K ipsarum AB , Γ aliae utcumque aequae multiplices; A igitur ad Γ maiorem rationem habet quam A ad AB (V. Def. 7.).

Sed sit AE maior ipsa EB ; minor EB multiplicata, erit aliquando ipsa A maior. Multiplicetur, et sit $H\Theta$ multiplex ipsius EB , maior vero ipsa A ; et quam multiplex est $H\Theta$ ipsius EB , tam multiplex fiat ZH ipsius AE et K ipsius Γ . Similiter ostendemus $Z\Theta$, K ipsarum AB , Γ aequae multiplices esse. Et sumatur similiter N multiplex ipsius A , primo autem maior ipsa ZH ; quare rursus ZH ipsa N non minor erit, maior autem $H\Theta$ ipsa A ; tota igitur $Z\Theta$ ipsas A , M , hoc est N superat, K vero ipsam N non superat, quandoquidem ZH quae maior est ipsa $H\Theta$, hoc est ipsa K , non superat N . Et

satis peritum propositionem hanc vitiasse. Quamvis autem haec Simsonis reprehensio satis iusta esse videatur, et facile esset, superfluum illam magnitudinem K e demonstratione eliminare, nolimus tamen e mera coniectura textum corrigere. Caeterum Rob. Simsonis demonstratio simplicior omnino est, et omnes casus simul complectitur. Ea symbolice expressa ita habet: si $A > B$, erit $A : C > B : C$, et $C : B > C : A$. Nempe, si magnitudinum $(A - B)$, B , ea: quae non maior est altera,

ἐπειδὴ περ καὶ τὸ ZH μείζον ὃν τοῦ $H\Theta$, τουτέστι τὸ K , τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως κατακολουθεῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τὼν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκείνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

sit $\overline{=}$ C, sumantur $2(A-B)$, et $2B$, vel generaliter $m(A-B)$, mB : sin autem magnitudinum $(A-B)$, B ea, quae non maior est altera, sit $< C$, sive ea sit $(A-B)$, sive B ; erit aliquando aliquod eius multipulum m maius quam C , nempe vel $m(A-B) > C$, vel $mB > C$. Et quum multipulum m eius, quae non maior est altera, ponamus $> C$, erit idem multipulum alterius tanto magis pariter $> C$, i. e. erit semper tam $m(A-B) > C$, quam $mB > C$. Sit deinde omnibus casibus nC illud multipulum magnitudinis C , quod primo maius est quam mB , nempe sit $nC > mB$, at $(n-1)C \overline{=}$ mB , vel $mB \overline{=}$ $(n-1)C$, erit, ob $m(A-B) > C$, $n(A-B) + mB > nC$ i. e. $mA > nC$. Quum itaque $mA > nC$, at $mB < nC$, erit ex V. Def. 7. $A:C > B:C$, et $C:B > C:A$.

similiter ut in iis, quae ante diximus, absolvemus demonstrationem. Ergo inaequalium etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 319.)

Quae ad eandem eandem habent rationem, aequales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illae aequales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad Γ eandem rationem, dico aequalem esse A ipsi B .

Si enim non, non utraque ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem (V. 8.), habet autem; aequalis igitur est A ipsi B .

Habeat autem rursus Γ ad utramque A, B eandem rationem; dico aequalem esse A ipsi B .

PROPOSITIO IX.

Magis explicite hanc propositionem Rob. Simson., et ad eius exemplum Playfair. ita fere demonstrat. 1) Si $A:C=B:C$, erit $A=B$. Si enim non fuerit $A=B$, erit alterutra earum maior altera v. c. $A>B$. At tum, ut in propositione praecedente, duo numeri m, n possunt inveniri, ita ut $mA > nC$, at $mB < nC$. Quum vero ponatur $A:C=B:C$, erit (V. Def. 5.), quoties $mA > nC$, etiam $mB > nC$. Erit itaque simul $mB > nC$, et $mB < nC$, quod fieri nequit. Nequit itaque esse $A>B$, et similiter nec $B>A$, itaque $A=B$. Pariter si $C:A=C:B$, vel simili ratione immediate demonstrabitur, ut Nr. 1. esse $A=B$, quod Rob. Simson. fecit, vel, ut Playfair. docuit, ope inversionis ex Prop. B (vid. Exc. ad hunc librum) concludetur $A:C=B:C$, unde res redit ad Nr. 1.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν A , B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B . Τὸ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἐστίν. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἐλαττόν ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ A πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ . λέγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ B .

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B , ἢ ἐλασσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ A τῷ B , ἐκάτερον γὰρ ἂν τῶν A , B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B . Οὐδὲ μὴν ἐλασσόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B , τὸ A γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον ἥπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ . Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἐλασσόν ἐστὶ τὸ A τοῦ B . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ A τοῦ B .

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ A . λέγω ὅτι ἐλασσόν ἐστὶ τὸ B τοῦ A .

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μείζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ B τῷ A , τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἐκάτερον τῶν A , B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B . Οὐδὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A , τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ B ἐλάσσονα

PROPOSITIO X.

Rob. Simson. ad hanc propositionem observat: „Ea, quae huius propositionis demonstratio exhibetur, in editionibus graecis et latinis aliisque, legitima non est. Verba enim:

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A , B eandem haberet rationem (V. 8.); habet autem; aequalis igitur est A ipsi B . Quae igitur ad eandem etc.

PROPOSITIO X. (Fig. 320.)

Magnitudinum ad eandem rationem habentium, quae maiorem rationem habet, maior est; ad quam autem eadem maiorem rationem habet, minor est.

Habeat enim A ad Γ maiorem rationem, quam B ad Γ ; dico maiorem esse A ipsa B .

Si enim non, vel aequalis est A ipsi B , vel minor. Aequalis autem non est A ipsi B , utraque enim ipsarum A , B ad Γ eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero; non igitur aequalis est A ipsi B . Sed neque minor est A ipsa B , nam A ad Γ minorem haberet rationem quam B ad Γ (V. 8.). Non habet autem, non igitur minor est A ipsa B . Ostensa autem est neque aequalis, maior igitur est A ipsa B .

Habeat autem rursus Γ ad B maiorem rationem quam Γ ad A ; dico minorem esse B ipsa A .

Si enim non, vel aequalis est, vel maior. Aequalis quidem non est B ipsi A , nam Γ ad utramque ipsarum A , B eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero, non igitur aequalis est A ipsi B . Sed neque maior est B ipsa A , nam Γ ad B minorem ra-

maior eadem sive aequalis, minor de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex Def. 5. et 7. huius libri patet. Ope igitur harum examinemus demonstrationem propositionis decimae, in qua vis ratiocinii haec est: si

λόγον εἶχεν ἥπερ πρὸς τὸ A . Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα
μειζόν ἐστι τὸ B τοῦ A . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον,
ἐλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ B τοῦ A . Τῶν ἄρα πρὸς τὸ
αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἶσιν
οἱ αὐτοί.

Ἐστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ
 Γ πρὸς τὸ Δ , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E
πρὸς τὸ Z . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὐ-
τως τὸ E πρὸς τὸ Z .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάνεις πολλα-
πλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν B, Δ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν
ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ
πρὸς τὸ Δ , καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάνεις πολ-
λαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσά-
νεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H
τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ M . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον
καὶ εἰ ἐλαττον, ἐλαττον. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ
πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , καὶ εἰληπται τῶν
μὲν Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Θ, K , τῶν δὲ $\Delta,$

fuerit $A=B$, foret $A:\Gamma=B:\Gamma$, unde sumtis ipsarum A, B
quibuscunque aequemultiplicibus, et sumta quavis multiplici
ipsius Γ , si multiplex ipsius A maior fuerit multiplici ipsius
 Γ , erit (V. Def. 5.) multiplex ipsius B maior eadem multi-
plici ipsius Γ . Sed, quoniam ex hypothesis $A:\Gamma > B:\Gamma$,
erunt ex V. Def. 7. quaedam ipsarum A, B aequemultiplices,
et quaedam multiplex ipsius Γ tales, ut multiplex ipsius A
maior sit multiplici ipsius Γ , at multiplex ipsius B non maior
sit multiplici ipsius Γ : haec autem propositio directe repugnat

tionem haberet quam ad A (V. 8.). Non habet vero, non igitur maior est B ipsa A . Ostensa autem est neque aequalis, minor igitur est B ipsa A . Ipsarum igitur ad eandem etc.

PROPOSITIO XI. (Fig. 321.)

Quae eidem eadem sunt rationes, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut A ad B ita Γ ad Δ , ut vero Γ ad Δ , ita E ad Z ; dico esse ut A ad B ita E ad Z .

Sumantur enim ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices Λ , M , N .

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , et sumptae sunt ipsarum A , Γ aequae multiplices H , Θ , ipsarum vero B , Δ aliae utcumque aequae multiplices Λ , M ; si H superat ipsam Λ , superat et Θ ipsam M ; et si aequalis, aequalis, et si minor, minor (V. Def. 5.). Rursus, quoniam est ut Γ ad Δ ita E ad Z , et sumptae sunt ipsarum Γ , E aequae multiplices Θ , K , ipsarum vero Δ , Z aliae utcumque aequae multiplices M ,

praecedenti, quare A non est aequalis B . Pergit demonstratio „sed neque minor est A quam B , haberet enim A ad F minorem rationem, quam B : atqui non habet minorem, non igitur A minor est quam B .“ Hic dicitur: haberet A ad F minorem rationem quam B ad F , sive, quod idem est, haberet B ad F maiorem rationem quam A ad F , hoc est (V. Def. 7.) forent quaedam ipsarum B , A aequae multiplices, et quaedam ipsius F multiplex talis, ut multiplex ipsius B maior sit multiplici ipsius F , at multiplex ipsius A non maior sit

Z ἄλλα α ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ M , N · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ A · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ A , ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν H , K τῶν A , E ἰσάνις πολλαπλάσια, τὰ δὲ A , N τῶν B , Z ἄλλα α ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐὰν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A , B , Γ , Δ , E , Z , ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὰ A , Γ , E πρὸς τὰ B , Δ , Z .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A , Γ , E ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , K , τῶν δὲ B , Δ , Z ἄλλα α ἔνυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ Λ , M , N .

multiplīci ipsius Γ , et ostendendum fuit, hoc nunquam contingere posse, si sit $A:\Gamma > B:\Gamma$: demonstrandum igitur fuit, in hoc casu multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius Γ , si aequimultiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset, non posse esse $B:\Gamma > A:\Gamma$, h. e. non posse esse $A:\Gamma < B:\Gamma$. Minime autem hoc ostensum est in demonstratione propositionis decimae, sed, si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset, verum sine eius ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem ten-

N ; si superat Θ ipsam M , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Sed si superat Θ ipsam M , superat et H ipsam A ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare et si superat H ipsam A , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H , K ipsarum A , E aequae multiplices, A , N vero ipsarum B , Z aliae utcunque aequae multiplices; est igitur ut A ad B ita E ad Z (V. Def. 5.). Ergo eadem etc.

PROPOSITIO XII. (Fig. 322.)

Si sint quocunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quocunque magnitudines proportionales A , B , Γ , Δ , E , Z , ut A ad B ita Γ ad Δ , et E ad Z ; dico esse ut A ad B ita A , Γ , E ad ipsas B , Δ , Z .

Sumantur enim ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices A , M , N .

tanti patebit. Quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem is, qui demonstrationem decimae, quae iam habetur, posuit vice eius, quam Euclides vel Eudoxus dederat, deceptus fuisse transferendo id; quod manifestum est magnitudinibus ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul maiorem et minorem esse alia. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur, Euclides autem eo non utitur ad ostendendum, rationes, quae eidem rationi sunt eadem, inter-

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ E πρὸς τὸ Z , καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K , τῶν δὲ B, Δ, Z ἄλλα ἃ ἐνυγεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ M , καὶ τὸ K τοῦ N . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἐλάσσον, ἐλάσσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ , ὑπερέχει καὶ τὰ H, Θ, K τῶν Λ, M, N καὶ εἰ ἴσον, ἴσα καὶ εἰ ἐλάσσον, ἐλάσσονα. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν H καὶ τὰ H, Θ, K τοῦ Λ καὶ τῶν A, Γ, E ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ περ ἂν ἡ ὁποιοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστων ἰσάνεις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἐστὶ καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ A καὶ τὰ Λ, M, N τοῦ B καὶ τῶν B, Δ, Z ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὰ A, Γ, E πρὸς τὰ B, Δ, Z . Ἐὰν ἄρα ἡ ὁποιοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Λ μείζονα λό-

se eadem esse, sed hoc explicite demonstrat in V. 11." Hinc Simson. aliam Prop. V. 10. demonstrationem dedit, quam

Et quoniam est A ad B ita Γ ad Δ et E ad Z , et sumptae sunt ipsarum A , Γ , E aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero B , Δ , Z aliae utcunque aequae multiplices A , M , N ; si H superat ipsam A , superat et Θ ipsam M , et K ipsam N (V. Def. 5.); et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si superat H ipsam A , superant et H , Θ , K ipsas A , M , N ; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. Et est H quidem et H , Θ , K ipsius A et ipsarum A , Γ , E aequae multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aequae multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Ex eadem ratione et A et A , M , N ipsius B et ipsarum B , Δ , Z aequae sunt multiplices; est igitur ut A ad B , ita A , Γ , E ad B , Δ , Z (V. Def. 5.). Si igitur sint quotcunque etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 323.).

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , tertia vero Γ ad quartam Δ maiorem rationem habeat quam quinta E

eandem esse cum ea, quam Euclides vel Eudoxus dederat, nullus dubitat, quum ex ipsa definitione maioris rationis V.

γον ἔχέτω ἥπερ πέμπτον, τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z . λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ πέμπτον τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ E πρὸς τὸ Z · ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ E πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Z πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ , E ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , τῶν δὲ Δ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ K , Λ , ὥστε τὸ μὲν H τοῦ K ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἔστι τὸ H τοῦ Γ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ M τοῦ A · ὁσαπλάσιον δὲ τὸ K τοῦ Δ , τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ N τοῦ B .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ , καὶ εἰληφται τῶν μὲν A , Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ M , H , τῶν δὲ B , Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ N , K · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ M τοῦ N , ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ K · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ H τοῦ K .

7. breviter et directe ostendatur. Ita autem habet: si $A : \Gamma > B : \Gamma$, est $A > B$ pariterque si $\Gamma : B > \Gamma : A$, erit $B < A$. Sit enim 1) $A : \Gamma > B : \Gamma$: eruntque (V. Def. 7.) quaedam ipsarum A , B aequemultiples, et ipsius Γ quaedam multiplex, ita ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem ipsius Γ , multiplex vero B non superet eandem. Sumantur, et sint ipsarum A , B aequemultiples mA , mB , ipsius vero Γ multiplex sit $n\Gamma$, ita ut $mA > n\Gamma$, at $mB < n\Gamma$. Est igitur $mA > mB$, adeoque $A > B$ (V. Ax. 4.). Sit 2) $\Gamma : B > \Gamma : A$,

ad sextam Z ; dico et primam A ad secundam B maiorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z .

Quoniam enim Γ ad A maiorem rationem habet quam E ad Z , sunt quaedam ipsarum Γ , E multiplices, ipsarum vero A , Z aliae utcumque aequae multiplices; ita ut ipsius Γ multiplex ipsius A multiplicem superet, ipsius vero E multiplex ipsius Z multiplicem non superet. Sumantur, et sint ipsarum Γ , E aequae multiplices H , Θ ; ipsarum vero A , Z aliae utcumque aequae multiplices K , Λ ; ita ut H quidem ipsam K superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex est H ipsius Γ , tam multiplex sit et M ipsius A ; quam vero multiplex K ipsius A , tam multiplex sit et N ipsius B .

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad A , et sumptae sunt ipsarum A , Γ aequae multiplices M , H , ipsarum vero B , A aliae utcumque aequae multiplices N , K ; si superat M ipsam N , superat et H ipsam K ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superat autem H ipsam K , superat igitur et M ipsam

erit $B < A$. Erunt enim (V. Def. 7.) quaedam $n\Gamma$, mB , $m\Lambda$ talia, ut $n\Gamma > mB$, at $n\Gamma \overline{<} m\Lambda$, adeoque erit $mB < m\Lambda$, et $B < A$ (V. Ax. 4.). Atque iam, demonstrata V. 10., ut porro observat Rob. Simson., facile demonstrabitur ea propositio, quae in vulgari eius demonstratione tacite supponitur. Nempe, si $A : \Gamma > B : \Gamma$, et sumantur utcumque $m\Lambda$, mB , $n\Gamma$, sitque $mB > n\Gamma$, erit etiam $m\Lambda > n\Gamma$. Nam ob $A : \Gamma > B : \Gamma$, erit (ex V. 10.) $A > B$, adeoque $m\Lambda > mB$, unde, si $mB > n\Gamma$, tanto magis erit $m\Lambda > n\Gamma$.

ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ M τοῦ N . Τὸ δὲ Θ τοῦ A οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἴσιν τὰ μὲν M , Θ τῶν A , E ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ N , A τῶν B , Z ἄλλα ἃ ἐνυχευ ἰσάνεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ E πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ , μείζον δὲ ἔστω τὸ A τοῦ Γ . λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἔστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ B · τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλαττον ἔστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ B ὥστε μείζον ἔστι τὸ B τοῦ Δ .

PROPOSITIO XII.

Patet, hanc propositionem tum saltim locum habere, si magnitudines, de quibus sermo est, omnes sint eiusdem generis.

PROPOSITIO XIII.

Obs. In versione latina, monente Rob. Simson., non posuimus, ut in graeco textu est: „et incomplexus Γ superat

N. Ipsa vero Θ ipsam A non superat; et sunt M , Θ ipsarum A , E aequae multiplices, ipsae vero N , A ipsarum B , Z aliae utcumque aequae multiplices; ergo A ad B maiorem rationem habet quam E ad Z (V. Def. 7.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 324.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia maior sit, et secunda tertia maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ , maior autem sit A ipsa Γ ; dico et B ipsa Δ maiorem esse.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia autem utcumque magnitudo B ; ergo A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Ut autem A ad B , ita Γ ad Δ ; et Γ igitur ad Δ maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 13.). Ad quam autem eandem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur Δ ipsa B ; quare maior est B ipsa Δ .

multiplicem ipsius Δ etc. sed ad rem, accommodatius: ita, ut superet etc. Caeterum Simson hoc addit

Cor. Et si prima ad secundam maiorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad sextam; similiter ostendetur, primam ad secundam maiorem rationem habere quam quintam ad sextam. (Ad hoc corollarium facile illud reducitur, quod Clavius hic habet: si $A:B=C:D$, et $C:D < E:F$,

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ B τῷ Δ καὶ ἑλασσον ἢ τὸ A τοῦ Γ , ἑλασσον ἔσται, καὶ τὸ B τοῦ Δ . Ἐὰν ἄρα πρῶτον καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τὰ μέρη τοῖς ὁσαύτως πολλαπλασίοις πόν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληρθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάνεις πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ AE τοῦ Z · λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ AE .

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ AE τοῦ Z · ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ AB μεγέθῃ ἴσα τῷ Γ , τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ AE ἴσα τῷ Z . Διηγήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθῃ ἴσα, τὰ AH , $H\Theta$, ΘB , τὸ δὲ AE εἰς τὰ τῷ Z ἴσα, τὰ AK , KL , LE · ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , $H\Theta$, ΘB τῷ πλήθει τῶν AK , KL , LE . Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH , $H\Theta$, ΘB ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ AK , KL , LE ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ AK οὕτως τὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ KL , καὶ τὸ ΘB πρὸς τὸ LE · ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ AK οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ AE . Ἰσον δὲ τὸ μὲν AH

erit et $A:B < E:F$. Aliud autem, quod Clavius addit, corollarium non huc pertinet. Habetur illud infra in appendice Prop. 6.)

PROPOSITIO XIV.

Casus duos posteriores expressis verbis ita demonstrat Rob. Simson. Si $A:B = \Gamma\Delta$, atque $A = \Gamma$, erit $A:B = A:A$ (V.

Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ , aequalem fore et B ipsi A ; et si minor sit A ipsa Γ , minorem fore et B ipsa A . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 325.)

Partes inter se comparatae eandem habent rationem quam earum aequae multiplices.

Sit enim aequae multiplex AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; dico esse ut Γ ad Z ita AB ad AE .

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius Γ ac AE ipsius Z ; quot in AB sunt magnitudines aequales ipsi Γ , tot sunt et in AE aequales ipsi Z . Dividatur AB in magnitudines ipsi Γ aequales AH , $H\Theta$, ΘB , AE vero in AK , KA , AE ipsi Z aequales; erit aequalis multitudo ipsarum AH , $H\Theta$, ΘB multitudini ipsarum AK , KA , AE . Et quoniam aequales sunt AH , $H\Theta$, ΘB inter se; sunt autem et AK , KA , AE aequales inter se; est igitur ut AH ad AK ita $H\Theta$ ad KA , et ΘB ad AE (V. 7.); erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (V. 12.); est igitur ut AH ad AK ita AB ad AE . Aequalis

7.), adeoque $B=A$ (V. 9.). Sit porro $A:B=\Gamma:A$, et sit $A<\Gamma$, erit $\Gamma>A$, et, quoniam $\Gamma:A=A:B$, erit $A>B$ per casum primum, qui est in textu graeco.

Cor. Clavius hoc addit corollarium: si $A:B=\Gamma:A$, sitque $B>A$, erit et $A>\Gamma$. Quod breviter ita demonstrari potest. Si $A:B=\Gamma:A$, erit et inverse (Prop. B. in

τῷ Γ , τὸ δὲ ΔK τῷ Z : ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE . Τὰ ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A, B, Γ, Δ , ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ . λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Δ .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A, B ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ E, Z , τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἅ ἐτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ E τοῦ A καὶ τὸ Z τοῦ B , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλάσιοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατὰλληλα: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z . Πάλιν, ἐπεὶ τὰ H, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ E

Excursu ad hunc librum) $B : A = \Delta : \Gamma$, unde ex V. 14. constat propositum.

PROPOSITIO XV.

Obs. Per partes in hac propositione intelliguntur partes aliquotæ (cf. dicta ad V. Def. 2.). Asserit itaque hæc propositio, esse $A : B = pA : pB$, vel $\frac{1}{p} A : \frac{1}{p} B = A : B$. Addi autem potest, quod habet Pflaiderer. (Exposit. et Dilucid. libri V.

autem AH ipsi Γ ; ΔK vero ipsi Z ; est igitur ut Γ ad Z ita AB ad ΔE . Ergo partes etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 326.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ , ut A ad B ita Γ ad Δ ; dico et alterne proportionales esse, ut A ad Γ ita B ad Δ .

Sumantur enim ipsarum A, B aequae multiplices E, Z , ipsarum vero Γ, Δ aliae utcunque aequae multiplices H, Θ .

Et quoniam aequae multiplex est E ipsius A ac Z ipsius B ; partes autem inter se comparatae eandem habent rationem, quam earum aequae multiplices (V. 15.); ergo ut A ad B ita E ad Z . Ut autem A ad B ita Γ ad Δ ; ergo ut Γ ad Δ ita E ad Z (V. 11.). Rursum, quoniam H, Θ ipsarum Γ, Δ aequae multiplices sunt; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad Θ (V. 15.). Ut autem Γ ad Δ ita E ad Z ; ergo ut E ad Z ita H ad Θ (V. 11.). Si autem quatuor magnitudines pro-

§. 45.), etiam partes aequaliquantas eandem rationem habere, quae magnitudines ipsas. Sit nempe $p \cdot R = A$, $p \cdot S = B$, seu

$R = \frac{1}{p}A$, $S = \frac{1}{p}B$, erit (ex V. 15.) $R : S = pR : pS$, vel $R : S = A : B$; pariterque (ex V. 15.) $R : S = mR : mS$, seu $R : S =$

$\frac{m}{p}A : \frac{m}{p}B$, unde (V. 11.) $\frac{m}{p}A : \frac{m}{p}B = A : B$.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Applicari potest haec propositio, tantum, ubi om-

πρὸς τὸ Z · καὶ ὡς ἄρα τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἢ τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ E τοῦ H , ὑπερέχει καὶ τὸ Z τοῦ Θ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν E , Z τῶν A , B ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ H , Θ τῶν Γ , Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Δ . Ἐὰν ἄρα τέσσαρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἢ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ AB , BE , ΓA , AZ , ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓA πρὸς τὸ AZ · λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ ZA .

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AE , EB , ΓZ , ZA ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ $H\Theta$, ΘK , AM , MN · τῶν δὲ EB , ZA ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ $K\Xi$, NI .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΘK τοῦ EB · ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ HK τοῦ AB . Ἰσάνεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ AM

nes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. De corollario ei vulgo adiecto vide ad Prop. A. in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO XVII.

Aliter haec propositio ita efferri potest: si quatuor magnitudines proportionales sint, et prima earum maior est, quam

portionales sint, prima autem maior sit tertia, et secunda maior erit quarta; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 14.). Si igitur superat E ipsam H , superat et Z ipsam Θ ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt E, Z ipsarum A, B aequae multiplices, H, Θ vero ipsarum Γ, Δ aliae utcumque aequae multiplices; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ (V. Def. 5.). Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 327.)

Si compositae magnitudines proportionales sint, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales $AB, BE, \Gamma A, \Delta Z$, ut AB ad BE ita ΓA ad ΔZ ; dico et divisas proportionales fore, ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA .

Sumantur enim ipsarum $AE, EB, \Gamma Z, ZA$ aequae multiplices $H\Theta, \Theta K, AM, MN$; ipsarum vero EB, ZA aliae utcumque aequae multiplices KE, NI .

Et quoniam aequae multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac ΘK ipsius EB ; aequae igitur multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac HK ipsius AB (V. 1.). Aequae autem multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac AM ipsius ΓZ ; aequae

secunda, adeoque etiam (Prop. A. in Excursu ad hunc librum) tertia maior quam quarta: erit etiam excessus primae super secundam ad secundam, ut excessus tertiae super quartam ad quartam. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 21.

COR. 1. Si quatuor magnitudinum A, B, C, D , binae fuerint in eadem ratione, et prima A minor quam secunda

τοῦ ΓΖ· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ
 ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ
 πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ,
 ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ
 ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάνεις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ
 τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλα-
 πλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ τὰ
 ΗΚ, ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια.
 Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ
 ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ
 ΕΒ ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ
 συντεθέν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον
 καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς
 τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν
 μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ,
 τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἐτύχεν ἰσάνεις πολλαπλά-
 σια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ
 εἰ ἐλάττω, ἐλάττω. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ
 τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΑΝ
 τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει
 καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΘΗ τοῦ
 ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δεῖ-
 ξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ
 τὸ ΑΜ τῷ ΝΠ· καὶ ἐλάττω, ἐλάττω. Καὶ ἐστὶ τὰ

B, adeoque etiam (Prop. A in Excursu) tertia C minor quam
 quarta D: erit etiam inverse (Prop. B in Excursu) $B:A =$
 $D:C$, ubi iam $B > A$, et $D > C$, adeoque $B-A = D-C$: C.
 Cf. Pfleiderer. l. c. p. 23.

igitur multiplex est HK ipsius AB ac AM ipsius ΓZ (V. 11.). Rursus, quoniam aequè multiplex est AM ipsius ΓZ ac MN ipsius ZA ; aequè igitur multiplex est AM ipsius ΓZ ac AN ipsius ΓA (V. 1.). Aequè autem multiplex erat AM ipsius ΓZ ac HK ipsius AB ; aequè igitur est multiplex HK ipsius AB ac AN ipsius ΓA (V. 11.); ipsae HK , AN igitur ipsarum AB , ΓA aequè sunt multiplices. Rursus, quoniam aequè multiplex est ΘK ipsius EB ac MN ipsius ZA ; est autem et $K\Xi$ ipsius EB aequè multiplex ac NII ipsius ZA ; et composita $\Theta\Xi$ ipsius EB aequè est multiplex ac MII ipsius ZA (V. 2.). Et quoniam est ut AB ad BE ita ΓA ad AZ , et sumptae sunt ipsarum AB , ΓA aequè multiplices HK , AN , ipsarum vero EB , ZA aliae utcunque aequè multiplices $\Theta\Xi$, MII ; si superat HK ipsam $\Theta\Xi$, superat et AN ipsam MII ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superet autem HK ipsam $\Theta\Xi$, et communi ablata ΘK , superat igitur et $H\Theta$ ipsam $K\Xi$. Sed si superat HK ipsam $\Theta\Xi$, superat et AN ipsam MII ; superat igitur et AN ipsam MII ; et communi MN ablata, superat et AM ipsam NII ; quare si superat $H\Theta$ ipsam $K\Xi$, superat et AM ipsam NII . Similiter ostendemus et si aequalis sit $H\Theta$ ipsi $K\Xi$, aequalem fore et AM ipsi NII ; et si minor, minorem. Et sunt $H\Theta$, AM ipsarum AE , ΓZ aequè multiplices, $K\Xi$, NII vero ipsarum EB , ZA aliae utcunque

Cor. 2. Generatim igitur, si duae magnitudines inaequales A et B eandem mutuo habeant rationem, quam aliae duae inaequales C et D : differentia quoque duarum priorum erit ad earundem minorem, uti differentia duarum posteriorum

μὲν $HΘ$, $ΑΜ$ τῶν $ΑΕ$, $ΓΖ$ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ $ΚΞ$, $ΝΠ$ τῶν $ΕΒ$, $ΖΔ$ ἄλλα ᾧ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΓΖ$, $ΖΔ$, ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$ · λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$.

Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$ · ἔσται ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$, ἤτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $ΑΖ$, ἢ πρὸς μείζον.

Ἐστω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ $ΔΗ$. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ $ΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΕ$ οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΔΗ$, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$, οὕτως τὸ $ΓΗ$ πρὸς τὸ $ΗΔ$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΓΗ$ πρὸς τὸ $ΗΔ$ οὕτως τὸ

tum ad ipsam minorem; vel etiam inverse (Prop. B in Excursu), minor duarum priorum erit ad ipsarum differentiam, uti minor duarum posteriorum ad earundem differentiam. Breviter, si $A : B = C : D$, erit etiam *dividendo*

vel *divisim* $A - B : B = C - D : D$, seu $B : A - B = D : C - D$

vel $B - A : A = D - C : C$, seu $A : B - A = C : D - C$.

Cf. Pfleiderer. l. c.

aeque multiplices; est igitur ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA (V. Def. 5.). Si igitur compositae ets.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 238.)

Si divisae magnitudines proportionales sint, et compositae proportionales erunt.

Sint divisae magnitudines proportionales AE , EB , ΓZ , ZA ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA ; dico et compositas proportionales fore, ut AB ad BE ita ΓA ad ZA .

Si enim non est ut AB ad BE ita ΓA ad ZA ; erit ut AB ad BE ita ΓA , vel ad minorem ipsa AZ , vel ad maiorem.

Sit primum ad minorem AH . Et quoniam est ut AB ad BE ita ΓA ad AH , compositae magnitudines proportionales sunt; quare et divisae proportionales erunt (V. 17.); est igitur ut AE ad EB ita ΓH ad HA . Ponitur autem et ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA ; ut igitur ΓH ad HA ita ΓZ ad ZA (V. 11.). Maior autem prima ΓH tertia ΓZ ; maior igitur et secunda

PROPOSITIO XVIII.

Obs. Ita sane satis breviter demonstraretur V. 18. dummodo sumere liceat propositis tribus magnitudinibus, quarum duae saltim sint eiusdem generis, quartam semper existere ipsis proportionalem. Verum enim vero, quamvis Clavius id pro axiomate sumi posse censeret, dudum tamen Saccherius in Euclide ab omni naevo vindicato p. 111. sq. indecorum huius assumpto naevum inesse confessus est, cui quidem mederi ille,

ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓH τοῦ τρίτου τοῦ ΓZ · μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ $H\Delta$ τοῦ τετάρτου τοῦ $Z\Delta$. Ἀλλὰ καὶ ἐλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς ἐλασσον τοῦ $Z\Delta$. Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ἡ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γάρ ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AE πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓZ · λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ EB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ · καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ BA πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸ ΓZ . Καὶ ἐπεὶ συγκεκλιμένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται ὡς ἄρα τὸ BE πρὸς τὸ $E\Delta$ οὕτως τὸ ΔZ πρὸς τὸ $Z\Gamma$, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ BE πρὸς τὸ ΔZ οὕτως

at ex Rob. Simsonis et Pfleidereri iudicio irrito prorsus conatu tentavit. In eo autem cum Saccherio consentit Rob. Simson., haud legitimam esse, et a genio Euclidis abhorrere, quae vulgo in Elementis habetur, propositionis huius demonstrationem. Nunquam enim Euclidem aliquid in demonstratione propositionis sumere, quod non prius ostenderit, saltem quod existere posse non perspicuum sit; ope enim propositionis incertae conclusionem certam elici non posse. Aliam itaque demonstrationem substituit Simson., quam, quamvis prolixior, legitimam et Euclidis genio magis conformem esse inde maxime concludit, quod, pariter ac Prop. 17. de-

HA quarta ZA (V. 14.). Sed, et minor, quod fieri nequit; non igitur est ut AB ad BE ita ΓA ad minorem ipsa ZA . Similiter utique ostendemus neque ad maiorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisae etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 329.)

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam ΓA ita ablata AE ad ablatam ΓZ ; dico et reliquam EB ad reliquam ZA fore ut tota AB ad totam ΓA .

Quoniam enim est ut AB ad ΓA ita AE ad ΓZ ; et alterne erit ut BA ad AE ita $\Delta \Gamma$ ad ΓZ (V. 16.). Et quoniam compositae magnitudines proportionales sunt, et divisae proportionales erunt (V. 17.); ut igitur BE ad EA ita ΔZ ad $Z\Gamma$; et alterne (V. 16.), ut BE ad ΔZ ita EA ad $Z\Gamma$. Ut autem AE ad

monstratur ope Prop. 1. et 2. huius libri, ita in sua hac demonstratione Propositionis 18. tum Prop. 5. tum uterque casus V. Prop. 6. adhibeantur, quae quidem propositionis conversae sint primae et secundae, neque ulli propositioni huius libri, ut eum nunc habemus, demonstrandae inserviant, quin nulli praeterquam huic 18. inservire possint. Simsonis demonstratio, quam brevitatis causa symbolice expressam hic sistimus, haec est. Si fuerit $A:E=C:D$, erit etiam componendo $A+B:B=C+D:D$. Sumantur enim aequae multiplae quaecunque magnitudinum B , D , pariterque magnitudinum $(A+B)$, $(C+D)$, v. c. mB , mD ; $m(A+B)$, $m(C+D)$, pariterque aliae quae-

τὸ EA πρὸς τὸ $ZΓ$. "Ὡς δὲ τὸ AE πρὸς τὸ $ΓΖ$ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $ΓΔ$ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB πρὸς λοιπὸν $ΔΖ$ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $ΓΔ$. Ἐὰν ἄρα ἢ καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $ΓΔ$ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ $ΖΔ$ καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$ συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $ΔΓ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$, καὶ ἐστὶν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἢ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται ¹⁾. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1) Ita hunc locum habent edd. Oxon. et Basil., cum quibus teste Peyrardo consentit Cod. a. Peyrardus ex ingenio, ut videtur, locum ex Gregorii quoque sententia corruptissimum nec opo veterum exemplarium restituendum ita mutavit: καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $ΓΔ$ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ $ΓΖ$ καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ $ΓΔ$ πρὸς τὸ $ΓΖ$ συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ $ΔΓ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$, καὶ ἐστὶν ἀναστρέψαντι κ. τ. λ. Quamvis autem fateamur, lectionem receptam vitiosam esse et omnino corollarium hoc non huc pertinere, nec eius demonstrationem, qua ad V. 16. recurritur legitimam esse, quoniam ita contra, ac res est, haec propositio tantum ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur (Cf. Clavius, Rob. Simson., Pfeleiderer. ad hunc locum) nolimus tamen Peyrardi lectiones, nulla msscriptorum auctoritate nixas, in textum recipere, praesertim quum vitia vulgaris lectionis hac ratione non tollantur. Caeterum Edit. Basileensis aliud adhuc hic additamentum habet, quod, cum prorsus non huc pertineat, nec omnino ullius momenti sit, cum edd. Oxon. et Paris. omisimus.

cunque aequemultiplices magnitudinum B, D v. c. rB, rD , eritque vel $r > m$, vel $r = m$, vel $r < m$. Sit 1) $r = m$, adeo-

FZ ita posita est tota AB ad totam FA ; et reliqua igitur EB ad reliquam AZ erit ut tota AB ad totam FA (V. 11.). Si igitur sit etc.

COROLLARIUM.

Et quoniam ostensum est ut AB ad FA ita EB ad ZA ; et alterne (V. 16.) ut AB ad BE ita FA ad ZA ; compositae igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est, ut AB ad AE ita FA ad FZ , et est per conversionem. Ex hoc manifestum est, si compositae magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

que $rB = mB$, et $rD = mD$. Quum igitur $m(A+B) > mB$ (V.

Ax. 3.), erit etiam, vel tanto magis $m(A+B) > rB$, eodemque modo $m(C+D) > rD$, adeoque $A+B : B = C+D : D$ (V. Def. 5.). Sit autem 2) $r > m$, adeoque $rB > mB$, $rD > mD$, et, si ab aequemultiplis magnitudinum $A+B$, $C+D$, nempe a $m(A+B)$, $m(C+D)$ auferantur aequemultipla magnitudinum B , D , nempe mB , mD , relinquentur aequemultipla mA , mC magnitudinum A , B (V. 5.). Si autem a rB auferatur mB , pariterque a rD auferatur mD , relinquentur $(r-m)B$, $(r-m)D$, eritque vel $(r-m)B = B$, et simul $(r-m)D = D$; vel $(r-m)B = nB$, et simul $(r-m)D = nD$ (V. 6.). Sit a) $(r-m)B = B$, et $(r-m)D = D$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit etiam V. 4. Cor. a. $mA : B = mC : D$ i. e. $mA : (r-m)B = mC : (r-m)D$. Hinc, si $mA > (r-m)B$, erit etiam $mC > (r-m)D$ (Prop. A. in Excursu ad hunc librum.) Sit autem b) $(r-m)B = nB$, adeoque etiam $(r-m)D = nD$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit, quoties $mA > nB$, etiam $mC > nD$ i. e. iunctim iam sumtis casibus a et b, quoties

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διῶσιν δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μείζον ἔσται καὶ ἐὰν ἴσον, ἴσον καὶ ἐὰν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος τὰ Δ, E, Z , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , διῶσιν δὲ μείζον ἔστω τὸ A τοῦ Γ λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ τι τὸ B , τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἔλαττον τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ E καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ E μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Z πρὸς τὸ E . Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον μείζον ἐστὶ μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Z . Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ἢ καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ

$mA > (r-m)B$, etiam $mC > (r-m)D$, adeoque quoties $mA + mB > rB$, etiam $mC + mD > rD$, vel, quo-

PROPOSITIO XX. (Fig. 330.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A , B , Γ , et aliae ipsis aequales multitudine Δ , E , Z , binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita Δ ad E , ut vero B ad Γ ita E ad Z , ex aequo autem maior sit A ipsa Γ ; dico et Δ ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia autem quaedam B , maior vero ad eandem maiorem rationem habet quam minor (V. 8.); habebit A ad B maiorem rationem quam Γ ad B . Sed ut A ad B ita Δ ad E , ut vero Γ ad B per inversionem ita Z ad E et Δ igitur ad E maiorem habet rationem quam Z ad E (V. 13.). Ad eandem autem rationem habentium, maiorem rationem habens maior est (V. 10.); maior igitur est Δ ipsa Z . Similiter ostendemus, et si A aequalis sit ipsi Γ , aequalem fore et Δ ipsi Z ; et si minor, minorem. Si igitur sint etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 331.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae et in eadem ratione, sit

ties $m(A+B) > < rB$, erit etiam $m(C+D) > < rD$, adeoque etiam casu 2. erit $A+B : B = D+D : D$. Eodem modo de-

τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δῆσσυ δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἔκτου μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , δῆσσυ δὲ τὸ A τοῦ Γ μείζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ A τοῦ Γ , ἄλλο δὲ τι τὸ B · τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ B . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Δ · καὶ τὸ E ἄρα πρὸς τὸ Z μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ E πρὸς τὸ Δ . Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἔστι τὸ Z τοῦ Δ μείζον ἔστι ἄρα τὸ Δ τοῦ Z . Ὀμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z .¹⁾ καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ἡ τρία καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ δῆσσυ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

1) Rectius ita e Cod. a. legit Peyrardus, quum in edd. Oxon. et Basil. habeatur: ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἴσον, ἴσον· δηλονότι καὶ ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ , ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z .

monstratur, esse etiam $A+B:A=C+D:C$; unde V. Prop. 18. generalius ita enunciari potest: si quatuor magnitudines

autem perturbata earum proportio, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ , et aliae ipsis aequales multitudine A, E, Z , binae sumptae et in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z , ut vero B ad Γ ita A ad E , ex aequo autem A ipsa Γ maior sit; dico et A ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ , alia vero quaedam B ; A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Sed ut A ad B ita E ad Z , ut vero Γ ad B per inversionem ita E ad A (Prop. B.); quare et E ad Z maiorem rationem habet quam E ad A (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur est Z ipsa A ; maior est igitur A ipsa Z . Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ , aequalem fore et A ipsi Z ; et si minor, minorem. Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 332.)

Si sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione; et ex aequo in eadem ratione erunt.

fuerint proportionales, summa quoque duarum priorum erit ad alterutram earum, uti summa duarum posteriorum erit ad eam harum, quae priori in proportionis assumptae ordine respondet. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 26.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ A, B, Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὥς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , ὥς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z · λέγω ὅτι καὶ δίττου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὥς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z .

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν A, Δ ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ K, Λ , καὶ ἔτι τῶν Γ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ M, N .

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὥς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Δ ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ H, Θ , τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνις πολλαπλάσια τὰ K, Λ · ἔστιν ἄρα ὥς τὸ H πρὸς τὸ K οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὥς τὸ K πρὸς τὸ M οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N . Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, N σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δίττου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ M , ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N · καὶ εἰ ἴσον,

PROPOSITIO XIX.

Symbolice ita: si $A:B=A-C:B-D$, erit etiam $A:B=C:D$, ubi patet, eiusdem generis esse magnitudines A, B, C, D . Addit hic Rob. Simson. sequens Cor. a. Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam, hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est. Illud autem Corollarium, quod vulgo huic propositioni adiungitur, quodque, ne quid textui deesse videretur, et nos in textu posuimus, non huc pertinere, iam in variantibus lectionibus diximus. Legitime autem illud demonstratum est infra in Excursu ad hunc librum Prop. E.

Sint quotcunque magnitudines A, B, Γ , et aliae ipsis aequales multitudine Δ, E, Z , binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita Δ ad E , ut B vero ad Γ ita E ad Z ; dico et ex aequo in eadem ratione fore, ut A ad Γ ita Δ ad Z .

Sumantur enim ipsarum A, Δ aequae multiplices H, Θ , ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, Λ , et insuper ipsarum Γ, Z aliae utcunque aequae multiplices M, N .

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad E , et sumptae sunt ipsarum A, Δ aequae multiplices H, Θ , ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, Λ ; est igitur ut H ad K ita Θ ad Λ (V. 4.). Ex eadem ratione et ut K ad M ita Λ ad N . Et quoniam tres magnitudines sunt H, K, M , et aliae ipsis aequales multitudine Θ, Λ, N binae sumptae in eadem ratione; ex aequo igitur si superat H ipsam M , superat et Θ ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 20.). Et sunt H, Θ ipsarum A ,

PROPOSITIO XX.

Propositionis huius demonstrationem magis explicitam dedit Rob. Simson., quae ita habet: si sit $A:B=D:E$, et $B:C=E:F$, sit autem $A>C$, erit ex aequo $D>F$. Sit enim 1) $A>C$, eritque $A:B>C:B$ (V. 8.), adeoque, ob $A:B=D:E$, erit etiam $D:E>C:B$ (V. 13.). At $F:E=C:B$ (Prop. B.), adeoque etiam $D:E>F:E$ (V. 13.), unde $D>F$ (V. 10.). Sit 2) $A=C$, erit et $D=F$. Nam ob $A=C$, erit $A:B=C:B$ (V. 7.). Est autem $A:B=D:E$, et $C:B=F:E$ (Prop. B.), unde $D:E=F:E$ (V. 11.), adeoque $D=F$ (V. 9.). Sit 3) $A<C$, erit et $D<F$. Nam ob $A<C$,

ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν H , Θ τῶν A , Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M , N τῶν Γ , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς Δ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα ἢ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία καὶ δίτρου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A , B , Γ , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλήθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ , E , Z , ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E . λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z .

Εἰλήφθω τῶν μὲν A , B , Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ H , Θ , K , τῶν δὲ Γ , E , Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ , M , N .

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H , Θ τῶν A , B , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N · καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z · καὶ ὡς ἄρα

erit $C > A$. Iam verò (Prop. B.) est $C:B = F:E$, et $B: = E:D$, unde, ob $C > A$, erit $F > D$ (Cas. 1.) vel $D < F$. Eadem fore ratione rem Clavius demonstrat, nisi quod casum

A aequae multiplices, et M , N ipsarum F , Z aliae utcumque aequae multiplices; est igitur ut A ad F ita A ad Z (V. Def. 5.). Si igitur quotcumque etc.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 333.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex aequo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A , B , Γ , et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione A , E , Z , sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z , et ut B ad Γ ita A ad E ; dico esse ut A ad Γ ita A ad Z .

Sumantur ipsarum A , B , A aequae multiplices H , Θ , K , ipsarum vero Γ , E , Z aliae utcumque aequae multiplices A , M , N .

Et quoniam aequae multiplices sunt H , Θ ipsarum A , B , partes vero eandem habent rationem quam earum aequae multiplices (V. 15.); erit ut A ad B ita H ad Θ . Ex eadem ratione ut E ad Z ita M ad N ; et est ut A ad B ita E ad Z ; itaque ut H ad Θ ita M ad N (V. 11.). Et quoniam est ut B ad Γ ita A

tertium non ad primum reducit, sed pariter immediate adstruit.

τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N . Καὶ ἐπεὶ
 ἔστιν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ A πρὸς τὸ E ,
 καὶ ¹⁾ εἰλήπται τῶν μὲν B, A ἰσάνεις πολλαπλάσια
 τὰ Θ, K , τῶν δὲ Γ, E ἄλλα, ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολ-
 λαπλάσια τὰ A, M ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ A ,
 οὕτως τὸ K πρὸς τὸ M . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ H
 πρὸς τὸ Θ , οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N . ἐπεὶ οὖν τρία
 μεγέθη ἔστι, τὰ H, Θ, A , καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ
 πλήθος, τὰ K, M, N , σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ
 αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία.
 διαίσειν ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ A , ὑπερέχει καὶ
 τὸ K τοῦ N καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλατ-
 τον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν H, K τῶν A, A ἰσάνεις πολ-
 λαπλάσια, τὰ δὲ A, N τῶν Γ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν,
 ἰσάνεις πολλαπλάσια ²⁾ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ
 οὕτως τὸ A πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ
 ἑξῆς.

1) Loco eorum, quae hic habentur, Peyrardus e Codd.
 a. c. d. longe prolixius et manifesto erronee demonstrat esse,
 ut Θ ad A ; ita K ad M . Nemp̄e ex eo, quod $B : \Gamma = A : E$
 concludit, esse alterne $B : A = \Gamma : E$ (V. 16.). At $B : A = \Theta : K$
 (V. 15.), adeoque $\Gamma : E = \Theta : K$ (V. 11.); et $A : M = \Gamma : E$
 (V. 15.), adeoque $\Theta : K = A : M$ (V. 11.) et iterum alterne
 $\Theta : A = K : M$. Ita vero propositio locum tantum habere vide-
 tetur, si magnitudines A, B, Γ , et reliquae A, E, Z fue-
 rint omnes eiusdem generis, quod longe secus est. Restitui-
 mus itaque locum, ut est in ed. Oxoniensi. Ed. Basileensis
 in loco, de quo disputamus, cum Oxoniensi consentit. Po-
 stea autem absurde eadem addit, quae vix e Peyrardo attu-
 limus

2) Ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάνεις πολλαπλάσια. Haec verba, quae
 monente Rob. Simson. omnino necessaria sunt, etiam sine
 Codd. auctoritate addidimus.

PROPOSITIO XXI.

Huius quoque propositionis demonstrationem magis ex-
 plicitam dedere Clavius et Rob. Simson., similem prorsus ei,

ad E , et sumptae sunt ipsarum B , A aequemultiplices Θ , K , ipsarum Γ , E autem aliae utcunque aequemultiplices A , M ; erit, ut Θ ad A , ita K ad M (V. 4.). Ostensum autem est, et, ut H ad Θ , ita esse M ad N ; quoniam igitur tres magnitudines sunt H , Θ , A , et aliae ipsis aequales multitudine K , M , N , binae sumptae in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex aequo (V. 21.) si H superat A , superat et K ipsam N ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H , K ipsarum A , A aequemultiplices, A , N vero ipsarum Γ , Z ; alia utcunque aequemultiplicia; est igitur ut A ad Γ ita A ad Z (V. Def. 5.). Si igitur sint tres etc.

quam in propositione praecedente vidimus, unde facile illa derivabitur.

PROPOSITIO XXII.

Expressis quidem verbis in textu graeco haec propositio demonstrata tantum est eo casu, quo sunt tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales. Eandem autem valere generaliter, ut in enunciato propositionis asseritur, eadem ratione demonstrari potest, ut monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson, aliique. Nempe si sint quatuor magnitudines A , B , C , D , aliaeque ipsis numero aequales E , F , G , H , sitque $A:B=E:F$, $B:C=F:G$, $C:D=G:H$, erit $A:D=E:H$. Quam enim pro tribus magnitudinibus iam demonstratum sit, esse $A:C=E:G$, et iam denuo sit $C:D=G:H$, res pariter redit ad tres magnitudines A , C , D , et totidem alias E , G , H . Atque ita semper, si res demonstrata fuerit pro m magnitudinibus, inde demonstrabitur pro $(m+1)$ magnitudinibus, adeoque demonstratio est generalis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Ἐάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γάρ τὸ AB πρὸς δεύτερον, τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔE πρὸς τέταρτον τὸ Z · ἔχτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ $E\Theta$ πρὸς τέταρτον τὸ Z · λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ $\Delta\Theta$ πρὸς τέταρτον τὸ Z .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $E\Theta$ πρὸς τὸ Z · ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ $E\Theta$. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔE πρὸς τὸ Z , ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ $E\Theta$ · διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ ΔE πρὸς τὸ $E\Theta$. Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς

Cor. Sponte inde fluir, rationum aequalium duplicatas, triplicatas etc. etiam aequales esse (Baermann.). Nempe, si $A:B=B:C$, et $P:Q=Q:R$, sitque $A:B=P:Q$, erit et (V. 11.) $B:C=Q:R$, unde $A:C=P:R$, et similiter de triplicata ratione etc. res demonstrabitur. (Conversam huius vide in Excursu ad Prop. m.)

PROPOSITIO XXIII.

Hanc quoque propositionem valere de quocunque magnitudinibus, quamvis in textu graeco non tam generaliter enun-

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 334.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptae prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔE ad quartam Z ; habeat vero et quinta BH ad secundam Γ eandem rationem quam sexta $E\Theta$ ad quartam Z ; dico et simul sumptas primam et quintam AH ad secundam Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta $\Delta\Theta$ ad quartam Z .

Quoniam enim est ut BH ad Γ ita $E\Theta$ ad Z ; per inversionem erit (Prop. B.) ut Γ ad BH ita Z ad $E\Theta$. Et quoniam est ut AB ad Γ ita ΔE ad Z , ut autem Γ ad BH ita Z ad $E\Theta$; ex aequo igitur est ut AB ad BH ita ΔE ad $E\Theta$ (V. 22.). Et quoniam divisae magnitudines proportionales sunt, et compositae proportionales erunt (V. 18.); ut igitur AH ad BH ita $\Delta\Theta$ ad ΘE . Est autem et ut BH ad Γ ita

ciata sit, similique ac praecedentem ratione demonstrari, monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson, aliique.

PROPOSITIO XXIV.

Huic propositioni Rob. Simson. sequentia addit corollaria:

Cor. 1. Manente hypothesis propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio eadem est cum demonstratione propositionis, dummodo vice componendo utamur dividendo.

τὸ BH οὕτως τὸ $\Delta\Theta$ πρὸς τὸ ΘE . Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $E\Theta$ πρὸς τὸ Z . διῴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ AH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ $\Delta\Theta$ πρὸς τὸ Z . Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ AB , ΓA , E , Z , ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ AB , ἐλάχιστον δὲ τὸ Z . λέγω ὅτι τὰ AB , Z τῶν ΓA , E μείζονά ἐστιν.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν E ἴσον τὸ AH , τῷ δὲ Z ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z , ἴσον δὲ τῷ μὲν E τὸ AH , τῷ δὲ Z τὸ $\Gamma\Theta$. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓA οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὰ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓA οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AH πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ $\Gamma\Theta$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB πρὸς λοιπὸν τὸ ΘA ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓA . Μείζον δὲ τὸ AB τοῦ ΓA . μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ ΘA . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E , τὸ δὲ $\Gamma\Theta$ τῷ Z . τὰ ἄρα AH , Z ἴσα ἐστὶ τοῖς $\Gamma\Theta$, E . Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἀγίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἀνισα

Cor. 2. Ipsa autem propositio vera est de quocunque magnitudinibus, quarum priores ad communem secundam eadem habent rationes, quas habent reliquae ad communem quartam, singulae sc. priorum ad secundam, eandem, quam singulae reliquarum ad quartam; ut patet. (Nempe, si $A:M=F:N$, $B:M=G:N$, $C:M=H:N$, $D:M=I:N$ etc. erit

EO ad Z ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AH ad F ita AO ad Z . Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 335.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales $AB, \Gamma A, E, Z$, ut AB ad ΓA ita E ad Z ; sit autem maxima quidem ipsarum AB , minima vero Z ; dico AB, Z ipsis $\Gamma A, E$ maiores esse.

Ponatur enim ipsi E aequalis AH ipsi vero Z aequalis ΓO .

Quoniam igitur est ut AB ad ΓA ita E ad Z , aequalis autem E ipsi AH , Z vero ipsi ΓO ; est igitur ut AB ad ΓA ita AH ad ΓO . Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓA ita ablata AH ad ablatam ΓO ; et reliqua HB ad reliquam OA erit ut tota AB ad totam ΓA (V. 19.). Maior autem AB ipsa ΓA ; maior igitur et HB ipsa OA (Prop. A.). Et quoniam aequalis est AH ipsi E , ΓO vero ipsi Z ; erunt AH, Z aequales ipsis $\Gamma O, E$. Et quoniam si inaequalibus aequalia addantur, tota inaequalia sunt (I. Ax. 4.); cum igitur HB, OA inaequalia sint, sitque maior

etiam $A+B+C+D$ etc. : $M=F+G+H+I$ etc. : N , vel etiam excessus quarundam priorum super reliquas priores ad secundam, ut similis excessus reliquarum ad quartam v. c. $A+B+C-D : M=F+G+H-I : N$, vel $A+B-C-D : M=F+G-H-I : N$ etc.)

ἔστιν ἂν ἄρα τῶν HB , $\Theta\Delta$ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ HB , τῇ μὲν HB προστεθῇ τὰ AH , Z , τῇ δὲ $\Theta\Delta$ προστεθῇ τὰ $\Gamma\Theta$, E , συνάγεται τὰ AB , Z μείζονα τῶν $\Gamma\Delta$, E . Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

PROPOSITIO XXV.

Observante Rob. Simsone, si sumitur, primam quatuor magnitudinum proportionalium maximam esse omnium, sponte inde fuit ope Prop. A. et V. 14. quartam esse omnium mi-

HB , cui addantur AH , Z , ipsi vero ΘA addantur $I\Theta$, E , fient AB , Z maiores ipsis ΓA , E . Si igitur quatuor etc.

nimam. Caeterum sub finem huius libri Rob. Simson. quatuor adhuc addit propositiones F , G , H , K , quas nos exhibemus in Excursu ad librum VI. §§. 9. 10. 15.

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Ρ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Ε Κ Τ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐκὰς τέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγων ¹⁾ ὦσιν.

1) Editio Basil. et cum ea plures Elementorum editiones, quae textum graecum definitionem et enunciatorum propositionum habent, nominatim Orontii Fineii, Ioach. Camerarii, Scheubelii, Peletarii, Dasypodii habent λόγοι. Eadem lectio est etiam in excerptis ἐκ τῶν τοῦ Ἡρωνος περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων a Dasypodio editis Argent. 1570. Ed. Oxon. legit ὄροι, quam vocem etiam Petr. Ramus ponendam putaverat. Conferantur tamen, quae ad V. Defin. 9. de seriore usu vocis ὄροι dicta sunt. Candalla iam suspicatus erat, legendum esse λόγων, quam lectionem Peyrardus e Cod. a. eruit; et in ed. Paris. posuit. Quod ex Candallae sententia ita interpretandum erit, utramque figuram binarum rationum antecedens et consequens comprehendere; scilicet antecedens primae et consequens secundae ad priorem, consequens vero primae et antecedens secundae rationis ad posteriorem figuram pertinere debent. Pfleiderer. Schol. in L. VI. Elem. §. 127—132. Forte legenda fuerit utraque vox: λόγων ὄροι, aut potius: ἡγούμενά τε καὶ ἐπόμενα λόγων.

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

L I B E R S E X T U S.

D E F I N I T I O N E S.

1. Similes figurae rectilineae sunt, quae et singulos angulos singulis aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocae autem figurae sunt, quando in utraque figurarum antecedentes et consequentes rationum sunt.

D E F I N. I.

Austin. contra hanc definitionem monet, non statim patere, an simul consistere possit in duabus figuris rectiliniis mutua aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum circa aequales angulos. Atque ita haec definitio ponenda aut saltem explicanda foret demum post VI. 4. At, quum in figuris regularibus, quas liber quartus describere docet, mutua illa aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum locum habeat, si figurae istae eundem numerum laterum habeant, exemplum certe eiusmodi figurarum prostat, nec quisquam generaliter asserere poterit, esse ista *avertata*. Et, quod Pfeiderer. observat, (Schol. ad Libr. VI. Elem. Euclid. Tub. 1800. sqq. §. 297. Ista nempe scholia non integra, sed saltem ad §. 238.

γ'. "Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετραμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ' Ὅψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

lucem publicam viderunt, integra tamen in scriniis suis elaborata habuit beatus auctor et benevole mecum communicavit, unde, ipso permittente, nonnulla in nostrum usum convertimus) Euclidea rectilineorum similium definitio ipsam communem similitudinis notionem (quae lineamentorum similem situm ac proportionalitatem requirit) ad illa adplicatam et accurate determinatam sistit. Et Euclides, eodem monente, denominationem similium triangulis in VI. 8. demum applicat, postquam in VI. 4—7. aequalitatem angulorum ac proportionalitatem laterum circa angulos aequales non solum generaliter coexistere posse, sed sub quibus conditionibus reapse coexistent, ostenderat: tum rectilinea universim, quae iuxta suam definitionem similia dici possint, in VI. 18. describere docet, antequam ad proprietates eorum discutiendas progrediatur. Cf. Phil. mathem. Abhandl. von Küstner und Klügel. Halle 1807. p. 16. sqq. Ipse Austin. contra similia triangula ea esse dicit, in quibus anguli unius aequales sunt respective angulis alterius. Similes autem rectilineas figuras plurium quam trium laterum eas esse dicit, quae dividi possint in aequalem numerum triangulorum similium, similiter positorum. Circa has Austini definitiones Pffeiderer. l. c. observat, definitionem triangulorum similium communem figurarum similium notionem non exhaustire, et demum adiecta propositione VI. 4. eam exhaustiri. Caeterorum vero rectilineorum definitionem Austinianam, cum et multifariam ea possint in triangula dividi, et, quid similis triangulorum situs involvat, ab auctore non declaretur, vagam et ambiguum esse. Praeter necessitatem igitur, nec sine incommodo, uni definitioni duas substitui.

DEFIN. II.

Rob. Simson. observat, definitionem 2. non videri Eucli-

3. Secundum extremam et mediam rationem recta secta esse dicitur, quando est ut tota ad maius segmentum ita maius ad minus.

2. Altitudo est omnis figurae a vertice ad basin perpendicularis ducta.

dis esse, sed cuiusdam imperiti, quum nulla figurarum reciprocarum mentio fiat ab Euclide, nec a quoquam alio geometra, et definitio praeterea obscure enunciata sit. Ipse autem Simson. clarius eam ita exhibuit: „reciprocae figurae, triangula sc. et parallelogramma sunt, quando circa duos angulos latera ita sunt proportionalia, ut latus primae sit ad latus secundae, ut reliquum secundae latus ad latus reliquum primae.“ In adiectis deinde notis aliam generaliore vice eius posuit, nempe „duae magnitudines dicuntur reciproce proportionales duobus aliis, quando altera priorum est ad alteram posteriorum, ut reliqua posteriorum ad reliquam priorum.“ Simsonis iudicium de Def. 2. confirmat Pfeiderer. Schol. ad Libr. VI. Elem. §. 132., dum observat, Prop. VI. 14., VI. 15., XI. 34. etc. non dicere, ἀντιπεπόνθετα parallelogramma, triangula etc. sed : ὅν ἀντιπεπόνθουσιν αἱ πλευραὶ κ. τ. λ., quarum formularum sensus praeterea in singularum propositionum enunciatione VI. 14., VI. 15. etc. discrete indicetur. Caeterum Pfeiderer. monet, Rob. Simsonis definitionem, per se ad quatuor homogeneas magnitudines restrictam, ad solas libri VI. propositiones quadrare.

DEFIN. IV.

Pfeiderer. in Schol. §. 1. observat, hanc definitionem non genuinam esse videri, cum in parallelogramma, parallelepipeda, prismata, cylindros, quorum altitudines in elementis commemorantur, non quadret. Praeterea eam deesse in versione Campani, nec Proclum ad I. 38. eius rationem habere. Nempe altitudo in figura rectilinea non absolute dicitur, sed semper refertur ad aliquod figurae latus, quod pro basi sumitur, et significat maximum perpendiculum, quod a puncto

εί. (Λόγος ἐκ' λόγων συγκείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινα ¹).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἀλλήλα' ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

"Εστω τρίγωνα μὲν τὰ $ABΓ$, $ΑΓΔ$, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ $ΕΓ$, $ΓΖ$, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $ΒΔ$ κάθετον ἀγομένην λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βᾶσιν οὕτως τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον, καὶ τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $ΒΔ$ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ $Θ$, $Δ$ σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν $ΒΓ$ βάσει ἴσαι ὁσαιοῦνται αἱ $ΒΗ$, $ΗΘ$, τῇ δὲ $ΓΔ$ βάσει ἴσαι ὁσαιοῦνται αἱ $ΔΚ$, $ΚΑ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΗ$, $ΑΘ$, $ΑΚ$, $ΑΛ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ $ΓΒ$, $ΒΗ$, $ΗΘ$ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ, καὶ τὰ $ΑΘΗ$, $ΑΗΒ$, $ABΓ$ τρίγωνα ἀλλή-

1) Hanc definitionem quintam, quae apud Peyrardum deest, at ipso teste in omnibus codicibus (quanquam in Cod. a. tantum in margine) reperitur (nisi quod pro *τινά* legunt *τινάς*) ex ed. Oxon. huc reposuimus, non quod ipsam genuinam esse putaremus, sed quo melius ea, quae viri docti de VI. 5. Def. disputant, intelligi possint. Campanus hanc definitionem non habet. Ed. Basil. pro *τινά*, quod Oxon. habet, legit *τινάς*. Vide caeterum Excurs. ad finem huius libri.

aliquo figurae in hoc latus demitti potest. Iam vero vel unum aliquod figurae punctum ab hac basi magis distat, quam reliqua figurae puncta quaecunque, et tum perpendicularum ab hoc puncto in basin demissum altitudo figurae, quatenus ad hanc basin refertur, vocatur: vel plura figurae puncta unam ean-

(5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.)

PROPOSITIO I. (Fig. 373.)

Triangula et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, inter se sunt ut bases.

Sint triangula $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, parallelogramma vero EF , ΓZ , quae eandem altitudinem habent, nempe perpendicularem ab A ad BA ductam; dico, esse ut basis $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ basin ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$, et parallelogrammum EF ad parallelogrammum ΓZ .

Producatur enim BA ex utraque parte ad puncta Θ , Λ , et ponantur basi $B\Gamma$ aequales quotcunque BH , $H\Theta$, basi vero $\Gamma\Delta$ aequales quotcunque ΔK , $K\Lambda$, et iungantur AH , $A\Theta$, AK , $A\Lambda$.

Et quoniam aequales sunt ΓB , BH , $H\Theta$ inter se, aequalia sunt et $A\Theta H$, AHB , $AB\Gamma$ triangula inter demque inter se a basi distantiam habent, adeoque I. 34. Cor. 4. in recta basi parallela sita sunt, ea ipsa distantia a basi autem maior est quovis perpendiculo ex alio quocunque figurae puncto in hanc basin demisso, tum iterum communis illa punctorum a basi distantia vel perpendiculum maius quovis alio a reliquis figurae punctis non in recta ista basi parallela sitis demisso altitudo figurae ad hanc basin relata vocatur. Itaque in triangulo quidem perpendiculum a vertice in oppositam basin demissum, in parallelogrammo autem perpendiculum e puncto quocunque rectae basi parallelae in basin demissum erit altitudo figurae, quatenus ea ad hanc basin refertur. Quum igitur duae figurae inter easdem parallelas constitutae sint,

λοις· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $B\Gamma$ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $A\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλάσιον ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ βάσις τῆς $\Gamma\Delta$ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $A\Lambda\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $A\Gamma\Delta$ τριγώνου καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῇ $\Gamma\Delta$ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $A\Theta\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Lambda\Gamma$ τριγώνῳ καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $\Gamma\Delta$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ $A\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $A\Lambda\Gamma$ τριγώνου καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, δύο δὲ τριγώνων τῶν $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, εἴληπται ἰσάνεις πολλαπλάσια τῆς μὲν $B\Gamma$ βάσεως καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, ἥτε $\Theta\Gamma$ βάσις καὶ τὸ $A\Theta\Gamma$ τρίγωνον τῆς δὲ $\Gamma\Delta$ βάσεως καὶ τοῦ $A\Gamma\Delta$ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια ἥτε $\Gamma\Delta$ βάσις καὶ τὸ $A\Lambda\Gamma$ τρίγωνον καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $\Theta\Gamma$ βάσις τῆς $\Gamma\Delta$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ $A\Theta\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $A\Lambda\Gamma$ τριγώνου καὶ εἰ ἴση, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ $B\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν οὕτως τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Gamma\Delta$ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν $AB\Gamma$ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ $A\Gamma\Delta$ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ $Z\Gamma$ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ

eandem altitudinem habent, et vice versa Cor. 3. et I. 34. Cor. 4.

DEFIN. V.

De hac definitione vide Excursum sub finem huius libri.

PROPOSITIO. I.

Obs. 1. Demonstratio partis prioris supponit corollarium ex I. 38. deductum simile corollario 2. ex Prop. 36. deducto.

se (I. 38.), quam multiplex igitur est basis $\Theta\Gamma$ ipsius $B\Gamma$ basis, tam multiplex est et triangulum $A\Theta\Gamma$ ipsius $AB\Gamma$ trianguli. Ex eadem ratione quam multiplex est basis $\Gamma\Delta$ ipsius $\Gamma\Delta$ basis, tam multiplex est et triangulum $A\Gamma\Delta$ ipsius $A\Gamma\Delta$ trianguli; et (I. 38.) si aequalis est basis $\Theta\Gamma$ ipsi basi $\Gamma\Delta$, aequale est et triangulum $A\Theta\Gamma$ ipsi triangulo $A\Gamma\Delta$; et si superat basis $\Theta\Gamma$ ipsam basin $\Gamma\Delta$, superat et triangulum $A\Theta\Gamma$ ipsum triangulum $A\Gamma\Delta$; et si minor, minus. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem basibus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, duobus vero triangulis $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, sumpta sunt aequae multiplicia basis $B\Gamma$ et trianguli $AB\Gamma$, ipsa basis $\Theta\Gamma$ et triangulum $A\Theta\Gamma$; basis vero $\Gamma\Delta$ et trianguli $A\Gamma\Delta$ alia utcumque aequae multiplicia, basis $\Gamma\Delta$ et triangulum $A\Gamma\Delta$. Et ostensum est si superat basis $\Theta\Gamma$ ipsam $\Gamma\Delta$ basin, superare et triangulum $A\Theta\Gamma$ ipsum triangulum $A\Gamma\Delta$; et si aequalis, aequale, et si minor, minus; est igitur (V. Def. 5.) ut basis $B\Gamma$ ad basin $\Gamma\Delta$ ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$.

Et quoniam trianguli $AB\Gamma$ duplum est parallelogrammum EF (I. 41.), ipsius vero trianguli $A\Gamma\Delta$ duplum est parallelogrammum $Z\Gamma$, partes autem eandem

quod pariter locum habere diximus ad I. 38., nempe triângula in iisdem parallelis constituta, sed super basibus inaequalibus, inaequalia esse, maius nempe illud, cuius basis maior sit. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 4.

Obs. 2. Quamvis autem enunciatum propositionis et expositio supponat triângula et parallelogramma invicem contigua, super basibus in directum iacentibus constituta, et quidem in adiecto schemate ad oppositas partes lateris communis

μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν $B\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τριγώνων οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν οὕτως τὸ $ΕΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΖΓ$ παραλληλόγραμμον. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἄχθῃ τις εὐθεΐα ¹⁾, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεΐα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

1) Edd. Basil. et Oxon. hic et sub finem propositionis addunt *παράλληλος*, quam vocem, quum in *παρὰ* iam continetur, ex fide Cod. a. cum Peyrardo omisimus.

delineata, demonstratio tamen aequè pertinet ad triangula et parallelogramma aequalium altitudinum: quibus ita dispositis, ut bases illorum sint in eadem recta linea, et figurae ipsae ad easdem huius rectae partes recta per vertices triangulorum ducta ei, in qua bases sunt, sit parallela (I. 28. I. 33.); parallelogrammorum vero latera basibus opposita in eandem incidunt rectam, ei, in qua bases sunt, parallelam (I. 28. I. 33.). Quare triangula etiam et parallelogramma aequalia sunt uel bases. (Pfleiderer. I. c. §§. 5—8. Rob. Simson. Cor. ad VI. 1. Cf. demonstratio et figura Clavii, et expositio Procli ad I. 33., qui ita habet: τὸ αὐτὸ ὕψος οὐδὲν διαφέρει ἢ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. Πάντα γάρ τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα

habent rationem quam earum aequae multiplices (V. 15.); est igitur ut triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$ ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum $Z\Gamma$. Quoniam igitur ostensum est, ut basis BF ad basin $\Gamma\Delta$ ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$; ut autem triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$ ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum $Z\Gamma$; igitur (V. 11.) basis BF ad basin $\Gamma\Delta$ ita parallelogrammum EF ad parallelogrammum $Z\Gamma$. Ergo triacula etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 338.)

Si uni laterum trianguli parallela ducatur quaedam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, recta sectiones coniungens reliquo trianguli lateri parallela erit.

παρὰλλήλοις ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἔστιν ὕψος, καὶ ἀναπάλιν. "Τῦπος γάρ ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς ἐτέρας παρὰλλήλου κἀθετος ἐπὶ τὴν λοιπὴν.

Obs. 3. Propositiones I. 35–38. theoremate VI. 1. quidem comprehenduntur, sed, cum huius demonstratio illis nitatur, non simul cum hoc una stabiliri demonstratione dici possunt, quamvis Proclus l. c. contrarium asserat. Pfeiderer. l. c. §. 10.

Obs. 4. Parallelogramma et triacula rectangula, quae unum latus circa angulum rectum commune, vel aequale habent, esse ut altera ipsorum latera circa angulum rectum, asserto generali VI. 1. et Obs. 2. continetur. Hinc parallelogramma et triacula, primum rectangula, tum (I. 35. I. 37.) quaelibet super eadem vel aequalibus basibus constituta, sunt uti altitudines. Quod ipsum Clavius simili modo infert, Commandinus polixius, nec legitime deducit. Pfeiderer. l. c. §§. 11. 12.

Τριγώνου γὰρ τοῦ $ABΓ$ παράλληλος μὲ τῶν πλευρῶν τῇ $ΒΓ$ ἤχθω ἡ $ΔΕ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΕ$, $ΓΔ$.

Ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον τῷ $ΓΔΕ$ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς $ΔΕ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΔΕ$, $ΒΓ$. Ἀλλὸ δέ τι τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ οὕτως ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ ὑπὸ γὰρ

Obs. 5. Ea, quae Obs. 4. ad initium dicta sunt, complectuntur Lemmata Elem. libro X. vulgo inserta, nempe ante X. 23. X. 32. Lemm. 2. ante X. 34. et Lemm. 3. ante X. 34. Pfeiderer l. c. §. 13.

Obs. 6. Per deductionem ad impossibile similem ei, quae demonstrandis I. 39. I. 40. adhibetur, facile demonstratur VI Prop. 1. et Obs. 2. et Obs. 4. conversae: nempe triangula et parallelogramma, quae sunt inter se, ut bases, aequales habere altitudines, vel eandem; et quae sunt inter se, ut altitudines, aequales habere bases, si unam et eandem non habeant. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 14. Clavius, aliique.

PROPOSITIO II.

Obs. 1. In Prop. 2. sumitur, rectam, quae basi trianguli parallela ducitur, necessario convenire cum reliquis trianguli lateribus ipsis aut productis, quod quidem necessario fieri patet ex I. 29. Cor. 3. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 15.

Obs. 2. Ex VI. Prop. 2. quod nempe sit $BA:AA=GE:EA$, sequitur etiam, esse inverse $AA:BA=EA:GE$ (Prop. B in Excursu ad Libr. V. Elem.) et componendo (V. 18.) $AB:BA=AE:EG$, et alterne (VI. 16.) $BA:GE=AA:EA$,

Trianguli enim $AB\Gamma$ uni laterum $B\Gamma$ parallela ducatur ΔE ; dico esse ut BA ad AA ita ΓE ad EA .

Iungantur enim BE , ΓA .

Aequale igitur est triangulum $B\Delta E$ triangulo $\Gamma\Delta E$ (I. 37.), in eadem enim basi sunt ΔE et intra easdem parallelas ΔE , $B\Gamma$. Aliud autem quoddam triangulum est $A\Delta E$; aequalia vero ad idem eandem habent rationem (V. 7.); est igitur ut triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$, ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$. Sed ut triangulum $B\Delta E$ ad $A\Delta E$ ita BA ad AA ; nam cum sub eadem altitudine sint, nempe sub et $AB: A\Gamma = AA: AE = BA: E\Gamma$. Cf. Pfliderer. l. c. §§. 16. 17. 22.

Obs. 3. Pariter earum propositionum omnium, quae Obs. 2. continentur, conversae eodem modo locum habent, ac in parte altera VI. Prop. 2. Conversa partis prioris demonstratur. Nempe ex suppositionibus $AB: \left(\frac{AA}{AB}\right) = A\Gamma$

$\left(\frac{AE}{E\Gamma}\right)$ dividendo (V. 17.), pariterque ex suppositione $BA: \Gamma E = AA: EA$ alterne (V. 16.) consequitur, esse $BA: AA = \Gamma E: EA$, unde ex parte altera V. Prop. 2. consequitur, omnibus his casibus esse rectam ΔE parallelam basi. Cf. Pfliderer. l. c. §§. 20. 21. 22.

Obs. 4. Quae in VI. Prop. 2. similiterque ea, quae in Obs. 2. et 3. continentur, pariter locum habent, si recta ΔE ita ducatur (Fig. 339. 340.), ut non ipsis trianguli $AB\Gamma$ lateribus, sed saltem iis vel ultra verticem A , vel ultra basin $B\Gamma$ productis occurrat, quod facile eodem modo probatur. Cf. Pfliderer. l. c. §§. 23. 24. Unde et Rob. Simson. et Playfair. rem ita enunciant: si uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta: et, si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones

τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν AB καθέκτον ἀγομένην, πρὸς ἀλλήλας εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$ καὶ ὡς ἄρα ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ $Α Β Γ$ τριγώνου πλευραὶ αἱ $Α Β$, $Α Γ$ ἀνάλογον τετυμῆσθωσαν κατὰ τὰ $Δ$, $Ε$ σημεία, ὡς ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ $Δ Ε$ · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἢ $Δ Ε$ τῇ $Β Γ$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως ἢ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $Β Δ$ πρὸς τὴν $Δ Α$ οὕτως τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον, ὡς δὲ $\Gamma Ε$ πρὸς τὴν $Ε Α$ οὕτως τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον καὶ ὡς ἄρα τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον οὕτως τὸ $\Gamma Δ Ε$ τρίγωνον πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον. Ἐκατέρων ἄρα τῶν $Β Δ Ε$, $\Gamma Δ Ε$ τριγώνων πρὸς τὸ $Α Δ Ε$ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἰσὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $Β Δ Ε$ τρίγωνον τῷ $\Gamma Δ Ε$ τριγώνῳ· καὶ

coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Omnia, etiam ea, quae in observationibus 2—4 dicta sunt, sic etiam licet complecti: quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum per duas rectas parallelas tam verticem inter et alteram earum, quam ipsas inter patallelas abscinduntur segmenta, sic proportionalia sunt, ut, quam rationem mutuo habent duo segmenta unius cruris, eandem invicem habeant duo segmenta homologa, seu similiter sita cruris alterius; et ut singula unius cruris segmenta ad segmenta homologa cruris alterius sint in eadem ratione. Vicissim parallelæ sunt rectæ, quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum, seg-

perpendiculari ab E ad AB ducta, inter se sunt ut bases (VI. 1.). Ex eadem ratione ut triangulum $\Gamma\Delta E$ ad $\Delta\Delta E$ ita ΓE ad EA ; ut igitur $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA (V. 11.).

Sed trianguli $AB\Gamma$ latera AB , AT proportionaliter secta sint in punctis Δ , E , ut $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA , et iungantur ΔE ; dico parallelam esse ΔE ipsi BT .

Iisdem enim constructis, quoniam est ut $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA , sed ut $B\Delta$ ad ΔA ita triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $\Delta\Delta E$, ut ΓE vero ad EA ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $\Delta\Delta E$ (VI. 1.); erit (V. 11.) ut triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $\Delta\Delta E$ ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $\Delta\Delta E$. Utrumque igitur triangulorum $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $\Delta\Delta E$ eandem habet rationem. Aequale igitur est (V. 9.) triangulum $B\Delta E$ triangulo $\Gamma\Delta E$; et sunt super eadem basi ΔE . Aequalia autem triangula super eadem basi

menta alterutro ordine indicato proportionalia abscindunt. Cf. Pfliderer. l. c. §. 25. Denique observari potest, similes proportionales locum habere, si non duae tantum, sed plures rectae parallelae a cruribus anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum segmenta abscindant, et vice versa. Cf. Tacquet. VI. 2. Cor. 1.

Obs. 5. Pariter duas rectas non contiguas, duabus interceptas parallelis, pariter ab tertia his parallela proportionaliter secari, et vicissim, facile probatur, et ad segmenta etiam pluribus, quam tribus rectis inter se parallelis abscissa extendi potest. Cf. Pfliderer. l. c. §§. 29. 30. 31. et, quae ibi citantur, demonstrationes Euclidis in VI. 10. et XI. 17. adhibitae.

είσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔE . Τὰ δὲ ἴσα τρί-
 γωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
 παραλλήλοις ἐστίν. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ
 $B\Gamma$. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα
 τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βά-
 σεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ
 τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα
 τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευ-
 ραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιξεννυ-
 μένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Propositio haec valet de triangulis aequicruris pariter ac
 non aequicruris. Et de aequicruris quidem pars prior propo-
 sitionis iam ex I. 4. pars posterior ex I. 8. patet. Cf. I. 26.
 Cor. 1. 2 Quod triangula non aequicrura attinet, illud ante
 omnia facile ostendetur, rectam, quae angulum ad verticem
 bifariam secat, basin ad angulos obliquos (in aequicruris an-
 guli fiunt recti) et in partes inaequales secare, sic, ut minus
 segmentum adiaceat cruri minori, atque is angulus acutus sit,
 qui cruri minori opponitur. Nempe, si (Fig. 342.) $\Delta\Gamma > AB$,
 et $\Delta\Delta$ angulum $B\Delta\Gamma$ bifariam dividit, ob angulum $B > \Gamma$
 (I. 18.), sunt anguli $B + \Delta AB > \Gamma + \Delta\Delta F$, ideoque (I. 32.)
 $\Delta\Delta\Gamma > \Delta\Delta B$. Et, ab $\Delta\Gamma$ abscissa $\Delta E = AB$, et juncta recta
 ΔE , sunt (I. 4.) $\Delta E = \Delta B$, et ang. $\Delta E\Delta = \Delta B\Delta$. Quare, pro-
 ducta AB versus Z , est ang. $ABZ = \Delta E\Gamma$ (I. 13.). At ABZ
 $> \Gamma$ (I. 16.), ergo $\Delta E\Gamma > \Gamma$, ideoque $\Delta\Gamma > \Delta E$ (I. 19.) i. e.
 $\Delta\Gamma > \Delta B$. Pfleiderer. l. c. §§. 32. 33.

Obs. 2. Quae igitur trianguli non aequicruri basin $B\Gamma$
 bifariam secat ex vertice trianguli A ducta recta AH in huius
 segmentum $\Delta\Gamma$ incidit, proinde in inaequales dividit angulum
 ad verticem $B\Delta\Gamma$, sic, ut maior sit angulus $B\Delta H$, qui mi-

constituta et intra easdem parallelas sunt (I. 39.). Parallela igitur est AE ipsi BF . Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 341.)

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basin; segmenta basis eandem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si segmenta basis eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, recta a vertice ad sectionem ducta bifariam secat trianguli angulum.

nori cruri AB adiacet: eademque AH obliqua est basi, ob angulum $AHF >$ obtuso AAG , et $AHB <$ acuto AAB (I. 16.), quae posterior pars etiam ex I. 25. consequitur. Cf. Pflaiderer. I. c. §§. 34. 35.

Obs. 3. In demonstratione VI. Prop. 3., quae complet ea, quae Obs. 1. 2. dicta sunt, ostendendum est ante omnia, rectam FE (Fig. 341.) convenire cum producta BE , quod facile ope I. 29. Cor. 3. fiet, vel simili modo, quo in demonstratione VI. 4. res ad I. Ax. 11. vel I. Post. 5. reducitur. Poterat autem constructio etiam ita absolvi, ut a producta BA abscinderetur segmentum $AE=AG$, ubi tum facile ex parte posteriore VI. Prop. 2. ostenderetur, iunctam FE parallelam esse rectae AE . Et forte haec ipsa applicatio partis posterioris VI. 2. indicaverit, hanc constructionem, et, quae inde fluit, demonstrationem genuinam potius esse, quam quae nunc in elementis exstant, quae, nisi suppleantur, quae initio huius observationis diximus, quodammodo manca videri possit. Cf. Pflaiderer. I. c. §§. 37—40.

Obs. 4. Rectae AZ , BH , FE (Fig. 343.) bifariam secantes angulos cuiuslibet trianguli, et ad latera usque opposita productae, ita se mutuo in puncto sectionis communi

"Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία διχα ὑπὸ τῆς AA εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$ οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$.

"Ηχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ AA παράλληλος ἡ $ΓΕ$, καὶ διαχθεῖσα ἡ BA συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ E .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AA , $E\Gamma$ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ $A\Gamma$, ἡ ἄρα ὑπὸ AGE γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ΓAA$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΓAA$ τῇ ὑπὸ $BA\Delta$ ὑπὸκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ ἄρα τῇ ὑπὸ AGE ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AA , $E\Gamma$ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ BAE , ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ AEG . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

(Obs. 2. ad IV. 4. Cf. Pfeiderer. §§. 41. 42.) dividunt, ut cuiuslibet segmentum adiacens angulo trianguli sit ad eius segmentum adiacens lateri opposito trianguli, ut summa laterum trianguli comprehendentium illum angulum est ad latus hoc ei oppositum; tota autem recta sit ad segmentum ipsius adiacens (angulo lateri) trianguli, uti perimeter trianguli est ad (summam laterum circa hunc angulum). Nempe ex VI. 3.

$$\text{erit } AA:AZ = \left(\frac{AB:BZ, \text{ ob ang. } ABA=ZBA}{AF:FZ, \text{ ob ang. } AFA=ZFA} \right) \\ = AB+AF:BF \text{ (V. 12.)}$$

$$\text{et hinc } AZ:\left(\frac{AA}{AZ}\right) = AB+AF+BF:\left(\frac{AB+AF}{BF}\right) \text{ (V. 18.).}$$

Eodemque modo ostenditur, esse

$$BH:BA:AH = AB+BF+AF:AB+BF:AF$$

$$\Gamma E:\Gamma A:AE = AF+BF+AB:AF+BF:AB.$$

Nominatim itaque in triangulo aequilatero sunt

$$\left. \begin{array}{l} AZ:AA:AZ \\ BH:BA:AH \\ \Gamma E:\Gamma A:AE \end{array} \right\} = 3:2:1.$$

Pfeiderer. l. c. §§. 43. 44.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et secetur angulus $BA\Gamma$ bifariam ab ipsa AA recta; dico esse ut BA ad AT ita BA ad AT .

Ducatur enim per Γ ipsi AA parallela ΓE (I. 31.), et producta BA conveniat cum ipsa in E .

Et quoniam in parallelas AA , ET recta incidit AT ; ergo angulus ATE aequalis est angulo TAA (I. 29.). Sed TAA ipsi BAA ponitur aequalis; ergo et BAA ipsi ATE est aequalis. Rursus, quoniam in parallelas AA , ET recta incidit BAE , angulus exterior BAA aequalis est interiori AET (I. 29.). Ostensus autem est et ATE ipsi BAA aequalis; ergo angulus ATE

Obs. 5. Vicissim, si recta AZ trianguli perimetro terminata, et aliquem eius angulum bifariam dividens ita secatur in puncto A , ut sit $AA:AZ=AB+AT:BT$; caeterae etiam rectae per punctum huius sectionis A ex verticibus angulorum trianguli ductae bifariam hos angulos dividunt. Non enim bifariam dividant angulos B , Γ rectae BA , ΓA , sed $B\theta$, $\Gamma\theta$ (Obs. 2. ad IV. 4.): itaque foret (Obs. 4.) $A\theta:\theta Z=BA+AT:BT$ (Obs. 4.): ideoque $A\theta:\theta Z=AA:AZ$ (V. 11.), $AZ:\theta Z=AZ:AZ$ (I. 18.) et $\theta Z=AZ$ (V. 9.) contra I. Ax. 9. Simili modo enunciantur, et vel immediate similiter demonstrantur, vel ad proxime praecedentem casum ope V. 17. reducuntur conversae reliquarum partium Obs. 4. Pfeiderer. l. c. §§. 45. 46.

Obs. 6. Quodsi iam recta ducatur, quae bifariam dividat angulum exteriorem ad verticem trianguli, recta ita ducta 1) in triangulo aequicruro $AB\Gamma$ (Fig. 344.) parallela erit basi BT . Nam, quum ex supp. angulus $ZAB=\theta AB=\frac{ZAB}{2}=\frac{B+\Gamma}{2}$ (I. 32.) $=B=F$ (I. 5.), adeoque θA parallela rectae BT (I. 27.). Et conversa quoque, nempe, si θA parallela sit rectae BT , fore angulum ZAB ad θA bisectum, ope I. 29. et I. 5. facile ostendetur. 2) In triangulo autem non aequicruro

ὕπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΕΓ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΕ$ πλευρᾷ τῇ $ΑΓ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΒΓΕ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΕΓ$ ἤκται ἡ $ΑΔ$ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. Ἰση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΑΓ$ · ὥς ἄρα ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΔ$ · λέγω ὅτι διχᾶ τέμνεται ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία ὑπὸ τῆς $ΑΔ$ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$, ἄλλα καὶ ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$ · τριγώνου γὰρ τοῦ $ΒΓΕ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΕΓ$ ἤκται ἡ $ΑΔ$ καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΒΑ$

(Fig. 345.), si angulus exterior ZAB bisecetur recta $AΘ$, hæc ipsa recta cum basi $BΓ$ productâ ad eam partem, ad quam est crur minus AB , concurrent in puncto aliquo H . Nam, quum angulus $ZAB = Γ + ABΓ$ (I. 32.), at $ABΓ > Γ$ (I. 18.) erit $ZAB < 2ABΓ$, adeoque $ΘAB = \frac{ZAB}{2} < ABΓ$, et $ΘAB + ABH < ABΓ + ABH < 2$ rect. (I. 13.) unde $ΘA$, BH ex hac parte concurrent (I. Post. 5.). Pfleiderer. §§. 47. 48.

Obs. 7. Recta $AΘ$, quæ angulum externum ZAB trianguli non æquicruri bisecat, cum basi ad partem cruris minoris productâ concurrent (Obs. 6.) et ita quidem, ut segmenta in ipsa inter punctum hoc concursus et terminos basis abscissa BH , $ΓH$ eandem habeant rationem, quam trianguli crura BA , $ΓA$ quibus adiacent. Abscindatur enim ab $ΑΓ$ recta $ΑΕ = AB$, et iungatur BE , eritque angulus $ZAB = ABE + AEB$ (I. 32.)

ipsi AET est aequalis; quare et latus AE lateri AT est aequale (I. 6.). Et quoniam uni laterum trianguli BTE nempe ET parallela ducta est AD ; erit (VI. 2.) ut BA ad AT ita BA ad AE . Aequalis autem est AE ipsi AT ; ut igitur BA ad AT ita BA ad AT .

Sed sit ut BA ad AT ita BA ad AT ; et iungatur AD ; dico bifariam sectum esse angulum BAT ab AD recta.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BA ad AT ita BA ad AT , sed et ut BA ad AT ita est BA ad AE (VI. 2.); trianguli enim BTE uni lateri ET parallela ducta est AD ; erit igitur BA ad AT ita BA ad AE ; aequalis igitur AT ipsi AE (V. 9.); quare

$=2ABE$ (I. 5.), adeoque $\angle AB = \left(\frac{\angle ZAB}{2}\right) ABE$, et AH parallela rectae BE (I. 27.), adeoque $BH:GH = AB:AT$ (Obs. 2. ad VI. 2.) $= AB:AT$ (V. 11.). Vicissim, si $BH:GH = AB:AT$, iuncta AH angulum ZAB bisecabit. Rursus enim, facta $AE = AB$, iunctaque BE , erit $BH:GH = AE:AT$ (V. 11.), adeoque rectae AH , BE parallelae (VI. 2. Obs. 3.), proinde angulus $\angle AB = ABE$ (I. 29.), et $\angle ZAB = AEB$ (I. 29.), adeoque, ob $AB = AE$ (I. 5.), etiam $\angle AB = \angle ZAB = \frac{\angle ZAB}{2}$. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 48.

Obs. 8. Poterat autem iuberi, ut recta BE rectae AG parallela agatur, et demonstratio eodem modo absolvi ac in textu elementorum VI. 3., atque hac ratione rem efficiunt Rob. Simson. in Prop. A. post VI. 3. inserta, quae idem enunciat, quod praecedens Obs. 7., ac Playfair. Et Simson. qui-

πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἢ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$ ἴση ἄρα ἢ $ΑΓ$ τῇ $ΑΕ$, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓΕ$ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΓΑΔ$ ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς $ΑΔ$ εὐθείας. Ἐὰν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 8.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

dem monet: „casus secundus, qui habetur in Prop. A, pariter utilis ac primus, tertiae propositioni additus est, videlicet is, quo angulus trianguli exterior bifariam secatur recta linea. Demonstratio eius simillima est demonstrationi primi casus, et ob hanc forsam causam tum ea, tum enunciatio casus, omissa est ab imperito quodam editore. Pappus certe hac tanquam propositione elementari (simul cum ipsa VI. 3.) utitur in VII. Prop. 39. Collect. Mathem.“ Utramque etiam propositionem, nempe VI. 3. et alteram ei similem Obs. 7. allatam uno enunciato complecti licet, quod et Playfair. notat. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 49. 50.

Obs. 9. Quodsi simul angulus trianguli non aequicruri $ΒΑΓ$ (Fig. 346.) recta $ΑΔ$, et anguli externi $ΒΑΖ$ recta $ΒΘ$ bisecetur, angulus $ΑΑΘ$, quem rectae $ΑΔ$, $ΑΘ$ efficiunt, rectus erit. Nam, quum $ΒΑΖ + ΒΑΓ = 2$ Rect. (I. 13. erit $ΘΑΔ = \left(\frac{ΒΑΖ}{2} + \frac{ΒΑΓ}{2} = \right)$ Recto. Quodsi super eadem basi $ΒΓ$ aliud triangulum $αΒΓ$ constitutum sit, cuius crura eandem inter se rationem habent, quam crura trianguli $ΑΒΓ$, ita, ut sit $αΒ : αΓ = ΑΒ : ΑΓ$, et bisecetur etiam huius trianguli angulus ad verticem $ΒαΓ$, et qui ei deinceps est, $ζαΒ$, rectae hos angulos bisecant-

et angulus $A\Gamma E$ angulo $A\Gamma E$ est aequalis (I. 5.) Sed $A\Gamma E$ exteriori BAA aequalis (I. 29.); $A\Gamma E$ vero alterno ΓAA est aequalis; angulus BAA igitur angulo ΓAA est aequalis. Itaque angulus $B\Gamma A$ bifariam secus est ab AA recta. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 347.)

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera circa aequales angulos; et homologa, quae aequales angulos subtendunt, latera.

tes ad eadem puncta A, H baseos ipsius et productae vergent, ad quae rectae AA, AH , quae angulos $B\Gamma A, ZAA$ bifariam secant. Si enim fieri potest, recta v. c., quae angulum $Ba\Gamma$ bifariam secat, secet basin in puncto K , quod a A diversum sit, eritque ex VI. 3. $BK:\Gamma K=Ba:\Gamma a=BA:\Gamma A$ (supp.) $=BA:\Gamma A$ (VI. 3.), adeoque erit $B\Gamma:\Gamma K=B\Gamma:\Gamma A$ (V. 18.), et $\Gamma K=\Gamma A$ (V. 9.), quod est absurdum. Et eodem modo res de recta, quae angulum ζaE bifariam secat, probatur.

Obs. 10. Quum rectae $H\alpha, Aa$ pariter inter se rectum angulum efficiant, idemque obtineat in omnibus triangulis non aequicruris super eadem basi $B\Gamma$ constitutis, quorum crura eandem inter se rationem habent, vertices omnium eiusmodi triangulorum erunt in semicirculo super HA descripto, sive iste semicirculus erit locus geometricus verticum omnium triangulorum, quorum basis est $B\Gamma$, et quorum crura eandem inter se rationem habent, quam habet AB ad $A\Gamma$ (III. 31. Cor. 2.). Cf. Apollon. Loc. Plan. II. Loc. 2. De triangulis aequicruris vide I. 26. Cor. 6.

Obs. 11. Quum sit (Obs. 7.) $BH:\Gamma H=AB:A\Gamma$ vel $BH:\Gamma H=\left(\frac{\Gamma A}{HA-BH}\right):\left(\frac{\Gamma A}{\Gamma H-HA}\right)$ rectae HB, HA, HI

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΙΕ$ ἴσων ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $ΑΒΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ΑΒΓ$, $ΔΓΕ$ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ $ΒΓ$ τῇ $ΓΕ$. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ $ΒΑ$, $ΕΔ$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Z .

erunt harmonice continue proportionales. Cf. dicta ad Libr. V. Defin. 8. Et conversa quoque facile demonstrabitur, nempe, si sit $HB:HG=BA:GA$, fore etiam $AB:AG=BA:GA=HB:HG$, et rectam AA angulum $BAΓ$ pariterque rectam AH angulum ZAH bisecare.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Triangula, qualia in hac propositione occurrunt, vel (I. 32. Cor. 3.) quorum duo saltim anguli unius duobus alterius, singuli singulis aequales sunt, iuxta VI. Def. 1. similia dicuntur. Propositiones itaque IV. 2. et IV. 3. docent circulo dato inscribere et circumscribere triangulum simile dato. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 54. 59. Quum autem in triangulis in hac propositione occurrentibus latera, quae angulos aequales subtendunt, homologa dicuntur, id ex V. Def. 12. dicere vult, esse $AB:BG=AG:GE$, et $BG:AG=GE:AE$, et $AB:AG=AG:AE$, unde et alterne sequitur, $AB:AG=BG:GE=AG:AE$, vel, quam rationem habeant duo duorum triangulorum aequiangulorum latera, aequalibus angulis op-

Sint aequiangula triangula $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, aequalem habentia angulum $B\Delta\Gamma$ angulo $\Gamma\Delta E$, angulum vero $\Delta\Gamma B$ angulo $\Delta E\Gamma$, et praeterea angulum $AB\Gamma$ angulo $\Delta\Gamma E$; dico triangulorum $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ proportionalia esse latera circa aequales angulos; et homologa, quae aequales angulos subtendunt, latera.

Ponatur enim $B\Gamma$ in directum ipsi ΓE . Et quoniam anguli $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma B$ duobus rectis maiores sunt (I. 17.), aequalis autem $\Delta\Gamma B$ ipsi $\Delta E\Gamma$, anguli igitur $AB\Gamma$, $\Delta E\Gamma$ duobus rectis minores sunt; rectae igitur BA , EA productae convenient (I. Post. 5.) Producantur, et convenient in Z .

posita, eandem habere bina illorum reliqua latera aequalibus angulis opposita, et (V. 12.) perimetros utriusque trianguli Cf. Pfeiderer. I. c. §§. 51. 52.

Obs. 2. Recta, quae in triangulo parallela ducitur uni eius lateri, abscindit (I. 29.) triangulum simile toti (Pfeiderer. I. c. §. 60. Clavius VI. Cor. 4. alii.). Recta haec se habet ad latus trianguli, cui est parallela, uti segmentum alterutius reliquorum trianguli laterum ipsam inter et verticem anguli oppositi comprehensum est ad hoc latus (Pfeiderer. I. c. §. 61.). Eadem per rectas ex vertice trianguli opposito ductas in eadem ratione secatur, ac basis trianguli, seu latus eius, cui est parallela (Pfeiderer. I. c. §. 62. Clavius in Schol. ad IV. 4. Theor. 2.). Quod idem valet, si recta trianguli lateri parallela secat eius reliqua latera producta (Pfeiderer. I. c. §. 63. sq.). Denique, si trianguli alicuius lateri plures rectae parallelae ducuntur, quae cum reliquis lateribus trianguli conveniunt, erunt hae omnes inter se, ut homologa crura triangulorum a parallelis his abscissorum.

Obs. 3. Praemissa IV. 4. Prop., quae non pendet a VI. 3. facile etiam VI. 3. et quae ei adiecta fuit similis propositio VI. 7.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$ γωνία τῇ ὑπὸ $Α Β Γ$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Β Ζ$ τῇ $Γ Δ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Α Γ Β$ τῇ ὑπὸ $Δ Ε Γ$, παράλληλος ἐστὶν ἡ $Α Γ$ τῇ $Ζ Ε$ παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $Ζ Α Γ Δ$. ἴση ἄρα ἡ μὲν $Ζ Α$ τῇ $Δ Γ$, ἡ δὲ $Α Γ$ τῇ $Ζ Δ$. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $Ζ Β Ε$ παρά μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $Ζ Ε$ ἤνται ἡ $Α Γ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $Β Α$ πρὸς τὴν $Α Ζ$ οὕτως ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$. Ἰση δὲ ἡ $Α Ζ$ τῇ $Γ Δ$ ὡς ἄρα ἡ $Β Α$ πρὸς τὴν $Γ Δ$ οὕτως ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ $Α Β$ πρὸς τὴν $Β Γ$ οὕτως ἡ $Δ Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ $Γ Δ$ τῇ $Β Ζ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$ οὕτως ἡ $Ζ Δ$ πρὸς τὴν $Δ Ε$. Ἰση δὲ ἡ $Ζ Δ$ τῇ $Α Γ$ ὡς ἄρα ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Ε$ οὕτως ἡ $Α Γ$ πρὸς τὴν $Ε Δ$, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ $Β Γ$ πρὸς τὴν $Γ Α$ οὕτως ἡ

Obs. 7. ita probari potest. Si recta $Α Δ$ (Fig. 348.) bifariam dividat angulum $Β Α Γ$ trianguli non aequicruri $Α Β Γ$, erit $Α Β : Α Γ = Β Δ : Γ Δ$. Demittantur enim ex $Β, Γ$ in $Α Δ$ perpendiculara $Β Δ, Γ Ο$, eruntque triangula $Β Α Δ, Γ Ο Δ$ aequiangula, pariterque triangula $Β Α Δ, Γ Ο Α$, unde erit $Β Α : Α Γ = Β Δ : Γ Ο = Β Δ : Γ Δ$ (VI. 4.). Ita rem demonstrat Thom. Simpson. (Elem. of Geom. IV. 18.). Et similiter res de recta, quae angulum externum bifariam secat, demonstratur.

Obs. 4. Si (Fig. 349.) latera $Β Γ, Α Γ$ trianguli $Α Β Γ$ bifariam secantur per rectas $Α Δ, Β Ε$ ex verticibus angulorum oppositorum $Α, Β$ ductas; recta quoque $Γ Ζ$ ex tertii anguli $Γ$ vertice ducta per punctum sectionis $Θ$ duarum $Α Δ, Β Ε$ bifariam secat tertium trianguli latus $Α Β$. Quippe ob $Β Δ = Δ Γ, Ε Α = Ε Γ$, utrumque triangulum $Α Β Δ, Β Α Ε$ dimidium est trianguli $Α Β Γ$ (I. 38. vel VI. 1.): igitur triang. $Α Β Δ =$ triang. $Β Α Ε$, demtoque communi triang. $Α Β Θ$, erit triang. $Β Δ Θ =$ triang. $Α Θ Ε$, pariterque 2 triang. $Β Δ Θ = 2$ triang. $Α Θ Ε$, h. e. ob $Β Δ = Δ Γ$, et $Α Ε = Ε Γ$, triang. $Γ Β Θ =$ triang. $Γ Θ Α$ (I. 38. vel VI. 1.).

Et quoniam aequalis est angulus $\angle FE$ angulo $\angle ABF$, parallela igitur est BZ ipsi FA (I. 28.). Rursus, quoniam aequalis est $\angle FB$ ipsi $\angle EF$, parallela est AF ipsi ZE ; parallelogrammum igitur est ZAF ; aequalis igitur ZA ipsi AF (I. 34.), AF vero ipsi ZA . Et quoniam uni laterum trianguli ZBE nempe ZE ducta est parallela AF , est ut BA ad AZ ita BF ad FE . (VI. 2.). Aequalis autem AZ ipsi FA ; ut igitur BA ad FA ita BF ad FE (V. 7.), et alterne (V. 16.) ut AB ad BF ita AF ad FE . Rursus, quoniam parallela est FA ipsi BZ , est igitur ut BF ad FE ita ZA ad AE (VI. 2.). Aequalis autem ZA ipsi AF ; ut igitur BF ad FE ita AF ad EA (V. 7.), alterne igitur (V. 16.) ut BF ad FA ita FE ad EA . Et quoniam ostensum est, ut AB quidem ad

Atqui tam triang. $FB\theta$: triang. FBZ) = $F\theta$: FZ (VI. 1.). Ergo
quam triang. $F\theta A$: triang. FAL) =
(V. 11.) triang. $FB\theta$: triang. FBZ = triang. $F\theta A$: triang. FAZ ,
et hinc (V. 14.) triang. FBZ = triang. FAZ , ac (I. 38. conv.).
 BZ = AZ . Cf. Pfleiderer. l. c. §. 66.

Obs. 5. Tres rectae, quae ex singulorum trianguli cuiuscunque ABF angulorum verticibus A , B , F (Fig. 350.) ducuntur ad puncta A , E , Z laterum oppositorum, ubi haec bifariam dividuntur, in eodem intra triangulum puncto se secant. Duas enim AA , BE , quae se in puncto θ secant, trahat, si fieri potest, tertia FZ in punctis K , H . Per puncta F , θ agatur recta $F\theta A$. Cum haec bifariam secet latus AL in puncto A , ubi ei occurrit (Obs. 4.), atque hoc non coincidere possit cum puncto Z (I. Post. 6.): foret AB bifariam secta in duobus punctis Z , A , quod fieri nequit (I. 9. I. 7. Ax.). Cf. Pfleiderer. l. c. §. 67.

Obs. 6. Eadem tres rectae (Fig. 349.) ita se in puncto communi θ secant, ut segmentum cuiuslibet adiacens lateri trianguli, eiusdemque segmentum adiacens vertici anguli op-

$ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, ὡς δὲ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ καὶ διόσον ἄρα ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$. Τῶν ἄρα ἰσγωνίων καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσγωνία ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ἐφ' ἧς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὡς δὲ τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν $ΖΑ$, καὶ ἔτι ὡς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσγωνιὸν ἔστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ,

positi, ac tota recta sicut uti 1:2:3; triangulum vero in sex triangula aequalia dividunt; ad punctum autem sectionis communis usque tantum ductae triangulum dividunt in tria aequalia. Nempe 1) ob $BA:AG=AB:BI=AZ:AZ$ (supp. et V. 5. Def.), sunt AE et AB , AZ et AG parallelae (VI. 2.). Quare (I. 15. et I. 29.) triangula $AΘE$ et $AΘB$, $AΘZ$ et $AΘΓ$ sunt aequiangula, adeoque $AΘ:ΘA=$

$$\left(\begin{array}{l} \Theta E:\Theta B=AE:AB \text{ (VI. 4.)} \\ \Theta Z:\Theta \Gamma=AZ:AG \end{array} \right) = \frac{AG:BI}{=BA:BG} \text{ (VI. 4. 2. Obs.)} =$$

$$1:2 \text{ et } AΘ:ΘA:AA=\Theta E:\Theta B:BE=\Theta Z:\Theta \Gamma:Z\Gamma=1:2:3 \text{ (V. 18.).}$$

$$2) \triangle \Theta BA=\triangle AΘB \text{ (Obs. 4. Dem.)} =\triangle AΓ=\triangle EΓ \text{ (I. 38.) et triang. } \left(\frac{\Theta ZB:\Theta \Gamma B}{\Theta ZA:\Theta \Gamma A} \right) =\Theta Z:\Theta \Gamma \text{ (VI. 1.)} =1:2 \text{ (nr. 1.)}$$

$$\text{itaque } \frac{2\Theta ZB=\Theta \Gamma B=2\Theta AB}{2\Theta ZA=\Theta \Gamma A=2\Theta AE} \text{ et pariter } \frac{\Theta ZB=\Theta AB}{\Theta ZA=\Theta AE}$$

$$3) \triangle \Theta BΓ=\triangle AΓ \text{ (Obs. 4. Dem.) et } \triangle \Theta AB=\left(\frac{2\Theta ZB}{2\Theta ZA} \right)$$

$$\text{(I. 38.)} =\left(\frac{\Theta \Gamma B}{\Theta \Gamma A} \right) \text{ (nr. 2.). Cf. Pfleiderer. l. c. §. 68.}$$

BF ita AF ad TE ; ut vero BF ad FA ita TE ad EA ; et ex aequo igitur (V. 22.) ut BA ad AF ita FA ad AE . Aequiangulorum igitur etc.

PROPOSITIO V. (Fig. 351.)

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula ABF , AEZ latera proportionalia habentia, sitque ut AB quidem ad BF ita AE ad EZ , ut BF vero ad FA ita EZ ad ZA ; et adhuc ut BA ad AF ita EA ad AZ ; dico æquiangulum esse triangulum ABF triangulo AEZ , et æquales habere angulos, quos homologa latera subten-

Obs. 7. Cum in triangulis æquilateris rectæ bifariam dividentes angulos bifariam quoque secant latera opposita, et vicissim (I. 4. I. 8.); liquet identitas conclusionum (Obs. 4. ad VI. 3. et VI. 4. Obs. 6.) ad ipsa applicatarum. Eademque per rectas AA , BE , FZ in sex, per rectas $A\theta$, $B\theta$, $F\theta$ in tria triangula similia et æqualia dividuntur. Cf. Pflaiderer. l. c. §. 69.

Obs. 8. Vicissim, si recta AA ab vertice aliquo trianguli ad punctum bisectionis lateris oppositi A ducta ita secatur in θ , ut segmentum ipsius $A\theta$ adiacens vertici trianguli duplum sit alterius segmenti $A\theta$ adiacentis lateri opposito trianguli; ceteræ etiam rectæ per punctum θ huius sectionis ex verticibus trianguli ductæ bifariam latera iis opposita secant.

Ductis nempe rectis $B\theta E$, AE , erunt triangula $\begin{matrix} BA\theta = 2BA\theta \\ EA\theta = 2EA\theta \end{matrix}$ (VI. 1.) igitur $\triangle BAE = 2\triangle BAE$. Sed ob $BF = 2BA$ (supp.) etiam $\triangle BFE = 2\triangle BAE$ (VI. 1.). Quare $\triangle BAE = \triangle BFE$,

καὶ ἴσας ἔχουσι τὰς γωνίας, ὅφ' αἷς ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι; τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, τὴν δὲ ὑπὸ $BΓA$ τῇ ὑπὸ EZA , καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $BΑΓ$ τῇ ὑπὸ EAZ .

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z , τῇ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ZEH , τῇ δὲ ὑπὸ $BΓA$ ἴση ἢ ὑπὸ EZH . λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ $BΑΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ EHZ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ EHZ τριγώνῳ. τῶν ἄρα $ABΓ, EHZ$ τριγώνων ἀνάλογον εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ . Ἀλλ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως ὑπόκειται ἡ $ΔE$ πρὸς τὴν EZ . ὡς ἄρα ἡ $ΔE$ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ . ἐκότερα ἄρα τῶν $ΔE, HE$ πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔE$ τῇ HE . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΔZ$

et hinc (I. 38. conv.) $AB=HE$. Similiterque ostenditur, vel nunc ex Obs. 4. inferitur, ducta $ΓOZ$ recta fieri etiam $AZ=BZ$. Cf. Pflaiderer. l. c. §. 70.

Obs. 9. Pariter, si tres rectae OA, OB, OG ab puncto O intra triangulum ad vertices angulorum eius ductae triangulum in tria aequalia dividunt; rectae hae ad latera usque trianguli opposita continuatae bifariam ea dividunt. Est enim (VI. 1.) $\triangle AOB: \triangle OAB=AO:OA=AOΓ:OΓ$. Quare, ob $\triangle AOB=\triangle AOG$ (supp.), etiam $\triangle OAB=\triangle OΓ$ (V. 12.) et hinc (I. 38. conv.) $BA=GA$. Et similiter in reliquis. Cf. Pflaiderer. l. c. §. 71.

PROP. V. VI.

Obs. 1. Propositiones hae conversae sunt praecedentis quartae, atque uti haec propositioni I. 26. ita illae propositioni

dunt, angulum quidem $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , angulum vero $B\Gamma A$ angulo EZA ; et insuper angulum $B\Gamma A$ angulo $E\Delta Z$.

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam EZ , et ad puncta in ea E , Z , angulo quidem $AB\Gamma$ aequalis ZEH , angulo vero $B\Gamma A$ aequalis angulus EZH ; reliquus (I. 32.) igitur $B\Gamma A$ reliquo EHZ est aequalis.

Aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo EHZ ; triangulorum igitur $AB\Gamma$, EHZ proportionalia sunt latera (VI. 4.), circum aequales angulos, et homologa latera aequales angulos subtendunt; est igitur ut AB ad $B\Gamma$ ita HE ad EZ . Sed ut AB ad $B\Gamma$ ita ponitur ΔE ad EZ ; ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ (V. 11.); utraque igitur ipsarum ΔE , HE ad EZ eandem habet rationem; aequalis igitur est ΔE ipsi HE (V. 9.). Ex eadem ratione et ΔZ ipsi HZ aequalis est. Et quoniam aequalis est ΔE

nibus I. 8. I. 4. respondent, ad quas earum demonstrationes reducuntur, et sub quarum conditionibus triangula similia et aequalia sunt. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 72.

Obs. 2. Sub quintae conditionibus similia esse triangula propositio haec aequae immediate ac quarta efficit: positis autem sextae conditionibus, mediante quarta demum proportionalitas reliquorum circa angulos aequales laterum, ad triangulorum similitudinem per VI. 1. Def. requisita, colligitur. Cf. Pfeiderer, l. c. §. 73.

Obs. 3. Ope sextae demonstrantur conversae nonnullarum propositionum, quae Obs. 2. ad VI. 4. comprehenduntur, nempe quod, sumtis (Fig. 338. 339.) in eadem recta tribus punctis A , B , Δ , et per duo eorum B , Δ ductis duabus parallelis $B\Gamma$, ΔE ad easdem (vel oppositas) rectae illius partes,

τῇ HZ ἔστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΔE τῇ EH , κοινὴ δὲ ἡ EZ , δύο δὴ αἱ ΔE , EZ δυοὶ ταῖς HE , EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $Z\Delta$ βάσει τῇ ZH ἔστιν ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνία τῇ ὑπὸ HEZ ἔστιν ἴση. Καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE , ἡ δὲ ὑπὸ $E\Delta Z$ τῇ ὑπὸ EHZ . Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ $Z\Delta E$ τῇ ὑπὸ ZEH ἔστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἔστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἔστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔZE ἔστιν ἴση, καὶ ἐτι ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ ἰσογώνιον, ἄρα ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον

prouti puncta B , Δ in ea iacent ad easdem (vel oppositas) partes puncti A , sic, ut sit $B\Gamma : \Delta E = AB : \Delta\Delta$, puncta A , Γ , E pariter iaceant in directum. Iunctis enim AE , AE rectis, ob angulum $AB\Gamma = \Delta\Delta E$ (I. 29.) et $B\Gamma : \Delta E = AB : \Delta\Delta$ (supp.) est angulus $B\Delta\Gamma = \Delta\Delta E$ (VI. 6.), ideoque priori casu rectarum $A\Gamma$, ΔE una in alteram incidit (Conv. I. 8. Ax.); posteriori eadem rectae in directum sibi invicem sunt (Conv. I. 15.). Clavius posterius eodem modo, prius indirecto demonstrat. Cf. Pfleiderer. I. c. §. 76.

Obs. 4. Sint (Fig. 353.) AB , $\Gamma\Delta$ parallelae, et O , Π rectae quaecunque inaequales. Utrisque a punctis E , Z in parallelis ubicunque sumtis, abscindantur in priore $ZH = Z\eta = O$, in posteriore $E\Theta = E\vartheta = \Pi$, ita ut puncta H , Θ sint ex una rectae EZ parte, η , ϑ ex altera: tres rectae EZ , ΘH , $\Theta\eta$ in

ipsi EH , communis autem EZ ; duae AE , EZ duabus HE , EZ aequales sunt, et basis ZA basi ZH est aequalis; angulus igitur AEZ angulo HEZ est aequalis (I. 8.). Et triangulum AEZ triangulo HEZ aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est et angulus quidem AZE ipsi HZE , angulus vero EAZ ipsi EHZ . Et quoniam angulus quidem ZEA ipsi ZEH est aequalis, sed HEZ ipsi ABF est aequalis, et ABF igitur angulus ipsi AEZ est aequalis (I. Ax. 1.). Ex eadem ratione angulus ABF ipsi AZE est aequalis, et insuper angulus ad A ipsi ad A ; aequiangulum igitur est triangulum ABF triangulo AEZ . Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 352.)

Si duo trianguia unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera pro eodem extra parallelas puncto K concurrent: et, si duo segmenta ZN , EM ad easdem rectas EZ partes ab parallelis AB , FA abscissae sunt, ita ut sit $ZN:EM=O:\Pi$, recta quoque NM , altera eorum extrema N , M iungens per punctum K transibit. Quippe rectis EZ , ΘH se in puncto K secantibus (parallelae enim esse nequeunt, quodsi enim parallelae essent, foret $ZH=E\Theta$ (I. 34.) i. e. $O=\Pi$ contra supposit.) est (Obs. 2. ad VI. 4.) $ZH:E\Theta=KZ:KE$. Sed ob $Z\eta=ZH$, $E\vartheta=E\Theta$, est (V. 7. Cor.) $Z\eta:E\vartheta=ZH:E\Theta$, ac (hyp. et V. 7. V. 11.) est $ZN:EM=O:\Pi=ZH:E\Theta$, ideoque (V. 11.) tam $Z\eta:E\vartheta=KZ:KE$, quam $ZN:EM=KZ:KE$, et hinc (Obs. 3.) tam puncta η , ϑ , K , quam puncta N , M , K iacent in directum. Iisdem porro, quae supra, sumtis et factis (nisi quod rectae O , Π nunc etiam possunt esse aequales): tres rectae EZ , $H\vartheta$,

ισογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' αἷ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

*Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ μιᾶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$.

Συνεστῆτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ $ΔΖ$ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς $Δ$, $Ζ$, ὁποῦτα μὲν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΖΔΗ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΔΖΗ$.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Η$ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΗΖ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · ἴση ἄρα ἡ $ΕΔ$ τῇ $ΔΗ$, καὶ κοινὴ ἡ $ΔΖ$ · δύο δὴ αἱ $ΕΔ$, $ΔΖ$ δυοὶ ταῖς $ΗΔ$, $ΔΖ$ ἴσαι

quod se in eodem intra parallelas puncto κ secabunt, et, si segmenta $Z\eta$, $E\mu$ ad alternas rectae EZ partes ab parallelis AB , $ΓΔ$ abscissa sunt, ut O ad Π , recta etiam $\nu\mu$ altera eorum extrema iungens per punctum κ transibit, quod eodem modo demonstratur. Cf. Pflöiderer. l. c. §§. 77. 78.

Obs. 5. Quae in Obs. 4. vidimus, inserviunt solvendo problemati, quod in Loc. 1. et 2. Libri I. Apollonii de Sectione rationis habetur. Praeterea inde patet, in quadrilateris, quorum duo latera sunt parallela, rectam, quae haec latera biferiam dividit, et diagonales figurae in eodem intra quadrilaterum puncto se secare; et si altera duo latera parallela non

portionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ , unum angulum $B\hat{A}\Gamma$ uni angulo $E\hat{A}Z$ aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad $A\Gamma$ ita EA ad AZ ; dico aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ , et aequalem habiturum esse angulum $AB\Gamma$ quidem angulo ΔEZ , angulum vero $A\Gamma B$ ipsi AZE .

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam AZ , et ad puncta in ipsa A , Z , alterutri angulorum $B\hat{A}\Gamma$, $E\hat{A}Z$ aequalis angulus $Z\hat{A}H$, angulo vero $A\Gamma B$ aequalis ipse AZH .

Reliquus igitur angulus ad B reliquo ad H aequalis est (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔHZ ; proportionaliter igitur est (VI. 4.) ut BA ad $A\Gamma$ ita HA ad AZ . Ponitur autem et ut BA ad $A\Gamma$ ita EA ad AZ ; ut igitur (V. 11.) EA ad AZ ita HA ad AZ ; aequalis igitur (V. 9.) EA ipsi HA , et communis AZ ; duae igitur EA , AZ duabus HA , AZ aequales sunt, et angulus $E\hat{A}Z$ angulo $H\hat{A}Z$

sint, haec, atque rectam bifariam latera parallela dividentem in eodem extra figuram puncto concurrere; in parallelogrammis igitur diagonales, et rectas bina latera opposita bifariam dividentes eodem in puncto se secare: quod ita fieri alio modo ostenditur in demonstratione XI. 39. Cf. Pfeleiderer. l. c. §§. 79—82.

Obs. 6. Perpendiculara e tribus angulis trianguli alicuius in latera opposita demissa in eodem puncto se intersecant. Sit (Fig. 354.) $AB\Gamma$ triangulum, in quo duo perpendiculara ex oppositis angulis in latera $A\Gamma$, AB demissa se intersecant in puncto Z , iungatur AZ , et producatur, si opus est, usque dum

εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $E\Delta Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $H\Delta Z$ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ EZ βάσει τῇ ZH ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ ΔHZ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται ἐκατέρα ἐκάτερα ¹⁾ ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔZH τῇ ὑπὸ ΔZE , ἡ δὲ ὑπὸ ΔHZ τῇ ὑπὸ ΔEZ . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔZH τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται οὖ καὶ ἡ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ E ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μίᾳ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἐκατέραν ἅμα ἦτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἐστὶ τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ ἧς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ.

1) Verba ἐκατέρα ἐκατέρα, quae Peyrardus consentiente Cod. a. omittit, ex edd. Oxon. et Basil. restitimus, quum alias etiam Euclidi solemne sit, verba propositionum antecedentium exacte citare, et in I. 4. haec verba expressa sint.

rectae $B\Gamma$ occurrat in Θ , erit $A\Theta$ perpendicularis ad $B\Gamma$. Iungatur enim ΔE , et circa triangulum ΔEZ describatur circulus (IV. 5.), eritque, ob angulum rectum ΔEZ , AZ diameter circuli (Obs. 1. ad III. 31.). Eodem modo ostendetur, AZ esse diametrum circuli circa triangulum ΔZA circumscripti: itaque puncta A , E , Z , Δ in circumferentia eiusdem circuli posita erunt. At ob angulum $EZB = \Delta Z\Gamma$ (I. 15.) et angulum $BEZ = \Gamma AZ$ (uterque enim rectus est), trianguia BEZ , ΓAZ sunt aequiangula, adeoque $BZ : EZ = \Gamma Z : AZ$ (VI. 4.), aut alterne

aequalis; basis igitur (I. 4.) EZ basi ZH est aequalis, et triangulum AEZ triangulo AHZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est AZH quidem ipsi AZE , angulus vero AHZ ipsi AEZ . Sed ipse AZH ipsi ATB est aequalis (constr.), et ATB igitur ipsi AZE est aequalis. Ponitur autem et BAT ipsi EAZ aequalis; et reliquus igitur ad B reliquo ad E aequalis (I. 32.); equiangulum igitur est triangulum ABT triangulo AEZ . Si igitur duo triangu-
la etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 335.)

Si duo triangu-
la unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; equiangula erunt triangu-
la, et aequales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

$BZ:IZ=EZ:AZ$ (V. 16.). Quoniam igitur latera circa angulos aequales BZI , EZA sunt proportionalia, triangu-
la BZI , AZE sunt equiangula (VI. 6.), adeoque angulus $ZIB=EAZ$. At $BAZ=EAZ$ (III. 21.): itaque $BAZ=ZIB=ZIO$. Præterea autem et $BZA=OZI$ (I. 15.): itaque etiam $AEZ=ZOI$ (I. 32.), adeoque, quum AEZ rectus sit, rectus erit etiam ZOI , vel AO perpendicularis erit ad BI (Playfair. VI. Prop. H.). — Paullo brevius ita demonstratur, esse angulum $ZIB=EAZ$. Quum BEI sit rectus aequè ac BAT , ex Cor. 2. ad III. 21. semicirculus super diametro BI descriptus per B et A transibit, unde erit $ZIB=EAZ$ (III. 21.). Vid. Klügels Wörterb. I. Th. p. 925. et, qui ibi p. 926. laudatur, Eulerus in Nov. Commentar. Petrop. Tom. XI. a. 1765. — Addi po-

"Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν μία γωνία ἴσῃν ἔχοντα, τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, τὰς πλεονεξ ἀνάλογον, ὡς τὴν $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς $Γ$, $Ζ$ πρότερον ἑκατέραν ἄμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$. καὶ λοιπὴ δὲλονότι ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Ζ$ ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. "Εστω, μείζων ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ · καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ $ΑΒ$ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Β$, τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΑΒΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $Α$ γωνία τῇ $Δ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΒΗ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΗΒ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΗ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΗ$ οὕτως ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. Ὡς δὲ ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως ὑπόκειται ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ · οὕτως ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν

terat: et vice versa, si $ΑΘ$ perpendicularis est ad $ΒΓ$, transire debet per $Ζ$. Si enim non transeat, alia recta per $Α$ et $Ζ$ ducta ex demonstratione pariter erit ad $ΒΓ$ perpendicularis, quod fieri nequit (I. 17. Cor. 4.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rob. Simson. duobus hac propositione enumeratis casibus tertium addit „omissum, et in demonstrationibus non raro occurrentem“ quo reliquorum angulorum alter sit rectus. Demonstratio autem huius casus eadem fere est, quae

Sint duo triângula $AB\Gamma$, ΔEZ , unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum nempe $B\Gamma A$ angulo $E\Delta Z$, circa alios autem angulos $AB\Gamma$, ΔEZ , latera proportionalia, ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ , reliquorum vero ad Γ , Z primo utrumque simul minorem recto; dicto aequiangulum esse triângulum $AB\Gamma$ triângulo ΔEZ , et aequalem fore angulum $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , et reliquam nempe angulum ad Γ reliquo ad Z aequalem.

Si enim inaequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , unus ipsorum maior est. Sit maior $AB\Gamma$; et constitutatur (I. 23.) ad rectam AB et ad punctum in ea B , angulo ΔEZ aequalis angulus ABH .

Et quoniam aequalis est angulus quidem A angulo Δ , angulus vero ABH ipsi ΔEZ , reliquus igitur AHB reliquo ΔZE est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triângulum ABH triângulo ΔEZ ; est igitur (VI. 4.) ut AB ad BH ita ΔE ad EZ . Ut autem ΔE ad EZ ita ponitur AB ad $B\Gamma$; ut igitur AB ad $B\Gamma$ ita AB ad BH (V. 11.), recta igitur AB ad utramque ipsarum $B\Gamma$, BH eandem habet rationem; aequalis

casus secundi, nec omnino necesse videtur, tertium hunc casum nominatim afferre, quum expressio „non minor recto“ eum etiam casum, quo angulus rectus est, comprehendat.

Obs. 2. Patet, hanc propositionem respondere ei, quam ad I. 26. Obs. 2. ut casum quintum, quo duo triângula aequalia esse possunt, notavimus. Et hoc triângulorum aequalium casu praemisso potest nostra haec propositio eodem modo, quo praecedentes duae demonstrari. Cf. Pflüderer. I. c. P. II. §. 66.

BH , ἢ AB ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $BΓ$, BH τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῇ BH · ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $Γ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BHΓ$ ἐστὶν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ $Γ$ ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ $BHΓ$, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ AHB μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Z , καὶ ἡ πρὸς τῷ Z ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάττων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ $Δ$, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν υποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς $Γ$, Z μὴ ἐλάττων ὀρθῆς· λέγω πάλιν οὐ καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῇ BH · ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ $Γ$ τῇ ὑπὸ $BHΓ$ ἴση ἐστὶν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ $Γ$, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ $BHΓ$. Τριγώνου δὴ τοῦ $BHΓ$ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ $Δ$ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Γ$ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ ταῖς ἐξῆς.

Obs. 3. Triangula sub conditionibus VI. 7. similia esse, uti ex VI. 6. (vid. ad VI. 6. Obs. 2.) infertur. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 87.

igitur est BF ipsi BH (V. 9.); quare et angulus ad F angulo BHF est aequalis (I. 5.). Minor autem recto ponitur angulus ad F ; minor igitur est recto angulus BHF , quare (I. 13.) qui ei deinceps est angulus AHB maior est recto. Et ostensus est aequalis esse angulo ad Z , et ipse angulus ad Z igitur maior est recto. Ponitur autem minor recto, quod est absurdum; non igitur inaequalis est angulus ABF angulo AEZ , aequalis igitur. Est autem et angulus ad A aequalis angulo ad A , et reliquus igitur (I. 32.) ad F reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABF triangulo AEZ .

Sed et rursus ponatur uterque angulorum ad F , Z non minor recto; dico rursus et sic aequiangulum esse triangulum ABF triangulo AEZ .

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus aequalem esse BF ipsi BH ; quare et angulus ad F ipsi BHF aequalis est. Non minor autem recto est angulus ad F ; non est igitur minor recto BHF . Trianguli igitur BHF duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod fieri nequit (I. 17.); rursus igitur non inaequalis est angulus ABF angulo AEZ ; aequalis igitur. Est autem et angulus ad A angulo ad A aequalis, reliquus igitur (I. 32.) ad F reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABF ipsi triangulo AEZ . Si igitur duo triangula etc.

Obs. 4. Notari etiam potest, casum primum, quo nempe angulorum ad F , Z uterque minor est recto, semper existere, si latera AB , AE adiacentia angulis (supp.) aequalibus A , A

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Εάν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ δὲ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω τριγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίαν, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετος ἡ AD · λέγω ὅτι ὁμοίων ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ABD , $AD\Gamma$ τριγώνων ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἐκ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ABD , ὀρθὴ γὰρ ἑκάτερα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε $AB\Gamma$ καὶ τοῦ ABD ἡ πρὸς τῷ B · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AGB λοιπὴ τῇ ὑπὸ BAD ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τριγώνον τῷ ABD τριγώνῳ.

Ἐπὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου πρὸς τὴν BA ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ABD τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ AB ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου πρὸς τὴν BD ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ , τὴν ὑπὸ BAD τοῦ ABD τριγώνου καὶ ἐκὶ ἡ AG πρὸς τὴν AD ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ $AB\Gamma$ ἄρα τριγώνον τῷ ABD τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τριγώ-

minora sint alteris $B\Gamma$, EZ (I. 18, et I. 17, Cor. 3, Cf. Pfeiderer. I. c. §. 88.

Obs. 5. Necessitas tertias conditionis propositioni VI. 7, adiunctae simili fere ratione evincitur, ac in Obs. 2, ad I. 26, vidimus, duo triangula, in quibus duo latera cum angulo uniorum opposito utrimque aequalia sint, non semper aequalia esse, et nova ad hanc aequalitatem determinationis opus esse. Cf. Pfeiderer. I. c. §§. 89, 90.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 356.)

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangula similia et toti et inter se.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens angulum $B\Lambda\Gamma$, et ducatur ab A ad $B\Gamma$ perpendicularis AA ; dico simile esse utrumque triangulorum ABA , $AA\Gamma$ toti $AB\Gamma$ et inter se.

Quoniam enim aequalis est angulus $B\Lambda\Gamma$ angulo $A\Lambda B$, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis $AB\Gamma$ et ABA angulus ad B ; reliquus igitur $A\Gamma B$ reliquo $BA\Lambda$ est aequalis (l. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ABA . Est igitur (VI. 4.) ut $B\Gamma$ subtendens angulum rectum trianguli $AB\Gamma$ ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABA , ita eadem AB subtendens angulum ad Γ trianguli $AB\Gamma$ ad BA subtendentem angulum aequalem angulo ad Γ , nempe $B\Lambda\Lambda$ ipsius trianguli ABA ; et etiam $A\Gamma$ ad AA subtendentem angulum ad B , communem duobus triangulis; triangulum igitur $AB\Gamma$ triangulo ABA aequiangulum est, et latera circa aequales angulos proportionalia habet; simile igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ABA . Similiter osten-

PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Robert. Simson. monet: „manifestum est, aliquem mutasse demonstrationem, quam Euclides huius propositionis dederat. Etenim auctor eius postquam demonstraverat triangula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit, latera eorum circa aequales angulos proportionalia esse, quas; hoc non factum fuisset in propositione quarta huius libri. Haec autem superflua non inveniuntur in versione (Campani)

νον τῷ $AB\Delta$ τριγώνῳ. Ὅμοιως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον· ἐκάτερον ἄρα τῶν $AB\Delta$, $AA\Gamma$ τριγώνων ὁμοίον ἐστὶ ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὁμοία τὰ $AB\Delta$, $AA\Gamma$ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BAA ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $AA\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπὴ τῇ ὑπὸ $AA\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA τοῦ $AB\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ BAA , πρὸς τὴν AA τοῦ $AA\Gamma$ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ BAA , οὕτως αὐτὴ ἡ AA τοῦ $AB\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, πρὸς τὴν $A\Gamma$ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ $AA\Gamma$ τοῦ $AA\Gamma$ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ B · καὶ ἔτι ἡ BA ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ AAB , πρὸς τὴν $A\Gamma$ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $AA\Gamma$ ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον τῷ $AA\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α,

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογώνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετὸς

ex lingua arabica et nunc (a Simsone) omissa sunt. " Ostensa nempe angulorum aequalitate, infert Rob. Simson.: „aequi-angula igitur sunt triangula, quare latera circa aequales angulos proportionalia habent (VI. 4.); et propterea inter se similia sunt" (VI. 4. Def.). Et eadem fere est demonstratio Campani,

demus et triangulo $A\Delta\Gamma$ simile esse triangulum $AB\Gamma$; utramque igitur triangulorum ABA , $A\Delta\Gamma$ simile est toti triangulo $AB\Gamma$.

Dico etiam et inter se esse similia triacula ABA , $A\Delta\Gamma$.

Quoniam enim rectus BAA recto $A\Delta\Gamma$ est aequalis, sed et BAA angulo ad Γ ostensus est aequalis, et reliquis igitur (I. 32.) ad B reliquo $A\Delta\Gamma$ est aequalis; aequiangulum igitur est triangulum ABA triangulo $A\Delta\Gamma$. Est igitur (VI. 4.) ut BA trianguli ABA , subtendens angulum BAA , ad ΔA trianguli $A\Delta\Gamma$ subtendentem angulum ad Γ , aequalem ipsi BAA , ita eadem AA ipsius trianguli ABA , subtendens angulum ad B , ad $\Delta\Gamma$ subtendentem angulum $A\Delta\Gamma$ trianguli $A\Delta\Gamma$, aequalem angulo ad B , et etiam BA subtendens rectum AAB , ad $\Delta\Gamma$ subtendentem rectum $A\Delta\Gamma$; simile igitur est triangulum ABA triangulo $A\Delta\Gamma$. Si igitur in rectangulo, etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducta fuerit,

Obs. 2. Austin, p. 68. corollarium etiam propositioni adiunctum reprobatur. Pfleiderer. I. c. §. 93, circa hanc rem observat: „prioris huius corollarii parte, ipsis eius verbis pro more relatis, demonstrationes nituntur VI. 13, partis tertiae Lemm. 1. ante X. 31. ac Lemm. post XIII. 15.; Contra eiusdem pars altera in demonstrationibus partis primae Lemm. 1. ante X. 31.; partis tertiae XIII. 13.; Lemm. post eam; partis

ἀχθῇ, ἢ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν καὶ ἐτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἢ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μίση ἀνάλογόν ἐστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελείν.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB . δεῖ δὴ τῆς AB τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελείν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ A ἡ AG , γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς AB τευχούσαν· καὶ εἰλήφθω τεχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AG τὸ Δ , καὶ κείσθωσαν τῇ AD ἴσαι αἱ AE , EF καὶ ἐπέστυχθω ἡ BF , καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος ἀντὶ ἡχθω ἡ AZ .

ultimae XIII. 18. ac III. 6. Collect. mathem. Pappi, a Propositionibus VI. 8. et VI. 4. deducta traditur; serius itaque, usus illius frequentis causa, tum locis citatis, tum alibi, ut in demonstrationibus XIII. 14. XIII. 15. XIII. 16. addita (foc-
san restituta) est censenda." Addit deinde Pfeiderer., praeter
duas proportionibus corollario hoc enunciatis notari mereri ad-
huc sequentes: 1) latus, quod trianguli rectanguli angulum
rectum subtendit, est ad alterutrum eius latus circa angulum
rectum, uti reliquum ipsius latus circa angulum rectum est
ad perpendicularum ex vertice anguli recti in hypotenusam de-
missum, et alterne (IV. 4.). 2) Unum trianguli rectanguli
latus circa angulum rectum est ad alterum; uti, quod priori
adiacet, segmentum hypotenusae, perpendicularo in eam ex ver-
tice anguli recti demisso abscissum, est ad ipsum hoc perpendi-
culum; vel uti hoc perpendicularum est ad segmentum hypote-
nusae adiacens lateri posteriori (IV. 4.).

ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basin et utrunlibet segmentorum, huic segmento adiacens latus, medium proportionale esse.

PROPOSITIO IX. (Fig. 357.)

Ab data recta imperatam partem auferre.

Sit data recta AB ; oportet ab ipsa AB imperatam partem auferre.

Imperetur pars tertia; et ducatur quaedam recta AF ab A , quemlibet angulum continens cum ipsa AB ; et sumatur quodlibet punctum Δ in AF , et ponantur ipsi AA aequales AE , EF (I. 3.); et iungatur BF , et per Δ parallela huic ducatur AZ (I. 31.).

Obs. 3. Cum anguli in semicirculo sint recti (III. 31.); perpendicularis ab quocunque peripheriae circuli puncto ad aliquam eius diametrum ducta est media proportionalis inter segmenta diametri huius ab perpendicularo illo facta: et quaelibet circuli chorda per centrum non transiens media proportionalis est inter diametri per alterutrum eius extremum ductae segmentum ipsi adiacens, quod perpendicularum ab altero chordae extremo in diametrum hanc demissum ab ea abscindit, ipsamque diametrum (VI. 8. Cor.). Cf. Pflciderer, I. c. §. 31.

PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Rob. Simson. monet „demonstratio huius facta est in casu particulari, in quo scilicet pars tertia abscindenda est a data recta“ (contra tenorem; ut Pflciderer. addit, tam propositionis, quam expositionis, et absque ulla mentione applicationis solutionis exhibitas particularis ad ceteros casus);

Ἐπειὶ οὖν τριγώνου τοῦ $ABΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΒΓ$ ἔκται ἡ $ΖΔ$ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΒΖ$ πρὸς τὴν $ΖΑ$. Διπλῇ δὲ ἡ $ΓΔ$ τῆς $ΔΑ$ διπλῇ ἄρα καὶ ἡ $ΒΖ$ τῆς $ΖΑ$ τριπλῇ ἄρα ἡ $ΒΑ$ τῆς $ΑΖ$.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφήρηται τὸ AZ . "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΗΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένην ὁμοίως τεμεῖν.

"Εστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ AB , ἡ δὲ τετμημένη ἡ $ΑΓ$ (δεῖ δὴ τὴν AB ἄτμητον τῇ $ΑΓ$ τετμημένην ὁμοίως τεμεῖν. "Εστω τετμημένη ἡ $ΑΓ$ ¹⁾, κατὰ τὰ $Δ, Ε$ σημεία, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΓΒ$, καὶ διὰ τῶν $Δ, Ε$ τῇ $ΒΓ$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $ΔΖ, ΕΗ$, διὰ δὲ τοῦ $Δ$ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $ΔΘΚ$,

1) Quae uncis inclusa sunt, desunt in ed. Parisiensi et Codd. a. c. d. Quum tamen in expositione apud Euclidem, ea quae in problemate fieri iubentur, expresse repeti soleant, genuina illa omnino esse videntur; et librarii tantum incuria in Mss. omissa. Itaque illa restituimus ex edd. Oxon. et Basil.

„quare minime videtur Euclidis esse. Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit auctor, tertiam aequemultiplicem esse quartae, atque prima est secundae; quod quidem in libro V. ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est. (Vid. Prop. D. in Exc. ad L. V.). Sed hoc, ut alia, assumit editor ex confusanea apud vulgus recepta proportionalium notionē.“ Generalem deinde Simson. addit demonstrationem, dum nempe iubet rectam $ΑΓ$ tam multiplicem

Itaque quoniam uni lateri BF trianguli ABF parallela ducta est recta ZA ; erit (VI. 2.) ut FA ad AA ita BZ ad ZA . Dupla autem FA ipsius AA ; dupla igitur et BZ ipsius ZA ; tripla igitur BA ipsius AZ .

Ab ipsa igitur data recta AB imperata tertia pars ablata est AZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 358.)

Datam rectam insectam similiter secare, ut data recta secta est.

Sit data quidem recta insecta AB , secta vero AF : oportet insectam rectam AB similiter secare, ut AF secta est. Sit AF secta in punctis A , E , et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et iungatur FB , et (I. 31.) per A , E ipsi BF parallelae ducantur AZ , EH , per A autem ipsi AB parallela ducatur AOK .

sumi rectae AA pro lubitu sumtae, quam multiplex esse debet AB partis abscindendae, et reliquis peractis, ut in textu graeco, concludit, esse (VI. 2.) $FA:AA=BZ:AZ$, et (V. 16.) componendo $AF:AA=AB:AZ$, unde (V. Prop. D.) AB tam multiplex erit rectae AZ , quam multiplex sumta fuit AF rectae AA adeoque AZ eadem pars erit rectae AB , quae pars est AA rectae AF i. e. AZ erit pars a recta AB abscindenda. Eadem demonstratio, notante Pflleiderer. l. c. §. 98. ita etiam absque subsidio Prop. D. absolvi potest, ut a Baermanno in scholio adiuncto factum est. Ob parallelas BF , ZA est $AF:AA=AB:AZ$ (VII. 2. Obs. 2.) vel alterne (V. 16.) $AF:AB=AA:AZ=n.AA:n.AZ$ (V. 11. V. 15.) denotante n numerum integrum, iuxta quem data AB multiplex esse debet partis abscindendae. Quare cum sit $AF=n \times AA$ (constr.); pariter est $AB=n \times AZ$ (V. 14.).

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $ZΘ$, $ΘΒ$. ἴση ἄρα ἢ μὲν $ΔΘ$ τῇ ZH , ἢ δὲ $ΘΚ$ τῇ HB . Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΔΚΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΚΓ$ εὐθεία ἤκται ἡ $ΘΕ$ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ $ΚΘ$ πρὸς τὴν $ΘΔ$. ἴση δὲ ἢ μὲν $ΚΘ$ τῇ BH , ἢ δὲ $ΘΔ$ τῇ HZ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ . Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΔΗΕ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΕΗ$ ἤκται ἡ $ΖΔ$ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν $ΖΑ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ · ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΔ$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ , ὡς δὲ ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν $ΖΑ$.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεία ἀτμήτος ἡ AB τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ $ΑΓ$ ὁμοίως τέτμηται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Ἀπὸ δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσ-
εργεῖν.

Obs. 2. Eadem ratione ab data recta AB abscindetur segmentum, quod ad totam habeat rationem datam rectae minoris M ad maiorem $M+N$; vel quod ad segmentum residuum habeat rationem datae rectae M ad datam N ; seu data recta AB secabitur in data ratione, rectae nimirum datae M ad datam N , abscissa nempe $AA=M$, $AI=N$, reliquisque ut in VI. 9. peractis (Vid. Pappi ad Libros de Sect. rationis Lemma, I. Collect. Mathem. Halley p. XVIII. XLV. Clavius, Tacquet, alii) Pfeiderer. l. c. §. 98. Similique ratione datae rectae AB alia ab puncto inde A in directum adiiiceretur, quae ad ipsam habeat datam rationem, datae nimirum rectae M ad datam N .

Parallelogrannum igitur est utrumque ipsorum $Z\Theta$, ΘB ; aequalis igitur (I. 34.) $\Delta\Theta$ ipsi ZH , ΘK vero ipsi HB . Et quoniam uni lateri trianguli $\Delta K\Gamma$ ipsi nempe $K\Gamma$ parallela ducta est recta ΘE ; est (VI. 2.) ut ΓE ad EA ita $K\Theta$ ad ΘA . Aequalis autem est $K\Theta$ quidem ipsi BH , ΘA vero ipsi HZ ; est igitur ut ΓE ad EA ita BH ad HZ . Rursus, quoniam uni laterum trianguli AHE ipsi nempe EH parallela ducta est ZA ; est (VI. 2.) ut EA ad AA ita HZ ad ZA . Demonstratum autem est et ut ΓE ad EA ita BH ad HZ ; est igitur ut ΓE quidem ad EA ita BH ad HZ , ut vero EA ad AA ita HZ ad ZA .

Data igitur recta insecta AB datae rectae sectae AT similiter secta est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 359.)

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

vel etiam ita, ut composita ex data AB , eique ab extremo inde A versus oppositas partes adiecta habeat ad datam (vel ad adiectam) rationem datae maioris M ad datam minorem N (Pfleiderer l. c. §§. 100. 101.). Caeterum apud Campanum propositio nostra 9. est VI. 11.

PROPOSITIO X.

Obs. 1. Demonstratio huius propositionis (quae apud Campanum est VI. 12.) expeditior redditur, praemissa propositione in Obs. 5. ad VI. 2. contenta. Cf. Pfleiderer l. c. §. 102.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ 1) AB, AG , καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν· δεῖ δὴ τὴν AB, AG τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ AB, AG ἐπὶ τὰ A, E σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ AG ἴση ἡ BD , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BG , καὶ διὰ τοῦ A παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ AE .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ABG , παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AE ἤκται ἡ BG , ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BD οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE . Ἰση δὲ ἡ BD τῇ AG , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθεϊῶν τῶν AB, AG , τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρεται ἡ GE . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθεϊῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ $A, B, Γ$ · δεῖ δὴ τῶν $A, B, Γ$ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ AE, AZ , γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν τὴν ὑπὸ EAZ · καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ $ΔΗ$, τῇ δὲ B ἴση ἡ $ΗΒ$, καὶ ἐπὶ τῇ $Γ$ ἴση ἡ $ΔΘ$ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $ΗΘ$, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ E ἡ EZ .

1) Verba: δύο εὐθεῖαι, quae Peyrardus, codicem a secutus, omittit, ex edd. Basil. et Oxoni. restituimus ex more Euclidi in enunciatione solenni.

Obs. 2. Si aequalia fuerint unius trianguli lateris AG segmenta, alterius etiam lateris AB segmenta, rectis tertio lateri $BΓ$ parallelis facta erunt aequalia (V. Prop. A.). Recta itaque data AB in partes quotcunque aequales secabitur simili

Sint datae duae rectae AB , AF , et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant; oportet ipsis AB , AF tertiam proportionalem invenire.

Producantur AB , AF ad puncta A , E , et ponatur ipsi AF aequalis BA , et iungatur BF , et per A parallela huic ducatur AE (I. 31.).

Quoniam igitur uni laterum trianguli AEE , nempe ipsi AE parallela ducta est BF , est (VI. 2.) ut AB ad BA ita AF ad FE . Aequalis autem BA ipsi AF , est igitur ut AB ad AF ita AF ad FE .

Duabus igitur datis rectis AB , AF , tertia proportionalis inventa est FE . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 360.)

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae A , B , Γ ; oportet ipsis A , B , Γ quartam proportionalem invenire.

Exponentur duae rectae AE , AZ , angulum continentes quemlibet EAZ ; et ponatur ipsi quidem A aequalis AH , ipsi vero B aequalis HE , et insuper ipsi Γ aequalis $A\Theta$; et iuncta $H\Theta$, parallela illi ducatur per E ipsa EZ (I. 31.).

modo, quo propositum VI. 9. fiebat (Pfleiderer l. c. §§. 103. 104. Clavius, Tacquet., alii). Cf. I. 34. Cor. 23.

Obs. 3. Hac propositione nituntur solutiones variorum problematum, figuras rectilineas datas vario modo in partes quocunque aequales, seu etiam ita secandi, ut partes datas invicem habeant rationes. Talia problemata habentur in Eu-

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔEZ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EZ ἤκται ἡ $H\Theta$, ἔστιν ἄρα ὡς ΔH πρὸς τὴν HE , οὕτως ἡ $\Delta\Theta$ πρὸς τὴν ΘZ . Ἰση δὲ ἡ μὲν ΔH τῇ A , ἡ δὲ HE τῇ B , ἡ δὲ $\Delta\Theta$ τῇ Γ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘZ .

Τριῶν ἄρα δοθεῖσων εὐθειῶν τῶν A, B, Γ τέταρτη ἀνάλογον προσεῦρεται ἡ ΘZ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ ιγ'.

Δύο δοθεῖσων εὐθειῶν, μέσσην ἀνάλογον προσεῦρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ $AB, B\Gamma$ δεῖ δὴ τῶν $AB, B\Gamma$ μέσσην ἀνάλογον προσεῦρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AB\Gamma$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ BD , καὶ ἐπέξεύχθωσαν αἱ AD, DG .

clidis, ut quidam arbitrantur, vel, ut alii volunt, in Machometi Bagdedini de Divisionibus libro; apud Wilke neue und erleichterte Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden; in I. T. Mayers practisch. Geom. T. III.; apud Pfeiderer. l. c. §§. 108—118.

PROPOSITIO XI.

Obs. Tertiae proportionali duabus rectis datis inveniendae inservit quoque VI. 8. Cor. Sumpta nempe (Fig. 356.) recta BD aequali primae rectarum datarum, et ducta ad eam per A perpendiculari AA aequali secundae, iungatur BA . Ducta deinde in A ad BD perpendiculari AG , quae productae BD occurret in G , erit $BD:AA=AA:AG$ (VI. 8. Cor.). (Clavius ad hanc Prop. Pfeiderer. l. c. §. 125.). Aliter idem fiet per

Et quoniam uni laterum trianguli $\triangle EZ$, nempe ipsi EZ parallela ducta est $H\Theta$, est igitur ut $\triangle H$ ad HE ita $\triangle \Theta$ ad ΘZ (VI. 2.). Aequalis autem $\triangle H$ quidem ipsi A , HE vero ipsi B , $\triangle \Theta$ autem ipsi Γ ; est igitur ut A ad B ita Γ ad ΘZ .

Tribus igitur datis rectis A , B , Γ , quarta proportionalis inventa est ΘZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 361.)

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae AB , BF ; oportet ipsis AB , BF mediam proportionalem invenire.

Ponantur in directum, et describatur super AF semicirculus AAF , et ducatur a B puncto ipsi AF rectae ad rectos BA (I. 11.), et iungantur AA , AF :

partem alteram eiusdem VI. 8. Cor. Nempe, si prima recta data maior est, quam secunda, fiat BF aequalis primae, et, descripto super eam circulo, ex altero eius extremo B aptetur BA aequalis secundae, et ex altero huius extremo A demittatur in BF perpendicularis AA , eritque $BF:BA=BA:BA$ (VI. 8. Cor.). Sin autem prima recta data minor est, quam secunda: super illa v. c. BA tanquam catheto triangulum constituitur rectangulum $AA B$, cuius hypotenusa AB aequalis sit secundae (ut in II. 14. III. 17.). Tum ad hanc BA in puncto eius extremo ductum perpendicularum AF productae BA occurreret in Γ (I. Post. 5.), eritque $BA:AB=AB:BF$ (VI. 8. Cor.) Pflsederer l. c. §. 124. Pappus Collect. Mathem. III. 7. et III. 8. (Nostra Prop. 11. apud Campanum est VI. 10.) Ceterum, si ratio duarum magnitudinum expressa sit per datas rectas;

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ $ΑΔΓ$ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦται ἡ $ΔΒ$. ἡ $ΔΒ$ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, μέση ἀνάλογον προσέυρεται ἡ $ΒΔ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων ¹⁾ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ $ΑΒ$, $ΒΓ$, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ $Β$ γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ $ΔΒ$, $ΒΕ$, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ $ΖΒ$, $ΒΗ$. λέγω ὅτι τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$ οὕτως ἡ $ΗΒ$ πρὸς τὴν $ΒΖ$.

1) Loco ἰσογωνίων, quae vox omnino sufficit, hic et in sequentibus edd. Basil. et Oxon. habent: *μίαν μὲ ἴσην ἔχόντων γωνίαν*. Utraque lectio ex I. 29. I. 34. eodem redit. Caeterum etiam infra in demonstratione VI. 16., ubi nostra haec propositio adhibetur, vox ἰσογωνίων ponitur.

docet haec propositio modum inveniendi rationem duplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XII.

Obs. Facile patet, e tribus rectis datis, quibus quarta proportionalis invenienda est, secundam, quae in figura textus graeci primae $ΔΗ$ in directum adiecta est, posse etiam ex $Η$

Et quoniam in semicirculo angulus est $\angle A\Gamma$, rectus est (III. 31.). Et quoniam in rectangulo triangulo $\angle A\Gamma$ a recto angulo ad basin perpendicularis ducta est $\angle B$; ipsa $\angle B$ inter basis segmenta AB , $B\Gamma$ media proportionalis est (VI. 8. Cor.).

Duabus igitur datis rectis AB , $B\Gamma$, media proportionalis inventa est BA . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 362.)

Parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt; et quorum aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia et aequiangula parallelogramma AB , $B\Gamma$, aequales habentia angulos ad B , et ponantur in directum $\angle B$, BE , in directum igitur sunt (I. 14.) et ZB , BH ; dico ipsorum AB , $B\Gamma$ reciproca esse latera circa aequales angulos, hoc est, esse ut AB ad BE ita HB ad BZ .

versus HA , vel etiam (coll. Obs. 2. ad VI. 2.) e vertice A ex eadem parte, ad quam est recta $\angle H$, vel in crure $\angle H$ anguli HAE ad partes oppositas ultra A producto sumi, et tum reliqua in cruribus anguli assumti, vel ad verticem ei oppositi simili ratione ac in textu graeco peragi. Praeterea etiam secunda et tertia alterne inter se permutari possunt, ita ut iam non, ut ante prima et secunda in uno anguli assumti crure, tertia et quarta in altero, verum prima et tertia in uno, secunda et quarta in altero sint. Pflöiderer l. c. §. 119. 120. Si quis vero disideret, ut prima et quarta in uno, secunda et tertia in altero crure anguli sint, hoc quoque fieri poterit, si

Συμπεπληρώσθω γάρ τὸ ZE παραλληλόγραμμον.
 Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον
 πρὸς $BΓ$ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ZE · ἐστὶν
 ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ
 ZE . Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ $ΔB$
 πρὸς τὴν BE , ὡς δὲ τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ
 HB πρὸς τὴν BZ . καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΔB$ πρὸς τὴν BE
 οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ . Τῶν AB , $BΓ$ ἄρα πα-
 ραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ
 τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονηθέντων αἱ πλευραὶ αἱ περὶ
 τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ $ΔB$ πρὸς τὴν BE
 οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ
 AB παραλληλόγραμμον πρὸς $BΓ$ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ $ΔB$ πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ
 HB πρὸς τὴν BZ , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΔB$ πρὸς τὴν BE
 οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE πα-
 ραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως
 τὸ $BΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλό-
 γραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ
 $BΓ$ πρὸς τὸ ZE · ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB παραλλη-
 λόγραμμον πρὸς $BΓ$ παραλληλογράμμῳ. Τῶν ἄρα
 ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μὲν ἴσην ἐχόντων γωνίαν τρι-
 γώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας

ex vertice anguli propositi prima in uno crure, secunda in al-
 tero sumatur, et altera harum rectarum puncta extrema recta
 aliqua iungantur, deinde in eodem crure, in quo sumta est
 secunda, a vertice abscindatur tertia, atque ab altero eius ex-

Compleatur enim parallelogrammum ZE .

Et quoniam aequale est parallelogrammum AB parallelogrammo BF ; est autem aliud quoddam ZE ; est igitur (V. 7.) ut AB ad ZE ita BF ad ZE . Sed (VI. 1.) ut AB quidem ad ZE ita AB ad BE , ut vero BF ad ZE ita HB ad BZ ; erit igitur (V. 11.) AB ad BE ita HB ad BZ . Parallelogrammorum igitur AB , BF reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

Sint autem reciproca latera circa aequales angulos, et sit ut AB ad BE ita HB ad BZ ; dico aequale esse parallelogrammum AB parallelogrammo BF .

Quoniam enim est ut AB ad BE ita HB ad BZ , sed ut AB quidem ad BE ita (VI. 1.) parallelogrammum AB ad parallelogrammum ZE , ut HB vero ad BZ ita parallelogrammum BF ad parallelogrammum ZE ; erit igitur (V. 11.) AB ad ZE ita BF ad ZE ; aequale igitur est (V. 9.) parallelogrammum AB parallelogrammo BF . Ergo aequalium etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 363.)

Aequalium et unum angulum uni aequalem habentium triangulorum reciproca sunt latera, quae circa

tremo ducatur ad illud crux, in quo prima sumpta fuit, recta, quae sit, ut vocant, antiparallela ei, quae primae et secundae extrema iungit i. e. ita ducatur, ut cum cruce uno eundem angulum efficiat, quem illa, cui antiparallela esse debet, cum

γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΔΕ$, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΔΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΔΔΕ$ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΔΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΓΑ$ τῇ $ΑΔ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΑΒ$. Καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΒΔ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΔΕ$ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ $ΑΒΔ$ ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΔΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον. Ἄλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$, ὡς δὲ τὸ $ΕΑΔ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. τῶν $ABΓ$, $ΔΔΕ$ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

altera, et vice versa. Hic quoque situs secundae et tertiae inter se permutari possunt. Cf. Pfeiderer l. c. §. 121. Apud Campanum Prop. nostra VI. 12. non separatim numeratur, sed praecedenti VI. 11. (apud Campanum VI. 10.) tantum subiungitur.

PROPOSITIO XIII.

Obs. Pars posterior Obs. 3. ad VI. 8. etiam adhuc huius problematis solutionem exhibet, facile inveniendam. Pfeiderer l. c. §. 126. Caeterum VI. 13. Prop. est apud Campanum VI. 9. Docet illa aliis verbis „si ratio duarum magni-

aequales angulos sunt; et quorum triangulorum unum angulum uni aequalem habentium reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia triacula $AB\Gamma$, $A\Delta E$, unum angulum uni aequalem habentia, scilicet angulum $B\Lambda\Gamma$ angulo $A\Delta E$; dico triangulorum $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca esse latera, quae circa aequales angulos sunt, hoc est, esse ut ΓA ad $A\Delta$ ita $E A$ ad AB .

Ponantur enim ita ut in directum sit ΓA ipsi $A\Delta$; in directum igitur est (L. 14.) et $E A$ ipsi AB . Et iungatur $B\Delta$.

Et quoniam aequale est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Delta E$, est autem aliud triangulum $AB\Delta$; est igitur (V. 7.) ut triangulum ΓAB ad triangulum BAA ita triangulum $A\Delta E$ ad triangulum BAA . Sed ut ΓAB quidem ad BAA ita (VI. 1.) ΓA ad $A\Delta$, ut EAA vero ad BAA ita $E A$ ad AB : erit igitur (V. 11.) ΓA ad $A\Delta$ ita $E A$ ad AB ; triangulorum igitur $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

tudinum expressa sit per datas rectas invenire rationem subduplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Exemplum huiusmodi parallalogrammorum praebent, quae in I. 43. vocantur parallelogrammorum circa diagonalem complementa. Cf. Pfeiderer l. c. §. 134.

Obs. 2. Demonstratio, qua ex aequalitate angulorum ad B ope I. 14. inferitur, si AB , BE sint in directum, fore et ZB , BH in directum, praeter morem praeceptum videtur, et rectius deduci posse videtur ex ea conversa I. 15. Prop. quam

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. λέγω ὅτι ἴσων ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΔΕ$ τριγώνῳ.

Ἐπιτευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς $ΒΔ$, ἔπει ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως τὸ $ΕΑΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον. ὡς ἄρα τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως τὸ $ΕΑΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΑΒΓ$, $ΑΔΕ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΕΑΔ$ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κἂν τὸ ὑπὸ τῶν

iam Proclus desideravit, et nos ex eo supra attulimus. Cf. Pfeiderer l. c. §. 136.

PROPOSITIO XV.

Obs. 1. Propositiones 14. et 15. uno enunciato, pariter ac duas propositionis VI. 1. partes comprehendere, atque etiam ope I. 34. unam ex altera inferre licet. Coniunctae autem, quam seiunctae cur facilius intelligerentur, quod Austin. vult, haud apparet. Cf. Pfeiderer l. c. §§. 139. 140.

Obs. 2. Propositiones 14. 15. parallelogrammi vel trianguli dati transformationem in aliud dati lateris, circa eundem vel aequalem angulum reducunt ad problemma VI. 12. Iuxta eas scilicet quarta proportionalis lateri dato, et duobus parallelogrammi, triangulive dati circa angulum designatum lateribus,

Sint autem reciproca latera triangulorum ABF , $A\Delta E$, et sit ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB ; dico aequale esse triangulum ABF triangulo $A\Delta E$.

Iuncta enim rursus BA , quoniam est ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB , sed ut ΓA quidem ad $A\Delta$ ita (VI. 1.) triangulum ABF ad triangulum BAA , ut EA vero ad AB ita triangulum EAA ad triangulum BAA : erit igitur (V. 11.), ut triangulum ABF ad BAA ita triangulum EAA ad BAA ; utrumque igitur ipsorum ABF , $A\Delta E$ ad BAA eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) triangulum ABF triangulo EAA . Aequalium igitur etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 364.)

Si quatuor rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est rectangulo sub mediis contento; et si rectangulum sub extremis contentum exhibet alterum circa hunc angulum latus parallelogrammi triangulive construendi. Nominatim ope Prop. 14. in compendium redigitur solutio problematis I. 44. Cf. Pfeiderer l. c. §§. 141. 142.

Obs. 3. Facile etiam Prop. 15. extendi potest ad triangula, quorum unus angulus unus, et unus angulus alterius simul sumti sunt duobus rectis aequales. Cf. infra ad VI. 23. Obs. 9.

PROP. XVI. XVII.

Obs. 1. Prop. 16. et Corollarium 14. et Prop. 17. ut Cor. 16. sisti, vel etiam utraque immediate demonstrari potest iisdem modis, quibus 14. Ambae etiam sic enunciari possunt: parallelogrammorum rectangulorum aequalium bases sunt altitudinibus reciproce proportionales; ac vicissim aequalia sunt

ἀκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστῶσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , $ΓΔ$, E , Z ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἠχθῶσαν γὰρ ἀπὸ τῆς A , $Γ$ σημείων ταῖς AB , $ΓΔ$ εὐθείαις πρὸς ὁρθὰς αἱ AH , $ΓΘ$, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH , τῇ δὲ E ἴση ἡ $ΓΘ$, καὶ συμπληρώσθωσαν τὰ BH , $ΔΘ$ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z , ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ $ΓΘ$, ἡ δὲ Z τῇ AH · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ $ΓΘ$ πρὸς τὴν AH · τῶν BH , $ΔΘ$ ἄρα παραλληλογράμμων

parallelogramma rectangula, quorum bases sunt altitudinibus reciproce proportionales Cf. Pfeiderer l. c. §. 143.

Obs. 2. Cum quodvis parallelogrammum obliquangulum aequale sit rectangulo aequo alto super eadem basi (I. 35.): generatim etiam (V. 7. V. 11.) duo quaecunque parallelogramma aequalia habent bases altitudinibus reciproce proportionales, ac vicissim. Unde ope I. 41. V. 15. idem de triangulis aequalibus deducitur (ibid. §§. 144. 145.).

Obs. 3. Quodsi priores 16. et 17. partes ad corollaria 8. in Elementis ac in Obsa. 2. 3. ad VI. 8. subiuncta applicantur; hae emergunt propositiones. Perpendiculari ab vertice anguli recti trianguli rectanguli in hypotenusam demisso, 1) quadratum huius perpendiculari aequatur rectangulo sub segmentis hypotenusae ab ipso factis. 2) Cuiuslibet catheti quadratum aequale est rectangulo sub hypotenusa, et sub eius segmento, quod catheto huic adiacet. 3) Rectangulum sub lateribus circa angulum rectum aequale est rectangulo sub hypotenusa et per-

tum aequale est rectangulo sub extremis contento, quatuor rectae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales $AB, \Gamma A, E, Z$, ut AB ad ΓA ita E ad Z ; dico rectangulum sub AB, Z contentum aequale esse rectangulo sub $\Gamma A, E$ contento.

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis $AB, \Gamma A$ rectis ad rectos angulos $AH, \Gamma\Theta$, et ponatur ipsi quidem Z aequalis AH , ipsi vero E aequalis $\Gamma\Theta$, et compleantur parallelogramma $BH, \Lambda\Theta$.

Et quoniam est ut AB ad ΓA ita E ad Z , aequalis autem E quidem ipsi $\Gamma\Theta$, ipsa vero Z ipsi AH ; est igitur (V.7.) ut AB ad ΓA ita $\Gamma\Theta$ ad AH ; parallelogrammorum igitur $BH, \Lambda\Theta$ reciproca sunt la-

pendiculo. 4) Rectangulum sub alterutro latere circa angulum rectum et sub perpendicularo aequatur rectangulo sub altero latere circa angulum rectum et sub segmento hypotenusae, quod priori adiacet catheto. In circulo 5) quadratum perpendiculari ab quocunque peripheriae puncto ad aliquam eius diametrum ducti aequatur rectangulo sub segmentis diametri ab perpendicularo factis. 6) Cuiuslibet chordae per centrum non transeuntis quadratum aequale est rectangulo sub diametro per unum chordae extremum ducta, et sub diametri huius segmento chordae contiguo, quod ab illa abscindit perpendicularum in illam ex altero chordae extremo demissum. Unde porro consequitur: perpendicularo in hypotenusam trianguli rectanguli (diametrum circuli) demisso ex vertice anguli recti (puncto quocunque peripheriae), et in circulo ductis ab hoc puncto rectis ad extrema diametri: 7) hypotenusam (diametrum) esse ad alterutrum ipsius segmentum, uti quadratum hypotenusae (diametri) ad quadratum catheti (chordae) huic segmento ad-

ἀντιστεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.
 Ὡν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιστεπόν-
 θασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν
 ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ
 AO παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ
 τῶν AB, Z , ἴση γὰρ ἢ AH τῇ Z · τὸ δὲ AO τὸ ὑπὸ
 τῶν $ΓΔ, E$, ἴση γὰρ ἢ $ΓΘ$ τῇ E · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν
 AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ
 τῶν $ΓΔ, E$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AP, Z περιεχόμενον ὀρθογώ-
 νιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$ περιεχομένῳ ὀρ-
 θογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσων-
 ται, ὥς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἢ E πρὸς τὴν Z .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ
 τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$, καὶ ἐστὶ
 τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH , ἴση γὰρ ἐστὶν ἢ
 AH τῇ Z · τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $ΓΔ, E$ τὸ AO , ἴση γὰρ

incidentis: vel ut huius catheti (chordae) quadratum ad quadra-
 tum istius segmenti: vel ut quadratum catheti (chordae) ad-
 iacentis alteri segmento ad quadratum perpendiculari. Nempe
 (Fig. 356.)

$$\begin{aligned} BF : ΓΔ &= BF^2 : BF \times ΓΔ \text{ (Obs. 4. ad VI. 1.)} = BF^2 : ΓΑ^2 \\ &= BF \times ΓΑ : ΓΔ^2 &= AP^2 : ΓΔ^2 \\ &= ΓΒ \times ΒΔ : ΓΔ \times ΔΒ &= AB^2 : ΑΔ^2 \end{aligned}$$

nr. 2. 6.

8) Ipsa autem hypotenusae (diametri) segmenta esse, uti qua-
 drata cathetorum (chordarum) adiacentium $BA : AT = TB \times BA :$
 $ΓΒ \times AT$ (Obs. 4. ad VI. 1.) $= AB^2 : AT^2$ (nr. 2. 6.).

9) Eodemque, quo nr. 8. modo ostenditur, ex eodem peri-
 pheriae puncto ductis diametro et duabus pluribusve chordis,
 perpendicularisque ab altitatis huius terminis in diametrum de-
 missis: quadrata chordarum esse ut segmenta ipsis adiacentia

tera; quae circa aequales angulos sunt. Quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia (VI. 14.); aequale igitur est parallelogrammum BH parallelogrammo AO . Et est BH quidem sub AB , Z contentum, aequalis enim AH ipsi Z ; parallelogrammum vero AO sub ΓA , E continetur, aequalis enim ΓO ipsi E ; rectangulum igitur sub AB , Z contentum aequale est rectangulo sub ΓA , E contento.

Sit autem rectangulum sub AB , Z contentum aequale rectangulo sub ΓA , E contento; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓA ita E ad Z .

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum sub AB , Z aequale est rectangulo sub ΓA , E contento, et est rectangulum quidem sub AB , Z ipsum BH , aequalis enim AH ipsi Z ; rectangulum vero sub ΓA ,

diametri. Cf. Pfleiderer l. c. §. 147. (Caeterum quatuor primas in hac observatione occurrentes propositiones iam vidimus in corollariis ad I. 41. et I. 43.).

Obs. 4. Propositionum obs. praecedente expositarum tres primae, usus in demonstrandis X. 34. X. 35. X. 36. gratia traduntur in Lemm. 1. ante X. 34. et ope VI. 17. VI. 16. stabiliantur medianibus analogiis una ab VI. 8. Cor. parte prima petita, caeteris ex ipsis propositionibus VI. 8. VI. 4. deductis (vid. Obs. 2. ad VI. 8.); tertia insuper demonstratur, rectangulis sub BA et AF , BF et AA descriptis, colligendo ex I. 34. utrumque duplum esse trianguli ABF . Primae et secundae demonstratio eadem, quae in Lemm. 1. ante X. 34. repetitur in Lemm. post XIII. 13. ad efficiendam praecedentis septimae (Obs. 3.) partem tertiam. Eiusdem septimae pars prima in demonstrationibus XIII. 14. XIII. 15. XIII. 16. tan-

ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ E · τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ $\Delta\Theta$ · καὶ ἐστὶν ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὴν AH · ἴση δὲ ἡ μὲν $\Gamma\Theta$ τῇ E , ἡ δὲ AH τῇ Z · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z · Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσσονται.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ · λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς B τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ B ἴση ἡ Δ .

quam nota simpliciter sumitur: pariterque bis in demonstratione XIII. 18. semel autem, bisve, cum adiuncta ratione, ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Gamma\Delta\Delta$ τριγώνῳ: in demonstrationibus XIII. 13. autem, pariter ac secunda pars in XIII. 18. ex proportionem $B\Gamma:\Gamma\Delta=AG:\Gamma\Delta$, vel $\Gamma\Delta:AG=AG:BG$ rursus utrobique ab VI. 8. VI. 4. deducta infertur per VI. 20. Cor. 2. Quae omnia, iuncta iis, quae Obs. 2. ad VI. 8. notata fuere, nituis, quam ut auctori Elementorum tribui possint, ab methodo abludunt alias ipsi solenni, praemissas demonstrationum subsequentium suis locis ad perpetuum deinceps usum stabiliendi; nominatim etiam theorematum generaliorum ad speciales casus applicationes frequenter deinceps

E ipsum $\Delta\theta$, aequalis enim $\Gamma\theta$ ipsi E ; erit parallelogrammum BH aequale parallelogrammo $\Delta\theta$ et sunt aequiangula. Aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera (VI. 14.), circa aequales angulos; est igitur ut AB ad ΓA ita $\Gamma\theta$ ad AH . Aequalis autem $\Gamma\theta$ quidem ipsi E , ipsa vero AH ipsi Z ; est igitur ut AB ad ΓA ita E ad Z . Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 365.)

Si tres rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est quadrato ex media; et si rectangulum sub extremis contentum aequale sit quadrato ex media, tres rectae proportionales erunt.

Sint tres rectae proportionales A, B, Γ , ut A ad B ita B ad Γ ; dico rectangulum sub A, Γ contentum aequale esse quadrato ex B .

Ponatur ipsi B aequalis Δ .

adhibendas, quamvis obvias et faciles; seorsim enunciandi; ut immediate essent ad usus occurrentes paratae. Cf. Obs. 2. ad II. 3. Unde, quum incuriae et oscitantiae auctoris isra tribuere haud liceat, probabile sit, ut hodiernum, ita et olim communibus, tironum praecipue etiam visibus parita fuisse elementorum exemplaria variis modis respectibusque, compendii ac facilitatis gratia, forsan et arctioris systematis praetextu (vid. Proclus in libr. II. p. 21.) truncata, sicque plura; praetertim, quae solis X. ac XIII. in praecedentibus libris inservirent, his excidisse; ac multifariam, nec apte semper et uniformiter; illorum textui assutis lemmatibus (Cf. Obr. 5. ad

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ B τῇ Δ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ . Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ . Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἀπὸ τῆς B ἔστιν, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B πετραγώνῳ.

VI. 1.), insertisque auctariis ansam dedisse: Cf. Pfeiderer §. 148.

Obs. 5. Ope Prop. VI. 17. demonstrari posse I. 47. diximus in Excursu ad I. 47. Cf. Pfeiderer §. 149.

Obs. 6. Eadem Prop. VI. 17. explicat identitatem constructionis problematum II. 14. et VI. 15., quae aequipollere docet. Cf. Pfeiderer §. 150.

Obs. 7. Uti casus particularis Prop. III. 35. quem sistunt assertum Obs. 5. nr. 5. ac solutio problematis II. 14. (vid. Obs. 3. ad II. 14. sub finem) in libro II. et III. ope II. 5. I. 47. demonstratur, hic per III. 31. VI. 8. VI. 17. adstruitur, ta universim Prop. III. 35. ex III. 21. VI. 4. VI. 16. potest inferri. Ostenditur nempe, duas rectas intra circulum se secantes se mutuo secare in partes reciproce proportionales, unde caetera ex VI. 16. fluunt. Cf. Pfeiderer. §. 151.

Obs. 7. Similiter Prop. III. 36. ipsiusque conversam III. 37. ex III. 32. eiusque conversa, et VI. 4. VI. 6. VI. 17. necesse licet. Ostendetur nempe, duabus rectis in circulum incidentibus, quarum una circulum contingat, altera secet, contingentem mediam proportionalem esse inter secantem, eiusque partem exteriorem, et contingentis quadratum aequari rectangulo sub tota secante, ipsiusque parte exteriori, et vice versa. Cf. Pfeiderer. §. 152.

Et quoniam est ut A ad B ita B ad Γ , aequalis autem B ipsi A ; est igitur ut A ad B ita A ad Γ . Si autem quatuor rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est (VI. 16.) rectangulo sub mediis contento; rectangulum igitur sub A , Γ aequale est rectangulo sub B , A . Sed rectangulum sub B , A est quadratum ex B , aequalis enim B ipsi A ; rectangulum igitur sub A , Γ contentum aequale est quadrato ex B .

Obs. 8. Quodsi (Fig. 365) AB circulum contingat in B , AI secet in A et Γ , triacula AB , BI , ob angulum A utrique communem, et $AB=BI$ (III. 32.) aequiangula erunt (I. 32.), adeoque

$$\begin{aligned} AA:AB=AB:BI \text{ (VI. 4.)} &= AB_q:AB \times BI \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(Obs. 4. ad} \\ \text{VI. 1.)} \end{array} \right. \\ AB:AI=AB:BI &= AB \times BI:BI_q \end{aligned}$$

itaque $AA:AI=AB_q:BI_q$ (V. 22.) h. e. ab puncto extra circulum ductis recta eum contingente, et altera ipsum secante, ductisque in circulo rectis iungentibus punctum contactus prioris et puncta sectionum alterius; tota secans recta est ad partem ipsius exteriorem, uti quadratum rectae ab puncto contactus ad extremum secantis totius ductae, ad quadratum rectae iungentis punctum contactus, atque alterum sectionis punctum. Vicissim, si $AA:AI=AB_q:BI$, cum ducta rectae AB parallela IE , etiam sit $AA:AI=AB:IE=AB_q:AB \times IE$ (Obs. 2. ad VI. 4. et Obs. 2. ad VI. 1.), ideoque (V. 11.) $AB_q:BI_q=AB_q:AB \times IE$ et (V. 9.) $BI_q=AB \times IE$, et (VI. 17.) $AB:BI=BI:IE$, ac sit angulus $ABI=EIE$ (I. 29), est angulus $A=ABI$ (VI. 6.) et hinc AB circulum in B contingit (Obs. 2. ad III. 32.). Cf. Plleiderer §. 155.

Obs. 9. Proposita Obs. 7. 8. sic etiam enunciantur: circa triangulum non sequicrurum descripto circulo, et per verticem trianguli ducta recta circulum tangente; haec basi productae sic occurrit, ut rectangulum sub rectis puncto huius occursus

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς B . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς B τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ B, Δ . Ἐὰν

extremisque basis interiacentibus aequale sit quadrato rectae ab eodem occursus puncto ad verticem trianguli ductae: rectae vero inter punctum illud occursus ac terminos basis in ipsa abscissae eandem habeant rationem, quam crurum trianguli, quibus adiacent, quadrata. Nempe, si triangulo $AB\Gamma$, cuius crus $AB > B\Gamma$, circulus describitur, et hunc in B contingens agitur recta $B\Delta$: ob angulum $\angle AB\Gamma = A$ (III. 32.) $< \angle \Gamma B A$ (I. 18.), ideoque angulos $\angle AB\Gamma + \angle \Gamma B A < \angle \Gamma B A + \angle \Gamma B A$ h. e. (I. 13.) < 2 rectis: ad partes angulorum $\angle AB\Gamma$, $\angle \Gamma B A$ concurrunt rectae $A\Gamma$, $B\Delta$ (I. Post. 5.). Ac tum rectang. $AA \times A\Gamma = ABq$ (Obs. 7.) et $AA : A\Gamma = ABq : B\Gamma q$ (Obs. 8.). Vicissim 1) si trianguli non aequicruri $AB\Gamma$ basis $A\Gamma$ ad partes cruris minoris $B\Gamma$ sic producitur, ut rectangulum sub adiecta $\Gamma\Delta$ et sub composita AA ex basi $A\Gamma$ et adiecta $\Gamma\Delta$ aequale sit quadrato rectae AB ab termino Δ continuationis basis ad trianguli verticem B ductae: recta haec circulum triangulo circumscriptum in B contingit (Obs. 8. nr. 2.) et segmenta basis AA , $A\Gamma$ terminis ipsius A , Γ , ac puncto Δ intercepta, sunt uti quadrata crurum trianguli AB , $B\Gamma$, ipsis adiacentium (Obs. 8. nr. 1.). Atque 2) si trianguli non aequicruri $AB\Gamma$ basis $A\Gamma$ ad partes cruris minoris sic in Δ usque producitur, ut segmenta eius AA , $A\Gamma$, puncto hoc Δ , terminisque basis A , Γ intercepta, sint, ut crurum trianguli AB , $B\Gamma$ ipsis adiacentium quadrata: recta ab puncto Δ ad verticem B trianguli ducta circulum triangulo circumscriptum in B contingit (Obs. 9. nr. 2.) et rectae AB quadratum aequale est rectangulo sub segmentis AA , $A\Gamma$ basis puncto Δ ac terminis eius A , Γ

Sed rectangulum sub A , Γ aequale sit quadrato ex B ; dico esse ut A ad B , ita B ad Γ .

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum sub A , Γ aequale est quadrato ex B , sed quadratum ex B est rectangulum sub B , A , aequalis enim B ipsi A ; erit igitur rectangulum sub A , Γ aequale rectan-

interceptis (Obs. 8. nr. 1.). Posterior conversa est Lemma 2. Libri II. Locorum planorum Apollonii. Cf. Pfeiderer. §. 154.

Obs. 10. Pariter immediate per III. 21. vel III. 22, et VI. 4. VI. 16. demonstratur, quod a Clavio et Baermanno III. Prop. 36. subiungitur corollarium (vid. supra II. 56. Cor. 1.), nempe si a puncto extra circulum ducantur duae rectae eum secantes, rectangula sub totis secantibus, et partibus earum exterioribus aequalia esse, sive, quod eodem redit, totas secantes esse partibus suis exterioribus reciproce proportionales. Cf. Pfeiderer. §. 155.

Obs. 11. Ex VI. 16. porro consequitur, cuiuslibet trianguli ABA (Fig. 366.) angulo quocunque A bifariam secto per rectam AT , rectangulum sub eius lateribus AA , AB angulum A comprehendentibus aequale esse rectangulo sub segmentis AT , TB tertii lateris, ab recta AT factis, una cum huius rectae AT quadrato (quae est Rob. Simson. Libr. VI. Prop. B.). Circumscribatur enim triangulo ABA circulus (IV. 5.), cui recta AT producta rursus occurrat in E , et iungatur alterutra recta AE , BE . Posteriore ducta, est angulus $A=E$ (III. 21.). Quare, cum etiam sit angulus $AAT=BEB$ (hyp.) est $AA:AT=EA:AB$ (VI. 4.) et hinc rectang. $AA \times AB = EA \times AT$ (VI. 16.) $= AT \times TE + AT^2$ (II. 3.) $= AT \times TB + AT^2$ (III. 35.). Cf. Pfeiderer. §. 157.

Obs. 12. Porro rectangulum sub duobus quibuscunque lateribus cuiuslibet trianguli aequale est rectangulo sub diametro circuli triangulo circumscripti et sub perpendicularo ex vertice anguli, quem latera ista comprehendunt, in latus ter-

δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ . Ἰση δὲ ἡ B τῇ A ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ . Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοιὸν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

tium demisso. 1) Si ipsum alterutrum latus AB (Fig. 367.) tertio $B\Gamma$ est perpendiculare: alterum $A\Gamma$ diameter est circuli triangulo circumscripti (III. 31. Conv. vid. Obs. ad III. 31. vel III. 35. nr. 2.) et propositio ad hanc identicam redit: rectang. $BA \times A\Gamma = \Gamma A \times AB$. 2) Si uterque ad basin seu tertium latus $B\Gamma$ (Fig. 368.) angulus est acutus, quicumque sit angulus BAG duobus lateribus BA , $A\Gamma$ comprehensus; vel si alteruter ad basin angulus $AB\Gamma$ (Fig. 369.) est obtusus, per verticem A ducta diametro $A\tilde{Z}B$, et iuncta BE recta, perpendiculoque AA in basin $B\Gamma$ demisso; ob angulos ABE , $AA\Gamma$ rectos (III. 31. et Constr.) atque $E = \Gamma$ (III. 21.) in triangulis ABE , $AA\Gamma$ est $BA : AE = AA : A\Gamma$ (VI. 4.), proinde rectangul. $BA \times A\Gamma = EA \times AA$ (VI. 16.). (Rob. Simson. Prop. C. Libr. VI. Pfleiderer. §. 158.). Hinc rectang. $B\Gamma \times AA : BA \times A\Gamma = B\Gamma \times AA : EA \times AA$ (V. 7.) $= B\Gamma : EA$ (Obs. 4. ad VI. 1.), ubi rectang. $B\Gamma \times AA$ duplum est areae trianguli (I. 41.). Quare duplum areae cuiusvis trianguli est ad rectangulum sub duobus ipsius lateribus, uti tertium latus ad diametrum circuli triangulo circumscripti. Cf. Pfleiderer. §. 159.

Obs. 13. Rectangulum contentum diagonalibus $A\Gamma$, BA (Fig. 370.) figurae quadrilaterae circulo inscriptae aequale est duobus rectangulis $AB \times A\Gamma + B\Gamma \times AA$ contentis oppositis eius lateribus. Fiat enim angulus ABE aequalis angulo $AB\Gamma$, et

gulo sub B , Δ . Si autem rectangulum sub extremis aequale est rectangulo sub mediis contento, quatuor rectae proportionales sunt (VI. 16.); est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ . Aequalis autem B ipsi Δ ; ut igitur A ad B ita B ad Γ . Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 371.)

Δ data recta linea dato rectilineo simile et similiter positum rectilineum describere.

utrique addatur, vel ab utroque subtrahatur, angulus communis EBA , eritque angulus ABA aequalis angulo EBI . Et, quum praeterea sit angulus $AAB = BIE$ (III. 21.), quippe in eodem cum illo segmento positus, erit triangulum ABA aequiangulum triangulo EBI , adeoque (VI. 4.) $BI : IE = BA : AA$, ideoque rectangulum $BI \times AA = IE \times BA$. Porro, quum angulus ABE aequalis sit angulo ABI , et angulus BAE aequalis angulo BIG (III. 21.), erit triangulum ABE aequiangulum triangulo ABG , adeoque (VI. 4.) $BA : AE = BG : AG$, ideoque rectangulum $BA \times AG = AE \times BG$. At ostensum fuit, esse rectangulum $BI \times AA = IE \times BA$. Erunt itaque rectangula $BA \times AG + BI \times AA = AG \times BA$. Haec propositio est theorema Ptolemaei in *μεγάλη σύνταξις* L. 1. c. 9. et apud ipsum fundamenti loco inservit tabulis eius trigonometricis. Habetur illud etiam apud Rob. Simson. Prop. D., VI. in ed. Angl., apud Plaisayr., Kraft. Instit. Geom. Sublim. §. 91. aliosque. Ad eandem propositionem referri potest sequens theorema, quod est apud Plaisayr. Prop. E., VI. Si segmentum aliquod circuli ABI (Fig. 371.) bisectum sit in Γ , et e punctis extremis A , B segmenti, pariterque e puncto bisectionis Γ inflexae sint ad punctum aliquod Δ reliquae circumferentiae rectae AA , BA , $\Gamma\Delta$: summa rectarum $AA + BA$ a punctis extremis basis inflexarum ad $\Gamma\Delta$ rectam a puncto bisectionis inflexam eandem rationem habebit, quam AB basis

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθείαι ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ $ΓΕ$ δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τῷ $ΓΕ$ εὐθύγραμμῳ ὁμοῖόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεξεύχθω ἡ $ΔΖ$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A, B τῇ $μν$ πρὸς τῷ $Γ$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ HAB , τῇ δὲ ὑπὸ $ΓΔΖ$ ἴση ἡ ὑπὸ ABH . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΖΔ$ λοιπὴ τῇ ὑπὸ AHB ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΓΔ$ τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΖΔ$ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ $ΖΓ$ πρὸς τὴν HA καὶ

segmenti ad $ΑΓ$ basin segmenti dimidii. Quum enim sit $ABΓΔ$ quadrilaterum circulo inscriptum, erit ex praeced. $ΑΔ \times BΓ + ΑΒ \times ΑΓ = ΑΒ \times ΑΓ$ i. e. ob $BΓ = ΑΓ$ (III. 29.) ($ΑΔ + ΑΒ$) $\times ΑΓ = ΑΒ \times ΑΓ$ (II. 1.), adeoque $ΑΔ + ΒΔ : ΓΔ = ΑΒ : ΑΓ$ (VI. 14.). (Playfair Prop. E. VI. Cf. 94. vel ut est apud Rob. Sims. Dat. 97.).

Obs. 14. Conversas praecedentium, praeter iam Obs. 7. sqq. expositas notamus adhuc sequentes. Si quadratum perpendiculari $ΑΔ$ (Fig. 356.), quod in trianguli $ABΓ$ latus $BΓ$ angulis ipsius acutis interiacens ex vertice opposito A demittitur, aequale est rectangulo sub segmentis $ΒΔ, ΔΓ$ lateris $BΓ$ ab perpendicularo $ΑΔ$ factis, seu (VI. 17.) si perpendicularum $ΑΔ$ medium proportionale est inter segmenta $ΒΔ, ΔΓ$ lateris $BΓ$: trianguli ad verticem A angulus est rectus. Quippe ob $ΒΔ : ΑΔ = ΑΔ : ΔΓ$, et angulos ad A rectos, est angulus $ΒΑΔ = Γ$ (VI. 6.); angulus igitur $ΒΑΓ = Γ + ΓΑΔ =$ recto (I. 32. Cor. 5.). Cf. Pflleiderer. §. 160. Pappus Collect. Mathem. I. VII. Prop. 203. propositioni huic adiungit: si quadratum perpendiculari $ΑΔ$ (Fig. 372.) minus fuerit rectangulo sub segmentis $ΒΔ, ΔΓ$ lateris $BΓ$, angulus $ΒΑΓ$ erit obtusus, si maius (Fig. 373.) acutus. Semicirculo enim super diametro $BΓ$ descripto, qui perpendicularum $ΑΔ$ in puncto E secet, ac rectis

Sit data quidem recta AB , datum autem rectilineum FE ; oportet a recta linea AB rectilineo FE simile et similiter positum rectilineum describere.

Iungatur AZ , et constituatur (I. 23.) ad rectam AB et ad puncta in ea A , B angulo quidem ad F aequalis angulus HAB , angulo vero FAZ aequalis angulus ABH ; reliquus igitur FZA reliquo AHB est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum ZFA triangulo HAB ; est igitur (VI. 4.) ut ZA ad HB ita ZF ad HA et FA ad AB . Rursus, con-

BE , FE iunctis ob $EA \perp$ rectangulo $BA \times AF$ (Obs. 3. nr. 5.) priori casu erit $AA < EA$, et hinc angulus $BAF > BEF$ (I. 21.); posteriori $AA > EA$, atque angulus $BAF < BEF$ (I. 21.). Rectus autem est angulus BEF (III. 31.). Cf. Pflaiderer. §. 161. Propositorum in hac observatione casus specialis, quo segmenta BA , AF aequalia sunt, comprehenditur etiam iis, quae nr. 2. in Excursu ad I. Prop. 47. etc. ad finem libri II. diximus. Cf. Pflaiderer. §. 162. Et, quum ostensum sit, rectum esse angulum BAF (Fig. 356.), quem ab extremis B , F rectae BF ad extremum A perpendiculari AA ductae BA , FA comprehendunt, si rectang. $BA \times AF = AA^2$, seu si $BA : AA = AA : AF$; per conversam III. 31. consequitur: circuli super diametro BF descripti peripheriam transire per verticem A rectae AA diametro BF inter extrema ipsius normalis, quae media proportionalis est inter segmenta diametri BF puncto A facta, seu cuius quadratum rectangulo sub segmentis illis est aequale. Cf. Pflaiderer. §. 163. Ea quae ad hanc propositionem notata sunt solutioni etiam plurimorum problematum inservire possunt, quorum exquisitam copiam exhibet Pflaiderer. l. c. §§. 166—194, quae brevitatis studio hic praeterimus. Quae haecenus ad Propositiones libri VI. observata sunt, desumimus pleraque ex Pflaidereri scholiis in libro VI. Elementorum Eu-

ἡ $\Gamma Δ$ πρὸς τὴν AB . Πάλιν, συνεστιάτω πρὸς τῇ BH εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς B, H τῇ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $BH\Theta$, τῇ δὲ ὑπὸ $\Delta ΔE$ ἴση ἢ ὑπὸ $HB\Theta$. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta ΔE$ τρίγωνον τῷ $HB\Theta$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔZ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν ΘB . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $\Delta Δ$ πρὸς τὴν HB οὕτως ἢ τε $Z\Gamma$ πρὸς τὴν HA καὶ ἡ $\Gamma Δ$ πρὸς τὴν AB · καὶ ὡς ἄρα $Z\Gamma$ πρὸς τὴν AH οὕτως ἢ τε $\Gamma Δ$ πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἔτι ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν ΘB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $\Gamma \Delta Δ$ γωνία τῇ ὑπὸ AHB , ἡ δὲ ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ $BH\Theta$ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓZE ὅλη τῇ ὑπὸ $AH\Theta$ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma ΔE$ τῇ ὑπὸ $AB\Theta$ ἐστὶν ἴση, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ A ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ E τῇ πρὸς τῷ Θ · ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ τῷ ΓE , καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῷ πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ εὐθύγραμμον τῷ ΓE εὐθύγραμμῳ.

elidis, quorum P. I. Tubingae 1800.; P. II. 1801.; P. III. 1802. typis expressae fuerunt. Pars IV. prodit ibidem 1805., in qua unice de VI. propositione 23. et VI. definitione 5., utpote qua nititur VI. Prop. 23. agitur. Quippe hanc ipsam VI. 23. inepte loco suo motam et inter propositiones ad figuras similes pertinentes positam fuisse iudicat auctor. De hac itaque postea loco suo, et in excursu ad hunc librum viderimus. Dolendum autem est, scholia Psleidereri in reliquis libri VI. propositiones, quas ille iam elaborata in' scriniis habet, sublata in Universitate Tubingensi consuetudine, occasione Magisterii philosophici quotannis dissertationes publicas conscribendi, non in publicam lucem exire potuisse. E quibus benevolis ab auctore nobiscum communicatis, nonnulla

stituatur (I. 23.) ad rectam BH et ad puncta in ea B , H , angulo quidem $\angle ZE$ aequalis $\angle BH\Theta$, angulo vero $\angle AE$ aequalis $\angle H\Theta$; reliquus igitur ad E reliquo ad Θ est aequalis (I. 32.); equiangulum igitur est triangulum $\triangle ZE$ triangulo $\triangle H\Theta$; est igitur (VI. 4.) ut AZ ad HB ita ZE ad $H\Theta$, et EA ad ΘB . Ostensum est autem etiam, ut ZA ad HB ita ZF ad HA et FA ad AB , ut igitur (V. 11.) ZF ad AH ita et FA ad AB et ZE ad $H\Theta$, et adhuc EA ad ΘB . Et quoniam aequalis est angulus quidem $\angle ZA$ angulo $\angle AHB$, angulus vero $\angle ZE$ angulo $\angle BH\Theta$; totus igitur $\angle ZE$ toti $\angle AHO$ est aequalis. Ex eadem ratione et $\angle AE$ angulo $\angle AB\Theta$ est aequalis, est autem et angulus quidem ad F ipsi ad A aequalis, angulus vero ad E ipsi ad Θ ; equiangulum igitur est $\triangle A\Theta$ ipsi $\triangle FE$, et circa aequales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est rectilineum $A\Theta$ rectilineo FE (VI. 1. Def.).

certe in sequentibus breviter lectoribus nostris sistere volumus, nos rem ipsis admodum gratam facturos esse, persuasi. Cf. quae supra diximus ad VI. Def. 1.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Quod ad sensum problematis, et maxime verborum „similiter positum“ attinet, Clavius eum ita exprimit: „dicuntur rectilinea super lineas rectas descripta esse similia et similiter posita, quando anguli aequales constituuntur super ipsas rectas lineas, et tam reliqui aequales anguli, quam latera proportionalia semper ordine sese consequuntur.“ Borellus autem resp. ita explicat (Euclid. restit. lib. IV. Prop. 16.): problema poscit, super data recta linea describere polygonum

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοδέντι εὐθυγράμμῳ $ΓΕ$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ $ΑΘ$. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν τῇ πρὸς τῷ E , ὡς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὥστε ὁμολόγον εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$. λέγω ὅτι τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τῇ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ τρίτη ἀνάλογον ἢ BH , ὥστε εἶναι ὡς τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HA .

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΔΕ$ οὕτως ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. Ἀλλ' ὡς ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως ἐστὶν ἡ $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $ΔΕ$ οὕτως ἡ $ΕΖ$ πρὸς τὴν BH . τῶν ABH , $ΔΕΖ$ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευраὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

dato aequiangulum, et habens circum angulos aequales latera proportionalia lateribus illius, ita ut data recta homologa sit dato lateri polygoni. Necessitatem autem vocum „similiter positum“, quae Ramus definiri debuisse non sine ratione monet, iure asserit Tartalea contra Campanum (in cuius versione VI. Prop. apud ipsum 19. illae omissae sunt). Nempe omissis his vocibus plura uno rectilineo super data recta construi possunt, ita ut dato rectilineo sint similia. Cf. Pfleiderer. Schol. msc. §§. 256. 257.

A data igitur recta AB dato rectilineo TE simile et similiter positum rectilineum AO descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 376.)

Similia triacula inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Sint similia triacula $AB\Gamma$, ΔEZ , angulum ad B aequalem habentia angulo ad E , et sit ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ , ita ut homologum sit $B\Gamma$ ipsi EZ ; dico triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum ΔEZ duplicatam rationem habere eius quam habet $B\Gamma$ ad EZ .

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis $B\Gamma$, EZ tertia proportionalis BH , ita ut sit ut $B\Gamma$ ad EZ ita EZ ad BH ; et iungatur HA .

Et quoniam est ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ ; alterne igitur est (V. 16.) ut AB ad ΔE ita $B\Gamma$ ad EZ . Sed ut $B\Gamma$ ad EZ ita est EZ ad BH ; ut igitur (V. 11.) AB ad ΔE ita EZ ad BH ; triangulorum igitur ABH , ΔEZ reciproca sunt latera circa aequales angulos. Quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium, reciproca sunt latera circa aequales.

Obs. 2. Circa demonstrationem huius propositionis, ut est in textu graeco, iure monet Rob. Simson., vitiatam eam videri, quod in quadrilateris tantum ostendatur propositio, nec dicatur, quo modo extendi possit ad rectilinea quinque aut plurium laterum. Idem praeterea observat, in duobus triangulis inter se aequiangulis hic concludi, esse latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, sine permutatione proportionalium contra morem Euclidis, ut ex sequente Prop. 19. manifestum sit;

Ὡς δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπύκθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν BH · ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ $BΓ$ ἄρα πρὸς τὴν BH διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Ὡς δὲ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν BH οὕτως τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον· καὶ τὸ $ABΓ$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ABH διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Ἴσον δὲ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ· καὶ τὸ $ABΓ$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τοῦτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπεὶ περ ἰδείχθη, ὡς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν BH οὕτως τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔEZ .

Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις·

idemque vitium recurrere in conclusione. Contra hanc tamen observationem forte haud iniuria monere queas, niti conclusionem a Rob. Simson. reprehensam non quidem enunciato at demonstratione VI. 4. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 261. Perfectior autem demonstratio problematis solutionem ostendere potest primum in triangulis, ab his procedere ad figuras quadrilateras, ab his ad quinquelateras, et ita semper a quavis figura recti-

quales angulos, illa sunt aequalia (VI. 15.); aequale igitur est triangulum ABH triangulo AEZ . Et quoniam est ut BF ad EZ ita EZ ad BH ; si autem tres rectae proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur (V. 10. Def.) eius quam ad secundam; BF igitur ad BH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ut autem BF ad BH ita (VI. 1.) triangulum ABF ad triangulum ABH ; ergo et triangulum ABF ad ABH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Aequale autem est triangulum ABH triangulo AEZ ; unde et triangulum ABF (V. 7.) ad triangulum AEZ duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ergo similia etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectae proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita triangulum ex prima ad triangulum ex secunda simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut FB ad BH ita triangulum ABF ad triangulum ABH , hoc est AEZ .

PROPOSITIO XX. (Fig. 378.)

Similia polygona in similia triangula dividuntur, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ad lineam ad aliam, quae habeat numerum laterum unitate maiorem, unde deinde generaliter propositum constabit.

Obs. 3. Alium modum paullo expeditiorem, super linea data AB constituendi figuram rectilineam similem et similiter positam dato rectilineo $ATAEZ$ (Fig. 375.) Clavius docet ita fere. Ponatur data AB super latius AF , quod ei homologum esse debet, ducantur deinde ex A ad vertex angulorum figurae

καὶ τὸ πολὺγώνον πρὸς τὸ πολὺγώνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστω ὁμοία πολὺγωνα τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΖΗ$ · λέγω ὅτι τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγωνα εἰς τε ὁμοία τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολὺγώνον πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγώνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΖΗ$.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΒΕ$, $ΕΓ$, $ΗΛ$, $ΛΘ$.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίων ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολὺγώνον τῷ $ΖΗΘΚΛ$ πολὺγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΛ$ καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΕ$ οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΖΛ$. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ΑΒΕ$, $ΖΗΛ$ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἰσγώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΛ$ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$

rectae $ΑΔ$, $ΑΒ$ etc. per $Β$ ducatur $ΒΘ$ parallela rectae $ΓΔ$; per $Θ$ pariter $ΘΙ$ parallela rectae $ΔΕ$ etc. et facile ostendetur, esse triângula $ΑΒΘ$, $ΑΓΔ$; $ΑΘΙ$, $ΑΔΕ$ etc. adeoque tota recti-
linea $ΑΒΘΙΚ$, $ΑΓΔΕΖ$ similia et similiter posita:

Obs: 4. Huc pertinet problema (vid. XII. 2. et XII. 11.) dato circulo inscribendi (circumscribendi) figuram rectilineam datæ circulo alii inscriptæ (circumscriptæ) similem et similiter positam: Cf. Pflaiderer: l. c. §§. 263. 264.

PROPOSITIO XIX.

Obs. 1. Sensus huius propositionis est (Cf. dicta ad V. Def. 10.), similia triângula inter se habere rationem, quæ eadem sit rationi duplicatæ laterum homologorum, vel triângulum $ΑΒΓ$ esse ad aliud ei simile $ΔΕΖ$ in eadem ratione; in

polygonum duplicatam rationem habet eius quam homologum latus ad homologum latus.

Sint similia polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, homologum vero sit latus AB ipsi ZH ; dico $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ polygona in similia triacula dividi et in numero aequalia et homologa totis, et polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K\Lambda$ duplicatam rationem habere eius quam habet AB ad ZH .

Iungantur BE , $E\Gamma$, $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$.

Et quoniam simile est polygonum $AB\Gamma\Delta E$ polygono $ZH\Theta K\Lambda$, aequalis est angulus BAE angulo HZA ; et est ut BA ad AE ita ZH ad ZA (VI. Def. 1.). Et quoniam duo triacula ABE , ZHA unum angulum uni angulo aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangulum igitur est triaculum ABE triaculo ZHA (VI. 6.), quare et (VI. 4.) simile; aequalis igitur est

qua est latus BF prioris triaculi ad rectam aliquam, ad quam BF habet rationem duplicatam eius rationis, quam BF habet ad latus EZ ipsi homologum in altero triaculo, vel, si sumitur (VI. 11.) $BF: EZ = EZ: BH$, esse triaculum ABF ad triaculum AEZ in eadem ratione, in qua est BF ad BH . Caeterum patet, loco laterum BF , EZ quaecvis alia homologa poni potuisse. Et inverse erit ratio triaculi AEZ ad triaculum ABF duplicata lateris EZ ad BF , vel erit triaculum AEZ ad triaculum ABF ut BH ad BF (Cor. ad B. V.). Pfeiderer. in sched. msc. §§. 269. 270. 271. 273.

Obs. 2. Quodsi in triangulorum similium (Fig. 377.) homologa latera BF , EZ perpendicularia $\Lambda\Theta$, ΛK demittantur ex verticibus angulorum homologorum, erit, ob angulos B et E , pariterque Θ et K , adeoque (I. 32.) etiam reliquos aequa-

Ὡς δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντι-
 πεπάνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας,
 ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ
 ΔEZ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν
 EZ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν BH · ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι
 ἀνάλογον ᾦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα
 λόγον ἔχειν λέγεται ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ $BΓ$
 ἄρα πρὸς τὴν BH διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$
 πρὸς τὴν EZ . Ὡς δὲ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν BH οὕτως
 τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον· καὶ τὸ
 $ABΓ$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ABH διπλασίονα λόγον
 ἔχει ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Ἰσον δὲ τὸ ABH
 τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ· καὶ τὸ $ABΓ$ ἄρα τρίγω-
 νον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
 ἥπερ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν EZ . Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι
 ἀνάλογον ᾦσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπεὶ περ
 εἰδείχθη, ὡς ἡ $ΓΒ$ πρὸς τὴν BH οὕτως τὸ $ABΓ$ τρί-
 γωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔEZ .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-
 ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις·

idemque vitium recurrere in conclusione. Contra hanc tamen
 observationem forte haud iniuria monere queas, niti conclu-
 sionem a Rob. Simson. reprehensam non quidem enunciato at
 demonstratione VI. 4. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 261. Perfectior
 autem demonstratio problematis solutionem ostendere potest
 primum in triangulis, ab his procedere ad figuras quadrilateras,
 ab his ad quinquelateras, et ita semper a quavis figura recti-

quales angulos, illa sunt aequalia (VI. 15.); aequale igitur est triangulum ABH triangulo AEZ . Et quoniam est ut BF ad EZ ita EZ ad BH ; si autem tres rectae proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur (V. 10. Def.) eius quam ad secundam; BF igitur ad BH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ut autem BF ad BH ita (VI. 1.) triangulum ABF ad triangulum ABH ; ergo et triangulum ABF ad ABH duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Aequale autem est triangulum ABH triangulo AEZ ; unde et triangulum ABF (V. 7.) ad triangulum AEZ duplicatam rationem habet eius quam BF ad EZ . Ergo similia etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectae proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita triangulum ex prima ad triangulum ex secunda simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut FB ad BH ita triangulum ABF ad triangulum ABH , hoc est AEZ .

PROPOSITIO XX. (Fig. 378.)

Similia polygona in similia triacula dividuntur, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ad lineam ad aliam, quae habeat numerum laterum unitate maiorem, unde deinde generaliter propositum constabit.

Obs. 3. Alium modum paullo expeditiorem, super linea data AB constituendi figuram rectilineam similem et similiter positam dato rectilineo AEZ (Fig. 375.) Clavius docet ita fere. Ponatur data AB super latys AF , quod ei homologum esse debet, ducantur deinde ex A ad vertices angulorum figurae

γωνία τῇ ὑπὸ ZHA . Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ZHΘ$ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $EBΓ$ γωνία λοιπὴ τῇ ὑπὸ $AHΘ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ABE , ZHA τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς BA οὕτως ἡ AH πρὸς HZ , ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς $BΓ$ οὕτως ἡ ZH πρὸς $HΘ$. διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς $BΓ$ οὕτως ἡ AH πρὸς $HΘ$, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ $EBΓ$, $AHΘ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $AHΘ$ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον (ἐτι τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $AHΘ$ τριγώνῳ¹). Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $EΓΔ$ τρίγωνον ὁμοιὸν ἐστὶ τῷ $AΘΚ$ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ $ABΓΔΕ$, $ZHΘΚΑ$ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ABE , $EBΓ$, $EΓΔ$, ἐπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ZHA , $AHΘ$, $AΘΚ$, καὶ ὅτι τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH .

1) Verba uncis inclusa desunt in Ed. Oxon., nec multum refert, utrum ea ponas an omittas.

les, in triangulis aequiangulis $AΘ:ΔΚ=AB.ΔΕ$ (VI. 4. demonstr.) $=BΓ:ΕΖ=ΑΓ:ΔΖ$, adeoque (vid. dicta ad V. Def. 10.) triangula $ABΓ$, $ΔΕΖ$ erunt etiam in ratione duplicata altitudinum $AΘ$, $ΔΚ$, vel perpendicularorum similem situm habentium. Pfeiderer. §§. 280. 281.

Obs. 3. Quum parallelogramma semper dupla sint trian-

angulus ABE angulo ZHA . Est autem et totus ABF toti $ZH\Theta$ aequalis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur angulus EBF reliquo $AH\Theta$ est aequalis. Et quoniam propter similitudinem triangulorum ABE , ZHA , est ut EB ad BA ita AH ad HZ , sed et propter similitudinem polygonorum, est ut AB ad BF , ita ZH ad $H\Theta$; ex aequo igitur est (V. 22.), ut EB ad BF ita AH ad $H\Theta$, et circa aequales angulos EBF , $AH\Theta$ latera proportionalia sunt; aequiangulum igitur est (VI. 6.) triangulum EBF triangulo $AH\Theta$, quare (VI. 4.) et simile (triangulum EBF triangulo $AH\Theta$). Ex eadem ratione et triangulum ETA simile est triangulo $A\Theta K$; ergo similia polygona $AB\Gamma AE$, $ZH\Theta KA$ in similia triangula dividuntur et in aequalia numero.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint ABE , EBF , ETA , consequentia vero eorum ZHA , $AH\Theta$, $A\Theta K$, et $AB\Gamma AE$ polygonum duplicatam rationem habere eius quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, AB ad ZH .

gulorum eandem basin, eandemque altitudinem habentium (I. 41.), erunt etiam (V. 15.) similia parallelogramma in ratione laterum duplicata, vel etiam (Obs. 2.) in ratione duplicata perpendicularum similiter positorum. Pflaederer. §. 282. sqq.

Obs. 4. Quoniam porro quadrata omnia sint parallelogramma similia (I. Def. 29.; I. 28.; VI. Def. 1.) erunt duo quaecunque quadrata in ratione duplicata laterum homologorum. Unde, si super rectis homologis BF , EZ triangulorum similitum ABF , $A EZ$ quadrata constructa imaginemur, erunt tam

Ἐπεξεύχθωσαν γάρ αἱ $ΑΓ$, $ΖΘ$.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΗΘ$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς $ΒΓ$ οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΗΘ$ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΘ$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΘ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΜ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΝ$, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΜ$ τῇ ὑπὸ $ΖΗΝ$ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΜΒ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΖΝΗ$ ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΜ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΝ$ τριγώνῳ· Ὅμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ τὸ $ΒΜΓ$ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ $ΗΝΘ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΒ$ οὕτως ἡ $ΖΝ$ πρὸς $ΝΗ$, ὡς δὲ ἡ $ΒΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως ἡ $ΗΝ$ πρὸς $ΝΘ$ · ὥστε καὶ διῴσου, ὡς ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως ἡ $ΖΝ$ πρὸς $ΝΘ$. Ἄλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΜ$ τρίγωνον πρὸς $ΜΒΓ$, καὶ τὸ $ΑΜΕ$ πρὸς $ΕΜΓ$, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ὡς ἄρα τὸ $ΑΜΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΕ$ πρὸς τὸ $ΓΒΕ$. Ἄλλ' ὡς τὸ $ΑΜΒ$ πρὸς τὸ $ΒΜΓ$ οὕτως ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΓ$ οὕτως τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ

triangula, quam quadrata in ratione duplicata rectorum $ΒΓ$, $ΕΖ$, adeoque etiam triangula similia erunt in ratione quadratorum laterum homologorum. Pfeiderer. §. 278.

Obs. 5. Quodsi latera homologa duorum similium triangulorum (parallelogrammorum) aequalia sunt, ista triangula (parallelogramma) aequalia erunt (V. 22. Cor.) et vice versa. (Cor. Prop. m. in Excursu ad libr. V.)

Jungantur enim AT , $Z\Theta$.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum aequalis est angulus ABT angulo $ZH\Theta$, et est ut AB ad BT ita ZH ad $H\Theta$; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum ABT triangulo $ZH\Theta$; aequalis igitur est angulus quidem BAT angulo $HZ\Theta$, angulus vero BTA angulo $H\Theta Z$. Et quoniam aequalis est angulus BAM angulo HZN , ostensus autem est et ABM angulo ZHN aequalis; et reliquus igitur (I. 32.) AMB reliquo ZNH aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABM triangulo ZHN . Similiter ostendemus et triangulum BMF aequiangulum esse triangulo $HN\Theta$; est igitur (VI. 4.) ut AM quidem ad MB ita ZN ad NH , ut vero BM ad MF ita HN ad $N\Theta$; quare et ex aequo (V. 22.) ut AM ad MF ita ZN ad $N\Theta$. Sed ut AM ad MF ita triangulum ABM ad MBF , et AME ad EMI , inter se enim sunt ut bases (VI. 1.); et (V. 12.) ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur triangulum AMB ad BMF , ita ABE ad TBE . Sed ut AMB ad BMF ita AM ad MF ; ergo ut (V. 11.) AM ad MF ita triangulum ABE ad triangulum EBF . Ex eadem ratione et ut ZN ad $N\Theta$ ita triangulum ZHA ad triangulum $H\Lambda\Theta$. Et est ut AM ad MF

Obs. 6. Corollarium Prop. 19. adiectum, quod et Austin. observat, nonnisi ipsam Prop. 19. aliis verbis, substituendo nempe termino „ratio duplicata“ definitionem eius, enunciat, verumtamen expeditioris in sequentibus (vid. Demonstr. VI. 22.; VI. 25.; VI. 31.) argumentationis causa diserte ea exponere o re erat. Idem observandum est de Cor. Prop. 20. VI. 2. Cf. Pflleiderer. §. 300.

ZN πρὸς $NΘ$ οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AM πρὸς MF οὕτως ἡ ZN πρὸς $NΘ$ καὶ ὡς ἄρα τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ BEG τρίγωνον οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HΘA$ τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. Ὀμοίως δὲ δεῖξομεν, ἐπιτευχθεῖσιν τῶν BA , HK , ὅτι καὶ ὡς τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $EΓA$ τρίγωνον πρὸς τὸ $AΘK$ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ EBG πρὸς τὸ $AHΘ$, καὶ ἔτι $EΓA$ πρὸς τὸ $AΘK$ καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα

PROPOSITIO XX.

Obs. 1. Quum polygona hac varia ratione in triangula dividi possint, distinctius dici oportebat, qua ratione id fieri debeat, ut in utroque similium polygonorum respective similia existant triangula. Nempe si in uno polygonorum a vertice anguli cuiuscunque v. gr. a vertice E ad vertices reliquorum angulorum omnium (exceptis duobus proximis) ducantur rectae EB , EG etc., pariterque in altero polygono a vertice eius anguli, qui cum angulo E similiter positus est, ducantur ad vertices reliquorum angulorum rectae AH , $AΘ$ etc., tum etc. Atque, triangulis ita formatis, diagonales homologae, i.e. eae, quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, ut ex demonstratione patet, in partes respective aequales dividunt angulos, per quos transeunt, et ipsae hae diagonales sunt lateribus figurarum homologis proportionales. Cf. Pfliderer. Schol. §. 292.

Obs. 2. Quod demonstrationem attinet, pars secunda, quod nempe homologa sint triangula ABE , ZHA , pariterque EBG , $AHΘ$ praeter rationem prolixa esse videtur, quum, de-

ita ZN ad $N\Theta$; ergo (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum $B\Gamma E$, ita triangulum ZHA ad triangulum $H\Theta A$, et alterne (V. 16.) ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita triangulum BEM ad triangulum $H\Lambda\Theta$. Similiter ostendemus, iunctis BA , HK , ut triangulum $B\Gamma E$ ad triangulum $H\Lambda\Theta$ ita triangulum $E\Gamma A$ ad triangulum $\Lambda\Theta K$. Et quoniam est ut triangulum ABE ad ZHA ita $EB\Gamma$ ad $\Lambda H\Theta$, et insuper $E\Gamma A$ ad $\Lambda\Theta K$; erit ut (V. 12.) unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita polygonum $AB\Gamma\Lambda E$ ad polygonum $ZH\Theta K\Lambda$. Sed triangulum ABE ad triangulum ZHA duplicatam rationem habet eius quam

nōstrata ante triangulorum similitudine, res statim ex VI. 19. et V. 11. pateat, ut in altera demonstratione ad finem addita ostenditur. Unde haud paucis potior visa fuit haec posterior demonstratio, quam multi editores solam habent (v. c. Clavius, Giordano da Bitonto, Candalla, Billingsley, Orontius Fineus, Henrion, Borellus, Barrow., Cotesius, Rob. Simson., Playfair. alii) vel alteri addunt (ut Campanus, Zambertus, Commandinus, Boermannus, alii). Pffeiderero tamen (§. 294.) prior illa, subtiliori arte, et per consequentias magis immediatas suppositi argumentans, potius genuina videtur, quam altera expeditior, at remotiori consecratio utens, et demonstrationem partia tertiae imitans. Caeterum, si haec altera demonstratio eo tantum consilio adhibetur, quod inscriptio indicat, nempe ut ostendatur, homologa esse illa tria angula, nihil opus erat verbis in Ed. Oxon. ad finem additis, quae in variantibus notavimus: sin autem tertia quoque propositionis pars, nempe, similia polygonia esse in ratione duplicata laterum homologorum inde derivanda sint, sunt illa omnino necessaria

Obs. 3. Circa corollaria huic propositioni addita obser-

τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον οὕτως τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ τὸ $ABΓΔΕ$ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α α.

᾽Ωσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α β.

Καὶ εἰν τῶν AB , ZH τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ , ἢ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ AB πρὸς τὴν ZH . Ἐχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἢ περ ἢ ὁμόλογος

vat Austin., quemvis lectorem videre, vocem polygoni hic adhiberi de quavis figura rectilinea, quae plura quam tria latera habeat, unde nihil opus sit taediosis his corollaris, quae in ipsa propositione contenta sint. Verum enim vero, praeterquam quod vox πολύγωνον vel πολύπλευρον ita alio sensu sumenda foret, ac in I. Def. 23. eadem etiam rationes, quas in Obs. 6. ad VI. 19. vidimus, corollarii secundī enunciaturum

latus homologum AB habet ad ZH latus homologum; similia enim triangula in duplicata ratione sunt (VI. 19.) laterum homologorum; ergo et polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K A$ duplicatam rationem habet eius quam homologum latus AB ad homologum latus ZH . Ergo similia etc.

COROLLARIUM I.

Similiter et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplicata ratione esse laterum homologorum. Ostensum autem est et in triangulis (VI. 19.); quare et universe similes rectilineae figurae inter se in duplicata ratione sunt laterum homologorum.

COROLLARIUM II.

Et si ipsis AB , ZH tertiam proportionalem sumamus quae sit E , AB ad E duplicatam rationem habet (V. 10. Def.) eius quam AB ad ZH . Habet autem et polygonum ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem eius quam homologum

tuentur. Praeterea observat Austin. in corollario hoc secundo primum occurrere vocem *εἶδος*, quum alias Euclides, qui a recepta semel dicendi forma recedere non solet, voce *σχημα* utatur, ut in I. Def. 14. ad indicandum spatium terminis circumscriptum. Nec vocem *εἶδος* apud Euclidem recurrere, nisi in demonstratione VI. 25., ubi hoc ipsum corollarium modo minus necessario in usum vocetur, et in Prop. VI. 27; VI.

πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, *τοιούστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH*· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

A A A Ω Σ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἐτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Εκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ *ABΓΔΕ*, *ZHΘΚΛ* πολύγωνα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ *BE*, *ΕΓ*, *ΗΛ*, *ΑΘ*· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ *ABE* τρίγωνον πρὸς τὸ *ZHΛ* οὕτως τὸ *EBΓ* πρὸς τὸ *ΛΗΘ* καὶ τὸ *ΓΔΕ* πρὸς τὸ *ΘΚΛ*.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοιόν ἐστι τὸ *ABE* τρίγωνον τῷ *ZHΛ* τριγώνῳ, τὸ *ABE* ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ *ZHΛ* διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ *BE* πρὸς τὴν *ΗΛ*. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ *BEΓ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΗΛΘ* τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ *BE* πρὸς τὴν *ΗΛ*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *ABE* τρίγωνον πρὸς τὸ *ZHΛ* τρίγωνον οὕτως τὸ *EBΓ* πρὸς τὸ *ΛΗΘ*. Πάλιν,

28.; VI. 29.; VI. 30.; VI. 31., quae hoc ipso nomine suspecta videantur. Nec omnino consequi hoc corollarium ita generaliter expressum ex propositione, in qua sermo sit tantum de figuris rectilineis aut polygonis, non de quibuscunque spatii speciebus aut figuris. — Forte tamen non sine ratione responderi possit, ad vocem *εἶδος* subintelligendam esse vocem *πολύπλευρον*, vel *πολύγωνον* ex antecedentibus facile supponendam, et id ipsum, quod corollarium non de figura quacunque ex propositione consequatur, Euclidi causae fuisse, cuius generaliore voce *σχήμα* hic uti nollet.

latus ad homologum latus, hoc est AB ad ZH ; ostensum est autem hoc et in triangulis; quare et universe manifestum est, si tres rectae proportionales sint, ut prima ad tertiam ita futuram esse figuram a prima ad figuram a secunda, similem et similiter descriptam.

A L I T E R.

Ostendemus etiam aliter expeditius homologa esse triangula.

Exponentur enim rursus polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K A$, et iungantur BE , $E\Gamma$, HA , $A\Theta$; dico esse ut triangulum ABE ad ZHA ita $EB\Gamma$ ad $AH\Theta$ et $\Gamma\Delta E$ ad $\Theta K A$.

Quoniam enim simile est triangulum ABE triangulo ZHA , triangulum ABE ad triangulum ZHA duplicatam rationem habet (VI. 19.) eius quam BE ad HA . Ex eadem ratione et triangulum $BE\Gamma$ ad triangulum $HA\Theta$ duplicatam rationem habet eius quam BE ad HA ; est igitur (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum ZHA ita $EB\Gamma$ ad $AH\Theta$. Rursus, quoniam

Obs. 4. Patet etiam, polygona similia, quorum homologa latera sunt inter se aequalia, esse quoque aequalia inter se. Nempe, quum ratio homologorum laterum sit (supp.) ratio aequalitatis, ratio duplicata laterum homologorum pariter erit ratio aequalitatis (V. 22. Cor.) i. e. ratio polygonorum similiarum super homologis istis lateribus descriptorum erit ratio aequalitatis, adeoque polygona aequalia. Et contra, si polygona similia fuerint aequalia, vel rationem aequalitatis habeant, ratio subduplicata eorum, h. e. ratio laterum homologorum etiam erit ratio aequalitatis (Cor. ad Prop. m. in Excursu ad

ἐπεὶ ὁμοίόν ἐστι τὸ $EBΓ$ τρίγωνον τῷ $ΛΗΘ$ τριγώνῳ· τὸ $EBΓ$ ἄρα πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $ΓΕ$ εὐθεία πρὸς τὴν $ΘΛ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΘΛ$ · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $EBΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ οὕτως τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ $EBΓ$ πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ οὕτως τὸ ABE πρὸς τὸ $ΖΗΛ$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ ABE πρὸς τὸ $ΖΗΛ$ οὕτως τὸ BEG πρὸς τὸ $ΗΛΘ$ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ ¹⁾. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἔστιν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἐκάτερον τῶν A, B εὐθυγράμμων τῷ $Γ$ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ A τῷ B ἔστιν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ A τῷ $Γ$, ἰσογώνιον τέ ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίόν ἐστι τὸ B τῷ $Γ$, ἰσογώνιον τέ ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἐκάτερον ἄρα τῶν A, B τῷ $Γ$ ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὥστε καὶ τὸ A τῷ B ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς

1) Edd. Basil. et Oxon. addunt: καὶ ὡς ἄρα (V. 12.) ἐν τῶν ἡγομένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει. De hac lectione vide infra, quae ad hanc Propos. observavimus.

Libr. V.) i. e. latera homologa erunt aequalia. (Quod posterius est Lemma ad VI. 22.) Cf. Obs. 5. ad VI. 19. Borellus

simile est triangulum EBF triangulo $AH\Theta$; EBF igitur (VI. 19.) ad $AH\Theta$ duplicatam rationem habet eius quam TE recta ad ΘA . Ex eadem ratione et triangulum ETA ad triangulum $A\Theta K$ duplicatam rationem habet eius quam TE ad ΘA ; est igitur (V. 11.) ut triangulum EBF ad $AH\Theta$ ita ETA ad $A\Theta K$. Ostensum est autem et ut EBF ad $AH\Theta$ ita ABE ad ZHA ; ergo ut ABE ad ZHA ita BET ad $H\Lambda\Theta$ et ETA ad $A\Theta K$. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 379.)

Quae eidem rectilineo sunt similia, et inter se sunt similia.

Sit enim utrumque rectilineorum A , B ipsi Γ simile; dico et A ipsi B esse simile.

Quoniam enim est simile rectilineum A ipsi Γ , et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet. Rursus, quoniam simile est rectilineum B ipsi Γ , et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet; utrumque igitur ipsorum A , B ipsi Γ aequiangulum est et circa aequales angulos latera proportionalia habet, quare et rectilineum A ipsi B

Cor. 2. ad Prop. IV. 17. Pfeiderer. l. c. §. 299. Pariter, si polygonorum similium areae fuerint aequales, triangula quoque, quae diagonales homologae abscindunt, et similia et aequalia erunt. Cf. Pfeiderer. §. 298.

Obs. 5. Ut duo rectilinea M , N (triangulis quoque sub hac denominatione comprehensis) similia eam habeant rationem, quam latus aliquod A prioris habet ad rectam datam Γ ,

αναλογον ἔχει ¹⁾. Ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B .
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἢ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστῶσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , ΓA , EZ , $H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB , ΓA ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB , $\Lambda\Gamma A$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ , $N\Theta$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν AB , ΓA τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ , τῶν δὲ EZ , $H\Theta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ O . Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ὡς δὲ ΓA πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν O . διττου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν O οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$. καὶ ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

1) Verba hæc ab ὅτε inde ad absolvendam demonstrationem prorsus necessaria, quæ ex Cod. a. sine dubio tantum ex oscitantia librarii exciderant, omittit Peyrardus. Nos morem Euclidis solemnem secuti ea restituimus, ut sunt in Edd. Basil. et Oxon.

posterioris latus homologum debet esse media proportionalis

est aequiangulum (I. Ax. 1.) et latera circum aequales angulos habet proportionalia (V. 11.). Simile igitur est A ipsi B (VI. Def. 1.). Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 380.)

Si quatuor rectae proportionales sint, et quae ab ipsis fiunt rectilinea, similia et similiter descripta, proportionalia erunt; et si, quae ab ipsis fiunt rectilinea similia et similiter descripta proportionalia sint, et ipsae rectae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales AB , ΓA , EZ , $H\Theta$, ut AB ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, et describantur ab ipsis quidem AB , ΓA similia et similiter posita rectilinea KAB , $\Lambda \Gamma A$, ab ipsis vero EZ , $H\Theta$ similia et similiter posita rectilinea MZ , $N\Theta$; dico esse ut KAB ad $\Lambda \Gamma A$ ita MZ ad $N\Theta$.

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis quidem AB , ΓA tertia proportionalis Ξ , ipsis vero EZ , $H\Theta$ tertia proportionalis O . Et quoniam est ut AB quidem ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, ut ΓA vero ad Ξ ita (V. 11.) $M\Theta$ ad O ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AB ad Ξ ita EZ ad O . Sed (VI. 20. Cor. 2.) ut AB quidem ad Ξ ita KAB ad $\Lambda \Gamma A$, ut EZ vero ad O ita MZ ad $N\Theta$; ut igitur (V. 11.) KAB ad $\Lambda \Gamma A$ ita MZ ad $N\Theta$.

inter latus illud A , et rectam datam Γ . Sit enim illa media proportionalis B , ita ut $A:B=B:\Gamma$, dico, latus illud homologum posterioris figurae esse $=B$. Quodsi enim non fuerit $=B$, sit illud alia recta quaecunque Δ diversa a B , sitque $A:\Delta=\Delta:E$, eritque $M:N=A:E$. At, quum ratio $A:\Delta$ diversa sit a ratione $A:B$, diversa quoque erit ratio $A:B$

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $NΘ$ λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$.

Γεγονέτω γάρ ¹⁾ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΠΡ$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $ΠΡ$ ὁποτέρῳ τῶν MZ , $NΘ$ ὁμοιὸν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμιον τὸ $ΣΡ$.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΠΡ$, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν AB , $ΓΔ$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB , $ΛΓΔ$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $ΠΡ$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ MZ , $ΣΡ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $ΣΡ$. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $ΛΓΔ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $NΘ$ (καὶ ὡς ἄρα τὸ MZ πρὸς τὸ $ΣΡ$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $NΘ$ ²⁾ τὸ MZ ἄρα πρὸς ἑκατέρον τῶν $NΘ$, $ΣΡ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $NΘ$ τῷ $ΣΡ$. Ἔστι δὲ αὐτῷ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ $ΗΘ$ τῇ $ΠΡ$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΠΡ$, ἴση δὲ ἡ $ΠΡ$ τῇ $ΗΘ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Loco verborum γεγονέτω γάρ Peyrardus ex Cod. a habet: εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως EZ πρὸς τὴν $ΗΘ$. ἔστω κ. τ. λ. At, quum ita indirecta demonstratio sequi debere videatur, Euclides autem directam habeat, praeferenda omnino videtur lectio Edd. Oxon. et Basil.

2) Voces uncis inclusas omittit Ed. Oxon. et possunt illae omnino abesse.

a ratione $A:F$ (Cor. ad Prop. m in Excursu ad Libr. V.). At utraque ratio $A:F$ (suppos.) et $A:E$ (demonstr.) aequalis est rationi $M:N$: itaque (V. 11.) etiam ratio $A:F$ eadem est

Sed sit ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; dico esse et ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$.

Fiat enim (VI. 12.), ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP , et describatur (VI. 18.) a ΠP alterutri ipsorum MZ , $N\Theta$ simile et similiter positum rectilineum ΣP .

Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP , et descripta sunt ab ipsis quidem AB , $\Gamma\Delta$, similia et similiter posita KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, ab ipsis vero EZ , ΠP , similia et similiter posita $M\Sigma$, ΣP ; est igitur (per part. prior. hui.) ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad ΣP . Ponitur autem et ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; et ut igitur (V. 11.) MZ ad ΣP ita MZ ad $N\Theta$; ergo MZ (V. 11.) ad utrumque ipsorum $N\Theta$, ΣP eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) $N\Theta$ ipsi ΣP . Est autem ipsi simile et similiter positum; aequalis igitur (sequens Lemma) $H\Theta$ ipsi ΠP . Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP , aequalis autem ΠP ipsi $H\Theta$; est igitur (V. 7.) ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$. Si igitur quatuor etc.

rationi $A:E$, quod est absurdum. Latus igitur homologum posterioris figurae erit $=B$. Cf. Pfeiderer. §. 301.

Obs. 6. Hinc facile solvetur problema describendae figurae rectilineae similis datae figurae M , et quae ad hanc figuram M eandem rationem habeat, quam recta data Σ ad rectam datam Π . Sumatur nempe latus quodcunque A figurae M , et fiat $\Pi:\Sigma=A:F$ (VI. 12.). Inveniatur deinde rectis A , F media proportionalis B (VI. 11.), ut itaque sit $A:B=B:F$; et per recta B describatur (VI. 18.) figura similis et simi-

A H M M A.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὁμοία, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὁμοία εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὶ ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἴση ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

H P O T A Σ I Σ κ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν ¹⁾.

1) Omnes quidem editiones legunt saltim: ἐκ τῶν πλευρῶν, nec Peyrardus aliam ex Codd. Mss. lectionem notavit. Quum tamen, ut recte monet Rob. Simson. in Not. ad VI. 23. p. 376. vulgaris lectio sit absurda, non dubitavimus illi aliam veriorē substituere.

liter posita figurae M , ita ut latera B, A , sint latera homologa, erit figura descripta, quam N vocabimus ea, quae describi iussa erat. Est enim $M:N=A:I=Π:Σ$, vel $N:M=Σ:Π$. Cf. Pfliderer. §. 302. Nominatim eodem modo solvetur problema, triangulum datum per rectas designato eius lateri parallelas dividendi in partes quotcunque aequales, vel etiam quae rationes invicem habeant aequales rationibus rectarum datarum. Cf. Pfliderer. §. 303.

Obs. 7. Quum nominatim etiam quadrata super homo-

L E M M A.

Si autem rectilinea aequalia sint et similia, homologa ipsorum latera aequalia inter se esse, sic ostendemus.

Sint aequalia et similia rectilinea NO , ΣP , et sit ut ΘH ad HN ita PII ad $II\Sigma$; dico aequalem esse PII ipsi ΘH .

Si enim inaequales sint, una ipsarum maior est. Sit maior PII ipsa ΘH . Et quoniam est ut PII ad $II\Sigma$ ita ΘH ad HN , et alterne (V. 16.) ut PII ad ΘH ita $II\Sigma$ ad HN . Maior autem $II P$ ipsa ΘH ; maior igitur (Prop. A. libri V.) et $II\Sigma$ ipsa HN ; quare et (VI. 20.) $P\Sigma$ maius est ipso ΘN ; sed et aequale, quod fieri nequit; non igitur inaequalis est $II P$ ipsi $H\Theta$, aequalis igitur. Quod oportebat ostendere.

P R O P O S I T I O XXIII. (Fig. 381.)

Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum.

logis lateribus figurarum similium descripta sint in ratione duplicata horum laterum patet, polygona similia quaecunque (triangulis quoque et quadrilateris similibus sub hac denominatione comprehensis Obs. 4. ad VI. 19.) esse in ratione quadratorum laterum homologorum.

P R O P O S I T I O XXI.

Obs. Potest haec propositio deduci ut corollarium Prop. VI. 18. Ita est apud Borellum in Cor. ad Prop. 16. Libr. IV.

P R O P O S I T I O XXII.

Obs. 1. Propositi haec derivari facile potest ex VI. 20. et ex Cor. V. 22. et Cor. Prop. m in Excursu ad Libr. V.

"Εστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ $ΑΓ$, $ΓΖ$, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ $ΒΓΔ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΕΓΗ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν ¹⁾, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$.

Κείσθω γάρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΓΗ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΓ$ τῇ $ΓΕ$ · καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $ΔΗ$ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκείσθω τις εὐθεῖα ἡ $Κ$, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ $Κ$ πρὸς τὴν $Α$, ὡς δὲ ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως ἡ $Α$ πρὸς τὴν $Μ$.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε $Κ$ πρὸς τὴν $Α$ καὶ τῆς $Α$ πρὸς τὴν $Μ$ οἱ αὐτοὶ εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ καὶ τῆς $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$.

1) Hic quoque ex eadem ratione ac in ipsa propositione ex ingenio adiecimus vocem τῶν.

Lemma subsequens deductum est supra in Obs. 4. ad VI. 20. Aliiter ac in textu graeco Boermannus, et accuratius, omitta etiam permutatione superflua, hoc lemma ita demonstrat. Si rectilinea $NΘ$, $ΣΡ$ sint similia et aequalia, latera quoque homologa $HΘ$, $ΠΡ$ aequalia erunt. Si etiam non sint aequalia, alterutrum velut $ΠΡ$ maius erit, unde, quum sit (VI. Def. 1.) $ΠΡ:ΠΣ=HΘ:HN$, erit quoque $ΠΣ>HN$ (V. 14.) adeoque triangulum $ΣΠΡ$ ipsi $NHΘ$ impositum non congruet, sed maius erit (Cor. ad I. 14.). Est autem rectilin. $ΣΡ$: rectilin. $NΘ$ = triang. $ΣΠΡ$: triang. $NHΘ$ (VI. 20.) Itaque rectilin. $ΣΡ>$ rectilin. $NΘ$ (Prop. A. libr. V.) contra hypothesin, ergo $ΠΡ=HΘ$.

Obs. 2. Prop. 22. etiam valet de quatuor figuris rectilineis, non binis solum, sed omniibus similibus. Speciatim quatuor rectorum quadrata sunt proportionalia et vicissim.

Sint aequiangulara parallelogramma AF , FZ , aequalem habentia angulum BFA angulo EFH ; dico parallelogrammum AF ad parallelogrammum FZ rationem habere compositam ex rationibus laterum, nempe ex ea, quam habet BF ad FH et ex ea quam habet AF ad FE .

Ponantur enim ita ut in directum sit BF ipsi FH ; in directum igitur est et AF ipsi FE (I. 14.); et compleatur parallelogrammum AH , et exponatur quaedam recta K , et fiat (VI. 12.) ut BF ad FH ita K ad A , ut AF vero ad FE ita A ad M .

Rationes igitur ipsius K ad A et ipsius A ad M eadem sunt quae rationes laterum, videlicet lateris BF ad FH et ipsius AF ad FE . Sed ipsius K ad

PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Sensus huius propositionis, ut ex demonstratione eius patet (collat. Excursu ad hunc librum §. 8.), hic est: cognitio laterum circa aequales parallelogrammorum aequiangulorum angulos rationibus mutuis, colligi ex iis posse rationem, quam areae parallelogrammorum invicem habeant. Vel rationem mutuam parallelogrammorum aequiangulorum pendere ab rationibus laterum ipsorum circa aequales angulos, et modum, quo illa ex his eliciatur, propositio haec docet. Demonstrationis enim momentum eo redit, ut, si vel ipsa parallelogrammorum circa aequales angulos latera, proinde et eorum rationes dentur, rectae, quarum rationes eadem sint rationibus laterum binorum parallelogrammorum, ostendatur, duas quoque exhiberi posse rectas, quarum ratio mutua eadem sit rationi parallelogrammorum. Cf. Pfeiderer. l. c. P. IV. §. 195. Pfeiderer. simul observat, cum propositio haec, pariter ac VI. 14. nonnisi iterata propositionis VI. 1. applicatione nitatur, et argumenti 14. coepta continuatio ac supplementum sit; transpo-

Ἀλλ' ὁ τῆς K πρὸς τὴν M λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ τῆς K πρὸς τὴν A λόγου καὶ τοῦ τῆς A πρὸς τὴν M ὥστε καὶ ἡ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τῶν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν ¹⁾. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ ἄλλ' ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ K πρὸς τὴν A καὶ ὡς ἄρα ἡ K πρὸς τὴν A οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΘ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ ἄλλ' ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως ἡ A πρὸς τὴν M καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ K πρὸς τὴν A οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ A πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ K πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΑΓ$

1) Hic quoque et pariter ad finem demonstrationis vocem τῶν altera vice positam ex coniectura adiecimus.

sitione laud apta propositiones inter ad figuras similes pertinentes, nec ullo modo cum ipsa connexas, insertam fuisse videri. Caeterum $ΑΓ$ et $ΓΕ$ in directum fore, si $BΓ$, $ΓΗ$ in directum ponantur, simili ratione ostendi potest ac in Obs. 2. ad VI. 14.

Obs. 2. Rationem, quae ex duabus datis rationibus per lineas rectas expressis componitur, dari, h. e. (Eucl. Dat. Def. 2.) ipsi aequalem lineis rectis exhiberi posse, efficit demonstratio Prop. VI. 23. idemque similiter ad plures, quam duas rationes sic datas, ex iisque compositas extenditur. Cf. Pfliderer. §. 212.

Obs. 3. Eadem consequentia, quae in demonstratione inde deducuntur, quod rationes $BΓ:ΓΗ$, et $ΑΓ:ΓΕ$ dari sup-

M ratio componitur ex ratione ipsius *K* ad *A* et ex ratione ipsius *A* ad *M* (Def. rationis compos.); quare et *K* ad *M* rationem habet compositam ex rationibus laterum. Et quoniam est (VI. 1.) ut *BF* ad *ΓH* ita *AF* parallelogrammum ad *ΓΘ*; sed ut *BF* ad *ΓH* ita *K* ad *A*; erit igitur (V. 11.) *K* ad *A* ita *AF* ad *ΓΘ*. Rursus, quoniam est (VI. 1.) ut *AF* ad *ΓE* ita *ΓΘ* parallelogrammum ad *ΓZ*; sed, ut *AF* ad *ΓE* ita *A* ad *M*; erit ut igitur (V. 11.) *A* ad *M* ita parallelogrammum *ΓΘ* ad parallelogrammum *ΓZ*. Quoniam igitur ostensum est, ut *K* quidem ad *A* ita parallelogrammum *AF* ad parallelogrammum *ΓΘ*, ut *A* vero ad *M* ita parallelogrammum *ΓΘ* ad parallelogrammum *ΓZ*; ex aequo igitur est (V. 22.), ut *K* ad *M* ita parallelogrammum *AF* ad parallelogrammum *ΓZ*. At vero *K* ad *M* rationem habet compositam ex rationibus laterum; et *AF* igitur ad *ΓZ* rationem habet

ponuntur, nectuntur, si rationes solum posteriores (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) invertantur, et rationes *BF:ΓH*, et *ΓE:AF* dari ponantur. Tum nempe ob parallelogr.

$$\begin{aligned} AF:ΓΘ &= BF:ΓH \\ ZΓ:ΓΘ &= ΓE:AF \end{aligned} \quad (\text{VI. 1.})$$

simili ratione consequitur, dari rationem mutuam parallelogrammorum *AF*, *ZΓ*, si utriusque ratio ad idem parallelogrammum *ΓΘ* detur. Cf. Pflciderer. §. 213.

Obs. 4. Hac ipsa methodo Euclides praemissis propositionibus (Dat. 1. 2.): duarum magnitudinum homogencarum datarum dari rationem mutuam; et vicissim dari magnitudinem cuius ad datam magnitudinem ratio detur (si nempe, quod Rob. Simson. addit, duabus magnitudinibus, quibus haec ratio exprimitur, et magnitudini datae quartae proportionalis possit inveniri), generatim ostendit, duas magnitudines, quarum rationes ad eandem tertiam dentur, pariter mutuo habere

παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓZ παραλληλόγραμμον.
Ἡ δὲ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ
τῶν τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ $ΑΓ$ ἄρα πρὸς τὸ ΓZ λόγον
ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα
ἰσογώνια, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Παντὸς παραλληλογράμιου τὰ περὶ τὴν διάμετρον
παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλή-
λοις.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος
δὲ αὐτοῦ ἡ $ΑΓ$, περὶ δὲ τὴν $ΑΓ$ παραλληλόγραμμα
ἔστω τὰ $ΕΗ$, $ΘΚ$ · λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν $ΕΗ$, $ΘΚ$
παραλληλογράμιων ὁμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ $ΑΒΓΔ$ καὶ
ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ $ΑΒΓ$ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν $ΒΓ$ ἤκται ἡ $ΕΖ$, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς
ἡ $ΒΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $ΖΑ$.
Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΓΔ$ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν $\Gamma Δ$ ἤκται ἡ $ΖΗ$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν
ὡς ἡ ΓZ πρὸς τὴν $ΖΑ$ οὕτως ἡ $ΔΗ$ πρὸς τὴν $ΗΑ$.

datam rationem in Dat. Prop. 8. (apud Rob. Simson. et Schwab. Prop. 9.). Cf. Pfliderer. §. 214. Quo nixus principio Euclides deinde suam datorum tractationem absque rationum compositione instruit; nominatim Prop. 70. partem priorem (apud Rob. Simson. et Schwab. Prop. 67.) Elementorum VI. 23. respondentem demonstrat. Cf. Pfliderer. §. 215.

Obs. 5. Quatenus ab modo, rationem ex laterum $ΒΓ$ et $\Gamma Η$, $ΑΓ$ ac $\Gamma Ε$ rationibus compositam, lineis rectis datis exhibendi abstrahitur; demonstratio VI. 23. praeunte Candalla, eo redigi potest, ut observetur: rationem parallelogrammorum $ΑΓ$, ΓZ componi ex rationibus parallelogrammi $ΑΓ$ ad $\Gamma Θ$, et

compositam ex rationibus laterum. Ergo aequiangulara, etc.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 383.)

Omnis parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma similia sunt et toti inter se.

Sit parallelogrammum $AB\Gamma A$, diameter autem eius recta $A\Gamma$, circa $A\Gamma$ autem parallelogramma sint EH , ΘK ; dico utrumque parallelogrammorum EH , ΘK simile esse toti $AB\Gamma A$ et inter se.

Quoniam enim uni laterum trianguli $AB\Gamma$ videlicet ipsi $B\Gamma$ parallela ducta est EZ , erit (VI. 2.) ut BE ad EA ita ΓZ ad ZA . Rursus, quoniam uni lateri trianguli $A\Gamma A$ nempe ipsi ΓA parallela ducta est ZH , erit (VI. 2.) ut ΓZ ad ZA ita AH ad HA . Sed ut ΓZ ad ZA ita ostensa est et BE ad EA ;

huius ad ΓZ (Exc. ad hunc libr. §. 3. nr. 1.) quae eadem sint rationibus laterum ipsorum $B\Gamma:\Gamma H$, $A\Gamma:\Gamma E$ (VI. 1.); itaque etiam dici ex his componi (Exc. ad hunc libr. §. 3. nr. 2.). Cf. Clavius et Rob. Simson. Pflleiderer. §. 216.

Obs. 6. Quodsi desideratur, ut ratio parallelogrammorum $A\Gamma$, ΓZ (Fig. 382.) seu composita ex rationibus laterum eorum, exhibeatur per rationem quam ipsum prioris lateris alterutrum $B\Gamma$ habeat ad aliquam rectam datam; haec erit quarta proportionalis duobus reliquis parallelogrammorum lateribus $A\Gamma$, ΓE , et lateri ΓH posterioris ΓZ , quod respondet lateri $B\Gamma$ prioris $A\Gamma$.

Ἀλλ' ὥς ἡ GZ πρὸς τὴν ZA οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ BE πρὸς τὴν EA καὶ ὥς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν EA εὐτὼς ἡ $ΔH$ πρὸς τὴν HA , καὶ συντεθέντι ὥς ἡ BA πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ $ΔA$ πρὸς τὴν AH , καὶ ἐναλλάξ ὥς ἡ BA πρὸς τὴν AA οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AH . τῶν ἄρα $ABΓΔ$, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ $BAΔ$. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ HZ τῇ $ΔΓ$, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ AHZ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΔΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ HZA τῇ ὑπὸ $ΔΓA$, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν $ΑΔΓ$, AHZ ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔΓ$ τρίγωνον τῷ AHZ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΑΓB$ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ AZE τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ AH πρὸς τὴν HZ . Ὡς δὲ ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓA$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA , ὥς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓB$ οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE , καὶ ἔτι ὥς ἡ $ΓB$ πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν EA · καὶ ἐπεὶ

Facta enim (VI. 12.) $ΔΓ:ΓE=ΓH:I$

erunt parallelogr. $ΑΓ:ΓΘ = BΓ:ΓH$ (VI. 1.)

$ΓΘ:ΓZ=ΔΓ:ΓE$ (VI. 1.) $= ΓH:I$ (V. 11.)

proinde $ΑΓ:IZ=BΓ:I$ (V. 22.). Cf. Pfeiderer.

§. 217.

Obs. 7. Si ab recta $ΓB$ (producta, quando opus est) abscinditur $ΓN=I$ (Fig. 382.) (quod iuxta Obs. 4. ad VI. 2.) immediate fit, diagonali $ΔH$ parallelam EN agendo per punctum E) ac per N ducitur rectae $ΔΓ$ parallela: fit parallelogrammum $ΓO=IZ$ (VI. 14.), et hinc

$ΑΓ:ΓZ=ΑΓ:ΓO$ (V. 7.) $BΓ:\left\{ \begin{matrix} ΓN \\ I \end{matrix} \right.$ (VI. 1.)

ergo (V. 11.) ut BE ad EA ita AH ad HA ; et componendo (V. 18.), ut BA ad AE ita AA ad AH , et alterne (V. 16.) ut BA ad AA ita EA ad AH ; parallelogrammorum igitur $ABGA$, EH proportionalia sunt latera, quae circa communem angulum BAA sunt. Et quoniam parallela est HZ ipsi AG , aequalis est angulus AHZ angulo AAG (I. 29.), angulus vero HZA angulo AGA , et communis duobus triangulis AAG , AHZ angulus AAH ; aequiangulum igitur est triangulum AAH triangulo AHZ . Ex eadem ratione et triangulum AGB aequiangulum est triangulo AZE ; totum igitur parallelogrammum $ABGA$ parallelogrammo EH aequiangulum est; ergo (VI. 4.) ut AA ad AG ita AH ad HZ . Ut autem AG ad GA ita HZ ad ZA , ut AG vero ad GB ita AZ ad ZE , et insuper ut GB ad BA ita ZE ad ZA : itaque quoniam ostensum est ut AG ad GA ita HZ ad ZA , ut vero AG ad GB ita AZ ad ZE ; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AG ad BF ita HZ ad ZE . Parallelogrammorum igitur $ABGA$, EH proportio-

Quare sic etiam potest Prop. VI. 23. enunciari: si parallelogramma AG , FZ sint aequiangula; fiatque, ut unum latus AG prioris ad unum latus FE posterioris, sic huius alterum latus GH ad rectam I : erit parallelogrammum AG ad FZ , ut alterum latus BF prioris ad hanc rectam I . Cf. Pfeiderer. §§. 218. 219. Unde, data ratione parallelogrammi AG ad FZ datur ratio lateris BF prioris ad rectam I : estque, ut unum latus AG prioris parallelogrammi AG ad unum latus FE posterioris FZ , sic huius alterum latus GH ad hanc rectam I , ad quam alterum parallelogrammi prioris AG latus BF habet datam rationem mutuam parallelogrammorum AG , FZ . Quae

ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Lambda$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA , ὡς δὲ ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE . διῶσον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν $B\Gamma$ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZE . τῶν ἄρα $AB\Gamma\Delta$, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘK παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστὶν· ἐκάτερον ἄρα τῶν EH , ΘK παραλληλογράμμων τῷ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘK παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστι. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ $AB\Gamma$, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ δεῖ δὴ τῷ μὲν $AB\Gamma$ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

est Dator. Prop. 56. (apud Rob. Simson. et Schwab. pars prior 63.). Cf. Pfeiderer. §. 220.

Obs. 8. Triangula quoque unum angulum aequalem habentia sunt in ratione composita ex rationibus laterum circa aequales angulos. Quod ipsum vel immediate simili ratione demonstrari potest ac VI. 23. vel ex VI. 23. ope I. 34. V. 15. derivari. Cf. Pfeiderer. in sched. mss. §. 239. Commandinus Cor. ad VI. 23.

Obs. 9. Parallelogramma quaevis aequiangula sunt inter se ut parallelogramma rectangula sub iisdem respective lateri-

naliam sunt latera, quae circa aequales angulos; simile igitur est (VI. Def. 1.) parallelogrammum $AB\Gamma A$ parallelogrammo EH . Ex eadem ratione et parallelogrammum $AB\Gamma A$ parallelogrammo ΘK simile est; utrumque igitur parallelogrammorum EH , ΘK parallelogrammo $AB\Gamma A$ simile est. Quae autem eidem rectilineo similia sunt, et inter se sunt similia (VI. 21.) ergo et parallelogrammum EH parallelogrammo ΘK simile est. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 394.)

Dato rectilineo simile, et alteri dato aequale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, $AB\Gamma$, cui vero aequale, sit A ; oportet igitur ipsi quidem $AB\Gamma$ simile, ipsi vero A aequale idem constituere.]

bus comprehensa. Quod ipsum etiam asserit Pappus Collect. Mathem. Libr. VII. Prop. 172., seu in Apollon. Conic. I. Lemm. 8. Cf. Commandinus et Clavius ad VI. 23. et Pfeiderer. §§. 240. 241. Idem valet de triangulis, quorum unus angulus aequalis est (Cf. iidem, Pfeiderer. §. 242. et Pappus Libr. VII. Coll. Math. Prop. 146. vel in Porism. 1. Lemma 20.). Pappus addit (ibid. Prop. 147.) idem valere in triangulis, quorum unum angulum habet, qui deinceps est alteri. Pfeiderer. §. 243. Pappus rem ad praecedentem Prop. 146. reducit, dum unus latus eius anguli, qui in uno triangulo ae-

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν $BΓ$ τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ ¹⁾ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ BE , παρὰ δὲ τὴν $ΓΕ$ τῷ $Δ$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΓΜ$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ZΓΕ$, ἥ ἐστίν ἴση τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$. ἐπὶ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $BΓ$ τῇ $ΓΖ$, ἡ δὲ $ΑΕ$ τῇ $ΕΜ$. Καὶ εἰλήφθω τῶν $BΓ$, $ΓΖ$ μέση ἀνάλογον ἡ $ΗΘ$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $ΗΘ$ τῷ $ABΓ$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ $KΗΘ$.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΗΘ$ οὕτως ἡ $ΗΘ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, εἰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὥσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$ οὕτως τῇ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$ οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ $KΗΘ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $EΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἰσον δὲ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ BE παραλλη-

1) Vox τριγώνῳ, τριγώνων et similia proprie non huc pertinent, quum manifesto de figuris rectilineis quibuscunque sermo sit. Vid. observationem Rob. Simsonis ad hunc locum. Quum tamen illa in omnibus, qui hactenus comparati sunt, codicibus legantur, nolimus ea expungere.

qualis est angulo deinceps posito alterius trianguli, producit, usquedum latus ita productum aequale sit ei ipsi, quod producebatur, lateri, ubi tum res facile patet. Poterat autem idem etiam aliis modis demonstrari.

Obs. 10. Per VI. 23. et Obs. 8. duo parallelogramma (triangula) rectangula, et hinc quaevis (I. 35. I. 37. V. 7. V.

Applicetur enim (I. 44. et 45.) ad rectam quidem BF triangulo ABF aequale parallelogrammum BE , ad rectam vero TE ipsi A aequale parallelogrammum FM in angulo ZFE , qui est aequalis angulo FBA ; in directum igitur est (I. 14.) BF quidem ipsi FZ , et AE ipsi EM . Et sumatur (VI. 13.) inter ipsas BF , FZ media proportionalis $H\Theta$, et describatur (VI. 18.) ex $H\Theta$ rectilineo ABF simile et similiter positum rectilineum $KH\Theta$.

Et quoniam est ut BF ad $H\Theta$ ita $H\Theta$ ad FZ , si autem tres rectae proportionales sint, est (VI. 20. Cor. 2.) ut prima ad tertiam ita figura ex prima ad figuram ex secunda, similem et similiter descriptam; est igitur ut BF ad FZ ita triangulum ABF ad triangulum $KH\Theta$. Sed et (VI. 1.) ut BF ad FZ ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum EZ ; ut igitur triangulum ABF ad triangulum $KH\Theta$ ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum EZ ; alterne igitur (V. 16.) ut triangulum ABF ad parallelogrammum BE ita triangulum $KH\Theta$ ad parallelogrammum EZ . Aequale autem triangulum ABF parallelogrammo BE ; aequale igitur et triangulum $KH\Theta$ parallelo-

11.) sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum, quod et aliter demonstrari potest. Commandinus et Clavius ad VI. 23. Pflleiderer, §§. 247. 248. Cuiuslibet igitur parallelogrammi ad quadratum aliquod ratio componitur ex rationibus, quas basis et altitudo parallelogrammi habent ad latus quadrati. Unde per Defin. Simson. (in Exc. ad h. libr. §. 3. coll. §. 7.) consequitur regula generalis dimensionis parallelogrammorum. Cf. in Prop. II. 1. Cor. 4. Pflleiderer. §. 249, Schol. in libr. II. Elem. P. I. §. 5. sq.

Obs. 11. Ex VI. 23. indeque deductis Obs. 8. 10. per

λογράμμω ἴσον ἄρα καὶ τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον τῷ EZ παραλληλογράμμω. Ἀλλὰ τὸ EZ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ $KH\Theta$ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ $KH\Theta$ καὶ τῷ $AB\Gamma$ ὁμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμω τῷ $AB\Gamma$ ὁμοιον, καὶ ἄλλω τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ $KH\Theta$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὁμοίων τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γὰρ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ἀφηρήσθω τὸ $AEZH$, ὁμοιον τῷ $AB\Gamma\Delta$ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔAB · λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τῷ $AEZH$.

ea, quae in Exc. ad hunc libr. §. 22. §. 25. notantur, consequuntur propositiones VI. 14. VI. 15. et Obs. 12. ad Prop. 16. 17. libr. VI. Pflaiderer. §. 250.

Obs. 12. Sint rectae $A:B=C:D$

et $E:F=G:H$

erunt etiam (per VI. 23. et Exc. ad hunc libr. §. 10.) rectangula $A \times E : B \times F = C \times G : D \times H$. Vicissim si $A \times E : B \times F = C \times G : D \times H$, atque $E:F=G:H$, pariter erit $A:B=C:D$ (VI. 23, et in Exc. ad hunc libr. §. 14.). Cf. Pflaiderer. §. 251.

Obs. 13. Per Obs. 10. et Exc. ad hunc libr. §. 13. duorum quorumvis parallelogrammorum, triangulorumve altitudines sunt in ratione composita ex directa arearum et inversa basium; bases in ratione composita ex directa arearum et inversa altitudinum. Pflaiderer. §. 263.

grammo EZ . Sed parallelogrammum EZ ipsi Δ est aequale; et KHO igitur ipsi Δ est aequale. Est autem KHO et ipsi $AB\Gamma$ simile; dato igitur rectilineo $AB\Gamma$ simile, et alteri dato Δ aequale idem constitutum est KHO . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 385.)

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti et similiter positum, communem cum ipso angulum habens, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum auferatur $AEZH$, simile ipsi $AB\Gamma\Delta$ et similiter positum, communem angulum habens ΔAB cum ipso; dico circa eandem diametrum esse $AB\Gamma\Delta$ circa quam ipsum $AEZH$.

Obs. 14. Rursus (quae est altera Prop. 23, et praeced. Obs. 8. conversa), duo parallelogramma vel triacula, quorum areae sunt in ratione composita ex rationibus duorum laterum contiguorum, habent angulos lateribus his comprehensos vel iungulos aequales, vel simul aequales duobus rectis. Quod ipsum facile, sumto contrario, probatur. Pfeiderer. §. 254.

PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Rob. Simson. mōnet, videri imperitum quendam ex duabus diversis huius propositionis demonstrationibus hanc, quam nunc habemus, composuisse, ex una nempe, quae per VI. 2. et ex altera, quae per VI. 4. fieri potest. Postquam enim, ita pergit Simson., per VI. 2. et componendo, permutandoque ostenderat, latera circa communem angulum parallelogrammorum (taliam enim parallelogramma observante

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ¹⁾ ἡ διάμετρος ἡ $ΑΘΓ$, καὶ ²⁾ ἐκβληθεῖσα ἡ $ΗΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Θ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$ ὁποῖα τῶν $ΑΔ$, $ΒΓ$ παράλληλος ἡ $ΘΚ$.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$, ὁμοίον ἔστι τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΔΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΚ$. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒΓΔ$, $ΕΗ$, ὡς ἡ $ΔΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΚ$ οὕτως ἡ $ΗΑ$ πρὸς τὴν $ΑΕ$. ἡ $ΗΑ$ ἄρα πρὸς ἐκάτεραν τῶν $ΑΚ$, $ΑΕ$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΑΚ$, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΚΗ$ ³⁾ περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἔστι διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΑΕΖΗ$ πα-

1) Ita recte ex Cod. a posuit Peyrardus, quum edd. Basil. et Oxon. haberent: αὐτῶν, quum tamen de diametro unius tantum parallelogrammi $ΑΒΓΔ$ hic sermo sit.

2) Pro verbis: καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ $ΗΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Θ$ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$, quae ex Cod. a. posuit Peyrardus, cum quibus consentit etiam versio Commandini, in edd. Oxon. et Basil. solum legitur: καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$. Utraque lectio bene habet, prout schema ita formatum imagineris, ut diameter $ΑΘΓ$ rectam $ΗΖ$ productam, aut ipsam rectam $ΗΖ$ in puncto aliquo $Θ$ secet. Priorem casum et figuram lectio codicis a, posteriorem lectio ed. Oxon. supponit.

3) Pro his verbis Cod. a. et ex eo Peyrardus, correctis mendis typographicis ad calcem libri indicatis, habet: οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ $ΑΒΓΔ$ τῷ $ΕΗ$ (ita enim legendum est, non $ΚΗ$). Nos veriorem lectionem ex edd. Basil. et Oxon. restituimus.

Clavio intelliguntur, quae habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, quod etiam Candalla, Hention aliique nominatim addunt proportionalia esse, immediate concludere potuisset, proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. I. 34. et V. 7. Verum ille

Non enim, sed si fieri potest, sit ipsius diameter $A\Theta\Gamma$, et ducta HZ producat^{ur} ad Θ , et ducatur per Θ alterutri ipsarum AA , $B\Gamma$ parallela ΘK (I. 31.)

Quoniam igitur circa eandem diametrum est parallelogrammum $AB\Gamma A$ circa quam parallelogrammum KH , simile est (VI. 24.) $AB\Gamma A$ ipsi KH ; est igitur (VI. Def. 1.) ut AA ad AB ita HA ad AK . Est autem et propter similitudinem ipsorum $AB\Gamma A$, EH , ut AA ad AB ita HA ad AE ; ut igitur (V. 11.) HA ad AK ita HA ad AE ; ipsa HA igitur ad utramque ipsarum AK , AE eandem habet rationem; aequalis igitur est (V. 9.) AE ipsi AK , minor maiori, quod fieri nequit; non igitur est circa eandem diametrum parallelogrammum $AB\Gamma A$ circa quam ipsum KH ; circa eandem igitur est diametrum parallelogrammum

hoc negligens pergit ostendere, triangula et parallelogramma esse aequiangula, et longo circuitu, ope VI. 4. et V. 22. concludit rem eandem. Manifestum propterea est, hanc inscite factam demonstrationem minime Euclidis esse. Ipse deinde Rob. Simson., superfluis reiectis, simplicior^{em} exhibet demonstrationem, postquam ostenderat, aequiangula esse triangula AHZ , $A\Gamma F$ ope VI. 4. I. 34. et V. 7., quoad maximam partem similem ei, quae est apud Campanum, nisi quod is pro VI. 4. adhibet VI. 2., et triangula, quae diximus, aequiangula esse monet quidem, at non demonstrat. Simsonis demonstrationem habet etiam Playfair. et Peletarius.

Obs. 2. Perspicuum est, quod Clavius monet, parallelogramma circa eandem diametrum non solum similia esse sed etiam similiter posita. Cf. observata ad VI. 18.

Obs. 3. Praeterea, eodem Clavio monente, etiam, si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita, ut duo huius latera rectas duas

παλληλογράμμω. Ἐὰν ὅρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγεγραμμένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὃν τῷ ἑλλείμματι.

Ἐστω εὐθεΐα ἡ AB , καὶ τετμήσθω διχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν AB εὐθεΐαν τὸ AD παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ GE , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγράφεντι τῆς AB , τουτέστι τῆς GB . λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδеси παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις

componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, eadem fere ratione ostenditur, hoc illi esse simile.

Obs. 4. Parallelogramma, quae unum angulum uni angulo aequalem, et circum eos proportionalia latera habent, similia sunt. Hoc Corollarium addit Boermannus. Et. ope Obs. 3. ad Prop. 5. et 6. libri VI. et nostrae huius propositionis id facile probatur.

PROPOSITIO XXV.

Obs. 1. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet: „liquido patet demonstrationem huius, quam Euclides dederat, vitiatam fuisse ab editore quodam geometriae minus perito. Postquam enim ostenderat, „ut rectilineum $AB\Gamma$ ad rectilineum $KH\Theta$, ita parallelogrammum BE ad parallelogrammum EZ “ opus fuit

$AB\Gamma A$ quam parallelogrammum $AEZH$. Si igitur a parallelogrammo etc.

PROPOSITIO XXVII. *) (Fig. 386.)

Omnium secundum eandem rectam applicatorum parallelogrammorum et deficientium figuris parallelogrammis, similibus et similiter positis ei, quae ex dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum parallelogrammum, simile existens defectui.

Sit recta AB et secetur bifariam in Γ , et applicetur ad rectam AB parallelogrammum AA deficiens figura parallelogramma ΓE , simili et similiter posita ei, quae ex dimidia ipsius AB descripta est, hoc est ex ΓB ; dico omnium secundum AB applicatorum parallelogrammorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ipsi ΓE , maximum esse AA . Applicetur enim ad rectam AB parallelogram-

(*) Ut sequentes tres propositiones melius intelligantur Rob. Simson. praemittit sequentia: 1) Parallelogrammum ad rectam applicari dicitur, quando super recta illa describitur. Ex. gr. parallelogrammum $A\theta$ (Fig. 386.) applicari dicitur, ad rectam AB , quando super AB describitur. (Hoc casu dicitur Pfeiderero monente: *ἀναγράφεσθαι* seu *παρεβάλλεσθαι ἀπὸ τῆς AB*. 2) Sed parallelogrammum AZ dicitur applicari ad (secundum) rectam AB (*παρεβάλλεσθαι παρὰ τὴν AB*) deficiens figura parallelogramma, quando AK basis eius minor est recta AB , et propterea parallelogrammum AZ deficit ab ipso $A\theta$, quod super recta AB describitur in eodem angulo, et inter easdem parallelas figura parallelogramma $K\theta$, quae quidem dicitur defectus ipsius AZ . 3) Et parallelogrammum $A\Xi$ (Fig. 293.) applicari dicitur ad (secundum) rectam AB (*παρεβάλλεσθαι παρὰ τὴν AB*), excedens figura parallelogramma, quando AO basis ipsius $A\Xi$ maior est recta AB , et propterea $A\Xi$ excedit parallelogrammum $A\Gamma$ ad AB applicatam figura parallelogramma ΠO .

solummodo addere, est autem rectilineum $AB\Gamma$ aequale pa-

τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθείαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. Ἦχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶν καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΑΜΝ γνώμονι ἐστὶν ἴσον ὥστε τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν. ¹⁾

1) Ed. Basil. hic iam addit: πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων, καὶ τὰ ἐξῆς, quae Gregorius, quamvis ea in omnibus codicibus tam mss. quam impressis inveniret, iure ad casus secundi finem reiecit, quem etiam Peyrardus, nulla tamen lectionis variantis mentione facta, secutus est.

rallelogrammo BE, aequale igitur est rectilineum KHΘ parallelogrammo EZ“ videlicet per V. 14, sed inter has duas sententias interposuit „quare alterne, ut rectilineum ABΓ ad parallelogrammum BE ita rectilineum KHΘ ad parallelogrammum EZ“ putavit scilicet, non tam perspicuum esse concludere secundam quatuor proportionalium quartae aequalem esse ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonstratum est in V. Prop. 14. quam concludere, tertiam aequalem esse quartae ex aequalitate primae et secundae, quod nusquam in Elementis, quae iam habemus, ostensum est. Verum quamvis haec propositio, tertiam scilicet quatuor proportionalium aequalem esse quartae, si

num AZ , deficiens figura parallelogramma $K\Theta$, simili et similiter posita ipsi FE ; dico maius esse AA parallelogrammo AZ .

Quoniam enim simile est parallelogrammum FE parallelogrammo $K\Theta$, circa eandem sunt diametrum. (VI. 26.). Ducatur eorum diameter AB , et describatur figura.

Quoniam igitur aequale est FZ ipsi ZE (I. 43.), commune addatur $K\Theta$; totum igitur $F\Theta$ toti KE est aequale. Sed $F\Theta$ ipsi TH est aequale (I. 36.), quoniam recta AF ipsi TB aequalis est; ergo et HT ipsi EK est aequale. Commune addatur FZ ; totum igitur AZ ipsi gnomoni AMN est aequale; quare et parallelogrammum FE , hoc est AA , parallelogrammo AZ maius est.

prima aequalis fuerit secundae, fuisset ab Euclide Elementis suis inserta, ut verisimile est eam fuisse, nunquam tamen ille in praesentis casu eadem usus fuisset; quoniam, ut dictum fuit, sine redundante hac proportionalium permutatione eadem conclusio directe elici potest. Haec autem fusius ostendimus, tum, quoniam certum praebent indicium, textum Euclidis vitiatum fuisse, idem enim error invenitur in textu graeco XI. 23. bis, et bis in XII. 2. et in Prop. 5. 11. 12. 18. eiusdem, in quibus libri XII. locis, excepto ultimo, recte omissa est haec permutatio proportionalium in versionis Commandini editione Oxoniensi; tum, ut caveant geometrae ab usu permutationis in simili casu, non raro enim recentiores, et inter alios ipse Commandinus in Commentario ad III. 5. pag. 6. b. Pappi Alexandrini et alibi incidunt in hunc errorem: praecipue scilicet multorum mentes vulgaris proportionum idea, qua fit, ut accuratam vix

Ἐστω γὰρ πάλιν ἡ AB τριηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβληθὲν τὸ AA ἑλλείπον εἶδει τῷ GM , καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἑλλείπον τῷ AZ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB , τῷ GM . λέγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AA τοῦ AE .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AZ τῷ GM , περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ AO , ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ HO μείζον ἄρα τὸ AZ τοῦ KE . Ἰσον δὲ τὸ AZ τῷ AA μείζον ἄρα καὶ τὸ AA τοῦ EK . Κοινὸν προσκείσθω ¹⁾ τὸ KA ὅλον ἄρα τὸ AA ὅλον τοῦ AE μείζον ἐστίν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλείπον εἶδει παραλληλόγραμμου, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-

1) Ita rectius omnino Peyrardus ex Cod. a. habet, quam ut vulgo legitur: κοινὸν ἔστω τὸ KA .

percipiant. Praeterea, quamvis rectilineum $AB\Gamma$, cui simile sciendum est, possit esse cuiuscunque generis, in demonstratione tamen graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus est in versionis Commandini editione, quae Oxonii impressa est. Huic Simsonis observationi addi potest, Campani quoque duplicem demonstrationem differre a demon-

Sit enim rursus AB secta bifariam in T ; et applicatum sit AA , deficiens figura TM , et applicetur rursus secundum AB parallelogrammum AE , deficiens figura AZ , simili et similiter posita ei, quae ex dimidia AB describitur, nempe TM , dico maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe AA parallelogrammo AE .

Quoniam enim simile est AZ ipsi TM , circa eandem sunt diametrum (VI. 26.); sit eorum diameter EB , et describatur figura.

Et quoniam (I. 36.) aequale est AZ ipsi $A\Theta$, etenim et ZH aequalis est ipsi $H\Theta$; maius igitur AZ ipso KE . Aequale autem AZ ipsi AA (I. 43.); maius igitur est AA ipso EK . Commune addatur KA ; totum igitur AA toto AE maius est. Omnium igitur etc.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 390.)

Secundum datam rectam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma simili alteri dato; oportet autem datum rectilineum, cui aequale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existenti-

stratione sextus graeci. In eorum priore sine permutatione proportionalium res refertur ad partem posteriorem V. 9. in posteriore permutatio proportionalium pariter adhibetur.

Obs. 2. Pfeiderer. in schedis mss. §. 308 monet, inepte inter VI. 24. eiusque conversam VI. 26. insertam esse hanc VI. 25. quae nullam ad illas habeat relationem, contra immediate nitatur VI. 20. Apud Campanum id vitium non reperitur, quum, quae vulgo sunt VI. 24., VI. 26. sint apud ipsum

βαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἔλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ὃ δεῖ ὁμοιον ἔλλείπειν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἶσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ , μὴ μείζον ὢν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἔλλειμμάτων, ὃ δὲ δεῖ ὁμοιον ἔλλείπειν, τὸ Δ δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἶσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἔλλειπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ .

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ $EBZH$, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ AH ἦτοι ἶσον ἐστὶ τῷ Γ , ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὅρισμον. Εἰ μὲν οὖν ἶσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ , γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἶσον παραλληλόγραμμον τὸ AH , ἔλλειπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ EZ .

VI. 22., VI. 23., nostra haec autem pariter VI. 25. Quae autem vulgo est VI. 23. apud Campanum est VI. 24.

Obs. 3. Huc referri potest problema, quod est apud Thom. Simpson 14. libri VI., quo iubetur describi figura similis datae figurae rectilineae, quae ad aliam datam figuram rectilineam sit in ratione data.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Si quis sumere velit, dari posse rectam $A\theta\Gamma$, quae non transeat per punctum Z , necessario is ponere debet rectam HZ ipsam aut productam convenire in puncto aliquo θ cum recta $A\theta\Gamma$. Quoniam enim, ob angul. $AHZ = A\Delta\Gamma$ (supp.) recta HZ parallela est rectae $\Delta\Gamma$ (I. 28.) et $\Delta\Gamma$ secat

bus defectu eius, quod ad dimidiam et parallelogrammo, cui oportet simile deficere ¹⁾.

Sit data quidem recta AB , datum vero rectilineum, cui oportet aequale ad AB applicare, sit Γ , non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est similibus existentibus defectibus, cui autem oportet simile deficere, sit Δ ; oportet secundum datam rectam AB , dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi Δ .

Secetur AB (I. 10.) bifariam in puncto E , et describatur ex ipsa EB (VI. 18.) ipsi Δ simile et similiter positum $EBZH$, et compleatur parallelogrammum AH ; itaque AH vel aequale est ipsi Γ , vel maius ipso, ob determinationem. Et si quidem aequale est AH ipsi Γ , factum erit propositum; applicatum erit enim secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum AH , deficiens figura parallelogramma EZ ipsi Δ simili. Si autem non, maius

1) Ad finem huius propositionis in versione latina praecedente Boerhanno paululum recessimus a textu graeco, quo verius rem ipsam exprimeremus. Neque enim de duobus defectibus sermo esse potest, quorum alter pertineret ad parallelogrammum illud, cui oportet simile deficere. Itaque graeca quoque ita habere debebant: *ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ (εἶδους) ᾧ δεῖ ὁμοίον, ἐλλείπειν*. Caeterum, monente Pileiderero propositio haec ita etiam potest exprimi: datae figurae rectilineae aequale describere parallelogrammum sub angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum sit segmentum rectae datae, alterum vero latus habeat rationem datam ad reliquum segmentum rectae datae: dummodo figura rectilinea data maior non sit parallelogrammo sub eodem angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum est semissis rectae datae, alterum vero ad semissem rectae datae, seu ad prius eius latus habet eandem rationem datam.

rectam $A\Theta\Gamma$ in Γ (supp.), etiam HZ ipsa vel producta eandem

ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ . Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἐστὶ τὸ $\Theta\epsilon$ τοῦ Γ . Ἴσον δὲ τὸ $\Theta\epsilon$ τῷ HB μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ Γ . Ὡς δὴ μείζον ἐστὶ τὸ HB τοῦ Γ , ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεσιτάτω τὸ $K\Lambda MN$. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ HB ἐστὶν ὁμοιον καὶ τὸ KM ἄρα τῷ HB ἐστὶν ὁμοιον. Ἐστω οὖν ὁμολόγος ἡ μὲν $K\Lambda$ τῇ HE , ἡ δὲ ΛM τῇ HZ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τοῖς Γ, KM , μείζον ἄρα ἐστὶ HB τοῦ KM μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν HE τῆς ΛK , ἡ δὲ HZ τῆς ΛM . Κεῖσθω τῇ μὲν $K\Lambda$ ἴση ἡ $H\Xi$, τῇ δὲ ΛM ἴση ἡ HO , καὶ συμπληρώσθω τὸ $\Xi H O \Pi$ παραλληλόγραμμον ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τῷ KM τὸ $H\Pi$. Ἀλλὰ τὸ KM τῷ HB ὁμοιὸν ἐστὶ καὶ τὸ $H\Pi$ ἄρα τῷ HB ὁμοιὸν ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ $H\Pi$ τῷ HB . Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ $H\Pi B$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ BH τοῖς Γ, KM , ὧν τὸ $H\Pi$ τῷ KM ἐστὶν ἴσον λοιπὸς ἄρα ὁ $T\Phi X$ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ OP τῷ $\Xi\Sigma$, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠB ὅλον ἄρα τὸ OB ὅλῳ τῷ ΞB ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞB τῷ TE ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AE πλευρὰ τῇ EB ἐστὶν ἴση καὶ τὸ TE ἄρα τῷ OB ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $\Xi\Sigma$ ὅλον ἄρα τὸ $T\Sigma$ ὅλῳ τῷ $T\Phi X$ γνώμονι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ $T\Phi X$ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος καὶ $A\Pi$ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον πε-

AΘΓ secabit in puncto aliquo Θ (I. 29. Cor. 3.). Hinc proprie duo casus distingui debere videntur, prout punctum Θ in ipsa

est ΘE ipso Γ . Aequale autem ΘE ipsi HB ; maius igitur et HB ipso Γ . Quo autem maius est HB ipso Γ , ei excessui aequale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constituatur $KAMN$ (VI. 25.). Sed Δ ipsi HB est simile; et KM igitur ipsi HB est simile. Sit igitur homologa quidem KA ipsi HE , AM vero ipsi HZ . Et quoniam aequale est HB ipsis Γ , KM , maius igitur est HB ipso KM ; maior igitur est et HE ipsa AK (VI. 20. Cor. 1.), HZ vero ipsa AM . Ponatur (I. 3.) ipsi quidem KA aequalis $H\Xi$, ipsi vero AM aequalis $H\Theta$, et compleatur. parallelogrammum $\Xi H O \Pi$; aequale igitur et simile est ipsi KM ipsum $H \Pi$ (VI. 24.). Sed KM ipsi HB simile est; et $H \Pi$ igitur ipsi HB simile est: circa eandem igitur diametrum est $H \Pi$, circa quam HB (VI. 26.). Sit eorum diameter $H I B$, et describatur figura.

Et quoniam aequale est BH ipsis Γ , KM , quorum $H \Pi$ ipsi KM est aequale; reliquus igitur $\gamma \phi X$ gnomon reliquo Γ est aequalis. Et quoniam (I. 43.) aequale est OP ipsi $\Xi \Sigma$, commune apponatur ΠB ; totum igitur OB toti ΞB aequale est. Sed ΞB ipsi TE est aequale (I. 36.), quoniam et latus AE lateri EB est aequale; et TE ipsi OB est aequale. Commune apponatur $\Xi \Sigma$; totum igitur $T \Sigma$ toti gnomoni $\gamma \phi X$ est aequale. Sed gnomon $\gamma \phi X$ ipsi Γ ostensus est aequalis; et $A \Pi$ igitur ipsi Γ est aequale.

Secundum datam igitur rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicatum est ΣT , de-

recta HZ , vel in ea producta poni sumas. Atque haec ipsa causa fuisse videtur lectionis variantis, quam ad hunc locum obser-

ραβέβληται τὸ $\Sigma\Gamma$, ἔλλειπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠB ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ , ἐπειδὴ περ τὸ ΠB τῷ $H\Pi$ ὁμοίον ἐστίν. "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Παρά τὴν δοθείσαν εὐθείαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

"Εστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ὃ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ , ὃ δὲ δεῖ ὁμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν AB εὐθείαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ .

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ BZ , καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς BZ , Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ $H\Theta$ ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $H\Theta$ τῷ EA . Ὁμολογος δὲ ἔστω ἡ μὲν $K\Theta$ τῇ ZA , ἡ δὲ KH τῇ ZE . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ ZB , μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν $K\Theta$ τῆς ZA , ἡ δὲ KH τῆς ZE . Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ZA , ZE , καὶ τῇ μὲν $K\Theta$ ἴση ἔστω ἡ ZAM , τῇ δὲ KH ἴση ἡ ZEN , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ MN . τὸ MN ἄρα τῷ $H\Theta$ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον. Ἀλλὰ τὸ $H\Theta$ τῷ

vavimus. In versione Commandini uterque situs puncti Θ expressus est. Neque tamen id necessario fiet, dum observes, rectam $A\Theta\Gamma$, nisi per punctum Z transeat, necessario alterutram rectarum HZ , EZ secare, ubi tum punctum Θ pro puncto

ficiens figura parallelogramma IIB simili existenti ipsi A , quandoquidem IIB ipsi HII simile est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 393.)

Secundam datam rectam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili datae.

Sit data recta AB , datum vero rectilineum P , cui oportet aequale secundum AB applicare, A autem cui oportet simile applicare; oportet igitur secundum AB rectam ipsi P rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi A .

Secetur AB bifariam in E (I. 9.), et describatur ex EB (VI. 18.) ipsi A simile et similiter positum parallelogrammum BZ , et utrisque simul quidem BZ , P aequale, ipsi vero A simile et similiter positum idem constituatur $H\Theta$ (VI. 25.); simile igitur est $H\Theta$ ipsi EA . Homologa autem sit $K\Theta$ quidem ipsi ZA , KH vero ipsi ZE . Et quoniam maius est, parallelogrammum $H\Theta$ ipso ZB , maior igitur est et recta quidem $K\Theta$ ipsa ZA , recta vero KH ipsa ZE . Producantur ZA , ZE , et ipsi quidem $K\Theta$ aequalis sit ZAM (I. 3.), ipsi vero KH aequalis ZEN et compleatur parallelogrammum MN ; ergo MN ipsi $H\Theta$ aequale est

intersectionis cum alterutra harum rectarum sumi potest, adeoque in ea ipsa positum est. Atque ita rem expedit Clavius.

Obs. 2. In conditionibus Theorematis, ut monet Clavius, haud negligi debet ea, parallelogramma non tantum similia,

EA ἐστὶν ὁμοίον· καὶ τὸ MN ἄρα τῷ EA ὁμοίον ἐστὶν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ EA τῷ MN . Ἦχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ $ZΞ$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ HO τοῖς EA , Γ , ἀλλὰ τὸ HO τῷ MN ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ MN ἄρα τοῖς EA , Γ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ EA · λοιπὸς ἄρα

sed etiam similiter posita esse debere. Hæc enim prætermissa non valeret propositio.

Obs. 3. Idem Clavius directam quoque huius Propositionis demonstrationem addit, ducta nempe recta, quæ utramque rectarum AB , BF bisecat, cui deinde ostendit parallelam esse utramque rectarum AZ , FZ , unde, quum per punctum Z una tantum recta alteri datæ parallela esse possit, necessario in directum erunt puncta A , Z , F . Cf. infra Obs. 1. ad VI. 32.

Obs. 4. Denique Clavius monet Propositionem hanc adhuc valere, si duo parallelogramma similia, similiterque posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra alterum hac tamen lege, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituent, nempe, etiam hoc casu parallelogramma circa eandem consistere diametrum, quod eodem modo directe vel indirecte demonstrari poterit. Idemque etiam monet Rob. Simson. ad VI. 32. (Vide infra.)

PROPOSITIO XXVII.

Obs. 1. Robert. Simson. monet secundum casum huius Propositionis habere in Editione nempe Basil. ἄλλως ante verba: ἔστω γὰρ πάλιν præfixum, quasi alia esset demonstratio, ab imperito, ut videatur, librario adiectum, quam vocem recte omiserit Gregorius (Peyrardus quoque eam iure omittit, nulla variantis huius lectionis mentione facta.) Librarii autem non animadvertisse videntur, a vocibus inde ἔστω γὰρ πάλιν casum secundum incipere, cuius negligentiae causa forte in eo

vam circumferentiam cadunt, rectarum maximam esse AA , quae per centrum; semper autem propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit, nempe AE maior quam AZ , et AZ quam AF ; earum autem, quae in OKH convexam circumferentiam cadunt, rectarum, minima quidem AH , quae inter punctum A et diametrum AH ; semper autem propinquior ipsi AH minimae minor est remotiore, AK quidem minor quam AA , et AA quam $A\Theta$.

Sumatur enim centrum circuli ABF (III. 1.), et sit M ; et iungantur ME , MZ , MF , MK , MA , $M\Theta$.

Et quoniam aequalis est AM ipsi EM (I. Def. 15.), communis addatur MA ; ergo AA aequalis est ipsis EM , MA . Sed EM , MA ipsa EA maiores sunt (I. 20.); et AA igitur ipsa EA maior est. Rursus, quoniam aequalis est EM ipsi ZM , communis addatur MA ; ergo EM , MA ipsis ZM , MA aequales sunt, et angulus EMA angulo ZMA maior est. Basis igitur EA basi ZA maior est (I. 24.). Similiter autem ostendemus, et ZA ipsa FA maiorem esse; maxima igitur est AA , maior vero AE quam AZ , et AZ quam AF .

Et quoniam MK , KA maiores sunt quam MA (I. 20.), et MH aequalis MK ; reliqua igitur KA reliqua HA maior est; quare et AH minor est quam AK ; minima igitur est. Et quoniam super trianguli MAA uno latere MA , duae rectae intus constituuntur; MK , KA igitur ipsis MA , AA minores sunt (I.

A extra circulum posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una MA per centrum; ea, quae per centrum producta est, usquedum iterum cum circulo conveniat, nempe

KA τῶν MA , AA ἐλάττονές εἰσιν ἴση δὲ ἡ MK τῇ MA . λοιπὴ ἄρα ἡ AK λοιπῆς τῆς AA ἐλάττων ἐστίν. Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ AA τῆς AO ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ AH , ἐλάττων δὲ ἡ μὲν AK τῆς AA , ἡ δὲ AA τῆς AO .

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ A σημείου προσπεσοῦνται²⁾ πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς AH ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ MA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ M , τῇ ὑπὸ KMA γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ AMB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ MK τῇ MB , κοινὴ δὲ ἡ MA , δύο δὴ αἱ KM , MA , δυοὶ ταῖς BM , MA ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KMA γωνία τῇ ὑπὸ BMA ἴση· βάσεις ἄρα ἡ AK βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ AK εὐθείᾳ ἄλλῃ ἴση οὐ προσπιπτέται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ A σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ AN . Ἐπεὶ οὖν ἡ AK τῇ AN ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ AK τῇ AB

1) Pro: αἱ ἄρα MK , KA Peyrard. e Cod. a habet tantum ἄρα. Nos ea verba ex edd. Oxon. et Basil. restituimus, ut etiam Peyrard. in versione latina et gallica habet.

2) Lectio haec προσπεσοῦνται, quam e Cod. a. habet Peyrardus, praeferenda omnino videtur alteri συμπεσοῦνται, quam habent edd. Oxon. et Basil.

AA , erit omnium maxima, ea autem eius pars AH , quae ad punctum H inter A et centrum intermedium ducitur, omnium minima; reliquarum autem semper ea maior erit, ad cuius intersectionem cum circulo recta e centro M ducta angulum cum recta MA maiorem efficit, quam ea, ad cuius intersectionis punctum recta e centro ducta minorem cum MA angulum efficit, et ad utraque rectae MA partes binae tantum aequales erunt.

Cor. Neque extra circulum igitur ullum punctum est,

21.); aequalis autem MK ipsi MA ; reliqua igitur AK reliqua AA minor est. Similiter autem ostendemus et AA minorem esse quam AO ; minima igitur est AH , minor vero AK quam AA , et AA quam AO .

Dico et duas tantum aequales a puncto A cadere in circulum, ex utraque parte ipsius AH minimae. Constituaturs ad MA rectam, et ad punctum in ea M , ipsi KMA angulo aequalis angulus AMB (I. 23.), et iungatur AB . Et quoniam aequalis est MK ipsi MB , communis autem MA , dunc KM , MA duabus BN , MA aequales sunt, utraque utrique, et angulus KMA angulo BMA aequalis; basis igitur AK basi AB aequalis est (I. 4.). Dico autem ipsi AK rectae aliam aequalem non cadere in circulum a puncto A . Si enim fieri potest, cadat, et sit AN . Quoniam igitur AK ipsi AN est aequalis, sed AK ipsi AB est aequalis; et AB igitur ipsi AN , propinquior minimae AH

a quo plures quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

Obs. 2. Consideratis hac ratione in Prop. 7. 8. punctis, quae vel extra vel intra circulum posita sunt, necessario occurrunt etiam puncta, quae in ipsa circumferentia sita sunt. In his idem fieri obtinet, quod in Prop. 8. et 7. Nempe, si e puncto aliquo in ipsa circuli circumferentia posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una per centrum transeat, haec quidem omnium maxima erit; reliquarum autem ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro maiorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est, maior semper erit, quam ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro minorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est. Et e duabus punctis dati partibus binae tantum rectae aequales ad circulum duci possunt.

ἴσιν ἴση καὶ ἡ ΔB ἄρα τῇ ΔN ἴσιν ἴση, ἣ ἔγγιον τῆς ΔH ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερόν ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπεξεύχθω ἡ MN . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KM τῇ MN , κοινὴ δὲ ἡ MA , καὶ βάσεις ἡ ΔK βάσει τῇ ΔN ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ KMA γωνία τῇ ὑπὸ NMA ἴση ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ KMA τῇ ὑπὸ BMA ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ BMA ἄρα τῇ ὑπὸ NMA ἐστὶν ἴση, ἣ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον ὑπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκατέρα τῆς ΔH ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον πρόσπιπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Quod eodem modo demonstratur ac III. 8. Hanc propositionem septimae huius libri subiungit Commandinus, qui eam quoque demonstravit in commentario in propositionem octavam libri Archimedis de spiralibus, pariterque eam affert van Swinden Anfangsgründe der Messkunde.

Cor. Nec in ipsa igitur circumferentia, adeoque generatim nusquam in eo plano, in quo circulus descriptus est, praeter centrum, datur punctum, e quo plures, quam binae rectae aequales ad circulum duci possunt. Binas autem in omnibus his propositionibus dicere maluimus, quam duas, quod ut Candalla monuit, sensus enunciati ita iustius exprimitur. Caeterum, quod modo de eum to in ipsa circuli circumferentia posito diximus, ad idem fere redit, quod infra

remotiore est aequalis, quod fieri non posse ostensum est,

Vel et aliter. Iungatur MN . Quoniam aequalis est KM ipsi MN , communis autem MA , et basis AK basi AN aequalis; angulus igitur KMA angulo NMA aequalis est (I. 8.). Sed KMA ipsi BMA est aequalis; et BMA igitur ipsi NMA est aequalis, minor majori, quod fieri nequit. Non igitur plures quam duae aequales in circulum ABT a puncto A ex utraque parte minimae AH cadent. Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 215.)

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duae rectae aequales, sumptum punctum centrum est circuli.

III. 15. dicetur, nisi quod in III. 15. non de rectis tantum sermo est, quae ex eodem omnes puncto exeunt. Omnes tres propositiones, nempe III. 7. III. 8. eamque, quam Obs. 2. subiunximus, uno enunciato complectitur (quod facile fieri posse perspicuum est). Thom. Simpson. Elem. of Geometry Lond. 1800. p. 45. et Gilbert. p. 133. Quae porro Austin. de his propositionibus monet, dicemus ad Prop. 9.

Obs. 3. Facile patet, conversam quoque propositionum 7. 8. eiusque, quam Obs. 2. habuimus, locum habere. Nempe, si e puncto aliquo in circuli plano posito, quod non sit centrum, ducantur plures rectae ad circulum, sitque una omnium maxima, erit in hac circuli centrum: ea vero, quae omnium minima est, erit, si punctum illud intra circulum fuerit, in

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ $Δ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Δ$ πρὸς τὸν $ABΓ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ $ΔΑ$, $ΔΒ$, $ΔΓ$. λέγω ὅτι τὸ $Δ$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ AB , $ΒΓ$, καὶ τετμήσθωσαν διχα κατὰ τὰ E , Z σημεία, καὶ ἐπιξηχθεῖσαι αἱ $ΕΔ$, $ZΔ$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ K , H , $Λ$, $Θ$ σημεία.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἴση ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ ἡ $ΕΔ$ δύο δὴ αἱ AE , $ΕΔ$ δυοὶ ταῖς BE , $ΕΔ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ $ΔΑ$ βάσει τῇ $ΔΒ$ ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AEΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BEΔ$ ἴση ἐστίν· ὁρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AEΔ$, $BEΔ$ γωνιῶν ἡ HK ἄρα τὴν AB διχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνει. Καὶ ἐπεὶ, εἴαν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεϊάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέν-

directum scilicet, quae per centrum transit, ex parte puncti opposita; si vero punctum extra circulum fuerit, ea, quae omnium minima est, erit pars eius, quae per centrum transit, extra circulum sita (si punctum in ipsa circuli circumferentia fuerit, nulla dabitur omnium minima): omnibus porro casibus ea, quae maior est altera, circulum ita secabit, ut recta e centro ad punctum intersectionis maioris illius rectae et circuli ducta maiorem efficiat angulum cum recta e puncto ad centrum ducta, quam ea, quae e centro ad punctum intersectionis minoris cum circulo ducitur, efficit cum recta e puncto ad centrum ducta: denique binae rectae aequales e puncto ad circulum ductae puncta intersectionis cum circulo ita posita habebunt, ut rectae ad haec puncta e centro ductae aequales utrimque angulos efficiant cum ea, quae a puncto ad centrum ducitur. Quod facile sumto contrario evincitur. Conversam hanc, quatenus respicit III. 7., habet Clavius.

Sit circulus $AB\Gamma$, intra autem ipsum punctum A , et a A in circulum $AB\Gamma$ cadant plures quam duae rectae aequales AA , AB , $A\Gamma$; dico punctum A centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Iungantur enim AB , $B\Gamma$, et secentur bifariam in punctis E , Z (I. 10.), et iunctae EA , ZA producantur ad K , H , A , Θ puncta.

Quoniam igitur AE est aequalis EB , communis autem EA , duae AE , EA duabus BE , EA aequales sunt; et basis AA basi AB aequalis; angulus igitur AEA angulo BEA aequalis est (I. 8.); rectus igitur uterque angulorum AEA , BEA (I. Def. 10.). HK igitur AB bifariam secans et ad angulos rectos ipsam secat. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos angulos secet, centrum circuli est in secante (III. 1. Cor.); erit in HK cen-

PROPOSITIO IX.

Obs. Haec propositio facillime consequitur ex III. 7. Cor. vel generalius etiam, nulla positionis puncti intra circulum mentione facta, ope III. 8. Obs. 2. Cor. ita, ut nulla alia demonstratione opus foret. Atque ita Borellius rem expedit (Euclid. restitut. 1658. p. 72.). Caeterum debebat in demonstratione priore hic allata, si omnia iusto rigore persequi velis, distingui is casus, quo rectarum AB , $B\Gamma$ (Fig. 215.) alterutra per punctum A transit. Et, quum praeterea in hac demonstratione sumatur, quod apud Euclidem neque inter axiomata deprehendimus, nec alias demonstratum videmus (quo tamen etiam utitur in demonstratione priore Prop. 10.) duas rectas nonnisi unum punctum commune habere, suspicari forte liceat, spuriam esse, quae primo loco habetur, demonstrationem. Editorum nonnulli priorem, nonnulli posteriorem demonstrationem omittunt. Priorem omittunt Tacquet,

τρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς $\Theta\Lambda$ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ HK , $\Theta\Lambda$ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$.

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ Δ , ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον προσπιπτέ-
 τωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$.
 λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ
 $AB\Gamma$ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ E , καὶ ἐπι-
 ζευθείσα ἡ ΔE διήχθω ἐπὶ τὰ Z , H σημεία, ἡ
 ZH ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐπεὶ
 οὐκ κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐπὶ τῆς ZH διαμέτρου εἰλη-
 πταί τι σημεῖον τὸ Δ , ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου,
 μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔH , μείζων δὲ ἡ μὲν $\Delta \Gamma$
 τῆς ΔB , ἡ δὲ ΔB τῆς ΔA . Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ
 ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ E κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$

Rob. Simson., Playfair., posteriorem Campanus, Ambros.
 Rhodius, Orontius Fineus, Candalla, Giordano da Bitonto,
 Fournier, Hauff in Vers. German. Austin. monet, proposi-
 tionem 9. adeo facile deduci e septima, ut credi vix possit,
 Euclidem id non animadvertisse. Recentiores quosdam
 geometras reapse in posteriore 9. demonstratione, quae priori
 omnino praeferenda videatur, usos esse 7. At quum Euclides
 ipse, ad quem nempe priorem demonstrationem 9. referendam
 putat, 7. neque hic, neque alibi unquam utatur, nec 8. ullus
 usus sit apud Euclidem, quum praeterea theoria circuli etiam
 sine 7. et 8. perfectus esse videatur, quoad rectas ad circum-
 ductas propositionibus III. 14. III. 15. III. 35. et III. 36.

trum circuli $AB\Gamma$. Ex eadem ratione et in ΘA est centrum circuli $AB\Gamma$. Et nullum aliud commune habent rectae HK , ΘA quam punctum A ; circuli $AB\Gamma$ punctum igitur A centrum est. Si igitur circuli etc.

A L I T E R. (Fig. 216.)

Intra enim circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum A , a A autem in $AB\Gamma$ circulum cadant plures quam duae rectae aequales, AA , AB , $A\Gamma$; dico sumptum punctum A centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Non enim, sed si fieri possit, sit E , et iuncta AE producatur in puncta Z , H ; ergo ZH diameter est circuli $AB\Gamma$. Quoniam igitur in diametro ZH circuli $AB\Gamma$ sumptum est aliquod punctum A , quod non est centrum circuli, maxima quidem erit AH , maior vero $A\Gamma$ quam AB , et AB quam AA (III. 7.). Sed et aequalis, quod fieri nequit; non est igitur E centrum circuli $AB\Gamma$. Similiter autem ostendemus;

7. et 8. serius saltem inventum eius auctoris videri, qui propositionis 9. demonstrationem posteriorem addiderit. Obiici quidem posse, in Theodosii Sphaericis adhiberi has propositiones, et similia nonnulla de sphaeris demonstrari, at quum Theodosium tribus fere seculis post Euclidem vixisse perhibeant, ab illo quippe ab auctoris elementorum aëvo nimis alieno non addisci posse, quatenam ab initio huius operis forma fuerit. Quae quamvis satis speciose dicta sint, pro certis tamen et indubitatis sumi posse non videntur, quum nondum evictum sit, posteriorem Prop. 9. demonstrationem non esse Euclidis, et propositiones 7. et 8., si non ad demonstrandas propositiones sequentes, certe tamen ad pleniorum

κύκλου. Ὅμοιως δὴ δείζομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ τὸ Δ ἄρα σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ B, H, Θ ¹⁾ καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $B\Theta, BH$ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ K, Λ σημεία καὶ ἀπὸ τῶν K, Λ ταῖς $B\Theta, BH$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ $K\Gamma, \Lambda M$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ A, E σημεία.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $AB\Gamma$ εὐθεΐά τις ἢ AG εὐθεΐάν τινα τὴν $B\Theta$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς AG ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $AB\Gamma$ εὐθεΐά τις ἢ $N\Xi$ εὐθεΐάν τινα τὴν BH δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $N\Xi$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς AG , καὶ κατ' οὐδέν συμβάλλουσιν αἱ $AG, N\Xi$ εὐθεΐαι ἀλλήλαις.

1) Editio Parisiensis, nulla exhibita Cod. auctoritate, ad exemplum tamen ed. Basil. ponit B, H, Z, Θ . At, quum ostendendum sit, ne tria quidem puncta duobus circulis posse esse communia, restituendam omnino putavimus lectionem ed. Oxon.

accuratioremque circuli theoriā omnino pertinere videantur, cuius rei exempla etiam infra ad Prop. 11. videbimus.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ Χ.

Huius quoque propositionis, quae generalius adhuc ita exprimi, et eadem ratione demonstrari poterat: circulus cum alio circulo non plures quam duo puncta communia habere

neque aliud praeter A ; ergo punctum A centrum est circuli $AB\Gamma$.

PROPOSITIO X. (Fig. 217.)

Circulus circulum non secat in pluribus punctis quam duobus.

Si enim fieri potest, circulus $AB\Gamma$ circulum AEZ secet in pluribus punctis quam duobus, B , H , Θ , et iunctae $B\Theta$, BH bifariam secantur in punctis K , A (I. 10.); et ab ipsis K , A ipsis $B\Theta$, BH ad rectos angulos ductae $K\Gamma$, AM (I. 11.) producantur in puncta A , E .

Quoniam igitur in circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $A\Gamma$ rectam aliquam $B\Theta$ bifariam et ad rectos secat, in $A\Gamma$ erit centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Rursum, quoniam in eodem circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $N\Xi$ rectam aliquam BH bifariam et ad rectos secat, in $N\Xi$ centrum est circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Ostensum autem ipsum esse et in $A\Gamma$, et in nullo puncto conveniunt rectae $A\Gamma$, $N\Xi$ inter se praeterquam in

potest (in quo enunciato illud etiam continetur, circulos se invicem contingentes certe non plura quam duo puncta communia habere) in textu graeco duae sunt demonstrationes. In priore illud desiderari possit, quod non satis accurate demonstratum sit, rectas, quae in punctis bisectionis rectis ex hyp. utrique circulo inscriptis ad angulos rectos ducantur, sibi invicem in puncto aliquo et quidem unico occurrere, qui defectus tamen facile expleri potest ope I. Ax. 11. et I. Ax. 10. a et I. Ax. 12. Demonstratio posterior sumit sine ratione, punctum, quod pro centro unius circuli sumptum fuit, esse intra alterum circulum. Neque tamen necesse est hoc sumere,

ἢ κατὰ τὸ O . τὸ O ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὅμοιως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ O . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν $ABΓ$, $ΔΕΖ$, τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ O , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

Α Α Α Ω Σ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ $ABΓ$ κύκλον τὸν $ΔΕΖ$ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ B , H , Z , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου τὸ K , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KB , KH , KZ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ΔΕΖ$ εἰληπταί τι σημεῖον ἐντός, τὸ K , καὶ ἀπὸ τοῦ K πρὸς τὸν $ΔΕΖ$ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ KB , KZ , KH . τὸ K ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου κέντρον τὸ K . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ K , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

si praemissis propositionibus III. 7. III. 8. et ea, quae Obs. 2. ad III. 8. continetur, propositionem III. 9. generalius exprimas de puncto quocunque etiam non intra circulum posito. Atque ita propositiones III. 7. III. 8. et III. 8. Obs. 2. necessariae forent ad demonstrationem posteriorem III. propositionis 10. perficiendam. Etiam hic alii editores omittunt demonstrationem priorem v. c. Orontius Fineus, Borellius, Tacquet, Coëtsius, Giordano da Bitonto, Fournier, Rob. Simson., Playfair., alii posteriorem, v. c. Campanus, Candalla, Tartalea, Ambros. Rhodius, Hauff deutsche Uebersetz., Lorenz deutsche Uebersetz. 3te Ausg. 1809. Caeterum sequentia adhuc ex hac propositione et maxime ex demonstratione priore perficienda ante ut diximus, corollaria derivari possunt;

O ; ergo O punctum centrum est circuli ABF . Similiter autem ostendemus, et circuli AEZ centrum esse O ; duorum igitur circulorum sese secantium ABF , AEZ , idem erit centrum O , quod fieri nequit (III. 5.). Circulus igitur non etc.

ALITER. (Fig. 218.)

Circulus enim rursus ABF circulum AEZ secet in pluribus punctis quam duobus, B , H , Z , et sumatur centrum circuli ABF , K , et iungantur KB , KH , KZ .

Quoniam igitur intra circulum AEZ sumptum est aliquod punctum K , et a K in circulum AEZ incidunt plures quam duae rectae aequales, KB , KZ , KH ; ergo punctum K centrum est circuli AEZ (III. 9.). Est autem K et circuli ABF centrum; duorum igitur circulorum sese secantium idem centrum est K , quod fieri nequit (III. 5.). Non igitur circulus etc.

Cor. 1. Per tria puncta non in eadem recta posita circulus describi potest, invento nempe illius centro eadem, qua prior demonstratio utitur, ratione, et tribus itaque punctis datis omnimode determinatur circulus, qui per ea transit.

Cor. 2. Recta, quae duo puncta, quibus duo circuli se secant, iungit, non per utriusque circuli centrum transit, vel non est utriusque circuli diameter. Quodsi enim esset diameter utriusque circuli, vel idem centrum esset utrique circulo, quod fieri nequit (III. 5.) vel recta haec in duobus punctis bisecaretur, quod pariter fieri non potest (I. Ax. 9.) Cf. Pfeiderer.

Cor. 3. Quae rectam puncta intersectionis circulorum se secantium iungentem, sive haec per centrum unius circuli

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληρθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἥ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΑΔΕ$ ἐφαπτόσθωσαν ¹⁾ ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ABΓ$ κύκλου κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $ΑΔΕ$ τὸ H . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ A σημεῖον πεσεῖται.

1) ἐφαπτόσθωσαν e Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἀπτόσθωσαν, quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. quae diximus ad Def. 2. huius libri.

transeat, sive non, bifariam secat recta, eique ad angulos rectos insistit, per centra duorum circulorum transit, et vice versa. Cf. Pfeiderer.

Cor. 4. Distantia centrorum duorum circulorum, qui se intersecant, minor est summa radiorum eorum (I. 20.); et quod pariter ex I. 20. consequitur, si radii inaequales sint, distantia centrorum maior est differentia radiorum eorum; et is radius, qui altero maior est, minor est summa alterius radii et distantiae centrorum. Semper nempe triangulum effici debet inter utrumque centrum et punctum sectionis circulorum. Cf. Pfeiderer.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ XI.

Obs. 1. In huius propositionis enunciatione distinctius dicendum erat, quo sensu vox ἐκβαλλομένη sumta sit. Illud nempe volebat auctor, ut e demonstratione utraque patet, rectam, quae contra utriusque circuli coniungit, productam ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in contactum, vel potius in illud ipsum punctum cadere, in quo duo circuli se contingere sumebantur. Hac demum ratione, accu-

PROPOSITIO XI. (Fig. 219.)

Si duo circuli sese intus contingant, et sumantur eorum centra, recta centra eorum coniungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ sese contingant intus in puncto A , et sumatur circuli quidem $AB\Gamma$ centrum Z , circuli autem $A\Delta E$ centrum H ; dico rectam ab H ad Z ductam, si producat in punctum A cadere.

ratius sensu enunciati determinato, patet, cur in figura punctum H centrum nempe circuli minoris vel interioris sumtum sit ex ea parte puncti Z centri circuli maioris, vel alterum comprehendentis, e qua sunt puncta Δ , Θ , in quibus recta ZH circulos in demonstratione secare sumitur. Dixi, unum circulorum necessario alterum comprehendere, adeoque maiorem esse altero. Quamvis enim in iis, quae ad III. 3. Def. observata sunt, duos circulos intus se in puncto aliquo contingere dixerimus, si ea saltem puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint intra alterum circumulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum) ex iis tamen, quae hactenus demonstrata sunt, colligere iam licebit, unum eorum circulorum necessario integrum intra alterum positum esse. Quodsi enim imaginari velis, duos circulos intus se in puncto aliquo contingentes, quorum tamen neuter intra alterum comprehendatur, necessario is, cuius puncta puncto A proxima intra alterum posita sint, extra hunc exire, et deinde per aliud eius punctum, vel per idem punctum iterum intra circumulum redire deberet. At, si sumere velis, posse esse (Fig. 220.) circumulum $AB\Delta\Gamma$, qui alterum $AB\Gamma E$ intus contingat, et in B extra hunc exeat versus A , in Γ vero intra eum redeat, duo hi circuli plura

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ ZHO , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , AH .

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HZ τῆς ZA τοῦτ' ἐστὶ τῆς ZO , (ἴση γὰρ ἡ ZA τῇ ZO , ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω¹⁾) μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ZH . λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς HO μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ AH τῇ AH καὶ ἡ HA ἄρα τῆς HO μείζων ἐστίν, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ A συναφῆς πεσεῖται ἐπ' αὐτὴν ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \quad A \quad A \quad \Omega \quad \Sigma$.

Ἀλλὰ δὲ πιπτέτω ὡς ἡ $HZ\Gamma$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ $HZ\Gamma$ ἐπὶ τὸ Θ σημείον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AH , AZ .

1) Verba uncis inclusa, quae Peyrardus cum God. a. omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituimus.)

quam duo puncta communia habebunt, quod fieri nequit, ut in Obs. ad III. 10. monuimus. Sin autem imaginari velis circulum $AB\delta BA$ (Fig. 231.), qui alterum ABE intus contingat, et tamen extra eum in puncto B egrediatur, per idem punctum B autem intra illum regrediatur, necessario ille nodiformis erit, et e duabus figuris vel gyris, una AB , altera BA undequaque clausis, et in puncto B cohaerentibus constabit, in quarum altera v. g. in AB centrum circuli Γ positum erit. Ex centro F ducatur ad punctum aliquod Z alterius gyri recta FZ , quae, quum necessario e gyro AB exire debeat, hunc secabit in puncto aliquo Θ (I. Ax. 13.), eruntque tam $F\Theta$ quam FZ radii circuli, adeoque $F\Theta = FZ$ (Def. I. 15.) pars itaque aequalis toti, quod est absurdum. Quum igitur circulus, qui alterum intus contingit, et cuius itaque

natur AFB : anguli igitur AFE , AFB ipsis FAG , ABF , AFB aequales sunt. Sed (I. 32.) BAG , ABF , AFB duobus rectis aequales sunt; et ipsi AFE , AFB igitur duobus rectis aequales sunt. Ad quandam igitur rectam AG , et ad punctum in ea F , duae rectae BF , FE , non ad easdem partes positae, angulos deinceps AFE , AFB duobus rectis aequales faciunt; indirectum igitur est BF ipsi FE (I. 14.). Si igitur duo eor.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 400.)

In aequalibus circulis anguli eandem rationem habent quam circumferentiae quibus insistant, sive ad

ipsa figura BE excessus dicitur, itque excessus in hac propositione 29. similis esse debet dato parallelogrammo A , et totum parallelogrammum AE debet aequale esse spatio dato F . Caeterum etiam hic duplex solutio locum habet, at posterior cum priore eodem redit.

Obs. 2. Si datum istud rectangulum A quadratum fuerit, problema sic efferetur: Ad datam rectam AB dato rectilineo F aequale rectangulum applicare excedens quadrato (Ita Whiston in Cor. 1. ad VI. 29. et Rob. Simson in Not. ad h. l.) Aliter data: Datam rectam AB producere ad punctum aliquod O , ita ut rectangulum contentum segmentis inter hoc punctum et puncta extrema rectae AB interceptis aequale sit spatio dato. Ita Playfair rem exprimit, qui etiam hic in casu hoc particulari subsistit. Vel etiam: data AB differentia laterum rectanguli, ipsoque rectangulo magnitudine dato, invenire latera. Vid. Rob. Simson: l. c. Erit autem spatium datum, cui aequale fieri debet rectangulum, vel quadratum, vel non. Priore casu problema solutum est supra in Obs. 4. ad II. 11. Posterioris casum particularem, quo spatium datum est rectan-

πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκῶται· ἐτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς (ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι').

Ἐκτίωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΔEZ$, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H , $Θ$ γωνίαι ἔκτισαν αἱ ὑπὸ $BHΓ$, $EΘZ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ $BAΓ$, EAZ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρειαι πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν οὕτως ἦτε ὑπὸ $BHΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $EΘZ$, καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ EAZ . καὶ ἐτι ὁ $HΒΓ$ τομεὺς πρὸς τὸν $ΘEZ$ τομέα.

1) Verba, quae uncis inclusimus, Rob. Simson. omittenda censet, utpote imperiti cuiusdam additamentum. Scarborough. etiam indicat, haec verba absurdam continere notam e margine in textum receptam. Et reapse, quum ex III. 10. Def. nulli alij duntur sectores circuli, quam qui ad centra constituti sunt, superflua certe sunt haec verba, quibus inserendis praecedentes anguli sive ad centrum, sive ad circumferentias insistentes occasionem dedisse videntur. In Cod. a. omnia, quae de sectoribus dicta sunt, nec non Corollarium manu aliena vel inter lineas, vel in margine exarata sunt vocabulis contractis. Ilino Peyrardus indicat, in Praefat. ad Tom. I. quoniam Rob. Simson. in Ed. Angl. monuerat, pariter ac Scarborough. additam esse hanc secundam. Propositionis partem, quae nioram saltim afferat, Euclidi et nusquam in sequentibus adhibeatur, a Theone ipso referente in Commentar. ad Ptol. Μεγάλη σύνταξις p. 50. Ed. 1538, ubi ille: ὅτι δὲ οἱ ἐπ' ἴσων κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ γωνίαι, ἐφ' ὧν βεβήκασι, δίδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου.

gulum (qui pariter ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. ad priorem reduci potest) exhibet Rob. Simson. in not. ad VI. 29., et solutionem similem ei, quae in problemate simili ad VI. 28. habebatur, in hunc modum affert. Sit data recta AB (Fig. 394.), datum autem rectangulum sit id, quod rectis $Γ$, $Δ$ continetur: oportet secundum datam rectam AB dato rectangulo $ΓΧΔ$ aequale rectangulum applicare excedens quadrato Ducantur AE , BZ ad rectos angulos ipsi AB , et ad contrarias eius partes, quarum AE aequalis sit ipsi $Γ$, et BZ rectae

centra, sive ad circumferentias insistant; adhuc etiam et sectores (quippe ad centra constituti).

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ , et ad centra quidem ipsorum H , Θ sint anguli $BH\Gamma$, $E\Theta Z$; ad circumferentias vero anguli BAT , EAZ ; dico esse ut $B\Gamma$ circumferentia ad EZ circumferentiam ita angulum $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$, et angulum BAT ad angulum EAZ ; et adhuc sectorem HBT ad sectorem ΘEZ .

A. Iungatur EZ et bifariam secetur in I , centroque I , intervallo IB describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H , et iungatur HZ , et ad AB ducatur IA parallela ipsi AE ; occurrat vero circulus rectae AB productae in M et N , et super BN describatur quadratum $NBOII$, et compleatur rectangulum $ANNI\Theta$. Quoniam igitur angulus BHZ in semicirculo aequalis est angulo recto EAB , parallelae erunt AB , HZ : aequales igitur sunt AH , BZ , et rectangulum $EA \times AH = EA \times BZ$ h. e. rectangulo $\Gamma \times \Delta$. Et, quoniam aequales sunt MA , AN , ut et AA , AB , erunt et MA , BN aequales, et propterea rectangulum $AN \times NB = MA \times AN =$ (III. 35.) $EA \times AH = \Gamma \times \Delta$. Rectangulum igitur $AN \times NB$ h. e. ipsum AN aequale est rectangulo $\Gamma \times \Delta$. Secundum datam igitur rectam AB dato rectangulo $\Gamma \times \Delta$ aequale rectangulum AN applicatum est excedens quadrato BN . Quod oportebat facere.

Obs. 3. Data recta linea AB , et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel NII latus quadrati, quo excedit rectangulum datum AN secundum datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita NB vel NII ponatur y , unde $AO = AB \times y$, et $NO = yq$, ergo $AN = AB \times y + yq$ i. e. $\Gamma \times \Delta = AB \times y + yq$. Pariterque, si ponatur $AN = x = AB + y$, erit $BN - x = AB$, unde $AN = AN \times BN = xq - x \times AB$. Et has aequationum quadraticarum affectarum species ex hac Prop. 29. solverunt Geomet

Καίσθωσαν γὰρ τῇ μὲν $BΓ$ περιφερεία ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ $ΓΚ$, $ΚΑ$, τῇ δὲ EZ περιφερεία ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ZM , MN , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΗΚ$, $ΗΑ$, $ΘΜ$, $ΘΝ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $BΓ$, $ΓΚ$, $ΚΑ$ περιφέρεται ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BΗΓ$, $ΓΗΚ$, $ΚΗΑ$ γωνίαι ἀλλήλαις· ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $BΓ$, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $BΗΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΗΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ἡ $ΕΝ$ περιφέρεια τῆς EZ , τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΘΝ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΘΖ$. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $ΕΝ$ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΗΑ$ τῇ ὑπὸ $ΕΘΝ$.

trae veteres, inveniendū quantitatem incognitam BN vel AN per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et excedentis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes harum formarum utuntur recentiores, facile ex huius Prop. 29. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 4. ad II. 11. allata deduci potest simili ratione ac factum est in Obs. 3. ad VI. 28. Erit nempe $BN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \Gamma \times \Delta} - \frac{AB}{2}$, et $AN = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \Gamma \times \Delta} + \frac{AB}{2}$. Cf. Whiston. Cor. 2—5 ad VI. 29.

Quum itaque haec problemata in Prop. 28. et 29. contenta sint maxime utilia, et in solutione aliorum problematum saepissime adhibita, maxime etiam in libro decimo Elementorum Euclidis et in Conicis Apollonii, ubi applicatio 28. ad Ellipsin, 29 autem ad Hyperbolam spectat, Rob. Simson iure censet inscite admodum ab Andr. Tacquet et Claud. Dechalets in iis, quas dederunt, Elementorum Editionibus has propositiones omissas esse, et insulse admodum ab iis dici nullius fere usus esse. Caeterum vide adhuc ad calcem VI. Prop. 31.

Ponantur enim circumferentiae quidem BF aequales quocunque deinceps FK , KA , circumferentiae vero EZ aequales quocunque ZM , MN , et iungantur HK , HA , ΘM , ΘN .

Quoniam igitur aequales sunt circumferentiae BF , FK , KA inter se, aequales sunt et anguli BHF , FHK , KHA inter se (III. 27.) Quam multiplex igitur est circumferentia BA circumferentiae BF , tam multiplex est et angulus BHA anguli BHF . Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ , tam multiplex est et angulus EOH anguli EOZ . Si igitur aequalis est circumferentia BA circumferentiae EN , aequalis est et angulus BHA

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Pfeiderer monet in sched. mss. §. 306. propositionem 31. incongrue a VI. 20 cum qua proxime cohaereat, se iunctam, et propositionibus 27—30 minime ad eam pertinentibus subiunctam esse.

Obs. 2. Rob. Simson. observat, in demonstratione bis omissam esse inversionem ope Prop. B. V. vel, ut vulgo habent, ope Cor. V. 4. faciendam. Ita enim demum demonstrat nem ope V. 24. rite procedere, unde et Clavius ea inversione usus sit. Nempe ita habere debet demonstratio: Ut FB ad BA , ita figura ex FB ad figuram similem et similiter positam ex BA , et invertendo (B. V.) ut BA ad FB ita figura ex BA ad figuram ex FB : unde (V. 24.) ut $BA + FA$ ad FB ita figurae ex BA et FA ad figuram ex FB . Aequales autem sunt $BA + FA$ ipsi FB : unde (A. V.) figurae ex BA et FA aequales erunt figurae ex FB .

Obs. 3. Propositio VI 31. generaliore reddat propositionem I. 47. et in demonstratione priore ex praemissis ab hac independens sistit (Pfeiderer l. c. §. 306.).

Obs. 4. Converti quoque potest haec propositio eadem

καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἢ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΑ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΘΝ$ γωνίας καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ $ΒΗΓ$, $ΕΘΖ$, εἴληπται τῆς μὲν $ΒΓ$ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνίας ἰσάκεις πολλαπλασιῶν ¹⁾, ἢ τε $ΒΑ$ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΑ$ γωνία, τῆς δὲ $ΕΖ$ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ $ΕΘΖ$ γωνίας, ἢ τε $ΕΝ$ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ $ΕΘΝ$ γωνία καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΗΑ$ γωνία τῆς

1) Hic inserendum Rob. Simson *ὡς ἔτυχεν* iure censet, col-lat. in V. 5. Def. verbis: καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμόν et supra in praeparatione ad demonstrationem voce: *ὁσαιδηποτοῦν*.

ratione ac I. 47. Praeterea ope VI. 31. deducta quoque ex I. 47. problemata generaliore formam induunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 365. Clavius ad h. l. Tacquet et Whiston. in Cor. ad hanc propositionem.

Obs. 5. Denique notabimus, Austino omnes propositiones 27–31. spurias esse videri, non quod ipsarum utilitatem neget, quam potius de propositionibus 27–29 agnoscit, at non sufficere putat ad eas Euclidi vindicandas, sed maxime ob usum vocis *εἶδος* alias apud Euclidem non occurrentis, de qua diximus in Obs. 5. ad VI. 20, et quod demonstrationum concatenatio inter VI. 26 et VI. 32. quae inter se cohaereant, abrupta sit. Praeterea VI. 50. adeo facile ad II. 11. referri, ut ea non opus sit. Denique, quoad VI. 31. patere (it is evident) omnes figuras similes rectilineas descriptas super quibusdam rectis ad se invicem in eadem ratione esse, ac alias quascunque similes figuras rectilineas super iisdem rectis descriptas, unde res facile ex I. 47. conficiatur. Nobis turbatus quidem ordo propositionum videtur, omnes autem has propositiones 25–31 spurias esse, vix adducimur, ut credamus.

angulo EON ; et si maior est circumferentia BA circumferentia EN maior est et angulus BHA angulo EON ; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BF , EZ , duobus vero angulis BHF , $E\theta Z$, sumpta sunt circumferentiae quidem BF , et anguli BHF aequae multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiae et ipsius $E\theta Z$ anguli et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est, si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superare et angulum BHA angulum EON et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse;

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Rob. Simson. monet enunciatum propositionis VI. 26. non esse satis generalem, sed eam eo etiam sensu sumi posse, quem indicavimus in Obs. 4. ad VI. 26. Addit, forte etiam aliam fuisse demonstrationem propositionis VI. 26. directam (diversam ab ea, quam Clavius habet, vide Obs. 1. ad VI. 26.) Deinde exhibet aliam paulo breviorē demonstrationem propositionis VI. 32. in hunc modum: Sint duo triangula $A\theta Z$, ZHF (f. 398.) quorum duo latera $A\theta$, θZ duobus lateribus HZ , HF proportionalia sint, sc. sit ut $A\theta$ ad θZ ita HZ ad HF ; parallela autem sit θA ipsi HZ , et θZ ipsi HF : erit AZ ipsi ZF in directum. Ducatur IK parallela ipsi ZH (I. 31.) occurratque rectae θZ productae in K . Quoniam igitur utraque $A\theta$, IK parallela est ipsi ZH , erunt et $A\theta$, IK inter se parallelae (I. 30.), quare anguli $A\theta Z$, ZKF sunt inter se aequales (I. 29.). Est autem $A\theta$ ad θZ ut (ZH ad HF , h. e. (I. 34), ut) IK ad KZ ; et sunt circa aequales angulos; ergo (VI. 6.) aequiangula sunt $A\theta Z$, IKZ triangula, et propterea angulus $AZ\theta$ aequalis est angulo IKZ , est autem θZK recta linea; igitur AZ ipsi IZ est in directum (I. 14.). Opus huius propositionis, deinde VI. 26. ita demonstrat. Si d. 2.

ὑπὸ $ΕΘΝ$ · καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἴσιν ἄρα ὡς $ΒΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν $ΕΖ$, οὕτως ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΕΘΖ$. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΕΘΖ$ οὕτως ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $ΕΔΖ$, διπλασίον γὰρ ἑκάτερα ἑκατέρως· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν $ΕΖ$ περιφέρειαν οὕτως ἢ τε ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΕΘΖ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $ΕΔΖ$.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχοναι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκνύται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

parallelogramma similia et similiter posita communem habuerunt angulum aut angulos ad verticem oppositos; erunt illorum diametri in recta linea. Primo, habeant parallelogramma $ΑΒΓΔ$, $ΑΕΖΘ$ communem angulum $ΒΑΔ$, sintque similia et similiter posita, erunt $ΑΒΓΔ$, $ΑΕΖΘ$ circa eandem diametrum. Producantur enim $ΕΖ$, $ΓΖ$ ad $Η$, $Κ$ et iungantur $ΖΑ$, $ΖΓ$. Quoniam igitur similia sunt $ΑΒΓΔ$, $ΑΕΖΘ$ parallelogramma, erit $ΑΔ$ ad $ΑΒ$, ut $ΘΑ$ ad $ΑΕ$; quare reliqua $ΑΘ$ erit ad reliquam $ΕΒ$ ut $ΘΑ$ ad $ΑΕ$ (V. 19. Cor.) Est autem $ΑΘ$ aequalis ipsi $ΖΗ$, $ΕΒ$ ipsi $ΓΗ$, et $ΑΕ$ ipsi $ΘΖ$. Ergo ut $ΖΗ$ ad $ΓΗ$ ita $ΑΘ$ ad $ΘΖ$; et parallelae sunt $ΖΗ$, $ΓΗ$ ipsis $ΑΘ$, $ΘΖ$; et triangula $ΑΘΖ$, $ΖΗΓ$ ad unum angulum composita sunt in puncto $Ζ$; quare erunt $ΑΖ$, $ΖΓ$ sibi ipsis in directum (VI. 32.). Secundo, sint parallelogramma $ΚΖΗΓ$, $ΘΖΕΔ$ similia et similiter posita, habeantque angulos $ΚΖΗ$, $ΕΖΘ$ ad verticem oppositos; erunt diametri $ΑΖ$, $ΖΓ$ sibi ipsis in directum. Quoniam enim parallelae sunt $ΑΘ$, $ΘΖ$ ipsis $ΖΗ$, $ΗΓ$, et est $ΑΘ$ ad $ΘΖ$ ut $ΖΗ$ ad $ΗΓ$; erunt $ΑΖ$, $ΖΓ$ in directum (VI. 32.).

Obs. 2. Clavius monet, ut vera sit propositio VI. 33. duo ista, de quibus sermo est, triangula, ita secundum unum

est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita angulus BHF ad angulum EOZ . Sed (V. 15.) ut angulus BHF ad angulum EOZ ita angulus BAF ad angulum EAZ ; duplus enim uterque utriusque; (III. 20.) ut igitur circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita et angulus BHF ad angulum EOZ , et angulus BAF ad angulum EAZ .

In aequalibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus insistent; sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat ostendere.

angulum composita esse debere, ut uterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus alternus sit illi angulo, secundum quem triacula componuntur.

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. 1. In praeparatione demonstrationis loco arcuum FK , KA arcui BF aequalium anguli FHK , KHA angulo BHF aequales poni possunt iuberi. Modum hoc faciendi immediate docet I. 23. Modus prius faciendi nititur IV. 1; III. 28. immediate autem non exponitur; nisi addere velis ut IV. 1. Cor. (Pfleiderer.)

Obs. 2. Si in parte secunda propositionis sectores occurrant semicirculo aequales aut maiores, bisecando illi facile ad sectores minores semicirculo reducentur. Cacterum angulos gibbos etiam per demonstrationem partis primae non excludi posse diximus ad III. 20.

Obs. 3. Ex hac propositione sequentia adhuc derivantur Corollaria, quae sunt apud Clavius, Tacquetum, Baermannum, Pfleidererum, aliosque. 1. Ut est angulus ad centrum ad quatuor angulos rectos, ita arcus isti angulo subiensus

Λέγω ¹⁾ ὅτι καὶ ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν οὕτως ὁ $HΒΓ$ τομεὺς πρὸς τὸν $ΘΕΖ$ τομέα.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $BΓ$, $ΓΚ$, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν $BΓ$, $ΓΚ$ περιφερειῶν τῶν $Ξ$, $Ο$ σημείων, ἐπεξεύχθωσαν καὶ αἱ $BΞ$, $ΞΓ$, $ΓΟ$, $ΟΚ$.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $BΗ$, $ΗΓ$ διπλὴ ταῖς $ΓΗ$, $ΗΚ$, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι καὶ βάσεις ἡ $BΓ$ τῇ $ΓΚ$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἴσον ἐστὶ ²⁾ καὶ τὸ $BΗΓ$ τρίγωνον τῷ $ΗΓΚ$ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $BΓ$ περιφέρεια τῇ $ΓΚ$ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον $ΑΒΓ$ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ ³⁾ ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΞΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΟΚ$ ἐστὶν ἴση· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BΞΓ$ τμήμα τῷ $ΓΟΚ$ τμήματι καὶ εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν $BΓ$, $ΓΚ$. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοία τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $BΞΓ$ τμήμα τῷ $ΓΟΚ$ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ $BΗΓ$ τρίγωνον τῷ $ΗΓΚ$ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ $HΒΓ$ τομεὺς ὅλῳ τῷ $ΗΓΚ$ τομεῖ ἴσος ἐστὶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ $ΗΚΑ$ τομεὺς ἐκκτέρῳ

1) Peyrardus in Praefat. ad Tom. I. ait: „In textu graeco manuscripti 190 vel Cod. a nequaquam agitur de circularum sectoribus in ultima sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quae ad sectores pertinent, et quidem, ut in lect. variant. addit, vocalibus contractis.“ Quum igitur postea ad Cod. a provocet Peyrardus, id saltem de lectione ista ad marginem notata intelligi debet.

2) Pro: ἴσον ἄρα ἐστὶ quod vulgo habent, legendum esse; καὶ ἴσον ἐστὶ recte monet Rob. Simson.

3) Ita leg. Gregorius, cuius lectionem hic restitimus. Peyrardus ex Cod. a habet: καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ἐκ τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ.

ad totam peripheriam, et vice versa. Vel etiam, ut angulus

Dico et ut circumferentia BF ad circumferentiam EZ ita sectorem HBF ad sectorem ΘEZ .

Iungantur enim BF , FK , et sumptis in circumferentiis BF , FK , punctis E , O , iungantur et BE , EF , FO , OK .

Et quoniam duo BH , HF duabus TH , HK aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt; et basis BF basi FK est aequalis et aequale est etiam triangulum BHF triangulo (I. 4.) HFK . Et quoniam aequalis est circumferentia BF circumferentiae FK , et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABF aequalis est (3 Ax.) reliquae circumferentiae quae eundem circulum compleat; quare et angulus BEF angulo FOK est aequalis (III. 27.); simile igitur est (III. Def. 11.) segmentum BEF segmento FOK ; et sunt super aequales rectas BF , FK . Sed similia segmenta circulorum super aequales rectas aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur est segmentum BEF segmento FOK . Est autem et triangulum BHF triangulo HFK aequale; et totus igitur sector HBF toti sectori HFK

ad centrum est ad angulum rectum, itaque isti angulo subtensus ad quadrantem circuli. 2) Diversorum circulorum arcus qui aequales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Et vice versa arcus similes aequales angulos subtendunt, ubi nempe similes duorum circulorum arcus dicuntur ii, qui ad integras circumferentias, quarum partem constituunt, eandem utrimque rationem habent. 3) Duae semidiametri a concentricis peripheriis arcus auferunt similes. 4) Hisce innuitur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt. Si enim, datis tota circumferentia cuius-cunque circuli divisa in certum numerum partium aequalium v. c. 360, qui gradus vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici,

τῶν $ΗΚΓ$, $ΗΓΒ$ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ $ΗΒΓ$, $ΗΓΚ$, $ΗΚΑ$ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΘΕΖ$, $ΘΖΜ$, $ΘΜΝ$ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαυπλασίον ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΒΓ$ περιφερείας, τοσαυταπλασίον ἐστὶ καὶ ὁ $ΗΒΑ$ τομεὺς τοῦ $ΗΒΓ$ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαυπλασίον ἐστὶν ἡ $ΕΝ$ περιφέρεια τῆς $ΕΖ$ περιφερείας, τοσαυταπλασίον ἐστὶ καὶ ὁ $ΘΕΝ$ τομεὺς τοῦ $ΘΕΖ$ τομέως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῇ $ΕΝ$ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ $ΗΒΑ$ τομεὺς τῷ $ΘΕΝ$ τομειῖ καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ $ΗΒΑ$ τομεὺς τοῦ $ΘΕΝ$ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν $ΗΒΓ$, $ΘΕΖ$ τομέων, εἰληπτὰς ἰσάνεις πολλαπλάσια ¹⁾ τῆς μὲν $ΒΓ$ περιφερείας, καὶ τοῦ $ΗΒΓ$ τομέως, ἥτε $ΒΑ$ περιφέρεια καὶ ὁ $ΗΒΑ$ τομεὺς, τῆς δὲ $ΕΖ$ περιφερείας καὶ τοῦ $ΘΕΖ$ τομέως ἰσάνεις πολλαπλάσια ¹⁾, ἥτε $ΕΝ$ περιφέρεια καὶ ὁ $ΘΕΝ$ τομεὺς. Καὶ δίδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ $ΒΑ$ περιφέρεια τῆς $ΕΝ$ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ $ΗΒΑ$ τομεὺς τοῦ $ΘΕΝ$ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΒΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν $ΕΖ$ οὕτως ὁ $ΗΒΓ$ τομεὺς πρὸς τὸν $ΘΕΖ$ τομεῖα.

1) Verbis: ἰσάνεις πολλαπλάσια addenda esse: ἃ ἔτεχε, recte monet Rob. Simson.

quot gradus sint in duobus arcibus circuli alicuius, patet per VI. 35, rationem angulorum, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si unus angulus consideratur, et numerus graduum in arcu ad eum pertinente inventus est:

aequalis est. (2. Ax.) Ex eadem ratione et sector HKA utrique ipsorum HKT , HTB aequalis est; tres igitur sectores HBT , HTK , HKA aequales inter se sunt. Similiter et sectores θEZ , θZM , θMN aequales inter se sunt; quam multiplex igitur est circumferentia BA circumferentiae BT , tam multiplex est et sector HBA sectoris HBT . Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ , tam multiplex est et sector θEN sectoris θEZ ; si igitur aequalis est circumferentia BA circumferentiae, EN aequalis est et sector HBA sectori θEN ; et si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superat et sector HBA sectorem θEN ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem circumferentiis BT , EZ , duobus vero sectoribus HBT , θEZ , sumpta sunt aequae multiplicia ipsius quidem circumferentiae BT et ipsius sectoris HBT , circumferentia BA , et sector HBA , circumferentiae vero EZ et sectoris θEZ aequae multiplicia, circumferentia EN et sector θEN . Et ostensum est si superat circumferentia BA circumferentiam EN , superare et sectorem HBA sectorem θEN ; et si aequalis sit, aequalem esse et si deficit, deficere; est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia BT , ad circumferentiam EZ , ita sector HBT ad sectorem θEZ .

constat ratio anguli ad 4. rectos per nr. I. Sit e gr. numerus graduum, quos arcus habet $= 45$, erit angulus ad eum arcum pertinens: 4 rect. $= 45: 360 = 1: 8$. Caeterum loco 360 partium vel graduum, in quos vulgo circumferentiam quamcunque dividere solent, recentiores Galli eam in 400, adeoque quadrantem in 100 partes aequales dividere instituerunt. 5) Mensura quoque angulorum circulo insistentium, quorum

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα
οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

vertex intra vel extra circulum est, facile habetur per summam
vel differentiam arcuum, quibus insistent. 6) Inaequalium
circulorum arcus sunt in ratione composita ex rationibus an-
gulorum ad centrum et peripheriarum. Denique notandum
est, apud Clavium ad calcem libri VI. plura adhuc addita
esse theoremata et problemata, quorum multa versantur circa

COROLLARIUM.

Et manifestum est (V. 11.) et ut sector ad sectorem ita esse angulum ad angulum.

inventionem superficierum proportionalium. Et sunt quidem illa, ut Clavius ait, scitu non iniucunda, et augeri etiam eorum numerus facile poterat e scriptis veterum et recentiorum Mathematicorum. At memores, nos in Elementis versari, nolimus nimii esse.

EXCURSUS

A D

ELEMENTORUM

L. V. et maxime ad Def. 5. et 7.

A primis inde litterarum in Europa restitutarum temporibus ad nostram usque aetatem haud defuere Mathematici, qui in libro quinto Elementorum Euclidis multa difficilia, obscura, haud satis explicata esse contenderent, quum contra alii hunc ipsum librum pulcherrimum ingenii Euclidis foetum iudicaret. Gravissima autem dubia, quae contra demonstrationes in hoc libro obvias afferunt, ipsa fundamenta, quibus illae nituntur, spectant, definitiones nempe rationum aequalium aut inaequalium, et ad haec fere redeunt. Euclidem aiunt (v. c. Borellus Euclid. restitut. L. III. Ax. VI. et quae ad illud observat) multifariam rationem et proportionem (aut, ut alii dicunt, proportionalitatem) magnitudinum definiuisse duplici modo, primo quidem in libro quinto, et aliter deinde in libro septimo, quod ipsum indicio sit eum sibi ipsi non constitisse, aut forte in primis istis definitionibus ipsum sibi non satisfacisse. Eam autem potissimum definitionem rationum aequalium aut inaequalium, cui integer fere liber quintus superstruatur, nempe 5. Def. V. et 7. Def. V. esse subobscuram, nec naturam rei definitae satis declarare aut distinguere a quavis alia, et notissimas adeo magnitudinum proportionalium proprietates in deduci non posse v. c. propositionem: si quatuor magnitudines, proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessatio excedere quartam. Defectum autem definiti-

onis 5tae et 7mae in eo potissimum latere, quod ea quae in his Definitionibus de magnitudinibus, quae eandem aut non eandem rationem inter se habeant, dicantur, non sint proprietates prima et omnium notissima, quae istis magnitudinibus competat, qualis tamen esse debeat illa, quae definitionem scientificam constituat. Plura alia adhuc carpit in his definitionibus Thom. Simpson, de quibus infra videbimus. Consulto omisimus obiectiones manifesto falsas, a Ramo, iniquissimo illo Euclidis reprehensore aliisque factas, qui male intellecta Euclidis definitione — in quem errorem a Campano (vid. obs. supra ad Def. V. 5.) inducti fuisse videntur — calumniantur Euclidem generalem datorum proportionem definire per specialem aequimultiplicium proportionem. Et fortasse falsa ista Campani expositio causa fuerit, cur multi primo post litteras renatas tempore Euclidem male intelligerent. (Cf. Barrow. Lect. 1666. Lect. VII.) Tacquetus etiam putat (Element. Euclid. Geom. metr. planae ac solidae L. V. ab initio) Euclidis definitionem non naturam aequalium rationum sed affectionem solummodo aliquam explicare. Et illam multiplicium proprietatem adduci vel tanquam signum infallibile rationum aequalium ut, quandocunque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo liceat, aequales eas esse: vel eum illius sensum esse, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit quam eas quarum multiplices modo iam dicto excedant vel excedantur. Si prius, demonstrare debuisse Euclidem, eam affectionem omnibus et solis rationibus aequalibus inesse. Id vero nec Euclidem nec alium quemquam demonstrasse. Si posterius, securos nos quidem esse de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare de absoluta rationum aequalitate. — Tacquetus itaque fundamenti loco sumere videtur, aliunde constare, quid sit rationum aequalitas et demonstrandum esse, cum vulgari isto conceptu de rationum aequalitate necessario coniunctam esse eamquam Euclides affert, proprietatem, et vice versa. Eodem fere redire videntur, quae Galilaei monet (vid. principio della

Quinta Giornata del Galileo dettata ad Evang. Torricelli in Elem. Euclid. Ital. editis a Carlieri Flor. 1769. p. 117.) qui ita habet: Quodnam ingenium adeo felix est, ut certo sciat, quatuor magnitudinum proportionalium aequemultipla semper (Euclideo more) inter se convenire? Aut quis novit, ista aequemultipla non semper convenire, etiamsi istae magnitudines non sint proportionales? — Euclidis itaque illud assertum Theorema potius esse ait, quam definitionem. Et varia haec contra Euclidis theoriam dubia alii alio modo evitare vel refellere studuerunt. Atque ii quidem, qui nulla Euclidis ratione habita diversam ab eo quantitatum proportionalium theoriam dederunt, huc non pertinent. Inter eos autem, qui sua cum Euclide conciliare voluerunt, ii maxime perfunctorie versati esse videntur, qui ut Tacquetus, Toricellius, van Swinden alique plurima ab Euclide demonstrata theoremata v. c. 7. V. 8. V. 9. V. Axiomatum fere loco habuerunt, quippe quae declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere putarent. Aliam deinde rationum aequalium notionem sumentes, demonstrare sategerunt, Euclidis notionem cum ea qua ipsi usi erant, convenire, atque ex ea derivari posse. Perfunctorie diximus eos in hac re versatos esse. Neque enim hoc est demonstrare v. c. duas rationes, quae eidem tertiae aequales sint aequales esse inter se, si tantum affirmaveris, rem ita se habere, nec provocare licet ad Ax. I. 1. quum id, quod de duabus magnitudinibus valet, nequaquam applicari semper possit ad duas, quae inter magnitudines obtinent, rationes aut relationes. Ad demonstrandum autem Euclideam notionem rationum aequalium cum sua notione convenire, plerique ut per se clarum sumunt, datis tribus quantitibus A, B, C, dari semper quartam, ad quam C eandem rationem habeat, quam habet A ad B quod pariter sine demonstratione, qua ratione illa quantitas D inveniri possit, sumere a rigore Euclidi solemni alienum esse videtur. Id tamen, praesente Campano et Clavio, qui caeterum cum Tacqueto in hac re nihil commune habet, sibi permiserunt Tacquetus, Galilaei, Carlieri, alique. Saccherius contra (Euclid. ab omni naevo restituit. p. 111 sqq.) quam maxime instat, illud postu-

latum in Geometria sumere haud licere. Cf. Pfeiderer. de dimens. Circuli P. II. §§. 51. 52. et Rob. Simson in Notis ad V. 18. Plura, praeterea alia notatu dignissima contra Tacqueti similesque aliorum obiectiones habet Barrow in Lection. Cantabrig. habitis 1666. Lect. VII. e quibus haec adhuc afferemus. «Nulla, inquit p. 297 sqq., definitio rei cuiusvis naturam aliter explicat, quam aliquam eius affectionem necessariam et reciprocam, id est, huic nostrae parem, assignando. Qui circulum e radiorum paritate, triangulum e trium rectarum concursu spatium includente etc. definit, quid aliud quam figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicat? Nec dari aut concipi potest natura ab affectionibus eiusmodi necessariis distincta, iisve prior. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentiale est, eam constituit. Unde qui dicit: res talem habens affectionem, eius naturam explicat. Igitur Euclides cum proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, eius naturam, quantum fieri solet et potest, abunde declaravit et explicuit. Caeterum Euclidi reliquisque definitionum auctoribus lex iniusta et impossibilis figitur, scilicet, ut demonstrent, definitionis praedicatum (subiecto convenire: non tenentur, neque possunt id demonstrare, sed gratis assumunt, hoc est, attributo proprium subiecti nomen imponunt ex arbitratu suo. Num incumbit mihi demonstrare, circuli nomen solis pares radios habentibus figuris competere? Minime vero, sed iis omnibus et solis jure meo circuli nomen adsigno. Eodem plane modo pro lubitu suo (quamvis non temere nec imprudenter, at certis de causis iustis illis et idoneis) aequalium rationum nomen attribuit. ὁ στοιχείωτης omnibus et solis dicta proprietate praeditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem istam obtinentibus; unde propterea hoc ipsum rationum aequalium et quantorum proportionalium nomen censendum est iis omnibus et solis congruere. — Unicum est, quod definitionis auctor ostendere tenetur (exemplis scilicet ad sensum claris aut per evidentem discursum) attributum definitionis impossibile nihil aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas. —

Cum igitur persfacile perspicueque probari possit, idque passim praestetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applicet materiae cuius determinatae, dari quanta, quibus conveniat huiusce definitionis hypothesis, nihil amplius est exigendum, eique licet optimo iure quantis iis omnibus et solis proportionalium nomen affigere. — Caeterum quod, hanc proprietatem proportionalibus accidere, theorema esse dicunt, respondendo, quod secundum rem ipsam omnis definitio est theorema, propositio scilicet demonstrabilis ex aliis subiecti definitionibus aut ex aliis reciprocis affectionibus prius attributis subiecto. Vicissim omne theorema poterit in definitionem compingi.“ Simili fere ratione iudicat Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus p. 123.): „Licitum est unicuique definire, prout ipsi libuerit, terminos suae facultatis, dum tamen ex una parte eos nunquam usurpet, nisi iuxta Definitiones iam stabilitas; et ex altera accusari istae non possint de confusione unius termini cum altero“ Cf. idem p. 125. Reapse etiam alii haud negant, iure suo Euclidem definitionem magnitudinum proportionalium eam, quae est Def. V. 5. dare potuisse, at eam tamen intellectu difficilem, et subobscuram, et ab affectione aliqua magnitudinum proportionalium, quae minus obvia sit, petitam esse putant, unde hanc Euclidis definitionem vel explicare, vel pariter ac Tacquetus, firmioribus tamen argumentis nec tot propositionibus Axiomatum loco habitis ex alia faciliore earundem definitione quasi Theorema derivare studuerunt, quo facto demum secure illa uti se posse putarunt. Atque his ipse etiam Clavius annumerandus videtur. Quamvis enim ille asserat, potuisse omnino Euclidem iure suo quantitates proportionales aut non proportionales appellare, ut def. 5 et 7. stabilivit, et quamvis etiam causam, qua permotus Euclides illis definitionibus usus sit, afferat veram omnino ab incommensurabilibus petitam, addit tamen, ex definitionibus istis non videri colligi posse, vere magnitudines, quarum aequemultipla eam conditionem habeant, esse proportionales, vel non proportionales, etiamsi eas solum Euclides velit ita appellare. Itaque ad excusandas Euclidis definitiones haec fere habet. „Si de magnitudinibus saltem rationabilibus quaestio fuisset, potuisset

omnino Euclides magnitudines proportionales eodem modo definire ac VII. 20. Def. numeros proportionales. Dicere nempe poterat: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundae et tertia quartae aequemultiplica est, vel eadem pars, vel eadem partes, vel: cum prima secundam, et tertia quartam aequaliter continet, eandemque insuper illius partem, vel eadem partes. Et simili ratione poterat definire magnitudines non proportionales. At quum irrationales quoque complecti vellet, iam non uti poterat hac definitione, quod in irrationalibus maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel, aut aliquoties, et insuper aliquam eius partem aut partes continere. Iam putat Euclidem, cum omnis proportio rationalis sive magnitudinum commensurabilium sit ut proportio numeri ad numerum, circumspexisse primum aliquid, quod certum sit convenire quibuslibet quatuor numeris, sive magnitudinibus eandem habentibus proportionem, vel non eandem, ut si idem illud convenire demonstretur quatuor magnitudinibus etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illae quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales, quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quaelibet magnitudines commensurabiles, eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstrantur. Primum itaque, sumtis propositionibus libri VII, quae nullo modo ex V. 5. Def. et V. 7 aut omnino libro V. pendent, ostendit: propositis quatuor numeris proportionalibus, sumtisque primi ac tertii aequemultiplicis iuxta quamvis multiplicationem, item secundi et quarti aequemultiplicis iuxta quamcunque pariter multiplicationem; si multipulum primi maius sit multiplo secundi, fore etiam multipulum tertii maius multiplo quarti; et si multipulum primi aequale sit multiplo secundi, fore et multipulum tertii aequale multiplo quarti; si denique multipulum primi minus sit multiplo secundi, fore et multipulum tertii minus multiplo quarti. Quod ita demonstrat. Sint quatuor numeri proportionales a, b, c, d . Quoniam igitur $a:b::c:d$, erit (VII. 13,) permutando, $a:c::b:d$. Iam, si sumtum fuerit ma, mc , erit $ma:mc::b:d$ (VII. 17,) pariter-

que, si sumtum fuerit rb , rd , erit $rb:rd=b:d$, unde ex lemma quod Clavius habet ad VII. 14, erit $ma:mc=rb:rd$, et permutando (VII. 13.) $ma:rb=mc:rd$, unde, si $ma>rb$, erit $mc>rd$, quod ex VII. 20. Def. consequitur i. e. ex vulgari numerorum proportionalium Definitione consequitur ea eorum proprietas, quam Euclides V. 5. Def. exprimit. Deinde similiter demonstrat, si $a:b>c:d$, sumi posse aliqua multipla, ma, mc , et rb, rd , ita ut $ma>rb$, at non $mc>rd$, quod satis prolixè evincit. Itaque ex vulgari numerorum non proportionalium Definitione consequitur ea eorum proprietas, quam Euclides habet 7. Def. V. Pariter deinde vice versa ostendit, e Definitionibus Euclidis 5. et 7. libri V. ad numeros applicatis, consequi vulgares numerorum proportionalium et non proportionalium Definitiones. Addit deinde, in magnitudinibus, quae aliis incommensurabiles sint, et quae ex Def. 5, V. proportionales sint, eam plerumque reperiri proportionem, quae in numeris exhiberi possit, nec unquam hactenus aliquid falsi aut absurdi ex applicatione Def. 5. et 7. ad magnitudines incommensurabiles deductum esse, unde colligit, generaliter recte se habere Definitiones 5, V. et 7. V. Quae tamen argumentatio an satis certa sit, quam maxime dubitamus. Coniectura illa potius, satis forte probabilis, quam demonstratio mathematica fuerit.

Giordano da Bitonto explicatione saltem aliqua opus esse putat, quo melius Definitio 5, V; quae multis obscura, et a principio remoto petita esse visa sit, intelligi possit. Hanc autem explicationem sequentibus Propositionibus Definitioni isti praemittendis, facileque probandis exhiberi posse putat:

Prop. 1. Si duae magnitudines sint multiplae alicuius tertiae, erunt illae aequales, si aequemultiplae illius tertiae fuerint; sin autem non aequemultiplae fuerint, ea, quae tertiam saepius continet, maior erit.

Prop. 2. Vice versa, si duae magnitudines sint multiplae alicuius tertiae, sintque istae magnitudines aequales, erunt illius tertiae aequemultiplae; sin autem fuerint inaequales, maior saepius eandem tertiam continebit, quam minor.

Prop. 3. Si sint duae magnitudines A, B duarum C, D aequemultiplae (v. c. $A=mC, B=mD$), et sint aliae duae

E, F pariter aequemultiplae earundem C, D (v. c. $E=rC$, $F=rD$), erit, si $A \geq E$, etiam $B \geq F$. (i. e. si $mC \geq rC$, erit etiam $mD \geq rD$).

Prop. 4. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D, sitque prima A aequemultipla aut aequesubmultipla secundae B, ac tertia C est quartae D (scilicet, si $A=mB$, et simul $C=mD$)
 vel $A=\frac{1}{m}B$ vel $C=\frac{1}{m}D$
 sumantur primae et tertiae quaecunque aequemultipla F, G, (puta $F=pA$, $G=pC$), et secundae et quartae aequemultipla H, I (v. c. $H=rB$, $I=rD$) erit, prout $F \geq H$, etiam $G \geq I$ (i. e. prout $pA \geq rB$, etiam $pC \geq rD$). Atque haec iam sufficiunt ad probandam Definitionis 5, V. possibilitatem, sive ad ostendendum, ut Barrow ait, attributum definitionis nihil impossibile aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas. Simili deinde ratione possibilitatem Definitionis 8, V. ostendere studet.

Galilaei (in Dialogo supra citato) primum quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales esse dicit, si vel $A=B$, pariterque $C=D$, vel si $A=mB$, et $C=mD$ i. e. si prima secundae B aequemultipla fuerit ac tertia C quartae D, vel, ut postea (ut Definitio irrationales magnitudines quoque comprehendat), at forte minus perspicue dicit, si excessus primae A super secundam B similis sit excessui tertiae C super quartam D. Atque ad hunc casum invertendo reduci posse ait eum, quo prima minor sit secunda, et tertia minor quarta. Hanc deinde Definitionem (quam caeterum irrationales quoque magnitudines clare satis complecti vix putaverim) cum Euclidea convenire ostendere vult hac fere ratione. Facile patere ait, si $A:B=C:D$, fore et $2A:2B=2C:2D$, et generaliter $mA:mB=mC:mD$, pariterque $A:2B=C:2D$, et generaliter $A:pB=C:pD$, et adhuc generalius $mA:pB=mC:pD$, unde ex Definitione Galilaei consequatur, si sit $A:B=C:D$, adeoque et $mA:pB=mC:pD$, fore et, quoties $mA \geq pB$, simul $mC \geq pD$, quae sit conversa Definitionis Euclidae. Haec est Galilaei Prop. 1.

Similiter deinde, postquam quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales esse dixerat, si A aliquanto maior fuerit ea magnitudine $A-E$, quae ita comparata est, ut $A-E : B = C : D$, ex hac Definitione satis prolixè ostendit, consequi Conversam Def. 8, V. nempe tum esse posse aliquando $mA > pB$, quamvis non sit $mC > pD$. Sumatur nempe magnitudinis E tale multipulum mE , ut sit $mE > B$, pariterque sumantur magnitudinum $A-E$, et C aequemultipla $m(A-E)$, mC . Pariter sumatur magnitudinis B tale multipulum pB , quod ex multis magnitudinis B primum maius sit magnitudine $m(A-E)$, ita nempe, ut sit quidem $pB > m(A-E)$, at $(p-1)B < m(A-E)$, vel, quod eodem redit, $m(A-E) > (p-1)B$, pariterque magnitudinis D sumatur aequemultipulum pD . Iam si addantur mE et $m(A-E)$, erit eorum summa, nempe mA (ob $mE > B$, et $m(A-E) > (p-1)B$) semper $> pB$. At, quum $A-E : B = C : D$, erit ex Galil. Prop. 1. quoties $m(A-E) < pB$, etiam $mC < pD$. Sumtum autem est $m(A-E) < pB$: itaque necessario $mC < pD$, quamvis sit $mA > pB$. Itaque, si quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales sunt, semper talia aequemultipla primae et tertiae, pariterque aliqua aequemultipla secundae et quartae inveniri possunt, ut sit quidem multipulum primae maius multiplo secundae, at multipulum tertiae non maius multiplo quartae, quae est Conversa 8. Def. V. seu Galil. Prop. 2.

His praemissis, iam Definit. 5, V. et 7, V. ex suis Definitionibus consequi, ita ostendit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D ita comparatae, ut, quoties $mA > = < pB$, etiam $mC > = < pD$, erit $A : B = C : D$. Si enim non sit $A : B = C : D$, sit e. g. A maior ea magnitudine $A-E$, quae ita comparata est, ut sit $A-E : B = C : D$, poteruntque ex Propositione Galilaei 2 talia aequemultipla mA , mC primae ac tertiae, pariterque aequemultipla pB , pD secundae et quartae inveniri, ut sit quidem $mA > pB$, at non simul $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Atque haec est Galilaei Propos. 3.

Pariter denique Definitionem 7, V. ex suis Definitionibus ita deducit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D

ita comparatae, ut sit quidem $mA > pB$, at non simul $mC > pD$, erit $A:B > C:D$, vel A maior erit ea magnitudine, quae ita comparata est, ut ad B eandem rationem habeat, quam habet C ad D. Si enim A non maior est ista magnitudine, illi aut aequalis, aut minor ea erit. Si illi aequalis sit, erit ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA > pB$, etiam $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Sin autem prima A minor sit ea magnitudine, quae ad secundam eandem rationem habet, quam tertia habet ad quartam, id indicio est, tertiam maiorem esse ea, quae ad quartam eandem habet rationem, quam prima ad secundam. Erit itaque aliquo C—E ita comparata, ut $A:B = C—E:D$, adeoque ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA > = < pB$, erit $m(C—E) > = < pD$. At posuimus $mA > pB$, itaque erit $m(C—E) > pD$, unde multo magis $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Fieri igitur nequit, ut A non maior sit ea magnitudine, quae ad B eandem rationem habet, quam C ad D; maior itaque erit, sive erit $A:B > C:D$, quae est Propositio 4. Galilaei.

Borellus autem, de cuius dubiis contra Euclidis methodum mox videbimus, pariter ab alia magnitudinum proportionalium et non proportionalium Definitione progreditur, distinctis casibus, quibus illae magnitudines vel commensurabiles sunt, vel non. Nempe si quatuor quantitatum prima, secundae, et tertia quartae aequae multiplae fuerint, vel eadem pars, vel eadem partes: quatuor quantitates vocantur proportionales commensurabiles, et proportio (ratio) commensurabilis quantitatis primae ad secundam eadem vel aequalis proportioni (rationi) quantitatis tertiae ad quartam. Sin autem quantitas prima maior (vel minor) fuerit illa quantitate, quae ad secundam eandem rationem commensurabilem habet, quam tertia habet ad quartam: vocatur ratio primae ad secundam maior (vel minor) commensurabili ratione tertiae ad quartam. Si vero quatuor quantitatum antecedentes fuerint incommensurabiles consequentibus, et ratio quantitatis primae ad secundam maior (minor) fuerit, atque ratio quantitatis tertiae ad quartam minor (maior) sit eadem tertia commensurabili ratio-

ne: vocatur ratio primae quantitatis ad secundam maior (minor) illa incommensurabili ratione, quam tertia habet ad quartam. Denique si in quatuor incommensurabilibus quantitatibus ratio primae ad secundam non fuerit maior nec minor ea ratione incommensurabili, quam tertia habet ad quartam: tum ratio incommensurabilis primae ad secundam eadem vocatur rationi tertiae ad quartam, et quatuor istae quantitates vocantur proportionales incommensurabiles. His deinde Definitionibus suam proportionalium theoriā superstruit, et denique ad finem libri Euclidean Definitiones ut theorematum suis deducit. Et ipse etiam Barroviu*s* iudicat, eius methodum in se spectatam admodum pulchram et elegantem esse (III. c. p. 333 et §14.) et, si nulla daretur alia, haberi posse pro sufficiente ac satis absoluta, ac fuisse eum in sua methodo extruenda feliciorē quam in Euclidean diruenda. Displicet tamen ei in Definitionibus Borelli generalis subiecti distractio, et per inferiora circuitus, quum dari possit et ab Euclide exhibeatur rationum aequalium omnigenarum (ut et (inaequalium) proprietates aliqua generalis, ex qua possunt universaliter definiri. Minus placet rationum incommensurabilium negativa Definitio, et praeposterum videtur ex inaequalitate de aequalitate statuere. Omnis porro doctrina prolixior, et demonstrationes plerumque apagogicae anfractuosae videntur. Denique potissimum displicet Barrovio harum definitionum ad speciales materias applicatio. Non enim, ut apud Euclidem v. c. in 1, VI. aut 35, VI. definitionum ope statim innotescit, aut ex iis promte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeo comprehensu facilibus, et per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Ad eas autem, quas contra Euclidis doctrinam Borellus affert obiectiones praeter ea, quae supra habuimus, Barroviu*s* monet (p. 314. sequ. coll. p. 306.) obscuritatem illam, quam Euclidi obiciat, vel in re ipsa positam esse, vel ex interpretum incuria, vel e discentium culpa repetendam esse. Rem ipsam quidem habere omnino aliquid difficultatis propter asymmetriam quantorum, sic ut nemo non

arduum esse fateatur, affectionem aliquam proportionalibus aequè congruamprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum aequalitates complectentem exhibere. Quod et hinc pateat, quod praecclaris viris huic morbo remedium adhibere conmissis hactenus acciderit, ut vel nihil praestiterint omnino sufficiens, aut viis institerint prolixioribus, nec minus impeditis, et implicitis, aut methodos saltem tradiderint culpae cuiquam graviori subditas: caeterum Euclidis verba esse clarissima, nullam in vocabulis amphibologiam, nullum a prolixitate taedium, semperque directissimum adhibere discursum, hinc tantam obscuritatem aut difficultatem subesse non posse, nisi quis arcananti, nescio quam, naturam, omni definitionem ingrediente proportionem priorem, quae certe nulla sit, somnariare velit. Inter pretes omnino rem omnem exemplis illustribus et apposis illustrare debere, nec eos forte ab omni culpa liberari posse. Maxime vero discipulos sibi plerumque deesse. Quum enim definitionis verba clarissima sint, quotusquisque tamen sit, qui iis penitus intelligendis operam navet, qui tantam a suo stomacho patientiam impetret, ut trium lineolarum sensum accurate perpendat? Neque vero (ibid. p. 319.) Euclidem easpropter definitionem suam 5. V. insufficientem iudicasse, quoniam in libro VII. adhibuerit aliam. Sibi minus probata, nedum improbata proferre abhorruisse sane ab Euclidis ingenio. Contra potius, quia septimi libri definitionem omnigenae proportionalitati deprehenderit haud competentem, solis utpote symmetrorum proportionabilibus adaptabilem, hanc vero compererit universis congruam, idcirco, dum hic loci generalem iniret analogiae tractatum, illa reiecta hanc amplexatum esse iure meritoque. Illam vero (20. Def. VII) symmetris proportionalibus applicuisse non tam necessitatis quam commoditatis gratia, quia nonnihil ad vulgarem captum istius specialis materiae respectu faciliior ac simplicior visa fuerit. — Illis, quae Barroviushabet, addi potest, multis editoribus, et praecipue Rob. Simsoni, ut supra diximus, Defin. 5, V. et 8, V. in quibus pariter de rationibus et rationum aequalitate sermo est, serius additamentum esse vi-

deri. — Denique Barrovius addit, quod Borellus criminetur, facillimam Propositionem: si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessario excedere quartam, e Definitione Euclidis derivari non posse, falsum omnino esse, et posse facillime illam e doctrina Euclidis demonstrari. Ipse etiam eiusmodi demonstrationem exhibet indirectam, sed perspicuam. Atque ita omnibus illis priscae aetatis obiectionibus satisfactum esse videri poterat. At recentiori aetate Euclidis theoriam acerrime denuo impugnavit Thom. Simpson. (Elem. of Geometry Lond. 1800.) Is nempe, postquam ipsius Rob. Simsonis, magni illius Euclidis admiratoris et propugnatoris verbis docuerat, verba, *maior, eadem sive aequalis, minor*, de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dici, adeoque non licere Axiomata de magnitudinibus aut aequalibus aut inaequalibus. proposita immediate ad rationes applicare, unde etiam ipse Rob. Simson vulgarem Propos. 10, V. demonstrationem reiiciat, addit, omnem Rob. Simsonis obiectionem eo niti, quod neget, tuto sumi posse, rationem $A:C$ non posse simul maiorem ac minorem esse ratione $A:B$. At ita ex Defin. 7, V. nunquam quemquam scire, posse, an ratio $A:B$ maior aut minor sit ratione $C:D$. Nempe Euclidem dicere quidem, esse $A:B > C:D$, si acciderit unquam, ut $nA > nB$, nec tamen simul $mC > nD$. Verum enim vero, quum inter multiplā tertiae et quartae pro lubitu sumpta quaedam etiam ita comparata esse possint, ut sit $pC > qD$ ut Definitio sibi constet, demonstrandum esse, tum nunquam fieri posse, ut sit simul $pA = < qB$. Hoc enim si fieri posset, esset etiam ex Defn. 7, V. $A:B < C:D$. Usquedum igitur hoc praestetur, quod fieri posse haud negare velit, quamvis difficile ipsi videatur, nullius usus esse Definit. 7, V. et totum Euclidis aedificium theoriae [proportionum fundamento parum valido superstructum videri. Hinc etiam ipse Propositionem 10, V; 13, V et reliqua istis, aut Definitioni 7, V. innixa prorsus omittit. Caeterum sibi persuasum esse dicit, habuisse omnino homines ante Euclidis tempora aliquam rationum et proportionum notionem magis minus distinctam, quam Euclides

aliquantum expoliverit, quo facilius incommensurabilibus adaptari possit, ita vero primam et originariam huius notionis formam adeo immutatam esse, ut aliqua ingenii vi opus sit ad eam in Euclidis Definitionibus agnoscendam. Caeterum multum subtilitatis et acuminis habere hanc Euclidis theoriam, at subobscuram sibi videri, adeoque tantis laudibus efferrī, ac a Rob. Simsone fiat, haud debere.

Gravia haec contra Euclidis theoriam dubia removeri tamen videntur observationibus, quibus Pfeiderer et Nördmark eam stabilire tentarunt. Prior quidem in *Dissertat. Academica: Expositio ac Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. 1. Tübing. 1782* (Pars II. nunquam prodiit), et potissimum in *Dissertatione inserta Promptuarii Mathematici Hindenburg. 7. et 8. fasciculo p. 257. sqq. et 440 sqq.* ad defendendam Euclidis theoriam haec fere habet, quae, quantum fieri potest, brevissime hio sistimus.

§§. 1–8. Qui rationem duarum magnitudinum eiusdem generis A, B inter se commensurabilium indicare volunt, docent, esse magnitudinem A magnitudinis B aut aliquod multipulum, aut aliquam partem, aut aliquas partes, vel esse aut $A = mB$, aut $A = \frac{1}{n}B$, aut $A = \frac{m}{n}B$, ubi $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ exponentis nomine veniunt: sin autem A et B incommensurabiles sint, docent, esse $A > \frac{r}{n}B$ et $A < \frac{r+1}{n}B$, ubi $\frac{r}{n}$ et $\frac{r+1}{n}$ limites exponentis rationis A:B vocant. Unde, si quantitates sunt commensurabiles, erit vel $A = mB$, vel $nA = B$, vel $nA = mB$; sin autem sint incommensurabiles, erit $nA > rB$; at $nA < (r+1)B$. Atque in hac ultima expressione de nulla magnitudinum divisione, sed de multiplicatione tantum i. e. repetita additione sermo est, quae simplicior est divisione. Caeterum Euclides, qui hanc ultimo loco positam expressionem adhibet, pariter ac Archimedes (de sphaera et cylindro Libr. 1. et quadrat. parabol. Praef.) tacite postulat, eiusmodi magnitudinum homogenearum minorem ita multiplicari posse, ut superet maiorem.

§§. 9–12. Duas rationes $A:B$, $C:D$ vulgo aequales esse dicunt, si commensurabiles sint A et B , adeoque etiam C et D , quando eundem utraque ratio exponentem habet, aut, si incommensurabiles sunt, quando utriusque exponentis intra eodem semper terminos cadit, h. e. priore casu, si $A=mB$, debet etiam esse $C=mD$; si $A=\frac{1}{n}B$ (vel, quod eodem redit,

si $nA=B$) debet simul $B=\frac{1}{n}D$, vel $nB=D$; si $A=\frac{m}{n}B$ (vel

$nA=mB$), debet etiam $C=\frac{m}{n}D$, vel $nC=mD$ esse: sin autem incommensurabiles sint, debet pro numero quocunque n ,

pro quo est $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ etiam esse $C > \frac{r}{n}D < \frac{r+1}{n}D$,

vel, ut aliter dicamus: quoties $nA > rB$, at $< (r+1)B$, debet etiam esse $nC > rD$, at $< (r+1)D$, et vice versa. Euclides autem in Definitione V. 5. ad aequalitatem rationum $A:B$ et $C:D$ postulat, ut quoties $nA > mB$, sit simul $nC > mD$.

Euclidis itaque Definitio, quod ad quantitates commensurabiles attinet, eo quidem respectu plus continet quam altera, quam vulgarem vocabimus, quod non tantum vult, si $nA=mB$, debere etiam esse $nC=mD$, sed etiam addit, quoties $nA > mB$, debere etiam esse $nC > mD$. Id vero nihil difficultatis habet, et inservit omnibus una expressione complectendis. Contra autem (§§. 35. 36.) eos quidem casus (quum m , n proprie pro numeris unitate maioribus sumantur) non expresse habet, quibus vel $A=mB$, vel $nA=B$, tacite tamen eos complectitur. Nempe, si $A=mB$, erit simul $pA=pmB$. Ut itaque esse possit $A:B=C:D$, ex Euclidis Definitione simul esse debet $pC=pmD$, adeoque $C=mD$. Pariter, si $nA=B$, erit simul $pnA=pB$. Ut itaque esse possit $A:B=C:D$, erit ex Euclidis Definitione simul $pnC=pD$, adeoque $nC=D$. Quod vero ad quantitates incommensurabiles attinet, ut dici possit, esse $A:B=C:D$, ex Euclidis sententia, quoties $nA > mB$, esse debet simul $nC > mD$. In his autem conditionibus manifesto continentur conditiones Definitionis vulgaris, quibus, si $nA > rB < (r+1)B$, esse debet simul

$nC > rD < (r+1)D$. Nec opus est iam pro multiplo aliquo nA determinare multipla proxime se insequentia rB , $(r+1)B$, quae ad limites rationis determinandos pertinent, atque hactenus simplicior est Euclidea ratio. Semper itaque, quae ex Euclidis Definitione proportionalia sunt, proportionalia sunt etiam ex Definitione vulgari.

Contra vero, quoties ex vulgari Definitione sit $A : B = C : D$, esse etiam aequalitatem rationum ex Euclidea Definitione, auctor, expositis §§. 14–30. antea quibusdam propositionibus facillimis, quae ad doctrinam de multiplis et aequemultiplis pertinent, et quorum pars est apud Euclidem Prop. 1, V; 2, V; 3, V, aliisque, quae hic pro Axiomatibus vel Lemmatibus sumere liceat, v. c. si $a = b$, esse $ma = mb$, et vice versa; contra, si $a > b$, esse $ma > mb$, et vice versa (cf. Axiom. ad initium libri V.) ita fere §§. 31–46. demonstrat. Ut dici possit, esse $A : B = C : D$, si magnitudines sunt commensurabiles, ex vulgari Definitione erit vel $A = mB$, et simul $C = mD$, vel $nA = B$, et simul $nC = D$; vel $mA = nB$ et simul $mC = nD$. Sit (§§. 31. 32.) 1.) $A = mB$, et $C = mD$, erit itaque, si p denotet numerum quemcunque, etiam $pA = pmB$, et $pC = pmD$. Itaque, quoties $pa > < qb$ (q pariter denotante numerum quemcunque) erit etiam $pmB > < qb$, adeoque $pm > < q$, unde et $pmD > < qD$ i. e. $pC > < qD$.

Sit 2.) $nA = B$, $nC = D$, erit etiam $qnA = qB$, et $qnC = qD$. Itaque, quoties $pa > < qb$, etiam $pa > < qnA$, et $p > < qn$, adeoque $pC > < qnC$ i. e. $pC > < qD$.

Denique sit 3.) $nA = mB$, et simul $nC = mD$, erit itaque, quoties $pa > < qb$, etiam $npA > < nqb$. At, quum $nA = mB$, erit pnA vel $npA = pmB$, itaque, quoties $pa > < qb$, erit $pmB > < nqb$, vel $pm > < nq$, adeoque $pmD > < nqD$. At ob $nC = mD$ (hyp.), erit $pnC = pmD$. Itaque, quoties $pa > < qb$, erit $pnC > < nqD$, vel $pC > < qD$. Quoties igitur ex vulgari Definitione duae rationes quantitatum commensurabilium aequales sunt, eadem etiam aequales sunt ex Euclidea Definitione.

Si autem (§§. 33. 34.) quantitates sint incommensurabiles, erit ex vulgari Definitione $A:B=C:D$, si quoties $nA > rB < (r+1)B$, simul etiam fuerit $nC > rD < (r+1)D$. Itaque, quoties $nA > mB$, esse debet $mB = < rB$, adeoque $m = < r$, et $mD = < rD$. Quoties igitur $nA > mB$, erit nC (quod ex hypoth. $> rD$) $> mD$. Quoties autem $nA < nB$, esse debet $mB = > (r+1)B$, adeoque $m = > r+1$, et $mD = > (r+1)D$, adeoque nC (quod ex hypoth. $< (r+1)D$) erit $< mD$. Et, quum hoc casu nunquam esse possit nec $nA = mB$, nec $nC = mD$, pariter quae ex vulgari Definitione proportionales sunt quatuor quantitates incommensurabiles, proportionales erunt etiam ex Definitione Euclidea. Omnibus itaque casibus certi esse possumus, quantitates, quas ex una Definitione proportionales esse dicimus, proportionales esse etiam ex altera Definitione diiudicatas.

Hactenus de aequalitate duarum rationum dictum est. Veniamus nunc (§§. 37–46.) ad rationes inaequales. Et hic quidem (§. 38.) distingui possunt varii casus, prout in utraque ratione quantitates sint commensurabiles; vel in utraque incommensurabiles, vel in una commensurabiles, in altera incommensurabiles. Sint itaque 1. (§. 39.) A et B pariterque C et D commensurabiles, eritque ex vulgari Definitione $A:B > C:D$, si exponens rationis $A:B$ maior est, quam exponens rationis $C:D$ et vicissim. Itaque, si $A = mB$, debet esse $C < mD$; si $A = \frac{1}{n}B$; erit $C < \frac{1}{n}D$; si $A = \frac{m}{n}B$, erit $C < \frac{m}{n}D$; vel, ut aliter dicamus, si $A = mB$, at $C < mB$; si $nA = B$, at $nC < D$; si $nA = mB$, at $nC < mD$, erit $A:B > C:D$, et vicissim. Sint deinde 2. (§. 40.) A et B commensurabiles, C et D incommensurabiles, eritque ex communi Definitione $A:B > C:D$, si $A = mB$ (ubi sumitur $m = > (r+1)$, unus nempe maiorum limitum secundae rationis), at $C > rD < (r+1)D$, adeoque $C < mD$; vel, si $nA = B$, at $nC < D$, vel si $nA = mB$ (sumto iterum $m = > (r+1)$), at $nC > rD < (r+1)D$, adeoque iterum $nC < mD$. Iam hi quidem casus, ubi in utraque,

aut in plore saltem ratione quantitates occurrunt commensurabiles, non expresse memorantur in *Euclidis* Definitione, non tamen excluduntur. Nempe (§. 44, 1) si $A = mB$, et $C < mD$, sit $C + E = mD$. Quoties igitur $C = < E$, erit $2C = < C + E$ i. e. $2C = < mD$, at $2A (= 2mB) > mB$, ubi igitur habemus aequemultipla primae et tertiae $2A$, $2C$, quorum illud maius est multiplo aliquo secundae mB , hoc vero non maius aequemultiplo quartae mD . Sin autem $C > E$, sumi potest aliquod multipulum magnitudinis E v. c. $rE > C$, vel $C < rE$, itaque $rC + C < rC + rE$ i. e. $(r+1)C < r(C+E) < rmD$: contra vero $(r+1)A > rA$ i. e. $> rmB$. Si deinde (§44, 2.) $nA = B$, at $nC < D$, nempe $D = nC + E$, erit, si $C = < E$, adeoque $nC + C < nC + E$, vel $(n+1)C = < D$, $2(n+1)C = < 2D$: at $(n+1)A < nA$ vel $> B$, adeoque $2(n+1)A > 2B$. Sin autem $C > E$, sit $C < rE$, eritque $rnC + C < rnC + rE$ i. e. $(rn+1)C < r(nC+E)$ vel $< rD$: contra autem $rnA + A$ vel $(rn+1)A > rnA$ vel $> rB$. Denique (§. 44, 3.) si $nA = mB$, at $nC < mD$, nempe $mD = ntC + E$, erit, si $C = < E$, $nC + C = < nC + E$ i. e. $< mD$: at $(n+1)A > nA$ i. e. $> mB$. Sin autem $C > E$, et sumatur $C < rE$, erit denuo $rnC + C < rnC + rE$ i. e. $(rn+1)C < r(nC+E)$ i. e. $< rmD$: at $(rn+1)A > rnA$ i. e. $> rmB$. Semper itaque habemus aliqua aequemultipla primae ac tertiae, quorum illud quidem maius est aliquo multiplo secundae, hoc vero non maius aequemultiplo quartae.

Contra vero (§. 45.) si ex *Euclidis* Definitione est $A:B > C:D$, nempe, si $pA > qB$, at $pC = < qD$, sitque $A = mB$, erit $C < mD$. Nam ob $pA > qB$, vel $pmB > qB$, erit et $pm > q$, adeoque $pmD > qD$. At $pC = < qD$, unde semper $pmD > pC$, vel $mD > C$ i. e. $C < mD$.

Pariter, si, reliquis manentibus, sit $nA = B$, erit $nC < D$. Nam ob $nA = B$, erit $qnA = qB$. At ex hypoth. $pA > qB$, itaque $pA > qnA$, et $p > qn$, adeoque $pD > qnD$. At ex hypoth. $pC = < qD$, adeoque $npC = < \left(\begin{smallmatrix} nqD \\ qnD \end{smallmatrix} \right)$

adeoque semper $pnC < pD$, et $nC < D$. Denique, si caeteris manentibus $nA = mB$, adeoque $pnA = pmB$, vel $npA = mpB$,

erit, ob $pA > qB$ (hyp.) $npA > nqB$, adeoque $mpB > nqB$, vel $mp > nq$, adeoque $mpD > nqD$. At $pC = < qD$, adeoque $npC = < nqD$, et $npC < mpD$, et $nC < mD$. Rationes igitur huius generis, quae ex *Euclidis* Definitione inaequales sunt, inaequales etiam sunt ex communi Definitione.

Veniamus iam ad eos casus, quibus prior ratio $A:B$ habet quantitates incommensurabiles, et tum erunt vel C et D commensurabiles (§. 41.), eritque ex *vulgari* Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$, at C vel $= \frac{r}{n}D$ vel $< \frac{r}{n}D$, adeoque, si $nA > rB$, at $nC = < rD$, et vice versa. Denique sint (§. 42.) A et B pariter ac C et D incommensurabiles, eritque ex *vulgari* Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{(r+1)}{n}B$, at tantum $C > \frac{(r-1)}{n}D < \frac{r}{n}D$, vel adeo $C < \frac{(r-1)}{n}D$, itaque iterum, si $nA > rB$, at $nC < rD$ et vice versa.

Ex his omnibus deinde §. 46. concluditur, Definitiones, V.5. et V. 7, continere conditiones et proprietates rationum inter se aequalium, aut quarum una maior est altera, quae in *vulgari* notione insunt, variosque ibi obvios casus, generalissime, et ita, ut ad paucissimos terminos omnia reducta sint.

Ex sola deinde *Euclidean* definitione rationum aequalium aut inaequalium, seposita prorsus *vulgari* notione, deducit *Pfleiderer* §§. 48. 49. 50. sive (§. 48.) magnitudines A , C ipsas cum quibusdam aequemultiplis magnitudinum B , D ; sive magnitudines ipsas B , D cum quibusdam aequemultiplis magnitudinum A , C ; sive denique (§. 49.) quaedam aequemultipla magnitudinum A , C cum quibusdam aliis aequemultipliis magnitudinum B , D comparemus, esse aut 1) quoscunque numeros integros, exclusa unitate, p , q denotent, semper simul $pA \geq qB$, et $pC \geq qD$, aut 2) pro nonnullis numeris integris n, m (iterum exclusa unitate) $nA > mB$, at $nC = < mD$. (Esse quidem etiam potest, ut sub finem §. 50. observatur, $nC > mD$, et $nA = < mB$, at hic casus redit ad

priorem, litteris A et C, B et D inter se permutatis). Hinc efficitur §§. 51–54. omnes casus, qui in comparatione quatuor magnitudinum obtingere possint, aut sub Defin. 5, V. aut sub Def. 7. V. comprehendi, adeoque rationes aequales, maiores, minores eodem modo sibi invicem opponi, quo vulgo magnitudines aequales maiores, minores, ut itaque unum alterum excludat, nec cum illo simul consistere possit. Quod ipsum (§. 55.) *Saccherius* quidem demonstrare studuit, at non prorsus felici successu. Quibus omnibus simul sublata esse dubia *Thom. Simpson* patet.

Praeterea §. 56. alia adhuc ratione idem confirmatur, maxime ope eorum, quae supra ex §§. 44, 3. evicta sunt. Nempe 1) si $A:B=C:D$, adeoque ex Defin. 5, V. semper simul $nA > mB$, et $nC > mD$, adeoque nunquam $nA > mB$ et simul $nC < mD$, nec $nC > mD$, et simul $nA < mB$: tum non esse potest nec $A:B > C:D$, nec $A:B < C:D$ ex Def. 7, V. 2) Contra, si nec $A:B > C:D$, nec $C:D > A:B$, esse debet $A:B=C:D$. Nam si $nA = mA$, non esse potest $nC > mD$, nam tum foret $C:D > A:B$ (Def. 7, V.) contra hypothesin; nec $nC < mD$, namquo tum foret (ex §. 44, 3 et Def. 7, V.) $A:B > C:D$ pariter contra hypothesin; itaque esse debet $A:B=C:D$. Sin autem $nA > mB$, erit etiam $nC > mD$; namque si esse posset $nC < mD$, foret $A:B > C:D$ contra hypothesin. Denique, si $nA < mB$, debet pariter esse $nC < mD$, nam, si foret $nC > mD$, esset $C:D > A:B$ (§. 44, 3. et Def. 7, V.) Itaque tum semper est simul $nA > mB$ et $nC > mD$, adeoque ex Def. 5, V. $A:B=C:D$. 3) Si non est $A:B=C:D$, itaque (Def. 5, V.) non semper simul $nA > mB$, et $nC > mD$, erit pro quibusdam numeris integris n, m aut α) $nC > mD$, dum $nA = mB$: tum vero primo casu est $C:D > A:B$ (Def. 7, V.) altero est $A:B > C:D$ (§. 44, 3. et Def. 7, V.), aut erit β) $nC < mD$, dum $nA > mB$, at tum $A:B > C:D$ (Def. 7, V.) aut erit γ) $nC > mD$, dum $nA < mB$: tum vero $C:D > A:B$ (Def. 7, V. et §. 44, 3.) 4) Si $A:B > C:D$, adeoque (Def. 7, V.) pro quibusdam numeris n, m est $nA > mB$, at $nC < mD$, tum α) non pro numeris quibuscunque n, m simul erit $nA > mB$, et $nC > mD$,

adeoque non erit $A:B=C:D$ (Def. 5, V.) nec β) tum esse potest $A:B < C:D$ aut $C:D > A:B$ i. e. pro nullis numeris integris p, q simul esse potest $pC > qD$, at $pA = < qB$. Nam ob $nA > mB$, at $nC = < mD$ (hyp.) est etiam $pnA > pmB$, at $pnC = < pmD$, aut $pmD = > pnC$. Et si $pC > qD$, est etiam npC vel $pnC > nqD$, adeoque semper $pmD > nqD$, vel $pm > nq$, adeoque et $pmB > nqB$, unde tanto magis $pnA > nqB$, adeoque $pA > qB$. Atque etiam ita *Thom. Simpson* dubia remota sunt.

Denique observat *Pfleiderer* (§§. 57–62) si sit $nA = nB$, et $nC = nD$, fore etiam $A=B$, et $C=D$, adeoque prout $pA < = < qB$, i. e. prout $pA > = < qA$, fore $p > = < q$, adeoque et $pC > = < qC$ i. e. $pC > = < qD$, ac proinde $A:B=C:D$, vel posse Definitionem 5, V. etiam ad aequemultiplica omnium 4. magnitudinem applicari, et nominatim (§. 60. Nr. 1.) si fuerit $A=B$, $C=D$ esse $A:B=C:D$: pariter idem valere de Defin. 7, V. Vice versa etiam, si $A:B=C:D$, esse simul $A > = < B$, et $C > = < D$ (vid. infra Prop.); sin autem $A:B > C:D$, esse debere $C < D$, si $A = < B$; contra vero esse debere $A > B$, si $C = > D$ fuerit.

Nordmarkius autem (in Nov. Act. reg. Societ. Upsal. Vol. VI. Upsal. 1799. Nr. XIII. Lacunae in doctrina Proportionum Euclidea animadversae expletio.) ita in hac re versatur. Postquam obiectionem a *Thom. Simpson* factam contra Defn. 7, V. attulit, fatetur omnino §. 3. illa ipsum probandi nervum huius Definitionis prorsus esse incisum, frustra ad Principium Contradictionis immediate provocari, ex rationibus ab ipso *Rob. Simson* exhibitis patere ait. Omnia autem, §. 4. addit, ex proportionum theoria omittere, quae ad rationes inter se inaequales pertineant, ut *Thom. Simson* fecerit, non sine doctrinae proportionum iactura fieri posse. Adicit praeterea §. 5. multa etiam alia esse, quae nexum inter multiplicium attributa spectent, et adhuc quaeri possint, v. c. si $mA = mB$, at $mC < mD$, an tum $A:B > C:D$. Id vero *Euclidem* omittere. Quin (§. 6.) ipsam etiam Definitionem 5, V. internae possibilitatis demonstrationem desiderare, nec satis de nexu inter aequemultiplicium proprietates cogitasse Geometras, aut certe non satis caute semper loqui. Ita v. c. ipsum *Barrovium* p. 284. haec

habere: » Accidere potest in aliquo casu simultaneus iste defectus, excessus aut aequalitas etiam quantissimè proportionalibus; ast solis proportionalibus universaliter convenit. » Id autem (de aequalitate) falsum esse. Si enim vel semel simul $mA = nB$, et $mC = nD$, necessario, quoties $pA > qB$, esse etiam $pC > qD$. Pariter (§. 7.) si semper simul $mA < nB$, et $mC < nD$, fore etiam semper simul $mA = nB$ et $mC = nD$, unde prior conditio proprie sufficiat scopo Definitionis 5, V. Necesse itaque esse (§. 8.) notarum characteristicarum in Def. 5, V. et 7, V. obviarum partim per mutuum nexum absolutam necessitatem, partim compossibilitatem independentem ab ipsis Definitionibus demonstrare. Quod si non factum sit in Elementis Euclidis, id non ipsius auctoris, sed sine dubio temperis, quo plura deperdita fuerint, culpam esse. Praeterea sibi in animo esse, consensum quoque notionis vel definitionis quam vulgo de Proportionibus in Arithmeticeis afferant, cum Euclidea ex ipsis his Definitionibus ostendere. Praemittit autem §. 10. Lemma 1. supra ad 3, V. ipsis auctoris verbis allatum quod brevitatis causa ita exprimere liceat: Si sint quotcunque magnitudines $A, B, C, D, \dots$ et aliae ipsis numero aequales $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata ipsarum multiplicitas h. e. sit

$$A = m B \text{ et } \gamma = m \delta$$

$$B = n C - \beta = n \gamma$$

$$C = p D - \alpha = p \beta$$

erunt ex aequo etiam aequemultiplices, sive quantiplex est A magnitudinis D , tantiplex erit α magnitudinis δ . Quod quidem Nordmarkius more Geometris solemni demonstrat, ut ad 3, V. vidimus, ex nostra autem expressione statim patet, dum tam $A = mnpD$, quam $\alpha = pnm\delta = mnp\delta$. Atque hoc quidem Lemma ab Euclide praetermissum esse miratur Nordmark. quamvis cum 3, V. arctissimo vinculo coniungatur, et omnia doctrinae proportionum arcana eo referentur, praesertim, quum in Prop. 20. 21. 22. 23. l. V. semper uterque casus quantitatum ordinate et perturbate sumtarum ostensus sit. Huic addit Lemm. 2. quod ita habet: α) Si duae quantitates commensu-

sabiles sint, erit 1) aliqua unius multiplex aequalis alicui alterius multiplici et 2) vice versa. β) Si autem duae magnitudines incommensurabiles sint, 1) non erit aliqua unius multiplex aequalis cuidam alterius multiplici et 2) vice versa. Quorum α , 1. et ope Lemm. 1. etiam α , 2. facile probatur, unde β) 1. 2. apagogice derivantur. His praemissis sequentia habet theorematum, quae primum ordine iunctim afferemus.

Theor. 1. Si vel semel acciderit, ut existente $mA=nB$, sit etiam $mC=nD$, erit $A:B=C:D$.

Theor. 2. Si, quando $mA > nB$, sit etiam semper $mC > nD$, erit $A:B=C:D$.

Theor. 3. Si, quando $mA > nB$, semper etiam sit $mC > nD$, et vicissim, quando $mC > nD$, semper etiam sit $mA > nB$, erit $A:B=C:D$.

Atque haec quidem ad ostendendum mutuum illum, qui inter multiplicium symptomata in Defin. 5, V. intercedit, nexum. Observat Nordmark. addi adhuc posse: si sit $A:B=C:D$, esse etiam $C:D=A:B$. Quamvis enim nimiam identitatis speciem prae se ferant Thesis et Hypothesis (unde etiam omiserit) adsertum tamen non constituere propositionem plane identicam, quae prae evidentia demonstrationem non admittat. Excludi enim semper debere in Propositionibus ita conversis binas adsumto contrarias hypotheses.

Theor. 5. Si acciderit aliquando, ut sit $mA=nB$, sed $mC < nD$, erit $A:B > C:D$.

Theor. 6. Si $A:B > C:D$, sitque $mA < nB$, erit $mC < nD$.

Theor. 7. Si $A:B > C:D$, sitque $mC > nD$, erit $mA > nB$.

Theor. 8. Si $A:B > C:D$, sitque $mC=nD$, erit $mA > nB$.

Atque haec quidem ad Defin. 7, V. pertinent, et nominatim Theor. 7. obiectionem Simpsonianam directe et funditus tollit. Reliqua consensum notionis vulgaris aut Arithmeticae cum Definitionibus *Euclidis* ostendunt.

Theor. 9. Si (ex *Euclidea* Definitione) sit $AF:B=CE:D$, atque B et D in aeque multas partes quotcunque, utrimque seorsum aequales, dividantur, quarum unaquaeque in B sit $=G$, et unaquaeque in D sit $=H$, adeo, ut G et H ipsae B et

D aequaliter metiantur; auferatur porro G ex AF, quoties potest; donec vel nihil, vel se minorem relinquat: dico, toties auferri posse H ex CE, quoties G ex AF; et eodem modo superesse vel nihil, vel aliquam ipsa H minorem (i. e. si quantitates AF, B, CE, D ex *Euclidea* Definitione proportionales sint, proportionales sunt etiam ex *vulgari* notione.)

Theor. 10. Est conversum praecedentis.

Theor. 11. Si fuerit $AF:B > CE:D$ (ex *Euclidea* Definitione); dabuntur aliquae tam parvae magnitudines G et H, quae ipsas B et D aequaliter metiuntur, ut G ablata ex AF quoties potest saepius in hac contineri deprehendatur, quam H in CE, quando nempe H ex CE auferitur, quoties potest. (Aliter: si ex *Euclidea* Definitione $AF:B > CE:D$, erit etiam ex *vulgari* Definitione $AF:B > CE:D$).

Theor. 12. Conversum praecedentis.

Ut autem methodus viri acutissimi uno certe exemplo pateat, liceat adponere, quam Theorematis 1. dedit demonstrationem.

Theor.

Si vel semel acciderit, ut existente $mA = nB$, sit etiam $mC = nD$, erit $A:B = C:D$. (f. 336.)

Dem. Sint E, G illae ipsarum A, C aequae multiplices, et F, H illae aequemultiplices ipsarum B, D, quae faciant $E = F$, et $G = H$: sint autem I, L ipsarum A, C utcumque aequemultiplices, et similiter K, M ipsarum B, D aequemultiplices quaelibet. Hisce positis, quantiplex est M ipsius D, tantiplices sumantur N, O, P, Q ipsarum E, F, G, H: et quantiplex est H ipsius D, tantiplices sumantur R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. Erunt ergo N, O, P, Q, ipsarum E, F, G, H aequemultiplices, et R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. ideoque ob $E = F$, $G = H$, erit $N = O$, $P = Q$. Praeterea erunt (3, V.) N et P ipsarum A et C aequemultiplices, atque O et Q ipsarum B et D: pariterque R et T ipsarum A et C, atque S et U ipsarum B et D. Quia iam Q est ipsius H aequemultiplex ac M ipsius D, atque H ipsius D tantiplex, quantiplex est U ipsius M: erit (Lemm. 1.) Q ipsius D totiplex, quotiplex est U eiusdem D. Ergo

Q et U aequales erunt. Sed quantiplex est Q ipsius D , tantiplex est O ipsius B , et quotiplex est U ipsius D , totiplex est S ipsius B : ergo O et S sunt eiusdem B aequemultiplices, adeoque etiam aequales. Ponatur iam $I > K$; dico esse $L > M$. Quia enim R et S sunt ipsarum I et K aequemultiplices, et $I > K$; erit $R > S$, h. e. $R > O$ h. e. $R > N$. Sed utraque tam R quam N est ipsius A magis multiplex, quam N eiusdem A est. Ergo etiam T est ipsius C multiplicior, quam P eiusdem C est. Unde erit $T > P$, h. e. $T > Q$, seu $T > U$. Sed L et M sunt ipsarum T et U similes (eandem) partes: ergo etiam $L > M$.

Sit iam $I = K$, dico esse $L = M$. Etenim ob $I = K$, est $R = S$, h. e. $R = O$, seu $R = N$. Quocirca R et N sunt ipsius A aequemultiplices; ideoque etiam T et P ipsius C : unde $T = P$, h. e. $T = Q$, seu $T = U$. Ergo etiam $L = M$.

Quodsi denique $I < K$, dico, esse $L < M$. Nam, ob $I < K$, erit $R < S$, h. e. $R < O$, seu $R < N$. Ergo N est ipsius A multiplicior, quam R eiusdem A est: quocirca etiam P est ipsius C multiplicior quam T eiusdem C est. Unde $P > T$, seu $T < P$, h. e. $T = Q$ vel $T < U$. Unde etiam $L < M$.

Quum itaque ostensum sit, consistente $I > = < K$, esse quoque $L > = < M$, h. e. quando $mA > = < nB$, esse simul $mC > = < nD$, erit $A:B = C:D$ q. e. d. (Aliter haec demonstratio ita sisti potest. Si $mA = nB$, et $mC = nD$, erit, quoties $pA > = < qB$, etiam $pC > = < qD$, adeoque (Def. 5, V.) $A:B = C:D$. Nam, si $mA = nB$, et $mC = nD$, erit et $mqA = nqB$, et $mqC = nqD$. Itaque, si $pA > = < qB$, erit $npA > = < \begin{pmatrix} nqB \\ mqA \end{pmatrix}$, adeoque $np > = < mq$, et $npC > = < \begin{pmatrix} mqC \\ nqD \end{pmatrix}$, adeoque $pC > = < qD$. Unde patet, hanc demonstrationem aliis verbis eandem esse, quam *Pfleiderer* dedit §. 31. Nr. 3.

His praemissis, Propositiones, quae ad theoriam Proportionum pertinent, semper eodem rigore e vulgari Proportionalium Definitione atque ex Euclidea derivari poterunt, at demonstrationes e vulgari Definitione petitae, si iusto rigore eas exhibere velis, plerumque longiores sunt. (Cf. *Playfair* ad Def. 5, V.) V. c. Propositio 4, V. cuius demonstrationem Euclideam supra habuimus, e vulgari Definitione ita demon-

strabitur. Si $A:B=C:D$, erit etiam $pA:qB=pC:qD$, p et q denotantibus numeros integros quoscunque, unitate haud exclusa. Nam 1) quando commensurabiles sunt magnitudines A et B , C et D ; ob $A:B=C:D$ (supp.) ex vulgari Definitione simul erunt $A=\frac{r}{n}B$, et $C=\frac{r}{n}D$, adeoque et simul $pA=\frac{pr}{n}B$, et $pC=\frac{pr}{n}D$, et $pA=\frac{pr}{qn}qB$, et $pC=\frac{pr}{qn}qD$: unde ex vulgari Definitione $pA:qB=pC:qD$.

2) Quodsi magnitudines A et B , C et D sunt incommensurabiles; ex vulgari Definitione utriusque rationis Exponentes iisdem continebuntur limitibus, ita ut simul sint $A>\frac{r}{n}B$ et $<\frac{r+1}{n}B$, ac $C>\frac{r}{n}D$ et $<\frac{r+1}{n}D$, vel etiam $pA>\frac{pr}{qn}qB$ et $<\frac{pr+1}{qn}qB$, ac $pC>\frac{pr}{qn}qD$ et $<\frac{pr+1}{qn}qD$, unde etiam rationum $pA:qB$ et $pC:qD$ Exponentes iisdem respective limitibus $\frac{pr}{qn}$ et $\frac{pr+1}{qn}$ continentur (*Pfleiderer's Expos. ac Dilucid. libri V. Elem. p. 18. 19.*)

Post generiores has ad librum Vtum observationes eas iam Propositiones, quas *Rob. Simson* huic libro inseruit, vel addidit, eodem ordine, eademque nota, qua ipse usus est, designatas exhibebimus. Demonstrationes tamen brevitatis causa symbolice sistemus.

Est nempe apud *Rob. Simsonem* post V. 6. haec

Propositio A.

(Haec est ea ipsa Propositio, quam *Borellus* negaverat ex Euclidea theoria demonstrari posse, et quam doctiss. *Pfleiderer*, ut supra notavimus, sponte ex *Euclidis* praeceptis fluere ostendit l. c. §. 61. et in *Expos. et Dilucid. libri V. p. 5. Prop. VI.*)

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior secundâ, erit tertia maior quartâ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minori

Nempe, si $A:B=C:D$, fueritque $A>=<B$, erit (V.Ax. 3.) etiam $2A>=<2B$. Tum vero, ob $A:B=C:D$, ex V. Def. 5. est etiam $2C>=<2D$, adeoque pariter $C>=<D$.

Robert. Simson observat, Propositione hac saepissime uti Geometras, eamque in V. 25. VI. 31. XI. 34. XII. 15. adhiberi, à *Theone* autem eam ex Elementis sublatam esse putat, quoniam satis evidens visa sit ei, aliisque, qui confusaneam et indistinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam substituant loco accuratae ideae, quae ex Definitione V. 5. habeatur. Nullum enim dubium esse, *Eudoxam* vel *Euclidem*, qui hac nihilo difficiliore 7^{ma} sc. et 9^{ta} nam huius Libri demonstratione muniverit, etiam huic in Elementis locum dedisse. *Commandinum* quidem eam ut V. 16. Cor. subiunxisse, quod vero recte *Clavius* reprehendat, quoniam ita saltem ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur. Neque tamen ipsum *Clavium* aliam eius demonstrationem dedisse, sed asseruisse, eam perspicuam esse ex natura proportionum. Quo ipso occasionem dederit *Borello*, *Euclidem* iniuste cavillandi.

Propositio B.

(Vulgo Corollarium V. Prop. 4. ubi vide notata.)

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverse proportionales erunt. Si $A:B=C:D$, erit etiam inverse: $B:A=D:C$. Sumtis enim aequemultiplis quibuscunque primae ac tertiae nA , nC , pariterque aliis aequemultiplis quibuscunque secundae et quartae rB , rD , erunt ex V. Def. 5. quoties $nA>=<rB$, etiam simul $nC>=<rD$, adeoque etiam, quoties $rB>=<nA$, simul $rD>=<nC$, unde ex V. Def. 5. est $B:A=D:C$ (vel $D:C=B:A$.)

(Cor. Hinc consequitur, si $A:C$ sit duplicata ratio rationis $A:B$, fore $C:A$ duplicatam rationis $B:A$. Erit enim (V. Def. 10.) $A:B=B:C$, adeoque ex hac Propositione $C:B=B:A$, unde $C:A$ est ratio duplicata rationis $C:B$, vel rationis $B:A$. Similia ostendentur de triplicata ratione etc.)

Prop. C.

Si prima aequae multiplex fuerit, vel eadem pars (vel, quod addi potest, eadem partes) secundae, atque tertiae quartae: erit prima ad secundam, ut tertia ad quartam: vel ut *Pfleiderer* rem exprimit (*Expos. ac Dilucid. Libr. V. §. 29.*) Magnitudinum A et B aequimultiplicae, vel partes aequae aliquotae, vel et partes aequae aliquotae ad magnitudines ipsas A et B eadem respective habent rationes. Nempe $pA:A=pB:B$:

$\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$; $\frac{pA}{q}:A=\frac{pB}{q}:B$. Nam, cum tam $n(pA)=(np)A$, quam $n(pB)=(np)B$ (V. 3.) erit, quoties $n(pA)> < rA$, simul $n(pB)> < rB$, prout $np> < r$, adeoque ex

V. Def. 5. $pA:A=pB:B$. Sit deinde $\frac{A}{q}=E$, $\frac{B}{q}=F$, adeoque $A=qE$, $B=qF$, erit per modo demonstrata $qE:E=qF:F$, adeoque (Prop. B) $E:qE=F:qF$, i. e. $\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$. Deni-

que, quum sit $\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$, erit etiam (V. 4, Cor. a.)

$\frac{pA}{q}:A=\frac{pB}{q}:B$. Haec Propositio, ut *Robt. Simson* observat,

saepius à Geometris [usurpatur,] et necessaria est in X. 5, et X. 6. Caeterum ex ea evincitur, ut supra è *Pfleidereri* Dissertat. Promtuariorum Mathem. *Hindenburgii* inserta §§. 31. 32.

allatum fuit, quoties ex vulgari Definitione i. e. ex ea, quae habetur in VII. Def. 20. sit $A:B=C:D$, esset etiam aequalitatem rationum ex altera *Euclidea* Definitione, nempe V. Def. 5.

Quod ipsum, ut supra vidimus, *Clavius* in notis post V. Def. 8. in numeris ostendit ope quarundam Propositionum libri VII, sc. V. Def. 5. quatenus numeris congruat, ex ea numerorum proportionalitate, quae in VII. Def. 20. habetur, demonstrari posse.

Prop. D.

(Conversa antecedentis.)

Si fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam, fueritque prima multiplex, vel pars (vel partes) secundae:

erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars (vel eadem partes) quartae.

Si enim $A:B=C:D$, erit etiam $A:qB=C:qD$, $mA:B=mC:D$, et $mA:qB=mC:qD$ (V. 4, et V. 4, Cor. a.), unde ex Prop. A, si $A=qB$, erit et $C=qD$: si $mA=B$, vel $A=\frac{1}{m}B$, erit $mC=D$, vel $C=\frac{1}{m}D$: si $mA=qB$, vel

$A=\frac{q}{m}B$, erit $mC=qD$, seu $C=\frac{q}{m}D$. Observat Rob. Simson,

hanc Propositionem non raro ad alias demonstrationes adhiberi, et necessariam esse ad demonstrandam VI. 9. Videri autem à Theone omissam esse propter rationem ad Prop. A. memoratam.

Prop. E.

quam habet Rob. Simson post V. Prop. 19.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et convertendo proportionales erunt, vel si $A:B=C:D$, sitque $A>B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C>D$, erit $A:A-B=C:C-D$. Nam, quum $A:B=C:D$, erit dividendo (V. 17.) $A-B:B=C-D:D$, et invertendo (Prop. B.) $B:A-B=D:C-D$. Quare componendo (V. 18.) erit $B+A-B:A-B=D+C-D:C-D$ i. e. $A:A-B=C:C-D$.

Observ. Eandem demonstrationem habet Gregorii in nota ad hunc locum. Caeterum haec Propositio, quae cum V. 17. arcto nexu cohaeret, potest etiam pariter ac illa sine ope V. 18. demonstrari (Pfleiderer. Expos. ac Dilucid. Libr. V. p. 23.)

Cor. 1. Si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales sunt, et $A<B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C<D$: erit etiam inverse (Prop. B.) $B:A=D:C$, adeoque ex hac Propositione $B:B-A=D:D-C$.

Cor. 2. Generatim itaque, si duae magnitudines inaequales A et B eandem iuvicem habent rationem, quam aliae duae inaequales C et D: erit et maior priorum duarum ad ipsarum differentiam, uti maior duarum posteriorum ad earundem differentiam; vel etiam inverse (Prop. B.) differentia duarum

priorum ad eundem maiorem erit, ut differentia duarum posteriorum ad ipsarum maiorem. Breviter, si $A:B=C:D$, erit etiam *convertendo* $A:A-B=C:C-D$, seu $A-B:A=C-D:C$, vel $B:B-A=D:D-C$, seu $B-A:B=D-C:D$.

Cor. 3. Generaliusque, si duae magnitudines inaequales eandem invicem habent rationem, quam aliae duae magnitudines inaequales: etiam alterutra priorum erit ad ipsarum differentiam, uti posterior homologa, seu quae priori ordine respondet, est ad differentiam posteriorum; et inverse (V. 17. Cor. 2. et Cor. 2. E. *Pfleiderer*. l. c. p. 25.)

Sub finem libri quinti *Rob. Simson* adhuc quatuor addit Propositiones, quas nos, cum cohaereant cum aliis ad Definitionem rationis compositae pertinentibus, reiecimus in Excursum ad Libr. VI. ubi de ea Definitione agitur. Plures praeterea Propositiones de rationibus inter se diversis *Euclidis* interpretes et commentatores libro quinto subiungere solent. Multas earum habet *Pappus* (Collect. Mathem. Libr. VII. Prop. 3–11.), quas ut *Lemmata Apollonii* libris de sectione rationis et spatii praemisit. Ex *Pappo* deinde *Campanus*, *Commandinus* (qui expresse se eas ex *Collectionibus Pappi* transferre monet, immutato tamen ordine, et quibusdam additis detractivae) *Clavius*, *Tacquetus*, *Barrovius*, *Baermannus* alique has Propositiones huc transtulere, aliasque similes adiecere. Plerique omnes tamen in iis demonstrandis pro Axiomate aut Postulato sumserunt, posse tribus magnitudinibus datis semper aliquam quartam proportionalem, vel duabus datis tertiam proportionalem inveniri, quod ipsum pro Axiomate sumi haud licere supra ad Axiomata libri V. monuimus, ex pro lineis rectis demum in libri VI. Propositionibus 11 et 12. demonstratur. *Hauberus* autem, vir doctissimus nunc Seminarii Schönthalensis Professor in Dissertatione «Propositionum de Rationibus inter se diversis Demonstrationes ex solis libri V. Elementorum Definitionibus ac Propositionibus deductae Tubing. 1793.» sine ope illius Postulari eas demonstravit, ita ut primum Propositiones ad duas vel

plures rationes inter se diversas *universim* pertinentes stabiliret, et deinde ad eos casus progrediretur, quibus omnes omnium rationum termini sunt eiusdem generis. Ita autem rem expedit *Hauberus*. Praemittit §§. 2—4. Lemmata, quorum pars cum Axiomatibus ad Librum V. supra allatis consentit. Nempe §. 2. si $A=B$, erit etiam $mA=mB$, et vice versa: contra, si $A>B$, etiam $mA>mB$, et vice versa. §. 3. Si $A=B$, et $m>n$, erit $mA>nB$. Contra, si $mA>nB$, erit $m>n$, et, si $mA=mB$, erit $m=n$. §. 4. $n.(mA)=m.(nA)$. Deinde sequentes Propositiones, earumque demonstrationes exhibet, quas consentiente amicissimo auctore hic denuo sistimus.

Propositio a. (*Hauberi* Prop. 1. Diss. §. 5. apud *Pappum* VII. 7. apud *Clavium* V. 26.)

Si quatuor magnitudinum A, B, C, D prima A ad secundam B maiorem rationem habet quam tertia C ad quartam D; inverse secunda B ad primam A minorem rationem habebit, quam quarta D ad tertiam C. Breviter, si $A:B>C:D$, erit $B:A<D:C$, seu $D:C>B:A$. Demonstratio. Ob $A:B>C:D$ (supp.) sumi poterunt (V. Def. 7.) mA , mC , et nB , nD ita, ut $mA>nB$, et $mC=<nD$. Quodsi fuerit $mC<nD$, vel $nD>mC$, cum sit $nB<mA$, constabit propositum ex V. Def. 7.

Sin autem sit $mC=nD$: quoniam test $mA>nB$, sit $nB+E=mA$, et 1) $E=>A$, quibus subductis, erit $nB=<(m-1)A$: et, cum $nD=mC$ (supp.) $>(m-1)C$, rursus per V. Def. 7. constat propositum. Iam, si 2) sit $E<A$, fiat aliquod multipulum E, velut $rE>A$ (V. Def. 4.). Tum, quia $nB+E=mA$, erit etiam (V. Ax. 1.) $r(nB+E)$ i. e. (V. 1.) $rnB+rE=rmA$, unde, demtis $rE>A$, erit $rnB<(rm-1)A$. Sed, quia $nD=mC$, erit et $rnD=rmC>(rm-1)C$. Unde ex V. Def. 7. constat propositum.

Cor. (*Hauber.* §. 6. apud *Clavium* Schol. ad V. 26.) Pariter, si $A:B<C:D$, erit etiam $D:C<B:A$, seu $B:A>D:C$. Tum enim est $C:D>A:B$. Omnino autem, si ea ratio, quā altera est maior, ex V. Def. 7. hac ipsa minor dicatur, facile,

quae de maioribus rationibus traduntur, ad minores applicantur, si transpositis rationibus ea, quâ altera minor est, maior ponatur.

Propositio b. (*Hauber* §. 7.)

Si sex magnitudinum A, B, C, D, E, F sit $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$, erit et $A:B > E:F$.

Demonstr. Cum sit $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$, sit ex V. Def. 7. $mA > nB$, $mC = nD$; et $pC > qD$, $pE = qF$, designantibus m, n, p, q semper numeros integros: erit quoque (V. Ax. I.) $pmC = pnD$, $mpC > mqD$, seu $pnD = > pmC$, $pmC > mqD$, hincque $pnD > mqD$, et $pn > mq$, ac proinde etiam $pnB > mqB$: cumque sit $mA > nB$, itaque et $pmA > pnB$, erit à fortiori $pmA > mqB$, seu $mpA > mqB$, et $pA > qB$: et, quia praeterea est $pE = qF$, per V. Def. 7. constat propositum.

Scholion. (*Hauber* §. 8.). Hanc Propositionem quidam editores Elementorum V. 13. pro corollario subiunxerunt, et *Clavius* quidem expresse addens in Schol. ad V. 13. eodem modo eam demonstrari posse, quo V. 13. ipsa demonstrata sit: quod non ita se habet.

Propos. c. (*Hauber* §. 10. *Pfleiderer*. in *Prompt. Mathem.*

Lips. 1798. §. 60. Nr. 2, 3.)

Quatuor magnitudinum A, B, C, D si $A=B$, et $C < D$, vel si $A > B$, et $C = D$, erit $A:B > C:D$, seu inverse (Prop. a.) $B:A < D:C$.

Demonstrationi praemissa est apud *Hauberum* §. 9. ea Propositio, quam supra ex *Prompt. Lips.* §. 60. Nr. 1. attulimus, quamque Lemma ad c. vocabimus, nempe si $A=B$, $C=D$, esse $A:B = C:D$. Tum vero *Hauberus* ita pergit. 1) Si $A=B$, $C < D$, sit $C+E=D$; erit ex modo dictis $A:B = C+E:D$, cumque sit $C+E:D > C:D$ (V. 8.) erit etiam $A:B > C:D$ (V. 13.). 2) Hinc etiam, si $A > B$, $C=D$, seu $D=C$, et $B < A$, erit $D:C > B:A$, seu (Prop. a.) $A:B > C:D$, quae est *Pappi* VII. 10. 3) Si $A > B$, et $C < D$, sit $A=B+E$, $C+F=D$, erit $A:B > A:B+E$ (V. 8.) et $A:B+E=C$

$+F:D$ ex Lemm. ad initium Demonstrationis allato, ac proinde $A:B > C + F:D$ (V. 13.); quoniamque $C + F:D > C:D$ (V. 8.); etiam $A:B > C:D$ (Prop. b.). Est haec Pappi VII. 11.

Prop. d. (Hauber. §. 11. Pfleiderer. in Promt. Mathem.

Lips. 1798. §. 62.)

Si $A:B > C:D$, erit $C < D$, si $A = < B$, et erit $A > B$, si $C = > D$.

Dem. 1) Si $A:B > C:D$, atque $A = < B$, seu $B = > A$, erit $B:B = > A:B$ (V. 7. 8.) quare $B:B > C:D$ (V. 13. et Prop. b.). Sed, cum sit $B:B = D:D$ (Lemm. ad c.), erit $D:D > C:D$ (V. 13.) ac proinde $D > C$, seu $C < D$ (V. 10.).

2) Si $A:B > C:D$, atque $C = > D$, erit $C:D = > D:D$ (V. 7. 8.) hincque $A:B > D:D$ (V. 13. et Prop. b.). Sed quia $D:D = B:B$ (Lemm. ad c.), erit et $A:B > B:B$ (V. 13.) ac proinde $A > B$ (V. 10.).

Prop. e. (Hauber. §. 12.)

Si $A:B > C:D$; erit etiam $mA:mB > C:D$, et $A:B > nC:nD$, et $mA:mB > nC:nD$, ac vicissim, denotantibus m , n numeros integros quoscunque.

Dem. 1) Cum sit $mA:mB = A:B$ (V. 15), si sit $A:B > C:D$, erit etiam $mA:mB > C:D$ (V. 13.); pariterque, si sit $mA:mB > C:D$, etiam $A:B > C:D$ (V. 13.).

2) Sic et, quum sit $nC:nD = C:D$ (V. 15.) si rursus $A:B > C:D$, erit quoque $A:B > nC:nD$ (V. 13.); si vero $A:B > nC:nD$, pariter $A:B > C:D$ (V. 13.).

3) Denique, si $A:B > C:D$, erit $mA:mB > C:D$ per modo demonstrata nr. 1. adeoque et $mA:mB > nC:nD$ per demonstrata nr. 2. Vicissim, si $mA:mB > nC:nD$, erit et $A:B > nC:nD$ (nr. 1.), atque hinc $A:B > C:D$ (nr. 2.)

Cor. 1. (Hauber. §. 13.) Hinc etiam, si $A:B > C:D$, erit

$$\left. \begin{array}{l} A:B \\ \frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B \\ \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B \end{array} \right\} > \frac{q}{n}C:\frac{q}{n}D, \text{ atque } \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B > \left\{ \begin{array}{l} C:D \\ \frac{1}{n}C:\frac{1}{n}D. \end{array} \right.$$

Cor. 2. (Hauber §. 14.). Atque etiam, si fuerit $A:B > C:D$

$$\text{erit } mA:mB > \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}C:\frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}C:\frac{q}{n}D \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B \\ \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B \end{array} \right\} > nC:nD.$$

Prop. f. (Hauber. §. 15.)

Si $A:B > C:D$; erit etiam $mA:B > mC:D$, et $A:nB > C:nD$,
et $mA:nB > mC:nD$, m et n deoptantibus numeros integros
quoscunque.

Dem. Si ob $A:B > C:D$ (supp.) sit $pA > qB$, $pC = < qD$
(V.Def. 7.) etiam (V. Ax. 3.) erit $m.pA > m.qB$; $mpC = < m.qD$,
 $n.pA > n.qB$; $npC = < n.qD$,
 $mnpA > mnqB$; $mnpC = < mnqD$,

seu $p(mA) > m.qB$; $p(mC) = < m.qD$

$n.pA > q.(nB)$; $n.pC = < q(nD)$

$np(mA) > mq(nB)$; $np(mC) = < mq(nD)$,

et cum aequemultiplices magnitudinum pA , pC ; qB , qD
sint ipsarum quoque magnitudinum A , C ; B , D , pariterque
aequemultiplices magnitudinum $p(mA)$, $p(mC)$; $q(nB)$,
 $q(nD)$ sint ipsarum mA , mC , nB , nD aequemultiplices
(V. 3.) per V. Def. 7. constat propositum.

Prop. g. (Hauber. §. 16.)

Vicissim, si $A:B > C:D$

seu si $mA:B > mC:D$,

erit etiam $\frac{A}{m}:\frac{B}{n} > \frac{C}{m}:\frac{D}{n}$

vel $A:nB > C:nD$

et $A:\frac{B}{n} > C:\frac{D}{n}$

vel $mA:nB > mC:nD$

et $\frac{A}{m}:\frac{B}{n} > \frac{C}{m}:\frac{D}{n}$

erit etiam $A:B > C:D$

Dem. Ob $mA:B > mC:D$, $A:nB > C:nD$, $mA:nB > mC:nD$ (supp.), fit (V. Def. 7.) $p(mA) > qB$, $p(mC) = < qD$

$$pA > q(nB), pC = < q(nD)$$

$$p(mA) > q(nB), p(mC) = < q(nD)$$

sive (V. 3.) $(pm)A > qB$, $(pm)C = < qD$

$$pA > (qn)B, pC = < (qn)D$$

$$(pm)A > (qn)B, (pm)C = < (qn)D$$

proinde V. Def. 7. erit $A:B > C:D$.

Cor. 1. (Hauber. §. 17.). Hinc et per Prop. f., si $A:B$

$$> C:D, \text{erit } \frac{p}{m}A : \left\{ \begin{array}{l} B \\ \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{array} \right\} > \frac{p}{m}C : \left\{ \begin{array}{l} D \\ \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \frac{1}{m}A : \left\{ \begin{array}{l} A \\ \frac{1}{n}A \end{array} \right\} : \frac{q}{n}B > \frac{1}{m}C : \left\{ \begin{array}{l} C \\ \frac{1}{n}C \end{array} \right\} : \frac{q}{n}D.$$

Cor. 2. (Hauber §. 18.). Itemque

$$mA : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{array} \right\} > mC : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{array} \right\} \text{ et } \frac{1}{m}A : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}A \\ \frac{p}{m}A \end{array} \right\} : nB > \frac{1}{m}C : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n}C \\ \frac{p}{m}C \end{array} \right\} : nD.$$

Prop. l. (Hauber. §. 19. Pappi Prop. VII. 3. coll. VII. 4. apud Clavius V. 28.)

Si $A:B > C:D$, erit componendo $A+B:B > C+D:D$.

Dem. Sit $mA > nB$, $mC = < nD$ (supp. et V. Def. 7.), et additis mB , mD , erit $mA+mB > nB+mB$, $mC+nD = < nD+mD$, cumque

(V. 1.) sit $mA + mB = m(A+B)$, $mC + mD = m(C+D)$, ac
 (V. 2.), $nB + mB = (n+m)B$, $nD + mD = (n+m)D$, et proinde
 $m(A+B) > (n+m)B$, $m(C+D) = < (n+m)D$, per
 V. Def. 7. constat propositum.

Cor. 1. (Hauber. §. 20.) Aliter haec Propositio sic exprime-
 tur: Si differentia duarum magnitudinum ad earum mino-
 rem in maiori ratione est, quam differentia duarum aliarum
 ad harum minorem; etiam maior priorum ad ipsarum mino-
 rem in maiori ratione erit, quam maior posteriorum ad mino-
 rem. Nam si $A-B:B > C-D:D$, erit $A-B+B:B > C-D+D:D$
 hoc est $A:B > C:D$.

Cor. 2. Hauber. §. 21.) Eodem supposito, quod in
 Prop. h., summa duarum priorum ad earum priorem in mi-
 nori ratione erit, quam summa posteriorum ad tertiam. Nam,
 si $A:B > C:D$, inverse erit (Prop. a.) $B:A < D:C$, adeoque
 $A+B:A < C+D:C$ (Prop. h.), seu $A:A+B < C:C+D$ (Prop. a.)

Prop. i. (Hauber. §. 22. Clav. V. 29.)

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, ac proinde etiam $A > B$ (Prop. d.),
 erit etiam dividendo $A-B:B > C-D:D$, seu inverse $B:A-B <$
 $D:C-D$.

Dem. Sit $mA > nB$, $mC = < nD$ (supp. et V. Def. 7.);
 tum (V. Ax. 3.) quia $D < C$, erit $nD < nC$, proinde ex aequo
 vel à fortiori $mC < nC$, itaque $m < n$, et $nB > mB$, $nD > mD$.
 Iam, demtis mB , mD , erit $mA - mB > nB - mB$, $mC - mD =$
 $< nD - mD$, cumque

per V. 5. $mA - mB = m(A-B)$, $mC - mD = m(C-D)$

ac per V. 6. $nB - mB = (n-m)B$, $nD - mD = (n-m)D$;

erit $m(A-B) > (n-m)B$, $m(C-D) = < (n-m)D$.

Quodsi $n-m$, qui est numerus integer, sit > 1 , propositum
 constat ex V. Def. 7. si vero $n-m=1$, erit $2m(A-B) > 2B$,
 $2m(C-D) = < 2D$, quoniamque aequemultiplices magnitudi-
 num $m(A-B)$, $m(C-D)$ sunt ipsarum $A-B$, $C-D$ aequem-
 multiples (V. 5.), rursus per V. Def. 7. constat propositum.

Coroll. (Hauber. §. 23.) Quod quidem sic quoque exprimi potest: Si summa duarum magnitudinum ad earum alteram maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum alteram; ad eam priorum, quae terminum consequentem rationis maioris constituit, etiam altera ipsarum maiorem rationem habebit, quam altera posteriorum ad eam harum; quae est terminus consequens rationis minoris. Quippe

$$\text{si } A+B:B > C+D:D;$$

$$\text{et } A+B-B:B > C+D-D:D$$

$$\text{i. e. } A:B > C:D$$

Prop. k. (Hauber. §. 24. Pappi VII. 6. Clav. V. 30.).

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, ac proinde (Prop. d.) $A > B$, erit convertendo $A:A-B < C:C-D$, seu inverse $A-B:A > C-D:C$.

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.), erit dividendo (Prop. i.) $A-B:B > C-D:D$, ac proinde $A-B+B:A-B < C-D+D:C-D$ (Prop. h. Cor. 2.) i. e. $A-A-B < C:C-D$, seu

$$A-B:A > C-D:C \text{ (Prop. a.).}$$

Cor. 1. (Hauber. §. 25.) Sive etiam: si summa duarum magnitudinum ad earum unam maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum unam; summa priorum ad earum alteram minorem rationem habebit, quam summa posteriorum ad harum alteram. Etenim, si

$$A+B:B > C+D:D$$

$$\text{erit } A+B:A+B-B < C+D:C+D-D$$

$$\text{i. e. } A+B:A < C+D:C.$$

Quod etiam consequitur ex Prop. i. Cor. et Prop. h. Cor. 2.

Cor. 2. (Hauber. §. 26.) Generatim, si quatuor magnitudinum, quarum prior ad secundam maiorem rationem habet, quam tertia ad quartam, tertia maior fuerit quam quarta, adeoque (Prop. d.) etiam prima maior quam secunda; differentia priorum ad earum alterutram maiorem rationem habebit, quam differentia posteriorum ad harum alterutram, quae nimirum ei, quae in maiori ratione assumpta erat, ordine respondet.

Cor. 3. (Hauber. §. 27.) Pariter, si differentia duarum magnitudinum ad earum minorem habet rationem maiorem, quam differentia duarum aliarum ad harum minorem, priorum quoque differentia ad earum maiorem in maiori ratione erit quam differentia posteriorum ad ipsarum maiorem.

Si enim $A-B:B > C-D:D$

erit $A-B:A-B+B > C-D:C-D+D$ (Prop. h. Cor. 2.)

i. e. $A-B:A > C-D:C$.

Quod etiam consequitur ex Prop. h. Cor. 1. et Prop. k.

Prop. l. (Hauber. §. 28.)

Si $A:B > C:D$, et $B > A$ adeoque (Prop. d.) $D > C$, erit

$\left. \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} : B-A > \left. \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\} : D-C$ et inverse.

Dem. Cum sit $A:B > C:D$ (supp.), seu

$D:C > B:A$ (Prop. a.) et $B > A$ (supp.)

dividendo erit $D-C:C > B-A:A$ (Prop. i.), atque etiam

$D-C:D > B-A:B$ (Prop. k.)

unde pariter (Prop. a.) $A:B-A > C:D-C$

et $B:B-A > D:D-C$.

Cor. 1. (Hauber. §. 29.) Si duarum magnitudinum differentia ad earum maiorem in maiori ratione est, quam duarum aliarum differentia ad harum maiorem; priorum quoque maior ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam posteriorum maior ad harum minorem. Nam, si

$A-B:A > C-D:C$

est $A:A-(A-B) > C:C-(C-D)$ Prop. l.

i. e. $A:B > C:D$.

Cor. 2. (Hauber. §. 30.) Item, eodem supposito, quod in Cor. praeced. pariter differentia priorum ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam differentia posteriorum ad harum minorem. Si enim

$A-B:A > C-D:C$

est $A-B:A-(A-B) > C-D:C-(C-D)$ Prop. l.

i. e. $A-B:B > C-D:D$

quod et consequitur ex Cor. 1. et Prop. i.

Prop. m. (*Hauber. §. 31. Clav. V. 31. cum Schol.*).

Si vel $A:B=D:E$ vel $A:B>D:E$ vel tam $A:B>D:E$
 et $B:C>E:F$ et $B:C=E:F$ quam $B:C>E:F$

ex aequo etiam erit $A:C>D:F$

Dem. 1) Si $A:B=D:E$ et $B:C>E:F$, sit $mB>nC$,
 $mE=<nF$ (V. Def. 7.). Tnm, quia $nC<mB$ erit
 $A:nC>A:mB$ (V. 8.), et, cum ob $A:B=D:E$ (supp.) sit
 $A:mB=D:mE$ (V. 4.), etiam $A:nC>D:mE$ (V. 13.), quoniamque
 $mE=<nF$, erit et $D:mE=<D:nF$ (V. 7. 8.), ac proinde
 $A:nC>D:nF$ (V. 13. et Prop. b.), itaque $A:C>D:F$ (Prop. c.).

2) Si $A:B>D:E$, et $B:C=E:F$, inverse (V. 4. et Prop. a.)
 erit $C:B=F:E$

et $B:A<E:D$

igitur ex aequo per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$ seu inverse
 (Prop. a.) $A:C>D:F$.

3) Si tam $A:B>D:E$, quam $B:C>E:F$, sit $mA>nB$,
 $mD=<nE$, et $pB>qC$, $pE=<qF$ (V. Def. 7.) erit et
 $pmA>pnB$, $pmD=<pnE$, $npB>nqC$, $npE=<nqF$
 seu $pmA>pnB$, et $pnB>nqC$, pariterque
 $pmD=<pnE$, et $pnE=<nqF$ itaque hinc $pmA>nqC$,
 $pmD=<nqF$. Quare, cum aequemultiplices magnitudinum
 mA , mD , qC , qF sint ipsarum etiam A , D , C , F aequemultiplices (V. 3.), propositum per V. Def. 7. constat.

(Hinc sequens deduci potest Corollarium: Rationum inter se diversarum duplicatae (triplicatae etc.) etiam inter se diversae sunt, et maioris quidem maior. Nempe, sit v. gr. $A:B=B:C$, et $P:Q=Q:R$, sitque $A:B>P:Q$, et $mA>nB$, $mP=<nQ$. Iam, quoties $mA>nB$, erit et $mB>nC$, et quoties $mP=<nQ$, erit et $mQ=<nR$ (V. Def. 7.) itaque erant simul $mB>nC$, et $mQ=<nR$, adeoque (V. Def. 7.) $B:C>Q:R$, unde ex hac Propositione m. erit $A:C>P:R$. Cf. observ. ad V. Def. 10. 11. Atque hinc porro facile coll. Cor. ad V. 22. per indirectum demonstrabitur, rationum earundem inter se subduplicatas (subtriplicatas etc.) pariter inter se esse easdem, diversarum diversas.)

Prop. n. (Hauber. §. 32. Clav. V. 32. cum Schol.)

Si vel $A:B=E:F$, vel $A:B>E:F$, vel tam $A:B>E:F$
 et $B:C>D:E$ et $B:C=D:E$ quam $B:C>D:E$

erit etiam ex aequo perturbate $A:C>D:F$.

Dem. 1) Si $A:B=E:F$ et $B:C>D:E$. sit $mB>nC$, $mD=$
 $<nE$ (V. Def. 7.), et erit $nE:mF=>mD:mF$ (V. 7 et 8.)
 et, quia ob $A:B=E:F$ (supp.) etiam $nA:mB=nE:mF$ (V. 4.),
 erit et $nA:mB=>mD:mF$ (V. 11. 13.). Sed, cum sit
 $mB>nC$, est $nA:nC>mD:mF$ (V. 13. et Prop. b.), unde
 $A:C>D:F$ (Prop. e.).

2. Si $A:B>E:F$, et $B:C=D:E$, erit inverse

$C:B=E:D$ (V. Cor. 4. vel Prop. B.)

et $B:A<F:E$ (Prop. a.)

itaque per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$; seu inverse $A:C>$
 $D:F$ (Prop. a.)

3. Si $A:B>E:F$, et $B:C>D:E$, sit $mA>nB$, $mE=<nF$,
 et $pB>qC$, $pD=<qE$ (V. Def. 7.), igitur et $pmA>pnB$,
 npB , seu $pnB>nqC$, pariterque $qmE=<qnF$, mpD seu
 $pmD=<mqE$ seu qmE , atque hinc $pmA>nqC$, $pmD=$
 $<nqF$, et, quoniam magnitudinum mA , mD ; qC , qF aequi-
 multiples ipsarum quoque A , D ; C , F sunt (V. 3.), erit
 per V. Defin. 7. $A:C>D:F$.

Prop. o. (Hauber. §. 33.)

Si $A:B=>C:D$, et $E:B>F:D$, erit $A+E:B>C+F:D$.

Dem. 1) Si $A:B=C:D$ et $E:B>F:D$, sive inverse

$B:E<D:F$ (Prop. a.), ex aequo erit (Prop. m.)

$A:E<C:F$, itaque $A+E:A>C+F:C$ (Cor.

2. Prop. h.) et, cum sit $A:B=C:D$ (supp.), ex aequo etiam
 (Prop. m.) $A+E:B>C+F:D$.

2) Si $A:B>C:D$, et $E:B>F:D$, sit $mA>nB$, $mC=<nD$,
 et $pE>qB$, $pF=<qD$, erit etiam $pmA>pnB$,
 $pmC=<pnD$, et mpE , seu $pmE>mqB$, mpF seu
 $pmF=<mqD$, ergo etiam $pmA+pmE>pnB+mqB$,
 $pmC+pmF=<pnD+mqD$, seu (V. 3., V. 1., V. 2.)

$pm(A+E) > (pn+mq)B$, pariterque
 $pm(C+F) = < (pn+mq)D$, unde et
 $A+E:B > C+F:D$ per V. Def. 7.

Coroll. (Hauber. §. 34.) Sive etiam, si

$$A:B = > C:D$$

$$\text{et } E-A:B > F-C:D$$

$$\text{erit } A+E-A:B > C+F-C:D$$

$$\text{i. e. } E:B > F:D.$$

Prop. p. (Hauber. §. 35.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit $C > F$, si $A > E$, et
 $A < E$, si $C < F$.

Dem. Nam, ob $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$ (supp.)

$$B:E < D:F \text{ (Prop. a.)}$$

erit etiam ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)

$$\text{seu } E:A > F:C \text{ (Prop. a.)}$$

unde per Prop. d. constat propositum.

Prop. q. (Hauber. §. 36.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit

$A-E:B < C-F:D$, si $B > E$, ac proinde (Prop. p.) $C > F$,
 sed $E-A:B > F-C:D$, si $C < F$ $A < E$.

Dem. 1) Si est $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, et $A > E$,
 inverse erit $B:E < D:F$ (Prop. a.)

igitur ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)

et quia $A > E$, $A-E:A < C-F:C$ (Prop. k.)

quoniamque $A:B = < C:D$ (supp.)

etiam ex aequo $A-E:B < C-F:D$ (Prop. m.)

2) Si est $E:B > F:D$, et $A:B = < C:D$, atque $D < F$,
 erit inverse $B:A = > D:C$ (Prop. B et a.)

quare ex aequo $E:A > F:C$ (Prop. m.),

et hinc $E-A:E > F-C:F$ (Prop. i.) quia $C < F$,

cumque sit $E:B > F:D$ (supp.)

ex aequo etiam $D-A:B = F-C:D$ (Prop. m.)

Cor. 1. (Hauber. §. 37.) Quod quidem etiam sic exprimi potest

Si est $A + E : B = < C + F : D$

et $A : B > C : D$

erit et $E : B < F : D$.

Sed, si $A : B = < C : D$

et $A + E : B > C + F : D$

erit et $E : B > F : D$.

Cor. 2. (Hauber. §. 38.) Hinc etiam, si

$A - E : B < C - F : D$

et $A : B = < C : D$

erit $A - (A - E) : B < C - (C - F) : D$ (Prop. q. nr. 1.)

scilicet $E : B < F : D$.

Et, si $A : B > C : D$

atque $A - E : B = < C - F : D$

erit $A - (A - E) : B > C - (C - F) : D$ (Prop. q. nr. 2.)

hoc est $E : B > F : D$.

Prop. r. (Hauber. §. 39.)

Si $A : B > C : D$, tum si $C > D$, ergo et (Prop. d.) $A > B$, erit
 $A + B : A - B < C + D : C - D$; et, si $A < B$, ergo et (Prop. d.)
 $C < D$, erit $A + B : B - A > C + D : D - C$.

Dem. Ob $A : B > C : D$ (supp.)

1) erit $A + B : A < C + D : C$ (Cor. 2. Prop. h.)

et, si $C > D$, convertendo $A : A - B < C : C - D$ (Prop. k.)

quare ex aequo $A + B : A - B < C + D : C - D$ (Prop. m.)

2) erit quoque $A + B : B > C + D : D$ (Prop. h.),

et, si $A < B$, $B : B - A > D : D - C$ (Prop. l.)

unde rursus ex aequo $A + B : B - A > C + D : D - C$ (Prop. n.)

Prop. s. (Hauber. §. 40.)

Vicissim, si $A + B : A - B > C + D : C - D$

erit $A : B < C : D$

Dem. Nam, ob $A+B:A-B < C+D:C-D$ (supp.)

est $A+B+A-B:A+B-(A-B) < C+D+C-D:C+D-(C-D)$ (Prop. r.) hoc est $2A:2B < 2C:2D$

et proinde $A:B < C:D$ (Prop. e.)

Et hactenus quidem de magnitudinibus universim sermo fuit, sive ea, quae ad duas diversas rationes pertinent, inter se eiusdem, sive diversi generis fuerint. Iam vero transit auctor ad magnitudines *homogeneas*.

Prop. t. (Hauber, §. 41.) Conf. Prop. c.

Si quatuor homogenearum magnitudinum A, B, C, D sit $A=C$, et $B < D$, vel, si $A > C$, et $B = < D$, erit

$A:B > C:D$.

Dem. 1) Si $A=C$, et $B > D$,

erit $A:B > A:D$ (V. 8.)

et $A:D = C:D$ (V. 7.)

ac proinde $A:B > C:D$ (V. 13.)

2) Si $A > C$, et $B = < D$,

erit $A:B > C:D$ (V. 8.)

et $C:B = > C:D$ (V. 7. 8.).

itaque et $A:B > C:D$ (V. 13. et Prop. b.)

Prop. u. (Hauber, §. 42.)

Vicissim, si $A:B > C:D$, erit $B < D$, si $A = < C$, et $A < C$, si $B = > D$.

Dem 1) Si $A = < C$, erit

$C:B = > A:B$ (V. 7. 8.)

et cum sit $A:B > C:D$ (supp.)

etiam $C:B > C:D$ (V. 13 et Prop. b.)

proindeque $B < D$ (V. 10.)

2) Si $B = > D$, erit $C:D = > C:B$ (V. 7. 8.)

quare, cum sit $A:B > C:D$ (supp.)

erit et $A:B > C:B$ (V. 13 et Prop. b.)

itaque $A > C$ (V. 10.)

Prop. v. (Hauber. §. 43. Pappi VII. Prop. 5. apud Clav. V. 27.)

Si $A:B > C:D$, erit et alterne $A:C > B:D$, seu inverse $C:A = D:B$.

Dem. Sit $mA > nB$, et $mC \leq nD$ (supp. et V. Def. 7.)

erit igitur $mA:mC > nB:nD$ (Prop. t.)

et hinc $A:C > B:D$ (Prop. e.)

Prop. w. (Hauber. §. 44.)

Si $A:B > C:D$, erit $A+E:C+D \left\{ \begin{array}{l} > B:D \\ < A:C \end{array} \right.$

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.) erit

1) componendo $A+B:B > C+D:D$ (Prop. h.)

et alterne $A+B:C+D > B:D$ (Prop. v.)

2) erit etiam $A+B:A < C+D:C$ (Cor. 2. Prop. h.)

et rursus alterne $A+B:C+D < A:C$ (Prop. v.)

Cor. 1. (Hauber. §. 45. Pappi VII. 8.) Pariter, si $A:B > C:D$,

erit et $A+C:B+D \left\{ \begin{array}{l} > C:D \\ < A:B \end{array} \right.$. Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.)

erit alterne $A:C > B:D$ (Prop. v.) et hinc

$A+C:B+D \left\{ \begin{array}{l} > C:D \\ < A:B \end{array} \right.$ (Prop. w.)

Cor. 2. Inaequalium duarum magnitudinum maior ad minorem in maiori ratione est, quam summa maioris et cuius-cunque tertiae ad summam minoris et eiusdem tertiae.

Nam, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V. 8.), ideoque

$A+C:B+C < A:B$ (Prop. w.), seu $A:B > A+C:B+C$.

Prop. x. (Hauber. §. 47.)

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, itaque (Prop. d.) $A > B$, erit

$A-B:C-D > \left\{ \begin{array}{l} A:C \\ B:D \end{array} \right.$; sed si $B > A$, adeoque (Prop. d.)

$D > C$, erit $B-A:D-C < \left\{ \begin{array}{l} A:C \\ B:D \end{array} \right.$

Dem. Propter $A:B > C:D$ (supp.)

1) si $C > D$, erit $A-B:A > C-D:C$ (Prop. k.)

et $A-B:B > C-D:D$ (Prop. i.)

proinde etiam alterne $A-B:C-D > A:C$

et $A-B:C-D > B:D$ (Prop. v.)

2) si $B > A$, erit $B-A:A < D-C:C$

pariterque $A-A:B < D-C:D$ (Prop. l.)

unde iterum alterne $B-A:D-C < A:C$

et $B-A:D-C < B:D$ (Prop. v.)

Cor. 1. (Hauber. §. 48. Pappi VII, 9. Clav. V. 33.) Si $A:B > C:D$, et fuerit $B > D$, adeoque (Prop. u.) $A > C$, erit $A-C;$

$B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$; sin autem $A < C$, ac proinde (Prop. u.) $B < D$,

erit $C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$.

Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.), erit alterne (Prop. o.)

$A:C > B:D$, atque hinc, si $B > D$, erit

$A-C:B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$; sin autem $A < C$,

$C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$ Prop. x.

Cor. 2. Inaequalium duarum magnitudinum maior ad minorem in minori ratione est, quam excessus maioris super tertiam quamcunque ad excessum minoris super eandem, minorem nimirum ambabus; in maiori vero, quam excessus tertiae cuiusque, quae sit ambabus maior, super maiorem, ad excessum eiusdem super minorem.

Etenim, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V. 8.)

et proinde $A-C:B-C > A:B$, si $C < B$

et $C-A:C-B < A:B$, si $C > A$ (Prop. x.)

sen $A:B \begin{cases} < A-C:B-C \\ > C-A:C-B \end{cases}$

Prop. y. (Hauber. §. 50. Clav. V. 34.)

Si $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$ etc. erit summa omnium priorum $A+C+E+$ etc. ad summam omnium posteriorum $B+D+F+$ etc. in maiori ratione, quam postrema E priorum ad postremam F posteriorum; in minori autem, quam prima A priorum ad primam B posteriorum; et denique in maiori quam summa priorum $C+E+$ etc. omnium excepta prima A ,

ad summam posteriorum $D+F+$ etc. omnium, excepta harum prima B.

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.)

est $A+C:B+D > C:D$ et $< A:B$ (Cor. 1. Prop. v.)

Quoniam autem $C:D > E:F$ (supp.), erit etiam

$A+C:B+D > E:F$ (Prop. b.)

atque hinc $A+C+E:B+D+F > E:F$, sed $< A+C:B+D$ (Cor. 1. Pr. f.) Unde porro ob $A+C:B+D < A:B$ per demou-

strata erit $A+C+E:B+D+F < A:B$ (Prop. b.)

atque hinc $A+C+E:B+D+F > C+E:D+F$

(Cor. 1. Prop.)

Prop. z. (Hauber. §. 51.)

Si $A:B > C:D$, et $B > D$, pariterque $C > D$, et proinde (Prop. d. et Prop. u.) etiam $A > B$, et $A > C$: summa maximae et minimae $A+D$ maior est, quam summa duarum reliquarum $B+C$.

Dem. Ob $A:B > C:D$, et $C > D$ (supp.)

dividendo est $A-B:B > C-D:D$ (Prop. i.)

quoniamque $B > D$ (supp.) etiam $A-B > C-D$ (Prop. u.)

et, addito utrimque $B+D$

$A+D > B+C$.

Prop. a. (Hauber. §. 52. Pappi VII. 16.)

Si sint quatuor numeri vel lineae A, B, C, D, ita, ut $A:B > C:D$; erit productum vel rectangulum extremorum maius, quam productum aut rectangulum mediorum, et vicissim. (Hanc Propositionem, quamvis iam supponat Propositiones aliquas libri VI. vel VII., quae tamen independentes ab ea demonstrantur, propter nexum cum praecedentibus, nolimus à reliquis Hauberianis saeparare, et suo demum loco ponere, cui facile eam restituet lector intelligens).

Dem. 1) Quoniam $A:B > C:D$ (supp.)

et $A:B = A \times C : B \times C$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

erit etiam $A \times C : B \times C > C:D$ (V. 13.)

et quia rursus $C:D = A \times C : A \times D$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

etiam $A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V. 13.)

et hinc $B \times C < A \times D$ (V. 10.) seu

$$A \times D > B \times C.$$

2) Si $A \times D > B \times C$, pariter erit

$$A \times C : B \times C > A \times C : A \times D \text{ (V. 8.)}$$

et ob $A \times C : B \times C = A : B$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

$$A : B > A \times C : A \times D \text{ (V. 13.)} :$$

et, quia rursus $A \times C : A \times D = C : D$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

$$\text{pariter } A : B > C : D \text{ (V. 13.)}$$

Cor. (Hauber. §. 53.). Proinde, si $A : B > B : C$, denotantibus rursus A, B, C numeros, vel lineas,

est $A \times C > B^2$, vel B^q , et vicissim.

EXCURSUS
AD
ELEMENTORUM

L. VI. et maxime ad VI. Def. 5.

§. 1. Haec Definitio in Edictione Oxoniensi ita habet: Λόγος ἐν λόγων συγκρίσθαι, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλά πλασιασθεῖναι ποιῶσι τινά. Editio Basileensis legit: τινάς. Theon seculi post C. N. quarti scriptor in Commentar. in Ptolomaei Almagestum (Πτολεμαίου μεγάλης συνταξως βιβλ. ιγ. Θεωνος Ἀλέξανδρείως ἐῖς τὰ αὐτὰ ἵπομνημάτων βιβλ. ια. Basil. 1538 p. 61. post ambiguum illud et vagum τινά addit πηλικότητα λόγον. Et Scholion Anonymi in Edit. Elementor. Basileensi p. 67. pro τινά substituit λογόν. Eutochius in locum Archimedis (Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα, μετὰ τῶν Ἐντολίου Ἀνακλωνίτου ἵπομνημάτων iisdem verbis hanc Definitionem habet, ut nunc legitur in Edit. Oxon. Plerique Commentatores, ut Clavius, Tartalea, David Gregorius alii-que vocem πηλικότης vertunt: quantitas, vel, ut ipsi vocem: quantitas interpretantur: rationum denominator vel exponens. Wallisius (Opera Mathem. Tom. II. p. 665 sqq.) πηλικότης interpretatur: quantuplicitas, quam exponi ait per exponen-tem rationis. (Pfleiderer. in Schol. in libr. VI. Elem. P. IV, ἐ quibus excerpta sunt, quae in hoc Excursu habentur §. 200. not. 7. 8. 9 coll. §. 202. not. 15.).

§. 2. Verum enim vero, ut Rob. Simson observat, huius Definitionis, laxo, in quod definit, effato (vide Pfleiderer l. c. §. 200.) satis suspectae, in sequentibus apud Eu-

clidem. Archimedes, Apollonium, reliquosque veteres, qui ratione composita saepius utuntur, nullum amplius vestigium invenitur. (Id ipsum etiam, si non verbis, re tamen ipsa fatetur Clavius, nec satis excusare studet Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus-P. 138 sq.)). Ita v. c. in demonstratione VI. 23. in qua primum rationis compositae fit mentio, nihil prorsus occurrit, quod ad hanc Definitionem se referret. Campanus quoque Definitionem VI. 5. non habet.

§. 3. Aliam potius rationis compositae Definitionem, analogam ei, quae V. Def. 10. 11. habetur, aperte supponunt demonstrationes *Euclidis*, in quibus de rationibus compositis sermo est v. c. VI. 23. et VII. 5. Eam à *Campano* iam strictius indicatam in VII. Def. 19. varii recentiores Mathematici, quorum plures nominat *Tflederer*. l. c. §. 201. dedere, uberrime exhibuit *Rob. Simson* in Definitione A, quam V. Defin. 11. subnectit, his verbis:

1. Si fuerint quotamque magnitudinis eiusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione, quam habet prima ad secundam, et ratione secundae ad tertiam, et ea, quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps usque ad ultimam. Ex. gr. sint magnitudines A, B, C, D: prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D; vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

2. Si igitur ratio A ad B eadem sit rationi E ad F; et ratio B ad C eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L: A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus, quae eadem sunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. Idemque intelligitur, quando brevitatis gratia dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

3. Similiter, si ratio M ad N eadem sit rationi A ad B, praecedentibus manentibus: brevitatis gratia dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L, (vel. quod *Playfair* addit, ipso etiam

ratio M ad N composita dicitur ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.)

Eodem sensu caeteri quoque Geometrae veteres Graeci denominationem rationis compositae usurpant, v. c. *Archimedes* Libr. II. Prop. 5 de Sphaera et Cylindro; *Apollonius* Conic. I. Prop. 59. I. 40. III. 54. III. 66. *Ptolemaeus* loco supra citato, aliique.

§. 4. Ex his omnibus non sine ratione concludunt magni nominis Geometrae, imprimis *Rob. Simson* in Not. ad VI. 23. *Pfleiderer*. l. c. §. 204. not. 17. cum quibus consentiunt etiam plures eorum Mathematicorum, qui Definitionem §. 3. allatam etiam ipsi exhibent, et maxime *Scarburgh* (the English *Euclide* Oxf. 1705. Schol. in V. Def. 10. et in Def. 5. vulgarem libri VI.), vulgarem illam §. 1. exhibitam Definitionem non esse ipsius *Euclidis*, sed a *Theone* sine dubio, sublata genuina §. 3. allata, substitutam fuisse eam, quae nunc habetur explicationem, quae tamen minus apta, et, ut *Rob. Simson* ait, puerilis sit, quippe quae eis solummodo rationibus conveniat, quae numeris exhiberi possint. Atque hac ratione omnem de compositione rationum doctrinam absurdam et ἀνεπιτηδεύτην redditam esse. Unde et *Savilius*, qui vulgarem illam Definitionem §. 1. genuinam putarat, professus est, in pulcherrimo Geometriae corpore duas esse labe, nec, quod sciat, plures, in quibus eluendis et emaculandis cum veterum tum recentiorum vigilaverit industria. Priorem nempe Post. 5, I: posteriorem, quae ad compositionem rationum pertineat (*Savillii* Praelect. Lect. VII. p. 140.).

§. 5. Hanc suspicionem, nempe *Theonem* Architectum esse vulgaris Definitionis §. 1. confirmare videntur ea, quae *Theon* in Commentar. ad *Ptolem.* loco supra citato habet. Ibi nempe, postquam *Ptolemaeus* propositionem aliquam de compositione rationum legitimo more eo sensu demonstraverat, quem Definitio §. 3. supponit, *Theon* ulterius, quod ait, illustrationis gratia VI. Propos. 23. adhibet, quae vero argumentationem complicat potius quam explicat, tum vero ex abrupto et sine ulla ad propositum applicatione Definitionem cum *Euclid. Element. P. II.*

vulgari illa exacte consentientem, nisi quod ad finem addit „*πληρότητα λόγου*“ exhibet. Atque hoc primum certum est vestigium Definitionis §. 1. allatae, quam ipsam deinde *Eutocius* seculi post C. N. sexti scriptor in Commentario in *Archimedem* eo, quem §. 1. diximus, loco, ut in *Elementis* occurrentem, designat.

§. 6. Aliud praeterea argumentum, quo vulgarem rationis compositae Definitionem §. 1. allatam suppositiciam esse probari possit, in eo deprehendit *Rob. Simson* p. 374 squ. quod VIII. Prop. 5. nihil aliud continet, quam quod in ipsa illa vulgari Definitione asseritur. Absurdum autem foret, propositionem aliquam in *Elementis* poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Propositionem autem VIII. 5. in *Elementis* locum habere debere, non est dubium, idem enim in ea demonstratur de numeris planis, quod in VI. 23. de parallelogrammis aequiangulis; quare VI. Definitio 5. in *Elementis* locum habere non potest. Quae quum ita sint, liceat vulgarem illam Definitionem §. 1. positam, Definitionem *Theonis*, alteram autem §. 3. exhibitam, V. Definitionibus 10. 11. analogam, adeoque sine dubio magis ex *Euclidis* mente positam, Definitionem *Simsonis* appellare.

§. 7. Vulgarem illam Definitionem minus aptam esse non tantum inde patet, quod rei mere geometricae numeri, atque operationes in numeris usitatae immiscentur, verum etiam quarumlibet rationum datarum exponentes integros fractosque dari, nullo tot rationum numeris ineffabilium censu habito, supponitur. Quando autem numeris integris aut fractis rationes datae exprimuntur, ex quibus alia haud immediate cognita componitur, seu infertur, tum omnino haec eadem est ratio, quam productum multiplicationis terminorum antecedentium rationum habet ad productum ex ipsarum terminis consequentibus, vel, quod eodem redit: denominator, (i. e. numerus integer aut fractus indicans, cui multiplo, aut cui parti, quibusve partibus consequentis aequetur terminus antecedens rationis) rationes primae quantitatis ad ultimam exprimitur denominatoribus mediarum rationum inter se multiplicatis. Nempe,

si $A:B=m:n$ denotantibus m, n, p, q, r, s numeros datos,
 $B:C=p:q$ eosque integros (quia rationes numero integro
 $C:D=r:s$ et fracto, vel duobus frattis expressae facile
 etc.

per V. 15. aequipollentes numeris integris expressas reducuntur): erit $A:C=mp:nq$; $A:D=mpr:nqs$ etc. Necesse est autem ad hanc propositionem, in qua de numeris agitur, demonstrandam, doctrinam de numeris, ut libr. VII. Elementorum (qui nihil de rationum compositione supponit) traditur, adhibere, aut, quae huc pertinent, separatim demonstrare. Quod quum omnino liceat, haec erit demonstratio. (vid. *Pfleiderer*. l. c. §. 207.)

Ob $A:B=m:n=pm:pn$ (V. 15.) $=mp:nq$ (VII. 16.)

et $B:C=p:q=$

$np:nq$ (V. 15.)

est $A:C=mp:nq$ (V. 22.),

Tum, ob $A:C=mp:nq$ (V. 15.) $=mpr:nqr$ (VII. 16.)

et $C:D=r:s=$

$nqr:nqs$ (V. 15.)

fit $A:D=mpr:nqs$ (V. 22.) etc.

$$\text{vel } \frac{A}{D} = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{B \cdot C} = \frac{A \cdot B \cdot C}{B \cdot C \cdot D} = \frac{A \cdot B \cdot C}{B \cdot C \cdot D}.$$

Varios aliorum conatus Definitiones *Theonis* et *Rob. Simsonis* inter se conferendi refert *Pfleiderer*. l. c. not. 17. et ipse plures etiam exhibet.

§. 8. Usus rationis compositae, quum omnia, in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine eius auxilio tum enuntiari, tum demonstrari, in hoc unico consistere ait *Rob. Simson*, quod eius ope periphrases evitentur et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque simul fieri possit. Ex. gr. si Propositio VI. 23. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, id ita fieret: Si duo Parallelogramma aequiangula fuerint, et at, fiat unum latus prioris ad unum posterioris, ita quaevis recta assumpta ad secundam aliquam; et, uti alterum latus prioris ad alterum posterioris, ita secunda illa fiat ad tertiam: erit prius Parallelogrammum ad posterius, ut recta primitus assumpta ad hanc tertiam. Veteres autem cum vidis-

sent, hanc enunciationem posse breviorē reddi, si nomen impositum esset rationi, quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps, si plures fuerint rectae: rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu ex rationibus, quae eadem sunt rationibus laterum, atque ita brevius Propositionem enunciarunt: Si fuerint duo aequiangulara parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei, quae composita est ex rationibus, quae eadem sunt rationibus laterum, vel adhuc brevius: aequiangulara parallelogramma inter se rationem habent eandem ei, quae composita est ex rationibus laterum. Quam itaque ratio composita sit tantum modus loquendi, *Euclides* utitur quoque in Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae verbo: λέγεται, quo verbo sine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae, quam *Theon* aliisque ex *Elementis* sustulit; nam idem verbum retentum est in inepta Definitione rationis compositae, quae nunc in VI. Def. 5. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Dem. VI. 19.: aliquando omittitur ut in Dem. XI. 33. ubi tamen ἔχει sine dubio idem significat, ac ἔχειν λέγεται, et in V. 23. ubi σύγκειται brevitatis causa dicitur pro: σύγκεισθαι λέγεται. Ita fere *Rob. Simson* l. c. *Pfleiderer* tamen l. c. §§. 222. 223. monet, hac denominatione indicari simul, rationem, quae ex aliis componi dicatur, ab his pendere, per eas determinari, sic ut ex his cognitis iuxta normam quandam constantem colligi atque inferri possit. Has porro et omnes, et simplicissimas designari supponi, quas indoles magnitudinum, de quarum ratione ex iis componenda praecipitur, requirat, vel quas datorum problematis, cui enodando earum compositio adhibeatur, conditio suggerat.

§. 9. Ex Definitione *Rob. Simsonis* plures deduci possunt consequentiae, quarum partem habet ipse *Rob. Simson* in Proposit. F, G, H, K. Append. ad Libr. V. Nos eas hic

ita sistemus, ut sunt apud *Pfleiderer*. l. c. Earum prima haec est: Rationes ex rationibus respective inter se iisdem compositae (sensu strictiori Defn. *Simson*. nr. 1.) sunt inter se eadem. (Est haec *Simson*. Propos. F in Append. ad Libr. V. vel, si mavis, V. Prop. 22. et 23. (caeterum antea demonstrandae, ut ab *Euclide* factum est) aliis verbis ita exprimi possunt. *Pfleiderer*. §. 208.)

Sit enim $A : B = D : E$

$B : C = E : F$

erit (V. 22.) $A : C = D : F$

Vel, sit $A : B = E : F$

$B : C = D : E$

erit (V. 22.) $A : C = D : F$.

Et similiter, si fuerint plures rationes in utroque casu.

§. 10. Pariter, si duae pluresve rationes eadem sint totidem aliis; terminisque singularum ac magnitudini datae vel assumtae quarta proportionalis inveniri potest (quae eadem determinatio propositionibus analogis sequentibus est applicanda): latiori etiam sensu Def. *Simson*. nr. 2. sq. eadem erunt inter se rationes, quarum una ex prioribus, altera ex posterioribus componitur.

Quodsi enim $A : B = E : F$

$C : D = G : H$

fiat $A : B = K : L$

et $E : F = N : O$

$C : D = L : M$

$G : H = O : P$,

eruntque ex V. 11. $K : L = N : O$

$L : M = O : P$

adeoque V. 22. $K : M = N : P$

Eodemque modo assertum de pluribus, quam duabus rationibus, compositioneque rationum iuxta Def. *Simson*. nr. 3. accepta demonstratur. (*Rob. Simson*. l. c. Prop. G. *Pfleiderer*. l. c. §. 209.).

In sequentibus rationem ex duabus pluribusve sensu Def. *Simson*. nr. 2. 3. compositam, ubi e re erit, compendii causa designabimus, has serie verticali scriptas uncis includendo.

Sic modo praecedens propositio ita exprimitur:

$$\left(\frac{A:B}{C:D}\right) = \left(\frac{E:F}{G:H}\right), \text{ si } A:B = E:F \\ C:D = G:H.$$

§. 11. Eaedem porro inter se sunt rationes, quarum utraque sensu Def. *Simson*. nr. 2. ex iisdem rationibus componitur. Hoc quippe sensu, si tam ratio A:B, quam altera C:D ex rationibus E:F, G:H componitur, sintque $E:F = K:L$

$$G:H = L:M$$

erit tam $A:B = K:N$ (Def. *Sims*. nr. 2.) quam $C:D = K:M$; igitur $A:B = C:D$ (V. 11.) *Pfleiderer*. l. c. §. 210.

§. 12. Sicut rationis ignotae investigatio compositione eius ex rationibus scopo congruis dirigitur, et, quando haec liquent, absolvitur: ita vicissim indagatio rationis, quam unam esse constat earum, ex quibus ratio data componitur, ad determinandam alteram, alterasve hanc componentes reducitur; quo facto illa *divisione*, quam vocant, *datae rationis compositae* per notam componentem alteram vel ex alteris compositam innotescit. (*Pfleiderer*. l. c. §. 224.).

§. 13. Reductionem divisionis huius ad compositionem docet *Pappi* Propositio 171. Lib. VII. Collect. Mathem. seu Lemm. 7. in Lib. I. Conicor. Apollonii: quo, si A sit ad B in ratione composita ex rationibus C:D, E:F; vicissim rationem C:D ex rationibus A:B ac F:E seu inversa ipsius E:F componi ostendit. Facto enim $E:F = D:H$; erit (Def. *Simson*.) ratio, quae ex rationibus C:D, E:F componitur, h. e. (supp.) $A:B = C:H$.

Quare, cum ita sint $C:H = A:B$

$$H:D = F:E$$

$$\text{est (Def. Sims.) } C:D = \left(\frac{A:B}{F:E}\right)$$

Eodemque modo, ex quocunque rationibus C:D, E:F, G:H etc. componatur ratio A:B; caeteris E:F, G:H etc. ad unam P:Q ex iis compositam reductis, demonstratur, rationem C:D componi ex rationibus A:B et Q:P; seu C esse ad D in ratione composita ex directa A ad B et inversa rationis P ad Q. (*Pfleiderer*. l. c. §. 225.)

§. 14. Hinc eadem etiam inter se sunt rationes, quae rationibus iisdem inter se $A:B$, $C:D$ per alias $E:F$, $G:H$ pariter inter se eadem divisio obtinentur. Quippe ob $E:F=G:H$ (supp.) est etiam $F:E=H:G$ (Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.). Quare, cum quoque sit $A:B=C:D$, ratio ex $A:B$ ac $F:E$ composita eadem est rationi compositae ex $C:D$ et $H:G$ (§. 10.) h. e. (§. 13.) quae rationem $A:B$ per alteram $E:F$ dividendo prodit, ratio eadem est rationi divisione rationis $C:D$ per alteram $G:H$ oriandae. (*Pfleiderer. l. c. §. 226.*)

§. 15. Idem in Propositionibus H, K Element Libr. V. annexis *Rob. Simson* uberius sic enunciat: „Si ratio ex quibusdam rationibus“ (sive strictiori, sive latiori in Def. *Simson* exposito sensu) „composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositae: erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositae.“ (*Pfleiderer. l. c. §. 227.*)

§. 16. Quando $A:B=\left(\frac{C:D}{E:F}\right)$, pariter est $A:B=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$.

Factis enim $\frac{C:D=K:L}{E:F=L:M}$, est $A:B=\left(\frac{K:L}{L:M}\right)=K:M$ (V. 22.)

at ob $K:M$ quoque $=\left(\frac{L:M}{K:L}\right)$ (V. 23.) $=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$;

pariter est $A:B=\left(\frac{E:F}{C:D}\right)$. Similiterque rationem

ex pluribus quam duabus compositam, mutato horum ordine laud mutari ostenditur (*Pfleiderer. §. 228.*)

§. 17. Inverse, quando $A:B=\left(\frac{C:D}{E:F}\right)$, erit $B:A=\left(\frac{D:C}{F:E}\right)$.

Factis enim $\frac{C:D=K:L}{E:F=L:M}$ est $A:B=\left(\frac{K:L}{L:M}\right)=K:M$,

et $B:A=M:K$ (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) $= \left(\frac{L:K}{M:L} \right)$ (V. 23.)
 $= \left(\frac{D:C}{F:E} \right)$ (Prop. B in Exc. ad Libr. V.). Quod rursus si-
 militer ad rationem ex pluribus quam duabus compositam ex-
 tenditur (*Pfleiderer. §. 229.*)

§. 18. Si A, B, C, D sunt magnitudines homogeneae, est
 $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = \left(\frac{A:D}{C:B} \right)$. Factis enim $A:B=K:L$; $A:D=K:O$
 $C:D=L:M$; $C:B=O:P$
 ut sint $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = K:M$, $\left(\frac{A:D}{C:B} \right) = K:P$ (Def. Simson.)

ob $A:B=K:L$

$B:C=P:O$. (Prop. B in Exc. ad Libr. V.)

$C:D=L:M$

est $A:D$ seu (constr.) $K:O = \left(\frac{K:L}{P:O} \right)$,

unde §. 13. $\left(\frac{K:O}{O:P} \right) = \left(\frac{K:L}{L:M} \right)$

h. e. (V. 22.) $K:P=K:M$, ideoque $\left(\frac{A:B}{C:D} \right) = \left(\frac{A:D}{C:B} \right)$.
 (*Pfleiderer. §. 230.*)

§. 19. Si $A:B = \left(\frac{C:D}{E:F} \right)$, atque $E:F=D:I$, est

$A:B = \left(\frac{C:I}{G:H} \right)$. Facto enim $G:H=I:K$, fit

$A:B = \left(\frac{B:D}{D:I} \right) (\S. 10.) = C:K$ (Def. Sims.) $= \left(\frac{C:I}{I:K} \right)$

(Def. Sims.) $= \left(\frac{C:I}{G:H} \right)$ §. 10. (*Pfleiderer. §. 231.*)

§. 20. Sit A ad B in ratione composita ex rationibus E:F

et $G:H$; atque $B:C=I:K$: erit A ad C in ratione composita ex rationibus $E:F$, $G:H$, $I:K$. Factis enim

$$P:Q=E:F \quad P:R=\left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \end{array}\right)$$

$$Q:R=G:H; \text{ unde}$$

$$R:S=I:K \quad P:S=\left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \\ I:K \end{array}\right)$$

erunt $A:B=P:R$ (§. 21.)

$$B:C=R:S \text{ (V. 11.)}$$

$$A:C=P:S \text{ (V. 22.)} = \left(\begin{array}{c} E:F \\ G:H \\ I:K \end{array}\right). \text{ Idemque simi-}$$

liter et ad plures magnitudines A , B , C , D etc. et ad rationes ipsarum rationibus mutuis aequipollentes simplices compositasve quaslibet extenditur (*Pfleiderer*. §. 232.)

§. 21. Si $A:B=\left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \end{array}\right)$, et A , B , C , D , E , F sunt magnitudines homogeneae: ob $B:C=B:C$

$$B:E=B:E$$

$$\text{funt } A:C=\left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \\ B:C \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} B:C \\ C:D \\ E:F \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} B:D \\ E:F \end{array}\right)$$

§. 20.

§. 16.

§. 19.

§. 18.

$$A:E=\left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \\ B:E \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} C:D \\ B:E \\ E:F \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} C:D \\ B:F \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} B:D \\ C:F \end{array}\right)$$

(*Castillon* sur une nouvelle propriété des sections coniques in *Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin. Année 1776. p. 298.*) Ceterae,

quae ibidem ex $A:B=\left(\begin{array}{c} C:D \\ E:F \end{array}\right)$ deducuntur rationes, ex

§. 13. 17. 18. et nunc §. 21 ostensis consequuntur. (*Pfleiderer*. §. 233.)

§. 22. Ratio composita ex eiusdem rationis directa et inversa est ratio aequalitatis, seu aequalium. Quippe, si

$$A:B=E:F$$

$$\text{et } B:C=F:E$$

fit $A:C=E:E$ (V. 22.), proinde $A=C$ (Excurs. ad Libr. V. (Prop. A.) (Pfleiderer. §. 234.)

§. 23. Compositionem vero plurium rationum ingredientes eiusdem rationis directa et inversa se mutuo destruunt

$$\text{ita ut sint } \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = C:D, \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

$$\text{Factis enim } A:B=K:L$$

$$C:D=L:M$$

$$E:F=M:N$$

$$\text{ideoque (Def. Sims.) } \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = K:M$$

$$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \end{pmatrix} = K:N$$

ob $B:A=L:K$ (const. et Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.)

$$\text{fiunt } \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:M \\ L:K \end{pmatrix} = L:M = C:D \text{ (Constr. et V. 11.)}$$

§. 20.

$$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:N \\ L:K \end{pmatrix} = L:N = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix} \text{ (Constr. et §. 11.)}$$

(Pfleiderer. §. 235.)

§. 24. Hinc, si $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, atque $C:D=G:H$;

pariter erit $A:B=E:F$.

$$\text{Quippe, ob } \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$$

$$\text{est } A:B = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \\ D:C \end{pmatrix} \text{ §. 13.} = \begin{pmatrix} E:F \\ C:D \\ D:C \end{pmatrix} \text{ (supp. et §. 10.)}$$

$$=E:F \text{ (§. 23.) (Pfleiderer. §. 236.)}$$

§. 25. Viciſſim ſi ratio, quæ ex duabus componitur, eſt ratio æqualitatis: rationum, ex quibus componitur, una eſt alterius in verſa.

Nempe, ſi $\frac{A:B=E:F}{B:C=G:H}$ igitur $A:C=\left(\frac{E:F}{G:H}\right)$:

et $A=C$, ideoque $A:B=C:B$ (V. 7.): ſit $E:F=H:G$ (ſupp. et Prop. B in Exc. ad Libr. V. et V. 11.) (Pfleiderer. §. 237.)

§. 26. Pariter, ſi in Compoſitione trium pluriumve rationum duæ ſe mutuo deſtruunt, harum una alterius eſt in verſa.

Quippe ſi $\left(\frac{A:B}{C:D}\right)=A:B$, et $\frac{A:B=K:L}{C:D=L:M}$
 $\frac{E:F}{G:H}$ $E:F=M:N$

eſt (Def. Sims.) $K:N=K:L$, ideoque (V. 9.) $N=L$, et (V. 7.) $L:M=N:M$; proinde $C:D=F:E$ (Prop. B in Excurs. ad Libr. V. et V. 11.)

Pariter, ſi $\left(\frac{A:B}{C:D}\right)=\left(\frac{A:B}{C:D}\right)$; et $\frac{A:B=K:L}{C:D=L:M}$
 $\frac{E:F}{G:H}$ $E:F=M:N$
 $G:H=N:O$

eſt (Def. Sims.) $K:O=K:M$

et (V. 9.) $O=M$

et (V. 7.) $M:N=O:N$; itaque $E:F=H:G$.

Et ſic ulterius. (Pfleiderer. §. 238.).

BONNAE
TYPIS BÜSCHLERIANIS
1825.

IN TOMO I.

- p. XI. v. 24 Boermann l. Boermann
 — XVI v. 7 Ptolomaeo l. Ptolemaeo
 — 5 v. 27 $\dot{\iota}\varphi'$ l. $\dot{\epsilon}\varphi'$, eodemque modo p. 6. v. 32.
 — 13 v. 32 circuli, quadrati l. circuli quadrati
 — 24 v. 11 o l. et
 — 27 v. 34 et l. ac
 — 28 v. 35 quoque l. quodquo
 — 30 v. ult. §. l. §. 28
 — 32 v. 29 ad oculos l. ob oculos
 — 56 v. 29 prope l. pro.
 — 72 v. 24 Coila l. Cod. a
 — 73 v. ult. duobus l. quatuor
 — 105 v. 26 scalarum l. scalenum
 — 120 v. 20 et 21 $(n-2) \times 2R$ l. $(n-2) \times 2R$
 — 124 v. 4 ABA l. AGA
 — 150 v. 23 et 25 hypotenusa l. hypotenusa
 — 168 v. 21 $\beta\omega\theta\eta\tau\epsilon\dot{\iota}\nu$ l. $\beta\omega\theta\upsilon\tau\epsilon\dot{\iota}\nu$
 — 173 v. 10 habent l. habent ZB
 — ibid. v. penult. Quadrata l. quadrata
 — 180 v. 23 ostendet l. ostendent
 — 181 v. ult. et p. 182 v. 20 parallelogrammum l. parallelogrammorum.
 — 297 v. antepen. recat l. recta
 — 200 v. 30 $\frac{AP-PP}{2}$ l. $\frac{PB-AP}{2}$
 — 201 v. 15 $AP=GP+PI=PI+A=\frac{AP-PP}{2}$
 l. $AP=PI+IA=PI-\frac{AP-PP}{2}$
 — 202 v. 25 $AA-BA$ l. $\frac{AA-BA}{2}$
 — 206 v. 5 EO l. NEO
 — 208 v. 24 II. ad 10. Obs. 8. l. ad II. 10. Obs. 10
 — 214 v. 21 $\tau\epsilon\tau\alpha\rho\acute{\omega}\nu\omicron\nu$ l. $\tau\epsilon\tau\alpha\rho\acute{\omega}\nu\omicron\nu$

- P. 292 v. 6 *a fine* ad l. at
 — 293 v. 13 *a fine* es, l. est
 — ibid. v. 8 *a fine* Euclidea et l. Euclidean
 — ibid. v. 2 *a fine* a l. at
 — 294 v. 9 *to* l. τῷ
 — 298 v. 12 *a fine*: trianguli l. rectanguli
 — 301 v. 10 *a fine* verba: sunt EI, IZ, et AE deleantur.
-